B Plus Tree

18 ноября 2022 г.

1 Вступление

1.1 Определение

Для того чтобы разобраться с концепцией B+-дерева, сначала стоит подробнее изучить понятие стандартного B-дерева.

B-дерево представляет собой строго сбалансированную древовидную структуру данных, которая поддерживает отсортированные данные и разрешает поиск, последовательный доступ, вставку и удаление в логарифмическом времени. B-дерево обобщает двоичное дерево поиска, позволяя использовать узлы с более чем двумя дочерними элементами.

Дерево является B-деревом порядка m, если обладает следующими свойствами:

- B-дерево является идеально сбалансированным, то есть глубина всех его листьев одинакова.
- Все узлы, кроме корня должны иметь как минимум $[m/2] - 1$ ключей и максимум m-1 ключей.
- Все узлы без листьев, кроме корня (т.е. все внутренние узлы), должны иметь минимум $[m/2]$ потомков.
- Если корень – это узел не содержащий листьев, он должен иметь минимум 2 потомка.
- Узел без листьев с m-1 ключами должен иметь m потомков.
- Левое поддерево узла будет иметь меньшие значения, чем правая сторона поддерева. Это означает, что узлы также сортируются в порядке возрастания слева направо.

B + -дерево является модификацией B-дерева. В B+-дереве настоящие ключи хранятся лишь в листьях дерева, а во внутренних узлах хранятся лишь ключи-маршрутизаторы, необходимые для поиска по дереву.

Кроме свойств, наследуемых от B-дерева, B+-дерево также имеют следующие характеристики, позволяющие эффективно выполнять операции над ним:

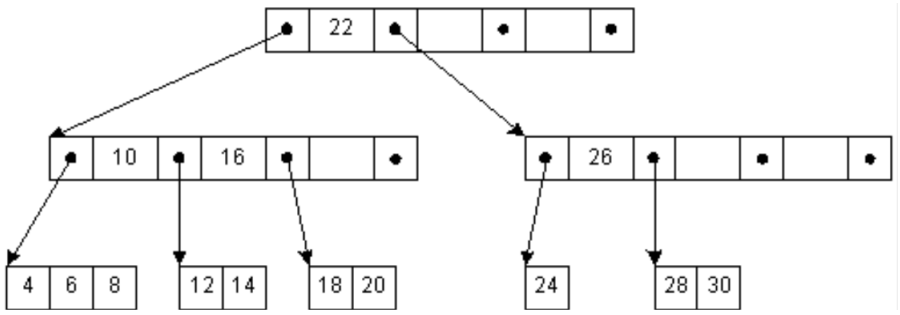


Рис. 1: *Дерево B порядка m=4*

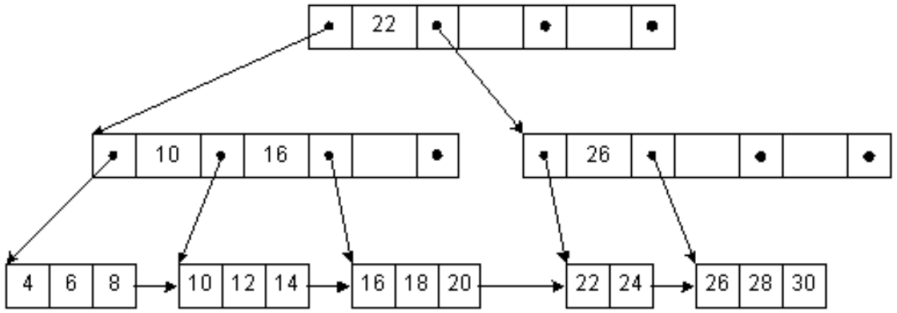


Рис. 2: *Дерево B+ порядка m=4*

- В дереве B+ записи (указатели на данные) могут храниться только на листовых узлах, а внутренние узлы могут хранить только копии ключей (значения без указателя на данные). Здесь можно отметить, что, поскольку указатели данных присутствуют только в листовых узлах, конечные узлы обязательно должны хранить все значения ключей вместе с соответствующими указателями данных на блок дискового файла, чтобы получить к ним доступ.
- Листовые узлы дерева B+ связаны друг с другом в виде односвязных списков, чтобы сделать поисковые запросы более эффективными.

