

Zbigniew Skup

Podstawy automatyki i sterowania

Warszawa 2012



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓŁNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Politechnika Warszawska
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Kierunek "Edukacja techniczno informatyczna"
02-524 Warszawa, ul. Narbutta 84, tel (22) 849 43 07, (22) 234 83 48
ipbmvr.simr.pw.edu.pl/spin/, e-mail: sto@simr.pw.edu.pl

Opiniodawca: dr inż. Krzysztof FALKOWSKI

Projekt okładki: Norbert SKUMIAŁ, Stefan TOMASZEK

Projekt układu graficznego tekstu: Grzegorz LINKIEWICZ

Skład tekstu: Magdalena BONAROWSKA

Publikacja przeznaczona jest dla studentów kierunku
"Edukacja techniczno informatyczna"

Copyright © 2012 Politechnika Warszawska

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany
ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych,
kopiących, nagrywających i innych bez pisemnej zgody posiadacza praw
autorskich.

ISBN 83-89703-87-4

Druk i oprawa: STUDIO MULTIGRAF SP. Z O.O.,
ul. Ołówiana 10, 85-461 Bydgoszcz

Spis treści

Wstęp..... 7

1. Wprowadzenie do podstaw automatyki..... 9

1.1. Pojęcia podstawowe	10
1.2. Klasyfikacja układów automatyki	13
1.3. Właściwości liniowych układów automatyki	16
1.4. Sygnały w układach automatycznej regulacji.....	18
1.5. Zasady rachunku operatorowego.....	21
1.6. Transmitancja operatorowa i jej właściwości.....	27

**2. Charakterystyki liniowych elementów
i układów automatyki..... 31**

2.1. Wprowadzenie	32
2.2. Charakterystyki czasowe (skokowe)	33
2.3. Charakterystyki częstotliwościowe	33
2.4. Charakterystyki logarytmiczne	37

**3. Właściwości dynamiczne podstawowych
liniowych elementów automatyki 47**

3.1. Wprowadzenie	48
3.2. Elementy proporcjonalne (bezineracyjne).....	50
3.3. Elementy inercyjne pierwszego rzędu	54
3.4. Elementy inercyjne drugiego rzędu (oscylacyjne)	58
3.5. Elementy całkujące.....	64
3.6. Elementy różniczkujące.....	69
3.7. Elementy opóźniające.....	76

**4. Opis układów automatyki
za pomocą schematów strukturalnych..... 81**

4.1. Schematy konstrukcyjne i blokowe (strukturalne)	82
4.2. Przekształcenia schematów blokowych.....	84

5. Rodzaje regulatorów oraz ich charakterystyki 97

5.1. Wprowadzenie	98
5.2. Podstawowa klasyfikacja regulatorów	99
5.3. Regulatory proporcjonalne	101
5.4. Regulatory całkujące	103
5.5. Regulatory proporcjonalno-całkujące.....	105
5.6. Regulatory proporcjonalno- różniczkujące.....	110
5.7. Regulatory proporcjonalno-całkująco-różniczkujące	118
5.8. Wybór typu i nastaw regulatorów	122

6. Stabilność liniowych układów automatyki 129

6.1. Ogólne warunki stabilności	130
6.2. Kryterium Hurwitza oceny stabilności układów automatyki ...	133
6.3. Kryterium Nyquista oceny stabilności układów automatyki....	135
6.4. Ocena stabilności układów automatyki poprzez kryterium zapasu modułu i fazy	139

7. Wprowadzenie do układów automatycznego sterowania 151

7.1. Pojęcia podstawowe	152
7.2. Rodzaje regulacji	153
7.3. Elementy prostego i złożonego układu automatycznej regulacji.....	154
7.4. Charakterystyki skokowe obiektów statycznych.....	158
7.5. Charakterystyki skokowe obiektów astatycznych	160
7.6. Kryteria oceny jakości liniowych układów automatyki	162

8. Opis liniowych układów regulacji w przestrzeni stanów. 185

8.1. Wprowadzenie	186
8.2. Klasyfikacja modeli matematycznych opisujących układy dynamiczne stacjonarne ciągłe (DLSC)	187
8.3. Przestrzeń zmiennych stanu, wybór zmiennych stanu	188
8.4. Opis układów DLSC we współrzędnych stanu (równania stanu i wyjścia, zapisane postaci ogólnej i macierzowo-wektorowej).....	189
8.5. Wyznaczenie transmitancji operatorowej układu DLSC opisanego równaniem stanu i równaniem wyjścia.....	199

8.6. Wyznaczenie równania stanu i równania wyjścia dla układów opisanych równaniem różniczkowym zwyczajnym wyższego rzędu	201
8.7. Metoda bezpośrednią, równoległą i iteracyjną opisu układu DLSC we współrzędnych stanu.....	204
8.8. Rozwiązywanie równań stanu układów automatyki DLSC	215
8.9. Sterowalność i obserwowałość układów automatyki DLSC ..	224
8.10. Układy wielowymiarowe.....	230

Literatura..... 235

9. Ćwiczenia laboratoryjne..... 239

9.1. Badanie układu dwupołożeniowej regulacji temperatury.....	240
9.2. Badanie regulatorów Eftronik X i układu sterowania z regulatorem PID LB 600	265
9.3. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe układów automatyki	298

Wstęp

Niniejszy skrypt został opracowany w ramach realizacji Programu Rozwojowego Politechniki Warszawskiej współfinansowanego ze środków PROGRAMU OPERACYJNEGO KAPITAŁ LUDZKI. Przeznaczony jest dla studentów studiów inżynierskich na kierunku „*Edukacja techniczno-informatyczna*” na Wydziale Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej.

