

# Magični kvadrati



Prirejeno iz virov:

- <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Magic\\_square](http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square)

## Kazalo

|          |                          |          |
|----------|--------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>              | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Zgodovina</b>         | <b>2</b> |
| 2.1      | Kvadrat »Lo Shu«         | 2        |
| 2.2      | Kulturna pomembnost      | 2        |
| 2.3      | Zgodnji kvadrati reda 4  | 3        |
| <b>3</b> | <b>Osnovne lastnosti</b> | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>Primeri</b>           | <b>6</b> |

# 1 Uvod

**Definicija 1.** *Magični kvadrat* reda  $n$  je nabor  $n^2$  različnih števil, ki so razvrščena v kvadratno tabelo tako, da vedno dobimo enako vsoto, če seštejemo vsa števila poljubne vrstice, vsa števila poljubnega stolpca ali vsa števila v katerikoli od glavnih diagonal.

Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli 1.

Tabela 1: Magični kvadrat reda 3

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

**Definicija 2.** Magični kvadrat reda  $n$  je *normalen*, če v njem nastopajo števila

$$1, 2, 3, \dots, n^2 - 1, n^2. \quad (1)$$

Magični kvadrat v tabeli 1 je normalen. To je tudi najmanjši netrivialen normalen magični kvadrat. Poleg normalnih magičnih kvadratov so zanimivi tudi magični kvadrati praštevil.

## 2 Zgodovina

### 2.1 Kvadrat »Lo Shu«

Kitajska literatura iz časa vsaj 2800 let pred našim štetjem govori o legendi *Lo Shu* – »zvitke reke Lo«. V antični Kitajski je prišlo do silne poplave. Ljudje so skušali rečnemu bogu narasle reke Lo ponuditi daritev, da bi pomirili njegovo jezo. Iz vode se je prikazala želva z zanimivim vzorcem na oklepu: v tabeli velikosti tri krat tri so bila predstavljena števila, tako da je bila vsota števil v katerikoli vrstici, kateremkoli stolpcu in na obeh glavnih diagonalah enaka: 15. To število je tudi enako številu dni v 24 ciklih kitajskega sončnega leta. Ta vzorec so na določen način uporabljali upravljalci reke.

### 2.2 Kulturna pomembnost

Magični kvadrati so fascinirali človeštvo skozi vso zgodovino. Najdemo jih v številnih kulturah, npr. v Egiptu in Indiji, vklesane v kamen ali kovino, uporabljane kot talismane za dolgo življensko dobo in v izogib boleznim.

Tabela 2: Kvadrat Lo Shu

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

*Kubera-Kolam* je talna poslikava, ki se uporablja v Indiji, in je v obliki magičnega kvadrata reda 3. Ta je v bistvu enak kot kvadrat Lo Shu, vendar je vsako število povečano za 19.

Tabela 3: Kvadrat Kubera-Kolam

|    |    |    |
|----|----|----|
| 23 | 28 | 21 |
| 22 | 24 | 26 |
| 27 | 20 | 25 |

Z magičnimi kvadrati so se ukvarjali tudi najbolj znani matematiki kot na primer Euler, glej [3].

## 2.3 Zgodnji kvadrati reda 4

Najzgodnejši znani magični kvadrat reda 4 je bil odkrit na napisu v Khajurahu v Indiji in v Enciklopediji Bratovščine Čistosti iz enajstega ali dvanajstega stoletja. Vrh vsega gre celo za »panmagični kvadrat«. V Evropi sta morda najbolj znana naslednja magična kvadrata reda 4.

**Magični kvadrat v litografiji Melancholia I** (glej sliko 1 za izsek s kvadratom) Albrechta Dürerja naj bi bil najzgodnejši magični kvadrat v evropski umetnosti. Zelo podoben je kvadratu Yang Huija, ki je nastal na Kitajskem približno 250 let pred Dürerjevim časom.

Slika 1: Dürerjev magični kvadrat



Vsoto 34 je mogoče najti pri seštevanju števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu, na vsaki diagonali, v vsakem od štirih kvadrantov, v sredinskih štirih poljih, v štirih kotih, v štirih sosedih kotov v smeri urinega kazalca ( $3 + 8 + 14 + 9$ ), v štirih sosedih kotov v nasprotni smeri urinega kazalca ( $2 + 5 + 15 + 12$ ), v dveh naborih simetričnih parov ( $2 + 8 + 9 + 15$  in  $3 + 5 + 12 + 14$ ), in še na nekaj drugih načinov. Števili na sredini spodnje vrstici tvorita letnico litografije: 1514.

Tabela 4: Dürerjev magični kvadrat  $4 \times 4$

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

**Pasijonska fasada na katedrali Sagrada família v Barceloni** (glej sliko 2 za fotografijo) vsebuje magični kvadrat reda 4.

Slika 2: Pasijonska fasada, Sagrada Família



Vsota števil v vrsticah, stolpcih oziroma na diagonalah je 33 – Jezusova starost v času pasijona. Strukturno je kvadrat podoben Dürerjevemu, vendar so števila v štirih poljih zmanjšana za 1. Posledica je, da sta števili 10 in 14 podvojeni in zato kvadrat ni normalen.

### 3 Osnovne lastnosti

**Definicija 3.** Vsoto ene vrstice, enega stolpca ali ene od glavnih diagonal v magičnem kvadratu imenujemo *magična konstanta*.

