

بسمه تعالی

- تمرین سری اول درس ساختمان داده ها و مبانی الگوریتم ها
 - پاسخ تمرین در قالب یک فایل pdf تایپ شده یا دست نویس اسکن شده (مرتب و خوانا) و با نام StudentNumber_HW1.pdf آپلود شود.
 - مهلت ارسال تمرین تا ساعت 11:59 روز سه شنبه مورخ 29 آبان 1399 می باشد.
 - در صورتی که درمورد این تمرین سوال یا ابهامی داشتید با ایمیل dsfall1399@gmail.com با تدریس یاران در ارتباط باشید. لطفا برای ایمیل زدن فرمت زیر را در قسمت subject رعایت کنید:
برای سوال از مباحث مختلف:
«سوال_اسم مبحث» (مثال: «سوال_رشد توابع»)
برای سوال از یک تمرین خاص:
«تمرین_شماره تمرین_شماره سوال» (مثال: «تمرین_۱_۳»)
- همچنین خواهشمند است در متن ایمیل به شماره دانشجویی خود اشاره کنید.

تحلیل الگوریتم

۱- آرایه T شامل n عنصر متمایز را در نظر بگیرید. بین یک جفت اندیس مانند (j, i) از این آرایه یک نابه جایی وجود دارد اگر:

$$j > i \text{ و } T[j] < T[i]$$

الف) رابطه‌ی بین زمان اجرای insertion sort و تعداد نابه‌جایی‌ها در آرایه‌ی ورودی چیست؟

ب) اگر در آرایه T یک نابه جایی بین دو اندیس i و j وجود داشته باشد، نشان دهید این آرایه دارای حداقل $i - j$ نابه جایی است.

۲- زمان اجرای شبه کد زیر را (خط به خط) تحلیل کنید.

```
1. x=0;
2. for(i=1;i<=n;i++){
3.     for(j=1;j<=n;j++) x++;
4.     j=1;
5.     while(j<n){
6.         x++; j= j*2;
7.     }
8. }
```

۳- با استفاده از شبه کد زیر می‌خواهیم index عدد a را در آرایه ی $A[1 \dots n]$ بیابیم. اگر بدانیم احتمال حضور a در تمام درایه‌های $\frac{1}{3}$ ابتدایی آرایه برابر x باشد، در تمام درایه‌های $\frac{1}{3}$ میانی برابر $3x$ و در تمام درایه‌های $\frac{1}{3}$ پایانی برابر $6x$ باشد، شبه کد زیر را در بهترین، بدترین و حالت متوسط بررسی کنید (محاسبات را دقیق بنویسید)

```
for(i = 1; i <= n ; i++)
    if (A[i] == a)
        return i
```

مرتب سازی

۴- در یک آرایه می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا دو عدد مانند a, b موجود هستند بطوریکه $a + b = k$ (متغیر k):
یک بار برای آرایه‌ی مرتب شده و بار دیگر برای آرایه نامرتب الگوریتم‌هایی پیشنهاد دهید و پیچیدگی زمانی آن‌ها را مقایسه کنید. (در حالت حل مساله با آرایه‌ی مرتب شده پیچیدگی زمانی مرتب کردن آرایه را در نظر نگیرید)

رشد توابع

۵- موارد زیر را ثابت کنید.

نکته:

- در مواردی که می‌خواهید ثابت کنید $A = \Theta(B)$ باید هر دو عبارت $A = O(B)$ و $A = \Omega(B)$ را اثبات کنید.

- برای قسمت c و d از تقریب استرلینگ استفاده کنید

- a) $\lg(n!) = \Theta(\lg(n^n))$
- b) $n^{\frac{1}{\lg n}} = \Theta(1)$
- c) $n! = \omega(2^n)$
- d) $n! = o(n^n)$

۶- صحیح یا غلط بودن گزاره‌های زیر را اثبات کنید (در صورتی که گزاره‌ها غلط هستند مثال نقض کافیست)

- a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
- b) $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
- c) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$, $\forall n : \lg(g(n)) \geq 1$ and $f(n) \geq 1$
- d) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
- e) $f(n) = O(f(n^2))$
- f) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
- g) $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$
- h) $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

۷- مشخص کنید که به ازای هر جفت (A, B) آیا A از $O, o, \Omega, \omega, \Theta$ تابع B هست یا خیر (مانند ردیف اول)

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
n^2	n^3	yes	yes	no	no	no
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$					
$4^{\lg n}$	n^2					
$n!$	$n \cdot 2^n$					
$\sqrt{2}^{\lg n}$	$2^{\sqrt{2} \cdot \lg(n)}$					
$(\lg(n))!$	2^{2^n}					
$n^{\lg(\lg(n))}$	$(\lg(n))^{\lg(n)}$					