



OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2014.05.29

MAT234 Matematik IV – Final Sınavı

N. Course

ADI: Ö R N E K T İ R
SOYADI: S A M P L E
ÖĞRENCİ NO: 0 1 0 6 0
İMZA:

Süre: 120 dk.

Sınav sorularından 4
tanmesini seçerek
cevaplayınız.



Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.



- You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
- The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
- All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
- You must show your working for all questions.
- Write your student number on every page.
- This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
- If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
- Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
- All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
- Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.
- Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
- Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
- Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
- Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
- Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
- Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
- Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
- Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
- Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak her şeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
- Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|--------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | TOPLAM |
| 24 | 25 | 25 | 25 | 25 | 100 |

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \operatorname{cosec}^2 \theta \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 0 &= \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0 &= \sin 0^\circ = 0 \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} &= \cos 90^\circ = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} &= \sin 90^\circ = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(uv)' &= uv' + u'v \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} \\ \int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ H(f) &= f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\ln |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} \frac{x}{a} = \frac{a}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$$

$$A = \int dA$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$L = \int ds$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$dA = dx dy = r dr d\theta = |J(u, v)| du dv$$

$$\begin{aligned}dV &= dx dy dz = r dr d\theta dz = \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= |J(u, v, w)| du dv dw\end{aligned}$$

Soru 1 (Supremum and Infimum of a Sequence)

- (a) [5p] Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be a set. Give the definitions of the *supremum* and *infimum* of S .

Consider the sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ defined by

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{n}.$$

- (b) [4p] Calculate a_1, a_2, \dots, a_{10} .

$$a_1 =$$

$$a_6 =$$

$$a_2 =$$

$$a_7 =$$

$$a_3 =$$

$$a_8 =$$

$$a_4 =$$

$$a_9 =$$

$$a_5 =$$

$$a_{10} =$$

Define three new sequences $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ by $b_n := a_{2n}$, $c_n := a_{4n-3}$ and $d_n := a_{4n-1}$. For example, (d_n) is the sequence $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, a_{19}, \dots$

Now clearly

$$b_n = a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sin(n\pi) + \frac{(-1)^{2n}}{2n} = 0 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Since b_n is a decreasing sequence, $b_1 \geq b_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. So $b_1 = \frac{1}{2}$ is an upper bound for (b_n) . Furthermore, we can show that $\frac{1}{2}$ is the least upper bound: If $M < \frac{1}{2}$, then $b_1 > M$ and so M is not an upper bound. Therefore we have that $\sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots\right\} = \frac{1}{2}$.

- (c) [4p] Prove that

$$\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

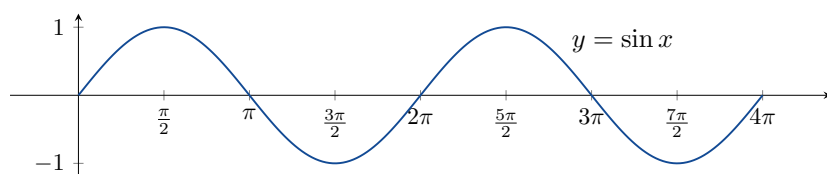
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{n},$$

$$c_n := a_{4n-3},$$

$$d_n := a_{4n-1}.$$

- (d) [4p] Find $\inf\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ and $\sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(You must justify your answer.)

- (e) [7p] Find $\inf\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ and $\sup\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(You must justify your answer.)



Soru 2 (Symbolic Logic and Negating a Definition)

(a) [8p] Prove that

$$\left((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q) \right) = \neg P.$$

Definition A sequence (a_n) is a null sequence if and only if for all $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$;

$$n > N \implies |a_n| < \varepsilon.$$

- (b) [7p] Give the definition of “ (a_n) is **not** a null sequence”.

[HINT: Negate the definition above.]

A sequence (a_n) is **not** a null sequence if and only if

.....

.....

Let

$$b_n := \frac{n-2}{n}$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

- (c) [10p] Show that (b_n) is **not** a null sequence.

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

Soru 3 (Series) Decide if each of the following series converges or diverges. Justify (prove) your answers.

(a) [8p] $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^2 \frac{1}{n}.$

(b) [8p] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^3}{(3n)!}.$

(c) [9p] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3n^3 + 4n}.$

[You may use any theorem/lemma/test/example/etc. from the course, but you must say which one you are using.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^2 \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^3}{(3n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3n^3 + 4n}$$

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

Soru 4 (Power Series)

- (a) [5p] Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ be a power series. Give the definition of the *radius of convergence* of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Define the set

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^n \text{ converges} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

- (b) [20p] Find S .

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^n \text{ converges} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

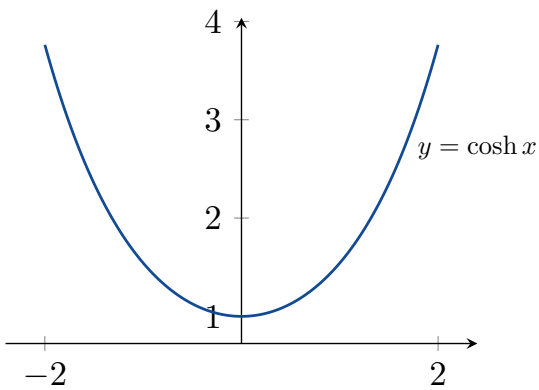
ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

Soru 5 (Taylor Series)

- (a) [10p] Calculate the Taylor Series for $f(x) = \cosh x$, centred at $a = 0$.

[You may assume without proof that $\left| \frac{f^n(c)}{n!} x^n \right| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for all $x \in \mathbb{R}$ and for all c between 0 and x .]



(b) [15p] Use your answer to part (a) to calculate $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}}{t^6}$.

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR