

# **Capítulo**

## **1**

# **Construção do Ambiente 3D**

## 1.1 O SISTEMA DE PROJEÇÃO

Inicialmente, vamos definir o sistema de projeção. Analisemos a figura abaixo:

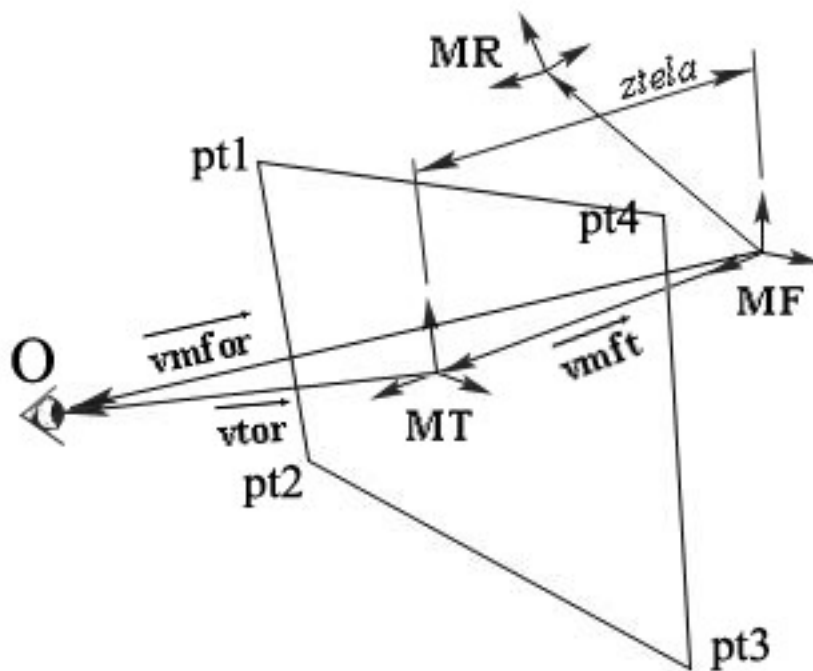


Fig. 1

Na figura **MR**, **MF** e **MT** são os sistemas coordenados do mundo rotacionado, mundo fixo e tela, respectivamente. Um sistema coordenado é definido por um ponto de origem em relação a um outro sistema e um conjunto de três vetores ortonormais, ou seja, uma base no espaço tridimensional. No nosso caso, todos os sistemas coordenados são definidos com relação a **MF**.

Em linguagem C, podemos representar um sistema coordenado por meio de da estrutura abaixo.

```
struct SisCoord
{
    Vetor pini;
    Vetor e[3];
};
```

#### 4 Construção do Ambiente 3D

**O** é o observador, sua posição é determinada por  $\overrightarrow{\mathbf{vmfor}}$  e  $\overrightarrow{\mathbf{vtor}}$  nos sistemas **MF** e **MT**, respectivamente.

**MF** e **MT** possuem o mesmo conjunto de vetores ortonormais, portanto **MT** pode ser definido univocamente por  $\overrightarrow{\mathbf{vmft}}$  e pelos vetores base de **MF**, e, se definirmos que  $\overrightarrow{\mathbf{vmft}}$  é paralelo a  $\mathbf{MF} \rightarrow \mathbf{e}[2]$ , podemos substituir  $\overrightarrow{\mathbf{vmft}}$  pela variável *ztela*.

Finalmente **pt1**, **pt2**, **pt3** e **pt4** são os pontos que delimitam a tela do computador, no sistema de coordenadas do mundo **MF**, suas coordenadas ficam:



## **6      Construção do Ambiente 3D**

# Capítulo

## 2

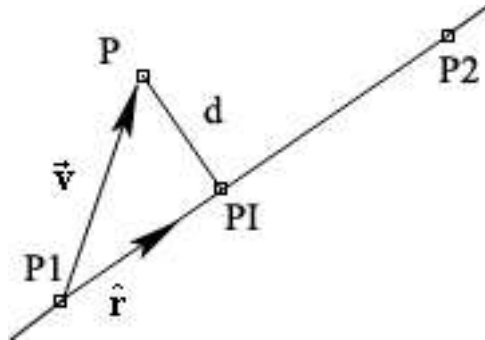
# Intersecções

## 8 Intersecções

### 2.1 FUNÇÕES ÚTEIS

#### 2.1.1 Distância de um ponto $P$ a uma reta $r$ definida por dois pontos $P1$ e $P2$

O problema é mostrado no desenho abaixo:



$P1$  e  $P2$  definem a reta,  $d$  é a distância do ponto  $P$  à reta, ou seja, o que desejamos calcular.

O vetor unitário  $\hat{r}$  é definido como:

$$\hat{r} = \frac{(P2 - P1)}{|P2 - P1|} \quad (\text{eq. 1})$$

E  $\vec{v}$  é igual a  $P - P1$ .

Obtemos  $d$  projetando  $\vec{v}$  sobre  $\hat{r}$  e somando  $P1$  a este resultado para obter  $PI$ , então a norma de  $P - PI$  é igual a  $d$ , veja as duas equações abaixo:

$$PI = P1 + (\vec{v} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} \quad (\text{eq. 2})$$

$$d = |PI - P| \quad (\text{eq. 3})$$

Abaixo uma implementação em C :

```
double distanciapontoareta3d(Vetor *p1,Vetor *p2,Vetor *p,NDOUBLE *alpha,Vetor *pI)
{
    Vetor p_i,v;
    Vetor::sub(p,p1,&v);Vetor::sub(p2,p1,&p_i);
    if(alpha) { p_i.norma(); *alpha=(v*p_i)/p_i.normaquad;}
    p_i.normaliza();
    Vetor::mult(&p_i,v*p_i,&p_i); Vetor::soma(&p_i,p1,&p_i);
    if(pI) *pI=p_i; Vetor::sub(p,&p_i,&p_i);
    return p_i.norma();
}
```

Note que, eventualmente, pode nos ser útil saber também qual é o ponto **PI** e o parâmetro  $\alpha$  definido por  $\alpha = \frac{(\vec{v} \cdot \hat{r})}{|\mathbf{P2} - \mathbf{P1}|}$ , analisando este parâmetro podemos verificar se **PI** pertence ao segmento **P1**  $\rightarrow$  **P2** ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), ou não ( $\alpha < 0$  ou  $\alpha > 1$ ), daí a adição dos ponteiros alpha e pI no trecho de código acima.

Calculamos aqui a distância de um ponto no espaço tridimensional à uma reta no espaço tridimensional, porém as mesmas equações valem para o espaço bidimensional, basta definir os vetores e pontos em questão por uma dupla de números reais ao invés de uma tripla ou apenas fazer a terceira coordenada dos vetores e pontos igual a zero.



## 10 Intersecções

### 2.1 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE 3 EQUAÇÕES UTILIZANDO NOTAÇÃO VETORIAL

Considere o sistema de 3 equações abaixo:

$$\begin{cases} A_{11} \cdot x + A_{12} \cdot y + A_{13} \cdot z = G_1 \\ A_{21} \cdot x + A_{22} \cdot y + A_{23} \cdot z = G_2 \\ A_{31} \cdot x + A_{32} \cdot y + A_{33} \cdot z = G_3 \end{cases} \quad (\text{eq. 1})$$

Definimos agora os seguintes vetores:

$$\vec{a} = A_{11} \mathbf{i} + A_{12} \mathbf{j} + A_{13} \mathbf{k} \quad (\text{eq. 2})$$

$$\vec{b} = A_{21} \mathbf{i} + A_{22} \mathbf{j} + A_{23} \mathbf{k} \quad (\text{eq. 3})$$

$$\vec{c} = A_{31} \mathbf{i} + A_{32} \mathbf{j} + A_{33} \mathbf{k} \quad (\text{eq. 4})$$

$$\vec{d} = (d_x, d_y, d_z) = \vec{b} \times \vec{c} \quad (\text{eq. 5})$$

$$\vec{e} = (e_x, e_y, e_z) = \vec{c} \times \vec{a} \quad (\text{eq. 6})$$

$$\vec{f} = (f_x, f_y, f_z) = \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{eq. 7})$$

$$\vec{g} = G_1 \mathbf{i} + G_2 \mathbf{j} + G_3 \mathbf{k} \quad (\text{eq. 8})$$

$$\vec{h}_x = (\vec{d} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\vec{e} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{j} + (\vec{f} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{k} = d_x \mathbf{i} + e_x \mathbf{j} + f_x \mathbf{k} \quad (\text{eq. 9})$$

$$\vec{h}_y = (\vec{d} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{i} + (\vec{e} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\vec{f} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{k} = d_y \mathbf{i} + e_y \mathbf{j} + f_y \mathbf{k} \quad (\text{eq. 10})$$

$$\vec{h}_z = (\vec{d} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{i} + (\vec{e} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{j} + (\vec{f} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = d_z \mathbf{i} + e_z \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad (\text{eq. 11})$$

A solução, surpreendentemente simples, então é:

$$x = \frac{\vec{h}_x \cdot \vec{g}}{\vec{a} \cdot \vec{d}}, \quad y = \frac{\vec{h}_y \cdot \vec{g}}{\vec{a} \cdot \vec{d}}, \quad z = \frac{\vec{h}_z \cdot \vec{g}}{\vec{a} \cdot \vec{d}} \quad (\text{eq. 12})$$

Naturalmente se  $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$  o sistema não tem soluções ou tem infinitas soluções.

