به نام خدا

تمرین سوم درس پردازش و تحلیل تصاویر پزشکی

نگین اسماعیل زاده ۹۷۱۰۴۰۳۴

تمرین نوشتاری :

۱. برای ما رعایت شرط روی واریانس اهمیت دارد ، زیرا شرط روی میانگین را میتوان با صفر کردن میانگین و اضافه کردن آن به تصویر بعد از انجام پردازش قابل چشم پوشی و تحقق یافته فرض کرد ، نتیجتا مسئله ی زیر را باید حل کنیم :

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \; TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \quad , \; condition : \int_{\Omega} (u-v)^2 = \sigma^2 |\Omega|$$

برای حل این مسئله از روش اویلر لاگرانژ میتوان نوشت :

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \{ \int_{\Omega} \left(|\nabla u| + \frac{\lambda}{2} (u-v)^2 \right) - \frac{\lambda}{2} \sigma^2 |\Omega| \}$$

در جمله دوم تمامی مقادیر اعداد ثابت هستند (نسبت به پارامتر u) در نتیجه کافیست مینیمم جمله اول را محاسبه کنیم . اگر تعریف کنیم :

$$L = |\nabla u| + \frac{\lambda}{2} (u-v)^2$$

از روش Calculus of Variation داریم :

$$\min_{u\in BV(\Omega)} \int_{\Omega} L(\ u\ , u_{x_1}, u_{x_2}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial u} - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial L}{\partial u_{x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial L}{\partial u_{x_2}} \right) = 0$$

شرط دوم نیز شرطی است ک خودمان به مسئله اضافه میکنیم و به این معناست که در مرز تصویر و در جهت عمود به مرز انتشار وجود ندارد .

.۲

$$v = u + \eta$$

توزیع نیز لاپلاس است پس داریم :

$$f(\eta|\mu, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|\eta-\mu|}{b}}$$

رویکرد MAP یافتن u با ماکزیم احتمال وقوع به شرط مشاهده ی v است .

در نتیجه باید مسئله ی زیر را حل کنیم :

$$\max_u\ p(u|v) \ = \ \max_u \ \frac{p(v|u)\ p(u)}{p(v)} \rightarrow \underset{u}{argmax}\ p(v|u)\ p(u)$$

$$p(v(i,j)\ |\ u(i,j)\ ) = \ \frac{1}{2b} e^{-\frac{|v(i,j)-u(i,j)-\mu|}{b}}$$

فرض میکنیم نویز iid با میانگین صفر است . درنتیجه داریم :

$$p(v|u) \propto \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} e^{-\frac{|v(i,j)-u(i,j)|}{b}} = e^{\frac{-\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |v(i,j)-u(i,j)|}{b}}$$

فرض میکنیم توزیع تصویر نیز یک توزیع گوسی یا لاپلاس یا .. و به فرم زیر است :

$$p(u) \propto e^{-f(u)}$$

نتیجتا داریم :

$$\underset{u}{argmax}\ \ p(u|v) = \ \underset{u}{argmax}\, p(v|u)\, p(u)$$

$$= \underset{u}{argmax}\, e^{\frac{-\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |v(i,j)-u(i,j)|}{b}}\ \ e^{-f(u)}$$

از طرفین تساوی بدون اختلال در مسئله لگاریتم میگیریم و سپس در یک منفی ضرب میکنیم تا مسئله ی ماکزیمم گیری به مینیمم گیری تبدیل شود ، داریم :

$$= \underset{u}{argmin}\, f(u) + \frac{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |v(i,j) - u(i,j)|}{b}$$

کافیست رابطه ی بالا را به فرم پیوسته بنویسیم داریم :

$$\underset{u}{argmin} = \int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{|u-v|}{b})$$

