

به نام خدا

گزارش فاز اول پروژه سیگنال و سیستم

نگین اسماعیل زاده ۹۷۱۰۴۰۳۴

تبدیل فوریه گسسته – DTFT

(۱) ابتدا نشان می‌دهیم که میتواند متناوب باشد :

$$X(\Omega + \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega+\theta)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega)n} e^{-j(\theta)n}$$

$$e^{-j(\theta)n} = 1 \rightarrow \theta = 2k\pi$$

که کوچکترین دوره تناوب 2π است .

(۲) اگر x یک سیگنال حقیقی باشد میتوان نوشت :

$$x^*[n] = x[n]$$

باید رابطه ای بین $X(\Omega)$ و $X(-\Omega)$ پیدا کنیم ، در این صورت با داشتن $X(\Omega)$ بین 0 تا π میتوانیم باقی مقادیر برای فاصله $\pi - 0$ را محاسبه کنیم و با داشتن مقادیر برای کل این فاصله تمامی مقادیر را به دلیل تناوبی بودن تبدیل داریم.

برای این کار با استفاده از رابطه بالا داریم :

$$X^*(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

تبدیل فوریه گسسته _ DFT

(۱)

ضرایب سری فوریه یک سیگنال :

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

تبدیل فوریه سیگنال با توجه با صفر بودن آن خارج از بازه ذکر شده :

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

X(t) در فاصله خارج از (-T/2 , T/2) صفر است در نتیجه داریم :

$$\int_{t=-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\rightarrow C_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0) = \frac{1}{T} X\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$X[k] = X(\Omega)|_{\Omega=\frac{2k\pi}{N}}$$

برای بدست آوردن ضرایب سری فوریه مانند این است که در رابطه تبدیل فوریه در شرایط ممکن به جای Ω پیوسته مضرب های گسسته ای از Ω_0 قرار دهیم ، در این حالت کاری که در واقع صورت میگیرد یک نمونه برداری از تبدیل فوریه است.

$$X[k] \Rightarrow X\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$$

$$X[k-1] \Rightarrow X\left(\frac{2(k-1)\pi}{N}\right) = X\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2\pi}{N}\right)$$

بنابراین این کار مانند نمونه برداری از $X(\Omega)$ با فاصله ی $\frac{2\pi}{N}$ است

اگر سیگنال به طول $N1$ داشته باشیم به طوریکه $N1 < N$ وقتی با فاصله N از آن نمونه برداری کنیم مانند این است از طول سیگنال حداکثر یک نمونه برداشتیم و باز سازی سیگنال در این حالت عملاً غیر ممکن است.

اما اگر $N1 > N$ به نحوی باشد که در این حالت ما از طول سیگنال تعدادی نمونه داریم و میتوانیم آن را باز سازی کنیم و به نحوی با نمونه ها تقریب بزنیم و طبیعتاً هر چهاین نمونه ها بیشتر باشند یعنی هرچه $N1$ از N بزرگتر باشد باز سازی دقیق تر است اما شرط لازم و کافی برای اینکه بتوانیم این کار را انجام دهیم همان $N < N1$ است یعنی طول نمونه برداری ما از طول سیگنال باید کمتر باشد تا دیتای قابل توجهی از دست نرود.

همانطور که ابتدای بخش قبل توضیح داده شد $X[k]$ ها در واقع ضرایب سری فوریه سیگنال پریودیک x هستند (به این موضوع دقت میکنیم که اگر x تناوبی نباشد تبدیل فوریه آن موجود است اما سری فوریه آن خیر و نتیجتاً برای صحبت در مورد سری فوریه هر سیگنال نامتناوب را به صورت تناوبی در طول زمان تکرار میکنیم و نمونه برداری از سیگنال حاصل به ما ضرایب فوریه آن را میدهد)

مراحل به شکل زیراست :

بعد از پیرو دیک کردن تبدیل فوریه گسسته به سیگنال متناوب با N میرسیم که در هر تناوب به صورت زیر است (ضرایب سری فوریه گسسته زمان با همان دوره تناوبی که سیگنال متناوب است متناوب میشوند) :

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega n}$$

حال اگر از این سیگنال متناوب گسسته واون سری فوریه بگیریم داریم :

(به این نیز دقت میکنیم ضرایب سری فوریه از رابطه ای مشابه رابطه بالا با یک تفاوت در ضریب $1/N$ به دست می آید)

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X[k] e^{jk\Omega n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[m] e^{-jk\Omega m} e^{jk\Omega n}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[m] \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-m)} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} N \tilde{x}[m] \delta[n-m] = \tilde{x}[n]$$

که در این روابط \tilde{x} متناوب شده ی x با N است و اگر به حاصل در تناوب اول نگاه کنیم به همان $x[n]$ می رسیم در نتیجه مراحل فوق صحت این روش را تایید میکنند.

(۴)

DFT :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

IDFT :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

(۵) رابطه پارسوال :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^*$$

اثبات:

ابتدا از رابطه تبدیل فوری گسسته استفاده میکنیم و عمل مزدوج کردن را نیز اعمال میکنیم.

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^* = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \sum_{n'=0}^{N-1} y_{n'}^* e^{j\frac{2\pi}{N}kn'}$$

برای x و y و n و n' در نظر گرفته شده که توجه کنیم مستقل از هم جمع میشوند.

چون سیگما ی سمت راست مستقل از k است میتوان نوشت :

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{n'=0}^{N-1} y_{n'}^* e^{j\frac{2\pi}{N}k(n'-n)}$$

و چون سیگمای خارجی بر روی k است میتواند مسقیما رو جمله آخر اعمال شود :

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{n'=0}^{N-1} y_{n'}^* \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n'-n)}$$

از روابط سری هندسی داریم :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n'-n)} = \frac{e^{j2\pi(n'-n)} - 1}{e^{j\frac{2\pi}{N}(n'-n)} - 1} = N\delta(n - n')$$

نتیجتا در ادامه داریم :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{n'=0}^{N-1} y_{n'}^* N\delta(n - n') = N \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^*$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^*$$

که حالت خاص این رابطه به این شکل است ($x=y$)

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

$$x(\Omega) = \text{Re}(X(\Omega)) + j \text{Im}(x(\Omega))$$

$$\text{Re}(X(\Omega)) = \frac{1}{2}(X(\Omega) + X^*(\Omega)) \rightarrow \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$$

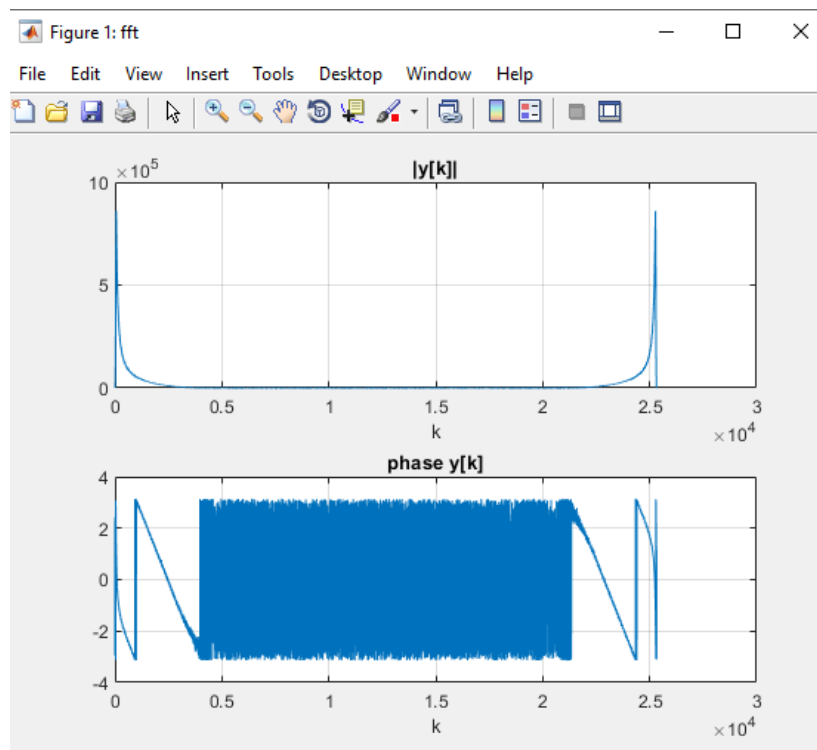
سیگنال حقیقی است ($x[-n] = x^*[-n]$) در نتیجه این حاصل نسبت به n زوج است.

$$\text{Im}(X(\Omega)) = \frac{1}{2j}(X(\Omega) - X^*(\Omega)) \rightarrow \frac{1}{2j}(x[n] - x^*[-n])$$

سیگنال حقیقی است ($x[-n] = x^*[-n]$) در نتیجه این حاصل نسبت به n فرد است.

