

## 1

## MỘT SỐ BÀI TOÁN RỜI RẠC VÀ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

---

**Bài 1.**

Một Quốc hội có  $n$  thượng nghị sĩ, chia thành 10 đảng và 10 uỷ ban. Mỗi nghị sĩ thuộc về đúng một đảng và đúng một uỷ ban. Giả sử tên gọi các đảng là  $P_1, \dots, P_{10}$  và các uỷ ban là  $C_1, \dots, C_{10}$ . Tìm số bé nhất  $n$  sao cho có ít nhất 11 nghị sĩ mà mỗi người trong nhóm này thuộc về một đảng và một uỷ ban có cùng chỉ số .

**Bài 2.**

Cho các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , gọi  $S_k$  là tổng của tất cả các tích của  $k$  số chọn từ  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Chứng minh rằng  $S_k S_{n-k} \geq (C_n^k)^2 a_1 a_2 \dots a_n$ , với  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

**Bài 3.**

Xét đa thức  $P_n(x) = C_n^2 + C_n^5 x + C_n^8 x^2 + \dots + C_n^{3k+2} x^k$ , với  $n \geq 2$  là một số tự nhiên và  $k = \left[ \frac{n-2}{3} \right]$ .

a) Chứng minh

$$P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x).$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $a$  sao cho  $P_n(a^3)$  chia hết cho  $3^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]}$  với mọi  $n \geq 2$ .

#### Bài 4.

Cho số nguyên  $n > 1$ . Tìm số tất cả các hoán vị  
 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

của các số  $1, 2, \dots, n$  thỏa mãn tính chất sau: tồn tại chỉ một  
chỉ số  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  sao cho  $a_i > a_{i+1}$ .

#### Bài 5.

Dãy số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) tạo thành một cấp  
số cộng. Biết rằng, tồn tại một hoán vị  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$  của  
các số trên sao cho dãy mới này là một cấp số nhân. Tìm các  
số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có tính chất như thế sao cho chúng từng đôi  
một khác nhau và số lớn nhất trong chúng là 1996.

#### Bài 6.

Tìm tất cả các tập hợp  $A$  gồm hữu hạn các số thực  
không âm khác nhau sao cho:

- (a)  $A$  chứa ít nhất 4 phần tử;
- (b) với bất kì 4 phần tử khác nhau  $a, b, c, d \in A$ , ta có  
 $ab + cd \in A$ .

#### Bài 7.

Trong một kì thi, 8 vị giám khảo đánh giá từng thí  
sinh chỉ bằng hai từ *đúng* và *sai*. Biết rằng với bất kì hai thí  
sinh nào cũng nhận được kết quả như sau: có hai giám khảo  
cùng cho đúng; có hai giám khảo với người thứ nhất cho đúng  
và người thứ hai cho sai; có hai giám khảo với người thứ nhất  
cho sai và người thứ hai cho đúng; cuối cùng, có hai giám  
khảo cùng cho sai. Hỏi số lớn nhất có thể có của các thí sinh  
là bao nhiêu?

### Bài 8.

Với một hoán vị  $a_1, a_2, \dots, a_n$  của các số  $1, 2, \dots, n$ , ta được phép thay đổi vị trí của hai khối liên tiếp, nghĩa là, từ  $a_1, \dots, a_i, \underbrace{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+p}}_A, \underbrace{a_{i+p+1}, a_{i+p+2}, \dots, a_{i+q}}_B, a_{i+q+1}, \dots, a_n$ .

bằng cách thay đổi vị trí của A và B cho nhau ta được

$$a_1, \dots, a_i, \underbrace{a_{i+p+1}, a_{i+p+2}, \dots, a_{i+q}}_B, \underbrace{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+p}}_A, a_{i+q+1}, \dots, a_n.$$

Hãy tìm số lần thay đổi bé nhất như thế để có thể đưa được hoán vị  $n, n-1, \dots, 1$  về lại hoán vị  $1, 2, \dots, n$ .

### Bài 9.

Có  $2n$  học sinh tham dự một cuộc thi, mỗi người được phép đệ trình ban giám khảo một bài toán (các bài phải khác nhau). Sau đó, ban giám khảo sẽ phân phối lại cho mỗi học sinh một bài toán từ  $2n$  bài đã nhận. Cuộc thi này sẽ được gọi là *công bằng* nếu có  $n$  học sinh nhận được bài của  $n$  học sinh còn lại. Chứng minh rằng số tất cả các cách mà ban giám khảo thực hiện để làm cho cuộc thi công bằng là một số chính phương.

### Bài 10.

Tìm số nguyên dương bé nhất  $n$  để tồn tại ít nhất 2003 hoán vị  $\sigma \in S_n$  thoả mãn điều kiện:

với mọi  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  ta có

$$|\sigma(k) - \sigma(k+1)| \leq 2.$$

(Một hoán vị  $\sigma \in S_n$  là một song ánh

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

### Bài 11.

Cho số nguyên  $n \geq 2$ . Gọi  $S$  là tập hợp gồm  $n$  phần tử và  $A_i$ , với  $1 \leq i \leq m$ , là các tập con khác nhau và gồm ít nhất 2 phần tử của  $S$  sao cho từ

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, A_i \cap A_k \neq \emptyset, A_j \cap A_k \neq \emptyset$$

ta suy ra được  $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$ .

Chứng minh rằng  $m \leq 2^{n-1} - 1$ .

### Bài 12.

Với mọi số nguyên dương  $n$ , hãy đánh giá tổng

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^i,$$

ở đây,  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  và  $\left[\frac{n+1}{2}\right]$  là phần nguyên của  $\frac{n+1}{2}$ .

### Bài 13.

Tại một cuộc khiêu vũ, một nhóm  $S$  gồm 1994 học sinh đứng thành một vòng tròn lớn. Mỗi học sinh sẽ vỗ vào tay một trong hai học sinh kè hai bên một số lần. Với mọi học sinh  $x$ , ta gọi  $f(x)$  là tổng tất cả các số lần mà  $x$  vỗ vào tay những người bạn đứng kề. Chẳng hạn, ta giả sử có 3 học sinh  $A, B$  và  $C$ .  $A$  vỗ vào tay  $B$  hai lần,  $B$  vỗ vào tay  $C$  ba lần và  $C$  vỗ vào tay  $A$  năm lần. Như thế, ta có

$$f(A) = 7, f(B) = 5 \text{ và } f(C) = 8.$$

(i) Chứng minh rằng

$$\{f(x) \mid x \in S\} \neq \{n \mid n \text{ là số nguyên}, 2 \leq n \leq 1995\}.$$

(ii) Tìm một ví dụ chứng tỏ:  
 $\{ f(x) \mid x \in S \} = \{ n \mid n \text{ là số nguyên, } n \neq 3, 2 \leq n \leq 1996 \}.$

### Bài 14.

Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các  $n$ -bộ  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , với mỗi  $X_i$  là một tập con của tập  $\{1, 2, \dots, 1998\}$ . Với mọi  $k$  thuộc  $S$  (tức là,  $k$  là một  $n$ -bộ như trên), ta gọi  $f(k)$  là số tất cả các phần tử trong hội của  $n$  tập hợp của  $k$ .

Tìm tổng tất cả các  $f(k)$  khi  $k$  chạy trong khắp  $S$ .

### Bài 15.

Xét hoán vị  $s_0, s_1, \dots, s_n$  của các số  $0, 1, 2, \dots, n$ , ta tác động một phép biến đổi lên hoán vị này nếu tìm được  $i, j$  sao cho  $s_i = 0$  và  $s_j = s_{i-1} + 1$ . Hoán vị mới tạo thành nhận được bằng cách đổi chỗ hai phần tử  $s_i$  và  $s_j$ . Hỏi với số  $n$  nào thì xuất phát từ hoán vị  $(1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0)$  ta có thể nhận được hoán vị  $(1, 2, \dots, n, 0)$  bằng cách lặp lại nhiều lần phép biến đổi đó?

### Bài 16.

Cho dãy số  $a_n$  được xác định bởi  $a_1 = 0, a_2 = 1,$

$$a_n = \frac{1}{2} [na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}n] + (-1)^n.$$

Tìm  $a_n + 2C_n^1 a_{n-1} + 3C_n^2 a_{n-2} + \dots + nC_n^{n-1} a_1$ .

### Bài 17.

Có bao nhiêu số nguyên không âm sao cho biểu diễn thập phân của nó có không quá 1993 chữ số, và các chữ số đó viết theo thứ tự không giảm? [Chẳng hạn như, 55677 là số

chấp nhận được, còn 54 thì không.]

### Bài 18.

Cho số nguyên dương  $n$  và  $X$  là một tập hợp gồm  $n$  phần tử. Chứng minh rằng tồn tại  $2^{n-1}$  tập con của  $X$  sao cho bất cứ hai tập con nào trong chúng cũng phải có một phần tử chung.

### Bài 19.

Gọi  $S$  là tập tất cả các hoán vị  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  của  $(1, 2, \dots, n)$  sao cho trong mỗi hoán vị này có đúng một phần tử  $a_i$  (khác  $a_1$ ) lớn hơn các phần tử đứng trước nó. Tìm số trung bình của các số  $a_1$  trong các phần tử thuộc  $S$ .

### Bài 20.

Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tuỳ ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.

### Bài 21.

Cho  $A$  là tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của  $A$  sao cho giao của hai tập bất kì trong các tập con này không phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

### Bài 22.

Chứng minh rằng nếu  $n$  chẵn thì  $2^n$  chia hết  
 $C_{2n}^0 + 3C_{2n}^2 + \dots + 3^i C_{2n}^{2i} + \dots + 3^n C_{2n}^{2n}$ .

**Bài 23.**

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991} C_{1991}^0 - \frac{1}{1990} C_{1990}^1 + \frac{1}{1989} C_{1989}^2 - \dots \\ \dots + \frac{(-1)^m}{1991-m} C_{1991-m}^m - \dots - \frac{1}{996} C_{996}^{995} = \frac{1}{1991}.$$

**Bài 24.**

Gọi  $n, k$  là các số nguyên dương với  $k \leq n$  và gọi  $S$  là tập hợp chứa  $n$  số thực phân biệt. Gọi  $T$  là tập tất cả số thực có dạng  $x_1 + x_2 + \dots + x_k$  với  $x_1, x_2, \dots, x_k$  là các phần tử phân biệt của  $S$ . Chứng minh rằng  $T$  chứa ít nhất  $k(n-k)+1$  phần tử phân biệt.

**Bài 25.**

Giả sử  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  và  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các tập con của  $S$  sao cho với mọi  $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k$ , ta có

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leq n-2.$$

Chứng minh rằng  $k \leq 2^{n-2}$ .

(Kí hiệu  $|A|$  để chỉ số phần tử của tập hữu hạn  $A$ .)

**Bài 26.**

Chứng minh rằng với mọi cặp số tự nhiên  $m, k$ , số  $m$  có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$m = C_{a_k}^k + C_{a_{k-1}}^{k-1} + \dots + C_{a_1}^t,$$

với  $a_k > a_{k-1} > \dots > a_t \geq t \geq 1$ .

**Bài 27.**

Tám ca sĩ tham dự một cuộc hội diễn, họ biểu diễn  $m$  bài hát. Mỗi bài hát được 4 ca sĩ trình bày, mỗi cặp ca sĩ thì

có hát chung với nhau một số bài hát. Tìm số  $m$  bé nhất để điều này có thể thực hiện được.

### Bài 28.

Gọi  $X$  là tập hợp  $\{1, 2, 3, \dots, 2001\}$ . Tìm số  $n$  bé nhất sao cho nếu cho một tập con gồm  $n$  phần tử của  $X$  thì ta luôn có thể tìm được một phần tử là luỹ thừa của 2 hoặc tìm được hai phần tử có tổng là luỹ thừa của 2.

### Bài 29.

Các số  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, (n^2)^2$  được viết theo thứ tự tăng thành một mảng  $n \times n$  như sau:

$$\begin{array}{cccc} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n^2-n+1)^2 & (n^2-n+2)^2 & \dots & (n^2)^2 \end{array}$$

Từ mỗi hàng của mảng trên, ta chọn ra một số sao cho không có hai số nào nằm trên cùng một cột. Hỏi tổng các phần tử được chọn có thể nhận giá trị bao nhiêu?

### Bài 30.

Chứng minh rằng tồn tại một tập hữu hạn  $A \subset \mathbb{R}^2$  sao cho với mọi  $X \in A$ , có các điểm  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{1993}$  thuộc  $A$  mà khoảng cách giữa  $X$  và  $Y_i$  bằng 1 với mọi  $i$ .

### Bài 31.

Có tồn tại một số nguyên  $n > 1$  thoả mãn điều kiện sau đây hay không : Tập hợp các số nguyên dương có thể được phân hoạch thành  $n$  tập con khác trống, sao cho một tổng bất kì của  $n - 1$  số nguyên, mỗi số được lấy trong một

tập con của  $n - 1$  tập con tuỳ ý, sẽ thuộc tập con còn lại.

### Bài 32.

Tập hợp gồm  $2^n$  phần tử được chia thành các tập con đôi một không giao nhau. Xét một thuật toán chuyển một số phần tử của 1 tập con vào một tập con khác. Ngoài ra, số phần tử được chuyển bằng số phần tử của tập hợp con thứ hai (tập hợp này phải có số phần tử không lớn hơn tập đầu tiên). Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép chuyển như vậy, ta có thể nhận được một tập hợp con trùng với tập hợp lúc ban đầu (gồm  $2^n$  phần tử).

### Bài 33.

Cho  $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm  $n$  phần tử của  $S$  đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

### Bài 34.

(a) Chứng minh tập  $\mathbb{Q}^+$  các số hữu tỉ dương có thể phân hoạch được thành 3 tập  $A, B, C$  rời nhau thoả mãn:

$$BA = B, B^2 = C, BC = A$$

trong đó  $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$  và  $B^2 = BB$ .

(b) Chứng minh tất cả các lập phương của các số hữu tỉ dương đều thuộc  $A$  theo phân hoạch trên.

(c) Tìm các phân hoạch  $\mathbb{Q}^+ = A \cup B \cup C$  như vậy mà không có số nguyên dương  $n$  nào mà  $n \leq 34$ , với  $n$  và  $n+1$  thuộc  $A$ , nghĩa là:  $\min \{n \in \mathbb{N} \mid n \in A, n+1 \in A\} > 34$ .

### Bài 35.

Chọn ra một số tập con gồm 4 phần tử từ một tập hợp  $A$  có  $n$  phần tử sao cho bất cứ hai tập 4 phần tử nào trong các

tập con đã chọn cũng có nhiều nhất là hai phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một tập con của A gồm ít nhất  $\sqrt[3]{6n}$  phần tử của A sao cho tập này không chứa bất cứ một tập con 4 phần tử nào đã chọn.

### Bài 36.

Cho  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ , trong đó  $n \geq 3$ . Một tập con  $S$  của  $U$  được gọi là *tách được bởi một chỉnh hợp các phần tử của  $U$*  nếu tồn tại một chỉnh hợp của  $U$  sao cho một phần tử không thuộc  $S$  xuất hiện đâu đó giữa hai phần tử của  $S$  trong chỉnh hợp này. Chẳng hạn, 13542 tách  $\{1, 2, 3\}$  nhưng không tách  $\{3, 4, 5\}$ . Chứng minh rằng với bất kì  $n - 2$  tập con của  $U$ , mỗi tập con chứa ít nhất 2 và không quá  $n - 1$  phần tử, tồn tại một chỉnh hợp các phần tử của  $U$  sao cho chỉnh hợp này tách tất cả các tập con ấy.

### Bài 37.

Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương không thể bị phân hoạch thành ba tập con không rỗng sao cho với hai số nguyên bất kì  $x, y$  lấy ở trong hai tập con khác nhau, thì số  $x^2 - xy + y^2$  thuộc vào tập con thứ ba.

### Bài 38.

Có 100 tấm thẻ khác nhau được đánh số từ 1 đến 100, toàn bộ 100 tấm thẻ này được đặt trong 3 cái hộp phân biệt nhau (mỗi hộp phải chứa ít nhất 1 tấm thẻ).

Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 100 tấm thẻ ấy vào trong 3 hộp nói trên để cho nếu ta chọn ngẫu nhiên 2 hộp, rồi lại rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ ở mỗi hộp được chọn, thì tổng của 2 thẻ này (tức là tổng của 2 số được đánh trên chúng) ta

có thể suy ra được hộp thứ ba không được chọn?

### Bài 39.

Một tập hợp A không trống gồm các số thực được gọi là một  $B_3$ -tập nếu điều kiện sau được thoả: Từ  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in A$  và  $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$  sẽ suy ra được rằng các dãy  $(a_1, a_2, a_3)$  và  $(a_4, a_5, a_6)$  là trùng nhau với sai kém một phép hoán vị. Đặt

$$A = \{a(0) = 0 < a(1) < a(2) < \dots\},$$

$$B = \{b(0) = 0 < b(1) < b(2) < \dots\}$$

là các dãy vô hạn các số thực sao cho  $D(A) = D(B)$ , trong đó, với một tập hợp X các số thực,  $D(X)$  kí hiệu cho tập hợp các hiệu số  $\{|x - y| \mid x, y \in X\}$ .

Chứng minh rằng nếu A là một  $B_3$ -tập thì  $A = B$ .

### Bài 40.

Xét một hoán vị  $(a_1, a_2, \dots, a_6)$  của các số 1, 2, ..., 6 sao cho số các chuyển vị bé nhất cần thiết để đưa

$$(a_1, a_2, \dots, a_6) \text{ về } (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

là 4. Tìm số các hoán vị có tính chất đó.

### Bài 41.

Với đa thức P bậc 2000 có các hệ số thực phân biệt, ta gọi  $M(P)$  là tập hợp mọi đa thức có được từ P bằng cách hoán vị các hệ số. Một đa thức P được gọi là  $n$ -độc lập nếu  $P(n) = 0$  và từ một đa thức  $Q \in M(P)$  bất kì ta có thể có được một đa thức  $Q_1$  sao cho  $Q_1(n) = n$  bằng cách thay đổi không quá một cặp hệ số của Q. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho các đa thức n-độc lập tồn tại.

### Bài 42.

Với một số nguyên dương  $n$  ta gọi một dãy gồm các số 0 và số một là một dãy *cân bằng* nếu nó chứa n số 0 và n số một. Hai dãy cân bằng  $a$  và  $b$  được gọi là *láng giềng* nếu ta có thể dịch chuyển một trong  $2n$  kí hiệu của  $a$  tới một vị trí khác thì được  $b$ . Chẳng hạn, khi  $n = 4$ , các dãy cân bằng 01101001 và 00110101 là láng giềng vì số 0 thứ ba (hay thứ tư) trong dãy thứ nhất có thể dịch chuyển đến vị trí đầu hay thứ hai thì được dãy thứ hai.

Chứng minh rằng có một tập hợp  $S$  gồm không quá

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

dãy cân bằng sao cho mỗi dãy cân bằng bất kì đều phải là bằng hay láng giềng của ít nhất một dãy trong  $S$ .

### Bài 43.

Gọi  $S$  là một họ các tập con gồm 3 phần tử của tập

$$\{1, 2, \dots, n\}.$$

Biết rằng hai phần tử bất kì thuộc  $S$  đều có không quá 1 phần tử chung. Chứng minh rằng  $S$  không thể có nhiều hơn  $\frac{n(n-1)}{6}$  phần tử. Tìm một tập  $S$  như thế có đúng

$$\frac{n(n-1)}{6} \text{ phần tử.}$$

### Bài 44.

Gọi  $P$  là tập hợp gồm 6 từ, mỗi từ gồm 4 chữ cái, mỗi chữ cái là a hoặc b. Kí hiệu  $Q_P$  là tập hợp gồm tất cả các từ (cũng gồm hai chữ cái a và b) sao cho các từ này không chứa các từ của  $P$  (như là từ con của từ đó). Chứng minh rằng :

- a) Nếu  $Q_P$  là tập hữu hạn thì nó không chứa một từ nào có độ dài  $\geq 11$  ;
- b) Tồn tại một tập hợp  $P$  để cho  $Q_P$  là tập hữu hạn và  $Q_P$  có chứa các từ với độ dài 10.

### Bài 45.

Giả sử  $w_1, \dots, w_k$  là các số thực khác nhau và có tổng khác 0. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên  $n_1, \dots, n_k$  sao cho  $n_1w_1 + \dots + n_kw_k > 0$  và với mọi hoán vị không đồng nhất  $\pi$  của  $\{1, \dots, k\}$  ta có

$$n_1w_{\pi(1)} + \dots + n_kw_{\pi(k)} < 0.$$

### Bài 46.

Giả sử  $-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$  là các số thực thoả mãn điều kiện  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ . Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị  $\sigma$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$  sao cho với mọi  $1 \leq p \leq q \leq n$ , ta có  $x_{\sigma(p)} + \dots + x_{\sigma(q)} < 2 - \frac{1}{n}$ .

Hơn nữa, hãy chứng minh rằng biểu thức ở vé phải không thể được thay bằng  $2 - \frac{4}{n}$ .

### Bài 47.

Cho  $A = (a_{ij})$ , với  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , là một ma trận với các hệ số  $a_{ij}$  là những số nguyên không âm. Với mọi  $i, j$  mà  $a_{ij} = 0$ , tổng các phần tử ở hàng thứ  $i$  và cột thứ  $j$  bé nhất là bằng  $n$ . Chứng minh rằng tổng các phần tử của ma trận có giá trị bé nhất là  $n^2/2$ .

### Bài 48.

Từ các số  $10, 11, 12, \dots, 99$ , ta thành lập một tập con  $S$  tùy ý gồm 10 số phân biệt. Chứng minh rằng từ tập hợp  $S$  này có thể trích ra được 2 tập con rời nhau (có giao bằng rỗng) mà tổng giá trị các phần tử ở hai tập con đó bằng nhau.

### Bài 49.

Cho  $n$  là số nguyên lớn hơn 2, gọi  $V_n$  là tập các số nguyên có dạng  $1 + kn$ , với  $k$  nguyên dương. Một số  $m$  thuộc  $V_n$  được gọi là *bất khả phân* (*indecomposable*) nếu nó không thể biểu diễn được thành tích của 2 số thuộc  $V_n$ . Chứng minh rằng tồn tại một phần tử của  $V_n$  sao cho phần tử đó có thể biểu diễn được thành tích các phần tử bất khả phân của  $V_n$  bằng nhiều hơn một cách (các biểu diễn chỉ khác nhau về thứ tự nhân tử thì được xem là như nhau).

### Bài 50.

Một hội quốc tế có hội viên thuộc 6 nước khác nhau. Danh sách các hội viên gồm 1978 người được đánh số theo thứ tự  $1, 2, \dots, 1978$ . Chứng minh rằng có ít nhất một hội viên mà số thứ tự bằng tổng các số thứ tự của hai hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó, hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó.

### Bài 51.

Cho  $r$  là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện  $1 \leq r \leq n$ . Xét tất cả các tập con gồm  $r$  phần tử của tập hợp  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Mỗi tập con này đều có phần tử bé nhất. Gọi  $F(n, r)$  là trung bình cộng của tất cả các phần tử bé nhất đó. Chứng minh rằng :

$$F(n, r) \leq \frac{n+1}{r+1}.$$

### Bài 52.

Xét tập hợp M gồm 1985 số nguyên dương phân biệt, sao cho không có số nào có ước số nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng M chứa một tập con gồm 4 phần tử mà tích của 4 phần tử này là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

### Bài 53.

Cho S là tập hợp  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 1$ . Ta gọi  $p_n(k)$  là số các hoán vị của S có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

### Bài 54.

Chứng minh rằng tập hợp  $\{1, 2, 3, \dots, 1989\}$  có thể được viết thành hối của các tập con rời nhau  $A_1, A_2, \dots, A_{117}$  sao cho mọi  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 117$ , đều có chứa 17 phần tử và tổng giá trị các phần tử của những  $A_i$  đều bằng nhau.

### Bài 55.

Một hoán vị  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$  của tập hợp  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  được gọi là có tính chất P, trong đó n là một số nguyên dương, nếu  $|x_i - x_{i+1}| = n$  với ít nhất một  $i$  thuộc  $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ . Chứng minh rằng với mỗi n, số các hoán vị có tính chất P lớn hơn số các hoán vị không có tính chất đó.

### Bài 56.

Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp  $\{1, 2, \dots, 2p\}$ , biết rằng:

- i) A chứa đúng p phần tử;
- ii) tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

## 2

### MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

#### Bài 57.

Trong mặt phẳng, có thể tìm được 100 đường thẳng sao cho có đúng 1998 giao điểm từ 100 đường thẳng đó hay không?

#### Bài 58.

Chia hình vuông có cạnh bằng 5 đơn vị thành các hình vuông có cạnh bằng đơn vị (gọi tắt là *hình vuông đơn vị*) bằng các đường thẳng song song với các cạnh. Gọi A là tập hợp tất cả các đỉnh của các hình vuông đơn vị này ngoại trừ các đỉnh nằm trên cạnh hình vuông (*lớn*) đã cho. Hỏi rằng ta có thể chọn được nhiều nhất bao nhiêu điểm thuộc tập A để cho không có ba điểm nào trong số các điểm được chọn lập nên một tam giác vuông cân?

#### Bài 59.

Trong mặt phẳng, cho 2001 điểm và một đường tròn đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một điểm nằm trên chu vi đường tròn đó sao cho tổng các khoảng cách từ điểm này đến 2001 điểm đã cho có giá trị bé nhất là 2001.

### Bài 60.

Cho đa giác lồi  $n$  cạnh, với  $n \geq 4$ , sao cho không có bất cứ bốn đỉnh nào của nó cùng nằm trên một đường tròn.

a) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 đỉnh của đa giác mà đường tròn này chứa các đỉnh còn lại của đa giác bên trong nó.

b) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 đỉnh liên tiếp kề nhau của đa giác mà đường tròn này chứa các đỉnh còn lại của đa giác bên trong nó.

### Bài 61.

Tại một tỉnh nọ, mỗi thị trấn được nối với thị trấn gần nó nhất bằng một con đường thẳng. Các khoảng cách giữa từng cặp thị trấn khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

- không có hai con đường nào cắt nhau;
- mỗi thị trấn được nối bằng các con đường với nhiều nhất là 5 thị trấn khác;
- không có một đường gấp khúc đóng (*tức là khép kín*) nào gồm các con đường.

### Bài 62.

Cho 33 điểm khác nhau nằm bên trong một hình vuông có cạnh là 4. Vẽ 33 đường tròn nhận các điểm này làm tâm, có cùng bán kính  $\sqrt{2}$ . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn trong số chúng chứa ít nhất 3 điểm trong 33 điểm nói trên.

### Bài 63.

Một con sâu bò trên một tờ giấy hình vuông. Mỗi lần di chuyển, nó có thể dịch sang phải 2 đơn vị, sang trái 4 đơn vị, dịch lên trên 3 đơn vị, hoặc dịch xuống phía dưới 5 đơn vị.

Trong quá trình di chuyển, các hướng ngang và đứng mà nó dịch (ta vừa kể) đúng bằng  $90^\circ$ . Lập hệ tọa độ vuông góc mà gốc tọa độ trùng với vị trí xuất phát của con sâu, hai trục song song với hai chiều di chuyển ngang và đứng vuông góc nhau của nó. Chứng minh rằng con sâu có thể đi qua tất cả các điểm nguyên của hệ trục này.

### Bài 64.

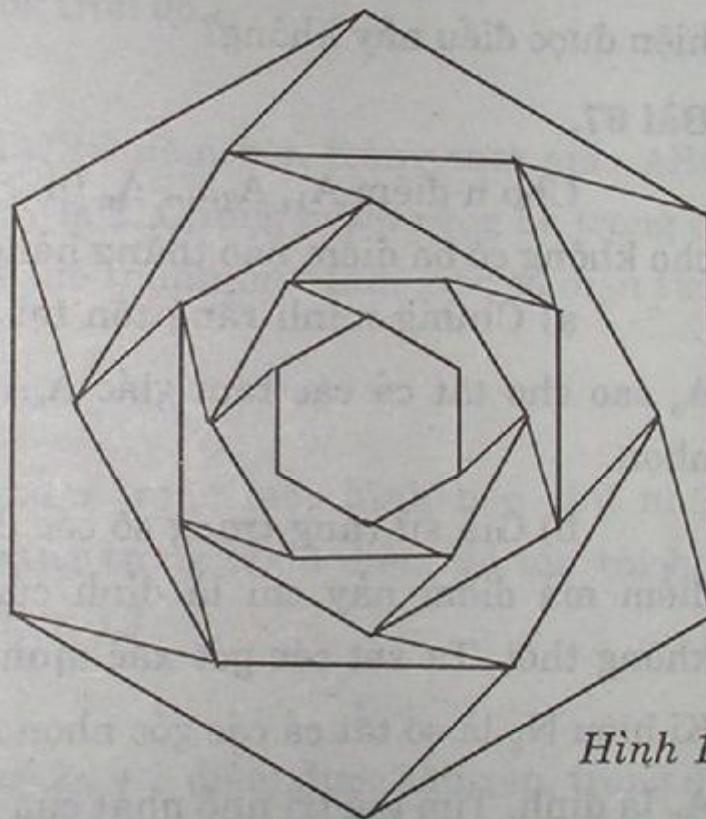
Cho 30 điểm trong mặt phẳng. Một số điểm được nối với nhau bằng những đoạn thẳng như hình 1 bên cạnh. Đánh số các điểm bằng những số nguyên dương khác nhau. Nếu  $p$  và  $q$  là hai số ở hai đầu đoạn thẳng  $a$ , ta ký hiệu  $\mu(a) = |p - q|$ .

a) Hãy xây dựng một cách đánh số các điểm bằng các số  $1, 2, \dots, 30$  sao cho tồn tại đúng một đoạn thẳng  $a$  với  $\mu(a) = 5$ .

b) Chứng minh rằng với mọi cách đánh số các điểm, tồn tại một đoạn thẳng  $a$  sao cho  $\mu(a) \geq 5$ .

### Bài 65.

Có 6 hình tròn được sắp xếp trên mặt phẳng sao cho



Hình 1.

tâm của mỗi hình tròn áy đều nằm ngoài các hình tròn kia.

Chứng minh rằng tất cả 6 hình tròn này không có điểm chung.

### Bài 66.

Cho một hình tam giác có diện tích lớn hơn 1. Người ta muốn lấp kín tam giác này bởi một hình tròn bán kính 1 sao cho tâm của hình tròn nằm ngoài tam giác. Có thể thực hiện được điều này không?

### Bài 67.

Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 4$ ) trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng tồn tại nhiều nhất là một điểm  $A_s$  sao cho tất cả các tam giác  $A_s A_i A_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) đều nhọn.

b) Giả sử rằng trong số các điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  có một điểm mà điểm này chỉ là đỉnh của những tam giác nhọn không thôi. Ta xét các góc xác định bởi những điểm đã cho. Kí hiệu  $N_k$  là số tất cả các góc nhọn  $A_i A_k A_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) có  $A_k$  là đỉnh. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $N_k$ .

### Bài 68.

Cho  $n$  điểm  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  theo thứ tự đó cùng nằm trên một đường tròn và chia đường tròn thành các cung bằng nhau. Hãy tìm  $n$  điểm trên đường tròn sắp theo thứ tự  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  như thế, sao cho độ dài đường gấp khúc  $B_0 B_1 \dots B_{n-1}$  lớn nhất.

**Bài 69.**

Cho 1998 điểm trong mặt phẳng sao cho cứ với 17 điểm bất kì trong số các điểm này, ta đều có thể chọn được 11 điểm nằm bên trong một đường tròn có đường kính 1. Tìm số bé nhất các đường tròn có đường kính 2 đủ để phủ cả 1998 điểm đã cho. (Ta nói rằng một đường tròn *phủ* được một số điểm nào đó nếu tất cả các điểm đó đều nằm bên trong hình tròn hoặc nằm trên đường tròn đó.)

**Bài 70.**

Cho tứ giác lồi PQRS nằm bên trong tam giác ABC mà diện tích tam giác này là 1. Chứng minh rằng ba trong số các đỉnh của tứ giác này tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn hoặc bằng  $1/4$ .

**Bài 71.**

Cho 2000 điểm nằm trong một hình hộp chữ nhật  $5 \times 5 \times 10$ . Chứng minh rằng trong 2000 điểm đó tồn tại hai điểm có khoảng cách bé hơn 0,7.

**Bài 72.**

Trên mặt phẳng có  $2n + 3$  điểm được sắp xếp, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào nằm trên một đường tròn. Tồn tại hay không một đường tròn đi qua 3 điểm trong số đó và chứa trong nó  $n$  điểm trong số  $2n$  điểm còn lại?

**Bài 73.**

Chia một tam giác đều có cạnh bằng  $n$  thành  $n^2$  tam giác đều có cạnh bằng 1 bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Ta đánh số mỗi đỉnh trong  $n(n+1)/2$

đỉnh của các tam giác bằng một số thực, sao cho nếu ABC và BCD là các tam giác nhỏ thì tổng các số đánh trên hai đỉnh A và D bằng tổng các số đánh trên hai đỉnh B và C. Giả sử  $a$ ,  $b$  và  $c$  là các số đánh trên ba đỉnh của tam giác lớn ban đầu.

Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa một đỉnh có đánh số lớn nhất và một đỉnh có đánh số bé nhất là bao nhiêu?

Tổng tất cả các số đã đánh bằng bao nhiêu?

#### Bài 74.

Một lỗ tròn được phủ hoàn toàn bằng hai tấm bìa hình vuông. Cạnh mỗi hình vuông bằng 1 m. Hỏi đường kính của lỗ tròn thay đổi trong khoảng nào?

#### Bài 75.

Cho 5 điểm nằm bên trong một tam giác đều có diện tích bằng 1, chứng minh rằng ta có thể tìm được 3 tam giác đều có các cạnh song song với các cạnh của tam giác ban đầu mà tổng diện tích của 3 tam giác đó lớn nhất là 0,64, sao cho mỗi một trong năm điểm đã cho phải nằm trong ít nhất một trong 3 tam giác mới.

#### Bài 76.

Cho n-giác lồi X (tức đa giác lồi n cạnh). Chứng minh rằng nếu như ta có thể phân hoạch X thành các tam giác bằng  $n-3$  đường chéo mà các tam giác đó không giao nhau, ngoại trừ tại các đỉnh chung, sao cho tồn tại một đường gấp khúc khép kín bao gồm các cạnh của các tam giác (mỗi cạnh xuất hiện đúng một lần) và gồm các đường chéo trong  $n-3$  đường chéo, mỗi đường chéo xuất hiện đúng một lần, (nhưng mỗi đỉnh có thể xuất hiện hơn một lần), thì khi đó,  $n$  phải là

một bội số của 3.

Đảo lại, hãy chứng minh rằng nếu  $n$  là bội số của 3 thì sẽ tồn tại một phân hoạch như trên.

### Bài 77.

Với những tứ giác lồi ABCD nào thì ta có thể tìm được một điểm P (trong mặt phẳng tứ giác đó) sao cho cả bốn tam giác PAB, PBC, PCD, PDA đều có cùng diện tích?

Với một tứ giác cho trước, số lớn nhất các điểm như thế là bao nhiêu?

### Bài 78.

Có 10 điểm được sắp xếp trong mặt phẳng sao cho với 5 điểm bất kì, có ít nhất 4 điểm nằm trên một đường tròn. Gọi  $M$  là số lớn nhất các điểm nằm trên một đường tròn. Hỏi giá trị bé nhất của  $M$  là bao nhiêu?

### Bài 79.

Tại mỗi đỉnh của một đa giác  $n$  cạnh có một con chim đang đậu. Bỗng nhiên chim vút cánh bay xa rồi một phút sau trở lại. Khi chúng quay lại, mỗi đỉnh cũng có một con chim đậu, nhưng không nhất thiết giống vị trí trước đó. Hỏi với số  $n$  nào ta có thể luôn tìm được 3 con chim sao cho tam giác tạo bởi 3 vị trí ban đầu của chúng là cùng loại (tam giác nhọn, tam giác có một góc tù hoặc tam giác vuông) với tam giác tạo bởi 3 vị trí sau cùng của chúng?

### Bài 80.

24 điểm nằm cách đều nhau trên một đường tròn sao cho khoảng cách giữa hai điểm kề nhau bất kì là 1. Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn 8 điểm mà độ dài cung giữa

hai điểm tuỳ ý trong 8 điểm này không bằng 3 hoặc 8?

### Bài 81.

Người ta sơn bể ngoài của một khối lập phương thành màu trắng và cưa thành 64 khối lập phương nhỏ. Sau đó, từ các khối lập phương nhỏ, người ta xếp để tạo lại khối lập phương cũ, nhưng lúc ấy các khối lập phương nhỏ có thể thay đổi vị trí và quay đi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các khối lập phương nhỏ để khối lập phương lớn có bể ngoài được sơn màu trắng?

### Bài 82.

Chứng minh rằng trong số 10 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính 5, luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách bé hơn 2.

### Bài 83.

Gọi S là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tập P gồm  $2n - 5$  điểm thoả mãn điều kiện: Với mọi tam giác mà 3 đỉnh là 3 điểm của S, có một điểm của P nằm bên trong tam giác này.

### Bài 84.

Xét các đường thẳng chứa các cạnh của một hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng trên bốn đường thẳng đó không có bất cứ điểm nào sao cho khoảng cách từ điểm đó đến các đỉnh hình vuông là những số hữu tỉ.