که اگر f(u) را از جنس TV(u) فرض کنیم داریم فرمول بندی نهایی به این صورت در می آید :

$$\min_{u} \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda |u-v|$$

۳ . رابطه زیر برای معیار *EPI* استفاده میشود :

$$EPI = \frac{\Gamma\left(\Delta s - \overline{\Delta s}, \widetilde{\Delta s} - \overline{\widetilde{\Delta s}}\right)}{\sqrt{\Gamma(\Delta s - \overline{\Delta s}, \Gamma(\Delta s - \overline{\Delta s}) \ . \ \Gamma\left(\widetilde{\Delta s} - \overline{\widetilde{\Delta s}}, \widetilde{\Delta s} - \overline{\widetilde{\Delta s}}\right)}}$$

$$\Gamma(s_1, s_2) = \sum_{i,j \in ROI} s_1(i,j)\, s_2(i,j)$$

که در آن Δs و $\widetilde{\Delta s}$ تصویر اصلی و تصویر تغییر یافته هر دو بعد از عبور از فیلتر بالاگذر هستند (در واقع برای مثال کرنل لاپلاسین روی تصاویر اعمال شده است) ، $\overline{\Delta s}$ و $\overline{\widetilde{\Delta s}}$ هم به ترتیب میانگین Δs و $\widetilde{\Delta s}$ هستند.

در رابطه بالا میتوان دید که اگر $\widetilde{\Delta s}$ به Δs بسیار شبیه باشد مقدار *EPI* برابر با ۱ میشود چون صورت و مخرج کسر برابر میشوند و هرچه این معیار به ۱ نزدیک تر باشد دو تصویر ورودی تابع به هم شبیه ترند . در واقع در فرمول بالا Γ به عنوان یک تابع که میان دو تصویر تعریف میشود (با این ویژگی که تمام پیکسل ها را دخالت میدهد) ، میان دو تصویر اندازه گیری شده سپس نرمالیزه میشود به این صورت که به مقدار Γ میان هر تصویر با خودش نیز تقسیم میشود و از

آنجایی که ورودی تابع را لاپلاسین تصاویر (در واقع لبه های دو تصویر) داده ایم ، این معیار در واقع میزان تشابه لبه های دو تصویر را به ما نشان میدهد(یا به عبارتی میزان تخریب لبه های یک تصویر بعد از حذف نویز) .

۴.

Trilateral filtering :

در روش Bilateral filtering داشتیم :

$$\vec{I}^{*}(\vec{x}) = \frac{1}{k(\vec{x})} \sum_{\vec{\xi} \in \mathcal{N}_{\vec{x}}} \vec{I}\left(\vec{\xi}\right) \cdot c\left(\vec{\xi}, \vec{x}\right) \cdot s\left(\vec{I}\left(\vec{\xi}\right), \vec{I}(\vec{x})\right)$$

که در آن $\vec{x}$ و $\vec{\xi}$ نشان دهنده ی یک پیکسل از تصویر و $k(\vec{x})$ پارامتر نورمالیزاسیون است و به ترتیب توابع $c(\vec{x},\vec{\xi})$ و $s(I(\vec{x}),I(\vec{\xi}))$ کنترل کننده فیلتر بر اساس فاصله مکانی و اختلاف روشنایی پیکسل های همسایه با پیکسل در حال فیلترینگ هستند (میتوان هر کدام را یک تابع گوسی فرض کرد) .

در روش Trilateral filtering برای جلوگیری از هموار شدن نحواحی تیز و با معنایی مثل مویرگ ها در تصاویر پزشکی دو تغییر در فیلتر قبلی میدهیم ، اول اینکه معیاری برای اندازه گیری میزان نظم دامنه تصویر در یک ناحیه در نظر میگیریم و به این ترتیب نحوه ی فیلتر کردن مناطق هموار را از غیر هموار تفکیک میکنیم . سپس برای فیلتر کردن نواحی غیر هموار علاوه بر در نظر گرفتن دو معیار فاصله ی مکانی و اختلاف شدت روشنایی معیار سومی متناسب با تشابه ساختاری در نظر گرفته میشود . حال به بررسی این روابط می پردازیم :

$$\vec{I}^{(t+1)}(\vec{x}) = \frac{1}{k(\vec{x})} \sum_{\vec{\xi} \in \mathcal{N}_{\vec{x}}} \vec{I}^{(t)}\left(\vec{\xi}\right) \cdot w\left(\vec{\xi}, \vec{x}, t\right),$$