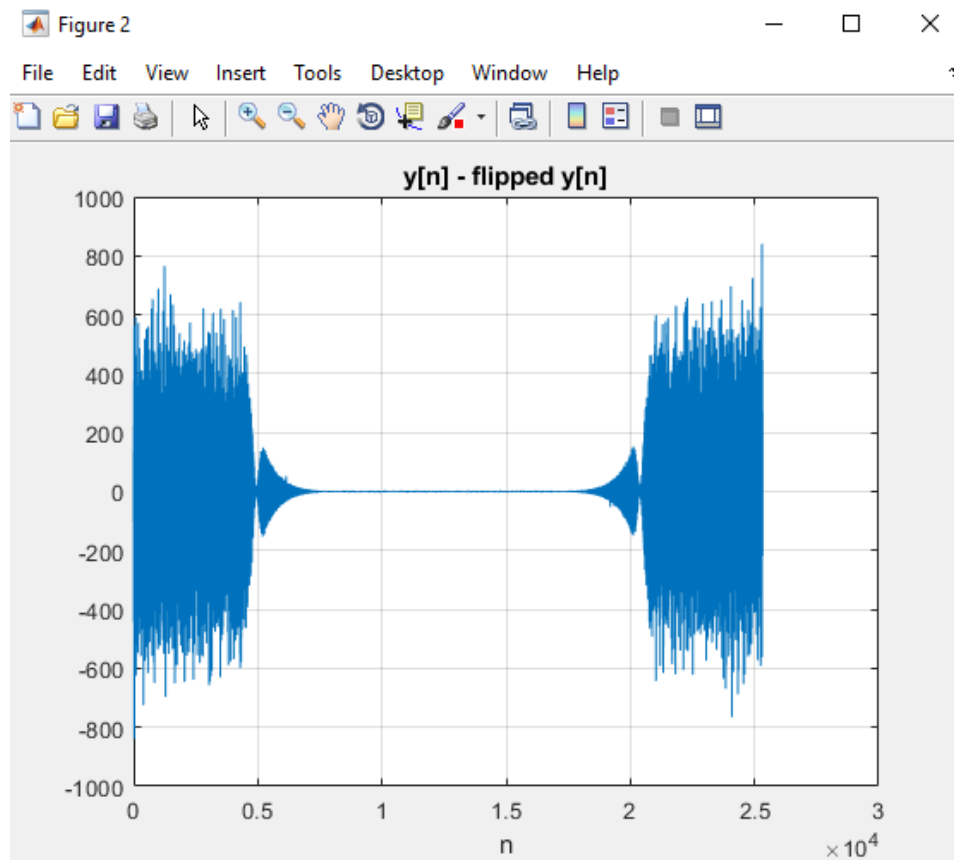
میدانیم فرد و زوج بودن سیگنال زمانی به فرد و زوج بودن تبدیل فوریه منتهی میشود (خواص) همچنین میدانیم اندازه تابعی زوج از قسمت حقیقی موهومی است و نتیجه زوج، و فاز تابعی فرد از تقسیم قسمت حقیقی و موهومی است و در نتیجه فرد خواهد بود.

(۷) خروجی شکل رسم شده ی فایل به این صورت است:



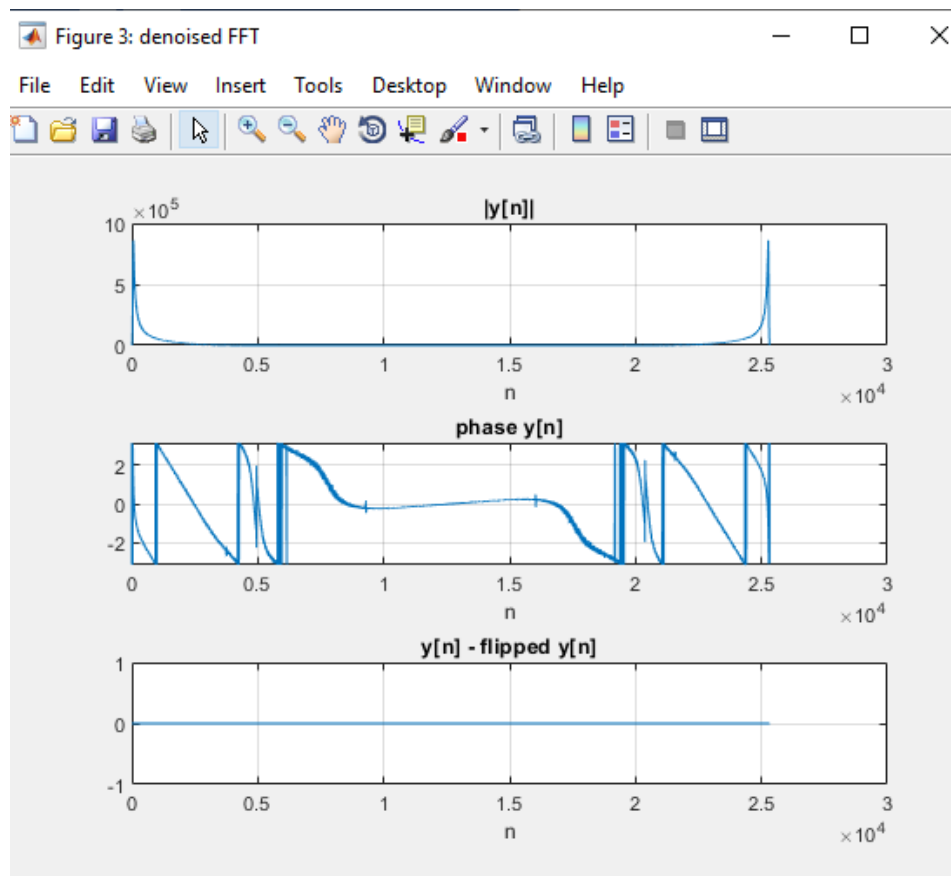
برای رسم اندازه دستور **abs** و برای فاز دستور **angle** استفاده شده است.

اگر چه تصویر بالا ظاهراً متقارن به نظر میرسد با این حال اگر برای بررسی صحت آن را از معکوسش کم کنیم خواهیم دید که برای مثال برای اندازه انتظار خروجی صفر داشتیم (تقارن زوج) اما خروجی کاملاً صفر نیست (مطابق شکل) علت ای موضوع این است که سیگنال داده شده کاملاً حقیقی نیست و دارای مقداری نویز به صورت موهومی است.



برای حذف نویز ها از دیتای داده شده **real** گرفته شد تا نویز های موهومی حذف شوند و دوباره تصاویر رسم شد. (در این حالت چون به سیگنال دسترسی داریم و میتوانیم ببینیم که نویز ها از مقادیر موهومی هستند از این روش استفاده میکنیم اما برای مثال گر به سیگنال دسترسی نداشتیم عملکرد دیگری که میتوانستیم داشته باشیم میانگین گرفتن از مقادیری از تبدیل بود که میدانیم باید متقارن باشند).

تصاویر صفحه بعد در حالتی است که نویز ها برداشته شده است .



همانطور که میبینیم بعد از برداشته شدن نویز ها در قسمت اخر شکل اختلاف دیتا و متقارن (معکوس) آن صفر شده است.

نمونه برداری _ sampling

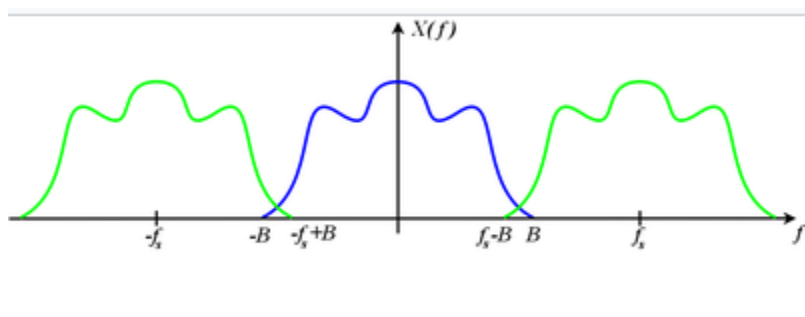
(۱)

(۲) شهود اولیه این مسأله به این صورت است که با کمی دقت متوجه میشویم اگر فرکانس نمونه برداری خیلی پایین باشد بخش قابل توجهی از سیگنال از دست میرود ، برای مثال اگر سیگنال سینوسی را در نظر بگیریم با فرکانس ۱۰ ، اگر نمونه ای از این سیگنال هر یک دهم ثانیه

(فرکانس نمونه برداری هم اندازه با فرکانس سیگنال و برابر با ۱۰) برداریم، دیتایی که بدست می آوریم مقدار DC خواهد بود و طبیعتاً بخش زیادی از دیتا از دست رفته و نمیتوان به شکل سینوسی اولیه بازگشت، این مسئله به ما شهود اولیه می دهد که فرکانس نمونه برداری نباید از میزانی کمتر باشد. در ادامه این حد بحرانی را پیدا میکنیم.

اگر f را فرکانس سیگنال پیوسته $f = \frac{\Omega}{T}$ در نظر بگیریم و f_s را فرکانس نمونه برداری، خواهیم داشت:

$$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) e^{-j2\pi nTf}$$



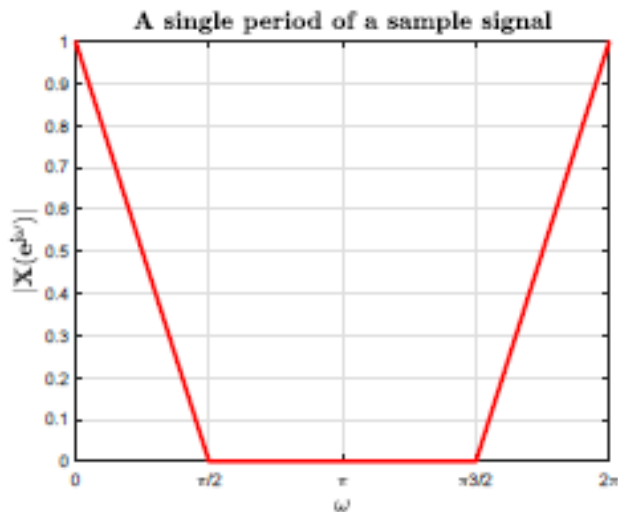
اگر سیگنالمان پایین گذر باشد یعنی برای اندازه فرکانس از حد معینی بالاتر مقدار 0 داشته باشد تصویر این تبدیل در فرکانس های مختلف همانطور که از رابطه مشخص است به صورت قطاری از تصویر آن در در یک بازه ی فرکانسی ناصفر است (جملات با یک شیفت تکرار میشوند). اگر این تصاویر شیفت یافته با هم برخورد نکند این رابطه قابل بازگشت است و اثبات میشود که میتوان از روی آن سیگنال واقعی را باز سازی کرد اما اگر این تصاویر روی هم قرار بگیرند بدیهی است که دیتای درست برای بخشی از فرکانس ها را از دست میدهم و طبعاً باز سازی ممکن نیست. (در واقع overlap بین تبدیل و شیفت بافته ان در شکل به معنی overlap بین تبدیل سیگنال از 0 تا B و قسمت متقارن است که میتواند شکل حاصل را تخریب کند) به راحتی از روی شکل مشخص میشود اگر بیشنه اندازه فرکانسی که تبدیل فوریه سیگنال $X(f)$ در آن ناصفر است B باشد برای حد بحرانی برای f_s که به ازای ان شکل ها امیخته نشده باشند داریم:

$$f_s - B \geq B$$

$$\rightarrow f_s(\text{critical}) = 2B$$

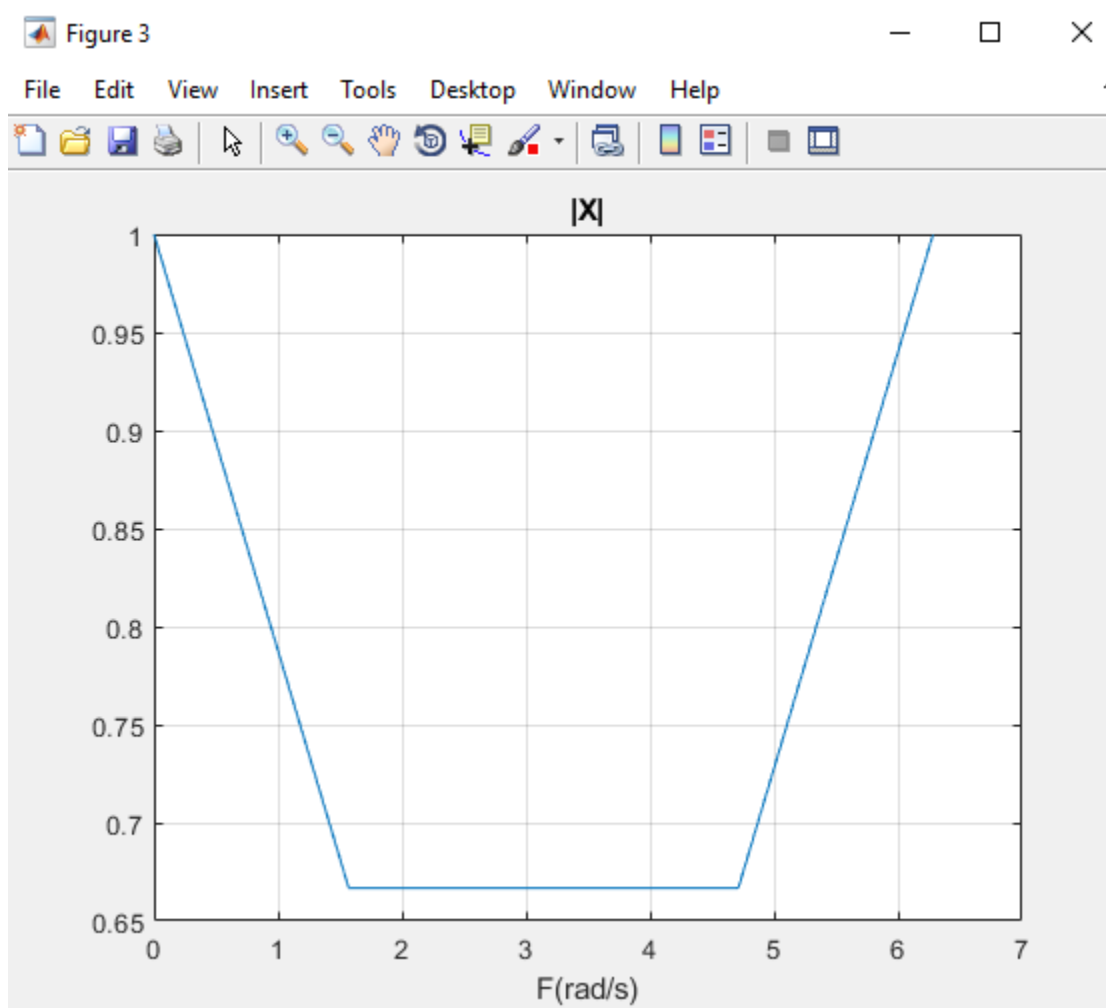
این قضیه توسط شخصی به نام نایکویست بیان شده و همانطور که دیدیم به این صورت است که برای اینکه بتوان از روی تبدیل فوریه نمونه برداری شده سیگنال اولی را درست باز سازی کرد فرکانس نمونه برداری باید از دو برابر بیشینه فرکانس موجود در سیگنال بیشتر باشد .

۳) همانطور که در قسمت های قبل به آن رسیدیم در یک تناوب تبدیل فوریه سیگنال نمونه برداری شده از صفر شروع شده و در حالت بحرانی تا f_s ادامه دارد (متناظرا از صفر تا 2π) و همانطور که دیدم بخشی از این اطلاعات به علت تقارن تکرار است پس در نهایت تنها به بازه صفر تا $\frac{f_s}{2}$ (صفر تا π) نیاز داریم . حال در شکل میبینیم در این مثال سیگنال از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ محتوای فرکانسی ناصفر دارد و گفته شده $f_s = 12 \text{ Hz}$ پس در واقع سیگنال تا فرکانس $\frac{f_s}{4}$ 3Hz محتوا داشته $(-3\text{Hz}, 3\text{Hz})$ و این یعنی پهنای باند 3Hz است .



شکل ۱: تبدیل فوریه گسسته زمان سیگنال نمونه

اگر فرکانس را 4Hz کنیم فرکانس نمونه برداری $1/3$ شده پس در این حالت 2π معادل فرکانس 4Hz میشود. پس در این حالت مثلث سمت راست تا $\frac{3\pi}{2}$ کشیده میشود (تا به محتوای فرکانسی ماکزیمم (3Hz) برسد) و همچنین مثلث سمت چپ نیز با شیب کند تر از حالت قبل تا $\frac{\pi}{2}$ کشیده میشود نتیجتاً شکل حاصل مانند شکل زیر خواهد بود و همانطور که میبینیم محتوای تبدیل سیگنال و مقارنش آمیخته شده ان و نتیجه به وضوح تصویر نادرستی از تبدیل سیگنال است و سیگنال اصلی از روی آن قابل بازیابی نیست. تصویر حدودی این نمودار به این صوت خواهد بود :



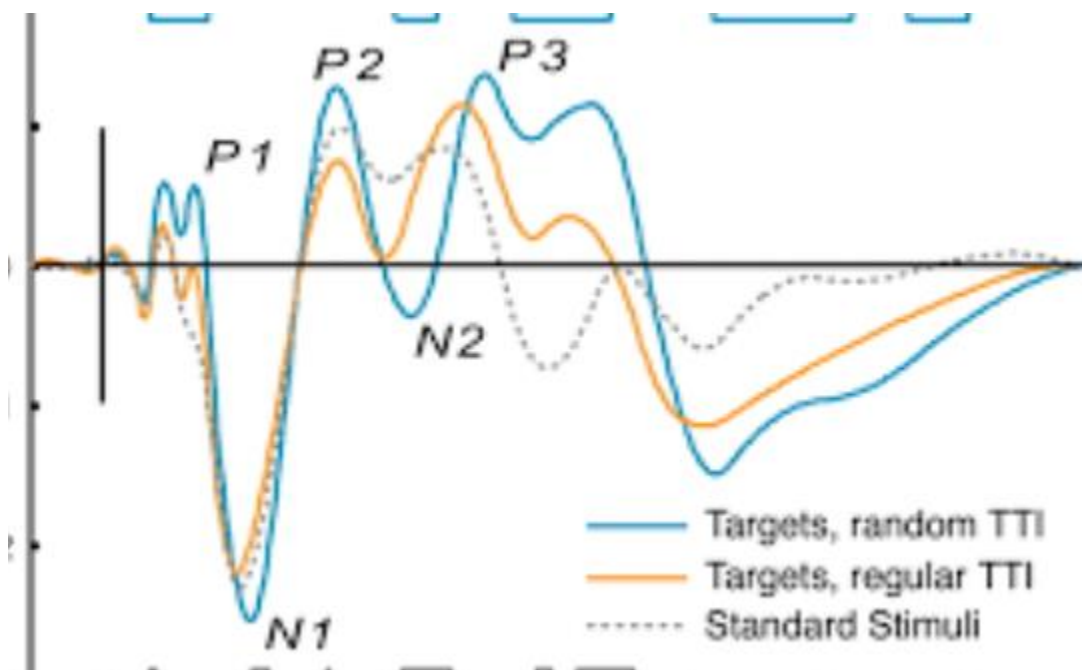
(۱) در این داده گیری دو روش وجود دارد :

تهاجمی یا *invasive* و غیرتهاجمی یا *non-invasive*

در روش غیر تهاجمی الکتروود ها برای ضبط سیگنال ها بر روی سطح سر (پوست) قرار داده میشوند و در روش تهاجمی در طریق جراحی و باز کردن جمجمه الکروود ها روی مغز قرار داده میشوند . با اینکه روش غیر تهاجمی برای انجام ساده تر به نظر میرسد اما معایبی نیز دارد . در روش غیر تهاجمی به علت فاصله زیادتر منبع تولید سیگنال (مغز) دامنه کاهش میابد . همچنین بافت ها میتوانند به عنوان فیلتر پایین گذر عمل کنند و بنابراین اکثر سیگنال های با فرکانس بالا فیلتر شده و به الکتروود ها نمیرسند اما در مقابل از این جهات روش تهاجمی دقت بالاتری دارد. علاوه بر این ها به دلیل فاصله نزدیک تر به منبع در روش تهاجمی در مقایس مکانی کوچکتري میتوان سیگنال ها را ضبط کرد به این معنا که تغییرات در سیگنال ها را میتوان ب رنج محدود تر و دقیق تری از مکان روی مغز نسبت داد.

