Modelos Estocásticos en la Ingeniería: Aplicaciones de las Cadenas de Markov

Aitor Acedo Legarre

12 de Agosto de 2003

Powered by LaTeX.

Contents

1 Introducción del problema **3**

2 Teoría **5**

2.1 Proceso de Poisson 5

2.1.1 Probabilidades de estado 6

2.1.2 Probabilidades de transición y límite de probabilidades 7

2.1.3 Tiempos entre llegadas y tiempos de espera 8

2.2 Procesos de nacimiento y muerte 8

3 Modelos utilizados en el problema **10**

3.1 Modelos de Voz 10

3.1.1 Modelo de Actividad y Silencio (ON-OFF) 10

3.1.2 Modelo de Nacimiento y Muerte 14

3.1.3 Modelo de Fluidos 17

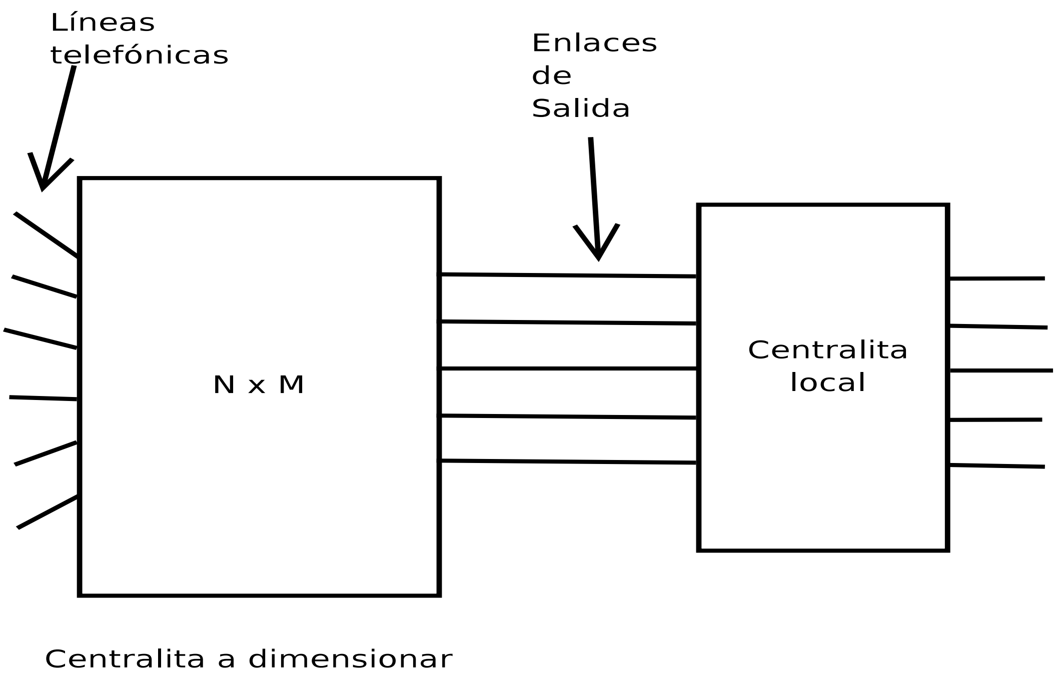
3.1.4 Conclusión 19

4 Bibliografía **20**

5 Agradecimientos **21**

1 Introducción del problema

El objetivo de este trabajo será el de explicar los posibles modelos que podemos utilizar cuando estudiemos el comportamiento de las fuentes de información, dichas fuentes alimentarán a los dispositivos que forman parte de una red de telecomunicaciones, por lo que es de gran utilidad conocer su comportamiento para poder realizar un diseño eficiente de una red de telecomunicaciones. Este es el primer problema que deberemos tratar cuando queremos dimensionar ciertos dispositivos como por ejemplo las centralitas telefónicas. Para no hablar de situaciones genéricas, y aprovechando que se ha mencionado el problema común del dimensionado de las centralitas, analizaremos los posibles modelos que pueden ser aplicados a las fuentes de voz que será la información que llegue a un centralita de teléfonos analógicos.



