



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ  
ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ  
«Суперкомпьютерное моделирование  
и технологии»**

ВАРИАНТ 6

**Выполнила:**  
Мирова Елизавета Сергеевна  
группа 616, кафедра МС

Москва, 2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Математическая постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Численный метод решения задачи</b>	<b>4</b>
2.1	Метод фиктивных областей . . . . .	4
2.2	Разностная схема решения задачи . . . . .	5
2.3	Метод решения системы линейных алгебраических уравнений . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Описание проделанной работы</b>	<b>8</b>
3.1	Математические выкладки . . . . .	8
3.1.1	Решение основной задачи . . . . .	8
3.1.2	Алгоритм двумерного разбиения прямоугольника . . . . .	9
3.2	Программы . . . . .	10
3.2.1	Последовательная программа . . . . .	10
3.2.2	OpenMP-программа . . . . .	10
3.2.3	MPI-программа . . . . .	10
3.2.4	MPI+CUDA-программа . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>О результатах</b>	<b>14</b>
5.1	Команды компиляции программ . . . . .	14
5.2	Анализ результатов . . . . .	14

# 1 Математическая постановка задачи

В области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченной кусочно-гладким контуром  $\gamma$ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Функция  $f(x, y)$  считается известной. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условиями Дирихле:

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2)$$

Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D$  и краевому условию (2) на ее границе, если область  $D$  задана следующим образом:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2, \quad y < 1\},$$

а функция  $f(x, y)$  равна единице в каждой точке области  $D$ .

## 2 Численный метод решения задачи

### 2.1 Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи (1),(2) предлагается воспользоваться методом фиктивных областей. Пусть область  $D$  принадлежит прямоугольнику  $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$ . Обозначим через  $\bar{D}, \bar{\Pi}$  замыкание области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$  соответственно, через  $\Gamma$  – границу прямоугольника. Разность множеств  $\hat{D} = \Pi \setminus D$  называется фиктивной областью.

Выберем и зафиксируем малое  $\varepsilon > 0$ . В прямоугольнике  $\Pi$  рассматривается задача Дирихле

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F(x, y), \quad (x, y) \in \Pi \setminus \gamma, \quad (3)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 1/\varepsilon, & (x, y) \in \hat{D}, \end{cases} \quad (4)$$

и правой частью

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (5)$$

Требуется найти непрерывную в  $\bar{\Pi}$  функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению (3) всюду в  $\Pi \setminus \gamma$ , равную нулю на границе  $\Gamma$  прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$\mathbf{W}(x, y) = -k(x, y) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$ . Последнее означает, что в каждой точке  $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$  должно выполняться равенство

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in D}} \langle \mathbf{W}(x, y), \mathbf{n}(x_0, y_0) \rangle = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in \hat{D}}} \langle \mathbf{W}(x, y), \mathbf{n}(x_0, y_0) \rangle, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}(x, y)$  – вектор единичной нормали к границе  $\gamma$  в точке  $(x, y)$ , определенный всюду или почти всюду на кривой.

Известно, что функция  $v(x, y)$  равномерно приближает решение  $u(x, y)$  задачи (1),(2) в области  $D$ , а именно,

$$\max_{(x,y) \in D} |v(x, y) - u(x, y)| < C\varepsilon, \quad C > 0. \quad (7)$$

В частности,  $|v(x, y)| < C\varepsilon$  во всех точках кривой  $\gamma$ . Этот результат позволяет получить исковую функцию  $u(x, y)$  с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , решая задачу (3),(6) вместо задачи (1),(2). Тем самым, задача Дирихле в криволинейной области приближенно заменяется задачей Дирихле в прямоугольнике с кусочно-постоянным коэффициентом  $k(x, y)$ .