که در آن t زمان و $\vec{x}$ ، $\vec{\xi}$ و $k(\vec{x})$ مانند قبل تعریف میشوند. برای $w(\vec{x},\vec{\xi},t)$ نیز داریم :

$$w\left(\vec{\xi},\vec{x},t\right)=\left(1-a\left(\vec{x}\right)\right)\cdot c\left(\vec{\xi},\vec{x}\right)+$$
$$a\left(\vec{x}\right)\cdot c\left(\vec{\xi},\vec{x}\right)\cdot s\left(\vec{I}^{(t)}\left(\vec{\xi}\right),\vec{I}^{(t)}\left(\vec{x}\right)\right)\cdot\sum_{i=1}^{D-1}d_i\left(\vec{\xi},\vec{x}\right),$$

که در آن :

$$d_i\left(\vec{\xi},\vec{x}\right)=\exp\left(-\frac{\delta^2\left(\vec{\xi}-\vec{x},\hat{e}_i\right)}{2\sigma^2}\right),$$

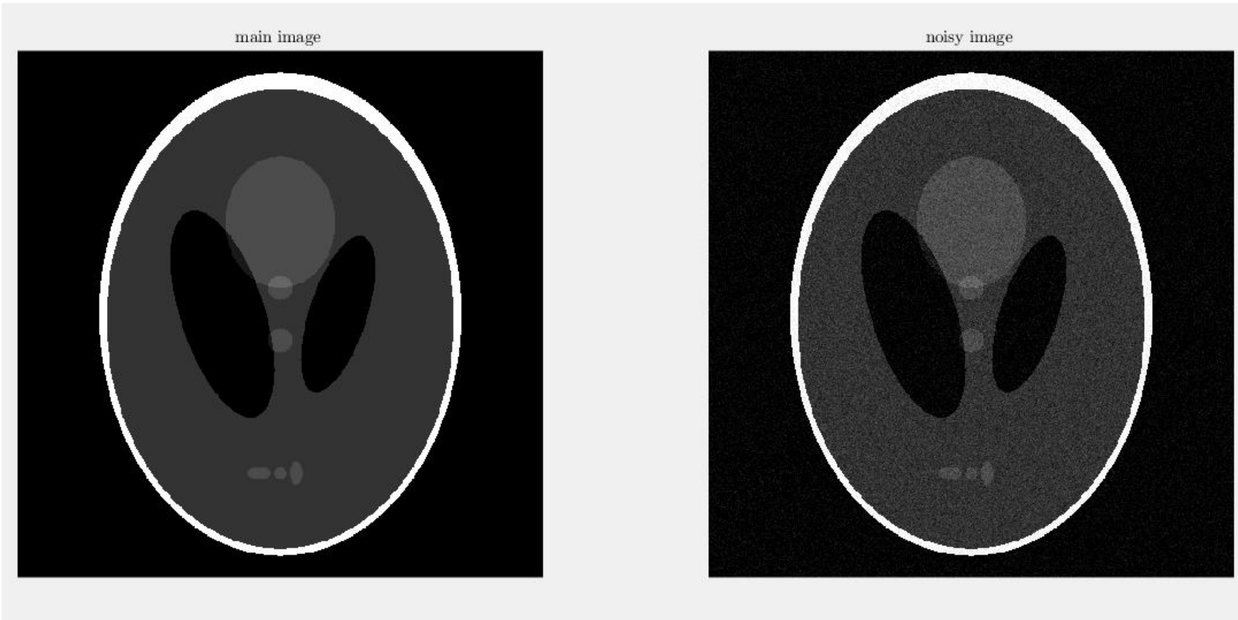
$$\delta\left(\vec{u},\vec{v}\right)=1-\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right|,$$

توضیح :