(۲) ERP (event related potential) پاسخ مستقیم مغز به یک رویداد خاصی حسی، شناختی و یا حرکتی است . اندازه گیری آنها را میتوان به وسیله EEG (ثبت و اندازه گیری فعالیت مغز در طول زمان با استفاده از الکتروود ها) انجام داد ، اما در EEG همه فعالیت های مغز اندازه گیری میشود که مربوط به فرایندها مختلف دیگری نیز هستند و پاسخ یک محرک خاص را نمیتوان در یک آزمایش مشخص کرد ، به همین دلیل طی آزمایش های مختلف و متعدد پاسخ مربوط به فعالیت های تصادفی مغز را به صورت میانگین پیدا میکنند و با نادیده گرفتن آن آنچه که باقی میماند را به محرک مربوطه نسبت می دهند. در این اشکال که به صورت پاسخ های به شکل موج اند تعدادی قله مثبت و منفی دیده میشود ، به اولین اوج شکل موج که یک قل منفی است N100 میگویند به این علت که اولاً منفیست و ثانیه اغلب حدوداً در ۱۰۰ میلی ثانیه پس از محرک رخ میدهد همچنین به آن N1 نیز گفته میشود چون اولین اوج و منفی است. به دنبال این قله معمولاً قله مثبتی رخ میدهد که با همان توضیحات به آن P200 یا p2 گفته میشود به

همین ترتیب مولفه های دیگری نیز اتفاق می افتند اما تاخیر زمانی آنها نسبت به متحرک دامنه گسترده ای متوانند داشته باشد و مثلا مولفه های $p300$ میتوانند در هر زمان در محدوده ۲۵۰ تا ۷۰۰ میلی ثانیه اتفاق بیفتند.



۳) باند های فرانسی

دلتا مربوط به نوزادان، خواب اهسته بزرگسالان، و فعالیت هایی که توجه مستمر لازم دارند است. (باند کمتر از ۴ هرتز)

تتا مربوط به خردسالان، خواب آلودگی در بزرگسالان و نوجوانان، بیکاری و در شرایطی که فرد بطور فعال در تلاش برای سرکوب پاسخ یا عمل است. (باند بین ۴ تا ۷ هرتز)

الفا مربوط به حالت آرام و ریلکس، بستن چشم ها. (باند بین ۸ تا ۱۵ هرتز)

بتا مربوط به حالات فعالیت، هوشیاری، تفکر و تمرکز، استرس یا وسواس و اضطراب است. (باند بین ۱۶ تا ۳۱ هرتز)

گاما مربوط به زمانی که دو حس همزمان درگیرند برای مثال شنیدن و دیدن و همچنین زمان هایی که حافظه کوتاه مدت در حال تطبیق دادن اشیاء، حس ها و یا صدا های شناخته شده است. (باند بیشتر از ۳۲ هرتز)

میو نیز نشان دهنده نورو ن های مغزی در حال استراحت است. (باند بین ۸ تا ۱۲ هرتز)

Band	Frequency (Hz)	Location	Normally	Pathologically
Delta	< 4	frontally in adults, posteriorly in children; high-amplitude waves	<ul style="list-style-type: none"> adult slow-wave sleep in babies Has been found during some continuous-attention tasks^[70] 	<ul style="list-style-type: none"> subcortical lesions diffuse lesions metabolic encephalopathy hydrocephalus deep midline lesions
Theta	4–7	Found in locations not related to task at hand	<ul style="list-style-type: none"> higher in young children drowsiness in adults and teens idling Associated with inhibition of elicited responses (has been found to spike in situations where a person is actively trying to repress a response or action).^[70] 	<ul style="list-style-type: none"> focal subcortical lesions metabolic encephalopathy deep midline disorders some instances of hydrocephalus
Alpha	8–15	posterior regions of head, both sides, higher in amplitude on dominant side. Central sites (c3-c4) at rest	<ul style="list-style-type: none"> relaxed/reflecting closing the eyes Also associated with inhibition control, seemingly with the purpose of timing inhibitory activity in different locations across the brain. 	<ul style="list-style-type: none"> coma
Beta	16–31	both sides, symmetrical distribution, most evident frontally; low-amplitude waves	<ul style="list-style-type: none"> range span: active calm → intense → stressed → mild obsessive active thinking, focus, high alert, anxious 	<ul style="list-style-type: none"> benzodiazepines Dup15q syndrome ^[71]
Gamma	> 32	Somatosensory cortex	<ul style="list-style-type: none"> Displays during cross-modal sensory processing (perception that combines two different senses, such as sound and sight).^{[72][73]} Also is shown during short-term memory matching of recognized objects, sounds, or tactile sensations 	<ul style="list-style-type: none"> A decrease in gamma-band activity may be associated with cognitive decline, especially when related to the theta band; however, this has not been proven for use as a clinical diagnostic measurement
Mu	8–12	Sensorimotor cortex	<ul style="list-style-type: none"> Shows rest-state motor neurons.^[74] 	<ul style="list-style-type: none"> Mu suppression could indicate that motor mirror neurons are working. Deficits in Mu suppression, and thus in mirror neurons, might play a role in autism.^[75]

۴) طبق قضیه نایکویست برای از دست رفتن اطلاعات ، فرکانس نمونه برداری باید حداقل دو برابر ماکزیمم باند باشد ، پس با توجه باند های فرکانسی هر کدام از سیگنال ها این فرکانس انتخاب میشود. برای مثال برای دریافت سیگنال ها تا سیگنال تتا این فرکانس باید از ۱۴ هرتز بیشتر باشد .

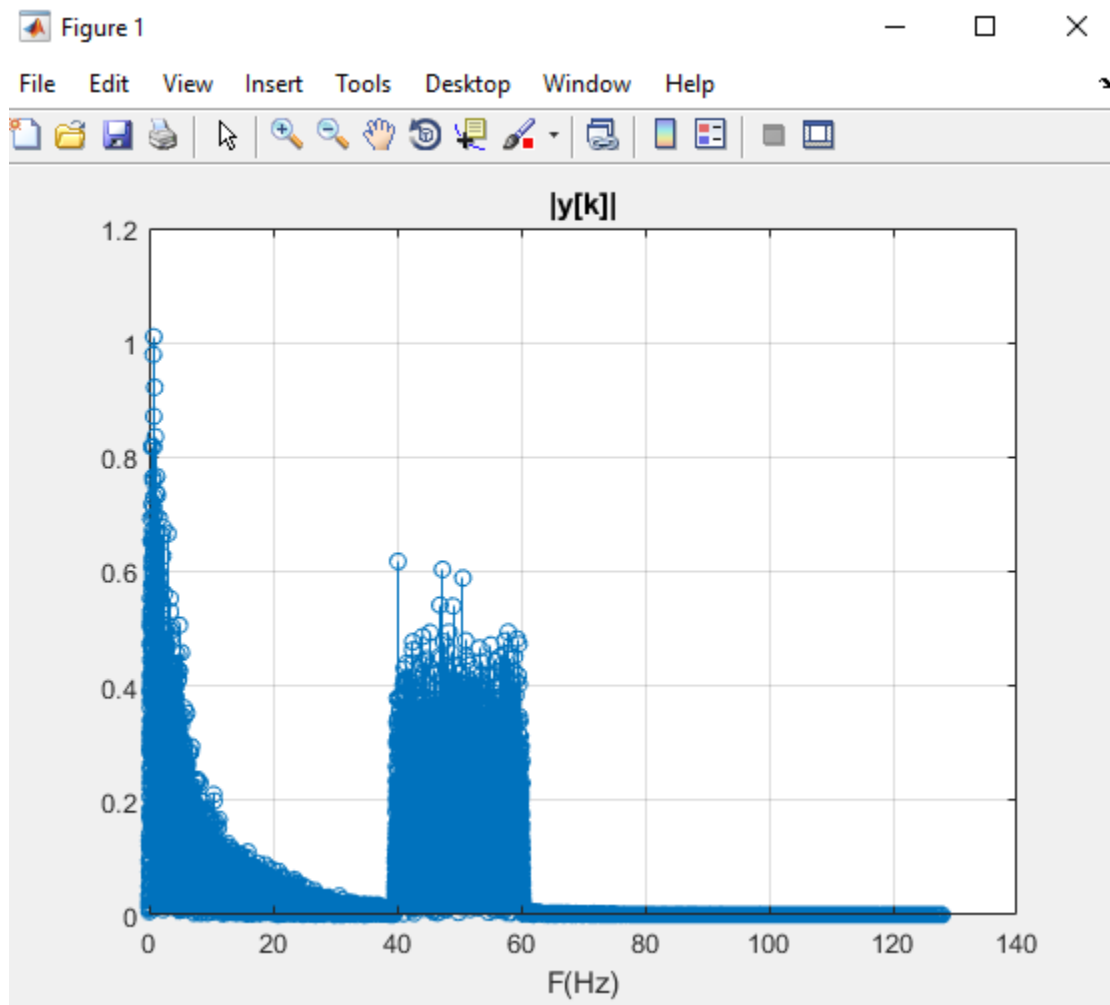
۵) فاصله زمان های نمونه برداری هر ۰.۰۰۳۹۰۶۲۵ ثانیه است در نتیجه فرکانس نمونه برداری تقریبا ۲۵۶ هرتز است.