Como se puede observar en la figura tenemos un pequeño ejemplo de lo que es una jerarquía de centralitas que constituyen parte de una red telefónica, la primera centralita, la dibujada más a la izquierda es la que nos proondríamos dimensionar, a ella están entrando N líneas telefónicas analógicas, que conducirán la voz de los abonados hasta la centralita. Después tendremos M enlaces a la siguiente centralita, estos enlaces serán los que lleven la información multiplexada de todas las entradas telefónicas que nos han llegado, la cuestión final que deberíamos resolver es que cantidad de líneas de entrada y de salida serán necesarias para garantizar un funcionamiento óptimo de la centralita. Para la resolución de nuestro problema vamos a echar mano de los modelos de Markov que son frecuentemente utilizados en el mundo de las telecomunicaciones para modelar el comportamiento de las fuentes de voz.

2 Teoría

2.1 Proceso de Poisson

Un ejemplo de cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados discreto es el proceso de Poisson. Consideremos, por ejemplo, los tiempos que transcurren entre los accidentes en la central energética.

Sea $N = \{N_t, t \geq 0\}$ el proceso definido como N_t="número de accidentes hasta el instante t". Se dice que es un proceso de Poisson si verifica

(a) Cualquier trayectoria del proceso N crece a saltos de una unidad y $N_0 = 0$,

(b) $\forall t, s \geq 0$, $N_{t+s} - N_t$ es independiente de $\{N_u, u \leq t\}$,

(c) $\forall t, s \geq 0$, la distribución de $N_{t+s} - N_t$ es independiente de t.

Se puede ver que estas hipótesis son físicamente razonables para este proceso. La experiencia nunca ha producido dos rupturas simultáneas, por lo tanto el número de rupturas aumenta de uno en uno. La segunda hipótesis indica que lo ocurrido en tiempos anteriores no influye en la ocurrencia del fenómeno en un período posterior. La tercera hipótesis indica que los accidentes ocurren con la misma intensidad en cualquier época o instante de tiempo, de forma que, el número de ocurrencias durante un periodo de tiempo sólo depende de la amplitud del intervalo. Estas hipótesis implican que la distribución de $N_{t+s} - N_t$ es una variable de Poisson de parámetro igual a la intensidad por la amplitud del intervalo, es decir, λs.

2.1.1 Probabilidades de estado

Para encontrar las probabilidades de estado o de transición nos podemos basar en las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{array}{l} P(N_{t+s} - N_t = 0) = 1 - \lambda s + o(s) \\ P(N_{t+s} - N_t = 1) = \lambda s + o(s) \\ P(N_{t+s} - N_t = k) = o(s), \;\; k \geq 2 \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(N_{t+s} = n) \; &= \sum_{k=0}^{n} P(N_t = k) P(N_{t+s} - N_s = n - k) = \\ &= o(s) + P(N_t = n-1)(\lambda s + o(s)) + P(N_t = n)(1 - \lambda s + o(s)) = \end{aligned}$$

$\frac{P(N_{t+s}=n)-P(N_t=n)}{s} = P(N_t = n-1)\lambda - P(N_t = n)\lambda + \frac{o(s)}{s} \Rightarrow$

$\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{P(N_{t+s} = n) - P(N_t = n)}{s} = {p_n}'(t) = P_{n-1}(t)\lambda - P_n(t)\lambda$ y para $n = 0$

$p_0'(t) = -p_0(t)\lambda$ donde se ha denotado $p_n(t) = P(N_t = n)$

Las ecuaciones anteriores se resuelven de forma recursiva,

$$\left.\begin{array}{l} {p_0}'(t) = -p_0(t)\lambda \\ p_0(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\left.\begin{array}{l} {p_{10}}'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t) = -\lambda p_1(t) + e^{-\lambda t} \\ p_1(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

En general, $p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$, luego la distribución de N_t es Poisson con parámetro λt. La resolución de estas ecuaciones puede realizarse recurriendo a la función generatriz de probabilidades de N_t (z-transformada).

