

ALLOCATION MULTI ACTIFS

RECHERCHE ÉCONOMIQUE

Étude, Mars 2011

Allocation multi-Actifs : éléments de méthode

Nous avons revu en profondeur notre méthode d'allocation d'actifs en prenant acte de l'évolution de la littérature théorique et des conséquences de la crise sur les portefeuilles construits sur la base des seuls enseignements de Markowitz.

Cette nouvelle méthode répond à plusieurs exigences :

- **Capturer les caractéristiques propres à chaque actif** (leur non normalité) et leur risque joint (co-mouvements extrêmes)
- **Utiliser une technique d'optimisation à partir d'un critère de risque pertinent** (la CVaR)
- **Formuler des vues forward looking de moyen terme** (horizon 1 an) sur l'ensemble des actifs et constituer l'allocation stratégique qui en découle
- **Formuler des choix tactiques fondés sur des arbitrages temporaires** inter ou intra classes d'actifs (profiter de signaux techniques, de décorrélations...) et définir une nouvelle allocation sans altérer les risques sous-jacents (méthode Copula Opinion Pooling)
- **Comprendre et maîtriser les risques du portefeuille** final Natixis, notamment l'impact de nos décisions tactiques sur la structure de risque du portefeuille.

Auteurs

Sophie Chardon
Annabelle de Gaye
Karim El Ali
Evariste Lefeuvre
Solène Oberg

Directeur de la publication

Patrick Artus, patrick.artus@natixis.com, 01 58 55 15 00

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	3
I. CAPTURER LES CARACTERISTIQUES DE CHAQUE ACTIF ET LE RISQUE JOINT	6
I.1. Modélisation des lois marginales dans un cadre non normal	6
I.2. Le risque joint (ou dépendances extrêmes).....	9
II. LES OUTILS ET METHODES POUR L'ALLOCATION D'ACTIFS	12
II.1. Les méthodes traditionnelles	12
II.2. Formulation de vues forward looking sans altérer les risques inhérents aux actifs : la méthode COP (Meucci, 2006)	13
II.3. Optimisation de portefeuille : la CVaR, un critère de risque pertinent.....	14
III. L'APPROCHE ORIGINALE DE NATIXIS	16
III.1. Formulation de vues de moyen terme et définition du processus d'allocation	17
III.2. Assemblage de vues de court terme et de moyen terme par la méthode COP : définition du portefeuille Natixis.....	18
IV. COMPREHENSION ET MAITRISE DES RISQUES DU PORTEFEUILLE NATIXIS ..	21
IV.1 Contribution des actifs au risque du portefeuille.....	21
IV.2 Une mesure du degré de diversification du portefeuille : le ratio de diversification.....	22
IV.3 Un indicateur de risque global	23
CONCLUSION.....	24
BIBLIOGRAPHIE	25
ANNEXES	26

INTRODUCTION

Après plus de cinq années d'allocation d'actifs fondée sur les critères traditionnels de l'industrie (déviations autour d'un benchmark avec une contrainte de risque implicite de type Tracking error) **nous avons revu en profondeur notre méthode.**

La crise initiée en 2008 a non seulement révélé une fois de plus les limites de l'allocation d'actifs traditionnelle (modèle de Markowitz et ses développements ultérieurs) mais également révélé **la nécessité de mieux prendre en compte certaines propriétés des rendements des actifs (non normalité, limite des corrélations comme indicateur de dépendance).** La définition même du risque, souvent cantonnée à la seule volatilité, a également été revue.

Cette note a pour but de revenir sur les incontournables de l'analyse univariée et multivariée des rendements des prix des actifs et le renouveau des méthodes d'allocation d'actifs tout en présentant les applications à notre nouveau portefeuille multi actifs NATIXIS.

Vues Stratégiques / Vues Tactiques

Notre publication antérieure reposait sur un benchmark censé refléter le portefeuille-type d'un investisseur institutionnel européen. Partant du principe que nos vues macroéconomiques devaient fonder le socle de notre portefeuille de moyen terme (un an), l'allocation stratégique est désormais basée sur les hypothèses de rendements cross-asset qui en découlent. **En d'autres termes, notre allocation stratégique reflète nos vues macroéconomiques à horizon d'un an.**

Les pondérations et expositions relatives sur chacune des classes d'actifs peuvent néanmoins faire l'objet d'arbitrages à fréquence plus ou moins élevée. **Chaque mois, une allocation de court terme est donc proposée** afin d'exploiter des opportunités d'investissement identifiées (décrochages, momentum, valeur relative, arbitrages géographiques...). Tel sera l'objet principal de la publication mensuelle « Allocation Multi-Actifs ».

Les actifs inclus dans le portefeuille sont présentés dans le tableau ci-dessous, étudiés sur la période de 1999 à 2010 sur données hebdomadaires. Les rendements sont exprimés en performance totale, soit coupons et dividendes inclus. Toutes les performances sont couvertes du risque de change (via des forward) pour un investisseur de la zone euro (voir Annexe 1). Les principales évolutions concernant la composition du portefeuille sont : i) l'introduction des **effets de taille sur les actions européennes**¹, ii) l'apparition des **matières premières** (pétrole et or), iii) la **discrimination entre les qualités des dettes souveraines** en zone euro, ceci dans le but de **mieux appréhender les thématiques actuelles.** L'indice utilisé pour représenter les dettes périphériques en zone euro (« Obligation souveraines périphériques Euro » dans le tableau ci-dessous) est en fait calculé afin de retracer l'évolution des dettes 10 ans de l'Italie, du Portugal, de l'Irlande, de l'Espagne et de la Grèce pondérée par les capitalisations de marché de chacune de ces dettes².

¹ Indices Stoxx Europe Large 200, Stoxx Europe Mid 200 et Stoxx Europe Small 200

² Fin 2010, cet indice était composé à 43,4% de dette italienne, de 12% de dette irlandaise, de 7,4% de dette grecque, 22,6% de dette espagnole et 14,6% de dette portugaise.

Tableau 1 : Liste des actifs du portefeuille

Actif	Indice	Monnaie
Actions Europe (Large)	DJ Stoxx	EUR
Actions Europe (Small & Mid)	DJ Stoxx	EUR
Actions U.S.	S&P500	USD
Actions émergentes	Datastream	USD
GSCI Pétrole	GSCI	USD
GSCI Or	GSCI	USD
Obligations souveraines AAA 1-3 ans	Merrill Lynch	EUR
Obligations souveraines AAA 7-10 ans	Merrill Lynch	EUR
Obligations souv. périphériques Euro	Merrill Lynch	EUR
Obligations souv. U.S. 7-10 ans	Barclays	USD
Indexées inflation Euro	EMTS	EUR
Crédit Euro IG Non Financières	iBoxx	EUR
Crédit Euro High Yield	Merrill Lynch	EUR
Monétaire €	JP Morgan	EUR

Source: Natixis

Une modélisation des rendements des actifs financiers plus fidèle à l'observation empirique

Partant de cet univers d'investissement, la première partie de l'étude est consacrée à la modélisation des actifs financiers. Nous présentons les limites de l'hypothèse de normalité de leurs distributions et l'instabilité des corrélations en fonction des régimes d'aversion pour le risque.

La présence d'évènements extrêmes, comme vus lors des périodes de bulles ou de crises financières, invalide l'hypothèse standard de normalité des rendements d'actifs financiers pourtant encore largement répandue et à l'origine de nombreux modèles. **De la non-normalité des rendements découle également la présence de rupture de corrélation entre actifs**, notamment dans les périodes de forte volatilité. On constate clairement un effet de contagion entre marchés lors d'une phase de forte aversion au risque et donc de dépendances extrêmes modifiées. **L'utilisation de copules permet de capturer le risque joint des actifs en définissant une distribution jointe indépendamment de la distribution marginale.**

Le renouveau du processus d'allocation d'actifs :

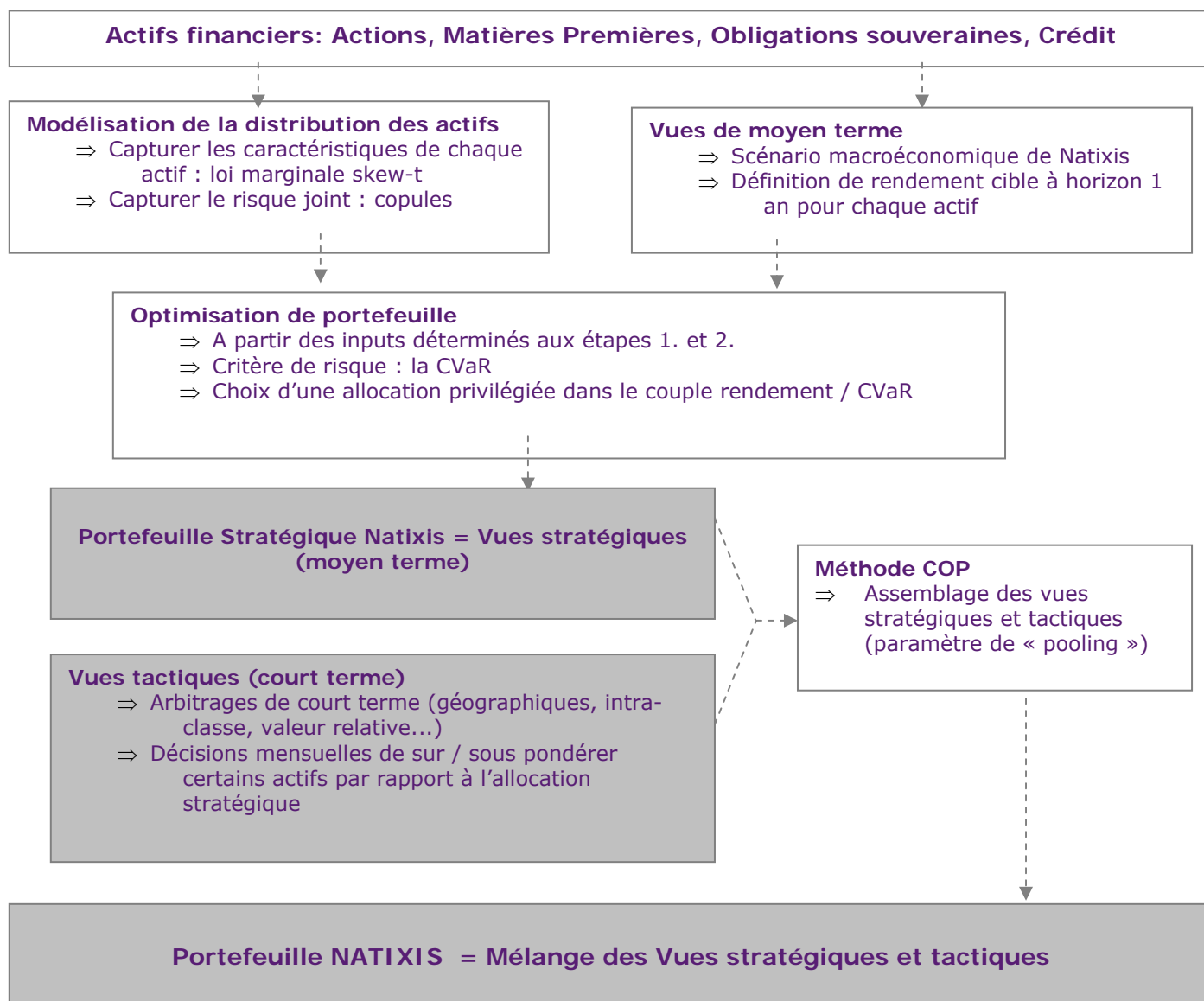
La deuxième partie se focalise plus sur le processus d'allocation d'actifs à l'origine de la création de notre portefeuille stratégique, puis de court terme. Nous sortons du cadre traditionnel de Markowitz pour adopter une optimisation susceptible d'intégrer la non-normalité et les dépendances extrêmes des rendements, une métrique de risque (la CVaR) supérieure à la simple volatilité historique et aussi, et surtout, de prendre en compte nos propres vues selon la confiance que nous y accordons.

Mise en œuvre des vues tactiques : modus operandi et gestion du risque

Une fois défini notre portefeuille stratégique, nous procéderons tous les mois à **une allocation de court terme fondée non pas sur une sur/sous pondération *a priori* par rapport au benchmark mais en combinant nos vues tactiques et stratégiques dans le processus d'optimisation** (Copula Opinion Pooling, COP). Ces vues tactiques pourront provenir d'un arbitrage entre actifs, au sein d'une même classe d'actifs (long/short, pentification/aplatissement de la courbe des taux) ou encore d'un positionnement directionnel (momentum positif, retracement...).

La **gestion du risque** associée à l'allocation de court terme sera pilotée à l'aide d'une analyse de la contribution de chaque actif au risque global du portefeuille. Nous mesurerons également tous les mois le degré de diversification du portefeuille de court terme par rapport à sa référence stratégique. Enfin, l'année 2010 a montré que la corrélation entre actifs pouvait être très prononcée. Nous essaierons de nous prémunir du risque systémique à l'aide du calcul d'un ratio d'absorption : plus le risque sera concentré, plus il sera temps d'envisager une allocation défensive...