### Bài 85.

Một đường tròn S được gọi là cắt xuyên tâm đường

tròn  $\Sigma$  nếu dây cung chung của chúng là đường kính của  $\Sigma$ .

Gọi  $S_A, S_B, S_C$  là 3 đường tròn tâm A, B, C phân biệt. Chứng minh A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại không duy nhất một đường tròn S cắt xuyên tâm  $S_A, S_B, S_C$ .

Chứng minh thêm: Nếu có hơn 1 đường tròn S cắt xuyên tâm  $S_A, S_B, S_C$  thì tất cả các đường tròn S này đều đi qua 2 điểm cố định. Chỉ rõ vị trí 2 điểm này đối với 3 đường tròn  $S_A, S_B, S_C$ .

### Bài 86.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 2$ , tồn tại một tập hợp gồm  $2^{n-1}$  điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào nằm trên một đường thẳng và không có  $2n$  điểm nào tạo thành đa giác lồi  $2n$  đỉnh.

### Bài 87.

Với mỗi tập hợp hữu hạn U các vectơ khác  $\vec{0}$  trong mặt phẳng, ta gọi  $l(U)$  là độ dài của vectơ tổng của tất cả các vectơ trong U. Cho trước một tập hợp hữu hạn V các vectơ khác  $\vec{0}$  trong mặt phẳng, một tập con B của V được gọi là cực đại nếu với mọi tập con khác trống A của V, ta có  $l(B) \geq l(A)$ .

a) Hãy dựng các tập hợp gồm 4 và 5 vectơ, lần lượt có 8 và 10 tập con cực đại.

b) Chứng minh rằng, với mọi tập hợp V gồm n vectơ,  $n \geq 1$ , số các tập con cực đại là bé hơn hay bằng  $2^n$ .

### Bài 88.

Trong mặt phẳng, cho trước một tập E gồm 1991 điểm, với một số cặp điểm nào đó được nối với nhau bằng một đường nối. Giả sử mỗi điểm của E đều nối được với ít nhất

1553 điểm khác của E. Chứng minh rằng tồn tại 6 điểm của E sao cho mỗi cặp trong 6 điểm này đều có nối với nhau.

### Bài 89.

Cho hàm tuyến tính có đồ thị đi qua  $M(-1, -25)$ , cắt trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm A, B và song song với đường thẳng

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{95}{4}.$$

Ta xét lưới đơn vị trong mặt phẳng toạ độ (tức là các ô vuông tạo bởi các đường thẳng song song cách nhau một đơn vị). Tìm số các ô vuông chứa các điểm của đoạn thẳng AB (bên trong những ô vuông đó).

### Bài 90.

Xác định tất cả các tập hợp hữu hạn S gồm những điểm trong mặt phẳng sao cho:

- S có ít nhất 3 điểm;
- với mọi A, B khác nhau thuộc S, đường trung trực của AB là một trục đối xứng của các điểm trong S.

### Bài 91.

Cho  $n \geq 1$  là một số nguyên. Một *con đường* từ  $(0, 0)$  tới  $(n, n)$  trong mặt phẳng  $xOy$  được định nghĩa là một chuỗi các di chuyển liên tiếp của đơn vị sang trái (di chuyển này được kí hiệu bởi E) hay lên trên (di chuyển này được kí hiệu bởi N), mọi di chuyển được thực hiện trong nửa mặt phẳng  $x \geq y$ . Một *bước nhảy* trên con đường là sự kết hợp của hai di chuyển liên tiếp có dạng EN.

Chứng minh rằng số các con đường từ  $(0, 0)$  đến  $(n, n)$

mà chứa đúng s bước nhảy ( $n \geq s \geq 1$ ) là bằng

$$\frac{1}{s} C_n^s - \frac{1}{s-1} C_n^{s-1}.$$

### Bài 92.

Trong mặt phẳng, cho bốn điểm phân biệt sao cho khoảng cách bé nhất giữa hai điểm bất kỳ trong bốn điểm đó là bằng 1. Tìm giá trị bé nhất của tổng sáu khoảng cách tạo bởi bốn điểm đó.

### Bài 93.

Cho n điểm nằm trên một đường tròn sao cho không có ba dây cung nào có đầu mút nằm trong số n điểm này cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng tồn tại n sao cho có

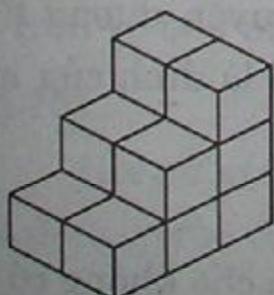
$$\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$$

dây cung có đầu mút nằm trong số n điểm này chia phần trong của hình tròn thành 1998 miền.

### Bài 94.

Với mọi số tự nhiên  $n \geq 3$ , ta kí hiệu  $m(n)$  là số lớn nhất các điểm có thể được đặt bên trong hoặc trên biên của một hình đa giác đều  $n$  cạnh có cạnh bằng 1 sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong chúng lớn hơn 1. Tìm tất cả các số  $n$  sao cho  $m(n) = n - 1$ .

### Bài 95.



Một viên gạch có dạng hình của một tam cấp gồm ba bậc có bề rộng là 2 được làm từ 12 khối hình lập phương đơn vị. Hãy xác định số nguyên  $n$  sao cho ta có thể dựng một khối lập phương cạnh  $n$

từ các viên gạch (dạng tam cấp) ấy.

### Bài 96.

Trong mặt phẳng, cho  $C_1, C_2, \dots, C_n$  là các đường tròn bán kính 1 sao cho không có bất cứ hai đường tròn nào trong chúng tiếp xúc nhau và tập con của mặt phẳng tạo bởi các đường tròn này là tập *liên thông* (nghĩa là, với mọi phép phân hoạch tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  thành các tập con khác rỗng A và B, ta có  $\bigcup_{a \in A} C_a$  và  $\bigcup_{b \in B} C_b$  là hai tập không rời nhau). Chứng minh rằng  $|S| \geq n$ , trong đó

$$S = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_i \cap C_j,$$

là tập hợp gồm các giao điểm của những đường tròn đó. (Mỗi đường tròn được xem là tập các điểm nằm trên biên, không kể các điểm bên trong - ở đây ta nói *đường tròn* để phân biệt với *hình tròn*.)

### Bài 97.

Cho  $n \geq 4$  là một số nguyên cố định. Cho tập hợp

$$S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

gồm  $n$  điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào ở trên cùng một đường tròn. Gọi  $a_t$ ,  $1 \leq t \leq n$  là số các đường tròn ngoại tiếp tam giác  $P_i P_j P_k$  chứa điểm  $P_t$  trong nó, đặt

$$m(S) = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương  $f(n)$ , chỉ phụ thuộc vào  $n$ , sao cho: các điểm của  $S$  là đỉnh của một đa giác lồi nếu và chỉ nếu  $m(S) = f(n)$ .

### Bài 98.

Cho  $n$  điểm nằm trong mặt phẳng sao cho không có ba

điểm nào thẳng hàng. Xét các đoạn thẳng có đầu mút là những điểm này sao cho với hai điểm bất kì A và B, tồn tại một điểm C nối với A và B bằng hai trong các đoạn thẳng đó. Hỏi số bé nhất các đoạn thẳng như thế là bao nhiêu?

### Bài 99.

Có n hình chữ nhật với các cạnh song song nằm trên một mặt phẳng. Các cạnh của các hình chữ nhật khác nhau thì nằm trên các đường thẳng khác nhau. Biên của các hình chữ nhật cắt mặt phẳng thành các miền liên thông. Một miền được gọi *đẹp* nếu nó có ít nhất một trong các đỉnh của n hình chữ nhật nằm trên biên của nó.

Chứng minh rằng tổng của số các đỉnh tất cả các miền đẹp là bé hơn  $40n$ . (Có thể có miền không lồi cũng như có những miền có hơn một biên cong.)

### Bài 100.

Cho k là một số thực dương, n là một số nguyên lớn hơn 1. Có n điểm nằm trên một đường thẳng sao cho chúng không trùng tất cả thành một điểm. Xét hai điểm bất kì A, B không trùng nhau. Giả sử A nằm bên phải B. Khi đó, ta nói *một nước đi* là một sự chuyển chỗ được thực hiện như sau: thay B bởi điểm B' nằm bên phải A sao cho  $AB' = kAB$ .

Tìm tất cả các giá trị k để với các nước đi (hữu hạn) như vậy, ta có thể chuyển toàn bộ các điểm trên đường thẳng nói trên về bên phải của một điểm mốc tùy ý nào đó.

### Bài 101.

Giả sử  $n(r)$  là số tất cả các điểm có toạ độ nguyên trên một đường tròn có bán kính  $r > 1$ . Chứng minh rằng :

$$n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}.$$

### Bài 102.

Cho 5 điểm trong một mặt phẳng sao cho trong số tất cả những đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào trùng nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.

Qua mỗi điểm, vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xác định bởi hai trong số 4 điểm còn lại. Hãy xác định số lớn nhất các giao điểm mà những đường vuông góc này có thể giao nhau.

### Bài 103.

Cho  $n$  điểm trong mặt phẳng, với  $n > 4$  và không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng tỏ rằng có ít nhất

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số  $n$  điểm đã cho.

### Bài 104.

Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 4, chứng minh rằng mọi tứ giác nội tiếp đều có thể được phân chia làm  $n$  tứ giác nội tiếp.

### Bài 105.

Hãy chỉ ra một tập hợp các điểm không đồng phẳng, sao cho với bất kì hai điểm A và B cho trước trong tập hợp này, tồn tại hai điểm C và D khác (cũng trong tập hợp đó) mà AB và CD song song với nhau.

### Bài 106.

Một hình hộp chữ nhật có thể được lấp đầy bằng những

hình lập phương có cạnh bằng đơn vị. Ngoài ra, người ta có thể sắp xếp các hình lập phương có thể tích bằng 2 chồng lên nhau, cạnh song song với cạnh của hình hộp, và lấp đầy được 40% hình hộp. Hãy xác định kích thước có thể có của hình hộp đã cho.

### Bài 107.

Xác định tất cả các số nguyên  $n > 3$  sao cho tồn tại  $n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  trong mặt phẳng và các số thực  $r_1, r_2, \dots, r_n$  thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i) Không có 3 điểm nào trong số các điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  thẳng hàng.
- ii) Với mỗi bộ số  $(i, j, k)$  ( $1 \leq i < j < k \leq n$ ), các tam giác  $A_i A_j A_k$  có diện tích bằng  $r_i + r_j + r_k$ .

### Bài 108.

Cho  $n$  điểm trong mặt phẳng với  $n > 2$ . Chứng minh rằng có nhiều nhất là  $n$  cặp điểm có khoảng cách cực đại.

### Bài 109.

Trong mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 100 điểm đó, có không quá 70% các tam giác nhọn.

### Bài 110.

Một người lính làm nhiệm vụ rà mìn, anh ta cần phải dò cùng khắp một khu vực có hình tam giác đều. Máy dò mìn (detector) có bán kính dò hiệu quả bằng một nửa chiều cao tam giác đó. Người lính bắt đầu từ một đỉnh của tam giác.

Hỏi anh ta nên đi theo con đường nào để cho đó là con

đường ngắn nhất mà vẫn dò khắp được cả miền tam giác?

### Bài 111.

Một con éch nhảy từ đỉnh A đến đỉnh đối tâm E của một hình bát giác đều. Tại mỗi đỉnh của bát giác trừ đỉnh E, con éch có thể nhảy một bước tới một trong hai đỉnh kề. Đến E thì éch dừng lại và ở luôn tại đó. Gọi  $a_n$  là số các đường đi phân biệt của con éch đi từ A đến E bằng đúng n bước nhảy. Chứng minh rằng:

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}].$$

### Bài 112.

Xét hình vuông S có cạnh dài 100 (đơn vị). Gọi L là một đường gấp khúc nằm trong S không tự cắt chính nó, L bao gồm các đoạn thẳng  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ , với  $A_0$  không trùng với  $A_n$ . Giả sử với mọi điểm P nằm trên biên (tức là các cạnh) của S đều có một điểm trên L sao cho khoảng cách từ điểm này đến P không lớn hơn  $1/2$ . Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm X và Y trên L sao cho khoảng cách giữa X và Y không lớn hơn 1, và độ dài phần đường gấp khúc của L nằm giữa X và Y không bé hơn 198.