Sea $W(z,t) = E(z^{N_t}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t)$, entonces de las ecuaciones anteriores,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k'(t) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} z^k P_{k-1}(t) - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dW(z,t)}{dt} = \lambda z W(z,t) - \lambda W(z,t) = \lambda W(z,t)(z-1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} W(z,t) = Ce^{\lambda t(z-1)} \\ W(z,0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow W(z,t) = e^{\lambda t(z-1)}$$

por tanto, la función generatriz de probabilidades de N_t corresponde a una distribución de Poisson. Las probabilidades se pueden obtener mediante

$$\frac{1}{n!} \left.\frac{d^n W(z,t)}{dz^n}\right|_{t=0} = p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Las funciones generatriz de momentos o característica (transformada de Laplace o la de Fourier) se pueden utilizar con todas sus propiedades, que simplifican la obtención de la solución en la ecuación diferencial correspondiente.

2.1.2 Probabilidades de transición y límite de probabilidades

Las probabilidades de transición pueden obtenerse de forma parecida a partir de las ecuaciones 'backward':

$$\begin{array}{l} p_{ii}'(t) = -\lambda p_{ii}(t), \ \forall i \\ p_{ij}'(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{(i+1)j}(t), \ \forall j \geq i+1 \\ p_{ij}'(t) = 0, \ \forall j < i \end{array}$$

o de las ecuaciones 'forward':

$$\begin{array}{l} p_{ii}'(t) = -\lambda p_{ii}(t), \ \forall i \\ p_{ij}'(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i(j-1)}(t), \ \forall j \geq i+1 \\ p_{ij}'(t) = 0, \ \forall j < i \end{array}$$

en cualquier caso, las soluciones son

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j \geq i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

Puede verse que en el proceso de Poisson los límites de las probabilidades de transición, cuando t tiende a infinito, son 0. Esto significa que en el largo plazo las probabilidad de que nos encontremos en un estado n cualquiera es nula. Esto es lógico dada la definición del proceso que cuenta las ocurrencias de un determinado fenómeno y tiene trayectorias nunca decrecientes.

2.1.3 Tiempos entre llegadas y tiempos de espera

El tiempo que transcurre entre dos accidentes consecutivos, se puede demostrar, tiene una distribución exponencial. Esta es otra característica que permite identificar un proceso de Poisson.

Teorema

Un proceso es de Poisson si y sólo si los tiempos entre llegadas sucesivas son independientes, idénticamente distribuidos con distribución exponencial.

Consecuencia de esto y de la independencia de lo ocurrido en intervalos de tiempo no solapados, se demuestra que, el tiempo hasta que llega la k-ésima ocurrencia sigue una distribución *Gamma* de parámetros k y la tasa de llegadas del proceso.

2.2 Procesos de nacimiento y muerte

Consideramos una cadena de Markov en tiempo continuo, en que el espacio de estados es $\{0, 1, 2, \ldots\}$ y donde las transiciones sólo pueden darse desde un estado a los contiguos, de forma que la matriz de tasas de transición es:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \cdots \end{pmatrix}$$

y el diagrama de transiciones es el de la figura 4.2. De loa anterior, se obtiene las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov "forward",

$$p'_{i0}(t) = -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t)$$
$$p_{ij}{}'(t) = \lambda_{j-1}p_{i(j-1)}(t) - (\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t) + \mu_{j+1}p_{i(j+1)}(t), \;\; j = 1, 2, \ldots$$

La estructura del problema refleja la población en un instante determinado, considerando que los individuos nacen y mueren de uno en uno, con tasas de nacimiento λ_j y muerte μ_j, que dependen del estado del proceso j. Las probabilidades de estado a largo plazo pueden encontrarse a partir de las ecuaciones de balance

$$\lambda_0 q_0 = \mu_1 q_1$$
$$(\lambda_j+\mu_j)q_j = \lambda_{j-1}q_{j-1} + \mu_{j+1}q_{j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

que dan lugar a la relación $q_{j+1} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} q_j$ y por lo tanto, la solución de dicho sistema de ecuaciones es:

$$q_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} q_0 q_0 = \begin{cases} \frac{1}{S} & \text{si la serie } S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \\ & \text{es convergente} \\ 0 & \text{la serie no es convergente} \end{cases}$$