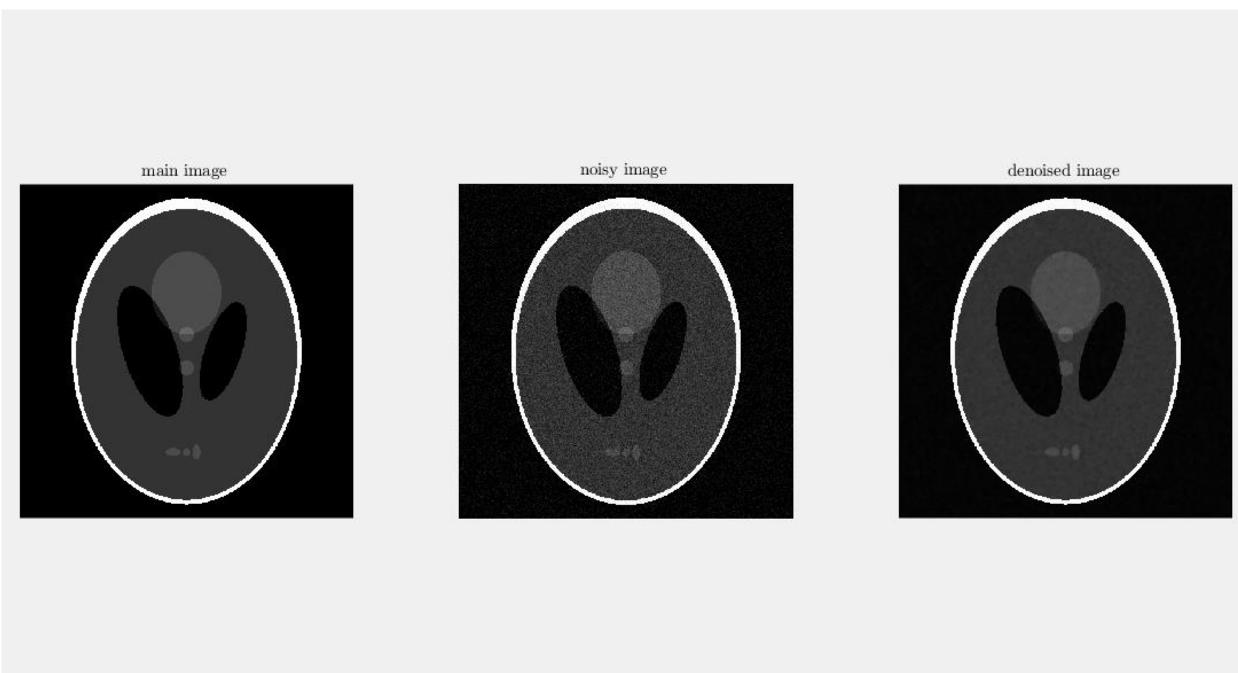
$a(\vec{x})$ در نواحی هموار به سمت صفر میرود بنابراین منطق هموار صرفا بر اساس فاصله مکانی با پیکسل های اطراف فیلتر میشوند . در نواحی غیر هموار ($a(\vec{x}) \to 1$) نیز ترکیبی از سه معیار گفته شده را استفاده میکنیم . بر اساس فواصل d_i ناهمواری ها از نظر ساختاری با جهت های $\hat{e}_i$ (که برای مثال در مرتبه یک میتواند به جهت اصلی یک ساختار خطی و در مرتبه دو به یکی از جهت های اصلی یک ساختار مسطح اشاره داشته باشد) مقایسه میشوند و اگر در آن جهات باشند وزن جمله آخر بیشتر شده و این ساختار ها کمتر فیلتر میشوند و برعکس .

تمرین های شبیه سازی :

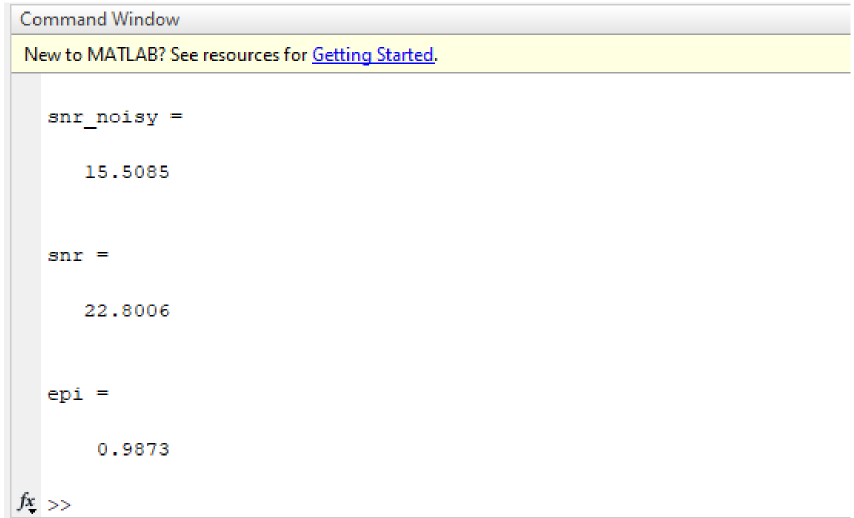
۱. الف) تصویر تمیز و تصویر نویزی در شکل زیر در کنار هم نشان داده شده اند .