1.2 История

B-деревья были изобретены Рудольфом Байером и Эдвард МакКрейт во время работы в Boeing Research Labs, для цели эффективного управления страницей индексов для больших файлов с произвольным доступом. Основное предположение заключено в том, что индексы могут быть настолько объемными, что в основную память поместиться лишь небольшие фрагменты дерева. Статья Байера и МакКрайта «Организация и поддерж-

ка упорядоченных индексов» была впервые распространена в июле 1970 года и позже опубликована в Acta Informatica.

Байер и МакКрайт никогда не объясняли, что означает буква B: Boeing, сбалансированный, широкие, пушистые и байеровские. МакКрайт сказал, что «чем больше вы думаете о том, что означает B в B-деревьях, тем лучше вы понимаете B-деревья».

Одной из первых статей, в которой были подробно разобраны концепции модификаций B-дерева (в том числе и B+-дерева), является статья Дугласа Комера "Вездесущее B-дерево". В этой же работе он отмечает, что B+-дерево использовалось в программном обеспечении IBM для доступа к данным VSAM, и ссылается на опубликованную в журнале IBM System Journal статью 1973 года "Рекомендации по дизайну индексации".

1.3 Применение

Изначально структура B+-деревьев предназначалась для хранения данных в целях эффективного поиска в блочно-ориентированной среде хранения — в частности, для файловых систем; применение связано с тем, что в отличие от бинарных деревьев поиска, B+-деревья имеют очень высокий коэффициент ветвления (число указателей из родительского узла на дочерние, обычно порядка 100 или более), что снижает количество операций ввода-вывода, требующих поиска элемента в дереве.

Структура широко применяется в файловых системах — NTFS, ReiserFS, NSS, XFS, JFS, ReFS используют этот тип дерева для индексирования метаданных; BeFS также использует B+-деревья для хранения каталогов. Реляционные системы управления базами данных, такие как DB2, Informix, Microsoft SQL Server, Oracle Database (начиная с версии 8), Adaptive Server Enterprise и SQLite поддерживают этот тип деревьев для табличных индексов. Среди NoSQL-СУБД, работающих с моделью «ключ — значение», структура данных реализована для доступа к данным в CouchDB и Tokyo Cabinet.

2 Описание алгоритма

2.1 Ассимптотическая сложность

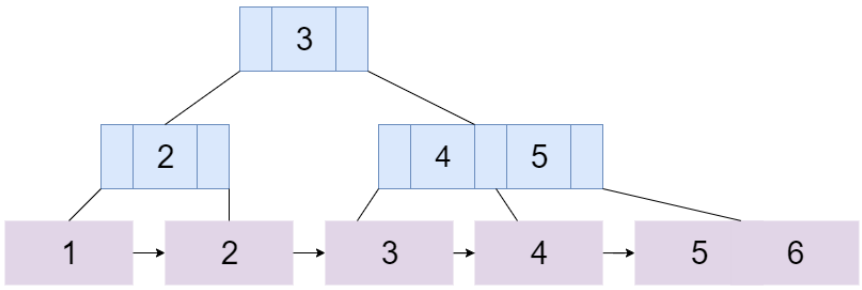
B+-деревья являются сбалансированными, поэтому время выполнения стандартных операций в них пропорционально высоте, то есть O(logn). Однако стоит заметить, что так как степень дерева зачастую выбирается большой, константа при выполнении операций тоже большая. Это связано с большим количеством ключей в узлах, которые необходимо сравнить. Но из-за небольшой высоты дерева это не сильно сказывается на скорости работы

2.2 Поиск

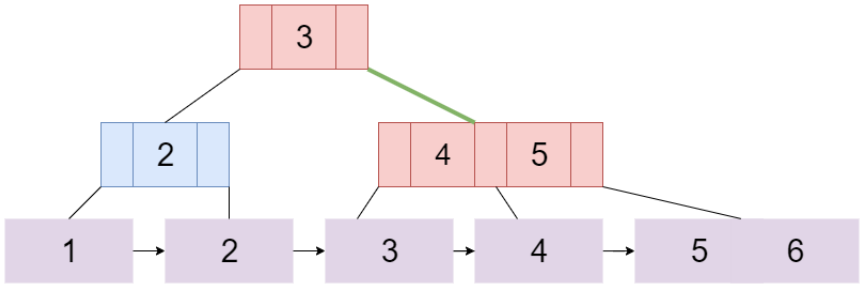
Поиск листа. Для того, чтобы найты нужный ключ, необходимо сначала добраться до листового узла, который может его содержать. С помощью бинарного или линейного поиска ищется интервал содержащий значение ключа и осуществляется переход к соответствующему сыну. Операция повторяется пока текущий узел не окажется конечным(листовым). Функция возвращает лист, содержащий ключ. В противном случае пользователю показывается неудачная попытка.