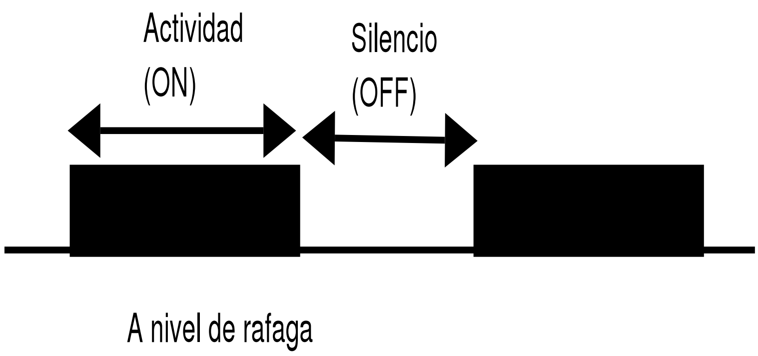
3 Modelos utilizados en el problema

Como se dijo en la introducción nuestro objetivo es el de dimensionar una centralita telefónica a la que llegan líneas de teléfonos analógicos, por esas líneas nos llegara la voz de los abonados mientras están realizando las llamadas. La parte más importante para poder dimensionar correctamente la centralita será modelar el comportamiento que tenemos en cada una de las líneas telefónicas, es decir, tenemos que saber de una manera aproximada como se comporta una fuente de voz, vamos a centrarnos en los modelos de fuentes de voz por ser la parte más relevante y en la que se aplica la teoría de Cadenas de Markov. En la siguiente sección explicaremos los distintos modelos de voz que podemos utilizar para la resolución de nuestro problema.

3.1 Modelos de Voz

3.1.1 Modelo de Actividad y Silencio (ON-OFF)

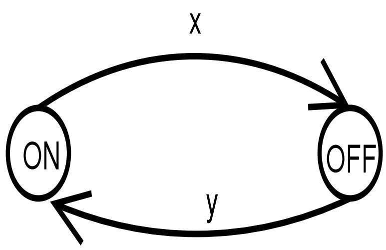
Modela las fuentes de voz a través de un proceso de dos estados, es decir, ña voz consiste en una secuencia alternada de:



- Los períodos de actividad, denominados ON, tienen una duración aproximada de 0.4 a 1.2 segundos

- Los períodos de silencio, denminados OFF, tienen una duración de 0.6 a 1.8 segundos

El *tiempo de permanencia* en cada uno de los estados está *exponencialmente distribuído.*
Durante el período de actividad (ON) los paquetes se generan con una tasa constante o pueden generarse siguiendo una distribución exponencial lo que nos daría lugar a un modelo IIP (o lo que es lo mismo un modelo de proceso de Poisson interrumpido).
Teniendo la situación descrita anteriormente modelaremos el sistema como un proceso de nacimiento y muerte de dos estados (es posible mejorar el modelo añadiendo más estados pero se complica la representación).
La representación del sistema de que hemos descrito sería algo parecido a esto:



x, y son las tasas de transición. El tiempo medio de permanencia en el estado ON será $\frac{1}{y}$, y el tiempo medio en el estado OFF será $\frac{1}{x}$.
El factor de actividad se define como la probabilidad de que la fue esté activa lo denotaremos matemáticamente como:

$$P(ON) = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+y}$$

Ejemplo: si tenemos que $\frac{1}{y} = 0.4$ segundos y $\frac{1}{x} = 0.6$ segundos tendremos:

$$P(activo) = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{1}{1+\frac{0.6}{0.4}} = 0.4$$

Lo que implica que sobre un mismo enlace caben $\frac{1}{0.4} = 2.5$ usuarios.

Ejemplo:

Supongamos que en el proceso de codificación de voz muestreamos cada 125μsegundos (o lo que es lo mismo 8KHz de frecuencia) y cada muestra se codifica con 8 bits, lo que supone 256 niveles. Cada muestra ocupará un octeto de una celda ATM. Por tanto durante el período de actividad se genera una celda cada 5.875 msegundos, es decir, se generan 170 celdas en cada segundo.

$$\frac{53-5}{5.875} = 8 * 10^3$$

Tenemos 53 octetos por tratarse de celdas ATM y 5 octetos de cabecera en la celda.

Supongamos que tenemos un enlace de capacidad 3000 celdas/segundo y que deseamos hallar el número de fuentes de voz que puede soportar. Tenemos dos alternativas: CASO A:

$$N^o DeFuentes = \frac{CapacidadDelEnlace}{V} = C$$

$$CapacidadDelEnlace = C * V$$

En este caso consideraremos que el período de actividad es contínuo.