### Bài 113.

Tại mỗi đỉnh của một ngũ giác đều, ta đặt tương ứng một số nguyên sao cho tổng của cả 5 số là một số dương. Nếu 3 đỉnh liên tiếp nhau được đặt tương ứng 3 số  $x, y, z$  và  $y < 0$  thì ta thực hiện một toán tử như sau: thay các số  $x, y, z$  đó bằng các số tương ứng  $x+y, -y, z+y$ . Toán tử này được thực hiện lặp lại khi mà trong năm số ở đỉnh vẫn còn ít nhất

một số âm.

Hãy xác định xem việc thực hiện toán tử đó có dừng sau một số hữu hạn bước hay không ?

#### Bài 114.

Cho  $n$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp gồm  $n$  điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm tuỳ ý trong tập hợp này là một số vô tỉ và bất kì 3 điểm nào trong chúng cũng xác định một tam giác không suy biến (*non-degenerate*) có diện tích hữu tỉ.

#### Bài 115.

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  là các tập hợp con của tập hợp  $B$ .

Giả sử rằng:

- i) Mỗi tập hợp  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ) chứa đúng  $2n$  phần tử.
- ii) Với mỗi cặp tập hợp khác nhau  $A_i$  và  $A_j$ ,  $A_i \cap A_j$  chỉ chứa đúng một phần tử.
- iii) Mỗi phần tử của  $B$  thuộc ít nhất hai tập hợp  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ).

Với những giá trị nào của  $n$  thì ta có thể gán cho mỗi phần tử của  $B$  giá trị 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi tập hợp  $A_i$  có đúng  $n$  phần tử được gán giá trị 0?

#### Bài 116.

Gọi  $S$  là tập hợp các điểm nằm bên trong tam giác. Gọi  $T$  là tập con của  $S$ , mà  $T$  bằng tập  $S$  trừ đi một điểm.

Chứng minh rằng có thể tìm được các điểm  $P_i, Q_i$  sao cho  $P_i$  và  $Q_i$  là các điểm khác nhau và hợp tất cả các đoạn thẳng  $P_iQ_i$  (tính luôn hai đầu mút đoạn thẳng) thì bằng  $T$ , và các đoạn thẳng đó rời nhau từng đôi một.

### Bài 117.

Tìm số nguyên  $n$  lớn nhất sao cho tồn tại  $n + 4$  điểm  $A, B, C, D, X_1, \dots, X_n$ , với  $AB \neq CD$ , nằm trong cùng một mặt phẳng và thoả mãn điều kiện sau: với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ , hai tam giác  $ABX_i$  và  $CDX_i$  bằng nhau.

### Bài 118.

Tìm độ dài bé nhất của cạnh một tam giác đều, sao cho ta có thể đặt vào bên trong tam giác này ba đĩa tròn có bán kính lần lượt 2, 3, 4 mà ba đĩa tròn này từng đôi một không có phần nào chồng lên nhau (tức là phần trong của các đĩa không có điểm chung).

### Bài 119.

Cho tam giác  $ABC$  không tù (tức là vuông hoặc nhọn), về phía ngoài của tam giác này, ta lần lượt dựng trên ba cạnh một hình vuông, một đa giác đều  $n$  cạnh ( $n$ -giác đều) và một  $m$ -giác đều ( $n, m > 5$ ), sao cho tâm của ba hình vừa dựng tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Chứng minh rằng  $m = n = 6$  và hãy xác định các góc của tam giác  $ABC$ .

### Bài 120.

Cho tam giác  $ABC$  và số nguyên dương  $n > 1$ . Gọi  $S$  là tập gồm  $n - 1$  đường thẳng cùng song song  $AB$  và chia tam giác  $ABC$  thành  $n$  phần có diện tích bằng nhau; gọi  $S'$  là tập

gồm  $n - 1$  đường thẳng cùng song song AB và chia tam giác ABC thành  $n$  phần có chu vi bằng nhau. Chứng minh rằng  $S$  và  $S'$  có giao băng rỗng.

### Bài 121.

Cho hình hộp chữ nhật có độ dài ba kích thước là các số tự nhiên. Các mặt của hình hộp được sơn màu xanh. Chia hình hộp này thành các khối lập phương đơn vị bằng các mặt phẳng song song với các mặt của hình hộp. Tìm các kích thước của hình hộp, biết rằng số các khối lập phương đơn vị không có mặt nào màu xanh bằng một phần ba tổng số các khối lập phương đơn vị.

### Bài 122.

Tìm tất cả các tập hợp  $S$  gồm bốn điểm trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện: với bất kì hai đường tròn  $(k_1), (k_2)$  nhận hai điểm thuộc  $S$  làm đầu mút của đường kính, luôn tồn tại một điểm A sao cho  $A \in S \cap (k_1) \cap (k_2)$ .

### Bài 123.

Trong hệ tọa độ trực chuẩn  $xOy$ , một tập hợp gồm 2000 điểm  $M_i(x_i, y_i)$  được gọi là "tốt" nếu  $0 \leq x_i \leq 83, 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, 2000$  và  $x_i \neq x_j$  khi  $i \neq j$ . Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  thỏa mãn các tính chất sau:

a) Với mọi tập "tốt", ta đều có thể tìm được  $n$  điểm của tập hợp này sao cho  $n$  điểm đó nằm trong một hình vuông có cạnh bằng 1.

b) Tồn tại một tập hợp "tốt" sao cho trong tập hợp này, bất cứ  $n + 1$  điểm nào cũng không thể nằm trong một hình vuông có cạnh bằng 1.

(Điểm nằm trên cạnh hình vuông cũng được xem như nằm bên trong hình vuông).

### Bài 124.

Cho trước số nguyên  $n \geq 2$ . Tại mỗi điểm  $(i, j)$  có thành phần tọa độ nguyên, ta viết số  $i + j$  modulo  $n$  (số dư của  $i + j$  khi chia cho  $n$ ). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(a, b)$  sao cho hình chữ nhật gồm bốn đỉnh  $(0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)$  có các tính chất sau:

- 1) Các số dư  $0, 1, \dots, n - 1$  được viết tại các điểm bên trong hình chữ nhật đúng bằng số lần xuất hiện của các điểm đó (điều này có nghĩa, điểm  $(i, j)$  có  $i + j \equiv 0 \pmod{n}$  xuất hiện 0 lần ở bên trong hình chữ nhật, điểm  $(i, j)$  có  $i + j \equiv 1 \pmod{n}$  xuất hiện 1 lần, v.v...);
- 2) Các số dư  $0, 1, \dots, n - 1$  được viết tại các điểm trên biên (tức là trên chu vi) của hình chữ nhật đúng bằng số lần xuất hiện của các điểm đó.

### Bài 125.

Cho số nguyên  $n \geq 3$  và số nguyên tố  $p$ , với

$$p \geq 2n - 3.$$

Gọi  $\Omega$  là tập gồm  $n$  điểm trong mặt phẳng sao cho không có bất cứ ba điểm nào thẳng hàng. Gọi  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, p - 1\}$  là hàm thoả mãn hai điều kiện sau:

- (i) Tồn tại duy nhất một điểm của  $\Omega$  có ảnh bằng 0;
- (ii) Nếu A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc  $\Omega$  và  $(k)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì

$$\sum_{P \in \Omega \cap (k)} f(P) \equiv 0 \pmod{p}.$$

### Bài 126.

Cho số nguyên dương  $n \geq 4$  và gọi  $M$  là tập gồm  $n$  điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và  $n$  điểm đó không cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tất cả các hàm  $f : M \rightarrow R$  sao cho với mọi đường tròn  $C$  chứa ít nhất ba điểm của  $M$ , ta có

$$\sum_{P \in M \cap C} f(P) = 0. \quad (*)$$

### Bài 127.

Gọi  $\mathcal{P}$  là tập hợp các điểm trong mặt phẳng và  $\mathcal{D}$  là tập tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng đó. Hãy xét xem có tồn tại hay không một song ánh

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$$

sao cho với mọi ba điểm thẳng hàng  $A, B, C$ , ba đường thẳng  $f(A), f(B), f(C)$  song song hoặc đồng quy.

### Bài 128.

Bạn có thể tìm được hay không vô số điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì là một số hữu tỉ và không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng ?

### Bài 129.

Cho 997 điểm khác nhau trên một mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1991 trung điểm khác nhau từ các cặp điểm này. Khi nào thì có đúng 1991 trung điểm khác nhau ?

### Bài 130.

Cho đa giác lồi  $P_1 P_2 \dots P_n$  trong mặt phẳng thoả mãn điều kiện : với mọi cặp đỉnh  $P_i, P_j$ , tồn tại một đỉnh  $V$  của đa

giác sao cho

$$\widehat{P_i VP_j} = \frac{\pi}{3}.$$

Chứng minh rằng  $n = 3$ .

### Bài 131.

Hay xác định (và chứng minh) xem có tồn tại hay không một hình cầu có phần trong  $S$ , một đường tròn có phần trong  $C$ , và một hàm  $f : S \rightarrow C$  sao cho khoảng cách giữa hai điểm  $f(A)$  và  $f(B)$  lớn hơn hoặc bằng  $AB$  với mọi điểm  $A, B$  thuộc  $S$ .

### Bài 132.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta nói một *điểm nguyên* là điểm mà các thành phần tọa độ đều là những số nguyên. Một điểm nguyên được gọi là *thu gọn* được nếu trên đoạn thẳng nối nó và gốc tọa độ còn có thêm một điểm nguyên nữa (khác nó và khác điểm gốc tọa độ). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , tồn tại một hình vuông có cạnh bằng  $n$  sao cho các điểm nguyên bên trong hình vuông này đều là các điểm thu gọn được.

### Bài 133.

Hay xác định tất cả các cặp các số nguyên dương  $(h, s)$  có tính chất sau: Nếu kẻ  $h$  đường thẳng nằm ngang và  $s$  đường thẳng khác thoả mãn các tính chất:

- (i) không có đường nào nằm ngang,
- (ii) không có 2 đường thẳng nào trong chúng song song nhau,
- (iii) không có bất cứ 3 đường nào trong  $(h + s)$  đường thẳng trên thẳng hàng,

thì số các miền tạo thành bởi  $(h+s)$  đường thẳng này là 1992.

### Bài 134.

Gọi C là một đa giác gồm 1993 đỉnh là các điểm trong mặt phẳng có toạ độ nguyên (*nghĩa là toạ độ với hai thành phần đều là hai số nguyên*), không nhất thiết là đa giác lồi. Mỗi cạnh của C không chứa điểm có toạ độ nguyên nào cả ngoại trừ hai đỉnh, đó là hai đỉnh của đa giác.

Chứng minh rằng có ít nhất một cạnh chứa một điểm có toạ độ  $(x, y)$  với  $2x$  và  $2y$  đều là những số nguyên lẻ.

### Bài 135.

Tam giác  $A_1A_2A_3$  vuông tại  $A_3$ . Ta định nghĩa một dãy các điểm theo quá trình lặp lại như sau, ở đây  $n$  là số nguyên dương. Với  $n \geq 3$ , ta gọi  $A_{n+1}$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A_n$  xuống cạnh  $A_{n-1}A_{n-2}$ .

Chứng minh rằng nếu quá trình này được tiếp tục vô hạn thì sẽ tồn tại duy nhất một điểm  $P$  nằm bên trong tất cả các tam giác  $A_{n-1}A_{n-2}A_n$  với mọi  $n \geq 3$ .

### Bài 136.

Gọi  $S$  là tập hợp gồm  $2n+1$  điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và cũng không có 4 điểm nào cùng nằm trên một đường tròn. Ta nói một đường tròn là *tốt* nếu đường tròn này chứa 3 điểm của  $S$ ,  $n-1$  điểm của  $S$  thì nằm bên trong đường tròn, còn  $n-1$  điểm còn lại của  $S$  thì nằm bên ngoài đường tròn đó. Chứng minh rằng số các đường tròn *tốt* có cùng tính chẵn lẻ với số  $n$ .

### Bài 137.

Trong mặt phẳng với hệ trục vuông góc, một điểm được gọi là *điểm hỗn hợp* (mixed point) nếu một trong 2 thành phần toạ độ của điểm đó là số hữu tỉ, thành phần kia là số vô tỉ. Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực sao cho đồ thị của mỗi đa thức đó không chứa bất kì điểm hỗn hợp nào cả.

## 3

### MỘT SỐ BÀI TOÁN TÔ MÀU

#### Bài 138.

Trong mặt phẳng, mỗi điểm được tô bằng một trong hai màu đen hoặc trắng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 2 và một góc nhọn bằng  $60^\circ$ , sao cho cả ba đỉnh của tam giác này có cùng màu.

#### Bài 139.

Ta nối mỗi đỉnh của một thập giác đều với một điểm nằm bên trong nó để tạo thành 10 tam giác. Tô màu các tam giác này bằng hai màu đỏ và xanh đan nhau. Chứng minh rằng tổng diện tích các tam giác màu xanh bằng tổng diện tích các tam giác màu đỏ.

