OKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

04.01.2012 **MAT 233 – Matematik III – Yarıyıl Sonu Sınavı** N. Course

ADI SOYADI
ÖĞRENCİ NO
İMZA

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have 120 minutes to answer 4 questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You should write your student number on every page.
5. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the final 10 minutes of the exam.
6. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
7. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
8. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam 120 dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan 4 tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
5. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
6. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
7. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
8. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOTAL

Formula Page

$$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos 0 = \cos 0^\circ = 1$$
$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0$$
$$\cos\tfrac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\tfrac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}$$
$$\sin\tfrac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\tfrac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$$
$$\sin\tfrac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$$

$$(uv)' = uv' + u'v$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$
$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$
$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$H(f) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$\tfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$
$$\tfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\tfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$, $\quad \int \tan x\ dx = \ln|\sec x| + C$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$, $\quad \int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\mathrm{cosec}^2 x$, $\quad \int \cot x\ dx = \ln|\sin x| + C$

$\mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$ $\qquad \frac{d}{dx}\mathrm{cosec}\, x = -\mathrm{cosec}\, x\cot x$, $\quad \int \mathrm{cosec}\, x\ dx = -\ln|\mathrm{cosec}\, x + \cot x| + C$

$$\tfrac{d}{dx}\sin^{-1}\tfrac{x}{a} = \tfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$\tfrac{d}{dx}\tan^{-1}\tfrac{x}{a} = \tfrac{a}{a^2+x^2}$$
$$\tfrac{d}{dx}\sec^{-1}\tfrac{x}{a} = \tfrac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

$$\tfrac{d}{dx}e^x = e^x$$
$$\tfrac{d}{dx}\ln|x| = \tfrac{1}{x}$$

$$A = \int dA$$
$$dA = \frac{1}{2}r^2\ d\theta$$
$$L = \int ds$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$e = \frac{c}{a}\ \textbf{where}\ c = \sqrt{a^2-b^2}\ \textbf{or}\ c = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$\textbf{discriminant} = B^2 - 4AC$$
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$
$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B}$$

$$dA = dxdy = rdrd\theta = |J(u,v)|\,dudv$$
$$dV = dxdydz = rdrd\theta dz = \rho^2\sin\phi\ d\rho d\phi d\theta = |J(u,v,w)|\,dudvdw$$

Question 1 (Substitutions in Multiple Integrals)**.** [25p] Use the transformation

$$u = 2x - y \quad \text{and} \quad v = y,$$

to calculate

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2}\,dxdy.$$

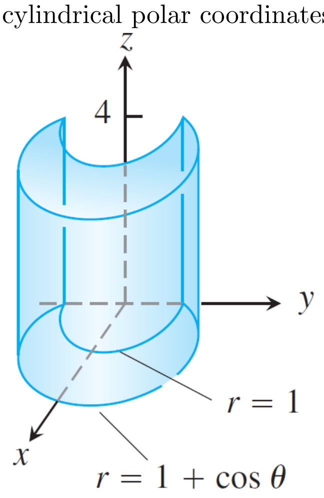
$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dxdy.$$

Question 2 (Cylindrical Polar Coordinates)**.** Let D be the region

$$D := \{(r,\theta,z) : -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2},\ 1 \le r \le 1+\cos\theta,\ 0 \le z \le 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

(see below), where we are using cylindrical polar coordinates.



(a) [11p] Calculate the volume of D.

Let

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

(b) [11p] Calculate

$$\iiint_D f \; dV.$$

(c) [3p] Calculate the *average value* of f on D.

Question 3 (Directional Derivatives and Lagrange Multipliers).

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{i} = (1, 0) \\ \mathbf{j} = (0, 1)\end{array}}$$

(a) [10p] Suppose that $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is defined by

$$h(x, y) = \frac{x - y}{xy + 2}.$$

Suppose that $P_0 = (1, -1)$ and $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Calculate the derivative of h at the point P_0 in the direction $\mathbf{v}$.

[HINT: $\mathbf{v}$ is not a unit vector.]

(b) Suppose the temperature (in °C) at a point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ is given by

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600.$$

[12p] Find the hottest point on the surface

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16.$$

[3p] What is the temperature, T, at the hottest point?
[HINT: Use a Lagrange Multiplier.]

ÖRNEKTİR ÖRNEKTİR ÖRNEKTİR ÖRNEKTİR

Question 4 (Extrema and Saddle Points)**.**

(a) [10p] Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by

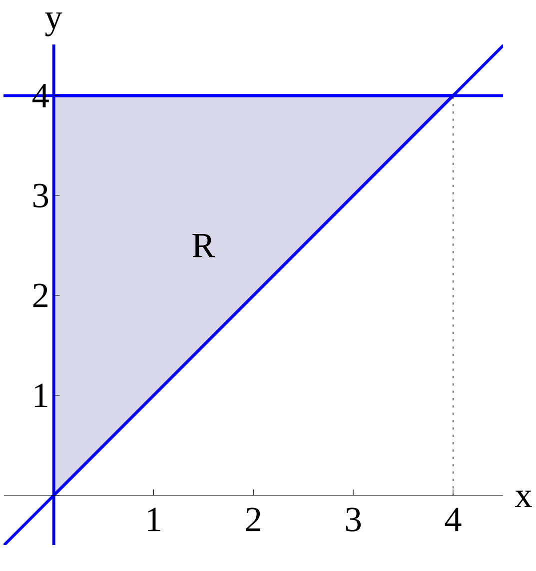
$$f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy.$$

Find all the local maxima, local minima and saddle points of f.

Let R be the closed region bounded by the lines $x = 0$, $y = 4$ and $y = x$ (see below). Let $g : R \to \mathbb{R}$ be defined by

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1.$$

(b) [15p] Find the absolute maximum and absolute minimum of g on R.



Question 5 (The Heat Equation and Double Integrals)**.** Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ and let $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by

$$u(x,t) = ae^{x+c^2t} + be^{-x+c^2t}.$$

(a) [7p] Show that

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(The Heat Equation)}.$$

Let $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by

$$g(x, y) = 3y^3x.$$

Let R be the region bounded by the curves $y = -x$, $y = 1$ and $x = y^2$ (see below).

(b) [18p] Calculate

$$\iint_R g \; dA.$$