۶) برای فرکانس نمونه بردری ما باقی محتوا یفرکانسی که از $fs/2$ بیشترند (شامل نویز و فرکانس های از حد معینی بالاتر که محتوای کمی دارند به نسبت بقیه) فیلتر میشوند و به همین منظور فرکانس قطع ۱۲۸ هرتز منطقی است. این ماکزیمم فرکانس قطع است اما برای مثال اگر

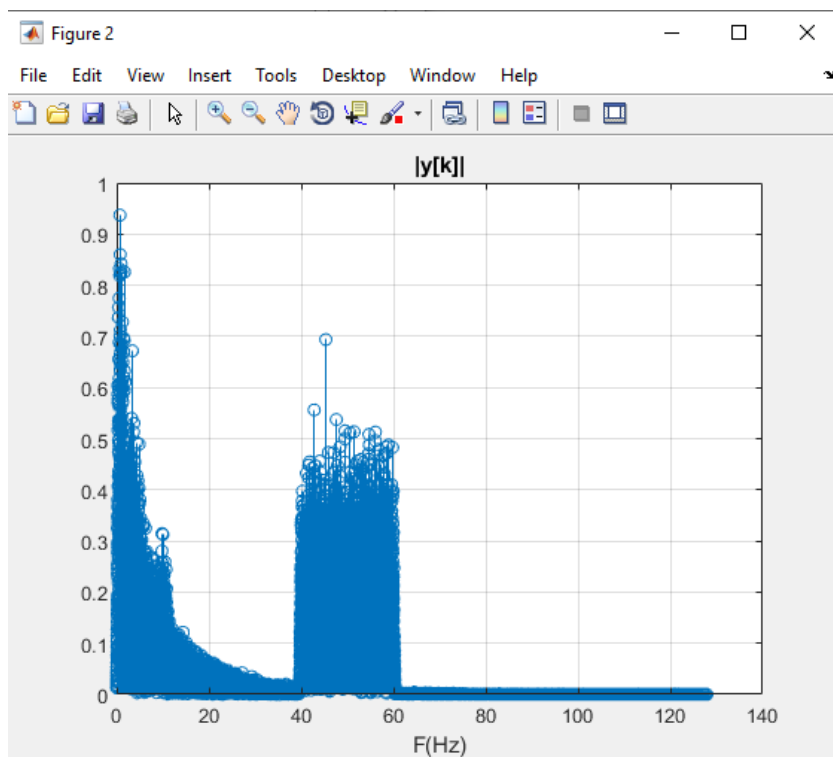
بخواهیم نهایتاً تا باند بتا را مطالع کنیم بالای فرکانس ۳۱ هرتز را قطع میکنیم به طور تقریبی
متوان گفت برای این منظور فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع ۳۵ هرتز میتواند معقول باشد.

(۷)