Koncepcja opracowania rozdziałów 1-6 zakłada stopniowe opanowywanie zagadnień niezbędnych do znajomości i zrozumienia **podstaw automatyki** jako bazy wyjściowej do **podstaw sterowania** układów regulacji automatycznej, przedstawionych w rozdziałach 7 i 9. Rozdział 9 zawiera opracowanie zestawu ćwiczeń laboratoryjnych jako podsumowanie i zastosowanie opracowanych w skrypcie zagadnień.

Opracowanie ma na celu ułatwienie studentom słuchanie wykładów z „Podstaw automatyki i sterowania” oraz uwolnienie ich od przenoszenia do własnych notatek niektórych rysunków i wykresów oraz tablic. Materiał zawarty w skrypcie dotyczy zagadnień teoretycznych, podaje przykłady zadań rozwiązań, a także opracowanie podstawowych ćwiczeń laboratoryjnych.

Wszystko to będzie stanowić istotną pomoc w przygotowaniu słuchaczy do egzaminu, jeżeli zostanie uzupełnione własnymi notatkami i komentarzami podczas wykładów. Należy pamiętać, że wykład połączony z możliwością wyjaśnienia powstałych wątpliwości, daje, szanse dobrego opanowania przedmiotu. Skrypt opracowany został na podstawie wykładów, ćwiczeń audytorijnych i laboratoryjnych wcześniej prowadzonych na Wydziale. W większości przypadków, skrypt będzie służył studentom, dla których znajomość zagadnień z podstaw automatyki i sterowania jest w przyszłej praktyce inżynierskiej konieczna do właściwej współpracy z automatykami – specjalistami. Na technologach i konstruktorach spoczywać będzie obowiązek dostarczania niezbędnych informacji o własnościach statycznych i dynamicznych automatyzowanych obiektów, nadzoru nad przebiegiem zautomatyzowanych różnych procesów. Spełnienie tych zadań wymaga znajomości układów automatyki,

ich zasad działania, operowania schematami blokowymi i podstawowymi charakterystykami elementów i układów automatyki. Całość materiałów pomocniczych podanych w niniejszym skrypcie uzupełniają jeszcze opracowane przez pracowników Zespołu Mechaniki i Teorii Maszyn Wydziału SiMR skrypty „Podstawy teorii maszyn i automatyki” (autor: Tadeusz Kołacin, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005), „Ćwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki i teorii maszyn” (praca zbiorowa pod redakcją Tadeusza Kołacina, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1999), „Zbiór zadań do ćwiczeń z podstaw automatyki i teorii maszyn” (autorzy: Tadeusz Kołacin, Andrzej Kosior, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 1990).

Zadaniem autora niniejszego skryptu nie jest nauczenia studentów projektowania układów automatyki, czy projektowania maszyn i urządzeń, bowiem sumaryczny czas zajęć z tego przedmiotu (30h) jest ograniczony, a jedynie jak już wspomniano zapoznanie ich z podstawowymi pojęciami dotyczącymi podstaw automatyki i sterowania. Jest to niezbędny warunek, aby student po wysłuchaniu wykładu potrafił postawić rozsądnie problem specjalistyczny inżynierowi automatykowi.

Autor będzie wdzięczny za wszelkie uwagi dotyczące sposobu ujęcia treści i tematu niniejszego skryptu.



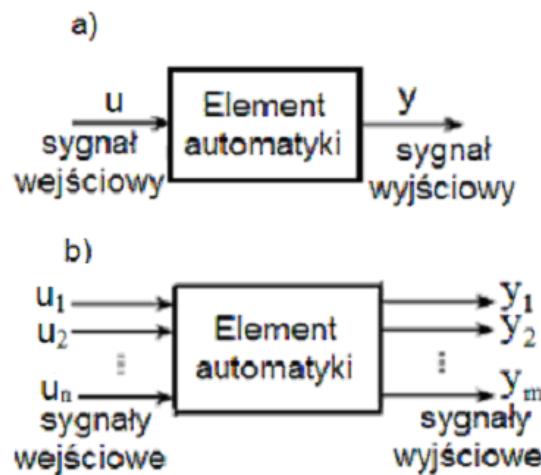
1

Wprowadzenie do podstaw automatyki

1.1. Pojęcia podstawowe

Podstawy automatyki ze względu na bardzo szeroki zakres zastosowań są wyodrębnioną dyscypliną naukową o własnych pojęciach podstawowych dotyczących tej dziedziny wiedzy. Pojęcia te są ogólne, wynikające ze specyfiki rozważanych zagadnień jak sygnał, jego przesyłanie, informacja, element automatyki, obiekt sterowania, regulator, układy kaskadowe, bilansowe i wiele innych. Aby więc można było omawiać układy sterowania automatycznego, należy podać ważniejsze z tych pojęć.