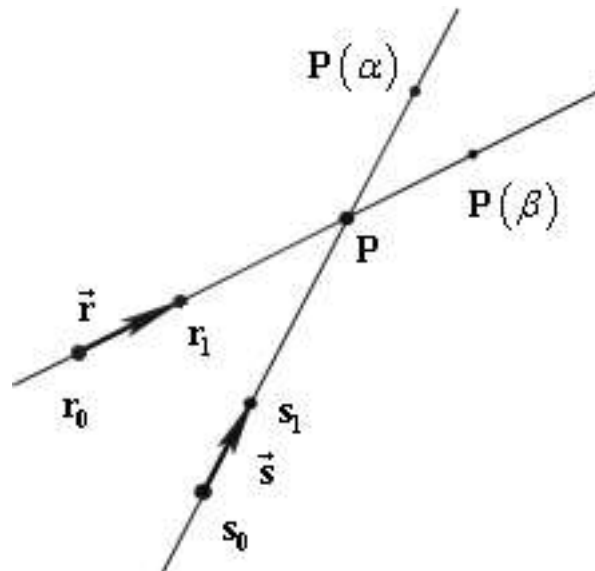
## 2.2 INTERSECÇÃO RETA-RETA

Consideremos o problema de encontrar o ponto de intersecção entre duas linhas com as seguintes equações paramétricas:

$$\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{r}_0 + \alpha \cdot \vec{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 1})$$

$$\mathbf{P}(\beta) = \mathbf{s}_0 + \beta \cdot \vec{\mathbf{s}} \quad (\text{eq. 2})$$

Analise a figura abaixo:



Na figura acima  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{s}_0$ ,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{s}_1$  são pontos de  $\mathbb{R}^3$  que definem as retas,  $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  e  $\vec{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0$  são os vetores que definem a direção da reta (note que o sentido aqui não é importante),  $\mathbf{P}$  é o ponto que desejamos determinar e  $\mathbf{P}(\alpha)$  e  $\mathbf{P}(\beta)$  são as equações de um ponto que pertence à reta definida por  $(\mathbf{r}_0, \vec{\mathbf{r}})$  e  $(\mathbf{s}_0, \vec{\mathbf{s}})$ , respectivamente.

A primeira coisa a fazer é verificar se os pontos  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{s}_0$  são coplanares com relação aos vetores  $\vec{\mathbf{r}}$  e  $\vec{\mathbf{s}}$ , pois somente assim pode existir um ponto comum às duas retas, basta verificar se a seguinte relação é verdadeira:

## 12 Intersecções

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0) \bullet (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{s}}) = 0 \quad (\text{eq. 3})$$

Se a equação 3 é verdadeira, pode haver intersecção, mas por enquanto não há garantia alguma que realmente exista, pois mesmo sendo coplanares, as retas ainda podem ser paralelas, note que, se as retas são paralelas o resultado acima é sempre verdadeiro pois  $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{s}}$  é zero se os vetores  $\vec{\mathbf{r}}$  e  $\vec{\mathbf{s}}$  são paralelos.

A solução do problema fica fácil se percebermos que no ponto  $\mathbf{P}$  a reta definida por  $\mathbf{P}(\alpha) - \mathbf{P}(\beta)$ , deve necessariamente ser perpendicular à  $\vec{\mathbf{r}}$  e  $\vec{\mathbf{s}}$ , expressando isto matematicamente, obtemos:

$$[\mathbf{P}(\alpha) - \mathbf{P}(\beta)] \bullet \vec{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{eq. 4})$$

e

$$[\mathbf{P}(\alpha) - \mathbf{P}(\beta)] \bullet \vec{\mathbf{s}} = 0 \quad (\text{eq. 5})$$

Substituindo as definições de  $\mathbf{P}(\alpha)$  e  $\mathbf{P}(\beta)$  dadas pelas (eq. 1) e (eq. 2) nas duas equações acima e resolvendo para  $\alpha$  e  $\beta$ , conseguimos o seguinte resultado:

$$\alpha = \frac{\{[\vec{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0)] \cdot (\vec{\mathbf{s}} \bullet \vec{\mathbf{s}}) - [\vec{\mathbf{s}} \bullet (\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0)] \cdot (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{s}})\}}{(\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{s}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{s}}) - (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\mathbf{s}} \bullet \vec{\mathbf{s}})} \quad (\text{eq. 6})$$

$$\beta = \frac{\{[\vec{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0)] \cdot (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{s}}) - [\vec{\mathbf{s}} \bullet (\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0)] \cdot (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}})\}}{(\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{s}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{s}}) - (\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\mathbf{s}} \bullet \vec{\mathbf{s}})} \quad (\text{eq. 7})$$

Obviamente, apenas um dos parâmetros necessita ser calculado para definir unicamente o ponto  $\mathbf{P}$ . Se o denominador das equações acima são nulos não há intersecção ou há infinitas intersecções, ou seja o ponto  $\mathbf{P}$  é indeterminado, isto ocorre quando, além do denominador anular-se o numerador também é igual a zero.

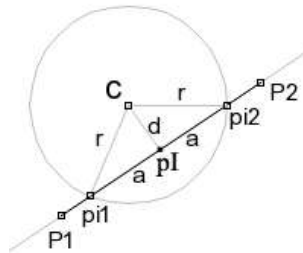
Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são importantes quando desejamos verificar se os segmentos definido pelos pontos  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)$  e  $(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)$  interceptam as retas definidas por  $(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)$  e  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)$ , respectivamente, caso em que  $\alpha$  e  $\beta$  devem estar pertencer ao intervalo fechado  $[0, 1]$ , ou no caso da intersecção raio (semi-reta) com reta ou raio com raio, onde  $\alpha$  e  $\beta$  devem ser positivos ou igual a zero.

## 2.3 INTERSECÇÃO CÍRCULO-RETA

Vamos, agora, resolver o problema da intersecção entre um círculo com e uma reta  $s$ .

Poderíamos utilizar as equações algébricas ou paramétricas do círculo e da linha para obtermos a solução, porém vamos utilizar uma outra abordagem, utilizando a simetria inerente ao círculo.

Observe a figura abaixo:



No desenho  $C$  é o centro do círculo,  $r$  é o raio,  $PI$  é o ponto da reta  $s$  resultante da intersecção da reta perpendicular à  $s$  e que passa por  $C$ ,  $d$  é a distância do centro  $C$  até a reta  $s$ , ou seja, a distância entre  $C$  e  $PI$ ,  $PI1$  e  $PI2$  são os pontos de intersecção que desejamos encontrar e  $a$  é a distância de  $PI$  a  $PI1$  que, devido à simetria do círculo, é igual à distância de  $PI$  a  $PI2$ . Não mostramos na figura, mas lembrem-se de que o círculo está no espaço tridimensional e portanto assumimos que um certo vetor  $\hat{k}$ , unitário e ortogonal ao plano do círculo, determina a orientação do círculo no espaço.

Os passos necessários à resolução são os seguintes:

1-Verificamos se a reta e o círculo são coplanares (vamos nos limitar ao caso em que ambos pertencem ao mesmo plano).

