**Практична робота № 5**

**Тема. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин**

**Мета:** набути практичних навичок у розв’язанні задач щодо знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин, зокрема нормального закону, та розв’язання типових задач до цієї теми.

**Завдання**

Двічі кинута гральна кістка. ДВВ – різниця між кількістю очок унаслідок першого кидання та кількістю очок унаслідок другого кидання. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) побудувати графік функції щільності розподілу ДВВ;   
3) знайти ймовірність події.

**Закон розподілу дискретної випадкової величини (ДВВ)**  
Нехай X1​ і X2​ — кількість очок, отримана при першому і другому кидках гральної кістки, відповідно. Тоді D = X1 − X2​ — це наша ДВВ, яка визначається як різниця між кількістю очок першого та другого кидків.

Оскільки X1​ і X2 можуть приймати значення 1, 2, 3, 4, 5, 6, то можливі значення D знаходяться в межах від -5 (якщо X1 = 1, X2 = 6) до 5 (якщо X1 =6, X2 = 1).

Для кожного можливого значення ddd знайдемо ймовірність P(D = d):

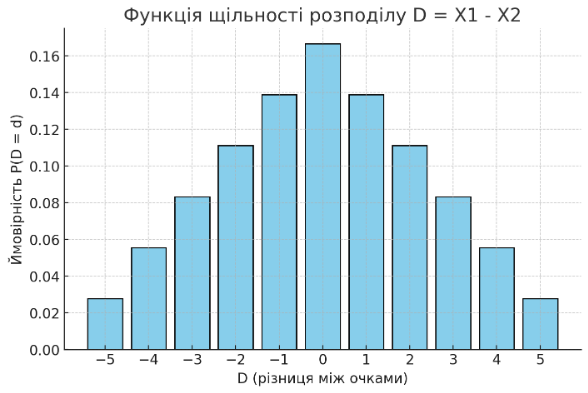
P(D=d) =

де 36 — загальна кількість можливих пар результатів (6 варіантів для X1​ і 6 для X2​).

**Графік функції щільності розподілу**  
Функція щільності розподілу P(D = d) буде мати вигляд таблиці з частотами для значень d=−5,−4,…,0,…,4,5. Графік можна побудувати, відобразивши частоти для кожного d.

**Ймовірність події**  
Якщо в задачі задана конкретна подія (наприклад, D ≥ 2), знайдемо її ймовірність:

P(D≥2)=



Закон розподілу ДВВ D = X1 − X2​:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| D | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(D = d) | 0.0278 | 0.0556 | 0.0833 | 0.1111 | 0.1389 | 0.1667 | 0.1389 | 0.1111 | 0.0833 |

|  |  |
| --- | --- |
| 4 | 5 |
| 0.0556 | 0.0278 |

**Графік функції щільності розподілу**  
Графік відображає ймовірності для кожного значення D, що візуально показує симетрію розподілу навколо D = 0.

**Ймовірність події**  
Якщо потрібно знайти ймовірність, наприклад, P(D ≥ 2), обчислимо її:

P(D ≥ 2) = P(D = 2) + P(D = 3) + P(D = 4) + P(D = 5).

Ймовірність події P(D ≥ 2) = 0.2778 (або 27.78%).

В урні 7 кульок, з яких 4 білі, а інші – чорні. З цієї урни навмання беруть 3 кульки. ДВВ – кількість білих кульок. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та -функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірність події ;   
5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

1. **Закон розподілу ДВВ**

Кількість білих кульок X у вибірці з 3 кульок може бути 0, 1, 2, або 3. Використовуємо гіпергеометричний розподіл для обчислення ймовірностей:

P(X = k)=

де:

* ()— кількість сполучень k елементів із n,
* k — кількість білих кульок у вибірці.

#### ****Функція розподілу**** F(x) ****та функція щільності розподілу**** f(x)

Функцію розподілу F(x) можна виразити через функцію Хевісайда H(x):

F(x)=P(X≤x).