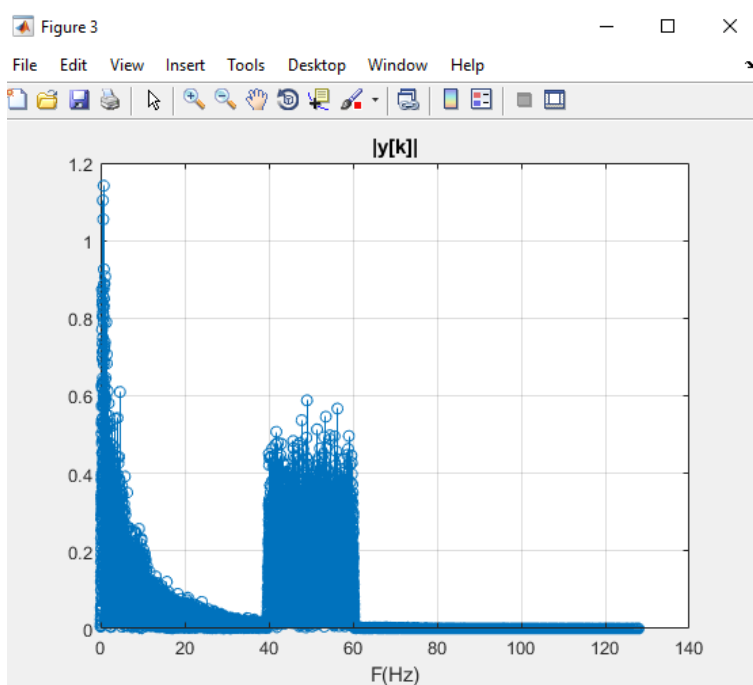
سطر دوم



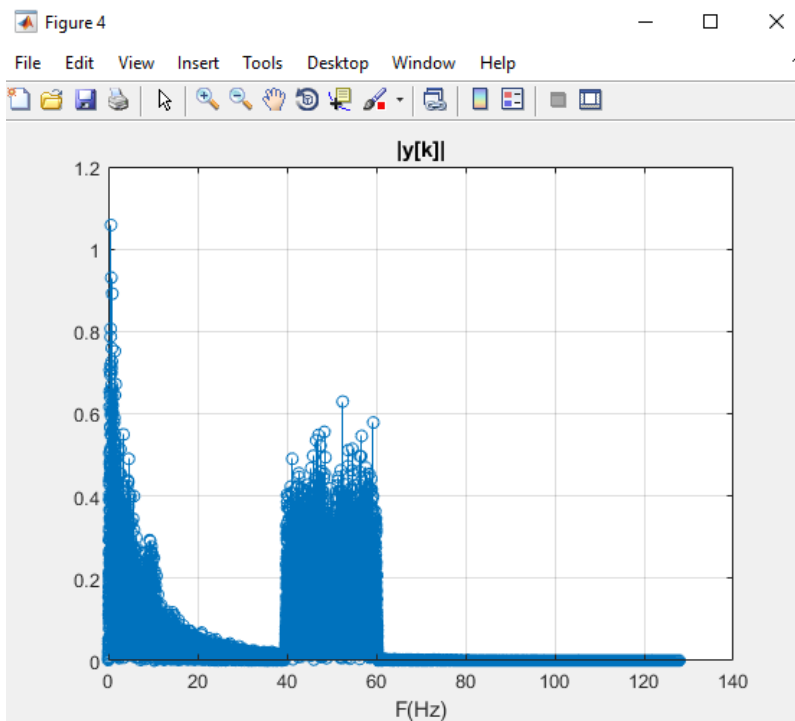
سطر سوم



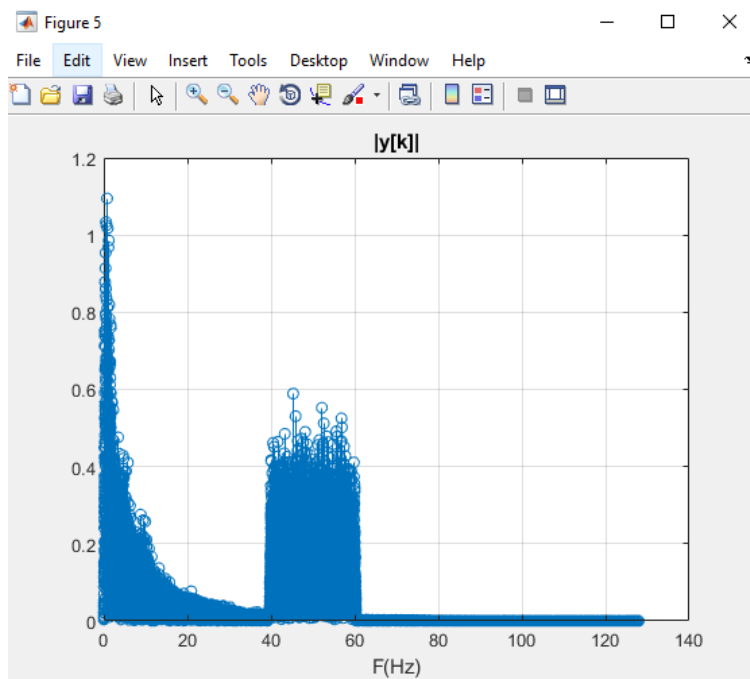
سطر چهارم



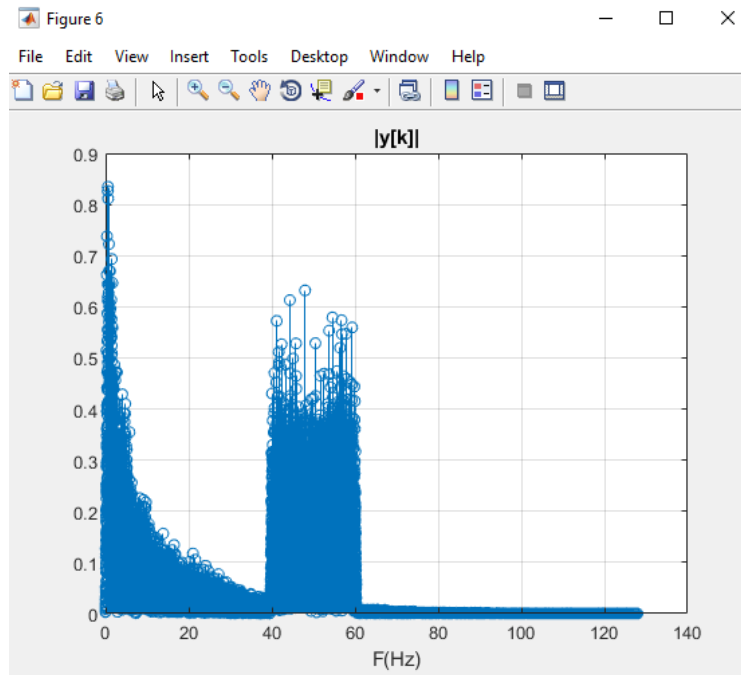
سطر پنجم



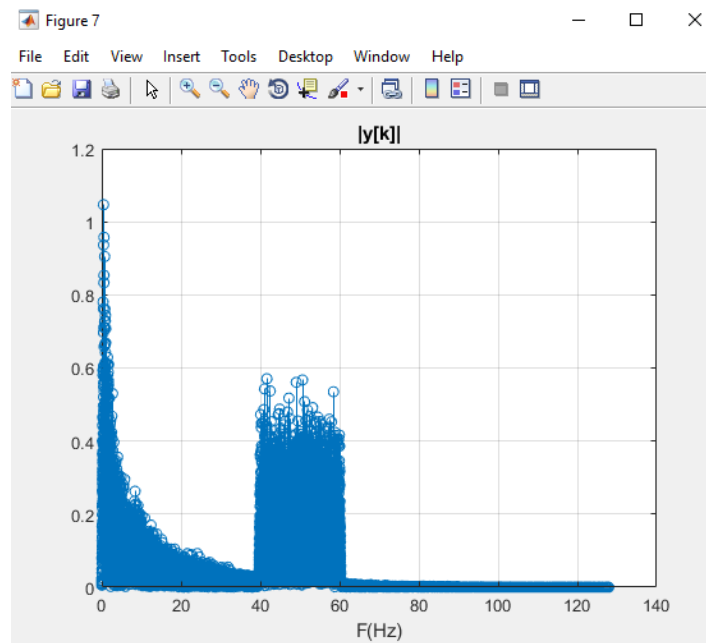
سطر ششم

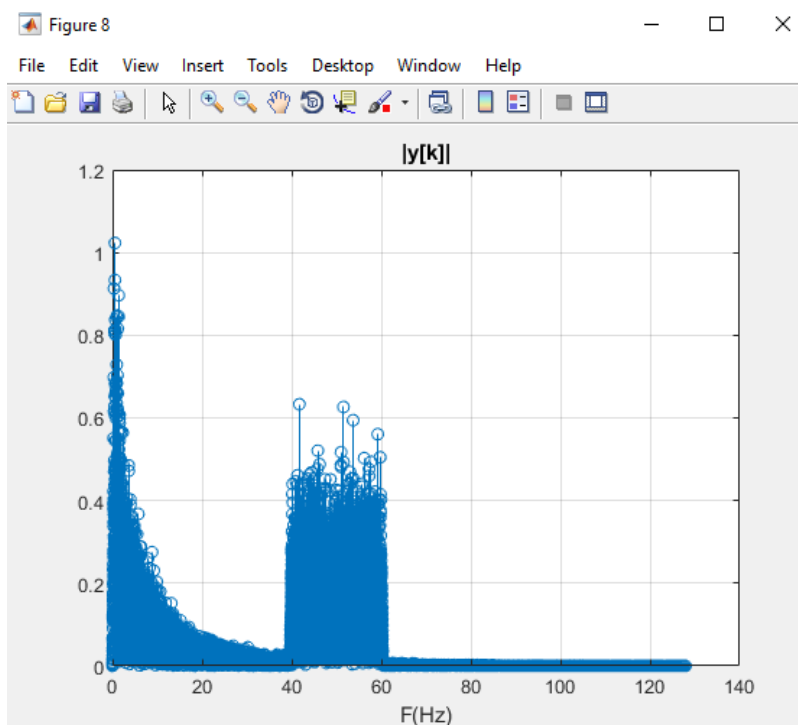


سطر هفتم



سطر هشتم

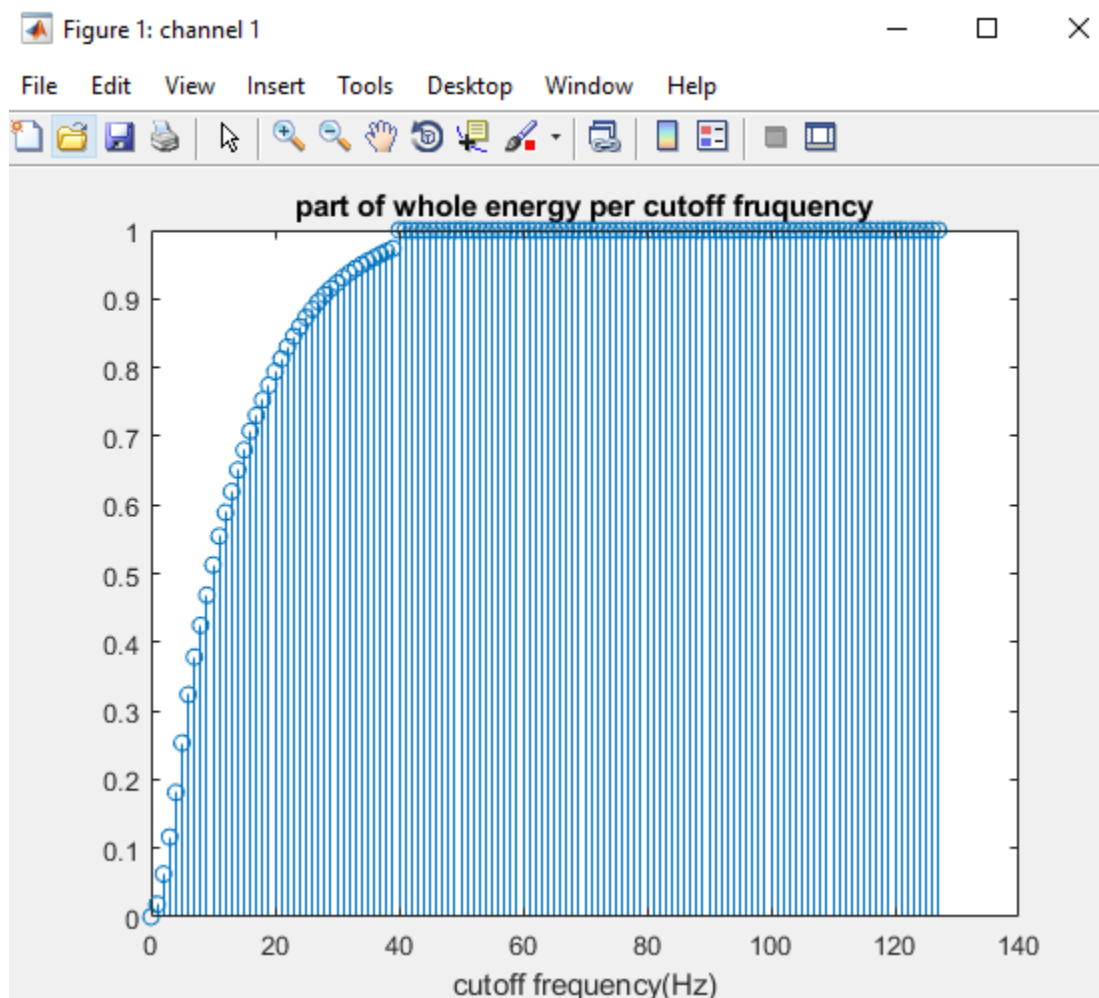




همانطور که میبینیم در اثر افزایش فرکانس محتوا دایما کم نشده که نشان دهنده وجود نویز در فاصله فرکانسی ۴۰ تا ۶۰ هرتز است (در ۵۰ هرتز و با پهنای باند ۱۰) بنابر این اگر فرکانس قطع را ۴۰ هرتز انتخاب کنیم بنظر این مشکل رفع میشود.

۸) در این قسمت برای میخواهیم سیگنال را بار دیگر از روش حداکثر انرژی فیلتر کنیم اما مسئله ای که مسلم است این است که این روش مستقیماً برای جواب تابع بنظر کاربردی نیست چون نویزی که بین ۴۰ تا ۶۰ هرتز قرار دارد دارا بخش قابل توجهی از انرژی است و به همین دلیل بهتر است این کار را بعد از فیلترینگ اول یعنی از بین بردن نویز بخش قبل انجام دهیم و از طرف دیگر وجود محتوا در فرکانس ۰ بی معنی است چون بخش دی سی اطلاعات منتقل نمیکند و بنابر این این داده را صفر شده است.

شکل این بخش نمودار نسبت انرژی در هر فرکانس قطع به انرژی کل را به صورت گسسته نشان میدهد (دقت شود که بعد از فیلترینگ اول است و بنابراین بالای ۴۰ هرتز محتوای انرژی در نظر گرفته نشده)



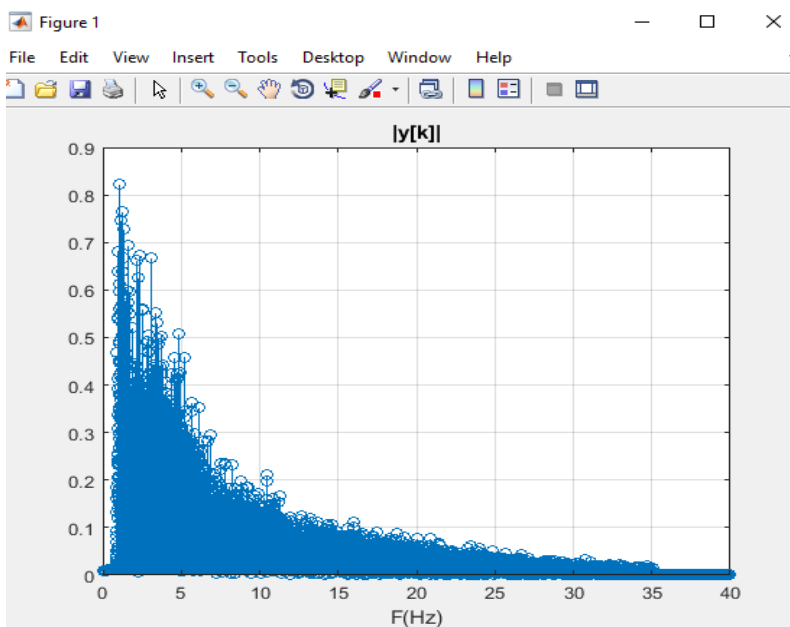
باقی کانال ها نیز همانند این شکل اند و در کد موجود هستند .

۹) از این مقادیر و تصاویری برای نسبت انرژی نتیجه میگیریم فرکانس قطع مناسب میتواند محلی باشد که حدود ۹۵ درصد انرژی سیگنال قبل آن است و باتوجه به این مقادیر فرکانس حدود ۳۵ هرتز به نظر گزینه مناسبی برای فرکانس قطع است.

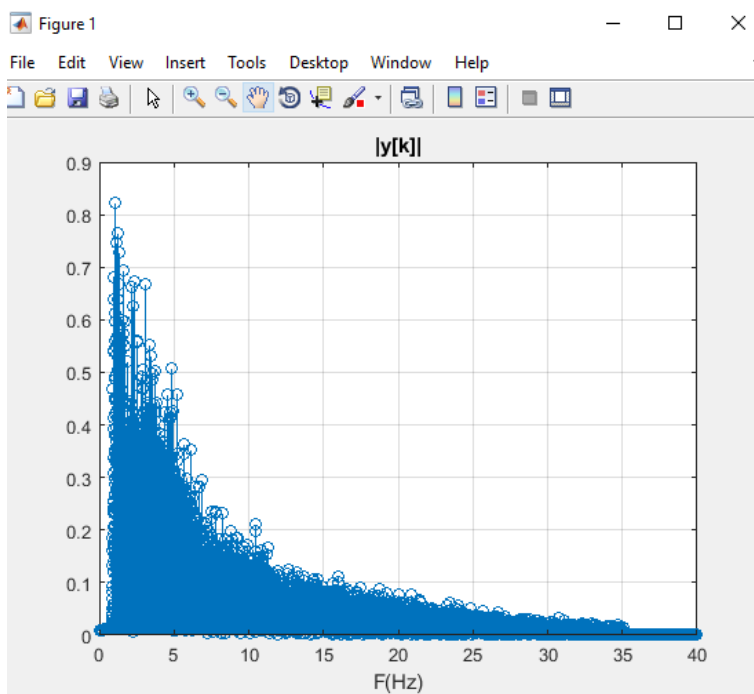
33	34	35	36	37	38
0.9378	0.9443	0.9499	0.9550	0.9601	0.9648

۱۰) حذف کردن میانگین کافی نیست ، به این دلیل که نویز DC به صورت یکنواخت پخش نشده و برای مثال با حذف کردن آن مقدار محوای فرکانس ۰ همچنان نا صفر است و این نشان میدهد که با این حال نویزی سی باقی میماند برای همین با یک تقریب فرکانس های خیلی نزدیک به صفر را نیز نویز در نظر میگیریم و یک فیلتر بالاگذر اعمال میکنیم.