Para que estes sejam coplanares, as duas seguintes afirmações devem ser verdadeiras:

$$(P2 - P1) \cdot \hat{k} = 0$$

$$(C - P1) \cdot \hat{k} = 0$$

2-Calculamos a distância  $d$  do centro do círculo à reta e o ponto  $PI$  como explanado na seção 2.1, os três casos possíveis devem ser analisados:

- a)  $d > r$ , não existe intersecção;
- b)  $d = r$ , a reta e o círculo se interceptam em um único ponto;
- c)  $d < r$ , a reta e o círculo se interceptam em dois pontos distintos;

## 14 Intersecções

3-Calculamos a distância  $a$  utilizando a equação seguinte:

$$a = \sqrt{r^2 - d^2}$$

4-Obtemos, finalmente os pontos **pi1** e **pi2** utilizando as equações abaixo:

$$\mathbf{pi1} = \mathbf{pI} - a \cdot \frac{(\mathbf{P2} - \mathbf{P1})}{|\mathbf{P2} - \mathbf{P1}|}$$

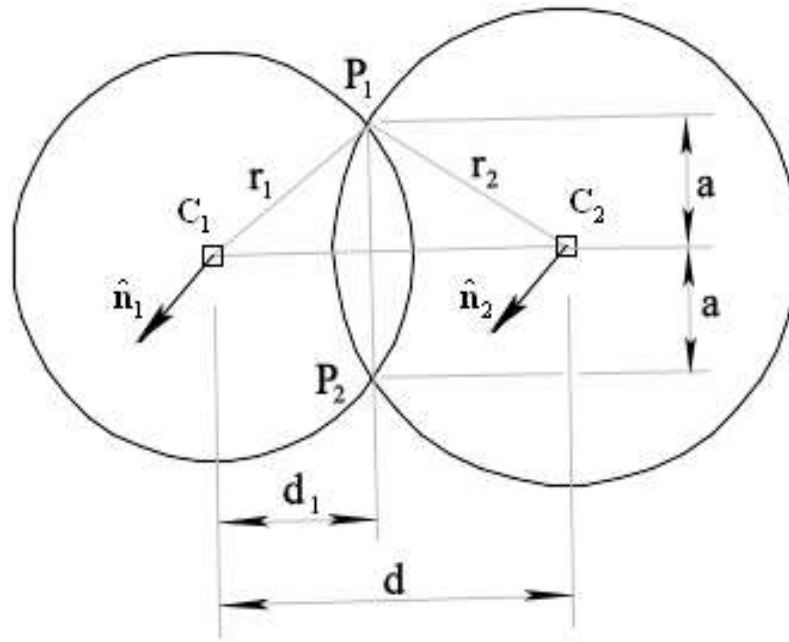
$$\mathbf{pi2} = \mathbf{pI} + a \cdot \frac{(\mathbf{P2} - \mathbf{P1})}{|\mathbf{P2} - \mathbf{P1}|}$$

Eis a implementação:

```
bool interceptacircrreta(Vetor *p1r,Vetor *p2r,Vetor *centro,NDOUBLE raio,Vetor *k,Vetor
*pi1,Vetor *pi2)
{
    Vetor p1p2r,p1rc,pI;
    NDOUBLE dist;
    Vetor::sub(p2r,p1r,&p1p2r);
    Vetor::sub(centro,p1r,&p1rc);
    p1p2r.normaliza();
    if(igualazero(p1p2r.normad)||!igualazero(p1p2r>(*k))||!igualazero(p1rc>(*k)))
        return false;//nao coplanares
    NDOUBLE a;
    int sinaldistreIr;
    dist=distanciapontoareta3d(p1r,p2r,centro,0,&pI);
    sinaldistreIr=FuncoesNumericas::comp(dist,raio,EPS);
    if(sinaldistreIr>0)return false;
    a=sqrt(raio*raio-dist*dist);
    *pi1=*pi2=p1p2r;
    Vetor::mult(pi1,-a,pi1);
    Vetor::soma(pi1,&pI,pi1);
    Vetor::mult(pi2,a,pi2);
    Vetor::soma(pi2,&pI,pi2);
    return true;
}
```

## 2.4 INTERSECÇÃO CÍRCULO-CÍRCULO

Vamos utilizar um método que aproveita a simetria de um círculo para verificar se dois círculos se interceptam e determinar os pontos de intersecção se estes existem. A figura abaixo mostra as simetrias que usaremos e os parâmetros envolvidos.



Na figura acima  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  são as normais unitárias ao plano dos círculos que determinam as suas posições no espaço,  $r_1$  e  $r_2$  são seus respectivos raios,  $C_1$  e  $C_2$  seus centros,  $P_1$  e  $P_2$  são os pontos de intersecção que desejamos encontrar, os pontos de intersecção podem ser distintos, coincidentes ou inexistentes,  $d$  é a distância do centro  $C_1$  ao centro  $C_2$ ,  $d_1$  é a distância do centro  $C_1$  à reta que passa pelos pontos de intersecção  $P_1$  e  $P_2$  e finalmente  $a$  é a metade da distância entre  $P_1$  e  $P_2$ .

## 16 Intersecções

Uma exigência imposta para que este método funcione é a de que os dois círculos sejam coplanares, para verificar isto basta calcular o produto vetorial entre as duas normais, se o resultado for igual ao vetor nulo os círculos são coplanares, caso contrário não, ou seja, para que os círculos sejam coplanares a expressão abaixo deve ser verdadeira:

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2 = \vec{0}$$

Outra exigência é que os centros não sejam coincidentes, pois, neste caso, ou não existe intersecção alguma ou existem infinitas intersecções. Então:

$$\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{C}_2$$

A terceira e última exigência é a seguinte:

$$|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2| \leq r_1 + r_2$$

Obviamente, se a inequação acima for falsa não pode existir intersecção alguma entre o círculo, ou seja eles não se encontram em nenhum ponto.

Da figura, conseguimos obter duas equações utilizando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} a^2 &= r_1^2 - d_1^2 \\ a^2 &= r_2^2 - (d - d_1)^2 = r_2^2 - d^2 + 2d_1d - d_1^2 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Igualando as duas obtemos:

$$r_1^2 = r_2^2 - d^2 + 2d_1d$$

Resolvendo para  $d_1$ :

$$d_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad (2.4.2)$$

Substituindo este resultado na primeira das equações 2.4.1, conseguimos determinar  $a$ , ou seja:

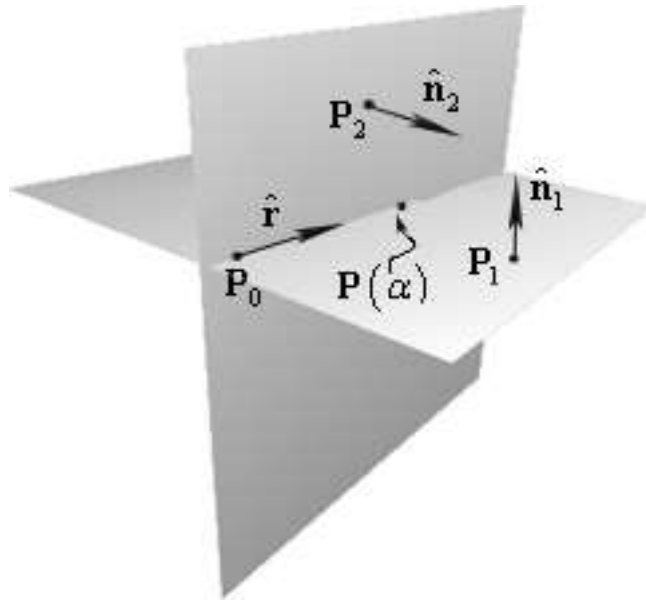
$$a = \sqrt{r_1^2 - \left( \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \right)^2} \quad (2.4.3)$$

Definindo dois vetores  $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1}{|\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1|}$  e  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}$ , os pontos  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  podem ser determinados pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{C}_1 + d_1 \hat{\mathbf{v}} + a \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{C}_1 + d_1 \hat{\mathbf{v}} - a \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

## 2.5 INTERSECÇÃO ENTRE DOIS PLANOS

O objetivo desta seção é estudar a intersecção entre dois planos infinitos, definidos respectivamente por  $(\mathbf{P}_1, \hat{\mathbf{n}}_1)$  e  $(\mathbf{P}_2, \hat{\mathbf{n}}_2)$ , observe a figura abaixo.