Element automatyki jest to układ, w którym wyróżniamy jeden lub wiele sygnałów wejściowych i wyjściowych (rysunek 1.1).



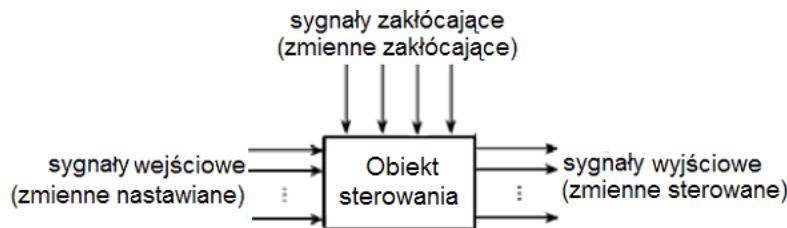
Rysunek 1.1. Element automatyki: a) jednowymiarowy,
b) wielowymiarowy

Sygnał jest to wielkość fizyczna występująca w procesie sterowania, będąca nośnikiem informacji (rysunek 1.2).

Informacja jest to wartość lub kształt przebiegu sygnału.

Sygnal zakłócający jest to sygnał, który może być generowany wewnątrz układu i wywiera niekorzystny wpływ na sygnał wyjściowy. Zakłócenie zewnętrzne jest generowane poza układem i jest sygnałem wejściowym.

Obiekt sterowania (rysunek 1.2) jest to każdy obiekt fizyczny, który ma być sterowany (układ zasilania silnika, piec hartowniczy, reaktor, statek, samolot itp.). Obiektem sterowania może być także proces prowadzący do konkretnego wyniku (proces chemiczny, technologiczny, biologiczny itp.)



Rysunek 1.2. Schemat obiektu regulacji

Zmienne nastawiane są to wielkości lub warunki, które mogą być zmieniane przez sterownik tak, aby osiągnąć wartość zmiennej sterowanej (sygnał wyjściowy).

Zmienne sterowane są to wielkości lub warunki, które mogą być mierzone i sterowane.

Układ automatyki jest to zespół wzajemnie połączonych elementów biorących udział w sterowaniu automatycznym procesu.

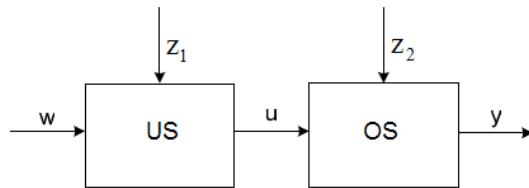
Sterowanie automatyczne jest to oddziaływanie na obiekt lub proces w sposób zamierzony, którego przebieg chcemy otrzymać bez udziału człowieka. Zamierzony cel można uzyskać za pomocą urządzeń zwanych aparaturą automatyki.

Wyróżniamy dwa zasadnicze sposoby sterowania:

- sterowanie w układzie otwartym (otwarte układy sterowania),
- sterowanie w układzie zamkniętym (sprzężenie zwrotne ujemne lub dodatnie).

Ogólny schemat otwartego układu sterowania przedstawia rysunek 1.3.

ROZDZIAŁ 1



Rysunek 1.3. Schemat blokowy otwartego układu sterowania

w – wartość zadana wielkości sterowanej (sygnał wymuszający),

US – urządzenie sterujące,

OS – obiekt lub proces podlegający sterowaniu,

u – sygnał sterujący, (sygnał nastawiający),

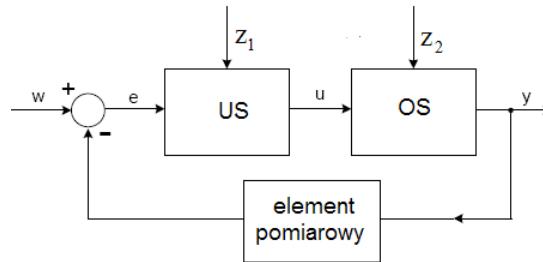
y – wielkość sterowana, wyjściowa (sygnał sterowany),

z_1, z_2 – sygnały zakłócające (zakłócenia).

W otwartym układzie sterowania sygnał wyjściowy nie jest porównywany, mierzony ani podawany zwrotnie, dla porównania z sygnałem wejściowym. W przypadku zakłóceń układ nie będzie wykonywał żadnego zadania. Każdy układ działający na bazie czasowej jest układem otwartym (zwykła pralka, układ sterowania światłami ulicznymi itp.).

Urządzenie sterujące jest elementem, w którym wytwarza się sygnał nastawiający nie otrzymując informacji o wartości wielkości regulowanej. Sterowanie w układzie otwartym ma sens wtedy, gdy na podstawie znajomości sygnału sterującego można dokładnie przewidzieć przebieg wielkości sterowanej. Do takich układów otwartych należą układy z kompensacją zakłóceń, gdzie urządzenie sterujące może otrzymać pewne informacje o zakłóceniach.

Zamknięty układ sterowania (układ regulacji automatycznej), nazywany często układem ze sprzężeniem zwrotnym, ma następujący ogólny schemat blokowy przedstawiony na rysunku 1.4.