Le processus d'Allocation Multi-Actifs de Natixis



I. CAPTURER LES CARACTERISTIQUES DE CHAQUE ACTIF ET LE RISQUE JOINT

I.1. Modélisation des lois marginales dans un cadre non normal

Dans le cadre traditionnel d'allocation d'actifs, les rendements sont supposés suivre une distribution gaussienne, une hypothèse héritée du Théorème Central Limite dans sa forme originelle (rendements indépendamment et identiquement distribués) sur laquelle sont fondés de nombreux résultats en finance mathématique. La présence de queues de distribution épaisses dans les séries de rendements indique que la normalité représente davantage l'exception que la règle. En outre, **plus la fréquence d'étude est élevée (journalière, hebdomadaire), plus les données observées dévieront de la normalité**, tandis que le cadre gaussien peut paraître plus approprié à des horizons d'investissement longs.

Comme nous travaillons à partir de données hebdomadaires, il est nécessaire de tester l'hypothèse qu'elles proviennent d'une loi normale. La Tableau 2 rend compte pour la période 1999-2010, du caractère négativement asymétrique³ (étalement à gauche révélé par un skewness<0, contrairement à la distribution normale par nature symétrique) des actifs les plus risqués (actions, matières premières, crédit). On constate également que l'ensemble des actifs présente une distribution leptokurtique (distribution plus pointue et avec des queues plus épaisses que la normale, révélée par un kurtosis>3).

Tableau 2 : Caractéristiques de skewness et de kurtosis des actifs du portefeuille

	Skewness	Kurtosis
Actions Europe (Large)	-0.7*	10.5*
Actions Europe (Small & Mid)	-0.8*	8.0*
Actions U.S.	-0.5*	8.1*
Actions émergentes	-0.7*	9.0*
GSCI Pétrole	-0.5*	4.9*
GSCI Or	0.1	5.5*
Obligations souveraines AAA 1-3 ans	-0.1	4.1*
Obligations souveraines AAA 7-10 ans	-0.2**	3.3
Obligations souv. périphériques Euro	1.1*	21.0*
Obligations souv. U.S. 7-10 ans	-0.3*	4.0*
Indexées inflation Euro	0.3*	4.1*
Crédit Euro IG Non Financières	-0.5*	4.4*
Crédit Euro High Yield	-1.3*	16.7*
*: significativement différent de la distribution normale au niveau de confiance 1%		
**: niveau de confiance 5%		
Source: Natixis		

Afin de capturer les caractéristiques empiriques des données, nous modélisons les distributions marginales au moyen d'une fonction paramétrique souple, la fonction skew-t, et les densités jointes grâce à des fonctions copules. **Notre choix s'est porté vers la distribution skew-t pour ses caractéristiques d'asymétrie et de queues épaisses**, particulièrement importantes en période de stress, et pour la souplesse de sa formulation qui permet également de retrouver une distribution de type gaussienne qui convient aux actifs les moins risqués. En effet, la distribution skew-t, telle que décrite par Azzalini et Capitanio (2003), est une extension de la distribution t de Student, elle-même proche de la loi normale pour des degrés de liberté élevés.

Quatre paramètres caractérisent cette distribution (détaillée en Annexe 2):

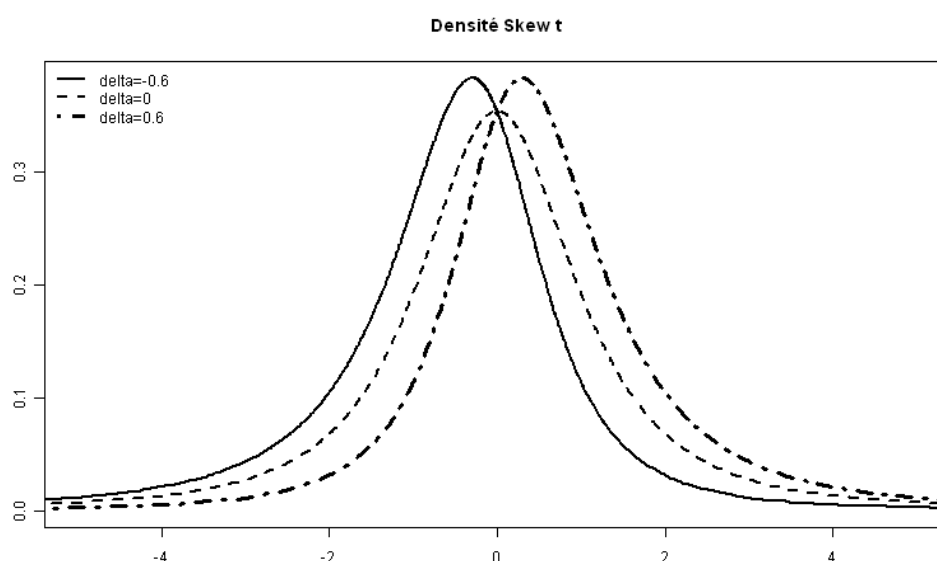
³ Le Skewness et Kurtosis sont les moments centrés normalisés par l'écart-type d'une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ , s'écrivant $\mu_h = E[(X - \mu)^h] / \sigma^h$ avec h=3 pour le skewness et h=4 pour le kurtosis.

- le **degré de liberté** (ν) déterminant l'épaisseur des queues ; plus sa valeur est faible et plus la distribution exhibera des queues épaisses. En revanche la distribution s'apparentera à celle d'une skew-normale pour un degré de liberté élevé.

- le **paramètre de location** (μ) ainsi que le **paramètre de dispersion** (σ) dont découlent la moyenne et la volatilité.

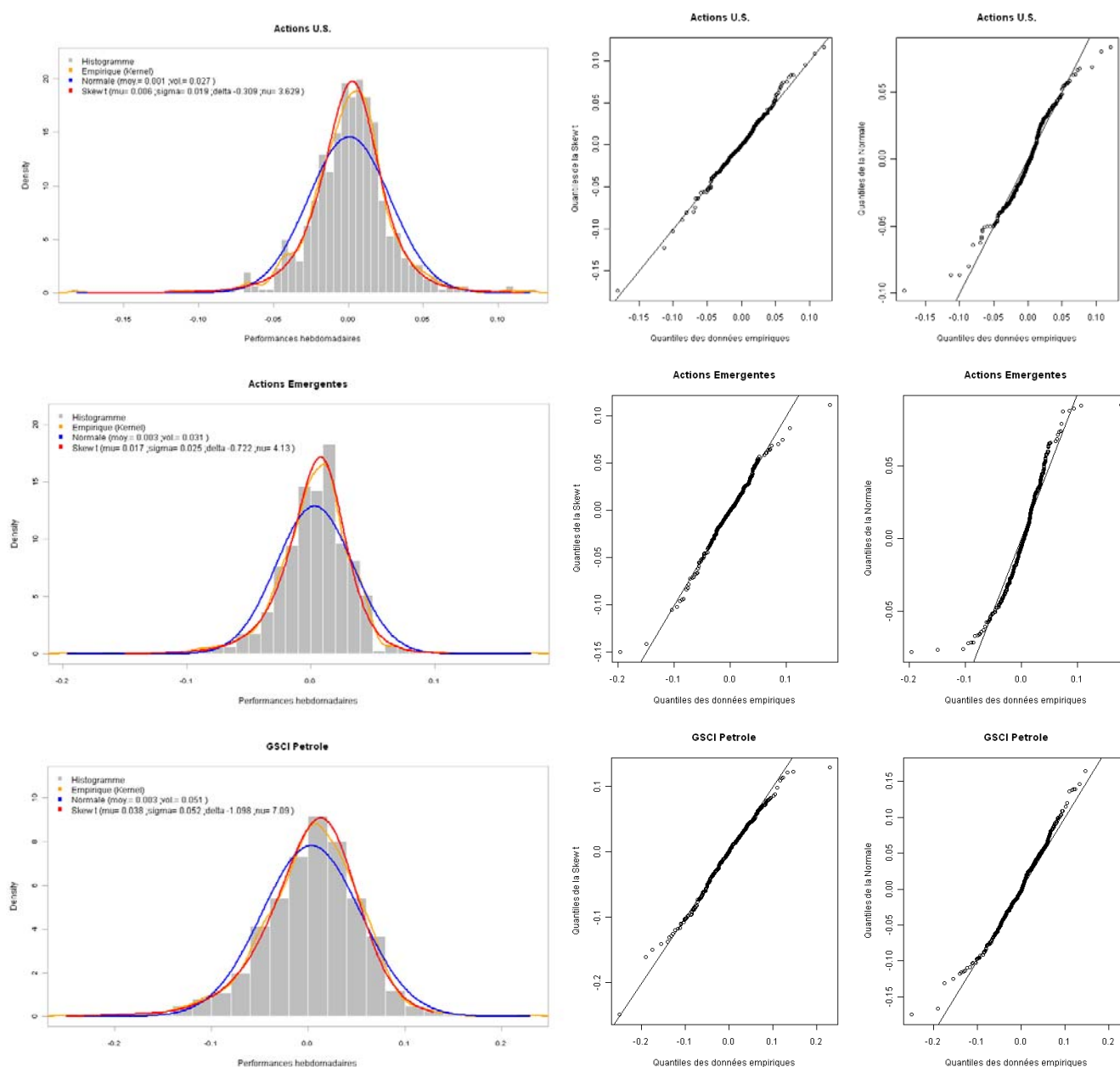
- le **paramètre d'asymétrie** (δ) : la distribution coïncide avec celle d'une t de Student lorsque $\delta=0$, mais présente une asymétrie à droite (respectivement à gauche) pour des valeurs positives de δ (respectivement négatives). Ce phénomène est illustré dans le Graphique 1, où δ prend successivement les valeurs -0.6 , 0 puis 0.6 , quand tous les autres paramètres demeurent identiques ($\mu=0$, $\sigma=1$, $\nu=2$).

Graphique 1 : Caractéristique d'asymétrie de la distribution Skew-t



Nous présentons ci-après les densités empiriques, normales et skew-t estimées pour trois actifs risqués : les actions US, les actions émergentes ainsi que l'indice pétrole du GSCI. L'estimation des paramètres de la densité skew-t est réalisée par maximum de vraisemblance. On constate **pour chacun des actifs que la distribution skew-t s'adapte davantage aux données empiriques** (échantillon historique ou estimé par la méthode du noyau) que la distribution normale, à la fois au niveau du centre de la distribution mais aussi au niveau des queues (sous estimation systématique par la normale des événements de la queue gauche). Ceci est confirmé par les graphiques Quantile-Quantile comparant les quantiles issus des données empiriques à ceux de la densité théorique. En effet, les événements des premiers quantiles d'après la skew-t apparaissent beaucoup plus proches des événements extrêmes réellement observés que ceux obtenus d'après la normale (déviation de la ligne de parfaite adéquation).

Graphique 2 : Densités empiriques vs théoriques et représentations Quantile – Quantile



Un test d'adéquation des données observées à la loi théorique permettrait de valider formellement nos intuitions. Nous réalisons donc le test de Kolmogorov Smirnov, d'une part sur la distribution normale et d'autre part sur la distribution skew-t (données hebdomadaire sur la période de 1999 à 2010). Le premier cas conduit au rejet de l'hypothèse de normalité pour un certain nombre d'actifs, au seuil de significativité de 10%. Si les distributions des actifs obligataires de bonne qualité (dette souveraine AAA ou corporates Investment Grade) peuvent être approchées par des lois Normales, il apparaît très clairement que ce n'est pas le cas pour les actifs plus risqués (actions, matières premières, obligations périphériques ou High Yield). Les résultats du second test convergent vers une même conclusion : **on ne peut rejeter l'hypothèse selon laquelle les données proviennent d'une loi skew-t.**

Tableau 3 : Test d'adéquation à la loi normale et à la loi skew-t

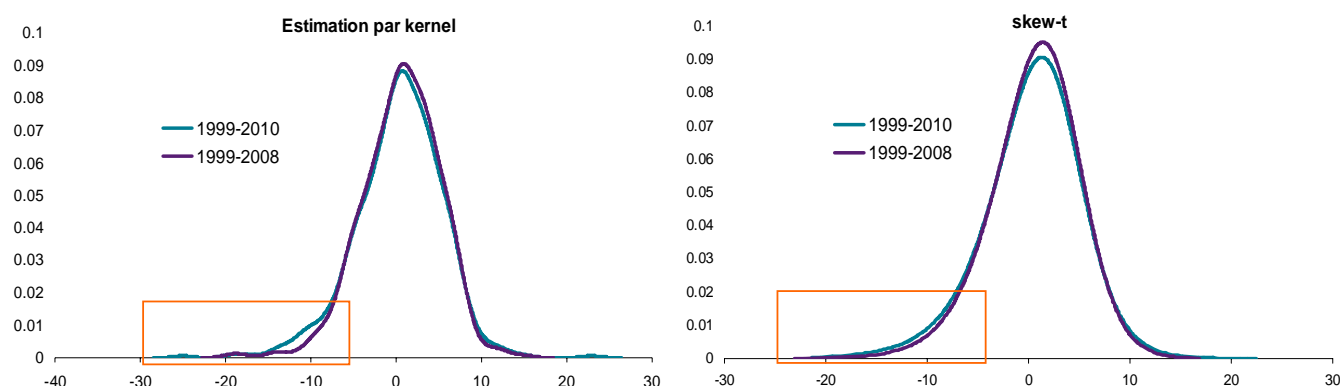
Test de Kolmogorov-Smirnov	Loi Normale			Loi Skew t		
	Stat. KS	p-value	Rejet de la Normalité (au seuil 10%)	Stat. KS	p-value	Rejet de la Skew t (au seuil 10%)
Actions Europe (Large)	0.058	0.04	Oui	0.023	0.92	Non
Actions Europe (Small & Mid)	0.076	0.00	Oui	0.019	0.98	Non
Actions U.S.	0.070	0.01	Oui	0.020	0.97	Non
Actions émergentes	0.074	0.00	Oui	0.026	0.80	Non
GSCI Pétrole	0.051	0.09	Oui	0.016	1.00	Non
GSCI Or	0.051	0.09	Oui	0.016	1.00	Non
Obligations souveraines AAA 1-3 ans	0.045	0.18	Non	0.022	0.93	Non
Obligations souveraines AAA 7-10 ans	0.044	0.19	Non	0.025	0.84	Non
Obligations souv. périphériques Euro	0.070	0.01	Oui	0.028	0.75	Non
Obligations souv. U.S. 7-10 ans	0.037	0.40	Non	0.029	0.69	Non
Indexées inflation Euro	0.043	0.21	Non	0.021	0.95	Non
Crédit Euro IG Non Financières	0.041	0.26	Non	0.014	1.00	Non
Crédit Euro High Yield	0.157	0.00	Oui	0.037	0.39	Non

L'hypothèse nulle (H_0) du test KS est : l'échantillon a été engendré selon la loi théorique P (loi normale pour le 1er test, loi Skew t pour le 2nd). H_0 est rejetée à un degré de significativité de 10% lorsque la pvalue < 10%.

