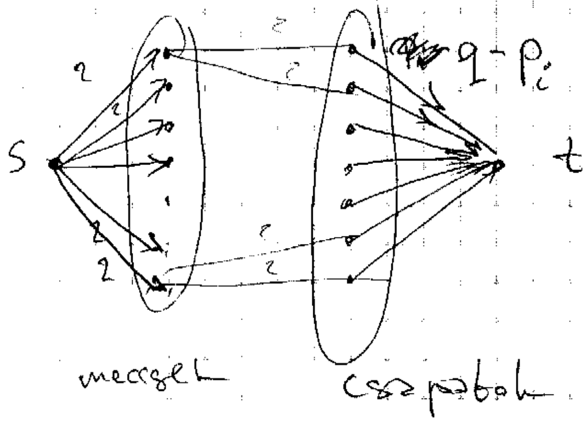
1\.
1.old

~~Azt a~~ Egy rögzített csapat lehet-e még bajnok, ha már a bajnokságban, ha már lejátszottak pár meccset?

Rögzítünk egy csapatot, amelynek "szurkolunk", erről feltételezzük, hogy az összes további meccset is meg fogja nyerni. Ekkor a többi csapatból és a köztük még le nem játszott meccsekből fel tudunk rajzolni egy gráfot.



A "mi" csapatunk nem ~~sze~~ szerepel ebben a gráfban.
jelöljük ~~p~~ q-val a mi csapatunk eddig elért pontszámát + a még lejátszandó meccseinek számát (k) * 2,

$q := 2k +$ mivel neki szurkolunk, nem kérdés, hogy mindet megnyeri :).

$p_0 \leftarrow$ megszerzett pontjaink ("0" indexű a "mi" csapatunk)

A szerkesztett gráfban a csapatok és a gyűjtőpont közötti élek kapacitását rendre ~~p~~ $q - p_i$-re állítjuk. (~~Ez azt jelenti~~)

p_i - az i csapat már lejátszott meccsekből származó pontja

q - a mi csapatunk maximális pontszáma a már lejátszott meccsek alapján

Mivel azok az esetek, mikor a mi csapatunk esetleg nem nyeri meg az összes meccset a továbbiakban azt magában foglalja az az eset, hogy maximális pontot ér el, mivel ekkor azt állítjuk, hogy $2k < q$ esetben is nyer tehát ha csak q-t vizsgáljuk ~~akkor~~ az elég.

A következő eseteket kell vizsgálni:

i.) $\exists\, q - p_i < 0$: Ez azt jelenti, hogy az i csapatnak a már lejátszott meccseiből már eleve több pontja van, mint amennyit mi a legoptimálisabb esetben össze tudunk gyűjteni! Ha ilyen létezik, akkor nem nyerhetünk.

1.)
2.old

ii) $\exists$ 2k értékű maximális folyam.
k itt a még le nem játszott meccseket jelenti.

k meccs 2k pontot szór szét a csapatok között. Ha ezt a 2k pontot szét tudjuk úgy osztani a további n-1 csapat között, hogy egyik csapat se érjen el q pontot, akkor van esélyünk nyerni.

A k hátralévő meccsbe nem számítanak bele a mi csapatunk meccsei, mivel feltételezzük, hogy mi nyerünk, ezért azok csak a kapacitású élekkel szálnának be a többi csapat gráfjába.

A ii feltétel ekvivalens azzal, hogy találnunk kell maximális ~~esetet~~ folyamot az így kompenzált gráfban, úgy hogy az ~~csapatok és~~
i. csapat és a gyűjtőpont közötti él kapacitása max. $q-p_i$. Ha van ilyen folyam akkor van esélyünk megnyerni a bajnokságot. Ha nincs ilyen maximális folyam, akkor a lehető legjobb esetben sincs esélyünk a végső győzelemre, (amikor minden további meccset megnyerünk) ha ennél rosszabb esetet vennénk, abban még ennyire se lenne esélyünk a bajnoki címre.

2) Mivel bármely kör hossza legfeljebb a gráf élszáma lehet ($|C| \leq |e(G)|$) ezert a Bellman-Ford algoritmus $|e(G)|$ -edik iterációjával megfigyelhetjük, hogy még mindig javítana az út hosszán, ezért az n+1. lépésben már ellentmondáshoz jutunk, mivel az így "összetákolt" "legrövidebb" séta már több élet tartalmaz, mint a gráf összesen.

(~~Ennek az a se~~)

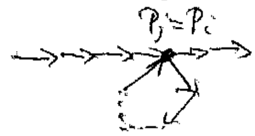
Ezen séta menten, ha elindulunk a végétől az eleje felé, előbb utóbb megtaláljuk az n+1. él egy korábban bevett példányát $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ E között az i. lépés között és az n+1. lépés közötti éleken biztosan $\exists$ negatív kör.