Поиск ключа. Производится поиск листа и последующий поиск искомого ключа в нем. Программа выдает индекс искомого ключа и показывает неудачную попытку в противном случае.

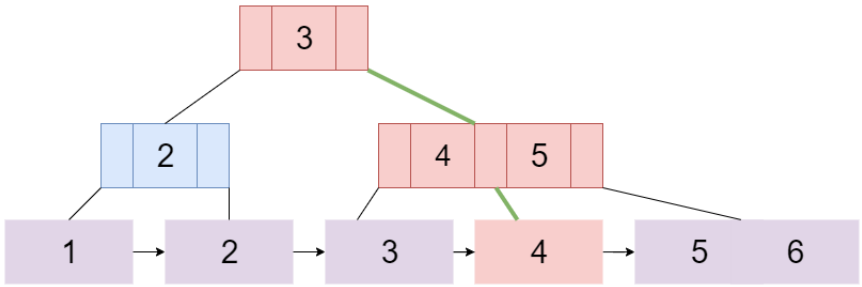
Далее будет разобран пример поиска ключа k=4 в B+-дереве порядка m=3.



Необходимо сравнить k=4 с корневым узлом. Так как k>3, осуществляется переход к правому потомку.



Необходимо найти нужный интервал. Так как k>=4, значение ключа сравнивается с следующим элементом: k<=5. Значит, осуществляется переход в подинтервал [4; 5] и производится поиск единственного ключа, соответствующего искомому. Операция завершена.



2.3 Добавление

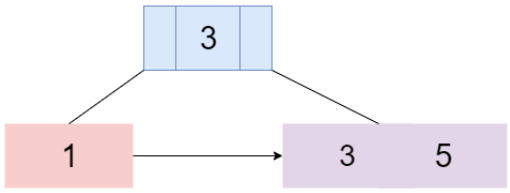
Если дерево пустое, нужно создать новый корень и добавить первый ключ.

Иначе производится поиск листа, в который можно добавить ключ. Ключ добавляется в список в порядке неубывания. Если лист не заполнен, операция завершена. В случае, если лист заполнен, последующим действием после вставки выполняется *разбиение узла*.

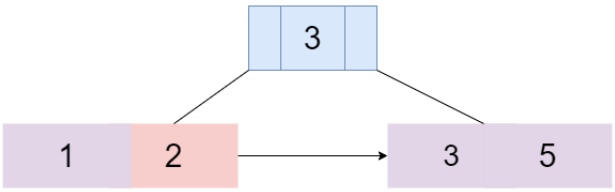
Узел делится на две половины. Элемент m/2+1 переносится в родительский узел. Если родительский узел оказывается заполненным, повторяется *разбиение узла*.

Далее на примере дерева порядка m=3 будут рассмотрены два случая: когда количество элементов узла меньше m+1 и когда происходит переполнение узлов.

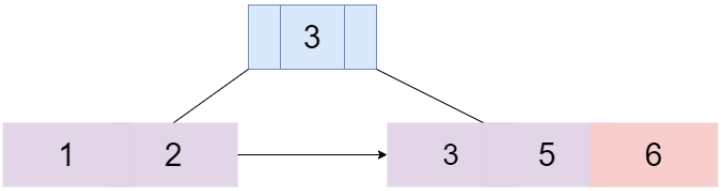
1 случай. Производится поиск нужного листа и добавление k=2 в порядке возрастания.



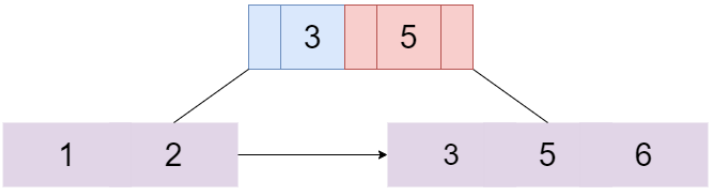
При добавлении количество элементов не превышает максимальное. Значит, операция завершается.