Source : Natixis

Enfin, les résultats obtenus font apparaître une **relative stabilité des paramètres estimés**, caractéristique qui nous conforte dans l'intérêt de l'utilisation de la skew-t. En effet, dans le cas du pétrole par exemple⁴, l'introduction de la période 2008-2010, période de très fortes variations pour cet actif, dans l'échantillon implique une déformation de la queue de distribution de gauche (plus d'occurrences de pertes extrêmes). Ce phénomène est bien moins marqué dans le cas de la skew-t.

Graphiques 3a/b : Estimations des paramètres sur différentes périodes (actif : GSCI Pétrole)



1.2. Le risque joint (ou dépendances extrêmes)

Une fois la loi marginale des actifs établie, nous souhaitons spécifier leur structure de dépendance, c'est-à-dire leur loi jointe. Les relations de dépendances entre actifs financiers ne sont pas linéaires. Pour illustrer ce phénomène, nous comparons la corrélation entre plusieurs classes d'actifs selon différents régime de notre indice global de perception du risque (noté IPR⁵) : un régime de faible aversion pour le risque ($IPR \leq 0.7$) et un régime de crise ($IPR > 0.7$, qui correspond à des événements tels que la faillite de Lehman Brothers, la Crise grecque...). Pour chaque période, le Tableau 4 indique le niveau moyen de VIX et de VStoxx et les Tableaux 5 et 6 la matrice de corrélation d'un portefeuille multi-actifs.

⁴ Des résultats similaires sont observables sur les actions et autres actifs risqués.

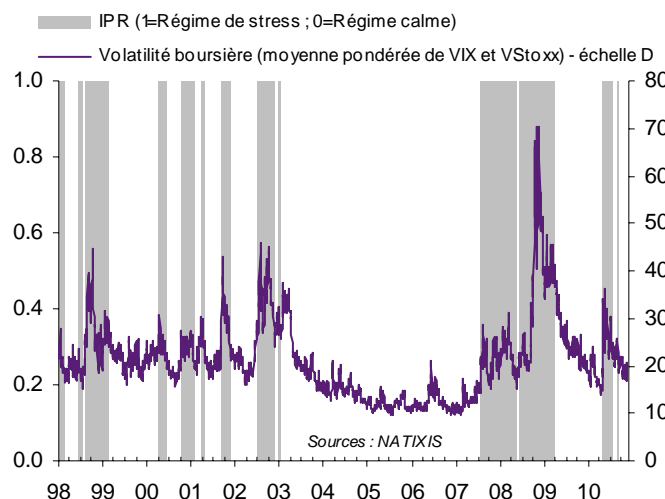
⁵ L'indicateur prend en compte les niveaux de la volatilité boursière, de la volatilité des changes, des spreads de taux (high yield et émergents) et de la corrélation taux d'intérêt/bourse. Lorsque l'indice augmente (diminue), cela traduit plus (moins) d'incertitudes sur les évolutions futures des marchés et une plus (moins) grande perception du risque. Voir Flash de la Recherche Economique « Comment mesurer l'aversion pour le risque ? », 2005.

On constate qu'en période de stress les avantages de la diversification s'amenuisent. **Les co-mouvements entre actifs financiers s'accroissent**, comme l'illustrent leurs évolutions relatives rapportées dans les tableaux 5 et 6 : les relations ayant un effet négatif sur la diversification, surlignées en vert, sont plus nombreuses que celles qui augmentent la diversification (corrélations plus fortement négatives, en orange). Cette particularité des données n'est pas prise en compte par le modèle gaussien, qui suppose la linéarité des corrélations.

Tableau 4 : Volatilité Implicite et Perception du risque

Indice de perception du risque (IPR)	VIX	VStoxx	Nombre de semaines
Régime de Stress (IPR>0.7)	28.9	32.5	465
Régime Normal (IPR≤0.7)	17.5	21.1	136

Graphique 4 : Régimes de risque



Tableaux 5 et 6 : Corrélations entre actifs selon les régimes de l'IPR (1999 -2010)

Période de Régime "Calme" de l'IPR	Actions Europe (Large)	Actions Europe (Small & Mid)	Actions U.S.	Actions émergentes	GSCI Pétrole	Obligations souv. U.S. 7-10 ans	Indexées d'inflation Euro	Crédit Euro IG Non Financières	Crédit Euro High Yield
Actions Europe (Large)	1.00								
Actions Europe (Small & Mid)	0.91	1.00							
Actions U.S.	0.79	0.75	1.00						
Actions émergentes	0.64	0.72	0.64	1.00					
GSCI Pétrole	0.07	0.10	0.06	0.24	1.00				
Obligations souv. U.S. 7-10 ans	-0.35	-0.34	-0.25	-0.23	-0.03	1.00			
Indexées d'inflation Euro	-0.24	-0.21	-0.20	-0.10	0.09	0.53	1.00		
Crédit Euro IG Non Financières	-0.13	-0.12	-0.06	-0.05	-0.03	0.64	0.62	1.00	
Crédit Euro High Yield	0.30	0.38	0.30	0.42	0.10	-0.14	-0.04	0.15	1.00

Période de Régime de "Stress" de l'IPR	Actions Europe (Large)	Actions Europe (Small & Mid)	Actions U.S.	Actions émergentes	GSCI Pétrole	Obligations souv. U.S. 7-10 ans	Indexées d'inflation Euro	Crédit Euro IG Non Financières	Crédit Euro High Yield
Actions Europe (Large)	1.00								
Actions Europe (Small & Mid)	0.94	1.00							
Actions U.S.	0.85	0.81	1.00						
Actions émergentes	0.72	0.78	0.66	1.00					
GSCI Pétrole	0.28	0.29	0.28	0.38	1.00				
Obligations souv. U.S. 7-10 ans	-0.33	-0.33	-0.27	-0.23	-0.25	1.00			
Indexées d'inflation Euro	-0.18	-0.18	-0.16	-0.13	-0.06	0.52	1.00		
Crédit Euro IG Non Financières	-0.04	0.02	-0.06	0.11	-0.09	0.57	0.50	1.00	
Crédit Euro High Yield	0.55	0.64	0.49	0.58	0.16	-0.09	-0.01	0.38	1.00

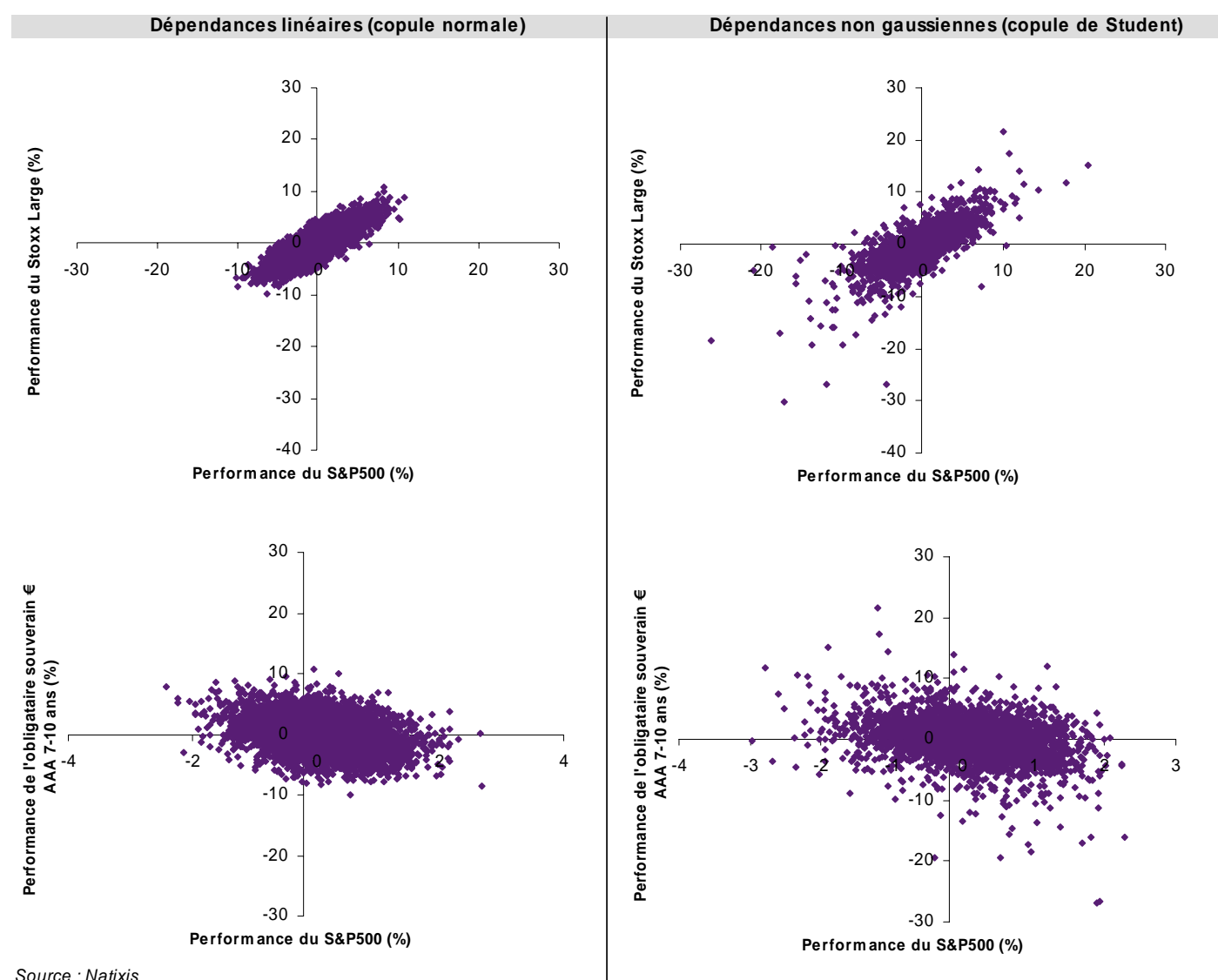
Source : Natixis

Les copules sont des outils mathématiques permettant de modéliser la distribution jointe des actifs, indépendamment de leur distribution marginale. Nous comparons deux types de copules elliptiques : Normale et Student. Elles sont toutes deux symétriques et relativement simples d'utilisation. La copule Normale est la plus élémentaire, mais ne présente pas un grand intérêt dans notre cas dans la mesure où elle appréhende la dépendance de la même manière sur toute la distribution (ce qui revient à prendre en compte de simples relations linéaires de dépendance). La copule Student (ou copule t) lui est supérieure dans le sens où celle-ci

permet de modéliser la dépendance de queue. Plus le degré de liberté de la copule est faible et plus les dépendances seront accentuées lors des périodes de crise / de forte hausse des marchés.

Afin d'illustrer ce phénomène, nous estimons les paramètres de la copule par maximum de vraisemblance, puis effectuons 5000 simulations de Monte Carlo de chacun des actifs en utilisant d'une part une copule normale et d'autre part une copule-t (estimée à 7 degrés de liberté). Les graphiques ci-dessous représentent les dépendances entre quelques actifs issus de ces simulations. **On constate très clairement que la copule de Student apporte une meilleure description du phénomène de dépendance extrême que la copule normale** : il existe une plus grande concentration d'événements dans les queues jointes, que ce soit entre actifs risqués ou entre un actif risqué et un autre moins risqué (S&P et obligations souveraines AAA, graphique 5 en bas). Ainsi cette modélisation affecte autant l'accentuation des pertes en période de stress que la diversification.

Graphique 5 : Modélisation des dépendances entre actifs par copules



Source : Natixis

II. LES OUTILS ET METHODES POUR L'ALLOCATION D'ACTIFS

II.1. Les méthodes traditionnelles

Depuis la première formulation d'un modèle d'allocation d'actifs proposée par Harry Markowitz en 1952 (minimisation de la variance de portefeuille pour un rendement donné), la littérature économique, souvent sous l'impulsion de professionnels de la gestion d'actifs, n'a cessé d'enrichir le cadre d'analyse en proposant par exemple d'intégrer les vues du praticien. Les inconvénients de cette version pionnière ont en effet été de nombreuses fois détaillés : portefeuilles trop concentrés (d'où la nécessité de contraindre fortement les poids), forte sensibilité des résultats à des modifications même mineures des hypothèses et enfin postulat sous-jacent de normalité des rendements des actifs.