Rysunek 1.4. Schemat blokowy zamkniętego układu sterowania (układu regulacji)

$e = w - y$, jest uchybem regulacji (odchyłka sterowania),

- – węzeł informacyjny, którego wszystkie wejścia i wyjścia są sobie równe,

$\otimes = \ominus$ – węzeł sumacyjny, który ma tylko jedno wyjście i co najmniej dwa wejścia, przy czym sygnał wyjściowy jest sumą sygnałów wejściowych z uwzględnieniem odpowiednich znaków.

Tor główny wskazuje zawsze zasadniczą wielkość wejściową układu (w tym przypadku - w) i wielkość wyjściową y . Tor ten ilustruje zwykle przepływ głównego strumienia energii lub materiału w układzie. Tor sprzężenia zwrotnego służy do przekazywania informacji. Sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym nazwane jest regulacją, zaś układy regulacji lub układy sterowania w układzie zamkniętym są układami sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Przykładem może być regulacja temperatury w pokoju, samochodzie, wagonie itp. niezależnie od warunków zewnętrznych. W układzie zamkniętym odpowiedź układu jest stosunkowo niewrażliwa na zewnętrzne zakłócenia i wewnętrzne zmiany parametrów układu automatyki.

1.2. Klasifikacja układów automatyki

Kryteria podziału układów automatyki mogą być bardziej lub mniej ogólne ze względu na zadania, jakie spełniają układy automatycznego sterowania, w zależności od wartości zadanej w , ze względu na liczbę

ROZDZIAŁ 1

zmiennych sterowanych, ze względu na rodzaj elementów, z jakich układ się składa, ze względu na sposób pomiaru wielkości sterowanej oraz regulacji, przekazywania sygnałów i inne (ekstremalne, samostrajalne, samoptymalizujące).

Ze względu na realizowane zadania układy dzielimy na:

- układy stabilizacji,
- układy programowe,
- układy nadążne (śledzące),
- adaptacyjne (ekstremalne, samostrajalne, samoptymalizujące).

Ad a). Układy stabilizujące (układy regulacji stałowoartościowej), $w=const$. Zadaniem układu jest utrzymanie możliwie stałej, podanej wartości wielkości wyjściowej oraz minimalizacja wpływu zakłóceń na tę wielkość. Główne zakłócenia mogą wchodzić wraz ze strumieniem energii lub materiału na obiekt, tworząc tor główny od z_1 do y (rysunek 1.4).

Ad b). Układy programowe (regulacji programowej, sterowania programowego), wartość zadana $w = w(t)$ jest z góry określona funkcją czasu, czyli zmieniającą się według pewnego programu. Układy tego typu często stosowane są w obróbce cieplnej, obrabiarkach sterowanych numerycznie i wielu innych maszynach oraz urządzeniach.

Zadaniem układu jest uzyskanie przewidzianych określonym programem czasowym zmian wielkości regulowanej (sterowanej). Dla powolnych zmian $w(t)$, może być np. regulacja temperatury w budynku.

Ad c). Układy nadążne (serwomechanizmy), $w=w[f(t)]$. Zadaniem układu jest nadążanie wielkości wyjściowej y za zmieniającą się w nieznany nam sposób wartością zadaną w .

Przykłady: sterowanie położeniem y działa przeciwlotniczych wg wskazań radaru określającego położenie samolotu, sterowanie położeniem anten radiowych.

Ad d). Sterowanie adaptacyjne (ekstremalne, autostrojące, autoptymalizujące) jest to sterowanie obiektem o zmieniających się właściwościach dynamicznych i zakłóceń, w trakcie, którego przeprowadza się estymację parametrów modelu obiektu i zakłóceń w celu uaktualnienia parametrów algorytmu sterowania.

Ze względu na rodzaj elementów, z jakich składa się układ, wyróżniamy:

Układy liniowe – zbudowane tylko z elementów liniowych, opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Elementy te mają prostoliniowe charakterystyki statyczne.

Układy nieliniowe – zawierają, co najmniej jeden element nieliniowy i można je opisać równaniem różniczkowym nieliniowym. Przykładem układu nieliniowego mogą być przekaźniki i regulatory dwu i trójpoleżniowe.

Ze względu na sposób pomiaru wielkości regulowanej, układy dzielimy na:

Układy analogowe – wielkość regulowana mierzona jest w sposób ciągły, zaś wynik pomiaru przedstawiany jest w postaci ciągłej zmiany wielkości fizycznej, związanej z wielkością regulowaną, określoną jednoznacznie zależnością funkcyjną. Przykładem są przyrządy wskazówkowe, manometry, termometry.

Układy cyfrowe – wielkość zadana podawana jest w postaci cyfrowej. W procesach fizycznych wielkości regulowane zmieniają się w sposób ciągły w czasie, a więc w układach cyfrowych występują elementy przekształcające sygnał analogowy na sygnał cyfrowy (przetworniki analogowo-cyfrowe AC i cyfrowo-analogowe CA).

Ze względu na sposób przekazywania sygnałów, układy dzielimy na:

Układy regulacji ciągłej – wszystkie elementy układu działają w sposób ciągły i mogą przyjmować każdą wartość z przedziału zmienności sygnału. Takimi elementami są mierniki wskazówkowe (ciśnieniomierze, voltomierze, amperomierze, manometry, termometry).