۱۱) برای این کار بعد از حذف میانگین از تابع فیلتر داده شده استفاده کردم و چون تابع به نحوی است که ما بین دو فرکانس پایین و بالا را با گین یک و قبل و بعد آن را با یک شیب عبور میدهد برای بازه فرکانس بالا و پایین به طور مثال احتیاطاً ۳۵ و ۵ در نظر گرفته میشود. خروجی این تابع را به فیلتر متلب میدهیم و نتیجه به صورت زیر است : (فرکانس قطع باتوجه به بخش های قبل ۳۵ هرتز فرض شده) خروجی نمونه برای کانال اول به این صورت است و باقی کانال ها به ترتیب از ۱ تا ۸ در کد قابل مشاهده اند .



(۱۲) برای کاهش فرکانس نمونه برداری طبق اصل نایکویست میدانیم اگر فرکانس نمونه برداری دو برابر پهنای باند سیگنال باشد دچار مشکل نمیشویم ، در حال حاضر پس از این مراحل به این نتیجه رسیدیم که ۳۵ هرتز فرکانس مناسبی برای قطع میباشد و در نتیجه میتوانیم فرکانس نمونه برداری را تا ۷۰ هرتز کاهش دهیم اما برای اینکه این کار به صورت عملی نیز ممکن باشد باید فرکانس ثانویه مضرب صحیح از فرکانس قبلی باشد و بنابراین بجای ۷۰ هرتز این فرکانس را تا $256/3 = 85.333$ هرتز کاهش میدهیم بدین منظور از هر ۳ داده متوالی حالت قبل یکی را نگه میداریم. اگر این بخش کد را اجرا کنیم میبینیم که به همان نتایج قبل میرسیم برای مثال برای کانال اول :

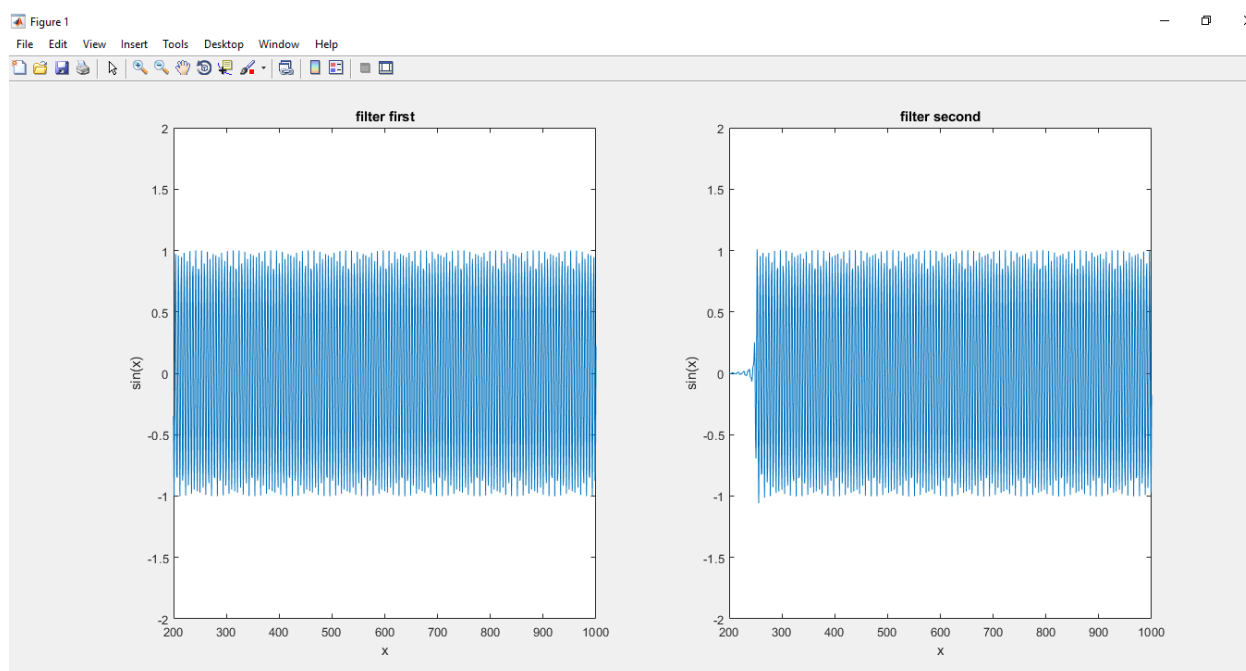


(۱۳) کاهش فرکانس قبل از فیلترینگ:

اگر قبل از فیلتر کردن فرکانس را کم کنیم ممکن است اگر سیگنال دارای محتوای فرکانسی قابل توجهی در فرکانس های بالا داشته باشد، محتواهای فرکانس های بالا روی سیگنال اثر مخرب

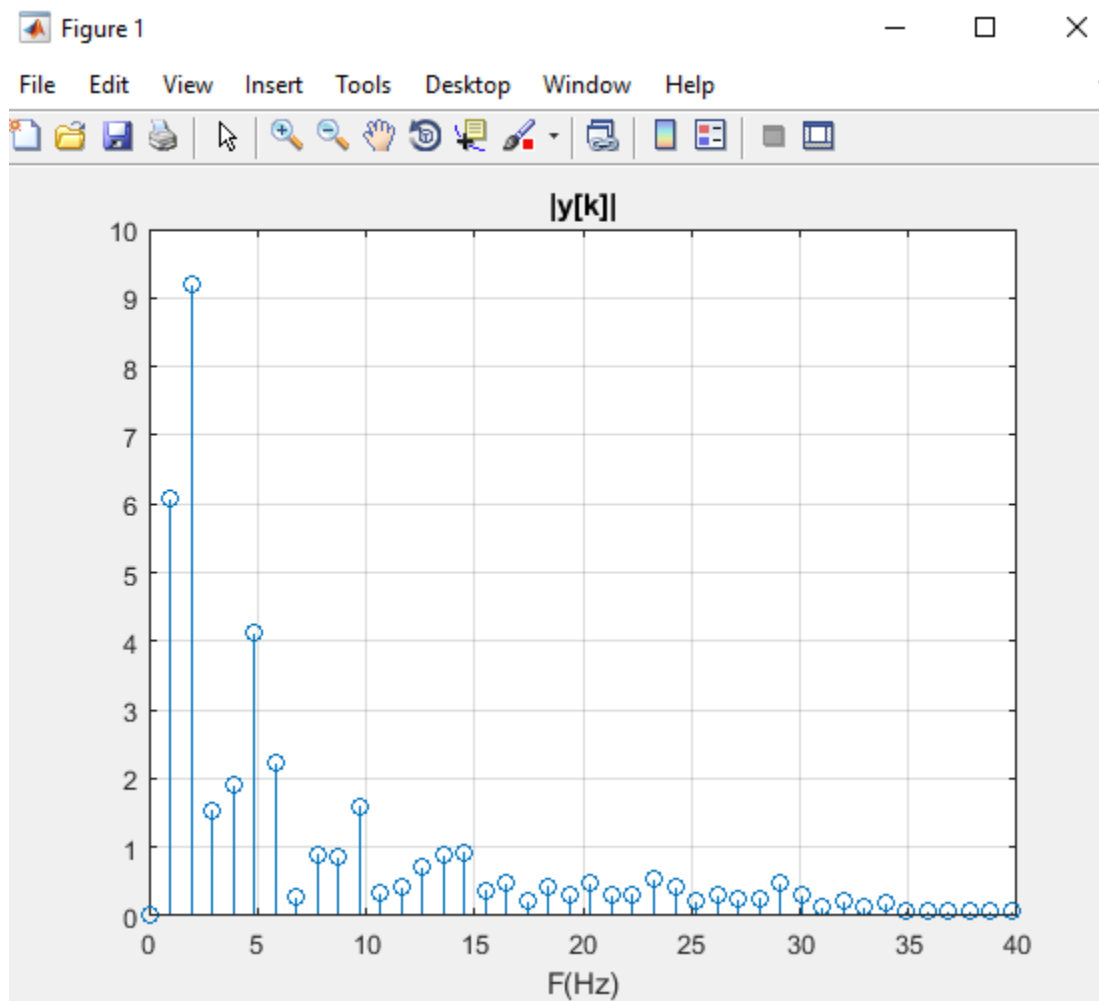
بگذارند برا مثال نویزی که در حالت اول در این کانال ها وجود دات بخش قابل توجهی از محتوای کل سیگنال را شامل میشد و کاهش فرکانس قبل از حذف آن باعث رخ دادن پدیده **aliasing** میشد که قبلا علت آن را بررسی کرده ایم.

۱۴) برای ان بخش یک نمونه سینوسی با نویز سینوسی که روی آن نشسته بررسی شدو نتیجه بررسی همانطور که در شکل میبینیم این است که وقتی ابتدا پنجره ای را دا میکنیم و سپس روی آن فیلتر را اعمال میکنیم فیلتر اعمال شده با میزانی تاخیر و تدریجا به سیگنال ما کانوالو میشود و نتیجتا دیتا های اولیه ما در این حالت اسیب میبینند که این تاخیر تقریبا به اندازه طول فیلتر است ، اما اگر ابتدا فیلتر را اعمال بکنیم و سپس داده های وسط را اسفاده کنیم آن تاخیر در اوایل بوده که در پنجره ما نیست و بنابر این نتیجه درست تری داریم .



