بسمه تعالی

- تمرین سری اول درس ساختمان داده ها و مبانی الگوریتم ها
- پاسخ تمرین در قالب یک فایل pdf تایپ شده یا دست نویس اسکن شده (مرتب و خوانا) و با نام StudentNumber_HW1.pdf آپلود شود.
- مهلت ارسال تمرین تا ساعت 11:59 روز سه شنبه مورخ 29 آبان 1399 می باشد.
- در صورتی که درمورد این تمرین سوال یا ابهامی داشتید با ایمیل dsfall1399@gmail.com با تدریس یاران در ارتباط باشید. لطفا برای ایمیل زدن فرمت زیر را در قسمت subject رعایت کنید:

برای سوال از مباحث مختلف:

«سوال_اسم مبحث» (مثال: «سوال_رشد توابع»)

برای سوال از یک تمرین خاص:

«تمرین_شماره تمرین_شماره سوال» (مثال: «تمرین_۱_۳»)

همچنین خواهشمند است در متن ایمیل به شماره دانشجویی خود اشاره کنید.

تحلیل الگوریتم

۱- آرایه T شامل n عنصر متمایز را در نظر بگیرید. بین یک جفت اندیس مانند (j, i) از این آرایه یک نابه جایی وجود دارد اگر:

$T[j] < T[i]$ و $j > i$

الف) رابطه‌ی بین زمان اجرای insertion sort و تعداد نابه‌جایی‌ها در آرایه‌ی ورودی چیست؟

ب) اگر در آرایه T یک نابه جایی بین دو اندیس i و j وجود داشته باشد، نشان دهید این آرایه دارای حداقل $i - j$ نابه جایی است.

۲- زمان اجرای شبه کد زیر را (خط به خط) تحلیل کنید.

```
x=0;
for(i=1;i<=n;i++){
        for(j=1;j<=n;j++) x++;
        j=1;
        while(j<n){
        x++; j= j*2;
        }
}
```

۳- با استفاده از شبه کد زیر میخواهیم index عدد a را در آرایه ی A[1...n] بیابیم. اگر بدانیم احتمال حضور a در تمام درایه‌های ⅓ ابتدایی آرایه برابر x باشد، در تمام درایه‌های ⅓ میانی برابر 3x و در تمام درایه‌های ⅓ پایانی برابر 6x باشد، شبه کد زیر را در بهترین، بدترین و حالت متوسط بررسی کنید(محاسبات را دقیق بنویسید)

```
for(i = 1; i <= n ; i++)
    if (A[i] == a)
        return i
```

مرتب سازی

۴- در یک آرایه میخواهیم بررسی کنیم که آیا دو عدد مانند a, b موجود هستند بطوریکه(k متغیر): a + b = k

یک بار برای آرایه‌ی مرتب شده و بار دیگر برای آرایه نامرتب الگوریتم‌هایی پیشنهاد دهید و پیچیدگی زمانی آن ها را مقایسه کنید.(در حالت حل مساله با آرایه‌ی مرتب شده پیچیدگی زمانی مرتب کردن آرایه را درنظر نگیرید)

رشد توابع

۵- موارد زیر را ثابت کنید.

نکته:

- در مواردی که می‌خواهید ثابت کنید $A = \Theta(B)$ باید هر دو عبارت $A = O(B)$ و $A = \Omega(B)$ را اثبات کنید.
- برای قسمت c و d از تقریب استرلینگ استفاده کنید

a) $\cancel{lg(n!) = \Theta(lg(n^n))}$

b) $\cancel{n^{\frac{1}{lg\, n}} = \Theta(1)}$

c) $n! = \omega(2^n)$

d) $n! = o(n^n)$

۶- صحیح یا غلط بودن گزاره‌های زیر را اثبات کنید(در صورتی که گزاره ها غلط هستند مثال نقض کافیست)

a) $f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = O(f(n))$

b) $f(n) + g(n) = \Theta(min(f(n)\,, g(n)\,))$

c) $f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; lg(f(n)) = O(lg(g(n)))\,,\ \forall n:\ lg(g(n)) \geq 1\ and\ f(n) \geq 1$

d) $f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

e) $f(n) = O(f(n^2))$

f) $f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \Omega(f(n))$

g) $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$

h) $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

۷- مشخص کنید که به ازای هر جفت (A , B) آیا A از O,o,Ω,ω,Θ تابع B هست یا خیر(مانند ردیف اول)

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
n^2	n^3	yes	yes	no	no	no
$lg^k.n$	n^ε					
n^k	c^n					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{lg\,c}$	$c^{log\,n}$					
$4^{lg\,n}$	n^2					
$n!$	$n.2^n$					
$\sqrt{2}^{lg\,n}$	$2^{\sqrt{2\,.lg(n)}}$					
$(lg(n))!$	2^{2^n}					
$n^{lg(lg(n))}$	$(lg(n))^{lg(n)}$					