Функцію щільності f(x) можна представити через дельта-функцію Дірака δ(x−k).

#### ****Графіки функцій розподілу та щільності****

Побудуємо графіки f(x) і F(x) після обчислення ймовірностей.

#### ****Ймовірність події**** P(X≥1)

P(X ≥ 1) = 1 - P (X = 0).

#### ****Багатокутник розподілу****

Багатокутник розподілу будується за частотами P(X = k).

1. **Математичне сподівання, дисперсія та інші характеристики**

* Математичне сподівання:

E[X] =

* Дисперсія:

D[X]=E[X2] – (E[X])2

де E[X2] =

* Середнє квадратичне відхилення:

σ=(D[X])

* Теоретичні моменти обчислюються за формулами:
  + Початкові моменти:

mr=E[Xr] =

* + Центральні моменти:

μr = E[( X − E[X])r]

* Асиметрія:

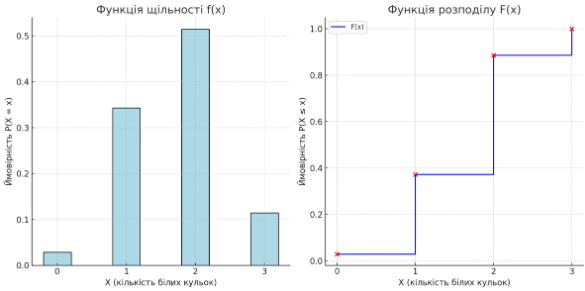
Асиметрія=

* Ексцес:

Ексцес=

#### Розрахунки та побудова графіків

Виконаємо розрахунки та побудуємо всі необхідні графіки.



Завод відправив на базу 500 цілих деталей. Імовірність зіпсування кожної деталі в дорозі . Знайти закон розподілу ДВВ , що дорівнює кількості зіпсованих деталей, і знайти ймовірності подій:

* пошкоджено менше, ніж 3 деталі;
* пошкоджено більше, ніж 2 деталі;
* пошкоджено хоча б одну деталь.

### Закон розподілу ДВВ XXX:

Біноміальний розподіл має вигляд:

P(X=k)=()pk(1−p)n−k,

де:

* X — кількість зіпсованих деталей,
* n = 500,
* p = 0.002,

Однак для великих n і малих p, біноміальний розподіл наближається до **розподілу Пуассона** з параметром:

λ = n ⋅ p=500 ⋅ 0.002 = 1

Для розподілу Пуассона:

P(X = k)=,k = 0, 1, 2,…

P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).

P(X = 0)= =e−1≈0.3679,

P(X = 1)= =e−1 ≈0.3679,

P(X = 2)= =e−1 = 0.1839.

Сума:

P(X < 3) = 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 = 0.9197 (91.97%)

1. **Пошкоджено більше, ніж 2 деталі P(X > 2):**

P(X > 2) = 1 − P(X ≤ 2),

де P(X ≤ 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).

Оскільки P(X ≤ 2) = P(X < 3) = 0.9197 , підставимо:

P(X > 2) = 1 − 0.9197 = 0.0803 (8.03%)

1. **Пошкоджено хоча б одну деталь (P(X≥1)P(X \geq 1)P(X≥1)):**

P(X ≥ 1) = 1 − P(X = 0).

Обчислимо P(X = 0):

P(X = 0)=e−1≈0.3679

Підставимо:

P(X ≥ 1) = 1 − 0.3679 = 0.6321 (63.21%).

 Пошкоджено менше, ніж 3 деталі: P(X < 3) = 0.9197 (91.97%)

 Пошкоджено більше, ніж 2 деталі: P(X > 2) = 0.0803 (8.03%)

 Пошкоджено хоча б одну деталь: P(X ≥ 1) = 0.6321 (63.21%)

Два стрілки роблять по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучення для першого стрілка внаслідок одного пострілу p\_1=0,5, для другого – p\_2=0,4. ДВВ X – кількість влучень у мішень. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ X, що дорівнює кількості влучень у мішень; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та δ–функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірності подій 1≤x≤3 та x>3; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

#### 1) Закон розподілу ДВВ X

Враховуючи, що перший стрілок має ймовірність влучення p1​=0.5, а другий стрілок має ймовірність влучення p2​=0.4, можна визначити кількість влучень X як біноміальну випадкову величину.