Nesta figura  $\vec{r} = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2$  é o vetor diretor da reta resultante da intersecção entre os dois planos,  $\mathbf{P}_0$  é um ponto qualquer pertencente simultaneamente à ambos os planos e  $\mathbf{P}(\alpha)$  é a equação paramétrica da reta dada por:

$$\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P}_0 + \alpha \cdot \vec{r} \quad (\text{eq.1})$$

Vemos que basta escolher apropriadamente  $\mathbf{P}_0$  e o problema estará resolvido, uma opção é escolher  $\mathbf{P}_0$  como a intersecção dos planos definidos por  $(\mathbf{P}_1, \hat{\mathbf{n}}_1)$ ,  $(\mathbf{P}_2, \hat{\mathbf{n}}_2)$  e  $(\mathbf{P}_1, \vec{r})$ , as equações que devem ser satisfeitas por  $\mathbf{P}_0$  são:



## 18 Intersecções

$$(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = 0 \quad (\text{eq. 2})$$

$$(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 \quad (\text{eq. 3})$$

$$(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) \cdot \vec{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{eq. 4})$$

Utilizando o método de resolução de sistemas lineares da seção 1 deste capítulo, obtemos o seguinte resultado para  $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ :

$$x_0 = \frac{(\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot [(\hat{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{i}] + (\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot [(\vec{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot \mathbf{i}] + (\mathbf{P}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i})}{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{r}})} \quad (\text{eq. 5})$$

$$y_0 = \frac{(\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot [(\hat{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{j}] + (\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot [(\vec{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot \mathbf{j}] + (\mathbf{P}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j})}{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{r}})} \quad (\text{eq. 6})$$

$$z_0 = \frac{(\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot [(\hat{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{k}] + (\mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot [(\vec{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{n}}_1) \cdot \mathbf{k}] + (\mathbf{P}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k})}{\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{r}})} \quad (\text{eq. 7})$$

A única condição necessária e suficiente para que exista uma solução para a intersecção de dois planos é a de que  $\vec{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2$  seja diferente do vetor nulo, se  $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$  então os planos são paralelos e coincidentes (solução indeterminada) ou paralelos e não coincidentes (solução inexistente).

## 2.6 INTERSECÇÃO RAIO-TRIÂNGULO

O objetivo é determinar o ponto  $\mathbf{P}$  da figura abaixo e verificar se ele está dentro do polígono triangular  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ , observe a figura abaixo:

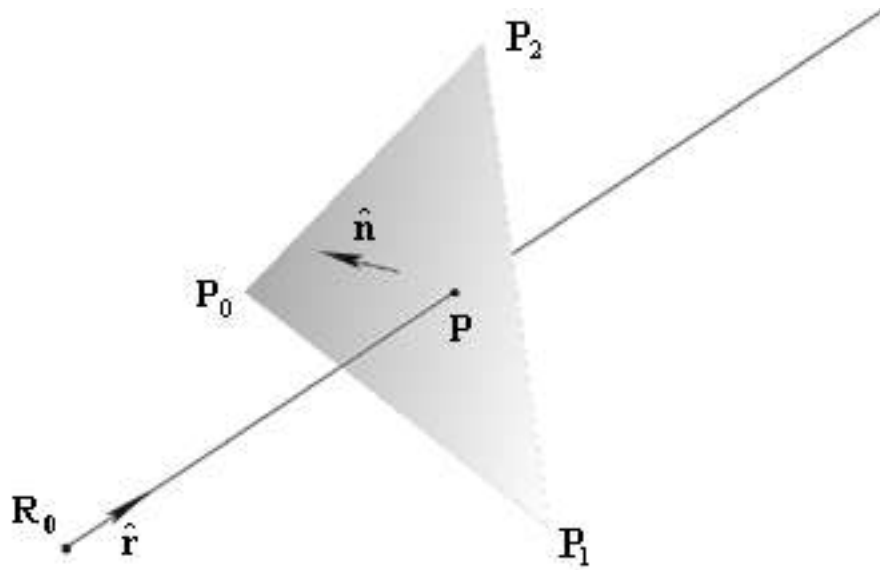


Fig. 1

Onde  $\mathbf{R}_0$  é o ponto inicial do raio,  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário que determina a direção da semi-reta (raio),  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor normal ao triângulo,  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  são os pontos coplanares que definem o triângulo e  $\mathbf{P}$  é o ponto que desejamos determinar.

O ponto  $\mathbf{P}$  deve pertencer ao plano do polígono, logo a seguinte relação deve ser verdadeira:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{eq.1})$$

O ponto  $\mathbf{P}$  também deve pertencer à reta definida por  $\mathbf{R}_0$  e  $\hat{\mathbf{r}}$ , a condição necessária é que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_0 + \alpha \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 2})$$

## 20 Intersecções

Substituindo o valor de  $\mathbf{p}$  da eq. 2 na eq. 1, obtemos:

$$(\mathbf{R}_0 + \alpha \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{P}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{eq. 3})$$

Resolvendo para  $\alpha$ , o resultado é o seguinte:

$$\alpha = \frac{(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (\text{eq. 4})$$

E portanto, substituindo este resultado de  $\alpha$  na eq. 2, conseguimos o valor desejado para  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_0 + \left[ \frac{(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right] \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 5})$$

Agora a análise, são quatro casos possíveis:

1. Se  $(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \neq 0$  e  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  a reta é paralela ao plano e não há intersecção;
2. Se  $(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  e  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  a reta é paralela ao plano e  $\mathbf{R}_0$  pertence ao plano, consequentemente  $\mathbf{p}$  é indeterminado, ou seja, a solução não é um ponto e sim a própria reta, para questões práticas consideremos que não existe intersecção, muito embora na realidade existam infinitas;
3. Se  $\alpha$  é negativo o ponto  $\mathbf{R}_0$  está além do plano e não há intersecção;
4. Finalmente, se os três casos anteriores são falsos, o ponto  $\mathbf{p}$  é dado pela eq. 5.

Resta-nos apenas determinar se o ponto  $\mathbf{p}$  está dentro do triângulo  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ , para isto basta verificar se as três desigualdades abaixo são verdadeiras:

$$\text{a) } [(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \times (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \geq 0$$

$$\text{b) } [(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \geq 0$$

$$\text{c) } [(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{P} - \mathbf{P}_2)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \geq 0$$

## 2.7 INTERSECÇÃO RAIO-ESFERA

A intersecção entre um raio (semi-reta) e uma esfera é muito usado quando nas técnicas de traçado de raios, considere a figura abaixo:

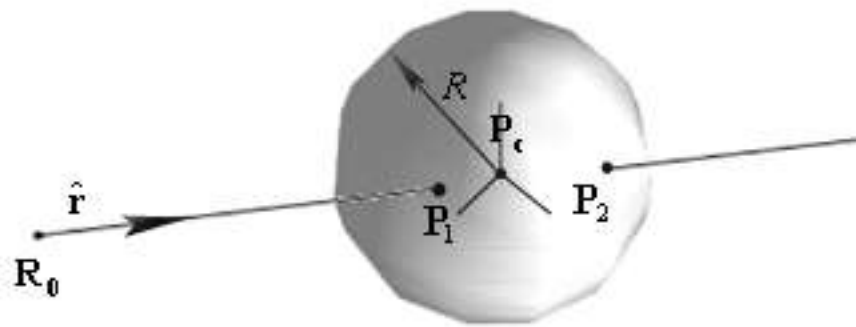


Figura 1

Onde  $\mathbf{R}_0$  é o ponto inicial do raio,  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário que determina a direção da semi-reta (raio),  $R$  é o raio da esfera,  $\mathbf{P}_c$  é o centro da esfera e  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  são os pontos que desejamos determinar, neste caso o raio intercepta a esfera em dois pontos, mas pode haver apenas um ponto de intersecção, caso em que a reta é tangente à esfera ou  $\mathbf{R}_0$  é interior à esfera.