La version précédente de notre publication consacrée à l'allocation d'actifs⁶ avait cherché à pallier certaines de ces faiblesses en introduisant une approche bayésienne au sein d'une allocation benchmarkée. La méthode se basait notamment sur les travaux de Black et Litterman (1992, B&L dans la suite). Leur idée, plus proche de la réalité de la gestion d'actifs, était de définir une allocation en référence à un portefeuille initial (le portefeuille de marché ou un benchmark déterminé ex ante) à partir de vues sur l'évolution future des actifs. Ces vues étaient appliquées au vecteur de rendements espérés induit par l'équilibre de marché (antérieur, noté Π ci-après) à l'aide d'une matrice P pour déterminer un nouveau vecteur de rendements espérés (postérieurs) comme suit :

$$\bar{E}_{B\&L} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} V \right]$$

V est le vecteur ($k \times 1$) réunissant les k vues (absolues ou relatives) en termes de rendements, P est une matrice ($k \times N$) identifiant les N actifs impliqués dans les vues, Ω est une matrice diagonale ($k \times k$) représentant la variance attendue des erreurs dans les vues et τ est un scalaire qui reflète le degré de confiance du gérant sur ses propres vues. La pondération dépend donc essentiellement du scalaire τ et de Ω : plus τ est petit et $\Omega \rightarrow \infty$, moins on accorde de poids aux vues. Quian et Gorman (2002) ont par la suite proposé d'appliquer le même principe en intégrant des vues également sur les variances/covariances.

Deux critiques sont souvent formulées à l'égard de cette approche :

- Comme nous l'avons montré dans la première partie de cette étude, **l'hypothèse de normalité est rejetée pour la plupart des actifs risqués** (distributions à queues épaisses, skewness et forte dépendance en période de stress).
- D'un point de vue plus conceptuel, l'approche proposée par B&L suppose que le gérant/stratégiste exprime des vues sur les paramètres qui déterminent la distribution du marché, ici considérée comme gaussienne. Les vues sont formalisées également selon la loi normale (alpha + choc gaussien). Or, **en pratique les gérants/stratégistes expriment plutôt des vues sur les réalisations en termes de rendements possibles, et non sur les paramètres de leur distribution.**

Pour ces raisons, nous mettons en pratique la méthodologie formulée par Meucci (2006) basée sur le concept de COP (Copula-Opinion Pooling). Il s'agit d'étendre la méthode de B&L aux marchés non normaux et aux vues non normales.

⁶ Etude 2005-01, Allocation d'actifs : Eléments méthodologiques, F. Pochon, J. Teiletche

II.2. Formulation de vues forward looking sans altérer les risques inhérents aux actifs : la méthode COP (Meucci, 2006)

L'approche COP développée par Meucci (2006) consiste à transformer une distribution de marché (ou de référence) selon des anticipations ou des chocs sur les réalisations des actifs par une technique d'assemblage des vues. Elle a ainsi de nombreuses applications en allocation d'actifs mais aussi en gestion du risque (stress test) ou en valorisation d'actifs (options). La distribution transformée est appelée « distribution postérieure ». **L'idée sous-jacente à cette méthode est de modifier la distribution de chacune des marginales, tout en conservant la dépendance de la distribution de marché car il peut s'avérer difficile d'exprimer des vues sur les dépendances entre indices.** Le passage de la distribution de marché à la distribution postérieure est détaillé en Annexe 3.

Pour mettre en place cette méthode, il nous faut définir trois inputs :

- **la distribution multivariée qui décrit le marché (M)** : suivant les résultats de la première partie de l'étude, nous modélisons les distributions marginales de chacun des N actifs, à partir d'une loi skew-t, que nous lions à l'aide d'une Copule de Student.

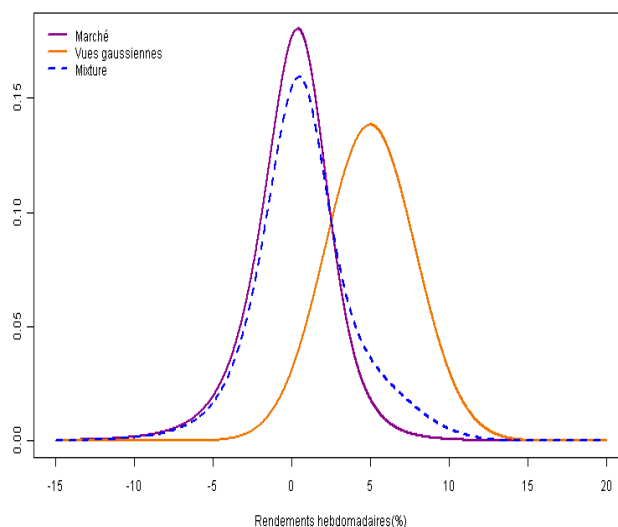
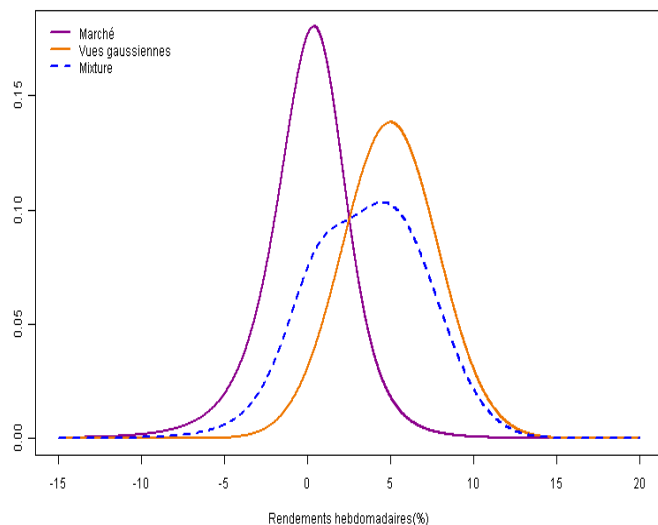
- **les vues du gérant / stratégeste** : comme dans le cadre de B&L, on applique les vues par le biais d'une matrice P et de « distributions subjectives ». La matrice P peut comporter jusqu'à N lignes, traduisant soit des vues directionnelles, soit relatives sur les actifs. En théorie, les vues peuvent être exprimées à partir de distributions normales ou toute autre distribution.

- **le paramètre d'assemblage (*pooling*) des vues** : il sert à pondérer l'influence des distributions de référence et de la vue dans la construction de la distribution postérieure. La distribution postérieure de la vue k (\tilde{F}_k) s'écrit en effet : $\tilde{F}_k \equiv (1 - c_k)F_k + c_k\hat{F}_k$. Dans le cas général, on peut affecter un paramètre d'assemblage différent pour chaque vue, paramètre qui peut alors être interprété comme un niveau de confiance dans la vue k . Les **graphiques 6a et 6b** présentent le résultat d'un mélange de distribution entre la distribution de l'Eurostoxx Large modélisée à l'aide d'une skew-t et une même vue *bull* (représentée à titre illustratif sous une forme normale, ici) avec différents paramètres d'assemblage. Son impact peut être très élevé sur la déformation de la distribution postérieure. Pour un paramètre modéré ($c_k = 0,15$), la distribution de l'actif accorde une plus grande probabilité à une réalisation positive, mais les caractéristiques de risque de l'actif sont globalement inchangées. Pour un paramètre d'assemblage plus élevé ($c_k = 0,7$), l'actif sous jacent n'a plus du tout les mêmes caractéristiques que celles de la distribution de marché. Notamment, en termes de risques, l'interquartile passe de 3,6% à 5,1%. En outre, si la vue est très éloignée de la moyenne du marché (de la distribution de référence) et que le paramètre d'assemblage est relativement fort ($c_k = 0,7$), le risque est alors de se retrouver avec une distribution bi-modale (Graphique 6c).

Graphiques 6a, 6b, 6c, 6d : Mélanges de distributions marginales (Vues et marché) sur l'Euro Stoxx Large

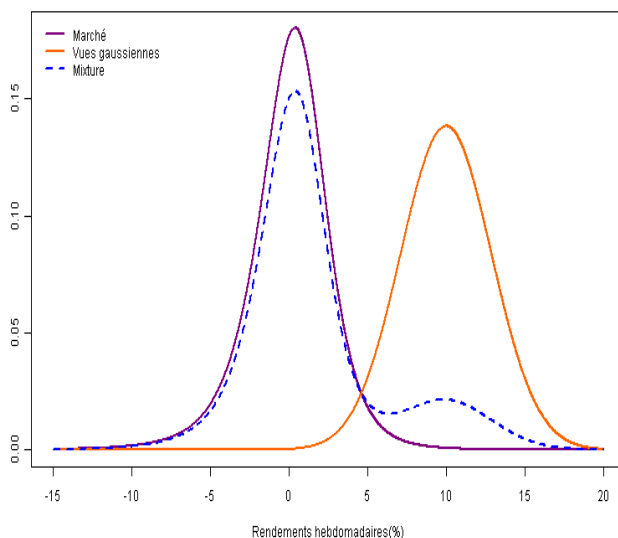
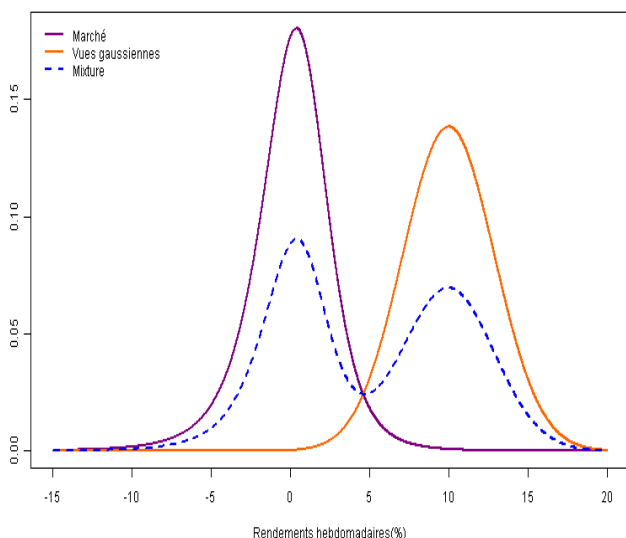
vue = rendement cible à 5%, $C_k = 0.7$

vue = rendement cible à 5%, $C_k = 0.15$



vue = rendement cible à 10%, $C_k = 0.7$

vue = rendement cible à 10%, $C_k = 0.15$



Source : Natixis

II.3. Optimisation de portefeuille : la CVaR, un critère de risque pertinent

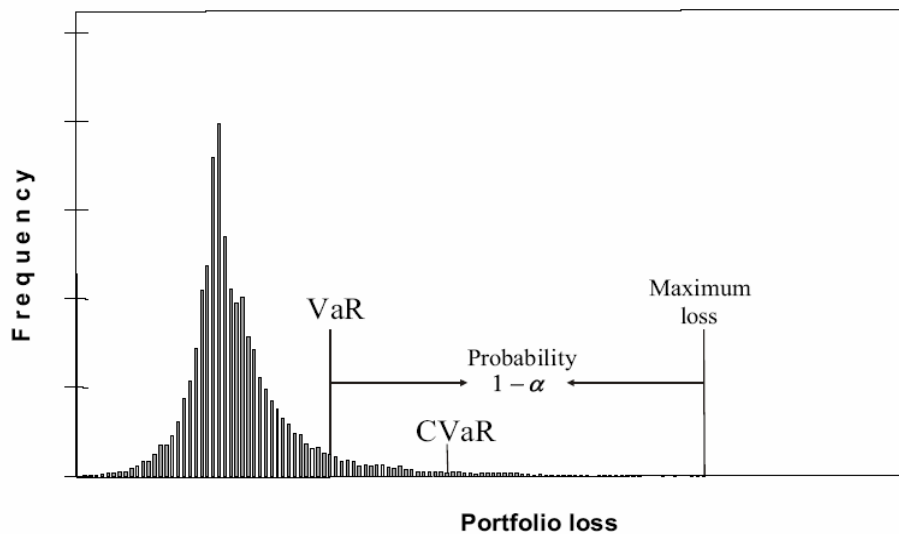
Dans le contexte non gaussien décrit plus haut, l'utilisation d'un arbitrage moyenne – variance comme préconisé par Markowitz paraît inappropriée. Depuis Markowitz, de nouvelles mesures de risque ont été développées, à l'image de la *Value at Risk* (VaR) ou la *Conditional Value at Risk*⁷ (CVaR) qui représentent des indicateurs des pertes que l'investisseur est prêt à supporter dans x% des cas⁸.

En particulier, la CVaR pallie certains inconvénients liés à l'utilisation de la volatilité (variance) comme mesure de risque. **La CVaR est une mesure de risque qui capture à la fois l'asymétrie des préférences des investisseurs** (tient compte seulement du risque de perte) **et les caractéristiques d'asymétrie et de leptokurticité des distributions des rendements**. Ces mesures sont déjà largement répandues dans l'industrie de la gestion d'actifs.

⁷ Egalement appelée Expected Shortfall.

⁸ Autrement dit, il s'agit de mesurer, dans le cas de la VaR, un quantile sur la queue de gauche de la distribution des rendements d'un portefeuille / d'un actif et, dans le cas de la CVaR, la moyenne au-delà de ce quantile.