Розглянемо можливі варіанти кількості влучень:

* X = 0 (обидва не влучили): ймовірність цього випадку: (1 − p1)(1 − p2) = 0.5 × 0.6 = 0.3
* X = 1 (один із стрілків влучив): ймовірність цього випадку: p1(1 − p2) + (1 − p1)p2 = 0.5 × 0.6 + 0.5 × 0.4 = 0.3 + 0.2 = 0.5
* X = 2 (обидва влучили): ймовірність цього випадку: p1 × p2 = 0.5 × 0.4 = 0.2

Таким чином, закон розподілу для X виглядатиме так:

P(X = 0) = 0.3, P(X = 1) = 0.5, P(X = 2) = 0.2

#### 2) Функція розподілу та функція щільності

Функція розподілу F(x) для ДВВ X має вигляд:

F(x) =

F(x) =

Функція щільності розподілу, зважаючи на дискретність X, може бути виражена через функцію Хевісайда та δ - функцію Дірака:

f(x)=0.3δ(x−0) + 0.5δ(x − 1) + 0.2δ(x − 2)

#### 3) Графіки функцій розподілу та щільності

Для графіків функцій розподілу та щільності потрібно побудувати їх на основі виразів, які наведені в пункті 2. Графік функції розподілу буде сходити по стрибках у точках 0, 1 і 2, а графік функції щільності буде відображати відповідні ваги в точках 0, 1 і 2.

#### 4) Ймовірності подій

* P(1 ≤ X ≤ 3): це ймовірність того, що X приймає значення 1 або 2. Тому:  
  P(1 ≤ X ≤ 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5 + 0.2 = 0.7.
* P(X > 3) = 0, оскільки X може бути лише 0, 1 чи 2.

#### 5) Багатокутник розподілу

Багатокутник розподілу для XXX виглядатиме як сума висоти в кожній точці:

* у точці x = 0 висота буде 0.3,
* у точці x = 1 висота буде 0.5,
* у точці x = 2 висота буде 0.2.

#### 6) Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти

* Математичне сподівання M(X):

M(X) = 0 × 0.3 + 1 × 0.5 + 2 × 0.2 = 0 + 0.5 + 0.4 = 0.9.

* Дисперсія D(X):

D(X) = M(X2)−(M(X))2=(02×0.3+12×0.5+22×0.2)−0.92 = (0 + 0.5 + 0.8) − 0.81 = 1.3 − 0.81 = 0.49.

* Середнє квадратичне відхилення σ(X)= √D(X)= √0.49=0.7
* Моменти 3-го і 4-го порядку та центральні моменти можна обчислити за формулами для моментів.

#### 7) Асиметрія та ексцес

Асиметрія γ1\gamma\_1γ1​ та ексцес γ2\gamma\_2γ2​ для дискретного розподілу:

γ1=,

γ2=

НВВ X має рівномірний розподіл з параметрами a,b. Функція щільності рівномірного розподілу f(x)=1/(b-a),a≤x≤b. Вивести формулу функції рівномірного розподілу F(x), формулу для математичного сподівання M(x), дисперсії D(x), асиметрії As, ексцесу Ek, імовірності події α≤X≤b.

Для рівномірного розподілу з параметрами aaa та bbb:

* Функція розподілу F(x) для рівномірного розподілу:
* Математичне сподівання M(X): M(X) = .
* Дисперсія D(X): D(X)=
* Асиметрія As: As=0,для рівномірного розподілу асиметрія завжди дорівнює нулю.
* Ексцес Ek: Ek = − ​.
* Ймовірність події α≤X≤b для рівномірного розподілу: P(α ≤ X ≤ b)=