ب) با استفاده از روش NLM تصویر حذف نویز شد . سه تصویر تمیز نویزی و حذف نویز شده به ترتیب در شکل زیر قابل مشاهده اند.



ج) در این حالت معیار SNR به ترتیب قبل و بعد حذف نویز و معیار EPI بعد از حذف نویز به شرح زیر شده اند .



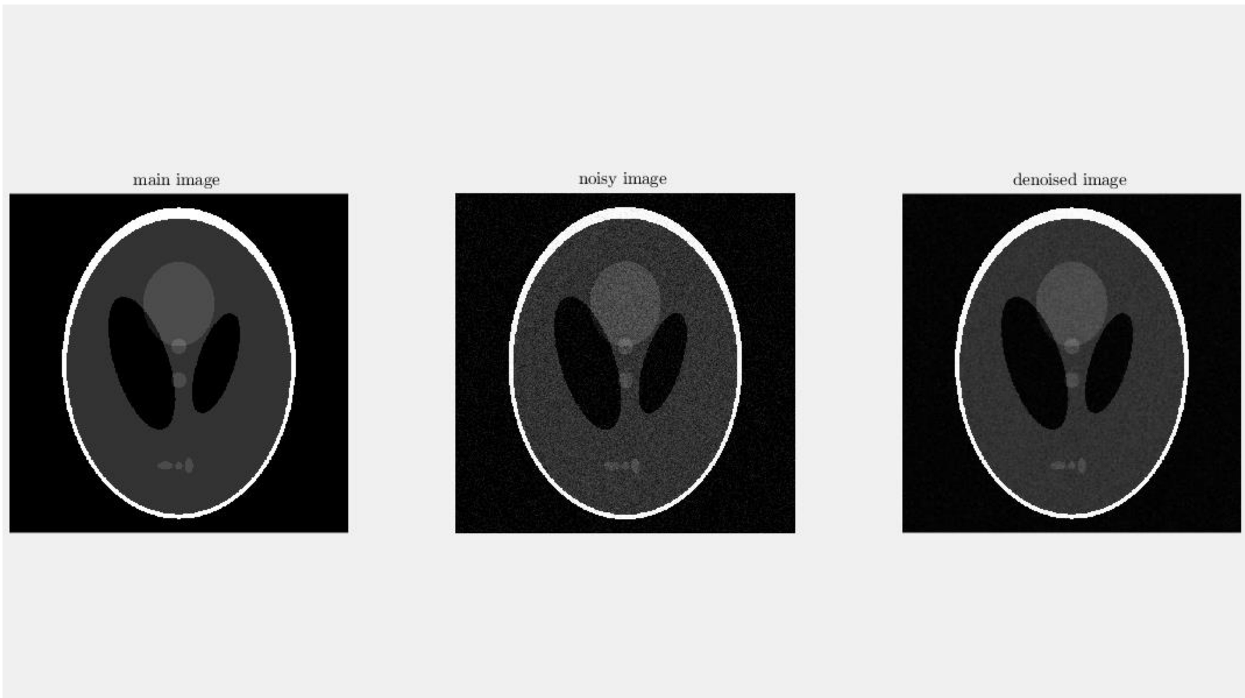
میدانیم فیلتر NLM پیاده سازی بسیار متفاوتی دارد، در این تمرین نحوه ی پیاده سازی به این صورت است : در هر مرتبه همسایگی به اندازه ۳ برابر طول patch ها بررسی میشود و از patch های مشابه با وزن گاوسی مربوط به فاصله اقلیدوسی شدت روشنایی ها در فیلتر شدن نقطه میانی patch اصلی استفاده میشود . در این مثال patch ها ۳*۳ در نظر گرفته شده و همچنین انحراف معیار وزن گاوسی مذکور hx=0.3 در نظر گرفته شده است.