## 2.2 Разностная схема решения задачи

Краевую задачу (3),(6) предлагается решать численно методом конечных разностей. В замыкании прямоугольника  $\Pi$  определяется равномерная прямоугольная сетка  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь  $h_1 = (B_1 - A_1)/M$ ,  $h_2 = (B_2 - A_2)/N$ . Через  $\omega_h$  обозначим множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ , т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе  $\Gamma$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\omega_h$ . Обозначим через  $w_{ij}$  значение сеточной функции  $w \in H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \omega_h$ . Будем считать, что в пространстве  $H$  задано скалярное произведение и евклидова норма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{(u, u)}. \quad (8)$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (9)$$

где  $A : H \rightarrow H$  – оператор, действующий в пространстве сеточных функций,  $B \in H$  – известная правая часть. Задача (9) называется разностной схемой. Ее решение приближает точное решение в узлах сетки  $\bar{\omega}_h$  и является численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приближенно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1} \left( a_{i+1j} \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij} \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left( b_{ij+1} \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij} \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right) = F_{ij}, \quad (10)$$

$i = \overline{1, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ , в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt, \quad b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j-1/2}) dt \quad (11)$$

при всех  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Здесь полуцелые узлы

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, \quad y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2.$$

Правая часть разностного уравнения

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad \Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\} \quad (12)$$

при всех  $i = \overline{1, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ .

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным  $x, y$  соответственно:

$$w_{\bar{x},ij} = \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}, \quad w_{x,ij} = \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1}, \quad w_{\bar{y},ij} = \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}, \quad w_{y,ij} = \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2}.$$

С учетом принятых обозначений разностное уравнение (10) можно представить в более компактном и удобном виде:

$$-(aw_{\bar{x}})_{x,ij} - (bw_{\bar{y}})_{y,ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (13)$$

Краевые условия Дирихле задачи (3),(6) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (14)$$

Переменные  $w_{ij}$ , заданные равенством (14), исключаются из системы уравнений (13). В результате остаются неизвестными значения  $w_{ij}$  при  $i = \overline{1, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$  и их количество совпадает с числом уравнений. Система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде (9) с самосопряженным и положительно определенным оператором  $Aw = -(aw_{\bar{x}})_x - (bw_{\bar{y}})_y$  и правой частью  $F$ , определенной равенством (12). Таким образом, построенная разностная схема (13),(14) линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы (11) от кусочно-постоянной функции  $k(x, y)$  следует вычислять аналитически. Нетрудно видеть, что если отрезок, соединяющий точки  $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$  и  $P_{ij+1} = (x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$ , целиком расположен в области  $D$ , то  $a_{ij} = 1$ . Если же указанный отрезок находится в фиктивной области  $\hat{D}$ , то  $a_{ij} = 1/\varepsilon$ . В противном случае  $a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon$ , где  $l_{ij}$  – длина той части отрезка  $[P_{ij}, P_{ij+1}]$ , которая принадлежит области  $D$ . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты  $b_{ij}$ .

Очевидно, правая часть схемы  $F_{ij}$  равна нулю при всех  $(i, j) : \Pi_{ij} \subset \hat{D}$ . Если  $\Pi_{ij} \subset D$ , то правую часть предлагается приближенно заменить значением  $f(x_i, y_j)$ . В противном случае, когда прямоугольник  $\Pi_{ij}$  содержит точки оригинальной области  $D$  и фиктивной области  $\hat{D}$ , величина  $F_{ij}$  может быть вычислена приближенно как произведение  $(h_1 h_2)^{-1} S_{ij} f(x_i^*, y_j^*)$ , где  $(x_i^*, y_j^*)$  – любая точка пересечения  $\Pi_{ij} \cap D$ ,  $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$  – площадь пересечения множеств, при вычислении которой криволинейную часть границы можно заменить отрезком прямой.

## 2.3 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение разностной схемы (10),(14) может быть получено итерационным методом сопряженных градиентов [4],[5]. Для ускорения сходимости метода применяется диагональное предобуславливание. Пусть оператор  $D : H \rightarrow H$  действует на сеточные функции  $w \in H$  по правилу

$$(Dw)_{ij} = \left[ \frac{a_{i+1,j} + a_{i,j}}{h_1^2} + \frac{b_{i,j+1} + b_{i,j}}{h_2^2} \right] w_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Начальное приближение  $w^{(0)}$  к решению разностной схемы можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки. Первая итерация совершается по формулам метода скорейшего спуска. Пусть  $r^{(0)} = B - Aw^{(0)}$  – невязка начального приближения, функция  $z^{(0)} \in H$  удовлетворяет уравнению  $Dz^{(0)} = r^{(0)}$ . Тогда направление спуска  $p^{(1)} = z^{(0)}$ , шаг вдоль направления спуска определяется параметром