Observando que  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  devem obedecer a equação de uma esfera, portanto a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_c|^2 = R^2, \quad (i = 1, 2)$$

## 22 Intersecções

Ou em termos de produto escalar:

$$(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_c) \bullet (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_c) = R^2, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{eq. 1})$$

E observando que  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  devem também obedecer a equação da reta por  $\mathbf{R}_0$  e com vetor diretor  $\hat{\mathbf{r}}$ , isto quer dizer que:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{R}_0 + \alpha_i \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo esta última na eq. 1, agrupando os termos de potências iguais de  $\alpha_{1,2}$  e observando que  $\hat{\mathbf{r}} \bullet \hat{\mathbf{r}}$  é igual a 1 (vetor unitário), obtemos:

$$\alpha_{2,1}^2 + 2 \cdot [\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c)] \cdot \alpha_{2,1} + (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c) \bullet (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c) - R^2 = 0 \quad (\text{eq. 3})$$

A equação 3 tem a seguinte solução:

$$\alpha_{2,1} = [\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0)] \pm \sqrt{[\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c)]^2 - (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c) \bullet (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c) + R^2} \quad (\text{eq. 4})$$

Ou abreviadamente:

$$\alpha_1 = [\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0)] - \sqrt{\Delta} \quad (\text{eq. 5a})$$

$$\alpha_2 = [\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0)] + \sqrt{\Delta} \quad (\text{eq. 5b})$$

Onde  $\Delta = [\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c)]^2 - (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c) \bullet (\mathbf{R}_0 - \mathbf{P}_c) + R^2$ .

Temos agora cinco casos a considerar:

1.  $\Delta$  é positivo e  $\alpha_1 \geq 0$  e  $\alpha_2 \geq 0$ , o raio intercepta a esfera em dois pontos distintos  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  dados por:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{R}_0 + \{[\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0)] - \sqrt{\Delta}\} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 6})$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}_0 + \{[\hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0)] + \sqrt{\Delta}\} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 7})$$

2 .  $\Delta$  é positivo e  $\alpha_1 < 0$  e  $\alpha_2 \geq 0$ , o raio intercepta a esfera em um único ponto  $\mathbf{P}$  dados por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_0 + \left\{ \left[ \hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0) \right] + \sqrt{\Delta} \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 8})$$

3 .  $\Delta$  é positivo  $\alpha_1 < 0$  e  $\alpha_2 < 0$ , a esfera está atrás do ponto inicial  $\mathbf{R}_0$  do raio e não há intersecção alguma;

4 .  $\Delta$  é zero e portanto  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são iguais e reais e  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$  dado por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_0 + \left\{ \left[ \hat{\mathbf{r}} \bullet (\mathbf{P}_c - \mathbf{R}_0) \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{eq. 9})$$

5 .  $\Delta$  é negativo e portanto  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são complexos conjugados e não há intersecção alguma, o raio não atravessa a esfera.

## **24    Intersecções**





### 3.1 OPERAÇÕES BOOLEANAS UNIDIMENSIONAIS

#### 3.1.1 INTRODUÇÃO

Operações booleanas 1D são usadas na resolução de diversos problemas de computação gráfica, como, por exemplo, na visualização de uma árvore CSG usando ray tracing ou ray casting e na intersecção de duas faces ou polígonos em 3D.

Vamos analisar quatro tipos de operações, duas básicas, negação ( $\neg$ ) e intersecção ( $\cap$ ), e duas derivadas das básicas, diferença ( $\setminus$ ) e união ( $\cup$ ).

Observe os intervalos abaixo:

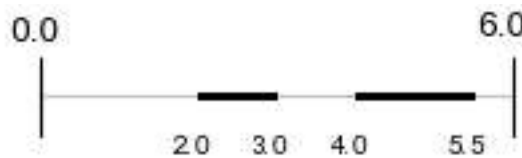


fig 1

A negação dos intervalos acima é mostrada na figura abaixo:



fig2

Note que devemos estabelecer um limite inferior e superior para que as operações subseqüentes sejam corretas.

A intersecção de dois intervalos é trivial.

Dado dois intervalos **A** e **B**, a diferença **A \ B** é definida como:

$$\mathbf{A \setminus B = A \cap (\neg B)} \quad (1)$$

E a união **A \cup B** é definida como:

$$\mathbf{A \cup B = \neg((\neg A) \cap (\neg B))} \quad (2)$$

### 3.1.2 IMPLEMENTAÇÃO

Para resolvermos o problema de operações booleanas entre intervalos de maneira simples, podemos usar as seguintes estruturas de dados para descrever os intervalos:

```
class ListaIntervalos
{
public:
    Intervalo *prm,*atual,*ult;
    int nitems;
    static Intervalo *listsort(Intervalo *cabeca,Intervalo **cauda);
    static bool sobrepoes(Intervalo *amostra,Intervalo *i);
    static void mistura(ListaIntervalos *a,ListaIntervalos *b,
                        ListaIntervalos *dest);
    static void interseccao(ListaIntervalos *a,ListaIntervalos *b,
                           ListaIntervalos *dest);
    static void negacao(ListaIntervalos *org,ListaIntervalos *bd1,
                       ListaIntervalos *bd2,ListaIntervalos *dest);
    static void uniao(ListaIntervalos *a,ListaIntervalos *b,
                     ListaIntervalos *dest);
    static void diferenca(ListaIntervalos *a,ListaIntervalos *b,
                          ListaIntervalos *dest);
    NDOUBLE imax,imin;
    ListaIntervalos();
    ~ListaIntervalos();
    FVOID limpa();
    FVOID novo(NDOUBLE ini,NDOUBLE fim);
};
```

código 1

A classe `ListaIntervalos` possui todas as funções necessárias para executar as operações, vou descrever brevemente as funções. A função `sobrepoes` verifica se um intervalo `i` sobrepoes o intervalo `amostra`, ou seja, verifica se o ponto inicial de `i`,  $i \rightarrow ini$ , está contido em  $[amostra \rightarrow ini, amostra \rightarrow fim)$ , note que o intervalo é semi-aberto, isto é necessário, caso contrário o operador  $\cap$  pode resultar em um intervalo degenerado, que não nos interessa. As outras funções são explicadas pelos seus próprios nomes.

O algoritmo reduz-se em determinar a negação e a intersecção, a partir daí obtemos a diferença e união das equações 1 e 2.

Os passos necessários para construir a negação de uma lista de intervalos são os seguintes:

## 28 Operações booleanas

1. Ordene a lista em ordem crescente com relação ao ponto inicial de cada intervalo;
2. Se o limite mínimo  $i_{min}$  do intervalo é maior que o limite mínimo  $i_{min2}$  do outro intervalo considerado, crie um novo intervalo de  $i_{min2}$  a  $i_{min}$  e o armazene em uma nova lista de intervalos;
3. Para cada intervalo  $i$  da lista que possui um intervalo posterior ( $prx \neq \text{NULL}$ ), adicione à nova lista o intervalo de  $i \rightarrow fim$  a  $i \rightarrow prx \rightarrow ini$ ;
4. Se o limite máximo  $i_{max}$  do intervalo é menor que o limite máximo  $i_{max2}$  do outro intervalo considerado, crie um novo intervalo de  $i_{max}$  a  $i_{max2}$  e o armazene na nova lista.

Abaixo, o código:

```
void ListaIntervalos::negacao(ListaIntervalos *org, ListaIntervalos *bd1,
ListaIntervalos *bd2, ListaIntervalos *dest)
{
    Intervalo *i, *iprx;
    i = org->prm;
    if(org->prm)
    {
        if(min(bd1->imin, bd2->imin) < org->prm->ini)
            dest->novo(min(bd1->imin, bd2->imin), org->prm->ini);
    }
    while(i && i->prx)
    {
        dest->novo(i->fim, i->prx->ini);
        i = i->prx;
    }
    if(org->ult)
    {
        if(max(bd1->imax, bd2->imax) > org->ult->fim)
            dest->novo(org->ult->fim, max(bd1->imax, bd2->imax));
    }
}
```

codigo 2

Os passos do algoritmo intersecção para duas listas de intervalos, **a** e **b**, é descrito abaixo:

2. Compare todos os intervalos **i** de **a** com todos os intervalos **j** de **b**, caso haja sobreposição entre **i** e **j**, crie um novo intervalo de  $\max(i \rightarrow \text{ini}, j \rightarrow \text{ini})$  até  $\min(i \rightarrow \text{fim}, j \rightarrow \text{fim})$  na lista destino.