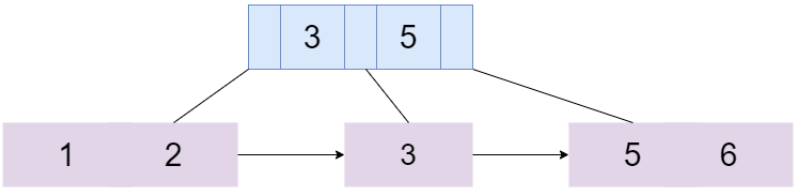
2 случай. Производится поиск нужного листа и добавление k=6 в порядке возрастания.



Сейчас в текущем листе содержится слишком много ключей, поэтому необходимо разбить его на два. Берется ключ под номером $[k/2 + 1]$ со значением 5 и его копия помещается в родительский узел.



В левый узел помещается $[n/2]$, а в правый $[n/2 + 1]$ ключей (где n - изначальное количество ключей).



В родительском узле количество ключей не превышает норму, поэтому

операция завершается.

2.4 Удаление

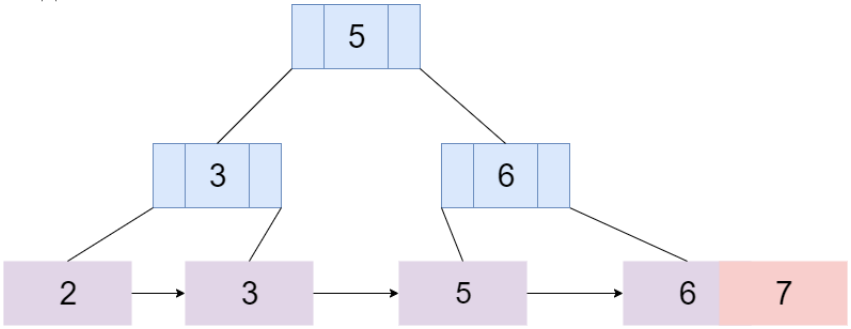
Поскольку все ключи находятся в листах, для удаления в первую очередь необходимо найти листовой узел, в котором он находится, а затем и сам ключ. При нахождении нужного ключа он и связанная с ним ссылка удаляются. Если узел содержит минимальное количество ключей операция завершается. В противном случае нужно провести балансировку дерева.

Для этого производится попытка перераспределения элементов, то есть добавления в узел элемент из левого или правого брата (не забыв обновить информацию в родителе). Если это невозможно, необходимо выполнить слияние с братом и удалить ключ, который указывает на удалённый узел. Объединение может распространяться на корень, тогда происходит уменьшение высоты дерева.

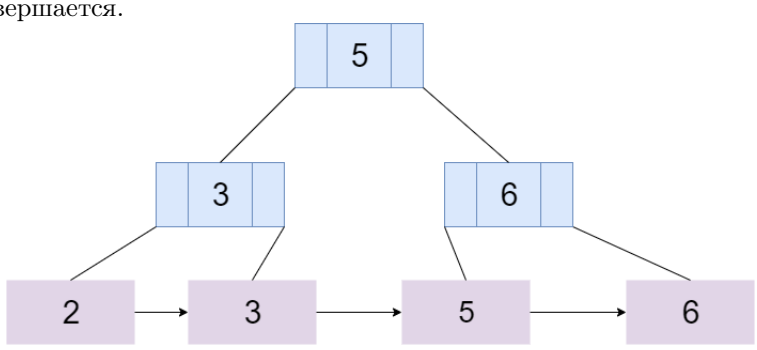
Далее будут разобраны три случая.

1 случай. Ключ, который нужно удалить, присутствует только в листовом узле, а не во внутренних узлах. Для этого есть два случая:

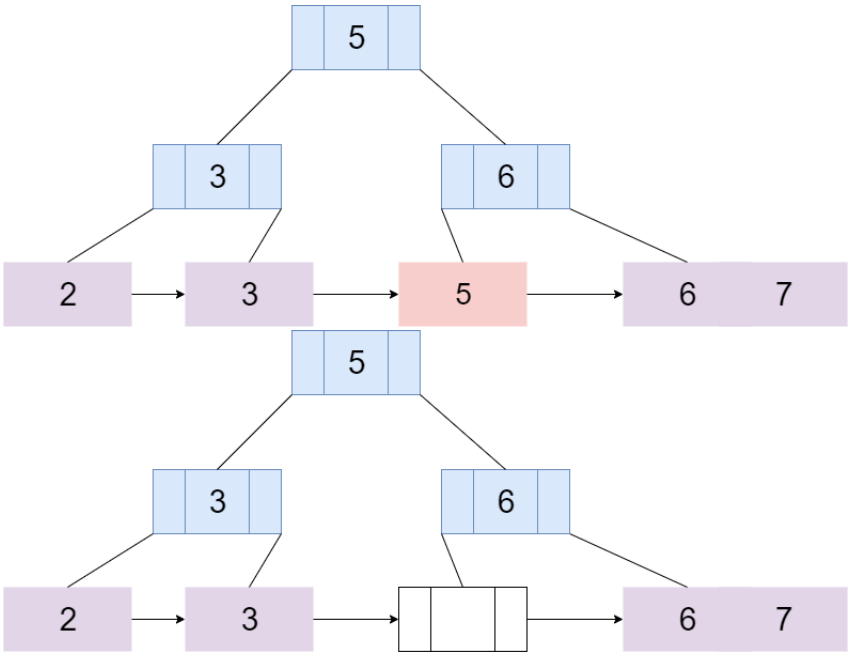
1.Удаляется ключ со значением k=7.



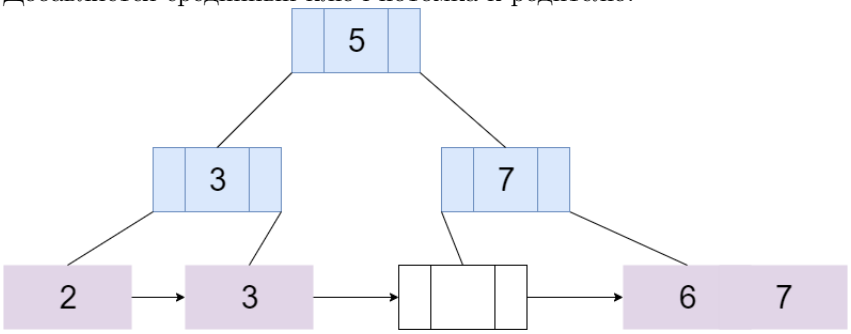
Так количество ключей в узле соответствует минимальному, операция завершается.



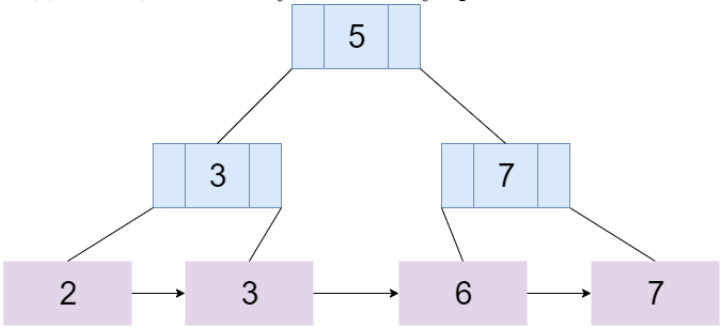
2.Удаляется ключ k=5. При удалении в узле количество ключей становится меньше минимального.



Добавляется срединный ключ потомка к родителю.

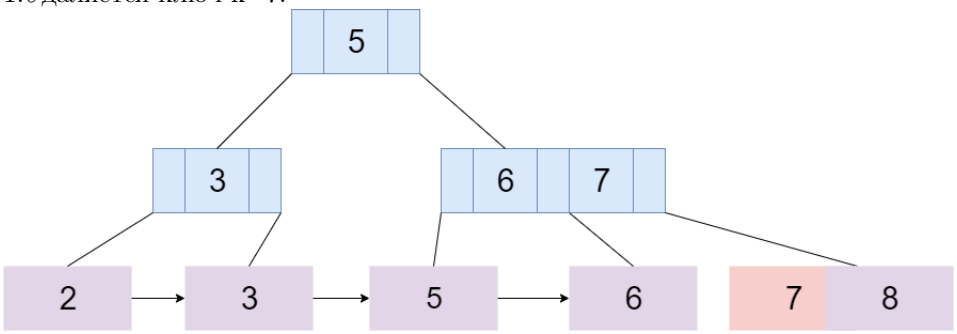


Недостающий заимствуется ключ у брата.