$$\alpha_1 = \frac{(z^{(0)}, r^{(0)})}{(Ap^{(1)}, p^{(1)})}.$$

Следующее приближение  $w^{(1)}$  вычисляется согласно равенству

$$w^{(1)} = w^{(0)} + \alpha_1 p^{(1)}. \quad (15)$$

Дальнейшие вычисления проводятся по следующим формулам. Пусть выполнено  $k$  итераций метода и функции  $r^{(k-1)}, z^{(k-1)}, p^{(k)}, w^{(k)} \in H$ , а также коэффициент  $\alpha_k$  являются известными. Тогда невязка последней итерации  $r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k A p^{(k)}$ , сеточная функция  $z^{(k)} \in H$  вычисляется из уравнения  $Dz^{(k)} = r^{(k)}$ . Следующее направление спуска:

$$p^{(k+1)} = z^{(k)} + \beta_{k+1} p^{(k)},$$

где коэффициент

$$\beta_{k+1} = \frac{(z^{(k)}, r^{(k)})}{(z^{(k-1)}, r^{(k-1)})}.$$

Шаг спуска определяется параметром

$$\alpha_{k+1} = \frac{(z^{(k)}, r^{(k)})}{(Ap^{(k+1)}, p^{(k+1)})}.$$

Следующее приближение к точному решению  $w^{(k+1)}$  вычисляется согласно равенству:

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + \alpha_{k+1} p^{(k+1)}. \quad (16)$$

Метод сопряженных градиентов гарантирует, что при некотором  $k$ , не превосходящем количества неизвестных  $(M-1) \times (N-1)$ , приближение  $w^{(k)}$  станет равным точному решению разностной схемы. На практике это равенство нарушается из-за ошибок округлений, возникающих в процессе вычислений, и в качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \delta, \quad (17)$$

где  $\delta$  – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Оценку точности приближенного решения можно проводить в других нормах пространства сеточных функций, например, в максимум норме

$$\|w\|_C = \max_{x \in \omega_h} |w(x)|. \quad (18)$$

Константу  $\delta$  для данной задачи предлагается выбрать так, чтобы итерационный процесс укладывался в отведенное для него время.

*Замечание.* Метод сопряженных градиентов является методом вариационного типа, в основе которого находится задача минимизации квадратичного функционала  $J(w) = 0.5(Aw, w) - (B, w)$ , эквивалентная системе уравнений (9). О качестве работы метода можно судить по поведению функционала  $J(w)$ , который должен монотонно убывать на итерационной последовательности  $w^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Поскольку невязка  $r^{(k)} = B - Aw^{(k)}$  на каждой итерации, то

$$J(w^{(k)}) = -0.5(B + r^{(k)}, w^{(k)}) = -0.5H(w^{(k)}), \quad H(w^{(k)}) = (B + r^{(k)}, w^{(k)}).$$

Ошибки округления, возникающие во время работы метода сопряженных градиентов, могут нарушить сходимость метода. Поэтому целесообразно отслеживать монотонность скалярного произведения  $H(w^{(k)})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если монотонный рост нарушен, то следует остановить итерационный процесс и перезапустить его, взяв в качестве начального приближения функцию  $w^{(k)}$  с той итерации, на которой монотонность соблюдалась. Необходимо также иметь в виду, что количество итераций в методе сопряженных градиентов не должно превосходить числа неизвестных задачи.

### 3 Описание проделанной работы

#### 3.1 Математические выкладки

##### 3.1.1 Решение основной задачи

Численный метод решения задачи представлен в общем виде, и для выполнения задания необходимо вывести формулы для частного случая, когда

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2, y < 1\}, \quad f(x, y) = 1, \quad (x, y) \in D.$$

Для начала определим прямоугольник  $\Pi$ , внутри которого рассматривается данная задача Дирихле:

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 2, -2 < y < 1\}.$$

Определим равномерную прямоугольную сетку

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = -2 + ih_1, \quad i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = -2 + jh_2, \quad j = \overline{0, N}\}, \quad h_1 = \frac{4}{M}, \quad h_2 = \frac{3}{N}$$

и возьмем  $\varepsilon = \max(h_1, h_2)^2$ .