Układy regulacji dyskretnej (przerywanej) – układy, w których co najmniej jeden element pracuje w sposób dyskretny. Wysłane sygnały przez taki element mogą przyjmować tylko wybrane wartości i występuwać w pewnych chwilach czasu. Układy tego typu można opisać równaniami różnicowymi. Przykładem tego typu układu są układy impulsowe, przekaźnikowe (np. sterowanie przerywaną pracą wycieraczek samochodowych).

1.3. Właściwości liniowych układów automatyki

Jak już powiedziano, właściwości dynamiczne liniowych elementów lub układów automatyki można opisać liniowym równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach. Dotyczy to tylko układów stacjonarnych (niezmiennych w czasie).

Układy rzeczywiste zwykle są nieliniowe, ale dla uproszczenia opisu matematycznego przeprowadza się ich linearyzację, co pozwala na sformułowanie przybliżonego opisu liniowego, odnoszącego się do otoczenia wybranego punktu pracy na charakterystyce statycznej. Po linearyzacji układy opisywane są za pomocą liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach a_i i b_i .

Matematyczne modele opisu zjawisk fizycznych są zawsze przybliżeniem ich rzeczywistego charakteru. W przypadku elementów i układów automatyki, które charakteryzują przebieg procesu, zachodzącego w rozpatrywanym elemencie lub układzie w postaci zależności pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym są równaniami otrzymanymi w wyniku analizy zjawisk zachodzących w danym elemencie. Równania te są równaniami liniowymi algebraicznymi, różniczkowymi, różnicowymi lub mogą być równaniami nieliniowymi, które można zlinearyzować, czyli zastąpić je przybliżonymi równaniami liniowymi. Tego rodzaju przybliżenie dla celów praktycznych może być wystarczające.

Proces linearyzacji jest, więc tworzeniem modelu liniowego, który poprzez aproksymację zastępuje model nieliniowy. Wyróżniamy dwie podstawowe linearyzacje tj. linearyzację statyczną (linearyzacja równań algebraicznych) i linearyzację dynamiczną (linearyzacja równań różniczkowych). Jedną ze znanych metod linearyzacji jest rozwinięcie nieliniowych funkcji w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy odpowiadającemu stanowi ustalonemu (równowagi). Dla stanu ustalonego, pochodne cząstkowe są stałe.

Ogólna postać równania różniczkowego układu liniowego:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y &= \\ = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u & n \geq m \end{aligned} \quad (1.1)$$

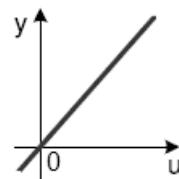
gdzie: y – sygnał wyjściowy, u – sygnał wejściowy, a_i i b_j - stałe współczynniki równania różniczkowego ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$)

Dla wszystkich układów rzeczywistych wszystkie elementy rzeczywiste mają charakter inercyjny, stąd $n \geq m$.

Równanie charakterystyki statycznej (wszystkie pochodne funkcji wejścia i wyjścia są zerowe) wynikające z równania różniczkowego (1.1) ma postać

$$y = \frac{b_0}{a_0} u \quad (1.2)$$

Charakterystyka statyczna układu liniowego lub zlinearyzowanego w otoczeniu nominalnego punktu pracy (u, y są odchyłkami od tego punktu) ma postać:



Rysunek 1.5. Charakterystyka statyczna

Początek układu współrzędnych oznacza nominalny punkt pracy, a sygnały wejścia u i wyjścia y są odchyłkami sygnałów od tego punktu.

Aby ocenić właściwości dynamiczne na podstawie przebiegów przejęciowych (nieustalonych) należy rozwiązać równanie (1.1). Po rozwiązaniu otrzymamy odpowiedź na wyjściu $y(t)$ na zadany sygnał na wejściu $u(t)$. Najczęściej jest to skok jednostkowy $u(t) = I(t)$.

1.4. Sygnały w układach automatycznej regulacji

Przekazywanie informacji pomiędzy elementami układu w każdym układzie sterowania odbywa się za pośrednictwem sygnałów w postaci przebiegów zmian określonej wielkości fizycznej (wielkość nośna). Wielkością nośną może być temperatura, siła, ciśnienie, napięcie, przemieszczenie itd. Do przekazywania informacji zawartej w sygnale mogą być wykorzystywane różne cechy wielkości nośnej jak częstotliwość, szerokość pasma impulsów, wartość amplitudy itp.