۲. الف) hx در فیلتر bilateral مشخص کننده و در واقع محدود کننده فاصله ی پیکسل های همسایه ی دخیل در فرایند فیلتر شدن یک پیکسل می باشد . به همین ترتیب hg نیز مشخص کننده و محدود کننده پیکسل های دخیل در فرایند فیلتر شدن یک پیکسل مرجع از نظر اختلاف شدت روشنایی آنها با پیکسل مرجع می باشد. با افزایش hx پیکسل های دور تر از پیسکل مرجع(از نظر مکانی) به نسبت نقش پررنگ تری در فیلترینگ پیکسل مرجع پیدا میکنند و به همین صورت با افزایش hg و از نظر شدت روشنایی .

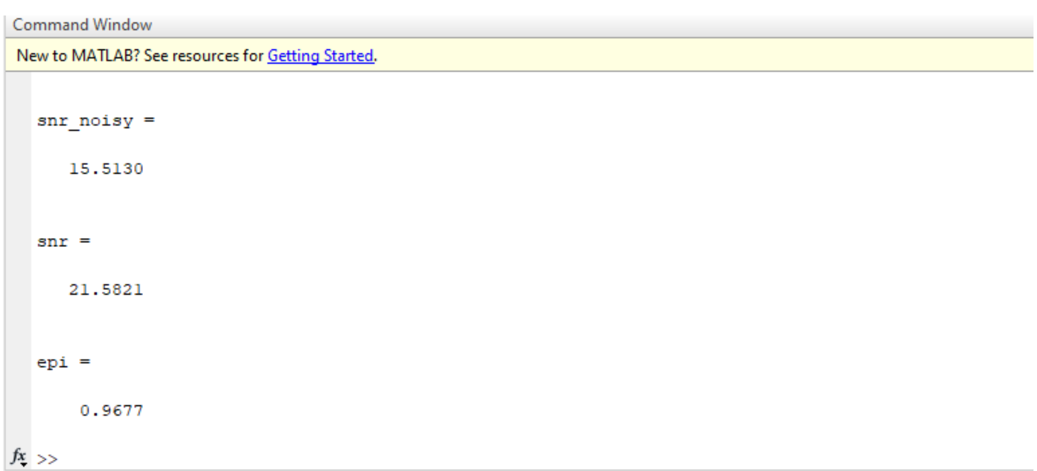
بنابراین در تصاویر با سایز بزرگ افزایش hx میتواند در حذف نویز کمک کننده باشد و همچنین در تصاویر با کنتراست بالا (غیر هموار از نظر روشنایی) افزایش hg میتواند کمک کننده باشد.

برای این تصویر hx =1.2 و hg =0.09 فرض شده است.

ب) پس از حذف نویز به روش Bilateral مجددا سه تصویر تمیز ، نویزی و حذف نویز شده را به ترتیب در کنار هم نمایش میدهیم :