Коэффициенты  $a_{ij}$  из разностного уравнения (10) требуют вычисления длины частей отрезка  $[P_{ij}, P_{ij+1}]$ , где  $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ ,  $P_{ij+1} = (x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ . Найдем значения на границе при  $x = x_{i-1/2}$ :

$$y_i^{max} = \min(2 - |x_{i-1/2}|, 1), \quad y_i^{min} = |x_{i-1/2}| - 2.$$

Длина отрезка в области  $D$

$$l_{ij}^a = \min(y_i^{max}, y_{j+1/2}) - \max(y_i^{min}, y_{j-1/2}).$$

Формула верна в случае, когда отрезок имеет с областью  $D$  непустое пересечение. Чтобы она была корректна и при пустом пересечении, внесем в нее небольшое изменение:

$$l_{ij}^a = \max(\min(y_i^{max}, y_{j+1/2}) - \max(y_i^{min}, y_{j-1/2}), 0), \quad i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}. \quad (19)$$

Аналогично получаем  $l_{ij}^b$ :

$$l_{ij}^b = \max(\min(x_j^{max}, x_{i+1/2}) - \max(x_j^{min}, x_{i-1/2}), 0), \quad i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}, \quad (20)$$

где

$$x_j^{max} = 2 - |y_{j-1/2}|, \quad x_j^{min} = |y_{j-1/2}| - 2.$$

Осталось найти коэффициент  $F_{ij}$ , который при данной  $f(x, y)$  выражается в

$$F_{ij} = mes(\Pi_{ij} \cap D) \cdot \frac{1}{h_1 h_2}, \quad \Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\}.$$

Для вычисления площади достаточно воспользоваться самым простым методом - методом средних прямоугольников. Подсчет высоты пересечения аналогичен формуле (19).

Как показала практика, для получения высокой точности ( $\|r\|_C \leq 1e-14$  на сетках размером до  $800 \times 1200$  достаточно взять  $\delta$  из (17), равной  $1e-20$  и при подсчете площади пересечения делить ось  $x$  всего на 10 отрезков.

### 3.1.2 Алгоритм двумерного разбиения прямоугольника

Дана прямоугольная расчетная область  $\Pi$ , на которой задана равномерная прямоугольная сетка:  $M$  узлов по оси  $x$  с индексами  $i = 0, 1, \dots, M - 1$  и  $N$  узлов по оси  $y$  с индексами  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Требуется разбить сетку на  $P$  прямоугольных доменов (подобластей), так чтобы выполнялись следующие условия:

1. Отношение количества узлов по переменным  $x$  и  $y$  в каждом домене принадлежит диапазону  $[\frac{1}{2}, 2]$ , или формально:

$$\frac{M_p}{N_p} \in [\frac{1}{2}, 2], \quad \forall p = 0, 1, \dots, P - 1,$$

$M_p, N_p$  - число узлов в  $p$ -м домене по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

2. Количество узлов по переменным  $x$  и  $y$  любых двух доменов отличается не более, чем на единицу, то есть:

$$|M_{p_1} - M_{p_2}| \leq 1, \quad |N_{p_1} - N_{p_2}| \leq 1, \quad \forall p_1, p_2 \in \{0, 1, \dots, P - 1\}.$$

#### Идеальная непрерывная оценка

Пусть  $M_p, N_p$  вещественные для всех  $p$ . Введем  $P_x, P_y \in \mathbb{R}_+$  - число доменов по осям  $x$  и  $y$  соответственно:  $P_x \cdot P_y = P$ . Для выполнения второго условия поделим оси на равные части (что всегда возможно в непрерывном случае), то есть для домена с индексом  $p$ :

$$M_p = \frac{M}{P_x}, \quad N_p = \frac{N}{P_y}.$$

Тогда первое условие разбиения выглядит следующим образом:

$$R = \frac{M_p}{N_p} = \frac{M/P_x}{N/P_y} = \frac{M}{N} \cdot \frac{P}{P_x^2}.$$

Получаем допустимый диапазон для  $P_x$ :

$$\frac{1}{2} \leq R \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{2} \cdot \frac{M}{N}} \leq P_x \leq \sqrt{2P \cdot \frac{M}{N}}.$$

Будем разбивать сетку на квадратные домены, так как такое разбиение эффективнее с точки зрения параллельных вычислений:

$$R = 1 \Leftrightarrow P_x^* = \sqrt{P \cdot \frac{M}{N}}.$$

#### Алгоритм решения в целых числах

Учитывая идеальную оценку, получаем следующий алгоритм:

1. Находим  $P_x$  - делитель числа  $P$ , ближайший к  $P_x^* = \sqrt{P \cdot \frac{M}{N}}$  и принадлежащий допустимому диапазону; полагаем  $P_y = \frac{P}{P_x}$ .
2. Разбиваем расчетную область на почти равномерную прямоугольную сетку с количеством доменов  $P_x$  и  $P_y$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно. Формулы для оси  $x$  (для  $y$  аналогично):

$$M_p = q_x + [p < r_x], \quad q_x = \left\lfloor \frac{M}{P_x} \right\rfloor, \quad r_x = M \bmod P_x, \quad p = 0, 1, \dots, P_x - 1.$$

Стоит отметить, что алгоритм не работает для произвольных  $M, N, P$ , так как подходящего разбиения может и не существовать. Однако он гарантированно работает для чисел из задания.

## 3.2 Программы

### 3.2.1 Последовательная программа

Программа была написана в несколько этапов:

1. Получение математических выкладок из пункта 3.1.1.
2. Написание и отладка подсчета коэффициентов разностного уравнения (10).  
Ручная проверка на сетке  $8 \times 6$ , имеющей удобный для этого шаг в 0.5.
3. Написание итерационного метода сопряженных градиентов, проверка его сходимости и подбор оптимальных параметров на сгущающихся сетках
$$(M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40).$$
4. Реструктуризация: логика работы программы была поделена между несколькими классами, в результате чего код стал более комфортным для чтения и отладки.

### 3.2.2 OpenMP-программа

Для написания OpenMP-программы по последовательной, были выполнены шаги:

1. Выявление распараллелиемых частей кода.
2. Добавление нужных директив во все распараллелиемые функции.
3. Сравнение времени работы на сетке  $(40, 40)$  с 1, 4 и 16 OpenMP-нитями для проверки корректности параллельной версии.

### 3.2.3 MPI-программа

Для написания MPI-программы были проделаны следующие шаги:

1. Разработка алгоритма двумерного разбиения расчетной области на прямоугольные домены (пункт 3.1.2).
2. Написание и отладка кода: добавление новых классов и функций, связанных с разбиением на домены, и модификация существующих.
3. Проверка качества работы алгоритма на сетке  $(M, N) = (40, 40)$  на одном, двух и четырех процессах, сравнение с последовательным вариантом алгоритма.

### 3.2.4 MPI+CUDA-программа

Для написания MPI+CUDA-программы по MPI, были выполнены следующие шаги:

1. Переписывание вычислительных функций в виде CUDA-ядр, обеспечивающих параллельное выполнение на GPU.
2. Добавление функций для корректного распределения памяти и работы с устройством.

## 4 Результаты

OpenMP нити	Размер сетки	Число итераций	Полное время работы	Ускорение	calcScaledProd цикл	calcScaledAdd цикл	calcZ цикл	ApplyA цикл	D цикл	a, b, F цикл
1	400 × 600	2463	144.507	1x	33.038	40.815	15.551	54.912	0.011	0.120
2	400 × 600	2463	76.196	1.9x	17.278	21.549	8.231	29.023	0.006	0.062
4	400 × 600	2463	37.286	3.88x	8.442	10.528	4.031	14.206	0.003	0.031
8	400 × 600	2463	19.315	7.48x	4.371	5.452	2.081	7.347	0.002	0.016
16	400 × 600	2463	10.211	14.15x	2.314	2.866	1.093	3.884	0.001	0.008
1	800 × 1200	4764	1054.734	1x	330.000	400.000	160.000	540.000	0.100	1.000
4	800 × 1200	4764	284.295	3.71x	64.397	80.557	30.625	108.448	0.012	0.122
8	800 × 1200	4764	149.763	7.04x	33.977	42.319	16.179	57.092	0.006	0.065
16	800 × 1200	4764	76.334	13.81x	17.384	21.539	8.303	28.948	0.003	0.032
32	800 × 1200	4764	55.302	19.06x	12.380	15.728	6.126	20.902	0.002	0.027

**Таблица 1:** Детальный анализ работы OpenMP-программы на ПВС IBM Polus в секундах.

Для 1 нити взяты результаты исходной последовательной программы.

