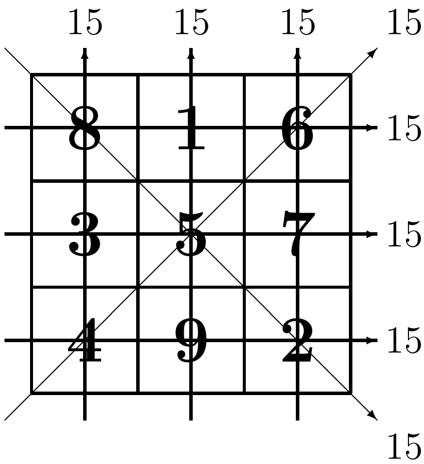
definition
plain

Magični kvadrati

23.01.2025



Prirejeno iz virov:

- `http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`

Kazalo

1 Uvod

Definicija 1 Magični kvadrat *reda n je nabor n^2 različnih števil, ki so razvrščena v kvadratno tabelo tako, da vedno dobimo enako vsoto, če seštejemo vsa števila poljubne vrstice, vsa števila poljubnega stolpca ali vsa števila v katerikoli od glavnih diagonal.*

Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli **??**. 3Magični kvadrat reda 3table: mag3 8 1 6

3 5 7

4 9 2

3Magični kvadrat števila 3table: mag3

Definicija 2 *Magični kvadrat reda n je* normalen*, če v njem nastopajo števila*

$$1, 2, 3, \ldots, n^2 - 1, n^2. \tag{1}$$

Magični kvadrat v tabeli **??** je normalen. To je tudi najmanjši netrivialen normalen magični kvadrat. Poleg normalnih magičnih kvadratov so zanimivi tudi magični kvadrati praštevil.

2 Zgodovina

2.1 Kvadrat »Lo Shu«

Kitajska literatura iz časa vsaj 2800 let pred našim štetjem govori o legendi *Lo Shu* – »zvitek reke Lo«. V antični Kitajski je prišlo do silne poplave. Ljudje so skušali rečnemu bogu narasle reke Lo ponuditi daritev, da bi pomirili njegovo jezo. Iz vode se je prikazala želva z zanimivim vzorcem na oklepu: v tabeli velikosti tri krat tri so bila predstavljena števila, tako da je bila vsota števil v katerikoli vrstici, kateremkoli stolpcu in na obeh glavnih diagonalah enaka: 15. To število je tudi enako številu dni v 24 ciklih kitajskega sončnega leta. Ta vzorec so na določen način uporabljali upravljalci reke.
3Kvadrat Lo Shutable:loshu 4 9 2

3 5 7

8 1 6

2.2 Kulturna pomembnost

Magični kvadrati so fascinirali človeštvo skozi vso zgodovino. Najdemo jih v številnih kulturah, npr. v Egiptu in Indiji, vklesane v kamen ali kovino, uporabljane kot talismane za dolgo življensko dobo in v izogib boleznim.
Kubera-Kolam je talna poslikava, ki se uporablja v Indiji, in je v obliki magičnega kvadrata reda 3. Ta je v bistvu enak kot kvadrat Lo Shu, vendar je vsako število povečano za 19. Kvadrat Kubera-Kolamtable:kuber

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Kvadrat Kubera-Kolamtable:kuber
Z magičnimi kvadrati so se ukvarjali tudi najbolj znani matematiki kot na primer Euler, glej [**?**].

2.3 Zgodnji kvadrati reda 4

Najzgodnejši znani magični kvadrat reda 4 je bil odkrit na napisu v Khajurahu v Indiji in v Enciklopediji Bratovščine Čistosti iz enajstega ali dvanajstega stoletja. Vrh vsega gre celo za »panmagični kvadrat«. V Evropi sta morda najbolj znana naslednja magična kvadrata reda 4:
Magični kvadrat v litografiji Melancholia I (glej sliko **??** za izsek s kvadratom) Albrechta Dürerja naj bi bil najzgodnejši magični kvadrat v evropski umetnosti. Zelo podoben je kvadratu Yang Huija, ki je nastal na Kitajskem približno 250 let pred Dürerjevim časom. 

Slika 1: Dürerjev magični kvadrat

Vsoto 34 je mogoče najti pri seštevanju števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu, na vsaki diagonali, v vsakem od štirih kvadrantov, v sredinskih štirih poljih, v štirih kotih, v štirih sosedih kotov v smeri urinega kazalca $(3+8+14+9)$, v štirih sosedih kotov v nasprotni smeri urinega kazalca $(2+5+15+12)$, v dveh naborih simetričnih parov $(2+8+9+15$ in $3+5+12+14)$, in še na nekaj drugih načinov. Števili na sredini spodnje vrstici tvorita letnico litografije: 1514. 4Dürerjev magični kvadrat 4×4table:durer 16 3 2 13

5 10 11 8

9 6 7 12

4 15 14 1

Pasijonska fasada na katedrali Sagrada família v Barceloni (glej sliko **??** za fotografijo) vsebuje magični kvadrat reda 4.