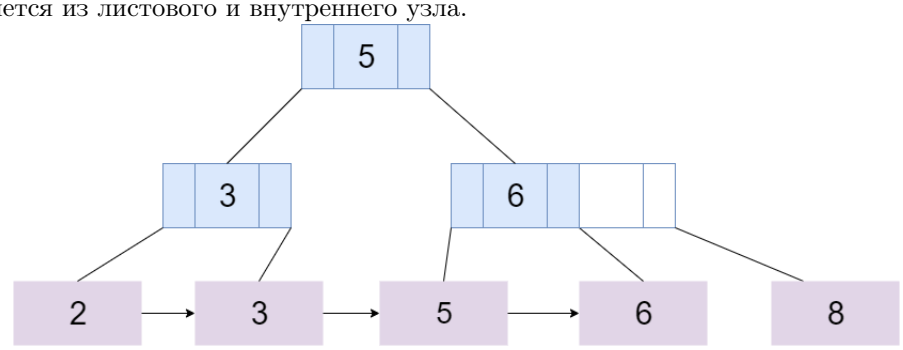


*2 случай.*Ключ, который нужно удалить, присутствует и во внутренних узлах. Имеются следующие случаи для этой ситуации.

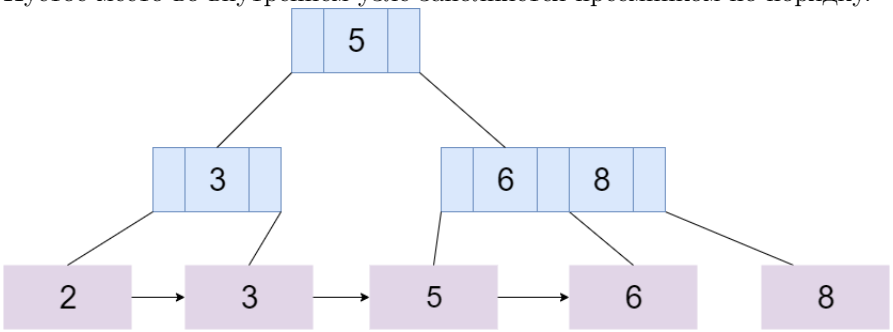
1.Удаляется ключ k=7.



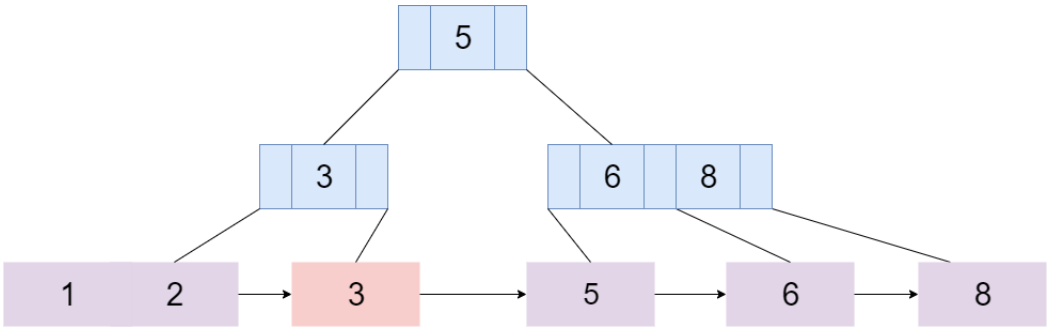
Если количество ключей в узле больше минимального, ключ просто удаляется из листового и внутреннего узла.



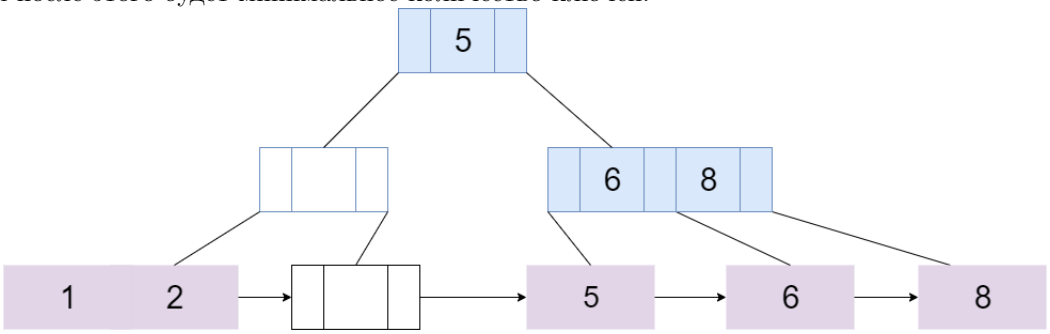
Пустое место во внутреннем узле заполняется преемником по порядку.