MPI процессы	Размер сетки	Число итераций	Полное время работы	Ускорение	Коммуникация	calcScalarProd цикл	calcScaledAdd цикл	calcZ цикл	ApplyA цикл	D цикл	a, b, F цикл
1	400 × 600	2463	144.507	1x	0.000	33.038	40.815	15.551	54.912	0.011	0.120
2	400 × 600	2464	78.255	1.84x	0.298	17.982	22.314	8.102	29.439	0.006	0.059
4	400 × 600	2464	40.885	3.53x	1.226	9.149	11.341	4.130	14.943	0.004	0.039
8	400 × 600	2464	21.464	6.73x	1.595	4.576	5.679	2.062	7.482	0.002	0.020
16	400 × 600	2464	11.521	12.53x	1.294	2.349	2.918	1.059	3.844	0.001	0.011
1	800 × 1200	4764	1054.734	1x	0.000	330.000	400.000	160.000	540.000	0.100	1.000
4	800 × 1200	4775	328.600	3.21x	12.981	72.752	90.409	32.758	119.398	0.015	0.155
8	800 × 1200	4775	184.806	5.71x	21.280	37.655	46.891	16.975	61.781	0.009	0.108
16	800 × 1200	4775	82.995	12.71x	4.033	18.207	22.527	8.268	29.801	0.006	0.054
32	800 × 1200	4775	53.449	19.73x	12.451	9.431	11.708	4.259	15.475	0.003	0.027

**Таблица 2:** Детальный анализ работы MPI-программы на ПВС IBM Polus в секундах.

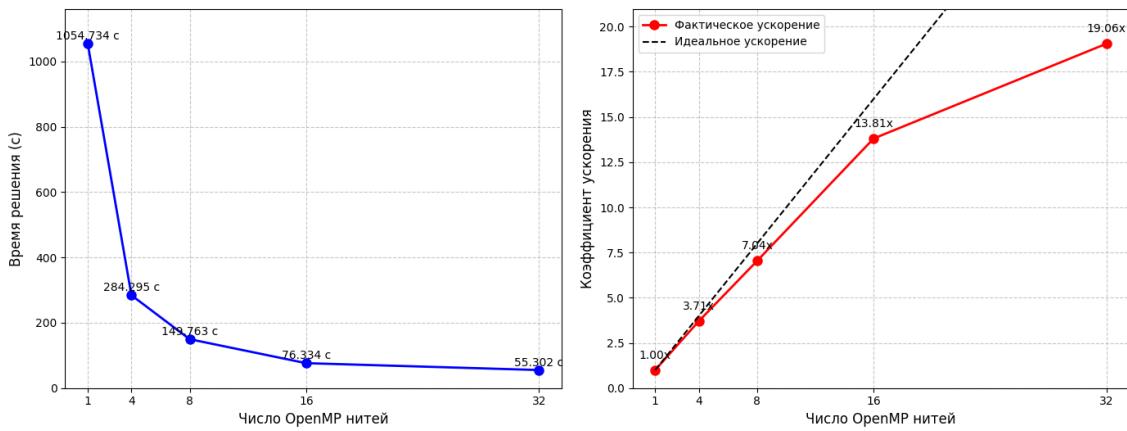
Для 1 нити взяты результаты исходной последовательной программы.

Время посчитано как среднее времен всех процессов.