Graphique 7 : Illustration du critère de CVaR



Nous favorisons donc la mise en œuvre d'une optimisation de type moyenne-CVaR₉₅ qui s'écrit sous sa forme standard :

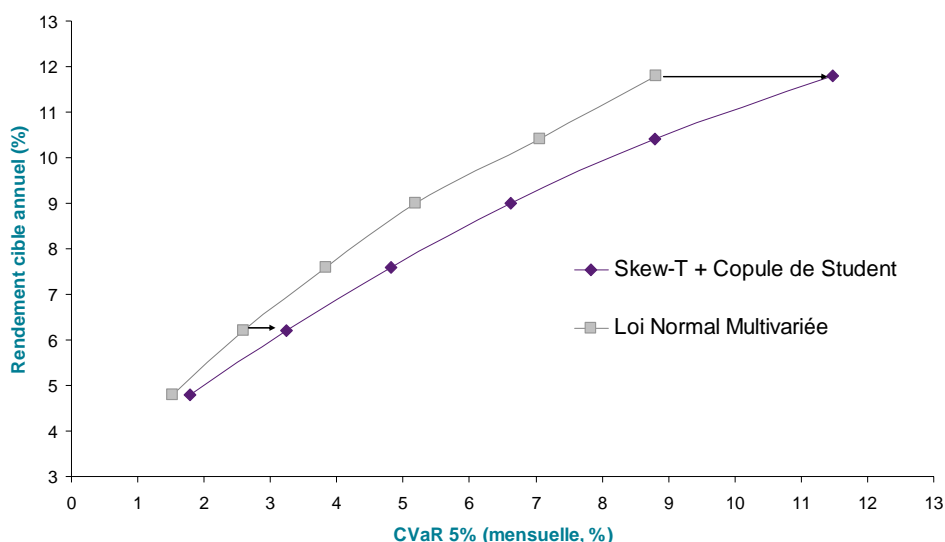
$$w(r) \equiv \arg \min_{\substack{w' E\{R\} \geq r \\ w' 1 = 1, w \geq 0}} \{CVaR(w)\}$$

Avec w le vecteur de poids des actifs du portefeuille, R les rendements cible des actifs.

La frontière efficiente est obtenue en faisant varier r , le rendement cible du portefeuille. Le programme d'optimisation peut être enrichi de contraintes sur les poids des actifs notamment et est ensuite résolu, suivant Rockafellar et Uryasev (2000), par programmation linéaire.

Afin d'illustrer les gains liés à l'utilisation de cette nouvelle méthode, nous avons simulé les frontières efficientes obtenues à partir d'une loi gaussienne multivariée d'une part et de skew-t liées par copule de Student d'autre part. Les optimisations sont réalisées, dans les deux cas, sous CVaR₉₅, sous les mêmes hypothèses de rendement et sans contraintes. Les frontières diffèrent de manière marquée : à rendement donné, les portefeuilles simulés « non normaux » affichent systématiquement un risque supérieur. Ainsi, en tenant compte des risques extrêmes dans nos modélisations des rendements, nous capturons mieux le risque associé à notre portefeuille, tel que mesuré par la CVaR. Inversement, les portefeuilles obtenus dans le cadre traditionnel de l'allocation d'actif sous-estiment les risques de perte.

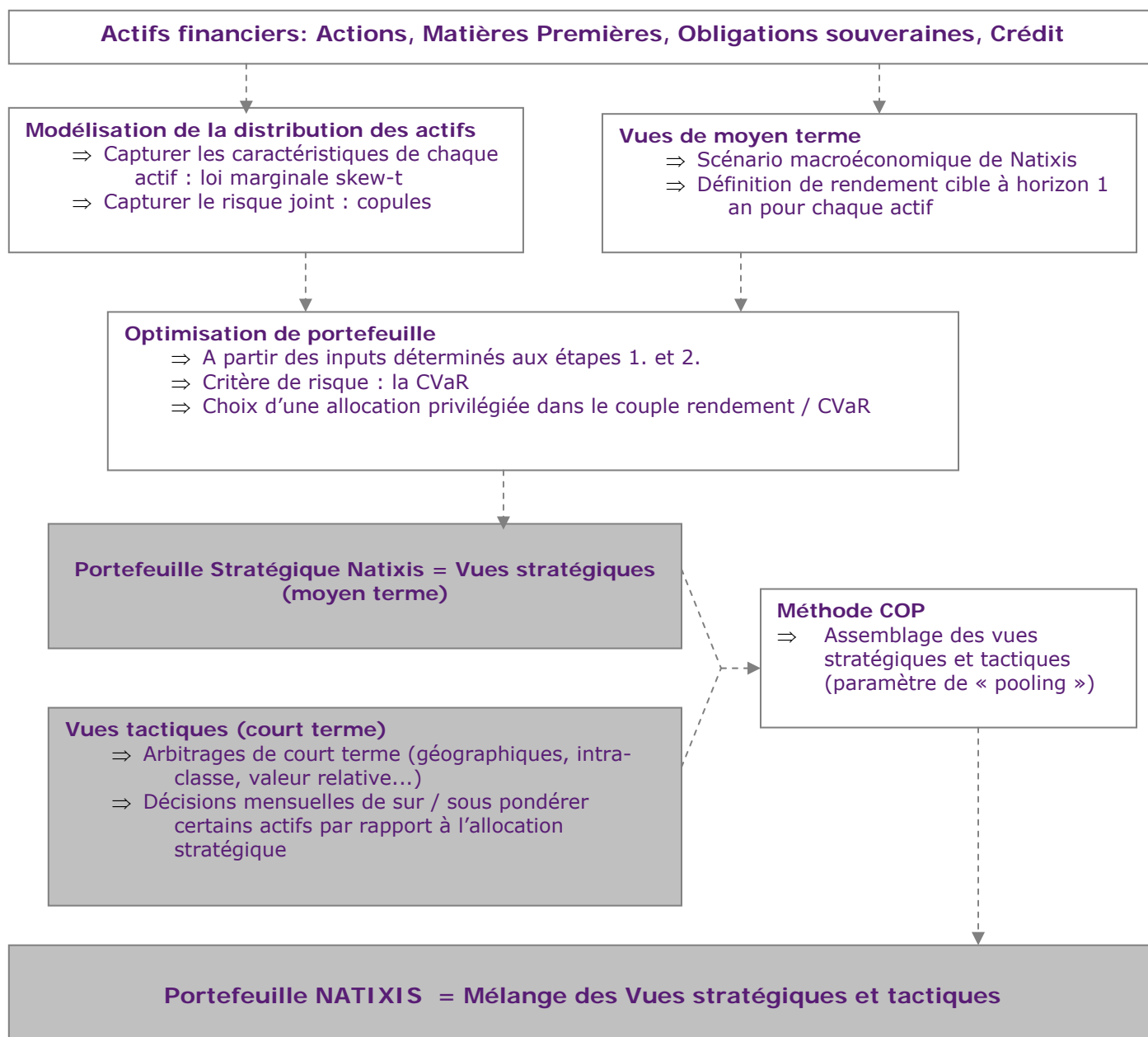
Graphique 8: Frontières efficientes dans le cadre normal et non normal



III. L'APPROCHE ORIGINALE DE NATIXIS

Dans le cadre de notre nouvelle version de la publication Allocation d'Actifs, nous avons cherché à nous démarquer de l'univers benchmarké de B&L afin de produire une allocation plus proche de la gestion à objectif de rendement absolu. Au sein de ce type d'investissement, notre approche pourrait s'apparenter à du GTAA (Global Tactical Asset Allocation) dans le sens où nous cherchons à exploiter les différences de rendement entre les classes d'actifs, les marchés (allocation géographique) et les styles d'investissement (taille) à un niveau indiciel. Nous appliquons la méthodologie développée par Meucci (2005) et présentée plus haut. L'originalité de notre approche est que la distribution de marché n'est pas utilisée ici seulement comme une référence mais reflète nos vues à moyen terme en termes de rendements des actifs. Nous formulons une allocation stratégique (horizon 1 an), guidée par notre scénario macroéconomique, de laquelle nous dévions chaque mois selon nos vues de court terme (directionnelles ou relatives). Ainsi, la méthode COP est utilisée afin de réconcilier les différents horizons tout en contrôlant les budgets de risque (cf. schéma ci-dessous).

Le processus d'Allocation Multi-Actifs de Natixis



III.1. Formulation de vues de moyen terme et définition du processus d'allocation

Les distributions de marché simulées à partir d'une loi skew-t sont ajustées afin de traduire les prévisions de la Recherche Economique en termes de rendements totaux (dividendes, coupons et coût du roll inclus) attendus à 1 an. Celles-ci sont obtenues en **rapprochant les résultats de modèles Top-Down des vues des stratèges, en ligne avec la publication mensuelle « Prévisions Financières »**. Ces cibles seront révisées annuellement, voire plus souvent si des modifications conséquentes du scénario nécessitent une adaptation de l'allocation stratégique.

Des contraintes ont été retenues afin de tenir compte de la liquidité respective de chacun des actifs (indexées inflation, souverains périphériques...) et de conserver un minimum de diversification dans l'allocation stratégique. Notamment, nous définissons un niveau minimum d'investissement en actions US et € et restreignons le poids affecté aux plus petites capitalisations. Au total, le portefeuille le plus dynamique atteindra un niveau maximal en action de 70%. De même, nous avons encadré les expositions maximales sur les obligations les moins représentées sur le marché, telles que les périphériques ou les indexées inflation. Enfin, nous avons décidé de retenir un minimum de 1% pour chacun des actifs afin de nous laisser la possibilité de sous-pondérer tactiquement ces actifs sur lesquels nous avons déjà une vue négative à moyen terme.

Tableau 7 : Contraintes

Actif	Min	Max
Actions Europe (Large)	5%	25%
Actions Europe (Small & Mid)	1%	10%
Actions US	10%	35%
Actions émergentes	1%	25%
Total Actions	0%	70%
S&P GSCI Pétrole	1%	5%
S&P GSCI Or	1%	5%
Obligations souveraines AAA 1-3 ans	1%	20%
Obligations souveraines AAA 7-10 ans	1%	15%
Obligations souv. Périphériques Euro	1%	10%
Obligations souv. US 7-10 ans	1%	15%
Indexées inflation Euro	1%	5%
Credit Euro IG Non Financières	1%	15%
Crédit Euro high Yield	1%	8%
Monétaire Euro	5%	30%

Graphique 9: Frontière Efficiente

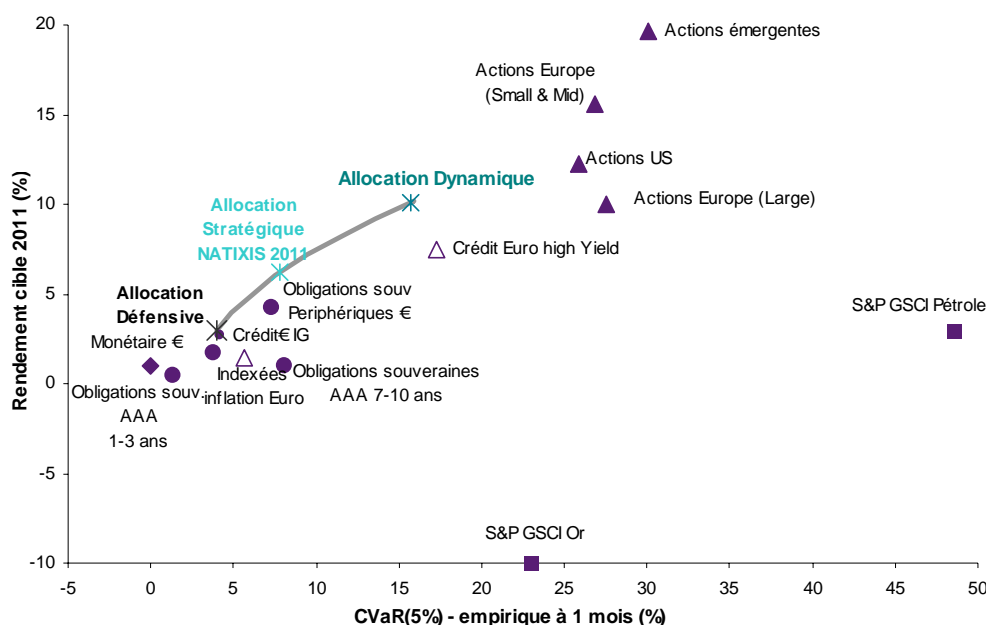


Tableau 8 : Allocations optimales 2011

	Allocation défensive	Allocation Stratégique Natixis	Allocation dynamique
Actions Europe (Large)	5%	5%	5%
Actions Europe (Small & Mid)	1%	2%	10%
Actions US	10%	10%	31%
Actions émergentes	1%	13%	15%
S&P GSCI Pétrole	1%	1%	1%
S&P GSCI Or	1%	1%	1%
Obligations souveraines AAA 1-3 ans	18%	1%	1%
Obligations souveraines AAA 7-10 ans	11%	14%	1%
Obligations souv. Périphériques Euro	2%	10%	10%
Obligations souv. US 7-10 ans	11%	9%	1%
Indexées inflation Euro	4%	4%	1%
Credit Euro IG Non Financières	4%	15%	10%
Crédit Euro high Yield	1%	5%	8%
Monétaire Euro	29%	9%	5%
Indicateurs de rendement et de risque			
Rendement cible 2011 (% , annu)	3	6	10
CVaR 5%, mens. historique (%)	4	8	16
Rendement historique (% , annu)	4	6	6
Volatilité historique (%)	3	6	12
VaR 5%, mens. historique (%)	2	5	10

Le portefeuille Stratégique est choisi comme étant celui qui présente une CVaR₉₅ de 8%, soit un niveau de risque équilibré.