#### Bài 140.

Giả sử một đội dự thi Olympic Toán học Quốc tế có 6 thành viên. Chứng minh rằng trong số 6 thành viên này luôn

tồn tại 3 thành viên mà hoặc là cả ba biết lẫn nhau hoặc không ai biết ai cả.

### Bài 141.

Cho các số nguyên dương  $n, r$  và một tập  $A$  gồm các điểm nguyên trong mặt phẳng, sao cho mọi đĩa mở bán kính  $r$  đều có chứa một điểm của  $A$ . Chứng minh rằng với mọi cách tô màu các điểm của  $A$  bằng  $n$  màu, đều tồn tại 4 điểm cùng màu mà 4 điểm này là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

#### Chú ý:

a) Một điểm nguyên là một điểm có tọa độ  $(x, y)$ , với  $x$  và  $y$  là các số nguyên.

b) Ở đây, ta hiểu *đĩa mở bán kính  $r$*  chính là tập hợp

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < r \right\}.$$

Nếu thay dấu  $<$  bằng dấu  $\leq$ , ta có *đĩa đóng*. Các bạn có thể hình dung khái niệm này trong không gian nhiều chiều hơn.

### Bài 142.

Gọi  $X$  là một tập hữu hạn nào đó, xét 6 tập con của  $X$ , mỗi tập gồm 3 phần tử. Chứng minh rằng có thể tô bằng 2 màu cho các phần tử của  $X$  sao cho không một tập con nào trong 6 tập con nói trên có cả ba phần tử cùng màu.

### Bài 143.

Cho tam giác ABC. Nếu ta sơn các điểm của mặt phẳng bằng hai màu xanh và đỏ, hãy chứng minh rằng hoặc là tồn tại hai điểm màu đỏ có khoảng cách bằng một đơn vị, hoặc là tồn tại ba điểm màu xanh tạo thành một tam giác bằng tam giác ABC.

**Bài 144.**

Gọi  $n$ ,  $k$ ,  $p$  là các số nguyên dương sao cho  $k \geq 2$  và  $k(p + 1) \leq n$ . Hãy xác định số các cách tô thành hai màu xanh đỏ cho  $n$  điểm được đánh dấu trên một đường tròn sao cho: có đúng  $k$  điểm được tô màu xanh, và bất kì đoạn cung nào có hai điểm đầu mút màu xanh nhưng không chứa điểm màu xanh nào khác bên trong cũng phải chứa ít nhất  $k$  điểm màu đỏ.

**Bài 145.**

Một kim tự tháp có đáy là một đa giác lồi 9 cạnh. Mỗi đường chéo của đáy và mỗi một trong các cạnh của các mặt bên được tô bằng màu đen hoặc trắng. Cả hai màu đều được sử dụng. (Các cạnh của mặt đáy không được tô màu.) Chứng minh rằng có 3 đoạn cùng màu tạo thành một tam giác.

**Bài 146.**

Phát biểu sau đây đúng hay sai?

"Trong không gian, cho  $n$  điểm màu đỏ, khi đó, ta luôn có thể đặt vào không gian đó  $3n$  điểm màu xanh để cho bên trong mỗi tứ diện tạo thành bởi các điểm màu đỏ có ít nhất một điểm màu xanh."

**Bài 147.**

Trong hệ trục trực chuẩn của mặt phẳng, xét tất cả những điểm có toạ độ nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn

$$1 \leq x \leq 19, 1 \leq y \leq 4.$$

Mỗi điểm được đánh dấu bằng một trong ba màu xanh lục, đỏ và xanh nước biển. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có hai cạnh song song với hai trục toạ độ sao cho

bốn đỉnh của nó có cùng màu.

### Bài 148.

Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô màu đen hoặc đỏ. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng 1 hoặc có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng  $\sqrt{3}$ .

### Bài 149.

Mỗi đỉnh của một đa diện có 3 cạnh. Có thể tô màu các cạnh bằng 3 màu, sao cho ba cạnh tại mỗi đỉnh có 3 màu khác nhau. Chứng minh rằng ta có thể gán cho mỗi đỉnh một số phức  $z_i \neq 1$  để cho tích các số quanh mỗi mặt là bằng 1.

### Bài 150.

Trong không gian, cho 9 điểm sao cho không có bất cứ hệ 4 điểm nào trong số đó đồng phẳng. Cứ hai điểm thì được nối một đoạn thẳng (cạnh), mỗi cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ, hoặc không tô gì cả.

Tìm giá trị n nhỏ nhất sao cho hễ có đúng n cạnh được tô màu thì tập hợp các cạnh được tô đó phải chứa một tam giác có cả 3 cạnh cùng màu.

### Bài 151.

Trên một đường thẳng, có  $n$  điểm màu xanh và  $n$  điểm màu đỏ. Chứng minh rằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm cùng màu bé hơn hoặc bằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm khác màu.

### Bài 152.

Có bao nhiêu cách tô màu đỏ cho 16 khối lập phương đơn vị của khối lập phương  $4 \times 4 \times 4$ , sao cho mỗi khối  $1 \times 1 \times 4$

(và mỗi khối  $1 \times 4 \times 1$  hay  $4 \times 1 \times 1$ ) có chứa đúng một khối lập phương đơn vị màu đỏ?

**Bài 153.**

Cho hình lăng trụ có đáy trên và đáy dưới là các ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  và  $B_1B_2B_3B_4B_5$ . Mỗi cạnh của hai ngũ giác này cũng như mỗi cạnh trong 25 cạnh  $A_iB_j$  ( $i, j = 1, \dots, 5$ ) đều được tô màu đỏ hoặc xanh. Biết rằng bất kì tam giác nào tạo thành từ 3 đỉnh của lăng trụ mà cả 3 cạnh đều được tô màu thì phải có 2 cạnh có màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả 10 cạnh của hai ngũ giác (ở đáy trên và đáy dưới) đều có cùng một màu.

**Bài 154.**

Trong mặt phẳng, cho 2 điểm phân biệt  $O$  và  $A$ . Với mọi điểm  $X$  (khác  $O$ ) trong mặt phẳng này, ta kí hiệu  $a(X)$  là số đo của góc giữa  $OA$  và  $OX$ , tính từ  $OA$ , theo chiều ngược kim đồng hồ,  $0 \leq a(X) \leq 2\pi$ . Gọi  $C(X)$  là đường tròn tâm  $O$  bán kính  $OX + \frac{a(X)}{OX}$ .

Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong một số hữu hạn các màu sắc khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một điểm  $Y$  mà  $a(Y) > 0$  sao cho tồn tại một điểm trên biên (trên chu vi) của đường tròn  $C(Y)$  có cùng màu với  $Y$ .

**Bài 155.**

Cho  $n$  là một số tự nhiên,  $k$  là một số nguyên nguyên tố với  $n$ ;  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $M$  là tập hợp  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Mỗi phần tử của  $M$  được tô bằng một trong hai màu trắng hoặc xanh.

Ta giả sử :

- a) với mọi  $i$  thuộc  $M$ ,  $i$  và  $n - i$  có cùng màu ;  
 b) với mọi  $i$  thuộc  $M$ ,  $i \neq k$ ,  $i$  và  $|i - k|$  có cùng màu.

Chứng minh rằng tất cả các phần tử của  $M$  đều có cùng màu.

### Bài 156.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một tập hữu hạn các điểm có tọa độ nguyên. Hỏi rằng, có phải ta luôn luôn có thể tô màu đỏ một số điểm của tập hợp này, và số còn lại được tô màu xanh, sao cho với bất kì đường thẳng  $L$  nào song song với một trong hai trục tọa độ thì sự khác nhau (về giá trị tuyệt đối) của số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ trên  $L$  sẽ không lớn hơn 1 ? Hãy chứng minh cho câu trả lời của bạn.

### Bài 157.

Cho trong mặt phẳng các điểm có tọa độ nguyên, sao cho chúng là các đỉnh của những hình vuông đơn vị. Các hình vuông này được tô màu đen, trắng xen nhau như bàn cờ. Với mỗi cặp số nguyên dương  $(m, n)$ , ta xét tam giác vuông có tọa độ 3 đỉnh là tọa độ nguyên, có hai cạnh góc vuông mà độ dài là  $m, n$  tương ứng nằm dọc theo cạnh của những cạnh hình vuông. Gọi  $S_1$  là diện tích của phần được tô đen,  $S_2$  là diện tích của phần được tô trắng của tam giác đó. Đặt  $f(m, n) = |S_1 - S_2|$ .

- a) Với mọi cặp số nguyên dương  $m, n$  cùng chẵn hoặc cùng lẻ, hãy tính  $f(m, n)$ .  
 b) Chứng minh rằng  $f(m, n) \leq \frac{\max(m, n)}{2}$ ,  $\forall m, n$ .  
 c) Chứng minh rằng không có hằng số  $C$  nào để  $f(m, n) < C$ ,  $\forall m, n$ .

**Bài 158.**

Tìm số nguyên dương bé nhất  $n$  ( $n \geq 3$ ) thỏa mãn tính chất sau: với mọi cách tô thành hai màu cho  $n$  điểm khác nhau  $A_1, A_2, \dots, A_n$  trên một đường thẳng thỏa mãn  $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$ , luôn tồn tại ba điểm  $A_i, A_j, A_{2j-i}$  ( $1 \leq i \leq 2j - i \leq n$ ) có cùng một màu.

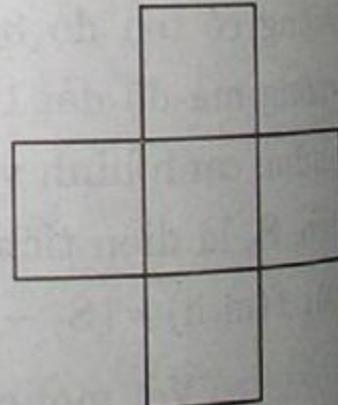
**Bài 159.**

Chia hình chữ nhật kích thước  $m \times n$  ( $m > 1, n > 1$ ) thành  $mn$  ô vuông  $1 \times 1$  bằng những đường thẳng song song với các cạnh. Ta tìm cách huỷ đi hai ô vuông, sau đó lấp đầy các ô còn lại của hình chữ nhật bằng các quân cờ domino  $2 \times 1$ . Hỏi có bao nhiêu cách như thế? (Ta hiểu quân cờ domino  $2 \times 1$  là hình gồm hai ô trắng và đen.)

**Bài 160.**

Cho bảng vuông cỡ  $7 \times 7$  có bốn ô vuông ở bốn góc của bảng bị xoá đi.

a) Hỏi số bé nhất các ô vuông cần tô màu đen là bao nhiêu để cho ta không thể nào thấy được bất cứ một hình chữ thập nào (gồm 5 ô vuông không màu - xem hình) trên bảng vuông đã cho?



b) Chứng minh rằng ta có thể viết các số nguyên lên các ô của bảng theo một cách nào đó để cho tổng các số nguyên trên mỗi hình chữ thập là một số âm, còn tổng tất cả các số nguyên trên toàn bộ bảng là một số dương.

### Bài 161.

Các cạnh và đường chéo của một n-giác đều X được tô bằng k màu sao cho:

- (i) Với mỗi màu a và hai đỉnh bất kì A, B của X thì hoặc là đoạn AB sẽ được tô màu a, hoặc là phải tồn tại một đỉnh C sao cho AC và BC cùng được tô màu a ;
- (ii) Ba cạnh của mọi tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh nằm trong số các đỉnh của X đều được tô bằng nhiều nhất là hai màu.

Chứng minh rằng  $k \leq 2$ .

### Bài 162.

Tô màu các đỉnh của một đa giác đều 12 cạnh bằng hai màu khác nhau. Hãy tìm số tất cả các cách tô màu như thế sao cho không có đa giác đều nào có các đỉnh cùng màu.

### Bài 163.

Cho số nguyên lẻ  $n \geq 3$  và số nguyên  $m$ , với  $m \geq n^2 - n + 1$ . Cho dây các đa giác  $P_1, P_2, \dots, P_m$  được xác định như sau:

- (i)  $P_1$  là đa giác đều  $n$  đỉnh.
- (ii) Với  $k > 1$ ,  $P_k$  là đa giác đều mà các đỉnh của nó là trung điểm các cạnh của đa giác  $P_{k-1}$ .

Hãy xác định (và chứng minh) số màu lớn nhất có thể được dùng để tô tất cả các đỉnh của đa giác này sao cho với mọi cách tô bằng số màu đó, luôn có thể tìm được 4 đỉnh A, B, C, D có cùng màu và chúng tạo thành một hình thang cân (có thể suy biến thành 4 đỉnh cùng nằm trên một đường thẳng), và bốn đỉnh đó không cùng nằm trên một đường thẳng đi qua tâm của  $P_1$ .

