**Практична робота № 4**

**Тема. Схема Бернуллі**

**Мета:** набути практичних навичок розв’язання типових задач у рамках схеми Бернуллі.

**Завдання №1**

Знайдіть найбільш імовірну кількість випадінь герба внаслідок 25 кидань монети.

Кількість випадінь герба при 25 киданнях монети можна моделювати біноміальним розподілом, де кожне кидання має ймовірність p=0.5p = 0.5p=0.5 для герба. Для цього розподілу найімовірніша кількість випадінь герба є значенням, близьким до математичного сподівання.

**Знайдемо математичне сподівання та моду**

1. Математичне сподівання E(X)E(X)E(X) біноміального розподілу обчислюється за формулою:

E(X) = n ⋅ p

де n = 25 (кількість кидань), а p = 0.5 (ймовірність випадіння герба в одному киданні).

Отже,

E(X) = 25 ⋅ 0.5 = 12.5

Найімовірніше значення для біноміального розподілу (мода) — це найближче ціле число до математичного сподівання. У нашому випадку, значенням, найближчим до 12.5, є 12 або 13.

### Перевірка ймовірностей для 12 та 13 випадінь

Щоб визначити, яке з цих значень є більш імовірним, обчислимо ймовірності отримати рівно 12 і рівно 13 випадінь герба за допомогою формули біноміального розподілу:

P(X=k)=C(n,k)⋅pk⋅(1−p)n−k

#### Ймовірність випадіння герба рівно 12 разів

P(X=12)=C(25,12)⋅(0.5)12⋅(0.5)25−12=C(25,12)⋅(0.5)25

#### Ймовірність випадіння герба рівно 13 разів

P(X=13)=C(25,13)⋅(0.5)13⋅(0.5)25−13=C(25,13)⋅(0.5)25

Обчислюючи значення, отримаємо, що обидві ймовірності дуже близькі, але мода біноміального розподілу при симетричному випадку p = 0.5 зазвичай віддає перевагу цілому числу ближче до середини. Отже, значення **12 або 13 випадінь герба** є найбільш імовірним.

**Завдання №2**

Монету кинуто 10 разів. Знайдіть ймовірність того, що герб випаде: а) від 4 до 6 разів; б) хоча б один раз.

Давайте розв’яжемо завдання, використовуючи біноміальний розподіл, оскільки кожне кидання монети є незалежною подією з двома можливими результатами: герб або решка. Кількість кидань становить n=10n = 10n=10, а ймовірність випадіння герба за один кидок становить p=0,5p = 0,5p=0,5.

### Частина (а): Ймовірність того, що герб випаде від 4 до 6 разів

Нам потрібно знайти ймовірність того, що герб випаде від 4 до 6 разів. Це ймовірність об’єднання подій X=4X = 4X=4, X=5X = 5X=5 і X=6X = 6X=6, де XXX — кількість випадінь герба.

Ймовірність того, що герб випаде рівно kkk разів із 10, можна обчислити за допомогою формули біноміального розподілу:

P(X=k)=C(n,k)⋅pk⋅(1−p)n−k

де C(n, k) — число сполучень із nnn по k.

**Ймовірність випадіння герба рівно 4 рази**:

P(X=4) = C(10,4) ⋅ (0.5)4 ⋅ (0.5)10−4 = C(10,4) ⋅ (0.5)10

Обчислюємо

C(10,4)=10! / (4!⋅(10−4)!) = 210 :

P(X=4)=210⋅(0.5)10=210⋅ 1 / 1024=210 / 1024 ≈ 0.205

**Ймовірність випадіння герба рівно 5 разів**:

P(X=5)=C(10,5)⋅(0.5)5⋅(0.5)10−5=C(10,5)⋅(0.5)10

Обчислюємо C(10,5)=10! / (5!⋅(10−5)!)=252:

P(X=5) = 252 ⋅ (0.5)10 = 252 ⋅ 1 / 1024 = 252 / 1024 ≈ 0.246

**Ймовірність випадіння герба рівно 6 разів**:

P(X=6) = C(10,6) ⋅ (0.5)6 ⋅ (0.5)10 − 6 = C(10,6) ⋅ (0.5)10

Обчислюємо C(10,6)=10!6!⋅(10−6)!=210:

P(X=6) = 210 ⋅ (0.5)10 = 210 ⋅ 1 / 1024 = 210 / 1024 ≈ 0.205

Отже, ймовірність того, що герб випаде від 4 до 6 разів:

P(4≤X≤6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 0.205 + 0.246 + 0.205 = 0.656

### Ймовірність того, що герб випаде хоча б один раз

Ймовірність того, що герб випаде хоча б один раз, можна знайти як доповнення до події, що герб не випаде жодного разу (тобто випадуть тільки решки).

 Ймовірність того, що герб не випаде жодного разу (тобто X=0X = 0X=0):

P(X=0) = C(10,0) ⋅ (0.5)0 ⋅ (0.5)10 = 1⋅(0.5)10 = 1 / 1024 ≈ 0.00098

 Тоді ймовірність того, що герб випаде хоча б один раз:

P(X≥1) = 1 − P(X=0) = 1 − 0.00098 = 0.999

**Завдання №3**

Яка ймовірність того, що при киданнях монети орел випаде рівно разів?

При великій кількості кидань n=1000n = 1000n=1000 і ймовірності випадання орла p=0.5p = 0.5p=0.5, задачу можна наближено розв’язати за допомогою нормального розподілу, який добре підходить для таких великих значень nnn у біноміальному розподілі.

### Параметри нормального розподілу

Для біноміального розподілу з параметрами n і p, математичне сподівання (середнє значення) μ і дисперсія σ2 дорівнюють:

μ = n ⋅ p

σ2 = n ⋅ p ⋅ (1−p)

**Математичне сподівання**:

μ = 1000 ⋅ 0.5 = 500

**Середньоквадратичне відхилення**:

σ = √(1000 ⋅ 0.5 ⋅ (1−0.5)) = √250 ≈ 15.81

### Використання нормального розподілу

Щоб знайти ймовірність того, що орел випаде рівно 500 разів, ми можемо знайти ймовірність того, що значення знаходиться в інтервалі 499.5 ≤ X ≤ 500.5 (оскільки нормальний розподіл є неперервним, а біноміальний — дискретним, тому ми використовуємо корекцію на неперервність).

Обчислимо стандартне нормальне значення (z-значення) для границь інтервалу:

z1 = (499.5 – 500) / 15.81 ≈ −0.032

z2 = (500.5 – 500) / 15.81 ≈ 0.032

**Знаходимо ймовірності**

Використовуючи таблицю стандартного нормального розподілу для zzz-значень:

1. Ймовірність для z1 = -0.032 приблизно дорівнює 0.487.
2. Ймовірність для z2 = 0.032 приблизно дорівнює 0.513.

Отже, шукану ймовірність можна обчислити як:

P(499.5 ≤ X ≤ 500.5) ≈ 0.513 − 0.487 = 0.026

**Завдання №4**

Імовірність настання події А в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює p=0,8. Знайдіть імовірність того, що подія А відбудеться: а) 750 разів; б) 710 разів; в) від 710 до 740 разів.

За умови великої кількості випробувань n=900n = 900n=900 і ймовірності настання події p=0.8p = 0.8p=0.8, ми можемо використати наближення біноміального розподілу нормальним розподілом для розв'язання задачі.

### Параметри нормального розподілу

Для біноміального розподілу з параметрами nnn і ppp, математичне сподівання (середнє значення) μ\muμ і дисперсія σ2\sigma^2σ2 дорівнюють:

μ = n ⋅ p = 900 ⋅ 0.8 = 720

σ = √(n ⋅ p ⋅ (1−p)​) =900 ⋅ 0.8 ⋅ 0.2​ = √144​ = 12

### Використання нормального розподілу

Завдання — знайти ймовірність того, що подія AAA настане певну кількість разів. Використовуючи нормальне наближення, зробимо корекцію на неперервність, щоб отримати більш точні результати.