Tabela 5: Magični kvadrat na Sagradi Famíliji

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 14 | 14 | 4  |
| 11 | 7  | 6  | 9  |
| 8  | 10 | 10 | 5  |
| 13 | 2  | 3  | 15 |

**Izrek 1.** *Magična konstanta normalnega magičnega kvadrata reda  $n$  je enaka*

$$\mathcal{M}_2(n) = \frac{1}{2}n(n^2 + 1). \quad (2)$$

*Dokaz izreka.* V normalnem magičnem kvadratu reda  $n$  je vsota vseh nastopajočih števil (glej (1) na strani 2) enaka  $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$ . Ker imamo v kvadratu  $n$  vrstic z enako vsoto, je vsota števil v eni vrstici enaka številu  $\mathcal{M}_2(n)$ .  $\square$

Preprost račun pokaže, da je konstanti (2) analogna konstanta  $\mathcal{M}_2(n; A, D)$  za magični kvadrat, v katerem so nameščena števila  $A, A + D, A + 2D, \dots, A + (n^2 - 1)D$ , enaka

$$\mathcal{M}_2(n; A, D) = \frac{1}{2}n(2A + D(n^2 - 1)).$$

Kvadratu v tabeli 3 ustrezata konstanti  $A = 20$  in  $D = 1$ .

**Definicija 4.** Če vsako od števil v normalnem magičnem kvadratu reda  $n$  odštejemo od števila  $n^2 + 1$ , dobimo nov magični kvadrat, ki je prvotnemu *komplementaren*.

Na primer, magičnemu kvadratu Lo Shu (glej tabelo 2) priredimo komplementarni kvadrat, prikazan v tabeli 6.

Tabela 6: Kvadratu Lo Shu komplementarni kvadrat

|   |   |   |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

Vidimo, da je dobljeni kvadrat moč dobiti iz kvadrata Lo Shu tudi z zasukom za 180 stopinj okrog središča, kvadrat iz tabele 1 pa je mogoče dobiti iz kvadrata Lo Shu z zrcaljenjem preko sredinske vodoravne črte.

**Definicija 5.** Pravimo, da sta dva magična kvadrata *različna*, če enega ni mogoče dobiti iz drugega s pomočjo zasukov oziroma zrcaljenj.

Števila različnih normalnih magičnih kvadratov se nahajajo v tabeli 7.

Tabela 7: Število različnih normalnih magičnih kvadratov

|                   | točna vrednost |   |   |     |           | približek                    |
|-------------------|----------------|---|---|-----|-----------|------------------------------|
| red               | 1              | 2 | 3 | 4   | 5         | 6                            |
| število kvadratov | 1              | 0 | 1 | 880 | 275305224 | $(1,7745 \pm 0,0016)10^{19}$ |

Vse normalne magične kvadrate reda 4 je oštevilčil Frénicle de Bessy leta 1693, glej [2], in jih je moč najti v knjigi [1] iz leta 1982. Število normalnih kvadratov reda 5 je izračunal R. Schroepel leta 1973 (glej Gardner [4]). Natančno število vseh različnih normalnih magičnih kvadratov reda 6 ni znano. Avtorja navedenega približka sta Pinn in Wieczerkowski (glej [5]), ki sta za oceno uporabila simulacijo Monte Carlo in metode statistične mehanike.

## 4 Primeri

V tabelah 8, 9 in 10 so prikazani magični kvadrati redov 5, 6 in 9.

Tabela 8: Magični kvadrat reda 5

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 17 | 24 | 1  | 8  | 15 |
| 23 | 5  | 7  | 14 | 16 |
| 4  | 6  | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3  |
| 11 | 18 | 25 | 2  | 9  |

Tabela 9: Magični kvadrat reda 6

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 6  | 32 | 3  | 34 | 35 | 1  |
| 7  | 11 | 27 | 28 | 8  | 30 |
| 19 | 14 | 16 | 15 | 23 | 24 |
| 18 | 20 | 22 | 21 | 17 | 13 |
| 25 | 29 | 10 | 9  | 26 | 12 |
| 36 | 5  | 33 | 4  | 2  | 31 |

Tabela 10: Magični kvadrat reda 9

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 47 | 58 | 69 | 80 | 1  | 12 | 23 | 34 | 45 |
| 57 | 68 | 79 | 9  | 11 | 22 | 33 | 44 | 46 |
| 67 | 78 | 8  | 10 | 21 | 32 | 43 | 54 | 56 |
| 77 | 7  | 18 | 20 | 31 | 42 | 53 | 55 | 66 |
| 6  | 17 | 19 | 30 | 41 | 52 | 63 | 65 | 76 |
| 16 | 27 | 29 | 40 | 51 | 62 | 64 | 75 | 5  |
| 26 | 28 | 39 | 50 | 61 | 72 | 74 | 4  | 15 |
| 36 | 38 | 49 | 60 | 71 | 73 | 3  | 14 | 25 |
| 37 | 48 | 59 | 70 | 81 | 2  | 13 | 24 | 35 |

## Literatura

- [1] E. R. BERLEKAMP, J. H. CONWAY, AND R. K. GUY, *Games in particular*, in Winning Ways for Your Mathematical Plays, vol. 2, Academic Press, London, 1982.
- [2] B. F. DE BESSY, *Des quarrez magiques*, De l'imprimerie Royale par Jean Anisson, Paris, 1693.
- [3] L. EULER, *De quadratis magicis*, Commentationes arithmeticae, 2 (1849), pp. 593–602.
- [4] M. GARDNER, *Mathematical games*, Scientific American, 234 (1976), pp. 118–122.
- [5] K. PINN AND C. WIECZERKOWSKI, *Number of magic squares from parallel tempering monte carlo*, Int. J. Mod. Phys. C, 9 (1998), pp. 541–547.