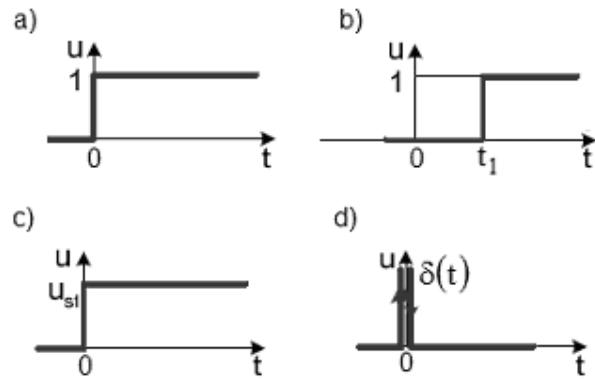
Do badania właściwości dynamicznych i porównywania ze sobą różnych układów automatyki stosuje się na wejściu różnego rodzaju wymuszenia $u(t)$. Najczęściej używanymi sygnałami wymuszającymi, podawanymi na wejściu układu są sygnały dyskretne, impulsowe i ciągłe. Sygnały dyskretne (rysunek 1.6) są sygnałami określonymi tylko dla pewnego przeliczalnego ciągu chwil czasowych $t = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$. Zmienna t nazywana jest zmienną dyskretną.

Wymuszenie jednostkowe $1(t)$ (skok jednostkowy, lub funkcja Heaviside'a) (rysunek 1.6a) definiuje się następująco

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Jeżeli wymuszenie jednostkowe przełożone jest w chwili $t_1 > 0$ (rysunek 1.6b), wówczas definicja jest następująca

$$I(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_1, \\ 1 & \text{dla } t \geq t_1. \end{cases} \quad (1.4)$$



Rysunek 1.6. Sygnały dyskretne (wymuszenia skokowe) a) skok jednostkowy, b) skok jednostkowy z przesunięciem, c) skok o dowolnej wartości, d) impulsowa funkcja jednostkowa (funkcja Diraca)

Wymuszenie skokowe o dowolnej wartości (rysunek 1.6c) definiuje się następująco

$$u(t) = I(t)u_{st} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ u_{st} & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Wymuszenie skokowe o dowolnej wartości może być także przesunięte w czasie jak skok jednostkowy (rysunek 1.6b).

Wymuszenie w postaci funkcji Diraca (rysunek 1.6d)

Impuls Diraca (impuls jednostkowy) można zdefiniować jako granicę jednej z przedstawionych na rysunku 1.8 funkcji impulsowych przy $\alpha \rightarrow 0$.

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta(t)_{\downarrow \alpha},$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \text{nieokreślone} & \text{dla } t = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (1.7)$$

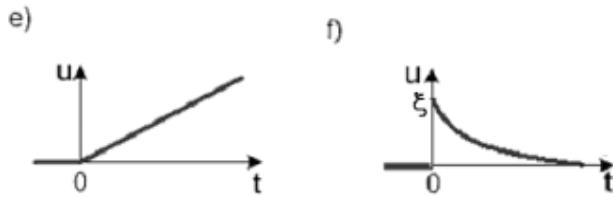
ROZDZIAŁ 1

Stąd

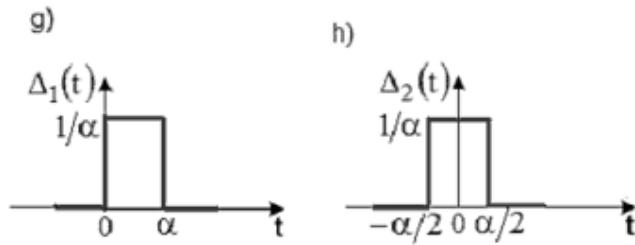
$$\delta(t) = \frac{dI(t)}{dt}. \quad (1.8)$$

A więc skok jednostkowy można traktować jako funkcję pierwotną impulsu jednostkowego

$$I(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$



Rysunek 1.7. Sygnały ciągłe: e) sygnał liniowy (wymuszenie liniowe),
f) sygnał wykładniczy określony dla $t \geq 0$ i $a < 0$ (wymuszenie wykładnicze)



Rysunek 1.8. Sygnały impulsowe: g) określony dla $0 < t < \alpha$,
h) określony dla $-\alpha/2 < t < \alpha/2$

Wymuszenie liniowe (rysunek 1.7e) możemy zdefiniować następująco

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ at & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Nazwę uzasadnia pierwsza pochodna tej funkcji względem czasu i jest wymuszeniem skokowym o wartości a.

Wymuszenie wykładnicze (rysunek 1.7 f) definiujemy w następujący sposób

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \xi e^{\alpha t} & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Korzystając z zapisu skoku jednostkowego, wzór (1.11) można zapisać następująco

$$u(t) = \xi e^{\alpha t} \cdot I(t). \quad (1.12)$$

Podczas procesów przejściowych również, gdy występuje zakłócenie lub zmiana wartości zadanej, pojawiają się sygnały, które można uważać za równe zeru przy $t < 0$. Sygnał taki określa wzór (1.11) i przedstawiony jest na rysunku 1.7 f).