**Bài 164.**

Trong cùng một mặt phẳng, cho hai đa giác đều  $n$  cạnh  $S$  và  $T$  bằng nhau, với  $n \geq 3$ , sao cho chúng giao nhau và phần giao ( $S \cap T$ ) là một đa giác  $2n$  đỉnh. Các cạnh của  $S$  được tô màu đỏ, còn các cạnh của  $T$  được tô màu xanh. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh màu xanh của đa giác  $S \cap T$  bằng tổng độ dài các cạnh màu đỏ của nó.

**Bài 165.**

Cho mươi điểm được đánh dấu sẵn trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng. Mỗi cặp điểm được nối bởi một đoạn thẳng. Mỗi đoạn này được tô bởi một trong  $k$  màu, sao cho với bất kì  $k$  điểm nào trong mươi điểm đó cũng sẽ tồn tại  $k$  đoạn mà mỗi đoạn nối hai trong  $k$  điểm ấy và không có hai đoạn nào được tô cùng màu. Xác định tất cả các số nguyên  $k$ ,  $1 \leq k \leq 10$  để điều đó có thể xảy ra.

**Bài 166.**

Trong một hệ thống xe điện ngầm, có  $n$  đường dưới mặt đất (với  $n > 4$ , giả sử mỗi đường là một đường thẳng). Tại mỗi trạm, có nhiều nhất ba con đường gặp nhau. Với hai con đường bất kì, tồn tại một đường thứ ba sao cho từ mỗi đường có thể đi đến được con đường thứ ba này. Chứng minh rằng số trạm xe điện ngầm ít nhất là bằng

$$\frac{5}{6}(n-5).$$

## 4

## MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐỒ THỊ

### Bài 167.

Chứng minh rằng một đồ thị  $n$  đỉnh và  $k$  cạnh thì sẽ có ít nhất  $\frac{k(4k - n^2)}{3n}$  tam giác.

### Bài 168.

Một tập hợp gồm 1990 người được chia thành các tập con rời nhau sao cho:

1. Không người nào trong một tập con quen biết tất cả các người nằm trong tập con đó;
  2. Trong nhóm 3 người bất kì thuộc cùng một tập con, luôn tồn tại ít nhất 2 người không quen biết nhau;
  3. Với bất kì một nhóm 2 người nào trong một tập con mà không quen biết lẫn nhau, tồn tại đúng một người trong cùng tập con đó quen biết cả hai người này.
- (a) Chứng minh rằng trong mỗi tập con, mỗi người đều có cùng một số người quen biết.  
 (b) Tìm số lớn nhất các tập con có thể chia được.

**Chú ý:** Ta giả thiết rằng nếu A quen biết B thì B cũng sẽ quen biết A. Ta cũng hiểu rằng mỗi người thì có *quen biết* với chính họ.

### Bài 169.

Trên một hình chữ nhật có kẻ ô, hãy chứng tỏ rằng

một đường đi xuất phát từ góc phía tây bắc, đi xuyên qua mỗi điểm mắc lưới trên hình chữ nhật kẻ ô đúng một lần, và kết thúc tại góc phía đông nam, thì đường đi đó sẽ chia hình chữ nhật kẻ ô

thành hai nửa bằng nhau mà:

- (a) một nửa thì mở ra ở hướng bắc hoặc đông (tức là tại đó đường đi không khép kín);
- (b) nửa còn lại mở ra ở hướng nam hoặc tây.

(Đồ thị trên chỉ ra một đường dẫn thỏa mãn điều kiện của bài toán cho hình chữ nhật kẻ ô  $5 \times 8$ . Miền được tô đen là miền mở ra ở hướng bắc hoặc đông và miền còn lại thì mở ra ở hướng nam hoặc tây.)

### Bài 170.

Gọi  $G$  là một đồ thị có 9 đỉnh. Giả sử rằng với 5 điểm bất kì của  $G$ , luôn tồn tại ít nhất 2 cạnh mà các đầu mút nằm trong 5 đỉnh đó. Tìm số bé nhất các cạnh của  $G$ .

### Bài 171.

Gọi  $G$  là đồ thị liên thông đơn giản có  $2p$  đỉnh ( $p$  là số nguyên dương), nhưng  $G$  không chứa tam giác nào. Chứng tỏ rằng số các cạnh  $\#E$  của đồ thị này thoả mãn  $\#E \leq p^2$ .

### Bài 172.

Cho một đồ thị, ta tô các đỉnh bằng một trong hai màu. Ta gọi một cách tô màu là *chấp nhận* được nếu như hai

đỉnh kề nhau bất kì thì có màu khác nhau. Chứng minh rằng, một cách tô màu là *chấp nhận được* khi và chỉ khi mọi dãy cạnh kế tiếp khép kín có một số chẵn cạnh.

### Bài 173.

Cho một đồ thị  $G$ , ta gọi

$$\chi_G = \min \{ k : \text{có thể tô } G \text{ bằng } k \text{ màu} \},$$

$$\Delta_G = \max \{\text{bậc của các đỉnh của } G\}.$$

(a) Chứng minh rằng với mọi đồ thị liên thông đơn  $G$ , ta có  $\chi_G \leq \Delta_G + 1$ .

(b) Một đồ thị được gọi là đều nếu mọi đỉnh của nó đều có cùng bậc. Chứng minh nếu  $G$  là một đồ thị liên thông đơn và không đều thì ta có  $\chi_G \leq \Delta_G$ .

### Bài 174.

Tìm số  $n$  bé nhất, với  $n > 4$ , sao cho với  $n$  điểm, có thể tạo một đồ thị thỏa mãn tính chất: không có tam giác nào trong đồ thị này và với mọi cặp hai điểm không được nối với nhau (không tạo thành cạnh), có đúng hai điểm mà mỗi điểm nối được với cả hai điểm đó.

### Bài 175.

Cho  $G$  là một đồ thị liên thông gồm  $k$  cạnh. Chứng minh rằng có thể đánh số các cạnh bằng tất cả các số  $1, 2, 3, \dots, k$  sao cho tại mỗi đỉnh thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị, ta đều có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh này bằng 1.

### Bài 176.

Ta gọi một *hội-S* là một tập hợp  $S$  người sao cho mỗi

cặp hai người nào trong họ cũng có quen nhau.

Trong một buổi tiệc, cứ hai hội-3 thì có chung một người, và không có hội-5 nào trong buổi tiệc này. Chứng minh rằng trong buổi tiệc đó có hai người (hoặc ít hơn) mà khi họ rời đi thì sẽ không còn lại một hội-3 nào cả.

### Bài 177.

Hãy xác định số nguyên bé nhất  $k$  để tồn tại một đồ thị 25 đỉnh thoả mãn điều kiện: mỗi đỉnh kề với đúng  $k$  đỉnh khác, và với bất kì hai đỉnh nào không kề nhau, tồn tại một đỉnh thứ ba kề với cả hai đỉnh đó.

#### Chú ý:

Ta gọi *đồ thị* (graph)  $G$  là một tập hợp các điểm, được gọi là *đỉnh*, cùng với tập hợp các cạnh nối một số cặp đỉnh phân biệt với nhau.

Bậc của một đỉnh  $A$  là số cạnh nối vào  $A$  trong đồ thị.

*Hai đỉnh được gọi là kề nhau nếu có một cạnh nối chúng với nhau.*

Mỗi cặp đỉnh thuộc không quá một cạnh. Đồ thị  $G$  được gọi là *liên thông* (connected graph) nếu với mỗi cặp đỉnh phân biệt  $x, y$  đều tồn tại một dây các đỉnh

$$x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$$

sao cho mỗi cặp  $v_i, v_{i+1}$  ( $0 \leq i < m$ ) đều được nối bởi một cạnh của đồ thị  $G$ .

## 5

# MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

### Bài 178.

Có 1999 tách uống trà đặt trên một bàn, lúc đầu, tất cả đều được đặt ngửa lên. Mỗi một nước đi, ta làm cho 100 tách trong chúng lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể nào làm cho tất cả đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời hai câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

### Bài 179.

Trong một cuộc thi đấu thể thao, mỗi đấu thủ thi đấu với mọi đấu thủ khác. Mỗi lượt chơi, kết quả sẽ là thắng hoặc bại. Giải thưởng sẽ được trao cho đấu thủ X nào đạt được tiêu chuẩn sau: với mỗi đấu thủ Z nào thắng X, phải có một đấu thủ Y sao cho X thắng Y và Y thắng Z. Chỉ có một giải thưởng được trao mà thôi. Chứng minh rằng người đoạt giải phải thắng tất cả các trận.

### Bài 180.

Một bàn billiards hình chữ nhật ABCD có  $AB = 150$  cm và  $BC = 205$  cm. Có bốn lỗ nằm ở bốn góc. Một quả bi nằm ở góc A được đánh mạnh cho di chuyển theo hướng hợp với cạnh bàn một góc  $45^\circ$  và di chuyển rời xa lỗ A. Mỗi khi chạm vào cạnh bàn, bi lập tức dội lại. Quả bi sẽ chuyển động ra sao (rơi vào lỗ nào)?

### Bài 181.

Trong sảnh đường của tòa nhà Quốc hội, có 10 hàng ghế và mỗi hàng 10 chỗ. Có tất cả 100 nghị sĩ đến dự và họ có các mức lương khác nhau từng đôi một. Mỗi người trong 100 nghị sĩ đó hỏi những người lân cận của mình xem thứ mức lương của họ ra sao (người đó hỏi người kế bên trái, phải, trước mặt, sau lưng - nếu vị trí ngồi của người đó thích hợp, tức là, người đó hỏi nhiều nhất là 4 người lân cận). Họ ghen tị với người khác, bởi vì một nghị sĩ chỉ hài lòng với mức lương của mình nếu như có không quá một người trong số các người ngồi lân cận kể trên có mức lương hơn anh ta. Hỏi số lớn nhất các nghị sĩ thỏa mãn với mức lương của mình là bao nhiêu?

### Bài 182.

Hai học sinh A và B chơi một trò chơi như sau: mỗi người viết một số nguyên lên giấy rồi đưa cho trọng tài. Lúc đó, trọng tài sẽ viết 2 số nguyên lên bảng, trong đó có một số là tổng của 2 số nguyên mà A và B đã đưa. Rồi trọng tài hỏi A: "Anh có thể nói số nguyên bạn kia viết được không?". Nếu A trả lời *không* thì trọng tài sẽ hỏi lại câu đó với B. Nếu B trả lời *không* thì trọng tài sẽ hỏi lại câu đó với A, ... , và tiếp tục như thế. Giả sử rằng cả A lẫn B đều là các học sinh thông minh và thành thực.

Chứng minh rằng sau một số hữu hạn câu hỏi như thế thì phải có một học sinh trả lời rằng *có biết*.

### Bài 183.

Trên một bảng vuông  $5 \times 5$  ô, hai người chơi trò chơi thay nhau đánh số lên các ô trống. Người thứ nhất luôn đánh

số 1, còn người thứ hai luôn đánh số 0. Mỗi lượt, mỗi người đánh một số, cho đến khi không còn ô để đánh nữa. Sau đó, họ tính tổng các số trên các hình vuông  $3 \times 3$  (trong bảng vuông  $5 \times 5$  ô đó). Gọi A là số lớn nhất trong các tổng này. Hỏi người thứ nhất có thể làm cho A lớn đến bao nhiêu, bất chấp người thứ hai đánh như thế nào?

### Bài 184.

Có  $n + 1$  vị trí cố định được xếp thành một hàng, được đánh số từ 0 đến  $n$ , thứ tự tăng dần từ phải sang trái. Ta lấy các tấm thẻ có ghi số từ 0 đến  $n$  lên đó, xáo trộn rồi chia thẻ một cách ngẫu nhiên lên  $n + 1$  vị trí nói trên, mỗi thẻ một vị trí. Mục đích của trò chơi là làm sao để tấm thẻ mang số  $i$  nằm ở vị trí thứ  $i$ , với  $0 \leq i \leq n$ . Nếu như điều này không xảy ra, ta thực hiện một nước đi như sau. Trước hết, xác định số  $k$  nhỏ nhất mà tấm thẻ mang số  $h$  được đặt lên đó, với  $h > k$ . Sau đó, ta lấy tấm thẻ  $h$  này đi, chuyển tất cả các tấm thẻ từ vị trí thứ  $(k+1)$  cho đến tấm thẻ ở vị trí  $h$  dịch sang bên phải một đơn vị. Khi đó, vị trí  $h$  sẽ trống, và ta lấy tấm thẻ  $h$  đặt vào vị trí  $h$ . Các nước đi này tiếp tục cho đến khi nào đạt được mục đích như đã nói trên thì trò chơi kết thúc.

a) Chứng minh rằng trò chơi kết thúc sau không quá  $2^n - 1$  nước đi.

b) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một cấu hình ban đầu (tức cách chia thẻ lên các vị trí) để cho trò chơi kết thúc sau đúng  $2^n - 1$  nước đi.