CASO B: Aprovechamos el multiplexado estadístico de las fuentes.

$$N^o DeFuentes = \frac{CapacidadEnlace}{V * \left(\frac{x}{x+y}\right)} = N$$

El segundo factor del denominador será la tasa promedio de generación de celdas.

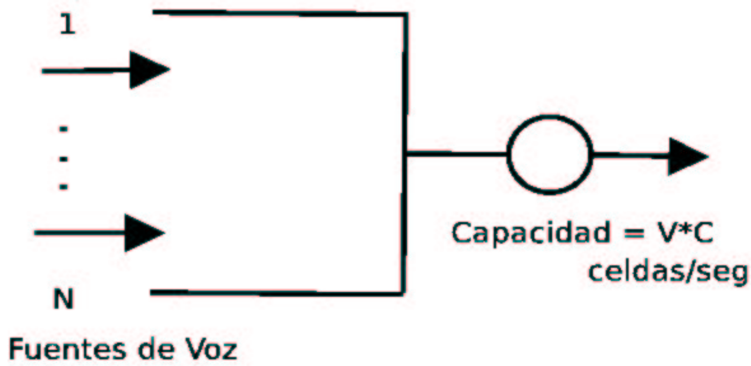
$$N * V * \left(\frac{x}{x+y}\right) \leq C * V$$

Condición de Estabilidad:

$$N * \left(\frac{x}{x+y}\right) \leq C$$

$$\rho = \frac{x}{x+y} * \frac{N}{C} \leq 1$$

ρ es el factor de utilización de la red

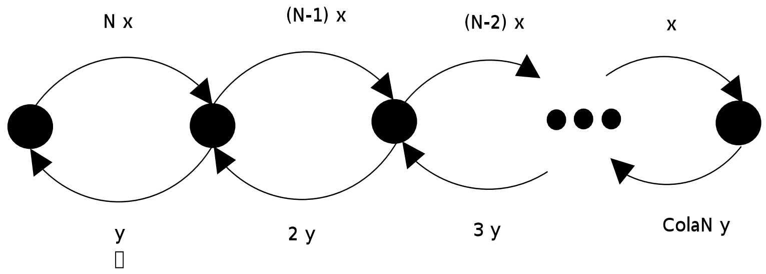


Dado el modelo ON-OFF para una fuente de voz, nos interesaría encontrar un modelo para la multiplexación de N fuentes de voz que nos permita determinar el comportamiento y diseñar parámetros como:

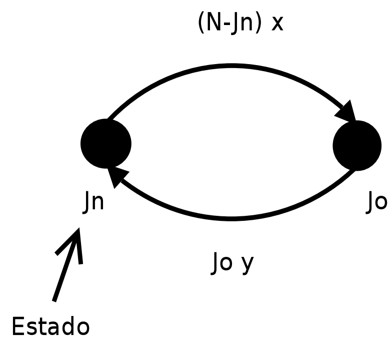
- Estadística de la ocupación de la cola.
- Retardo (Calidad de servicio de la voz).
- Tamaño de la cola para una probabilidad de pérdida dada.

3.1.2 Modelo de Nacimiento y Muerte

Para modelar el multiplexado de N fuentes *independientes*, cada una de ellas representada por un modelo ON-OFF (2 estados) y *no sincronizadas*



En este modelo cada estado representa en número de fuentes activas. En el estado i, por ejemplo, tenemos i fuentes activas con lo cual la tasa media de celdas que llegan al buffer es de i*V celdas/seg.