Slika 2: Pasijonska fasada, Sagrada Família

Vsota števil v vrsticah, stolpcih oziroma na diagonalah je 33 – Jezusova starost v času pasijona. Strukturno je kvadrat podoben Dürerjevemu, vendar so števila v štirih poljih zmanjšana za 1. Posledica je, da sta števili 10 in 14 podvojeni in zato kvadrat ni normalen. 4Magični kvadrat na Sagradi Famílijitable:sagrada 1 14 14 4

11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

3 Osnovne lastnosti

Definicija 3 *Vsoto ene vrstice, enega stolpca ali ene od glavnih diagonal v magičnem kvadratu imenujemo* magična konstanta*.*

Izrek 1 *Magična konstanta normalnega magičnega kvadrata reda !! je enaka*

$$M_2(n) = \frac{1}{2}n(n^2+1) \tag{2}$$

izrek
*V normalnem magičnem kvadratu reda n je vsota vseh nastopajočih števil (glej (**??**) na strani **??**) enaka $1+2+3+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n^2(n^2+1)$. Ker imamo v kvadratu n vrstic z enako vsoto, je vsota števil v eni vrstici enaka številu $M_2(n)$.*
*Preprost račun pokaže, da je konstanti (**??**) analogna konstanta $M_2(n; A, D)$ za magični kvadrat, v katerem so nameščena števila A, $A+D$, $A+2D$, …, $A+(n^2-1)D$, enaka !! Kvadratu v tabeli **??** ustrezata konstanti $A = 20$ in $D = 1$.*

Definicija 4 *Če vsako od števil v normalnem magičnem kvadratu reda n odštejemo od števila n^2+1, dobimo nov magični kvadrat, ki je prvotnemu* komplementaren*.*

*Na primer, magičnemu kvadratu Lo Shu (glej tabelo **??**) priredimo komplementarni kvadrat, prikazan v tabeli **??**. 3Kvadratu Lo Shu komplementarni kvadrattable:closhu 6 1 8*

7	*5*	*3*
2	*9*	*4*

*Vidimo, da je dobljeni kvadrat moč dobiti iz kvadrata Lo Shu tudi z zasukom za 180 stopinj okrog središča, kvadrat iz tabele **??** pa je mogoče dobiti iz kvadrata Lo Shu z zrcaljenjem preko sredinske vodoravne črte.*
Število različnih normalnih magičnih kvadratov

Definicija 5 *Pravimo, da sta dva magična kvadrata* različna, *če enega ni mogoče dobiti iz drugega s pomočjo zasukov oziroma zrcaljenj.*

Števila različnih normalnih magičnih kvadratov se nahajajo v tabeli ??.

Tabela 1: Število različnih normalnih magičnih kvadratov

	točna vrednost					približek
red	1	2	3	4	5	6
število kvadratov	1	0	1	880	275305224	$(1{,}7745 \pm 0{,}0016)10^{19}$

točna vrednost približek red 1 2 3 4 5 6 število kvadratov 1 0 1 880 275305224 !!
Vse normalne magične kvadrate reda 4 je oštevilčil Frénicle de Bessy leta 1693, glej [?], in jih je moč najti v knjigi [?] iz leta 1982. Število normalnih kvadratov reda 5 je izračunal R. Schroeppel leta 1973 (glej Gardner [?]). Natančno število vseh različnih normalnih magičnih kvadratov reda 6 ni znano. Avtorja navedenega približka sta Pinn in Wieczerkowski (glej [?]), ki sta za oceno uporabila simulacijo Monte Carlo in metode statistične mehanike.

4 Primeri

V tabelah ?!?, ?!? in ?!? so prikazani magični kvadrati redov 5, 6 in 9. 5Magični kvadrat reda 5table:mag5 17 24 1 8 15

23 5 7 14 16

4 6 13 20 22

10 12 19 21 3

11 18 25 2 9

6Magični kvadrat reda 6table:mag6 6 32 3 34 35 1

7 11 27 28 8 30

19 14 16 15 23 24

18 20 22 21 17 13

25 29 10 9 26 12

36 5 33 4 2 31

9Magični kvadrat reda 9table:mag9

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35