III.2. Assemblage de vues de court terme et de moyen terme par la méthode COP : définition du portefeuille Natixis

Tout en maintenant le même niveau de risque 'ex ante' sur le portefeuille, nous dévierons chaque mois de l'allocation stratégique (de moyen terme) à partir de vues de court terme. Celles-ci, lorsqu'intégrées au processus d'optimisation, aboutiront à une nouvelle allocation qui reflètera, selon la méthode de Meucci, une pondération des vues stratégiques et tactiques (court terme).

L'étude de sensibilité présentée dans la partie II.2 (Graphiques 6a et 6b) plaide pour l'utilisation d'un paramètre d'assemblage modéré. En effet, dans notre cadre, la méthode COP est mise en œuvre afin de modifier tactiquement une allocation stratégique qui intègre à la fois nos vues de moyen terme sur les rendements moyens des actifs et une spécification des distributions de marché particulière. **Nous cherchons donc à évoluer autour de l'allocation stratégique**, ce que reflète le niveau fixé au paramètre d'assemblage de l'ensemble des vues (0,15).

La force des vues sera plutôt intégrée dans les cibles des stratégies. En théorie, dans la méthode COP, il est possible d'affecter n'importe quelle distribution aux vues. En pratique, les distributions uniformes nous paraissent plus adaptées car elles ne comportent pas de caractère informationnel particulier (équipondération des réalisations). De plus, le fait de spécifier un *range* de réalisations et non les moments d'une distribution plus sophistiquée (variance, skewness etc...) privilégie une approche parcimonieuse dans la définition des vues.

Au sein de notre portefeuille de 14 actifs, considérons les deux vues V_k suivantes

$k=1$: performance comprise entre 3% et 6% de l'indice Stoxx Europe Mid et Small caps.

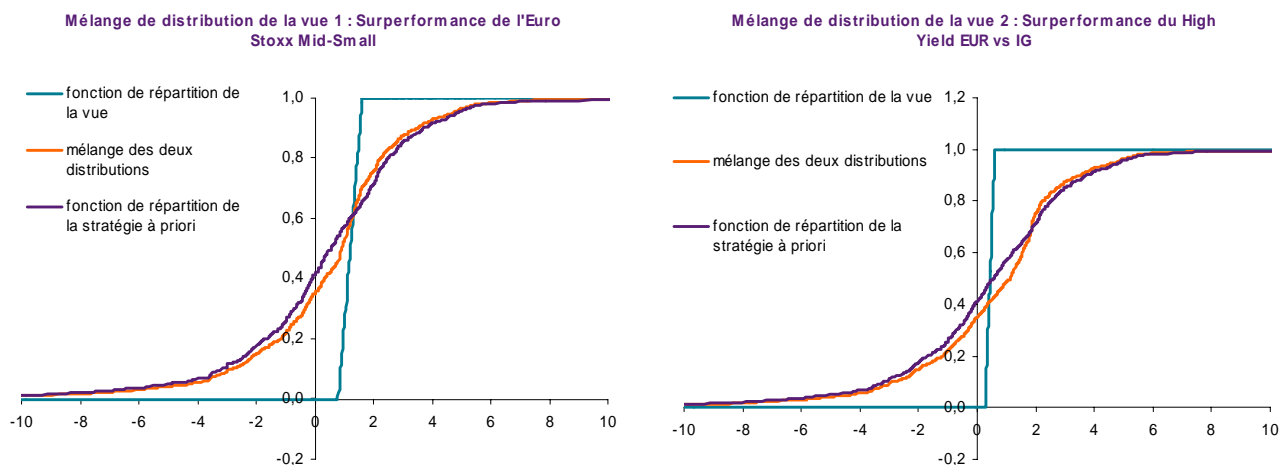
$k=2$: surperformance comprise entre 1,5% et 3% de l'indice High Yield EUR vis-à-vis de l'indice Investment Grade EUR.

Elles sont traduites à l'aide de distributions uniformes : $\hat{F}1(v) \equiv \begin{cases} 0 & v \leq 0.03 \\ \frac{v - 0.03}{0.06 - 0.03} & v \in [0.03, 0.06] \\ 1 & v \geq 0.06 \end{cases}$

$$\hat{F}2(v) \equiv \begin{cases} 0 & v \leq 0.015 \\ \frac{v - 0.015}{0.03 - 0.015} & v \in [0.015, 0.03] \\ 1 & v \geq 0.03 \end{cases}$$

Avec un paramètre d'assemblage de 0.15, on obtient le mélange de fonctions de répartition suivant :

Graphique 10 : Traduction des vues en distributions



Nous complétons ces vues par :

$k=3$: performance comprise entre -1% et 0% de l'indice des obligations souveraines périphériques Euro ;

$k=4$: performance comprise entre -0,7% et 0,4% de l'indice des obligations souveraines U.S. 7-10 ans ;

$k=5$: surperformance comprise entre 1,5% et 4% de l'indice l'indice Stoxx Europe Mid et Small caps vis-à-vis de l'indice High Yield EUR ;

et intégrons les distributions résultantes à l'optimisation.

Nous obtenons ainsi une frontière de portefeuilles optimaux qui reflètent à la fois les vues stratégiques et les vues tactiques définies précédemment. **Afin de respecter les caractéristiques de risque définies plus haut, nous choisissons parmi ces portefeuilles optimaux l'allocation dont la CVaR mensuelle est proche de 8% :**

Tableau 10 : Exemple d'allocations

	Allocation Stratégique Natixis	Portefeuille Tactique
Actions Europe (Large)	5%	5%
Actions Europe (Small & Mid)	2%	9%
Actions U.S.	10%	10%
Actions émergentes	13%	6%
GSCI Pétrole	1%	1%
GSCI Or	1%	1%
Obligations souveraines AAA 1-3 ans	1%	1%
Obligations souveraines AAA 7-10 ans	14%	15%
Obligations souv. périphériques Euro	10%	7%
Obligations souv. U.S. 7-10 ans	9%	4%
Indexées inflation Euro	4%	5%
Crédit Euro IG Non Financières	15%	15%
Crédit Euro High Yield	5%	8%
Monétaire €	9%	12%
Rendement cible 2011 (annu)	6	7
CVaR 5%, mens. Histo	8	8
Rendement historique (annu)	6	5
Volatilité historique	6	6
VaR 5%, mens. Histo	5	5

Compte tenu des vues tactiques exposées et de la confiance que nous leur attribuons, l'allocation de court terme dévie de l'allocation stratégique en différents points :

- l'exposition aux actions des Small et Mids caps européennes est renforcée (9% vs 2%).
- la pondération des dettes périphériques de la zone euro de maturités 7-10 ans est réduite (7% contre 10%), tout comme sur les Treasuries US (4% contre 9%).
- le pari long/short sur le crédit se traduit par une plus forte pondération du High Yield euro au sein de notre portefeuille (8% contre 5% pour le portefeuille stratégique).

En revanche, afin de respecter notre cible de CVaR, le processus d'allocation nous amène à maintenir une forte proportion d'Investment Grade Euro non financières (15%), actif par nature peu risqué, et à abaisser la part des actions émergentes.

Au final, le portefeuille final Natixis possède un rendement cible annualisé de 7% et une CVaR mensuelle historique de 8%.

IV. COMPREHENSION ET MAITRISE DES RISQUES DU PORTEFEUILLE NATIXIS

Nous avons montré l'importance de la prise en compte de la non-normalité des rendements des actifs dans le processus d'allocation d'actifs. **Le suivi des risques associés à l'allocation Natixis doit logiquement intégrer ces caractéristiques.** Ainsi, la gestion du risque sera pilotée à l'aide d'une analyse de la contribution de chaque actif au risque global du portefeuille. Nous jaugerons également tous les mois le degré de diversification du portefeuille de court terme par rapport à sa référence stratégique. Nous essaierons enfin, autant que faire se peut, de nous prémunir du risque systémique à l'aide d'un ratio d'absorption : plus le risque sera concentré, plus il sera temps d'envisager une allocation défensive...

IV.1 Contribution des actifs au risque du portefeuille

Nous décomposons le risque du portefeuille de référence, représenté dans notre méthodologie par la CVaR (ou *Expected Shortfall*). Rappelons que la CVaR d'un portefeuille caractérisé par un vecteur de poids b s'écrit comme suit :

$$R(b) = E\{-b'F | -b'F \geq Q_{-b'F}(c)\}$$

avec R la mesure du risque, ici la CVaR,

F la matrice de rendements des actifs du portefeuille, et

$Q_{-b'F}(c)$ le quantile des rendements du portefeuille au niveau de confiance c , ou en d'autres termes la VaR du portefeuille au niveau de confiance c .

La CVaR respectant les propriétés d'homogénéité, la contribution marginale au risque (CVaR marginale) s'écrit comme suit :

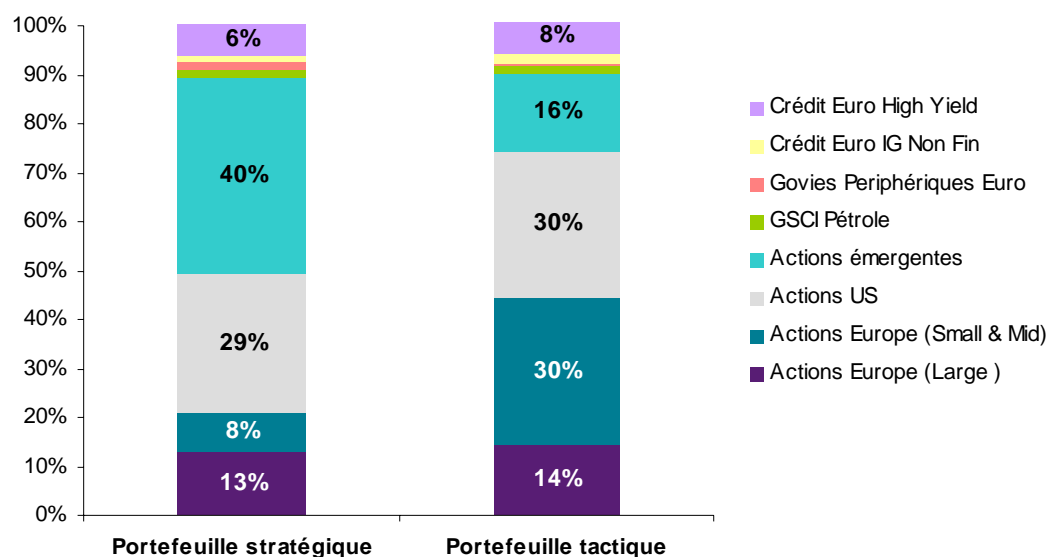
$$\frac{\partial R(b)}{\partial b} = -E\{F | -b'F \geq Q_{-b'F}(c)\}, \text{ d'où la décomposition suivante : } R(b) = \sum_{n=1}^N b_n \frac{\partial R(b)}{\partial b_n}$$

avec N le nombre d'actifs du portefeuille, et

$$b_n \frac{\partial R(b)}{\partial b_n} \text{ la contribution totale de l'actif } n \text{ à la CVaR du portefeuille.}$$

Lorsque le marché est modélisé via une loi normale ou toute autre loi elliptique, ces mesures de risque peuvent se déduire analytiquement. Cependant, puisque nous effectuons un « mélange » de lois skew-t et uniformes, notamment pour le portefeuille de court terme, la distribution résultante n'est pas tabulée. Il est donc nécessaire de calculer ces mesures de risque numériquement. Nous effectuons donc des simulations de Monte Carlo et calculons ensuite la CVaR empiriquement. Nous obtenons la décomposition suivante pour le portefeuille stratégique et le portefeuille final Natixis décrit précédemment :

Graphique 11 : Contributions à la CVaR des portefeuilles stratégique et tactique



Puisque nous choisissons un portefeuille final Natixis avec des caractéristiques de risque identiques au portefeuille stratégique, nous obtenons une CVaR totale (historique) presque identique sur les deux portefeuilles⁹.

Nous représentons uniquement les actifs risqués dont la contribution à la CVaR du portefeuille est suffisamment importante. Nous constatons qu'une surpondération de l'Euro Stoxx Mid + Small dans le portefeuille final Natixis augmente considérablement la contribution à la CVaR du portefeuille, mais que celle-ci est globalement compensée par la baisse de la pondération de l'indice Actions Émergentes. Les autres stratégies sous-jacentes au portefeuille final Natixis (voir Partie III.2) ne changent que très peu la répartition du risque du portefeuille.

IV.2 Une mesure du degré de diversification du portefeuille : le ratio de diversification

Nous quantifions cette fois le degré de diversification des portefeuilles optimaux obtenus (stratégique et final) en étudiant le ratio de la moyenne des volatilités des actifs par rapport à la volatilité du portefeuille.