¿Cuál es la posibilidad de que el sistema esté en el estado i?

$$P\,(\text{Fuente Activa}) = \frac{x}{x+y}$$

$$P\,(\text{Fuente En Silencio}) = \frac{y}{x+y}$$

Si tenemos N fuentes de las cuales i están activas y $(N-i)$ están en silencio, la probabilidad de estar en este estado la podemos obtener a partir de una *binomial.*

$$\pi_i = \binom{N}{i} * \left(\frac{x}{x+y}\right)^i * \left(\frac{y}{x+y}\right)^{N-i}$$

La expresión se puede reescribir como:

$$\pi_i = \binom{N}{i} * \left(\frac{x}{y}\right)^i * \left(1+\frac{x}{y}\right)^{-N}$$

Otra forma de obtener la solucióna anterior es aplicar

$$\left.\begin{array}{l} \pi_i = \frac{x_0 * x_1 \ldots * x_{i-1}}{y_1 * y_2 * \ldots * y_i} * \pi_0 \\ \sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1 \end{array}\right\}$$

Estas fórmulas son válidas en procesos de nacimiento y muerte. Otra forma de representar el proceso de nacimiento y muerte es a través de las *ecuaciones de balance*:

$$\begin{array}{ll} i=0 & N * x * \pi_0 = y * \pi_1 \\ 1 \le i \le N-1 & \pi_i * (i * y + (N-i) * x) = [N-(i-1)] * x * \pi_{i-1} + \\ & +(i+1) * y * \pi_{i+1} \\ i=N & N * y * \pi_N = x * \pi_{N-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} i=0 & N * x * \pi_0 = y * \pi_1 \\ 1 \le i \le N-1 & \pi_i * [i * y + (N-i) * x] = [N-(i-1)] * x * \pi_{i-1} + \\ & +(i+1) * y * \pi_{i+1} \\ i=N & N * y * \pi_N = x * \pi_{N-1} \end{array}$$

Reescribiendo las ecuaciones

$-N*x*\pi_0+y*\pi_1=0$
$N*x*\pi_0-[y+(N-1)*x]*\pi_1+2*y*\pi_2=0$
$(N-(i-1))*x*pi_{i-1}-[i*y+(N-1)*x]*\pi_i+(i+1)*y*\pi_{i+1}=0$
$\ldots$
$x*\pi_{N-1}-N*y*\pi_N=0$

Si definimos el vector fila de $N+1$ componentes

$$\overline{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_N)$$

El conjunto de ecuaciones anteriores se puede expresar de forma compacta como

$$\overline{\pi}*M=0$$

Donde M es una matriz (N+1)*(N+1)

$$M=\begin{pmatrix} -N*x & N*x & 0 & \ldots \\ x & -[y+(N-1)*x] & (N-1)*x & \ldots \\ 0 & 2*y & -(N-2)*x-2*y & \ldots \\ 0 & 0 & 3*y & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior $\overline{\pi}*M=0$ obtenemos la probabilidad de tener i fuentes activas.

Estabilidad del sistema:

- Cuando $C>i$ la cola tiende a vaciarse.
- Cuando $C<i$ la cola tiende a llenarse.

La tasa de cambio en la cola es $V*(C-i)$ celdas/seg.

Estado de sobrecarga $= J_0 = \lceil C \rceil$. Será el entero superior.

Estado de infracarga $= J_n = \lfloor C \rfloor$. Será la parte entera de C.

Con este modelo, ¿cómo vamos a calcular parámetros com retardo, pérdidas y tamaño del buffer requierido?

Tenemos varias opciones de análisis:

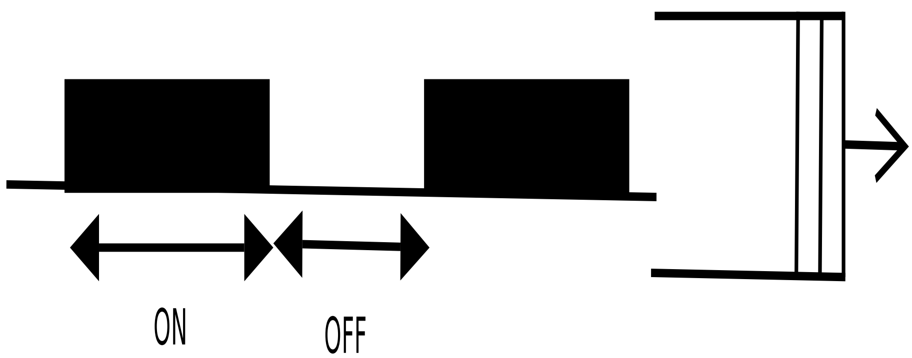
(1) Analizar la llegada periódica de celdas a Tasa V en cada fuente.

