OKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

2013.05.23 | **MAT 234 – Matematik IV – Final Sınavı** | N. Course

ADI SOYADI
ÖĞRENCİ NO
İMZA

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You should write your student number on every page.
5. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the final 10 minutes of the exam.
6. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
7. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
8. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
5. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
6. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
7. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
8. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOTAL

Question 1 (Symbolic Logic and Proof by Contrpositive).

(a) [4×2p] Mark the following statements as *true* or *false*?

$(P \implies Q) = (Q \implies P)$	☐ *true*	☐ *false*
$(P \wedge \neg P) = \text{true}$	☐ *true*	☐ *false*
$\neg(P \wedge Q) = (\neg P \wedge \neg Q)$	☐ *true*	☐ *false*
$\neg(P \implies Q) = (P \wedge \neg Q)$	☐ *true*	☐ *false*

(b) [6p] Prove that $(P \implies Q) = (\neg Q \implies \neg P)$.

(c) [8p] Let $a, b \in \mathbb{Z}$. Use **proof by contrapositive** to prove that

$$a + b \geq 15 \qquad \Longrightarrow \qquad a \geq 8 \ \text{ or } \ b \geq 8.$$

(d) [3p] We say that a sequence (a_n) is *bounded* iff, there exists $M \geq 0$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, we have $|a_n| \leq M$.

Give the definition of "(a_n) is *not bounded*".

Question 2 (Cauchy Sequences)**.**

(a) [5p] Give the definition of a *Cauchy sequence.*

(b) [8p] Let $b_n = 10^{-n} - 100$, for all $n \in \mathbb{N}$. **Use the definition** that you wrote in part (a) to show that (b_n) is a Cauchy sequence.

(c) [12p] Show that

$$(x_n) \text{ is a convergent sequence} \qquad \Longrightarrow \qquad (x_n) \text{ is a Cauchy sequence.}$$

Question 3 (The Proof of The Alternating Series Test).

(a) [5p] Give the definition of a *convergent series*.

For parts (b) – (f), suppose that

- (a_n) is a sequence of real numbers;
- $a_n > 0 \ \forall n$;
- (a_n) is decreasing [i.e. $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n$];
- $a_n \to 0$ as $n \to \infty$;
- $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$.

(b) [4p] Show that $s_{2n+2} - s_{2n} \geq 0$ for all n.

[In other words: Show that (s_{2n}) is an increasing sequence.]

(c) [4p] Show that $s_{2n} \leq a_1$ for all n.
[This proves that (s_{2n}) is bounded above.]

(d) [4p] Show that (s_{2n}) is convergent.

(e) [4p] Let $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Show that $s_{2n+1} \to s$ as $n \to \infty$ also.

(f) [4p] Show that $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converges.

Question 4 (Series)**.** Decide if each of the following series converges or diverges. Justify (prove) your answers.

(a) [8p] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(b) [8p] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$.

(c) [9p] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+1)}$.

[You may use any theorem/lemma/test/example/etc. from the course, but you must say which one you are using.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)}$$

Question 5 (Power Series and Taylor Series)**.**

(a) [5p] Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ be a power series. Give the definition of the *radius of convergence* of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Consider the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+1)^2}. \tag{1}$$

(b) [7p] Find the radius of convergence of (1).

(c) [13p] Calculate the Taylor Series for $f(x) = \cos x$, **centred at** $a = \pi$.

[HINT: You may assume without proof that $\left|\frac{f^n(c)}{n!}(x-\pi)^n\right| \to 0$ as $n \to \infty$ for all $c, x \in \mathbb{R}$.]