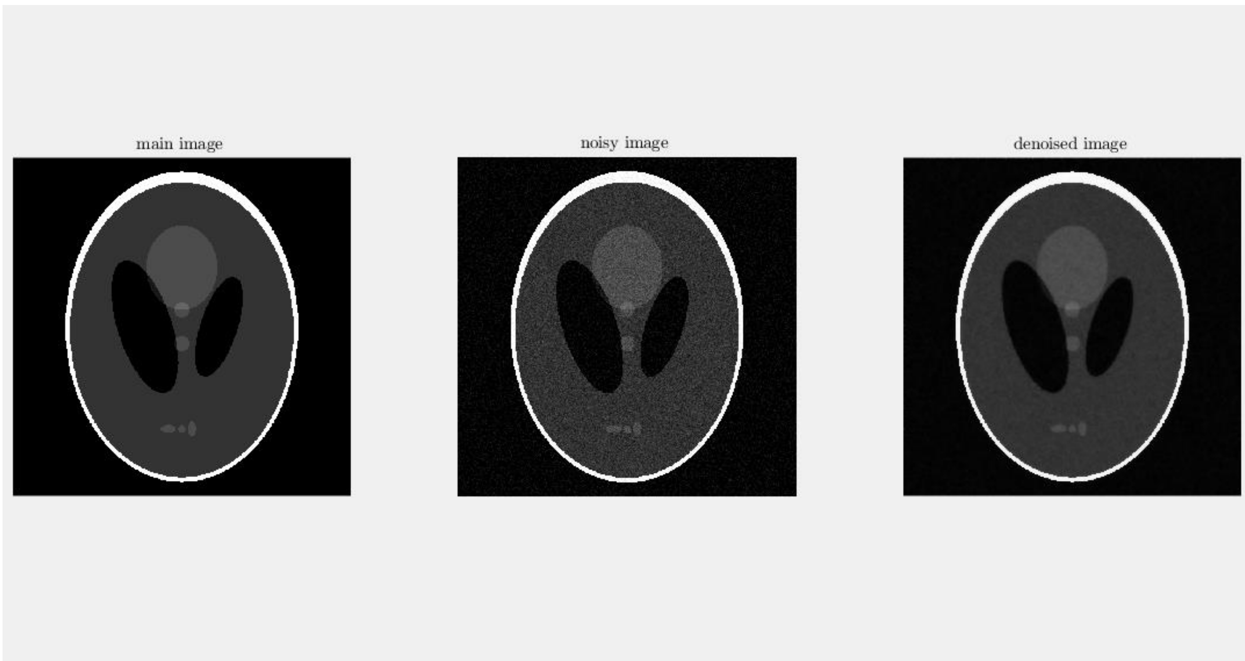


ج) در این حالت معیار SNR به ترتیب قبل و بعد حذف نویز و معیار EPI بعد از حذف نویز به شرح زیر شده اند .



۳.

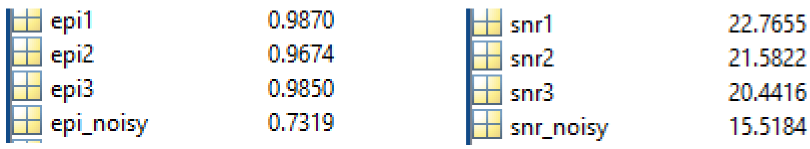
الف) تصویر را اینبار با استفاده از فیلتر TV فیلتر میکنیم ، سه تصویر تمیز ، نویزی و حذف نویز شده به ترتیب به صورت زیر اند.



ب) در این حالت معیار SNR به ترتیب قبل و بعد حذف نویز و معیار EPI بعد از حذف نویز به شرح زیر شده اند .

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
snr_noisy =

   15.4948


snr =

   20.4516


epi =

    0.9848

fx >>
```

۴.



SNR noisy	EPI noisy	SNR Denoised NLM	EPI Denoised NLM	SNR Denoised Bilateral	EPI Denoised Bilateral	SNR Denoised TV	EPI Denoised TV
15.5184	0.7319	22.7655	0.9870	21.5822	0.9674	20.4416	0.9850

همانطور که میبینیم با انتخاب پارامتر های ذکر شده اعداد نهایی بسیار نزدیک به هم هستند ، اما مشخص میشود که فیلتر Bilateral بدلیل EPI کمتر ، کمتر از باقی الگورتیم ها در حفظ لبه موفق بوده است . همچنین با این روش های پیاده سازی به نظر میرسد فیلتر NLM در کل کمی از باقی فیلتر ها عمکرد بهتری داشته است (با این وجود اگر برای مثال dt را در روش TV کمی افزایش دهیم نتیجه آن بسیار ارتقا خواهد داشت ، به همین دلیل نمیتوان دقیق آنها قیاس نمود). اما نکته قابل توجه این است که پیچیدگی محاسبات برای فیلتر bilateral بسیار زیاد و پس از آن فیلتر NLM بیشتر از TV می باشد .