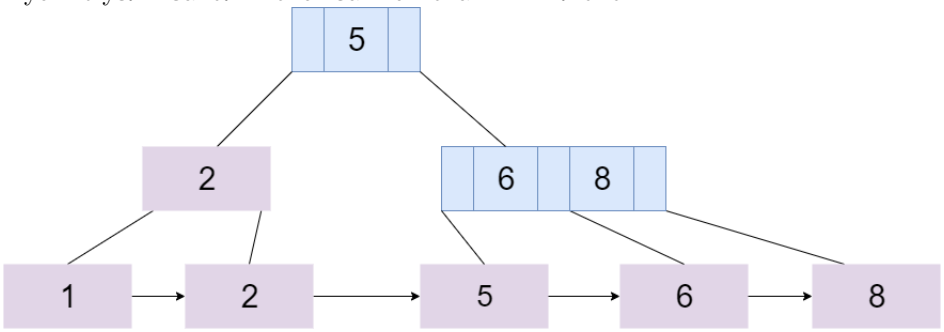
2.Удаляется ключ k=3.



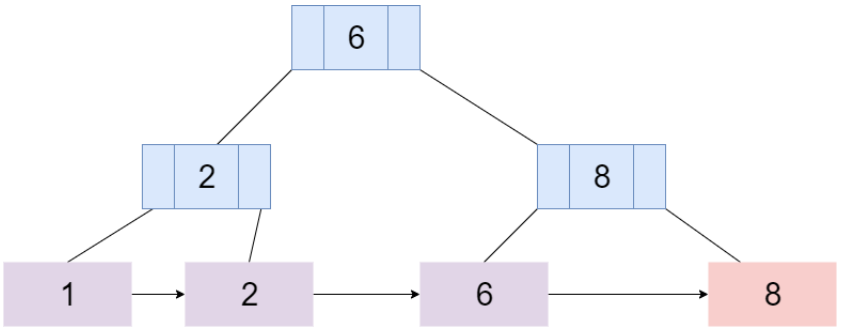
Ключ удаляется и новый заимствуется у его родственного узла, если в нем после этого будет минимальное количество ключей.



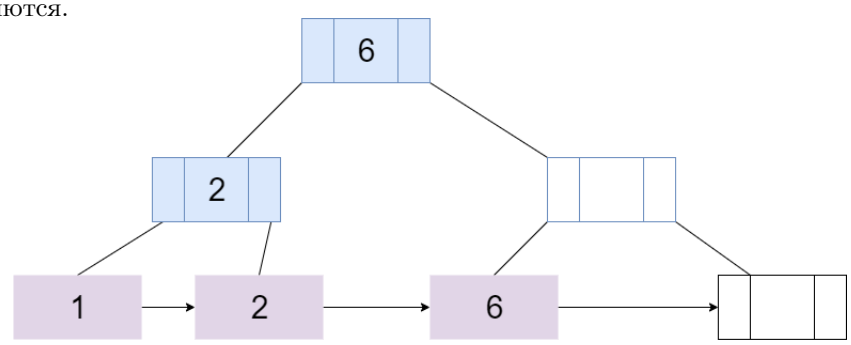
Пустые узлы заполняются заимствованным ключом.



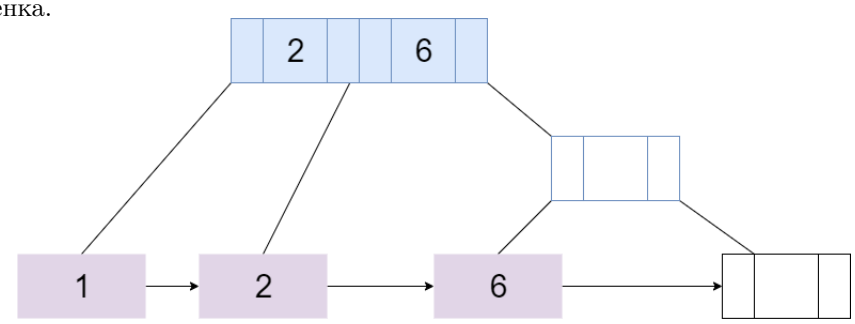
3 случай. Удаляется ключ k=8, который содержится в листовом и внутреннем узле. Позаимствовать ключи у соседних братьев невозможно, так как тогда их количество ключей будет меньше минимального.



