**Практична робота № 1**

**Тема. Елементи комбінаторики. Класичне визначення ймовірності. Застосування комбінаторики для розрахунку ймовірностей**

**Мета:** набути практичних навичок у розв’язанні задач з комбінаторики.

**Завдання №1**

Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаються будь-які можливі числа, кожне з яких складається не більше, ніж із 3 цифр. Скільки можливо скласти таких цифр, якщо:

а) повторення цифр у числах не дозволяється;

б) дозволяється повторення чисел?

### Розв’язання:

### Частина (а): Без повторення цифр

У цій частині потрібно скласти числа з цифр 1,2,3,4,51, 2, 3, 4, 51,2,3,4,5, але без повторення цифр у кожному числі. Ми можемо скласти числа, використовуючи одну, дві або три цифри, і порядок цифр важливий.

1. **Числа з однієї цифри:** всього 5 варіантів (1, 2, 3, 4, 5).
2. **Числа з двох цифр:** із 5 цифр можна вибрати 2 та впорядкувати їх P(5,2)=5×4=20P(5, 2) = 5 \times 4 = 20P(5,2)=5×4=20 способами.
3. **Числа з трьох цифр:** із 5 цифр можна вибрати 3 та впорядкувати їх P(5,3)=5×4×3=60P(5, 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60P(5,3)=5×4×3=60 способами.

Тепер підсумуємо кількість варіантів:

5 + 20 + 60 = 85

Отже, без повторення цифр можна скласти **85 різних чисел**.

**Частина (б): З повторенням цифр**

Тут дозволено повторення цифр, і також можна скласти числа з однієї, двох або трьох цифр:

1. **Числа з однієї цифри:** всього 5 варіантів (1, 2, 3, 4, 5).
2. **Числа з двох цифр:** на кожну позицію можна вибрати будь-яку з 5 цифр, що дає 5×5=255 \times 5 = 255×5=25 комбінацій.
3. **Числа з трьох цифр:** на кожну з трьох позицій можна вибрати будь-яку з 5 цифр, що дає 5×5×5=1255 \times 5 \times 5 = 1255×5×5=125 комбінацій.

Тепер підсумуємо кількість варіантів:

5 + 25 + 125 = 155

Отже, при дозволеному повторенні цифр можна скласти **155 різних чисел**.

**Завдання №2**

Групу з 20 студентів потрібно розділити на 3 бригади, за умови, що в першу бригаду повинні входити 3 людини, в другу – 5 і в третю – 12. Скількома способами це можливо виконати?

Щоб визначити кількість способів, якими можна розділити групу з 20 студентів на 3 бригади (3, 5 і 12 осіб), скористаємося комбінаторикою.

1. Спершу виберемо 3 студентів для першої бригади з 20. Це можна зробити: C(20,3)= 20!/(3!(20−3)!) ​=20!/(3!⋅17!) ​=(20×19×18)/6​=1140
2. Далі, виберемо 5 студентів для другої бригади з решти 17. Це можна зробити: C(17,5)= 17!/(5!(17−5)!) ​=17!/(5!⋅12!) ​=(17×16×15×14×13)/120​=6188
3. Нарешті, залишилося 12 студентів для третьої бригади, і ми можемо їх вибрати лише одним способом, оскільки вони всі залишилися в групі: C(12,12)=1

Отже, загальна кількість способів розподілу студентів у три бригади дорівнює добутку кількості способів вибору для кожної бригади:

1140×6188×1=7054320

Таким чином, **існує 7 054 320 способів** розділити групу з 20 студентів на три бригади (3, 5 і 12 осіб).

**Завдання №3**

Розглянемо обидві частини задачі, починаючи з підрахунку кількості можливих «слів» зі літер слова «зоологія».

**Частина 1: Кількість можливих «слів»**

Слово «зоологія» складається з 8 літер: з, о, о, л, о, г, і, я. В слові є повторювані літери: буква «о» з’являється 3 рази.

Щоб знайти кількість різних перестановок літер, скористаємося формулою для перестановок з повтореннями:

Кількість слів= n!​/(n1​!⋅n2​!⋅…⋅nk​!)

де nnn — загальна кількість літер, а nin\_ini​ — кількість повторень кожної літери.

Отже, підставимо значення:

* Загальна кількість літер n=8n = 8n=8 (літери: з, о, о, л, о, г, і, я)
* Кількість літер «о» n1=3n\_1 = 3n1​=3 (повторюється 3 рази)
* Кількість літер «з», «л», «г», «і», «я» по 1 разу (по 1 разу).

Тоді формула виглядає так: Кількість слів=8!​/(3!⋅1!⋅1!⋅1!⋅1!)