En reprenant les notations précédentes, et en notant σ le vecteur des volatilités des actifs et Σ la matrice de variance-covariance, ce ratio s'écrit :

$$D(b) = \frac{b' \sigma}{\sqrt{b' \Sigma b}}$$

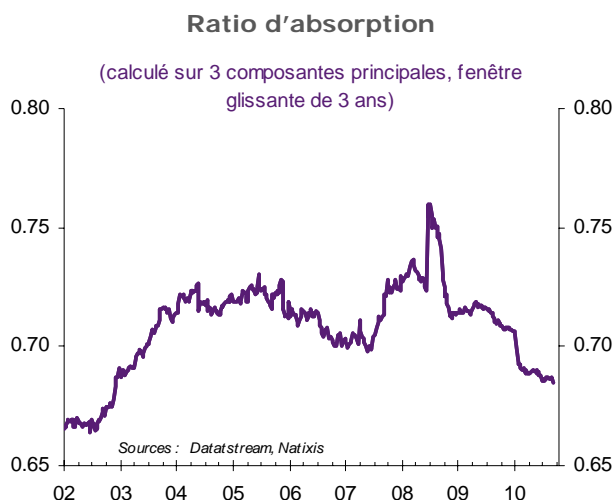
Pour tout portefeuille long-only, ce ratio doit être strictement supérieur à 1 pour considérer que le portefeuille apporte des gains de diversification.

Dans le cas du portefeuille stratégique de Natixis, nous obtenons un ratio de l'ordre de 1,65. L'objectif est d'utiliser ce critère supplémentaire pour comparer le portefeuille final Natixis (qui sera modifié tous les mois) au portefeuille stratégique. Dans l'exemple précédent, le portefeuille final Natixis présente un ratio de diversification légèrement inférieur au portefeuille stratégique (1,6) puisqu'il substitue des actions mid et small aux actions émergentes, les deux actifs ayant des volatilités très proches sur l'historique 1999-2010. De plus, le portefeuille final Natixis contient moins d'obligations US et d'obligations € périphériques au profit du monétaire et du High Yield EUR, ce qui in fine conduit à une volatilité du portefeuille final proche de celle du portefeuille stratégique.

⁹ Le critère choisi étant celui d'une VaR identique, les CVaR des 2 portefeuilles résultants s'avèrent très proches.

IV.3 Un indicateur de risque global

Nous analysons enfin le degré de risque systématique sous-jacent à l'univers d'actifs inclus dans le portefeuille en adoptant l'approche de l'analyse en composantes principales. Un moyen de quantifier le risque systématique est de **retenir un nombre limité de composantes principales**, ici 3 (celles qui expliquent chacune une proportion largement supérieure à $1/N$ de la variance totale) **et de relier la proportion cumulée de variance expliquée par ces 3 composantes à la variance totale des actifs du portefeuille**. Le ratio résultant représente en quelque sorte le degré de concentration du risque. Il s'apparente à un ratio d'absorption qui indique dans quelle mesure le risque total est « absorbé » par un nombre limité de facteurs orthogonaux (voir Kritzman, Li, Page et Rigobon, 2010).



Nous constatons bien un pic de ce ratio au troisième trimestre 2008, suivi d'un repli important à la fin du T1 2009 lors du début du fort rebond des actifs risqués. Ce ratio est aujourd'hui plus faible, et ce malgré la crise souveraine (les souverains périphériques ne constituent qu'un seul des 14 actifs de l'univers étudié).

Ces trois indicateurs permettent d'identifier la structure de risque du portefeuille à travers :

- 1) l'évolution du risque systématique inhérent à l'univers d'actifs composant le portefeuille => le ratio d'absorption,
- 2) le degré de diversification de ce risque apporté par l'optimisation du portefeuille => le ratio de diversification,
- 3) la segmentation du risque des portefeuilles finaux (stratégique et Natixis) à travers la contribution de chaque actif à la CVaR du portefeuille => la décomposition de la CVaR.

Ces mesures permettront une gestion suivie des risques par exemple en suscitant si nécessaire une modification du degré de confiance sur une vue selon la manière dont celle-ci déforme la structure de risque du portefeuille.

CONCLUSION

Nous avons revu notre méthode d'allocation d'actifs en prenant acte de l'évolution de la littérature théorique et des conséquences de la crise sur les portefeuilles construits sur la base des seuls enseignements de Markowitz.

Cette nouvelle méthode repose sur plusieurs piliers :

1/ la prise en compte du caractère non normal des rendements des actifs et de leurs dépendance accrue en phase de risque extrême.

2/ une technique d'optimisation susceptible d'intégrer cette nouvelle « donne ».

3/ Le rejet d'un benchmark ad hoc mais au contraire la constitution d'un portefeuille stratégique qui reflète nos vues cross assets à un an.

4/ La possibilité de choix tactiques fondés sur des positionnements temporaires plus réactifs (arbitrages temporaires inter ou intra classes d'actifs, profiter des signaux techniques...)

5/ Une gestion du risque avec notamment la connaissance de la contribution de chaque stratégie tactique au risque global et le suivi de notre exposition aux risques d'insuffisante diversification et de système.

Une telle approche permettra non seulement de juger la pertinence de nos prévisions / vue initiales mais également notre réactivité à court terme. En effet quelle que soit la sophistication de la méthodologie retenue, il n'en reste pas moins que la qualité des vues / prévisions sur les rendements restent la clé de la performance.

BIBLIOGRAPHIE

Azzalini, A. et Capitanio, A., 2003, Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution, appears in *J.Roy.Statist.Soc*, series B, vol.65, pp.367-389.

Black F. et Litterman R., 1992 Global Portfolio Optimization, *Financial Analyst Journal*, September / October, pp.28-43.

Kritzman M., Li Y., Page S. et Rigobon R., 2010, *Principal Components as a Measure of Systemic Risk*, MIT Sloan School of Management, Working Paper 4785-10.

Markowitz H., 1952: Portfolio Selection, *Journal of Finance*

Meucci A., 2007, Risk Contributions from Generic User-Defined Factors, *The Risk Magazine*, pp. 84-88

Meucci A., 2006, *Beyond Black-Litterman in Practice: Views on Non normal Markets*, *Risk*, 19, 9, 114-119

Pochon F. et Teïletche J., 2005, Allocation d'actifs : éléments méthodologiques, Etude IXIS-CIB

Quian E. et Gorman S., 2002, Conditional Distribution in Portfolio Theory, *Financial Analyst Journal*, March/April, pp44-51.

Rockafellar R.T. et Uryasev S., 2000, *Optimization of conditional value-at-risk*, *Journal of Risk* 2,21-41.

ANNEXES

ANNEXE 1 : COUVERTURE DU RISQUE DE CHANGE

Nous reprenons ici la méthodologie de couverture déjà mise en œuvre dans la précédente publication d'allocation d'actifs. Soit R_j^L le rendement en monnaie locale de l'actif j . On suppose que la monnaie de référence est l'euro dont le taux d'intérêt – de même maturité que l'horizon d'investissement – est noté i_ϵ . Ce qui intéresse in fine l'investisseur de la zone euro est le rendement de l'actif j en euros, que l'on note R_j^{NH} et qui est donné par :

$$R_j^{NH} = \frac{(1 + R_j^L)}{(1 + e)} - 1. \quad (1)$$

e désigne la variation de change sur la période, le taux de change étant défini au certain (si $e > 0$, cela signifie que l'euro s'apprécie). Dans nos publications, nous considérerons que les investisseurs couvrent systématiquement le risque de change¹⁰. La couverture est réalisée via une position à terme (forward) sur le change. Le rendement couvert en change est alors donné par¹¹ :

$$R_j^H = (1 + R_j^L) \frac{(1 + i_\epsilon)}{(1 + i_j)} - 1. \quad (2)$$

i_j désigne le taux d'intérêt de la monnaie dans laquelle est libellé l'actif j . En utilisant une approximation au premier ordre, (1) et (2) deviennent :

$$R_j^{NH} \cong R_j^L - e \quad (3)$$

$$R_j^H \cong R_j^L + (i_\epsilon - i_j) \quad (4)$$

La différence entre le rendement couvert et le rendement non-couvert est donc approximativement égale à $(i_\epsilon - i_j) + e$, que l'on nomme la surprise de change, i.e. la partie de la variation du change qui n'est pas couverte par la prime du forward. La différence sera soit positive, auquel cas l'investisseur aura bien fait de couvrir son risque de change, soit négative, auquel cas il aurait mieux fait de ne pas couvrir son risque de change. Cette indécision est nettement moins présente pour la volatilité dans le sens où la volatilité des rendements non-couverts sera quasi-systématiquement supérieure à celle des rendements couverts. A partir de (3) et (4), il est aisé de déduire le résultat suivant :

$$\text{var}(R_j^{NH}) \geq \text{var}(R_j^H) \Leftrightarrow \text{var}(e) - 2\text{cov}(R_j^L; e) \geq \text{var}(i_\epsilon - i_j) - 2\text{cov}(R_j^L; i_\epsilon - i_j). \quad (5)$$

La vérification de cette inégalité est une question empirique. En pratique, elle dépend principalement de la comparaison de la variance du change avec celle du différentiel de taux, les termes de covariance étant plus faibles, et généralement on aura $\text{var}(e) > \text{var}(i_\epsilon - i_j)$. On remarque également que du fait que $\text{var}(i_\epsilon - i_j) - 2\text{cov}(R_j^L; i_\epsilon - i_j) \approx 0$, la variance des rendements couverts sera équivalente à celle des rendements en monnaie locale. C'est évidemment très différent dans le cas des rendements non-couverts où le risque de change s'ajoute au risque de l'actif en monnaie locale.

¹⁰ Dans la pratique, cela dépend évidemment des investisseurs. Une règle souvent avancée est que les investisseurs en obligations couvrent le risque de change alors que les investisseurs en actions ne le font pas. Une explication est donnée par la volatilité relative des actifs, le risque de change représentant une fraction plus importante de la volatilité des prix des obligations que des actions.

¹¹ On suppose que la couverture est totale. Dans le cas plus général d'une couverture de fraction H , $0 \leq H \leq 1$, le rendement partiellement couvert sera donné par $R_j^H = (1 + R_j^L)/(1 + e) + H[(1 + i_\epsilon)/(1 + i_j) - 1/(1 + e)](1 + R_j^L) - 1$.

ANNEXE 2 : DISTRIBUTION SKEW-T

Afin de capturer les caractéristiques empiriques des données, nous modélisons les distributions marginales au moyen d'une fonction paramétrique souple, la fonction skew-t. La distribution skew-t, telle que décrite par Azzalini et Capitanio (2003) est une extension de la distribution t de Student incluant un paramètre d'asymétrie.

La fonction de densité marginale s'écrit :

$$f(x/\mu, \sigma^2, \delta, \nu) = 2(\sigma^2 + \delta^2)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)(\nu\pi)^{1/2}} \left[1 + \frac{x_*^2}{\nu(\sigma^2 + \delta^2)}\right]^{-(\nu+1)/2} T_{1, \nu+1} \left[\left(\frac{\nu + q(x_*)}{\nu+1}\right)^{\frac{-1}{2}} \frac{\delta}{\sigma} \frac{x_*}{\nu(\sigma^2 + \delta^2)} \right]$$

avec $q(x_*) = (\sigma^2 + \delta^2)^{-1} x_*^2$

et $x_* = x - \mu$

Où $T_{1, \nu+1} [\cdot]$ représente la fonction de répartition d'une distribution t de Student univariée ayant ν degrés de liberté, $\mu \in \mathbb{R}$ le paramètre de localisation, $\delta \in \mathbb{R}$ le paramètre d'asymétrie (skewness) et σ^2 la variance.

Notons que le degré de liberté détermine l'épaisseur des queues de la distribution : plus la valeur de ν est faible et plus la distribution exhibera des queues épaisses, en revanche la distribution s'apparentera à celle d'une Skew-normale pour $\nu \rightarrow \infty$.

En ce qui concerne l'asymétrie, la distribution coïncide avec celle d'une t de Student lorsque $\delta = 0$, mais présente une asymétrie à droite lorsque $\delta > 0$ et à gauche lorsque $\delta < 0$.

ANNEXE 3 : PASSAGE DE LA DISTRIBUTION ANTERIEURE A LA DISTRIBUTION POSTERIEURE

Nous présentons ici le passage de la distribution antérieure à la distribution postérieure, dans le cas où le marché M suit une distribution de probabilité $M \sim f_M$. Cette distribution (imposée a-priori ou estimée empiriquement) constitue la distribution antérieure autour de laquelle les stratégestes / gérants font évoluer leurs vues.

Etape 1 : des vues à une distribution subjective

Nous intégrons $K \leq N$ vues subjectives sur des combinaisons linéaires des actifs composant le marché M. Les K vues sont représentées dans une matrice P de dimension $K \times N$. Dans l'exemple de la partie III.2, la matrice P s'écrirait :

Exemple de matrice de vues

Vues\Actifs	Stoxx Large	Stoxx Mid et Small	S&P 500	GSCI Oil	AAA € Gov 7-10Y	US Gov 10Y	€Credit IG	€Credit HY	...	Cash
Vue 1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Vue 2	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
Vue k
...

Il est alors possible de compléter la matrice P par des combinaisons linéaires (représentée sous la forme d'une matrice P^\perp) sur lesquelles aucune vue n'est exprimée de telle manière que $\bar{P} \equiv \begin{pmatrix} P \\ P^\perp \end{pmatrix}$ soit une matrice

inversible de dimensions $N \times N$.

Le vecteur V de dimension N définit par

$$V \equiv \bar{P} M \quad (1)$$

est équivalent au marché M. Dans ce cadre, les « distributions subjectives », sont exprimées selon une fonction de répartition ($\hat{F}_k(v) = P_{subj}\{V_k \leq v\}$, $k=1, \dots, K$).