#### **Частина (а): Ймовірність того, що подія AAA настане 750 разів**

Нам потрібно обчислити ймовірність того, що X = 750. Для цього визначимо інтервал 749.5 ≤ X ≤ 750.5 і знайдемо відповідні zzz-значення.

1. z1 = (749.5 – 720) / 12 = 29.5 / 12 ≈ 2.46
2. z2 = (750.5−720) / 12 = 30.5 / 12≈2.54

За таблицею нормального розподілу:

* Ймовірність для z1 = 2.46 приблизно дорівнює 0.9931.
* Ймовірність для z2 = 2.54 приблизно дорівнює 0.9945.

Тоді ймовірність того, що подія AAA настане рівно 750 разів:

P(749.5 ≤ X ≤ 750.5) ≈ 0.9945 − 0.9931 = 0.0014

#### **Частина (б): Ймовірність того, що подія AAA настане 710 разів**

Для цього обчислимо ймовірність для інтервалу 709.5≤X≤710.5:

z1 = (709.5−720) / 12 = −10.5 / 12 ≈ −0.88

z2 = (710.5−720) / 12 = −9.5 / 12 ≈ −0.79

За таблицею нормального розподілу:

* Ймовірність для z1 = −0.88 приблизно дорівнює 0.1894.
* Ймовірність для z2 = −0.79 приблизно дорівнює 0.2148.

Тоді ймовірність того, що подія AAA настане рівно 710 разів:

P(709.5 ≤ X ≤ 710.5) ≈ 0.2148 − 0.1894 = 0.0254

#### **Частина (в): Ймовірність того, що подія AAA настане від 710 до 740 разів**

Тут шукаємо ймовірність для інтервалу 709.5 ≤ X ≤ 740.5

1. Для нижньої межі 709.5: z = -0.88, ймовірність ≈ 0.1894.
2. Для верхньої межі 740.5: z = (740.5−720) / 12 = 20.5 / 12 ≈ 1.71, ймовірність ≈0.9564.

Ймовірність того, що подія AAA настане від 710 до 740 разів:

P(709.5 ≤ X ≤ 740.5) ≈ 0.9564 − 0.1894 = 0.767

**Завдання №5**

Імовірність того, що електролампочка, виготовлена заводом, є бракованою, дорівнює 0,02. Для контролю відібрано навмання 1000 лампочок. Оцінить імовірність того, що частота бракованих лампочок у вибірці відрізняється від імовірності 0,02 менше, ніж на 0,01.

Нехай p = 0.02 — ймовірність того, що окрема лампочка є бракованою, а n = 1000 — кількість лампочок у вибірці. Нам потрібно оцінити ймовірність того, що частка бракованих лампочок у вибірці буде знаходитися в межах 0.02 ± 0.01 (тобто в інтервалі 0.01 ≤ p ≤ 0.03).

**Математичне сподівання і дисперсія**

При великому n можна скористатися нормальним наближенням для оцінки ймовірності, оскільки біноміальний розподіл можна наближено представити нормальним. Задаємо параметри нормального розподілу:

1. **Математичне сподівання частки бракованих лампочок**:

μ = p = 0.02

1. **Стандартне відхилення частки**:

σ = √((p(1−p)) / n)= √((0.02×0.98) / 1000) ≈ 0.0044

**Обчислення ймовірності**

Нам потрібно знайти ймовірність того, що вибіркова частка p^​ буде в межах 0.01 ≤ p ≤ 0.03. Визначимо z-значення для меж інтервалу:

1. Для нижньої межі p=0.01:

z1 =(0.01−0.02) / 0.0044 ≈ −2.27

1. Для верхньої межі p=0.03:

z2 = (0.03−0.02) / 0.0044 ≈ 2.27

**Ймовірності за стандартним нормальним розподілом**

З таблиці стандартного нормального розподілу знаходимо ймовірності:

* Ймовірність для z = -2.27 приблизно дорівнює 0.0116.
* Ймовірність для z = 2.27 приблизно дорівнює 0.9884.

Тоді ймовірність того, що частка бракованих лампочок буде в межах 0.01 ≤ p ≤ 0.03:

P(0.01 ≤ p ≤ 0.03) = 0.9884 − 0.0116 = 0.9768