Обчислимо:

8!=40320  
3! = 6

Отже:

Кількість слів = 40320/6 = 6720

Таким чином, кількість можливих «слів» з літер слова «зоологія» становить **6720**.

### Частина 2: Слова з трьома «о», що розташовані поряд

Тепер розглянемо випадок, коли три літери «о» розташовані поряд. Щоб спростити підрахунок, об'єднаємо три літери «о» в один блок (позначимо його як «О»). Тоді у нас залишаться такі літери:

* О (блок «о»)
* з
* л
* г
* і
* я

Таким чином, у нас тепер 6 «літер»: О, з, л, г, і, я. Всі ці літери унікальні, тому кількість перестановок буде:  
6!=720  
Отже, кількість слів, що містять 3 літери «о», які розташовані поряд, дорівнює **720**.

**Завдання №4**

Скількома способами на шаховій дошці можливо вказати:

а) 2 клітинки?

б) 2 клітинки одного кольору?

в) 2 клітинки різного кольору?

### Частина (а): Кількість способів вибрати 2 клітинки

Шахова дошка має розміри 8x8, тобто 64 клітинки. Для того щоб вибрати 2 клітинки з цих 64, скористаємося комбінаціями: C(64,2)= 64!/(2!(64−2)!) ​=2/(64×63)​=2016  
Отже, кількість способів вибрати 2 клітинки на шаховій дошці становить **2016**.

### Частина (б): Кількість способів вибрати 2 клітинки одного кольору

На шаховій дошці є два кольори клітинок: чорні та білі. Кожен колір утворює 32 клітинки, оскільки шахова дошка має 8 рядів і 8 стовпців, і кольори чергуються.

Отже, для вибору 2 клітинок одного кольору ми можемо вибрати їх серед чорних клітинок або серед білих. Кількість способів вибору 2 клітинок одного кольору обчислюється так:

* Для чорних клітинок: C(32,2)=(32×31)/2=496
* Для білих клітинок: C(32,2)=(32×31)/2=496

Загальна кількість способів вибрати 2 клітинки одного кольору:

496+496=992

Отже, кількість способів вибрати 2 клітинки одного кольору становить **992**.

### Частина (в): Кількість способів вибрати 2 клітинки різного кольору

Оскільки на шаховій дошці кольори клітинок чергуються, кожну чорну клітинку можна поєднати з білою. Кількість способів вибрати 2 клітинки різного кольору:

32×32=1024

Отже, кількість способів вибрати 2 клітинки різного кольору становить **1024**.

### Висновок:

* (а) Кількість способів вибрати 2 клітинки: **2016**.
* (б) Кількість способів вибрати 2 клітинки одного кольору: **992**.
* (в) Кількість способів вибрати 2 клітинки різного кольору: **1024**.

**Завдання №5**

Скількома способами можливо розташувати на полиці 7 різних книг, якщо:

а) 2 певні книги повинні стояти поряд;

б) ці дві книги не повинні стояти поряд?

### Частина (а): 2 певні книги повинні стояти поряд

Якщо дві певні книги повинні стояти поряд, то ми можемо розглядати ці дві книги як один «блок» або «одну одиницю». Тобто, разом з іншими 5 книгами у нас буде 6 одиниць для розташування на полиці.

1. Кількість способів розташувати ці 6 одиниць (книг) на полиці:

6! = 720

1. Тепер, всередині цього «блоку» дві певні книги можуть бути розташовані двома способами (оскільки порядок книг важливий): одна книга може стояти першою, а інша — другою, або навпаки.

Отже, загальна кількість способів розташувати книги з урахуванням, що ці дві книги повинні стояти поряд:

6! × 2! = 720 × 2 = 1440

Таким чином, кількість способів розташувати книги так, щоб ці дві певні книги стояли поряд, дорівнює **1440**.

### Частина (б): Ці дві книги не повинні стояти поряд

Щоб знайти кількість способів, при яких дві певні книги **не стоять поряд**, скористаємося таким підходом:

1. Спершу знайдемо загальну кількість способів розташувати всі 7 книг без обмежень. Це просто:

7! = 5040

1. Далі знайдемо кількість способів, коли ці дві певні книги стоять поряд (як ми вже обчислили в частині (а), це 1440 способів).
2. Тепер, щоб знайти кількість способів, коли ці дві книги **не стоять поряд**, треба від загальної кількості відняти кількість випадків, коли книги стоять поряд:

7! − 6! × 2! = 5040 – 1440 = 3600

Отже, кількість способів розташувати книги так, щоб ці дві книги не стояли поряд, становить **3600**.