### Bài 185.

Có 18 người tham gia một cuộc thi đấu gồm 17 vòng

đáu. Mỗi vòng có 9 trận thi đấu và trong mỗi vòng, mỗi đấu thủ tham gia một trận. Mỗi người đều thi đấu với người khác đúng một trận trong suốt cuộc thi đấu. Tìm số  $n$  lớn nhất sao cho nếu có xếp lại cuộc thi đấu (theo nguyên tắc trên) ta vẫn có thể tìm được 4 người trong số 18 người tham gia, mà họ chỉ chơi đúng một trận vào lúc kết thúc vòng đấu thứ  $n$ .

### Bài 186.

Có 1994 cô gái ngồi quanh một bàn tròn, họ chơi chung một cỗ bài gồm  $n$  lá. Ban đầu, một cô giữ tất cả các lá bài. Cứ mỗi nước đi, nếu có ít nhất một cô gái giữ tối thiểu 2 lá bài, thì một trong các cô gái này phải chuyển 1 lá cho một trong hai người bên cạnh cô ấy. Trò chơi kết thúc khi và chỉ khi mỗi cô gái chỉ giữ nhiều nhất 1 lá bài.

a) Chứng minh rằng nếu  $n \geq 1994$  thì trò chơi không thể nào kết thúc được.

b) Chứng minh rằng nếu  $n < 1994$  thì trò chơi bắt buộc phải kết thúc.

### Bài 187.

Một bàn cờ đam các ô trắng đen xen kẽ, gồm  $2k \times 2k$  ô. Hỏi sau khi di chuyển các ô trắng đen của bàn cờ đam này, có thể dùng các quân cờ domino  $2 \times 1$  ô để lấp đầy nó được không?

### Bài 188.

Trong thành phố A, có  $n$  cô gái và  $n$  chàng trai, và mỗi cô gái đều quen biết các chàng trai.

Trong thành phố B, có  $n$  cô gái  $g_1, g_2, \dots, g_n$  và  $2n - 1$  chàng trai  $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$ . Cô gái  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , chỉ quen

biết các chàng trai  $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$  và không quen biết các chàng trai khác.

Với mọi  $r = 1, 2, \dots, n$ , ta kí hiệu  $A(r), B(r)$  lần lượt là số các cách thức khác nhau để  $r$  cô gái từ thành phố A và thành phố B, có thể khiêu vũ với  $r$  chàng trai từ thành phố của chính họ, tạo thành  $r$  cặp, mỗi cô gái với một chàng trai mà cô ấy quen biết.

Chứng minh rằng  $A(r) = B(r)$  với mỗi  $r = 1, 2, \dots, n$ .

### Bài 189.

Các tấm thẻ có ghi số từ 1 đến 9 được sắp xếp ngẫu nhiên thành hàng. Trong mỗi nước cờ, ta có thể chọn một khôi tùy ý các tấm thẻ liên tiếp sao cho số ghi trên chúng là theo thứ tự tăng dần hay giảm dần rồi xáo lộn vòng chúng. Chẳng hạn, 916532748 có thể xáo đổi thành 913562748. Chứng minh rằng trong không quá 12 nước cờ, ta có thể sắp xếp 9 tấm thẻ này sao cho số của chúng được sắp theo thứ tự tăng dần hay giảm dần.

### Bài 190.

Một đống sỏi được đặt trong một cột thẳng đứng. Sự bài trí này được bổ sung theo các quy tắc sau. Một hòn sỏi có thể được dịch chuyển nếu nó ở ngay trên đỉnh của một cột mà cột này chứa sỏi nhiều hơn cột ở ngay bên phải nó ít nhất hai hòn sỏi. (Nếu không có hòn sỏi nào ở phía bên phải thì ta coi như đó là một cột có 0 hòn sỏi.) Tại mỗi nước đi, ta chọn một hòn sỏi từ trong các hòn sỏi có thể dịch chuyển (nếu có nhiều hòn sỏi như thế) và đặt nó ngay đỉnh của cột ở sát bên phải. Nếu không còn có hòn sỏi nào có thể dịch chuyển được thì bài trí lúc ấy được gọi là *bài trí cuối cùng*. Với mỗi  $n$ , hãy

chứng minh rằng, ở mỗi nước đi, dù chọn lựa cách nào đi nữa, thì bài trí cuối cùng có được là duy nhất. Hãy biểu diễn sự bài trí này theo  $n$ .

### Bài 191.

Có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm. Bài thi gồm 5 câu, mỗi câu có 4 cách trả lời khác nhau và mỗi học sinh phải chọn một trong 4 cách đó. Tìm số tự nhiên  $n$  bé nhất sao cho có một kiểu làm bài nào đó của các học sinh thoả mãn: với  $n$  học sinh bất kì chọn ra, ta có thể tìm được trong nhóm  $n$  học sinh này 4 người mà bất cứ hai người nào trong số 4 người đó cũng phải có ít nhất hai câu trả lời khác nhau.

### Bài 192.

Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tùy ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.

### Bài 193.

Có 99 trạm không gian mà mỗi cặp trạm này được nối với nhau bằng một đường liên lạc. Có 99 đường liên lạc hai chiều, các đường liên lạc còn lại chỉ một chiều thôi. Ta nói rằng một nhóm gồm 4 trạm không gian *liên thông* với nhau nếu ta có thể liên lạc với bất cứ trạm nào trong nhóm từ một trong 3 trạm còn lại của nhóm bằng cách chỉ cần sử dụng 6 đường liên lạc trong nhóm này mà không cần phải sử dụng các đường khác. Hãy xác định số lớn nhất các nhóm liên thông nhau.

chứng minh rằng, ở mỗi nước đi, dù chọn lựa cách nào đi nữa, thì bài trí cuối cùng có được là duy nhất. Hãy biểu diễn sự bài trí này theo  $n$ .

### Bài 191.

Có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm. Bài thi gồm 5 câu, mỗi câu có 4 cách trả lời khác nhau và mỗi học sinh phải chọn một trong 4 cách đó. Tìm số tự nhiên  $n$  bé nhất sao cho có một kiểu làm bài nào đó của các học sinh thoả mãn: với  $n$  học sinh bất kì chọn ra, ta có thể tìm được trong nhóm  $n$  học sinh này 4 người mà bất cứ hai người nào trong số 4 người đó cũng phải có ít nhất hai câu trả lời khác nhau.

### Bài 192.

Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tuỳ ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.

### Bài 193.

Có 99 trạm không gian mà mỗi cặp trạm này được nối với nhau bằng một *dường liên lạc*. Có 99 đường liên lạc hai chiều, các đường liên lạc còn lại chỉ một chiều thôi. Ta nói rằng một nhóm gồm 4 trạm không gian *liên thông* với nhau nếu ta có thể liên lạc với bất cứ trạm nào trong nhóm từ một trong 3 trạm còn lại của nhóm bằng cách chỉ cần sử dụng 6 đường liên lạc trong nhóm này mà không cần phải sử dụng các đường khác. Hãy xác định số lớn nhất các nhóm liên thông nhau.

### Bài 194.

Một cuộc thi đấu cặp được tổ chức như sau. Mỗi đấu thủ có thể đấu cho một hoặc hai cặp. Hai cặp bất kì sẽ đấu với nhau nhiều nhất là một trận, nhưng hễ hai cặp nào có cầu thủ chung thì sẽ không đấu với nhau. Xét tập hợp  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  gồm các số nguyên dương phân biệt, hãy tìm số bé nhất các đấu thủ để trong cuộc thi đấu này người ta có thể sắp xếp các cầu thủ sao cho

- (1) số trận đấu mà mỗi đấu thủ tham gia là một trong các số  $a_i$ , và
- (2) với mọi  $a_i$  cho trước, có thể tìm được ít nhất một đấu thủ đã tham gia đúng  $a_i$  trận đấu.

### Bài 195.

Trong một cuộc thi đấu thể thao, tổng số huy chương là  $m$ , được phát trong  $n$  ngày thi đấu. Trong ngày thứ nhất, người ta phát 1 huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Ngày thứ hai, người ta phát 2 huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Những ngày còn lại được tiếp tục và tương tự như thế. Ngày sau cùng, còn lại  $n$  huy chương để phát. Hỏi có tất cả bao nhiêu huy chương được thưởng và đã phát trong bao nhiêu ngày?

### Bài 196.

Ba người cùng tham gia một trò chơi như sau. Có 3 tấm thẻ, trên mỗi thẻ có ghi một số nguyên dương (3 số khác nhau). Cứ mỗi một lượt chia, mỗi đấu thủ nhận ngẫu nhiên một tấm thẻ và ghi nhận con số trên tấm thẻ đó. Sau hai hay nhiều hơn các lượt chia, một người nhận được 20 điểm (tổng

số), người thứ hai 10 điểm và người thứ ba 9 điểm. Biết rằng khi đến lượt chia cuối cùng, người nhận được 10 điểm nói trên đã nhận được tấm thẻ có số điểm lớn nhất. Hỏi, ở lượt chia đầu tiên, ai nhận được số điểm ở giữa hai người khác?

### Bài 197.

Cho trước một số nguyên  $n_0 > 1$  khởi đầu. Hai người A và B chơi một trò chơi, họ luân phiên chọn các số nguyên  $n_1, n_2, n_3, \dots$  theo quy luật như sau: Trước tiên, A chọn  $n_1$  thỏa mãn điều kiện  $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ . Sau đó, B chọn  $n_2$  sao cho

$$\frac{n_1}{n_2} = p^r,$$

với  $p$  nguyên tố và  $r$  là số nguyên  $\geq 1$ .

Tổng quát, ta có trình tự tiếp theo:

Nếu biết  $n_{2k}$  là số nguyên vừa được B chọn thì A chọn số nguyên tùy ý  $n_{2k+1}$  nào đó thỏa mãn điều kiện

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2.$$

Nếu biết A chọn  $n_{2k+1}$  thì B sẽ chọn số nguyên tùy ý  $n_{2k+2}$  nào đó sao cho

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r,$$

với  $p$  nguyên tố và  $r$  là số nguyên  $\geq 1$ .

A thắng cuộc nếu A có thể chọn được số 1990, B thắng cuộc nếu B có thể chọn được số 1.

Hỏi với các giá trị nào của  $n_0$  thì:

- a) A có thể bảo đảm sự thắng lợi của mình?
- b) B có thể bảo đảm sự thắng lợi của mình?

c) Không ai có thể thắng cuộc?

### Bài 198.

Ivan và Peter thay nhau viết các chữ số 0 hoặc 1 cho đến khi mỗi người viết được 2001 chữ số. Peter sẽ là người thắng cuộc nếu như anh ta viết được một số trong biểu diễn nhị phân sao cho số đó không thể viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng Peter có chiến lược để bảo đảm thắng cuộc.

### Bài 199.

Cho  $n$  điểm liên tiếp nằm trên một đường tròn, kí hiệu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 3$ ). Đầu tiên, ta viết số 1 tại vị trí điểm  $A_1$  và viết số 0 tại tất cả các điểm còn lại. Ta tiến hành một động tác như sau (tạm gọi là một *nước đi* tác động ở vị trí  $A_i$ ): chọn một điểm  $A_i$  mà tại đó có viết số 1, sau đó, thay các số  $a, b, c$  đã viết tại các điểm  $A_{i-1}, A_i, A_{i+1}$  bởi các số tương ứng  $1 - a, 1 - b$  và  $1 - c$ . (Ở đây, ta hiểu  $A_0$  chính là điểm  $A_n$  và  $A_{n+1}$  chính là điểm  $A_1$ .)

a) Nếu  $n = 1999$ , có thể nào sau một số hữu hạn các nước đi ta nhận được số 0 tại tất cả các điểm hay không?

b) Tìm tất cả các giá trị của  $n$  sao cho không thể nhận được số 0 tại tất cả các điểm sau một số hữu hạn các nước đi.

### Bài 200.

Trên một bàn cờ có vô hạn ô người ta quy ước một trò chơi như sau: Đầu tiên,  $n^2$  mảnh được sắp xếp thành một khối  $n \times n$  các hình vuông kề nhau, mỗi mảnh đặt trên một hình vuông. Một lần di chuyển (*một nước đi*) tức là một lần