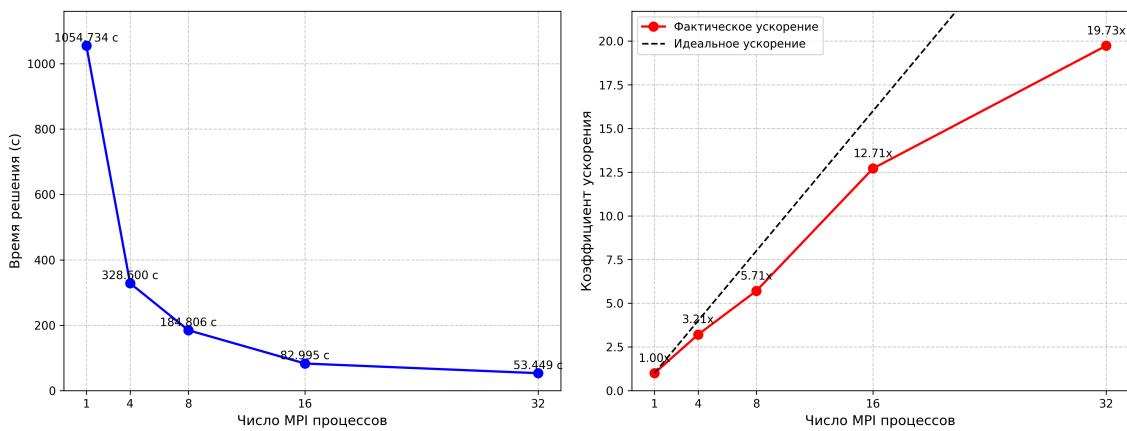
Программа	Число итераций	Полное время работы	Ускорение	Коммуникация	CPU/GPU обмен	calcScaledProd на GPU	calcScaledAdd на GPU	calcZ на GPU	ApplyA на GPU	D на GPU	a, b, F на GPU
Последовательная	4764	1054.734	1x	0.0	0.0	330.0	400.0	160.0	540.0	0.100	1.000
OpenMP 4 нити	4764	284.295	3.71x	0.0	0.0	64.397	80.557	30.625	108.448	0.012	0.122
OpenMP 8 нитей	4764	149.763	7.04x	0.0	0.0	33.977	42.319	16.179	57.092	0.006	0.065
OpenMP 16 нитей	4764	76.334	13.81x	0.0	0.0	17.384	21.539	8.303	28.948	0.003	0.032
MPI 4 процесса	4775	328.600	3.21x	12.981	0.0	72.752	90.409	32.758	119.398	0.015	0.155
MPI 8 процессов	4775	184.806	5.71x	21.280	0.0	37.655	46.891	16.975	61.781	0.009	0.108
MPI 16 процессов	4775	82.995	12.71x	4.033	0.0	18.207	22.527	8.268	29.801	0.006	0.054
MPI+CUDA 1 GPU	4764	136.230	7.74x	0.456	98.234	4.127	5.003	2.001	6.753	0.001	0.003
MPI+CUDA 2 GPU	4764	71.391	14.77x	1.892	51.456	2.158	2.614	1.045	3.531	0.001	0.002

**Таблица 3:** Детальное сравнение программ на ПВС IBM Polus в секундах.

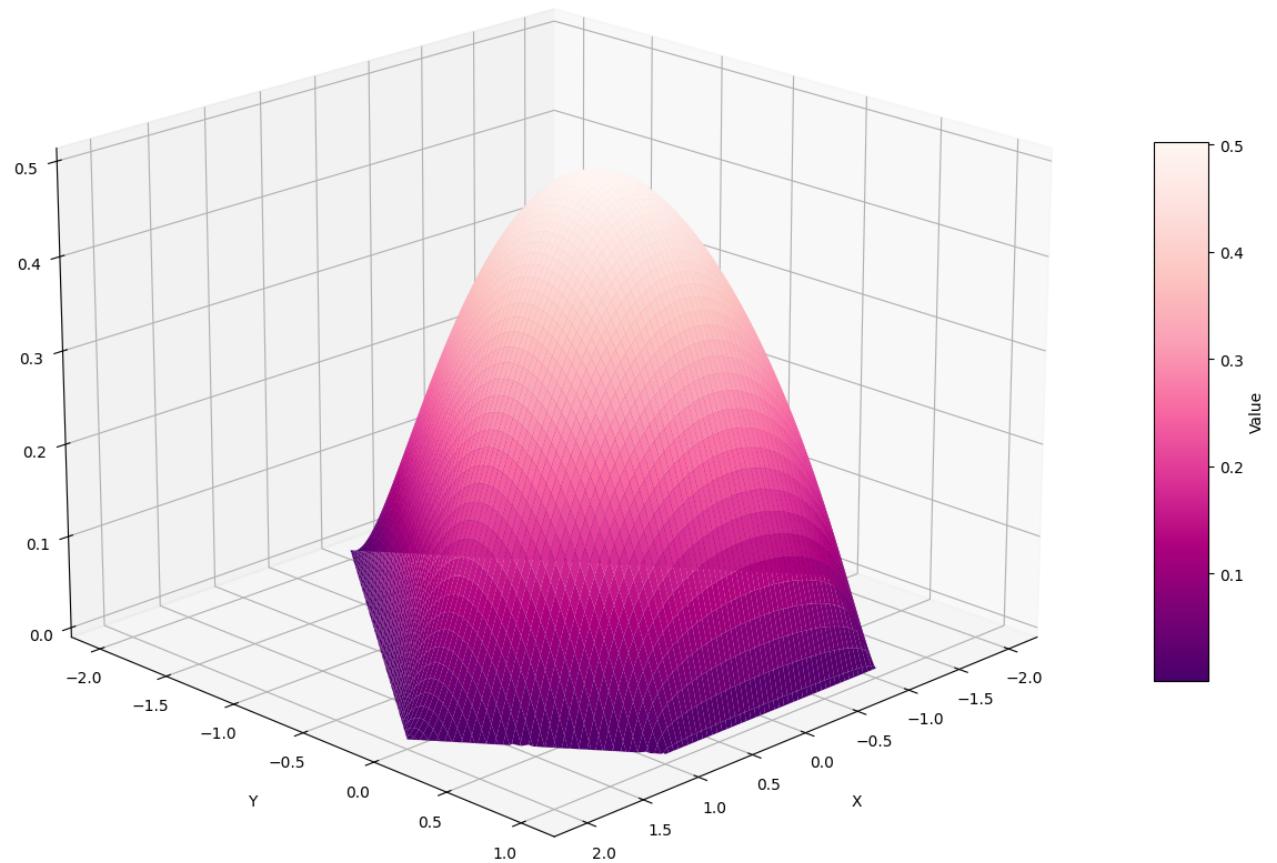
Размер сетки 800 × 1200.