Etape 2 : marginalisation de la distribution de marché

La distribution antérieure $M \sim f_M$ implique également une distribution pour chaque vue V_k qui peut être représentée par sa fonction de répartition F_k ($F_k(v) = P_{Anté}\{V_k \leq v\}$, $k=1, \dots, K$)

Etape 3 : réconcilier les distributions antérieures et subjectives

Ces deux distributions (antérieure et subjective) diffèrent. L'approche COP les réconcilie en pondérant l'effet de l'une et de l'autre à l'aide d'un niveau de confiance prédéfini c_k (dont les valeurs appartiennent à $[0,1]$), propre à chaque vue k :

$$\tilde{F}_k \equiv (1 - c_k)F_k + c_k \hat{F}_k \quad (2)$$

La distribution obtenue est la distribution postérieure.

Etape 4 : conserver la structure de dépendance

Nous avons K vues définies par la distribution postérieure \tilde{F}_k . Afin de ne pas modifier la dépendance de marché définie ou estimée dans la distribution antérieure ($M \sim f_M$), nous calculons la copule (C) des vues, induite par (1), telle que :

$$C = \begin{pmatrix} F_1(V_1) \\ \vdots \\ F_K(V_K) \end{pmatrix}$$

La copule ainsi que les marginales étant définies nous obtenons les réalisations des vues postérieures par :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_1 \\ \vdots \\ \tilde{V}_J \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \tilde{F}_1^{-1}(C_1) \\ \vdots \\ \tilde{F}_J^{-1}(C_J) \end{pmatrix} \text{ où } F^{-1} \text{ représente la fonction quantile.}$$

Pour arriver à la distribution postérieure du marché, nous effectuons la rotation exprimée en (1) à l'envers :

$$M = \begin{pmatrix} \bar{P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ W \end{pmatrix} \text{ où } W \equiv P^\perp M$$

Souvent, il n'existe pas de solution analytique fermée aux étapes 2 et 4, ces opérations sont alors réalisées numériquement (voir Meucci 2005 pour une mise en œuvre détaillée).

AVERTISSEMENT / DISCLAIMER

Ce document et toutes les pièces jointes sont strictement confidentiels et établis à l'attention exclusive de ses destinataires. Ils ne sauraient être transmis à quiconque sans l'accord préalable écrit de Natixis. Si vous recevez ce document et/ou toute pièce jointe par erreur, merci de le(s) détruire et de le signaler immédiatement à l'expéditeur.

Ce document a été préparé par nos économistes. Il ne constitue pas un rapport de recherche indépendant et n'a pas été élaboré conformément aux dispositions légales arrêtées pour promouvoir l'indépendance de la recherche en investissement. En conséquence, sa diffusion n'est soumise à aucune interdiction prohibant l'exécution de transactions avant sa publication.

La distribution, possession ou la remise de ce document dans ou à partir de certaines juridictions peut être limitée ou interdite par la loi. Il est demandé aux personnes recevant ce document de s'informer sur l'existence de telles limitations ou interdictions et de s'y conformer. Ni Natixis, ni ses affiliés, directeurs, administrateurs, employés, agents ou conseils, ni toute autre personne acceptée d'être responsable à l'encontre de toute personne du fait de la distribution, possession ou remise de ce document dans ou à partir de toute juridiction.

Ce document et toutes les pièces jointes sont communiqués à chaque destinataire à titre d'information uniquement et ne constituent pas une recommandation personnalisée d'investissement. Ils sont destinés à être diffusés indifféremment à chaque destinataire et les produits ou services visés ne prennent en compte aucun objectif d'investissement, situation financière ou besoin spécifique à un destinataire en particulier. Ce document et toutes les pièces jointes ne constituent pas une offre, ni une sollicitation d'achat, de vente ou de souscription. Ce document ne peut en aucune circonstance être considéré comme une confirmation officielle d'une transaction adressée à une personne ou une entité et aucune garantie ne peut être donnée sur le fait que cette transaction sera conclue sur la base des termes et conditions qui figurent dans ce document ou sur la base d'autres conditions. Ce document et toutes les pièces jointes sont fondés sur des informations publiques et ne peuvent en aucune circonstance être utilisés ou considérés comme un engagement de Natixis, tout engagement devant notamment être soumis à une procédure d'approbation de Natixis conformément aux règles internes qui lui sont applicables.

Natixis n'a ni vérifié ni conduit une analyse indépendante des informations figurant dans ce document. Par conséquent, Natixis ne fait aucune déclaration ou garantie ni ne prend aucun engagement envers les lecteurs de ce document, de quelque manière que ce soit (expresse ou implicite) au titre de la pertinence, de l'exactitude ou de l'exhaustivité des informations qui y figurent ou de la pertinence des hypothèses auxquelles elle fait référence. En effet, les informations figurant dans ce document ne tiennent pas compte des règles comptables ou fiscales particulières qui s'appliqueraient aux contreparties, clients ou clients potentiels de Natixis. Natixis ne saurait donc être tenu responsable des éventuelles différences de valorisation entre ses propres données et celles de tiers, ces différences pouvant notamment résulter de considérations sur l'application de règles comptables, fiscales ou relatives à des modes de valorisation. De plus, les avis, opinions et toute autre information figurant dans ce document sont indicatifs et peuvent être modifiés ou retirés par Natixis à tout moment sans préavis.

Les informations sur les prix ou marges sont indicatives et sont susceptibles d'évolution à tout moment et sans préavis, notamment en fonction des conditions de marché. Les performances passées et les simulations de performances passées ne sont pas un indicateur fiable et ne préjugent donc pas des performances futures. Les informations contenues dans ce document peuvent inclure des résultats d'analyses issues d'un modèle quantitatif qui représentent des événements futurs potentiels, qui pourront ou non se réaliser, et elles ne constituent pas une analyse complète de tous les faits substantiels qui déterminent un produit. Natixis se réserve le droit de modifier ou de retirer ces informations à tout moment sans préavis. Plus généralement, Natixis, ses sociétés mères, ses filiales, ses actionnaires de référence ainsi que leurs directeurs, administrateurs, associés, agents, représentants, salariés ou conseils respectifs rejettent toute responsabilité à l'égard des lecteurs de ce document ou de leurs conseils concernant les caractéristiques de ces informations. Les opinions, avis ou prévisions figurant dans ce document reflètent, sauf indication contraire, celles de son ou ses auteur(s) et ne reflètent pas les opinions de toute autre personne ou de Natixis.

Les informations figurant dans ce document n'ont pas vocation à faire l'objet d'une mise à jour après la date apposée en première page. Par ailleurs, la remise de ce document n'entraîne en aucune manière une obligation implicite de quiconque de mise à jour des informations qui y figurent.

Natixis ne saurait être tenu pour responsable des pertes financières ou d'une quelconque décision prise sur le fondement des informations figurant dans la présentation et n'assume aucune prestation de conseil, notamment en matière de services d'investissement. En tout état de cause, il vous appartient de recueillir les avis internes et externes que vous estimez nécessaires ou souhaitables, y compris de la part de juristes, fiscalistes, comptables, conseillers financiers, ou tous autres spécialistes, pour vérifier notamment l'adéquation de la transaction qui vous est présentée avec vos objectifs et vos contraintes et pour procéder à une évaluation indépendante de la transaction afin d'en apprécier les mérites et les facteurs de risques.

Natixis est agréée par l'Autorité de contrôle prudentiel (ACP) en France en qualité de Banque – prestataire de services d'investissements et soumise à sa supervision. Natixis est réglementée par l'AMF (Autorité des Marchés Financiers) pour l'exercice des services d'investissements pour lesquels elle est agréée.

Natixis est agréée par l'ACP en France et soumise à l'autorité limitée du Financial Services Authority au Royaume Uni. Les détails concernant la supervision de nos activités par le Financial Services Authority sont disponibles sur demande.

Natixis est agréée par l'ACP et régulée par la BaFin (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht) pour l'exercice en libre établissement de ses activités en Allemagne. Le transfert / distribution de ce document en Allemagne est fait(e) sous la responsabilité de NATIXIS Zweigniederlassung Deutschland.

Natixis est agréée par l'ACP et régulée par la Banque d'Espagne (Bank of Spain) et la CNMV pour l'exercice en libre établissement de ses activités en Espagne.

Natixis est agréée par l'ACP et régulée par la Banque d'Italie et la CONSOB (Commissione Nazionale per le Società e la Borsa) pour l'exercice en libre établissement de ses activités en Italie.

Natixis ne destine la diffusion aux Etats-Unis de cette publication qu'aux « major U.S. institutional investors », définis comme tels selon la **Rule 15(a) (6)**. Cette publication a été élaborée et vérifiée par les économistes de Natixis (Paris). Ces économistes n'ont pas fait l'objet d'un enregistrement professionnel en tant qu'économiste auprès du NYSE et/ou du NASD et ne sont donc pas soumis aux règles édictées par la FINRA.

This document (including any attachments thereto) is confidential and intended solely for the use of the addressee(s). It should not be transmitted to any person(s) other than the original addressee(s) without the prior written consent of Natixis. If you receive this document in error, please delete or destroy it and notify the sender immediately.

This document has been prepared by our economists. It does not constitute an independent investment research and has not been prepared in accordance with the legal requirements designed to promote the independence of investment research. Accordingly there are no prohibitions on dealing ahead of its dissemination.

The distribution, possession or delivery of this document in, to or from certain jurisdictions may be restricted or prohibited by law. Recipients of this document are therefore required to ensure that they are aware of, and comply with, such restrictions or prohibitions. Neither Natixis, nor any of its affiliates, directors, employees, agents or advisers nor any other person accept any liability to anyone in relation to the distribution, possession or delivery of this document in, to or from any jurisdiction.

This document (including any attachments thereto) are communicated to each recipient for information purposes only and do not constitute a personalised recommendation. It is intended for general distribution and the products or services described therein do not take into account any specific investment objective, financial situation or particular need of any recipient. It should not be construed as an offer or solicitation with respect to the purchase, sale or subscription of any interest or security or as an undertaking by Natixis to complete a transaction subject to the terms and conditions described in this document or any other terms and conditions. Any undertaking or commitment shall be subject to Natixis prior approval and formal written confirmation in accordance with its current internal procedures. This document and any attachments thereto are based on public information.

Natixis has neither verified nor independently analysed the information contained in this document. Accordingly, no representation, warranty or undertaking, express or implied, is made to the recipients of this document as to or in relation to the accuracy or completeness or otherwise of this document or as to the reasonableness of any assumption contained in this document. The information contained in this document does not take into account specific tax rules or accounting methods applicable to counterparties, clients or potential clients of Natixis. Therefore, Natixis shall not be liable for differences, if any, between its own valuations and those valuations provided by third parties; as such differences may arise as a result of the application and implementation of alternative accounting methods, tax rules or valuation models. In addition, any view, opinion or other information provided herein is indicative only and subject to change or withdrawal by Natixis at any time without notice.

Prices and margins are indicative only and are subject to changes at any time without notice depending on inter alia market conditions. Past performances and simulations of past performances are not a reliable indicator and therefore do not predict future results. The information contained in this document may include the results of analysis derived from a quantitative model, which represent potential future events, that may or may not be realised, and is not a complete analysis of every material fact representing any product. The information may be amended or withdrawn by Natixis at any time without notice. More generally, no responsibility is accepted by Natixis, nor any of its holding companies, subsidiaries, associated undertakings or controlling persons, nor any of their respective directors, officers, partners, employees, agents, representatives or advisors as to or in relation to the characteristics of this information. The opinions, views and forecasts expressed in this document (including any attachments thereto) reflect the personal views of the author(s) and do not reflect the views of any other person or Natixis unless otherwise mentioned.

It should not be assumed that the information contained in this document will have been updated subsequent to date stated on the first page of this document. In addition, the delivery of this document does not imply in any way an obligation on anyone to update such information at any time.

Natixis shall not be liable for any financial loss or any decision taken on the basis of the information contained in this document and Natixis does not hold itself out as providing any advice, particularly in relation to investment services. In any event, you should request for any internal and/or external advice that you consider necessary or desirable to obtain, including from any financial, legal, tax or accounting advisor, or any other specialist advice, in order to verify in particular that the investment(s) described in this document meets your investment objectives and constraints and to obtain an independent valuation of such investment(s), its risks factors and rewards.

Natixis is authorised in France by the *Autorité de contrôle prudentiel* (ACP) as a Bank – Investment Services providers and subject to its supervision. Natixis is regulated by the AMF in respect of its investment services activities.

Natixis is authorised by the ACP in France and subject to limited regulation by the Financial Services Authority in the United Kingdom. Details on the extent of our regulation by the Financial Services Authority are available from us on request.

Natixis is authorised by the ACP and regulated by the BaFin (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht) for the conduct of its business in Germany. The transfer / distribution of this document in Germany is done by / under the responsibility of NATIXIS Zweigniederlassung Deutschland.

Natixis is authorised by the ACP and regulated by Bank of Spain and the CNMV for the conduct of its business in Spain.

Natixis is authorised by the ACP and regulated by Bank of Italy and the CONSOB (Commissione Nazionale per le Società e la Borsa) for the conduct of its business in Italy.

This research report is solely available for distribution in the United States to major U.S. institutional investors as defined by **SEC Rule 15(a)(6)**. This research report has been prepared and reviewed by research economists employed by Natixis (Paris). These economists are not registered or qualified as research economists with the NYSE and/or the NASD, and are not subject to the rules of the FINRA