(2) Analizar la generación de celdas (paquetes) en cada fuente, en estado activo, como un proceso de Poisson, con paquetes de longitud exponencialemente distribuídos.

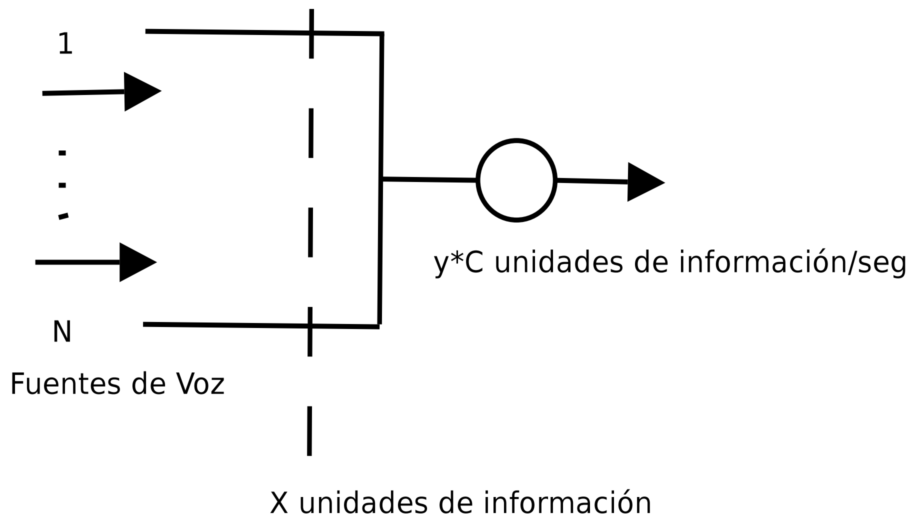
(3) Asumir que cada fuente activa transmite información uniformemente con el enlace y el servidor operando de la misma forma (Modelo de Fluidos)

3.1.3 Modelo de Fluidos

Modelo ON-OF a nivel de celda.



Tendremos que hacer alguna suposición como por ejemplo que el número de celdas generadas durante el período de actividad es tan grande que se asemeja a un flujo contínuo. Esta suposición es especialmente válida cuando el número de fuentes multiplexadas, N, y la capacidad $V * C$ son tan grandes que el carácter discreto del buffer debido a la llegada y salida de celdas es despreciable. El estado del buffer será representado por una variable aleatoria contínua X, esta indicará la ocupación del buffer.



X se define como el número de celdas que llegan durante un "talkspurt", o período en el que la fuente está activa.

Una fuente genera celdas a V celdas/seg durante un período de longitud media $1/y$ segundos, por tanto, en media X se incrementa en V/y durante un "talkspurt".
A V/y lo llamamos *UNIDAD DE INFORMACIÓN*. En un sistema con una capacidad de $V*C$ celdas/seg la capacidad equivalente es de $\frac{V*C}{(\frac{V}{y})} = y * C$ unidades de información por segundo.

$y{*}C$ será pues la CAPACIDAD NORMALIZADA A UNIDADES DE INFORMACIÓN.

3.1.4 Conclusión

Gracias a estos modelos que definen un comportamiento para las fuentes de voz que llegan a la centralita podremos ser capaces de realizar el dimensionado adecuado del buffer que deberemos tener, marcándonos unos márgenes de calidad de servicio que tendrá que cumplir nuestra centralita, estos parámetros requeridos para cumplir una cierta calidad de servicio en las líneas serán todas de las normativas internacionales y quedan fuera del alcance de trabajo. Con esto hemos dado varios ejemplos de modelos que podemos utilizar a la hora de ver el comportamiento de las fuentes de voz, dentro del mundo de las telecomunicaciones.

4 Bibliografía

- Apuntes de Modelos Estocásticos de la Ingeniería (Curso 2002-2003)
- Introduction to Probability Models Seventh Edition Sheldon M. Ross
- Apuntes de Técnicas de Control de Redes (Curso 2002-2003)

5 Agradecimientos

Antes de finalizar quisiera agradecer el tiempo invertido por Ignacio Martínez, profesor de Accesos Digitales, intentando hacer que entiendera los conceptos de telecomunicaciones que subyacen en la problemática anteriormente expuesta.