Wymuszenie impulsowe (rysunek 1.8) definiujemy następująco

Wszystkie sygnały impulsowe $\Delta_i(t)$ mają następujące właściwości

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_i(t) dt = 1, \quad \text{dla każdego } \alpha \quad (\text{rysunek 1.8})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_i(t)_{\downarrow \alpha \rightarrow 0} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

1.5. Zasady rachunku operatorowego

Do opisu właściwości elementów i układów automatyki służą równania różniczkowe. Rozpatrywać będziemy tylko układy liniowe opisywane równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach (elementy i układy stacjonarne). Do rozwiązywania równań różniczkowych wykorzystamy rachunek operatorowy wykorzystując przekształcenia Laplace'a. Dzięki tej metodzie otrzymamy równania algebraiczne będące funkcją zmiennej zespolonej $s=a+jb$ (a – część rzeczywista, b – część urojona). Po dokonaniu tych przekształceń, możemy powrócić do dzie-

ROZDZIAŁ 1

dziny czasowej otrzymując rozwiązania wyjściowego równania różniczkowego. Przekształcenie Laplace'a funkcji $f(t)$ zwanej oryginałem, przyporządkowujemy używając odpowiednich matematycznych przekształceń, nową funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s zwanej transformatą funkcji $f(t)$. Relacja pomiędzy transformatą a oryginałem jest następująca

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (1.14)$$

Transformacji odwrotnej dokonujemy korzystając ze wzoru

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} F(s) e^{st} ds = L^{-1}[F(s)] \rightarrow F(s) = L[f(t)]. \quad (1.15)$$

ω jest częstością kołową

Poniżej podamy kilka podstawowych, najczęściej używanych wzorów z rachunku operatorowego, opartego na przekształceniu Laplace'a.

Transformata iloczynu stałej przez funkcję

$$L[af(t)] = aF(s), \quad (1.16)$$

Transformata sumy

$$\begin{aligned} L[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots + f_n(t)] &= \\ &= F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \dots + F_n(s), \end{aligned} \quad (1.17)$$

Transformata pochodnych

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0), \quad (1.18)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \quad (1.19)$$

Wzór ogólny ma postać

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0). \quad (1.20)$$

Praktycznie najczęściej przyjmujemy zerowe warunki początkowe, wówczas korzystamy ze wzoru (1.20) w uproszczonej postaci

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s). \quad (1.21)$$

Twierdzenie o wartości początkowej

$$\lim f(t)_{\downarrow t \rightarrow 0} = \lim sF(s)_{\downarrow s \rightarrow \infty}, \quad (1.22)$$

Twierdzenie o wartości końcowej

$$\lim f(t)_{\downarrow t \rightarrow \infty} = \lim sF(s)_{\downarrow s \rightarrow 0}. \quad (1.23)$$

Z podanych wzorów (1.16-1.22) wynika, że równania różniczkowo całkowe po dokonaniu transformacji zostają zastąpione równaniami algebraicznymi zmiennej zespolonej s . Znając transformatę dzięki twierdzeniu o wartości początkowej i końcowej, (kiedy istnieją granice) można określić niektóre własności oryginału bez wykonywania transformacji odwrotnej.

Najczęściej spotykane funkcje $f(t)$ i odpowiadające im transformaty są zestawione w tablicy transformat. Trudność stanowić może doprowadzenie złożonych funkcji do postaci sumy prostszych składników, mających swoje odpowiedniki w tablicy. Wówczas funkcję należy rozłożyć na ułamki proste i po obliczeniu współczynników korzystać z tablicy.

Przykład 1.1

Rozwiązać równanie różniczkowe $2\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = I(t)$ uwzględniając warunki początkowe dla $t = 0$, $\dot{y}(0) = 5$, $y(0) = 2$. Określić również rozwiązanie w stanie ustalonym ($t \rightarrow \infty$).

Rozwiązanie

Stosując przekształcenie Laplace'a otrzymamy

$$\frac{dy(t)}{dt} = sy(s) - y(0), \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = s^2y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}.$$

$$2[s^2y(s) - 2s - 5] + 3[sy(s) - 2] + 2y(s) = \frac{I}{s}$$

ROZDZIAŁ 1

Wyznaczając z powyższego równania transformatę otrzymamy

$$y(s) = \frac{I}{s} \cdot \frac{2s^2 + 5s + I}{2s^2 + 3s + I},$$

Otrzymana funkcja jest dość złożona, więc z tablic Laplace'a nie można bezpośrednio określić transformaty. Należy $y(s)$ rozłożyć na ułamki proste, zatem

$$2s^2 + 3s + I = 0 \rightarrow s_1 = -I, \quad s_2 = -0.5.$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{2s^2 + 5s + I}{2s^2 + 3s + I} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+0.5} = \\ &= \frac{s^2(A+B+C) + s(1.5A+0.5B+C) + 0.5A}{s(s+1)(s+0.5)} \end{aligned}$$

stąd porównując liczniki obu stron równań otrzymamy układ równań algebraicznych, czyli

$$\begin{aligned} 2s^2 + 5s + I &= s^2(A+B+C) + s(1.5A+0.5B+C) + 0.5, \\ \rightarrow \begin{cases} A+B+C = 2 \\ 1.5A+0.5B+C = 5 \\ 0.5A = I \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązuje powyższy układ trzech równań algebraicznych otrzymamy

$$A = 2, \quad B = -8, \quad C = 8,$$

Ostatecznie funkcję $y(s)$ możemy przedstawić w postaci ułamków prostych

$$y(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+1} + \frac{8}{s+0.5},$$

Z tablic Laplace'a otrzymamy oryginał funkcji $y(t)$

$$y(t) = 2 - 8e^{-t} + 8e^{-0.5t} = 2[1 - 4(e^{-t} - e^{-0.5t})].$$

W stanie ustalonym otrzymamy

$$y_{ust.}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \left[I - 4(e^{-t} - e^{-0.5t}) \right] = 2.$$