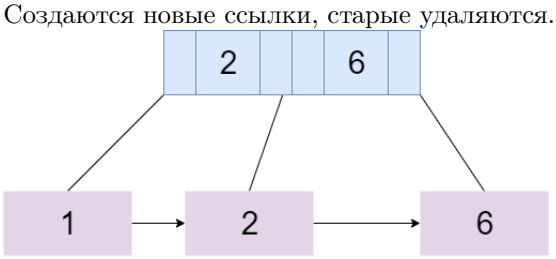
Создается пустое пространство, ссылки на которое в последующем удаляются.



Далее проделывается слияние корня и ближайшего незаполненного ребенка.



Создаются новые ссылки, старые удаляются.



3 Постановка задачи

Условие задачи

Необходимо реализовать m-арное дерево поиска, удовлетворяющее следующим условия:

- Дерево строго сбалансировано (каждая ветвь имеет одну высоту)
- Каждый узел имеет m дочерних элементов и m-1 ключей или их копий
- Во внутренних узлах хранятся только копии ключей, сами ключи лежат в листьях. Листовые узлы представляют собой односвязный список

А также выполняемое следующие операции над собой:

- insert(int k) - добавляет ключ k в дерево
- delete(int k) - удаляет ключ k из дерева
- findkey(int k) - ищет ключ по значению и в случае успеха возвращет True, иначе - False
- print() - обходит каждый узел начиная с левого поддерева и выводит построчно списки ключей или их копий.

Формат входных данных:

В первой строке входные данные имеют число m (степень дерева). Далее пользователем в консоль вводятся команды в формате строки. Вызов операций вставки, удаления и поиска имеет вид **{"название команды" k}**, где k - ключ. Чтобы программа завершилась, необходимо ввести в консоль "end".

Формат выходных данных:

После того как пользователь вызовет команду завершения, в консоли отобразятся ключи каждого узла, начиная с левого поддерева.

Ограничения:

$2 \leq m \leq 100$

$-2^{31} < k < 2^{31}$

4 Заключение

Таким образом, B+-деревья являются актуальной структурой данных, с помощью которой можно эффективно и последовательно обрабатывать большие объемы данных с сохранением логарифмической сложности.

5 Список литературы

1. B.Bayer, E.McCreight "Organization and maintenance of large ordered indices"
2. WAGNER, R. "Indexing design considerations,"IBM Syst. J. 4, (1973)
3. "The Ubiquitous B-Tree "DOUGLAS COMER Computer Sctence Department, Purdue Untverstty,
4. Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы: построение и анализ. 3-е изд.
5. DOUGLAS COMER: "The Ubiquitous B-Tree Computer Sctence Department, Purdue Untversty
6. Дональд Кнут. Генерация всех деревьев. История комбинаторной генерации
7. Зубов В. С., Шевченко И. В. "Структуры и методы обработки данных: Практикум в среде Delphi"Глава 6. Поиск в недвоичных деревьях - B-деревьях
8. Freitas R, Wilcke W. Storage-class memory: The next storage system technology. IBM Journal of Research and Development, 2008
9. https://ru.wikipedia.org/wiki/B-%D0%B4%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BE
10. http://algolist.manual.ru/ds/s_btr.php
11. https://www.bluerwhite.org/btree/
12. https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=B%2B-%D0%B4%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BE
13. KerttuPollari-Malmi"B+-trees"
14. https://www.youtube.com/watch?v=DqcZLulVJ0M
15. https://www.youtube.com/watch?v=pGOdeCpuwpI
16. https://www.youtube.com/playlist?list=PLsEFMZUL5KsOqKHhxquVleVkM9LFLFSo0
17. https://cs.hse.ru/data/2019/04/08/1176295299/%D0%A0%D0%B8%D0%B3%D0%B8%D0%BD_CoCoS_2019.pdf
18. https://www.scaler.com/topics/data-structures/b-plus-trees/
19. https://stackoverflow.com/questions/870218/what-are-the-differences-between-b-trees-an
20. http://algolist.manual.ru/ds/s_btr.php

21. https://thodrek.github.io/cs564-fall17/lectures/lecture-14/Lecture_14_Hash.pdf
22. https://www.usenix.org/publications/loginonline/revisit-b-tree-vs-lsm-tree-upon-arrival
23. https://www.w3schools.blog/b-plus-tree-dbms
24. https://www.youtube.com/watch?v=TdtulzNC9iE
25. https://www.youtube.com/watch?v=KFcpDTpoixo&t=1s
26. https://www.programiz.com/dsa/insertion-on-a-b-plus-tree
27. https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BPlusTree.html