Abaixo a implementação das funções “ordena”, “sobrepoe” e “intersecção”:

```
Intervalo *ListaIntervalos::ordena(Intervalo *cabeca, Intervalo **cauda)
{
    Intervalo *p, *q, *e;
    int insize, nmerges, psize, qsize, i;
    if (!cabeca) return NULL;
    insize = 1;
    while (1)
    {
        p = cabeca; cabeca = NULL; *cauda = NULL; nmerges = 0;
        while (p)
        {
            nmerges++; q = p; psize = 0;
            for (i = 0; i < insize; i++)
            {
                psize++; q = q->prx; if (!q) break;
            }
            qsize = insize;
            while (psize > 0 || (qsize > 0 && q))
            {
                if (psize == 0) { e = q; q = q->prx; qsize--; }
                else if (qsize == 0 || !q) { e = p; p = p->prx; psize--; }
                else if (p->ini <= q->ini) { e = p; p = p->prx; psize--; }
                else { e = q; q = q->prx; qsize--; }
                if (*cauda) (*cauda)->prx = e;
                else cabeca = e;
                e->ant = *cauda;
                *cauda = e;
            }
            p = q;
        }
        (*cauda)->prx = NULL;
        if (nmerges <= 1)
            return cabeca;
        insize *= 2;
    }
}
```

codigo 4 (cont...)

## 30 Operações booleanas

```
bool ListaIntervalos::sobrepoe(Intervalo *amostra, Intervalo *i)
{
    return i->ini >= amostra->ini && i->ini < amostra->fim;
}

void ListaIntervalos::interseccao(ListaIntervalos *a, ListaIntervalos *b,
                                   ListaIntervalos *dest)
{
    Intervalo *i, *j;
    i = a->prm;
    while(i)
    {
        j = b->prm;
        while(j)
        {
            if(sobrepoe(i, j))
                dest->novo( max(i->ini, j->ini), min(i->fim, j->fim));
            j = j->prx;
        }
        i = i->prx;
    }
    dest->prm = ordena(dest->prm, &dest->ult);
}
```

código 4

Para encerrar a seção, criamos as operações uniao e diferença utilizando as equações (1) e (2), observe os códigos abaixo:

```
void ListaIntervalos::uniao(ListaIntervalos *a, ListaIntervalos *b, ListaIntervalos
                             *dest)
{
    ListaIntervalos nega, negb, resneg;
    negacao(a, a, b, &negb);
    negacao(b, a, b, &negb);
    interseccao(&negb, &negb, &resneg);
    negacao(&resneg, a, b, dest);
}

void ListaIntervalos::diferenca(ListaIntervalos *a, ListaIntervalos
                                 *b, ListaIntervalos *dest)
{
    ListaIntervalos negb;
    negacao(b, a, b, &negb);
    interseccao(a, &negb, dest);
}
```

código 5

## 3.2 OPERAÇÕES BOOLEANAS BIDIMENSIONAIS (2D)

### 3.2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta secção é desenvolver um algoritmo capaz de realizar operações booleanas entre dois polígonos **A** e **B**, pertencentes a um mesmo plano.

O esboço do algoritmo segue abaixo:

1-Verifique se **A** e **B** têm a mesma orientação, se não, inverta-os convenientemente;

2-Armazene as arestas de **A** que não interceptam a borda de **B** na lista **aforab**, exclua essas arestas da lista de arestas de **A**.

3- Idem para as arestas de **B** armazenando em **bforaa**.

4- Calcule a intersecção, utilizando os algoritmos da seção anterior, de cada aresta **a** de **A** colinear a outra aresta **b** de **B**, armazene essas intersecções na lista **asobrebpos** se **a** e **b** têm o mesmo sentido, ou em **asobrebneg**, se seus sentidos são opostos. Calcule as arestas resultantes da diferença entre **a** e **b** e adicione-as a **A**, faça o mesmo com a diferença entre **b** e **a**, inserindo o resultado em **B**. Exclua **a** de **A** e **b** de **B**.

5- Calcule as intersecções entre as arestas **a**( $P_{1a}, P_{2a}$ ) de **A** e **b**( $P_{1b}, P_{2b}$ ) de **B** que restaram no processamento dos passos 2,3 e 4. Armazene cada intersecção de **a** com **b** nas próprias arestas, devem ser armazenados em **a** e em **b** o ponto de intersecção **pi** e os parâmetros  $0 < \alpha_a < 1$  tal que  $\mathbf{pi} = \mathbf{P}_{1a} + \alpha_a (\mathbf{P}_{2a} - \mathbf{P}_{1a})$  e  $0 < \alpha_b < 1$  tal que  $\mathbf{pi} = \mathbf{P}_{1b} + \alpha_b (\mathbf{P}_{2b} - \mathbf{P}_{1b})$ , respectivamente. Após o cálculo e armazenamento das intersecções devemos adicionar os parâmetros  $\alpha_a = 0$  e  $\alpha_a = 1$  para **a** e  $\alpha_b = 0$  e  $\alpha_b = 1$  para **b**, ordenamos, então, os parâmetros de todas as arestas **a** e **b** em ordem crescente

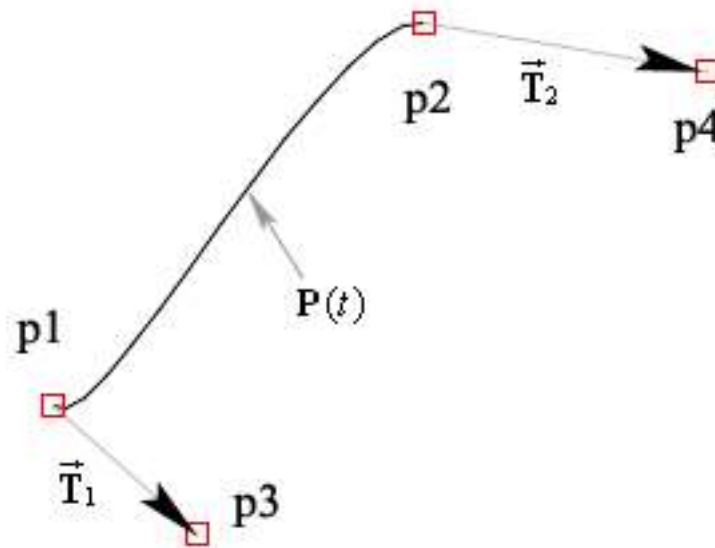
## **32      Operações booleanas**





## 4.1 CURVA DE HERMITE

A curva de Hermite é uma curva polinomial cúbica definida por dois pontos e duas tangentes ou por quatro pontos (ver figura abaixo).



A forma geral da curva deve ser:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{eq 4.1})$$

Devemos então calcular os coeficientes vetoriais  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$ .

A curva deve satisfazer as quatro seguintes condições:

- a)  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_1$
- b)  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_2$
- c)  $\mathbf{P}'(0) = \mathbf{T}_1$
- d)  $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{T}_2$

Onde o ' significa a derivada em relação a  $t$ ,  $\mathbf{P}'(t)$  é igual a:

$$\mathbf{P}'(t) = 3\mathbf{a}t^2 + 2\mathbf{b}t + \mathbf{c} \quad (\text{eq 4.2})$$

Das condições a,b,c e d obtemos as equações abaixo, respectivamente:

$$\mathbf{d} = \mathbf{P}_1 \quad (\text{eq 4.3})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{P}_2 \quad (\text{eq 4.4})$$

$$\mathbf{c} = \vec{\mathbf{T}}_1 \quad (\text{eq 4.5})$$

$$3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{\mathbf{T}}_2 \quad (\text{eq 4.6})$$

Substituindo os valores de  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  obtidos nas equações 4.6 e 4.4, obtemos o seguinte sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{P}_2 - \vec{\mathbf{T}}_1 - \mathbf{P}_1 \\ 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} &= \vec{\mathbf{T}}_2 - \vec{\mathbf{T}}_1 \end{aligned}$$

A solução é:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_2 \\ \mathbf{b} &= 3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - 2\vec{\mathbf{T}}_1 - \vec{\mathbf{T}}_2 \end{aligned}$$

$\mathbf{P}(t)$  então fica:

$$\mathbf{P}(t) = \left[ 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_2 \right] t^3 + \left[ 3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - 2\vec{\mathbf{T}}_1 - \vec{\mathbf{T}}_2 \right] t^2 + \vec{\mathbf{T}}_1 t + \mathbf{P}_1 \quad (4.7)$$

Isto pode ser arranjado em termos de quatro funções base:

$$\mathbf{P}(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{P}_1 + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{P}_2 + (t^3 - 2t^2 + t)\vec{\mathbf{T}}_1 + (t^3 - t^2)\vec{\mathbf{T}}_2 \quad (4.8a)$$