۱۵) با توجه به نکته بالا به همین دلیل که دیتا های اولیه ما در اثر فیلتر اسیب میبینند بنابر این ما باید مقداری دیتا از قبل از زمانی که در پنجره برسیمان قرار میگیرد داشته باشیم که در صورت فیلتر شدن به نمونه های درون پنجره و یا همان **epoch** اسیب نرسد.

۱۶) برای مشخص کردن *passband* ها در تابع چند نمونه از ایپاک ها را برای کانال اول رسم کردم که در کد کامنت شده است و همانطور که میبینیم اکثر محتوا در ۱ تا ۱۰ هرتز است پس منطقی است این دو بازه را به تابع *freqband* بدهیم.



انرژی برای این بخش به صورت فایل تحویل داده شده اما در صورت ران کردن کد تصویر متحرک آن را نیز در چنل های مختلف میبینم.

خوشه بندی

(۱) طبق رابطه کوشی شوارتز داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t) Y(t) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(t) Y(t)| dt$$

$$-\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)^2 dt} \leq \int_{-\infty}^{\infty} X(t) Y(t) dt \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)^2 dt}$$

$$r(xy) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} X(t) Y(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)^2 dt}} \rightarrow |r(xy)| \leq 1$$

(۲) اگر تساوی رخ دهد داریم :

$$\left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} X(t) Y(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)^2 dt}} \right| = 1$$

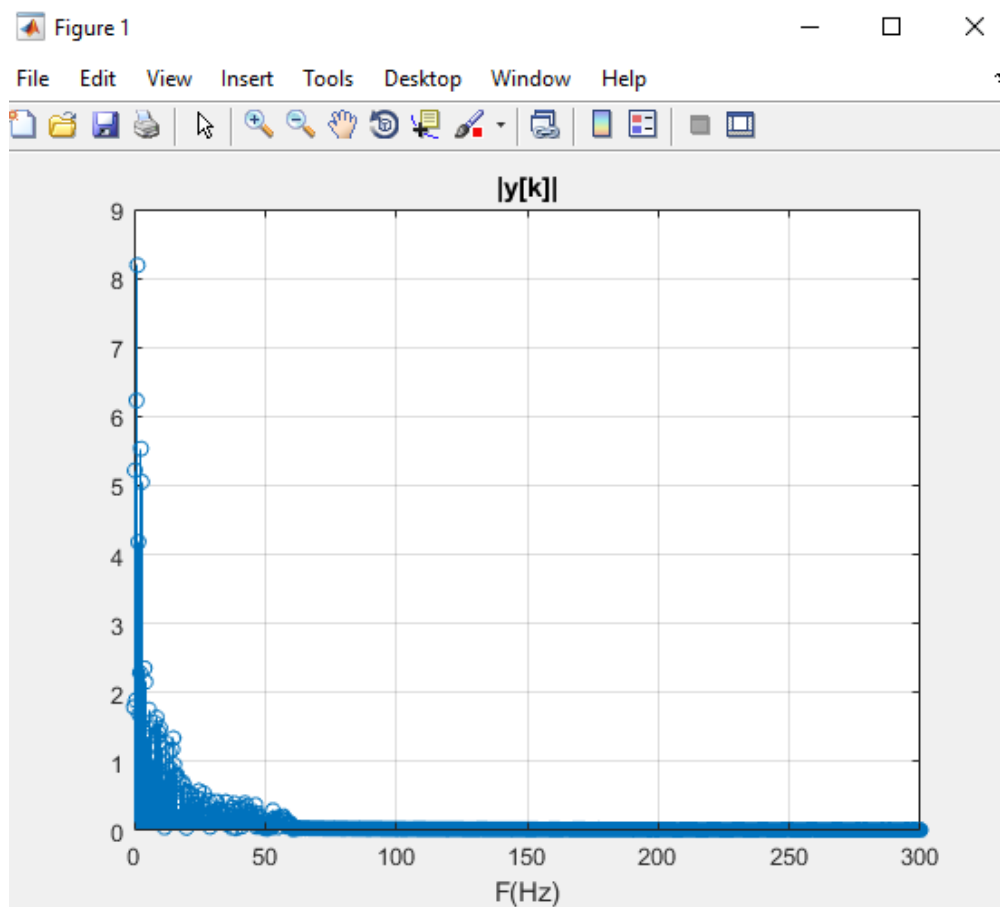
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(t) Y(t) dt \right| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)^2}$$

که دوباره طبق قضیه کوشی شوارتز این تساوی زمانی رخ میدهد که :

$$x(t) = \alpha Y(t)$$

(۳) از آمار و احتمال میداریم کورلیشن یا ضریب همبستگی خطی معیاری برای وجود ارتباط خطی و عدم وجود آن بین دو تابع است به این صورت که اگر کورلیشن صفر باشد یعنی هیچ ارتباط خطی بین دو تابع وجود ندارد و اصطلاحاً دو تابع مستقل خطی اند . اگر دو سیگنال همبسته خطی باشند (یعنی این ضریب ۱ باشد) به معنای وابسته بودن کامل این دو تابع به هم است و یعنی با داشتن یکی میتوانیم دیگری را به طور کامل حدس بزنیم و پس همانطور که میبینیم به نوعی این ضریب نشاندهنده ی میزان قابل پیش بینی بودن یک سیگنال از روی دیگری (شباهت) است.

(۴) برای حذف نویز ها مواردی که از قسمت های قبل میدانیم : مقدار دی سی (میانگین) سیگنال باید حذف شود چون اطلاعاتی به همراه خود ندارد ، محدوده ای از فرکانس که نزدیک ۵۰ هرتز است در اردر فرکانس برق شهر است و همانطور که در قسمت های قبل دیدیم نویز بزرگی را ایجاد میکند (فیلتر میانگذر بین ۱ تا ۴۰) . اما در اینجا چون در نزدیکی ۵۰ هرتز حتی نویز قایل توجهی نداریم از عبور دادن از فیلتر صرفه نظر کردم چون صرفاً باعث خراب شدن بخش مهم سیگنال میشد و در اینجا به صفر کردن دی سی و کم کردن میانگین اکتفا کردم . شکل نمونه یکی از آزمایشهای کانال اول نیز به صورت زیر بود:



- (۵) اگر فرکانس قطع را از روی شکل در حدود ۶۰ را در نظر بگیریم (چون با فرض زیاد نبودن نویز محتوا ها مهم اند) طبق نایکویست فرکانس ۱۲۰ به بالا برای نمونه برداری مناسب است در نتیجه میتوانیم تا یک پنچ فرکانس را کاهش دهیم .
- (۶) برای فاصله رابطه پیشنهادی اختلاف ضرایب همبستگی از ۱ است زیرا نزدیک بودن این ضرایب به ۱ به معنی شباهت و پس دور بودن آنها به معنی عدم شباهت است .
- (۷) برای فاصله دو خوشه دو پیشنهاد مطرح میشود که اولی این است که به صورت کاملاً ساده میانگین فواصله اعضای یک خوشه را از یک خوشه دیگر به عنوان فاصله مطرح کنیم و دیگری این که این میانگین را به صورت وزن دار اعمال کنیم به ای صورت که وزن

فاصله هر خوشه به اندازه تعداد اعضایش بیشتر باشد البته روش های دیگری مثل واسطه هندسی و یا لگاریتمی نیز وجود دارند . دو حالت اول گفته شده به صورت زیر اند :

$$d_{ij,k} = \frac{d_{j,k} + d_{i,k}}{2}$$

9

$$\frac{1}{|A||B|} \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} d(x, y) \quad , \quad d_{AB,x} = \frac{|A| d_{A,k} + |B| d_{B,k}}{|A| + |B|}$$

که در کد ز حالت اول استفاده شده .

۸) تابع پیاده سازی شده است به این صورت که تا زمانی که فاصله از مقدار معنی کمتر بیشتر نیست میانگین فواصل را پیدا کرده خوشه ها را آپدیت میکند و ماتریس فاصله را نیز طوری تغییر میدهد که خوشه های حذف شده پس از تلفیق به نوعی در ماتریس فاصله اثرشان از بین برود سپس خوشه ها درون سلول هایی قرار میگیرند و به خروجی داده میشوند.

۹)

برای چند فاصله متوالی کلاستر ها را بررسی کردم و به نظر میاید فاصله حدود ۰.۴ فاصله خوبی برای توقف است چون در داده های ۶۴ کانالی نتیجه خوشه بندی به واقعیت نزدیک تر بود.

برای مثال اکثر کانال هایی که در شکل اده شده نزدیک به هم بودند در یک خوشه قرار گرفتند
اگر چه کانال هایی هم وجود داشت که نزدیک باشند اما هم خوشه نباشند که البته بخشی از این
موضوع طبیعی است.

الکتروود های مرتبط به این صورت بودند :

1,2,3,4

7,8,36

10,14,34,38

12,13,41

15,16,17,21,39,40,45,49

62

63

58

43

42,47

29,30,31,32,56,57,60

28,59

24,48,61

23,26,27,51,55

19,52

18,22,46,50

5,6,9,11,20,25,33,35,37,44,53,54

(۱۰)

اگر این فاصله را مطابق حالت قبل ۰.۴ در نظر بگیریم داریم :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	[1,2]	[]	[3,4,5]	[]	[]	[6,7]	[]	8

اگر آن را تا ۰.۳ نیز کاهش دهیم داریم :

1x8 cell

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	[1,2]	[]	[3,4,5]	[]	[]	[6,7]	[]	8

که با توجه به این نتایج به نظر میرسد کانال های ۱ و ۲ ، ۳ و ۴ و ۵ ، ۶ و ۷ به صورت گروهی نزدیک به هم واقع شده اند و کانال ۸ ام احتمالاً با آنها فاصله بیشتری دارد .