11) Vegyünk egy tetszőleges $P_1 = s, P_2, \ldots P_\ell = t$ sétát

— Ha P_i-k mind különbözőek $\Rightarrow$ nincs kör $s \rightsquigarrow t$ sétában $\Rightarrow \exists s \rightsquigarrow t$ út

— Egyébként legyen i a legkisebb index, melyre $P_i = P_j$ $(j < i)$ $\Rightarrow \exists P_j \rightsquigarrow P_i$ irányított kör,



ezt a kört leválasztva
(P_j csúcsból vezető élet átirányítjuk P_{i+1}-be, ahova P_i-ből mutat az él)
egy legalább 1 éllel rövidebb sétát kapunk. Az elhagyott kör ekkor legyen k_p. Ezt az eljárást folytatva a sétánk hossza monoton csökken egy egy k_p kör elhagyásával. Hogyha már $\nexists i: \exists j \; P_i = P_j$
$\Rightarrow$ nincs több kör a sétánkban $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $s \rightsquigarrow t$ utat kapunk. ~~ezt~~
Ezt az S_m utat: ~~(uniózva) egy~~

$$S_m \cup k_1 \cup k_2 \cup \ldots k_p \cup \ldots \cup k_m$$

az eredeti sétánkat kapjuk, amit egy út és m db kör uniójaként kaplunk.

24.) $G=(N,A)$; $c_1, c_2 : A \to \mathbb{Z}(\mathbb{R})$

G-ben c_1 szerint nincs negatív kör

- Ford algoritmusa megadja a G-ben a c_1 szerinti legrövidebb utakat $s \leadsto t$-be. ~~Ezeket~~ Ezeket az utakat biztosan megkapjuk c_1 szerint, mivel nincs negatív kör c_1 szerint a G gráfban és e mellett a feltétel mellett Ford algoritmusa garantáltan lefut.
- Az így kapott $s \leadsto t$ utak meghatároznak egy $G' \leq G$ részgráfot.
- G'-ben $\forall s \leadsto t$ séta c_1 szerint minimális lesz, hiszen ha lenne két különböző értékű séta G'-ben, akkor a c_1-szerint nagyobb értékűt Ford algoritmusa biztosan nem választotta volna.
- G'-ben Ford algoritmusa vagy talál c_2-re is legrövidebb utakat, ezek az utak már c_1-szerint legrövidebbek; vagy ha mégsem találunk c_2 szerint is legrövidebb utat G'-ben, akkor G'-ben létezik c_2-szerinti negatív kör.

25) 1 old

Rendezzük sorrendbe az e_i éleket c súlyfüggvényünk szerint. Ekkor kapunk egy rendezést, leggyen ez $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_k)$ ahol az $1, 2, \dots i \dots k$ indexek a c szerinti

a) sorrendet jelöli. Ha $\exists s \rightsquigarrow t \Rightarrow$ van értelme felytatni: Hagyjunk el éleket a gráfból a következő módon:

(1) Hagyjuk el az épp legkisebb ~~et~~ (c-szerint) indexűt.

~~(2) Ha s és t~~

(2) Ha az e_i elhagyásával már $\nexists s \rightsquigarrow t$ út, és az i a legkisebb ilyen index mikor már nincs $s \rightsquigarrow t$ $\Rightarrow$ [illegible]

$c(e_i)$ súlya lesz az összes $s \rightsquigarrow t$ utaknak a maximális szélessége,

- mivel e_i-nél c szerint már minden szűkebb élet elhagytam, ezért $c(e_i)$-nél ~~ennél~~ szűkebb út már nincsen $s \rightsquigarrow t$ között ($\forall s \rightsquigarrow t$ széle $\geq c(e_i)$)
- mivel ha elhagyom e_i-t már egyáltalán nem lesz $s \rightsquigarrow t$ utam, ezért szélesebb út sem lehet, mert pontosan e_i elhagyása előtt $\forall s \rightsquigarrow t$ áthaladt e_i élen $\Rightarrow \forall s \rightsquigarrow t$ széle $\leq c(e_i)$

különben folytassuk tovább az (1)-es lépéssel.

25.
2. old

b) Először tekintsük az s-ből irányított úton elérhető csúcsokat. Ugyanúgy hagyjunk el éleket C-szerint rendezett sorrendben. Amikor a gráfunk egy e_i-nél szétesik két komponensre $\Rightarrow$ $\forall$csúcs amelybe így már pont nem vezet irányított út s-ből, az azokba vezető s ~~...~~ utaknak lesz $c(e_i)$ a szélessége, kisebb nem lehet, mivel azokat az éleket már elhagytuk, nagyobb úgyszint nem, mivel ez a legszűkebb él, mellyel még pont volt irányított út azokba a csúcsokba. Ezt az eljárást folytatva, amíg nem marad egy csak s-ből álló komponens, megkapjuk az összes s-ből az eredeti gráfban elérhető csúcsokba vezető utak szélét.

c) Hagyjuk el ugyanúgy sorra $e_1, e_2 \dots$ éleket. Az e_i él elhagyásával keletkezett két komponens, legyen most k_1 és k_2. k_1 és k_2 pontjai között a legszélesebb út $C(e_i)$ szélességű, mivel ugyanúgy mint eddig, ez a legszűkebb, mellyel még összefüggők voltak és ha ezt is elhagyjuk akkor már nem vezet út a két komponens között. Addig haladunk így tovább, amíg az utolsó élet is el nem hagytuk. ~~...~~
Irányítatlan gráf esetén, bontsuk fel az éleket két egymással ellentétes irányú, de azonos súlyú élre. Így ez már csak spec. esete az irányított gráfnak.