Ou seja:

$$\mathbf{P}(t) = H_1(t)\mathbf{P}_1 + H_2(t)\mathbf{P}_2 + H_3(t)\vec{\mathbf{T}}_1 + H_4(t)\vec{\mathbf{T}}_2 \quad (4.8b)$$

Onde:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_2(t) &= -2t^3 + 3t^2 \\ H_3(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_4(t) &= t^3 - t^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Podemos expressar  $\mathbf{P}(t)$  em forma de matriz:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vec{\mathbf{T}}_1 \\ \vec{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.8c)$$

## 36 Curvas

As tangentes  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  podem ser definidas a partir de seus pontos iniciais e finais, ou seja (veja a figura):

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 \\ \vec{T}_2 &= \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2\end{aligned}$$

Substituindo estes valores de  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  na equação 4.8b podemos exprimir a curva em função de quatro pontos, isto pode ser útil na implementação e manipulação da curva, o resultado é o seguinte:

$$\mathbf{P}(t) = [H_1(t) - H_3(t)]\mathbf{P}_1 + [H_2(t) - H_4(t)]\mathbf{P}_2 + H_3(t)\mathbf{P}_3 + H_4(t)\mathbf{P}_4$$

Ou seja:

$$\mathbf{P}(t) = [t^3 - t^2 - t + 1]\mathbf{P}_1 + [-3t^3 + 4t^2]\mathbf{P}_2 + H_3(t)\mathbf{P}_3 + H_4(t)\mathbf{P}_4$$

Vamos definir duas funções base  $G_1$  e  $G_2$ , como abaixo:

$$\begin{aligned}G_1(t) &= t^3 - t^2 - t + 1 \\ G_2(t) &= -3t^3 + 4t^2\end{aligned}$$

$\mathbf{P}(t)$  então fica:

$$\mathbf{P}(t) = G_1(t)\mathbf{P}_1 + G_2(t)\mathbf{P}_2 + H_3(t)\vec{T}_1 + H_4(t)\vec{T}_2 \quad (4.10a)$$

E a forma matricial agora fica:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

## 4.2 CURVA DE BÉZIER

### 4.2.1 CURVA DE BÉZIER LINEAR (GRAU 1)

Uma curva de Bézier linear é uma curva de grau 1, que coincide com o segmento de reta definido por dois pontos, cuja equação é a seguinte :

$$\mathbf{P}(t) = (1.0 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Podemos expressar essa equação como:

$$\mathbf{P}(t) = (1.0 - t)\mathbf{P}_0^1 + t\mathbf{P}_1^1 = \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t)\mathbf{P}_i^0$$

com

$$\begin{aligned} B_{0,1}(t) &= (1.0 - t) \\ B_{1,1}(t) &= t \end{aligned}$$

Onde  $B_{i,1}(t)$  ( $i = 0, 1$ ) são denominadas funções base. Uma propriedade importante destas funções é complemento da unidade, ou seja:

$$\sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t) = 1$$

Esta propriedade será válida para uma curva de Bézier de qualquer grau, como veremos nas próximas seções.

Abaixo a forma matricial de  $\mathbf{P}(t)$  :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$$

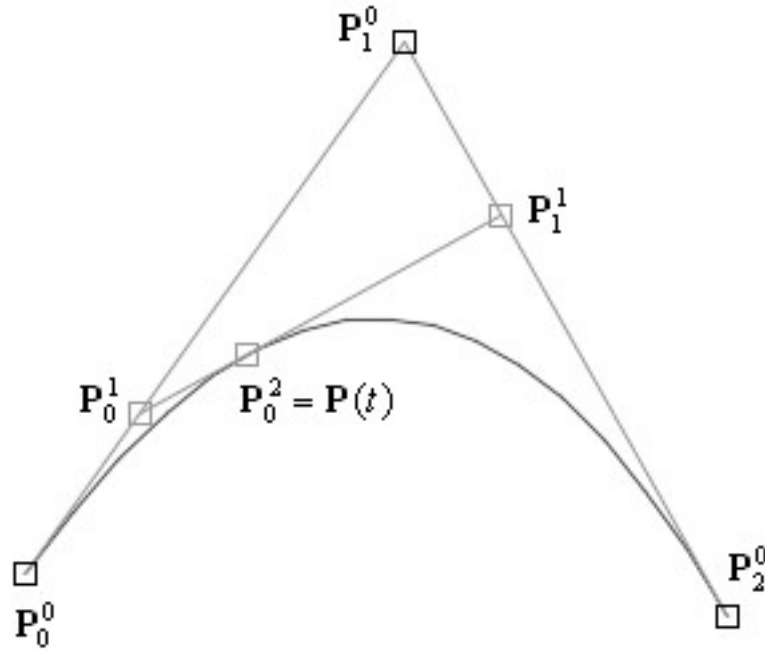
Note as funções base são justamente os termos da expansão de  $[(1-t) + t]^1$  pelo teorema binomial (apêndice A1):

$$[(1.0 - t) + t]^1 = \sum_{i=0}^1 \frac{1!}{i!(1-i)!} (1.0 - t)^{1-i} t^i = (1.0 - t) + t = B_{0,1}(t) + B_{1,1}(t)$$

Esta expansão justifica a propriedade do complemento da unidade, isto vale para curvas de Bézier de qualquer grau.

## 4.2.2 CURVA DE BÉZIER QUADRÁTICA

Uma curva de Bézier quadrática é uma curva de grau 2, definida por três pontos de controle  $\mathbf{P}_0^0$ ,  $\mathbf{P}_1^0$  e  $\mathbf{P}_2^0$ , conforme a figura abaixo.



Os pontos  $\mathbf{P}_0^1$  e  $\mathbf{P}_1^1$  são determinados através da interpolação linear entre os pontos que definem o segmento ao qual pertencem, o resultado é:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^1 &= (1.0-t)\mathbf{P}_0^0 + t\mathbf{P}_1^0 \\ \mathbf{P}_1^1 &= (1.0-t)\mathbf{P}_1^0 + t\mathbf{P}_2^0 \end{aligned} \quad (4.2.2.0)$$

Os ponto  $\mathbf{P}_0^2 = \mathbf{P}(t)$  é determinado também pela interpolação linear entre os pontos que definem o segmento ao qual pertencem, ou seja,  $\mathbf{P}_0^1$  e  $\mathbf{P}_1^1$ . O desenvolvimento é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^2 &= \mathbf{P}(t) = (1.0-t)\mathbf{P}_0^1 + t\mathbf{P}_1^1 \\ \Rightarrow \mathbf{P}(t) &= (1.0-t)\left[(1.0-t)\mathbf{P}_0^0 + t\mathbf{P}_1^0\right] + t\left[(1.0-t)\mathbf{P}_1^0 + t\mathbf{P}_2^0\right] \\ \Rightarrow \mathbf{P}(t) &= (1.0-t)^2\mathbf{P}_0^0 + (1.0-t)t\mathbf{P}_1^0 + (1.0-t)t\mathbf{P}_1^0 + t^2\mathbf{P}_2^0 \end{aligned}$$

Finalmente obtemos o seguinte:

$$\mathbf{P}(t) = (1.0-t)^2\mathbf{P}_0^0 + 2(1.0-t)t\mathbf{P}_1^0 + t^2\mathbf{P}_2^0 \quad (4.2.2.1)$$

Ou em termos das funções base:

$$\mathbf{P}(t) = B_{0,2}(t)\mathbf{P}_0^0 + B_{1,2}(t)\mathbf{P}_1^0 + B_{2,2}(t)\mathbf{P}_2^0 = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t)\mathbf{P}_i^0$$

onde:

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= (1.0 - t)^2 \\ B_{1,2}(t) &= 2(1.0 - t)t \\ B_{2,2}(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Em forma matricial  $\mathbf{P}(t)$  fica:

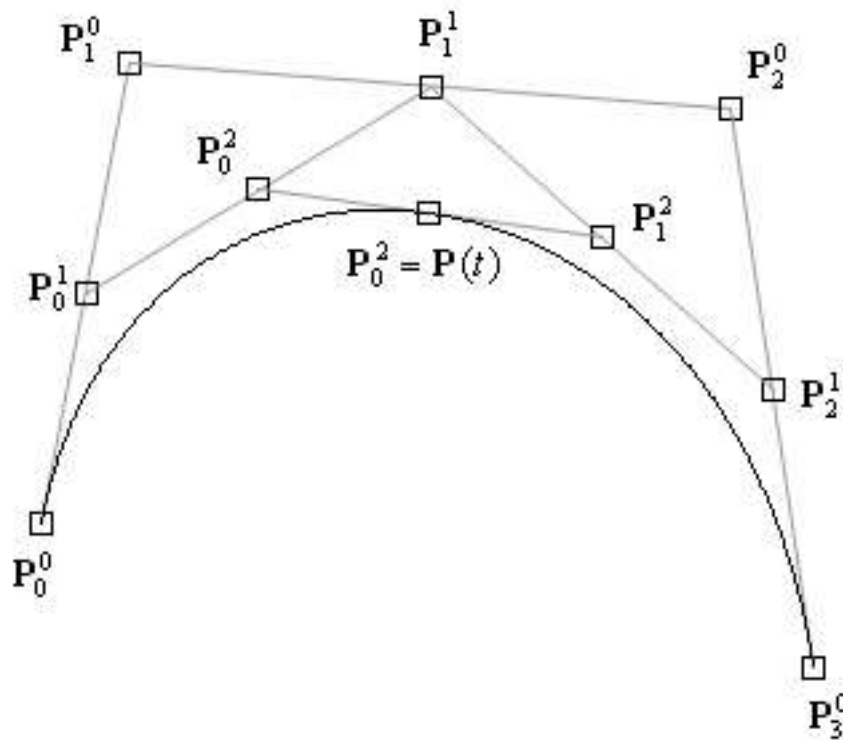
$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0^0 \\ \mathbf{P}_1^0 \\ \mathbf{P}_2^0 \end{bmatrix}$$

Como exercício verifique que as funções base satisfazem a propriedade de complemento da unidade.

Verifique também que as funções base são os termos da expansão de  $[(1.0 - t) + t]^2$  pelo teorema binomial (apêndice A1).

## 4.2.3 CURVA DE BÉZIER CÚBICA

Uma curva de Bézier cúbica é uma curva de grau 3, definida por quatro pontos de controle  $\mathbf{P}_0^0$ ,  $\mathbf{P}_1^0$ ,  $\mathbf{P}_2^0$  e  $\mathbf{P}_3^0$ , conforme a figura abaixo.



Seguindo o mesmo desenvolvimento da Bézier quadrática  $\mathbf{P}_0^1$ ,  $\mathbf{P}_1^1$  e  $\mathbf{P}_2^1$  são obtidos da interpolação linear entre os pontos iniciais e finais dos segmentos ao qual pertencem, ou seja:

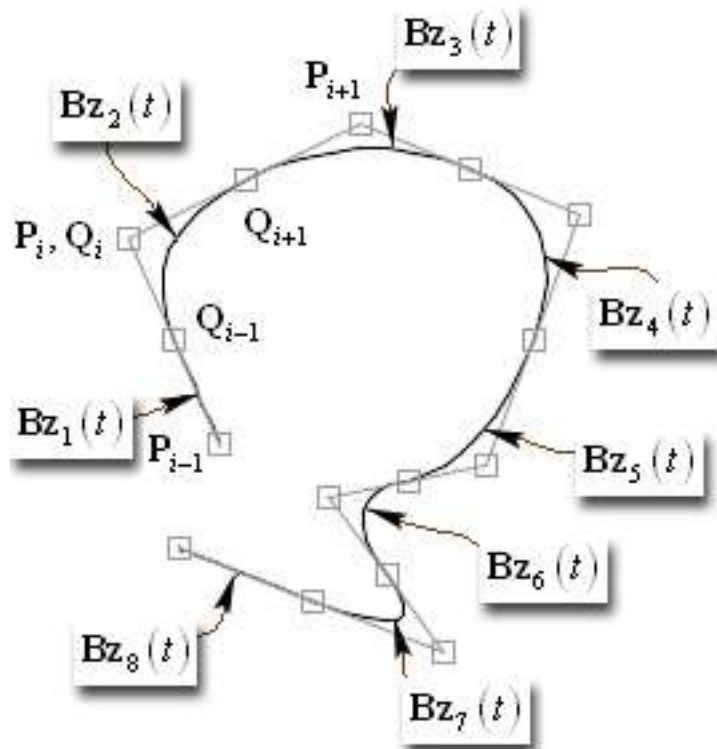
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0^1 &= (1.0-t)\mathbf{P}_0^0 + t\mathbf{P}_1^0 \\ \mathbf{P}_1^1 &= (1.0-t)\mathbf{P}_1^0 + t\mathbf{P}_2^0 \\ \mathbf{P}_2^1 &= (1.0-t)\mathbf{P}_2^0 + t\mathbf{P}_3^0\end{aligned}$$





#### 4.x CONVERSÃO ENTRE BÉZIER QUADRÁTICA E B-SPLINE PARABÓLICA UNIFORME

A B-spline parabólica uniforme é constituída por várias curvas de bézier quadráticas conectadas de forma adequada, conforme a figura abaixo mostra.



Note que a primeira e a última curvas de bézier possuem dois pontos coincidentes, isto é necessário para que o ponto inicial da curva coincida com o ponto de controle inicial e o ponto final da curva coincida com o ponto de controle final.

De acordo com as seções anteriores, uma curva de bézier quadrática pode ser expressa como:

$$Bz(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q_{i+1} \end{bmatrix}$$

Ou de forma mais compacta:

$$\mathbf{Bz}(t) = \mathbf{tBQ} \quad (4.x.1)$$

Da mesma maneira a B-spline parabólica pode ser expressa como:

$$\mathbf{Bs}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \end{bmatrix}$$

Ou de forma mais compacta:

$$\mathbf{Bs}(t) = \mathbf{t} \frac{1}{2} \mathbf{SP} \quad (4.x.2)$$

Igualando as equações 4.x.1 e 4.x.2, temos:

$$\mathbf{t} \frac{1}{2} \mathbf{SP} = \mathbf{tBQ}$$

De onde concluímos que  $\frac{1}{2} \mathbf{SP} = \mathbf{BQ}$  é a equação que relaciona os pontos de controle de uma curva à outra. A solução é direta e dada pelas duas seguintes equações:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{SP}$$

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{S}^{-1} \mathbf{BQ}$$

Onde  $\mathbf{B}^{-1}$  e  $\mathbf{S}^{-1}$  são as matrizes inversas de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{S}$ , respectivamente. Essas matrizes são as seguintes:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

## 44 Curvas

O resultado final é o seguinte:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (4.x.3)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (4.x.4)$$

Observe que este resultado concorda com a figura, o mesmo resultado poderia ser encontrado a partir da geometria mostrada na figura, isto fica como exercício para o leitor.



## 46 Apêndice A - Teoremas úteis

### A.1 TEOREMA BINOMIAL

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i} \quad (\text{a1.1})$$

A equação a1.0 pode ser expressa em uma forma simétrica fazendo  $n=i+j$ , o resultado é o seguinte :

$$(a+b)^n = \sum_{i,j \geq 0} \frac{(i+j)!}{i!j!} a^i b^j \quad (\text{a1.2})$$

### A.2 TEOREMA TRINOMIAL

Basta expandir  $(a+(b+c))^n$  usando a equação a1.1, obtemos o seguinte:

$$(a+(b+c))^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^{n-i} (b+c)^i$$

Expandimos novamente  $(b+c)^i$  :

$$(a+(b+c))^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^{n-i} \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} b^{i-j} c^j$$

Simplificando fica:

$$(a+(b+c))^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \frac{n!}{(n-i)!j!(i-j)!} a^{n-i} b^{i-j} c^j \quad (\text{a2.1})$$

A equação a2.0 também pode ser expressa em uma forma simétrica fazendo  $n=i+j+k$ , o resultado é o seguinte :

$$(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k \geq 0} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} a^i b^j c^k \quad (\text{a2.2})$$

### A.3 SOMA DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética é um somatório de  $n$  termos tal que os termos se relacionam da seguinte maneira:

$$a_i = a_1 + (i - 1) \cdot r \quad 1 \leq i \leq n$$

Onde  $a_1$  é o primeiro termo e  $r$  uma constante arbitrária.

A progressão então pode ser expressa como abaixo:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (a_1 + (i - 1) \cdot r)$$

Este somatório pode ser avaliado em termos de  $a_1$ ,  $a_n$  e  $n$  ou em função de  $r$  e  $n$ , como as duas equações abaixo mostram:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \quad (\text{a3.1})$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot n + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot r \quad (\text{a3.2})$$