**Рис. 1:** Анализ времени работы OpenMP-программы.  
Размер сетки  $800 \times 1200$ , количество итераций 4764.



**Рис. 2:** Анализ времени работы MPI-программы.  
Размер сетки  $800 \times 1200$ , количество итераций 4775.



**Рис. 3:** Приближенное решение на сетке  $800 \times 1200$ .

## 5 О результатах

### 5.1 Команды компиляции программ

- Последовательная:

```
g++ original.cpp -std=c++11 -o original
```

- OpenMP:

```
g++ omp.cpp -fopenmp -std=c++11 -o omp
```

- MPI:

```
module load SpectrumMPI/10.1.0
mpicxx mpi.cpp -std=c++11 -o mpi
```

- MPI+CUDA:

```
module load OpenMPI/4.0.0
nvcc -arch=sm_35 -O0 -g -G -ccbin=mpicc --std=c++11 main.cu \
cuda_kernels.cu -o mpi_cuda -lm -lstdc++
```

### 5.2 Анализ результатов

- Для программы с использованием OpenMP наблюдается почти линейное ускорение при увеличении числа нитей от 1 до 8. Например, для сетки  $400 \times 600$  ускорение с 1 до 8 нитей составляет около  $7.48 \times$ . При увеличении числа нитей до 16 ускорение растет менее линейно ( $14.15 \times$ ) из-за накладных расходов на синхронизацию и управление потоками.
- Для программы с использованием MPI ускорение также увеличивается с числом процессов, но менее линейно, особенно на больших сетках ( $800 \times 1200$  ускорение  $19.73 \times$  при 32 процессах). Основная причина — коммуникационные затраты между процессами.
- Сравнение OpenMP и MPI показывает, что на малом числе потоков OpenMP эффективнее, так как отсутствует межпроцессное взаимодействие. MPI становится более полезным при больших объемах данных и числах процессов, хотя коммуникации снижают идеальное ускорение.
- Использование GPU (MPI+CUDA) обеспечивает значительное ускорение:  $7.74 \times$  для 1 GPU и  $14.77 \times$  для 2 GPU по сравнению с последовательной программой. Основной выигрыш достигается в вычислительных циклах (`calcScaledProd`, `calcScaledAdd`, `calcZ`, `ApplyA`).
- Основные причины отклонений от идеального ускорения:
  - OpenMP: снижение эффективности при большом числе нитей из-за синхронизации и конкуренции за кэш и память.
  - MPI: коммуникационные издержки между процессами, особенно для больших сеток.
  - MPI+CUDA: накладные расходы на передачу данных и синхронизацию.

- Вычислительные циклы доминируют по времени выполнения и приносят основной выигрыш при параллельной обработке. Малые циклы ( $D$  и  $a$ ,  $b$ ,  $F$ ) практически не влияют на общее ускорение.