Tablica transformat

L.p.	Transformata F(s)	Oryginał f(t)
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
3.	$\frac{1}{s^2}$	t
4.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
5.	$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\mp at}$
6.	$\frac{1}{(s \pm a)^2}$	$te^{\mp at}$
7.	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n e^{-at}$
8.	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
9.	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
10.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
11.	$\frac{1}{s(Ts+1)^2}$	$1 - \frac{T+t}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
12.	$\frac{s}{(Ts+1)^2}$	$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-\frac{t}{T}}$
13.	$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$	$t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

ROZDZIAŁ 1

c.d. tablicy transformat

L.p.	Transformata F(s)	Oryginal f(t)
14.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
15.	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{b-a}$
16.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(c-b)e^{-at} + (a-c)e^{-bt} + (b-a)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
17.	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$1 + \frac{T_1 e^{\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{t}{T_2}}}{T_2 - T_1}$
18.	$\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2}$	$\frac{T_1 T_2 e^{\frac{-t}{T_1}} - [T_1 T_2 + (T_1 - T_2)t] e^{\frac{-t}{T_2}}}{T_2 (T_1 - T_2)^2}$
19.	$\frac{s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$\frac{T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}}}{T_1 T_2 (T_2 - T_1)}$
20.	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
21.	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
22.	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
23.	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
24.	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \sin at$
25.	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \cos at$
26.	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$

1.6. Transmitancja operatorowa i jej właściwości

Właściwości dynamiczne ilustruje się zwykle wyznaczając przebieg wielkości wyjściowej $y(t)$ po wprowadzeniu na wejście jednego z typowych wymuszeń $u(t)$ (rysunek 1.2-1.4). Metoda operatorowa pozwala zastąpić równanie różniczkowe tzw. transmitancją operatorową.

Transmitancja operatorowa (funkcja przejścia) jest definiowana jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego (funkcji odpowiedzi) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego (funkcji wymuszającej), przy zerowych warunkach początkowych.

Transmitancja elementu lub układu ma postać

$$G(s) = \frac{L[y]}{L[u]}, \quad (1.24)$$

Dokonując przekształceń Laplace'a równania (1.1) otrzymamy

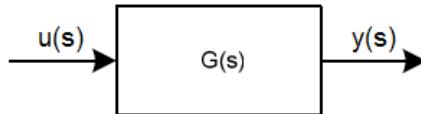
$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0) y(s) = \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) u(s) \end{aligned}, \quad (1.25)$$

stąd

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} . \quad n \geq m \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ponieważ transmitancja operatorowa opisuje właściwości elementu, obiektu lub układu automatyki, przyjęto wpisywać ją wewnątrz prostokątów (rysunek 1.9).

ROZDZIAŁ 1



Rysunek 1.9. Symbol graficzny elementu, obiektu lub układu automatyki

Przy zerowych warunkach początkowych i zerowej wartości s z równania (1.26) otrzymamy końcowe równanie charakterystyki statycznej dla układów o jednym wejściu i jednym wyjściu, czyli

$$G(s)_{\downarrow s=0} = \frac{y_0(s)}{u_0(s)} = \frac{b_0}{a_0} \rightarrow y_0 = \frac{b_0}{a_0} u_0. \quad (1.27)$$

Równanie (1.27) odpowiada dokładnie równaniu (1.2).

Transmitancję operatorową stosujemy tylko do równań różniczkowych liniowych i niezmiennych w czasie.

Właściwości transmitancji operatorowej są następujące:

- jest właściwością samego układu, niezależną od wielkości i rodzaju sygnału wejściowego,
- transmitancje dla wielu fizycznie różnych układów mogą być identyczne,
- transmitancja zawiera niezbędne składniki do przedstawienia związku pomiędzy sygnałami wyjściowymi i wejściowymi nie dostarczając żadnej informacji dotyczącej fizycznej struktury układu,
- jeżeli znamy transmitancję układu to możemy określić sygnał wyjściowy (odpowiedź) dla różnych sygnałów wejściowych,
- transmitancja operatorowa opisuje układ tak samo dokładnie jak równanie różniczkowe,
- równanie charakterystyki statycznej możnatrzymać z transmitancji operatorowej przez podstawienie w miejsce $s=0$,
- mianownik transmitancji operatorowej przyrównany do zera jest równaniem charakterystycznym układu automatyki.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (1.28)$$

Przykład 1.2

Do układu elektrycznego, którego transmitancja jest $G(s) = \frac{1}{s+1}$ doprowadzone jest napięcie $u(t) = 10 \cos 4t$. Obliczyć napięcie wyjściowe w funkcji czasu

Rozwiązanie



Sygnał wyjściowy można wyznaczyć z zależności

$$y(s) = G(s) \cdot u(s), \quad u(s) = L[10 \cos 4t] = \frac{10s}{s^2 + 4^2}.$$

Tak, więc

$$y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{10s}{s^2 + 4^2},$$

Po rozłożeniu prawej strony powyższego równania na ułamki proste otrzymamy

$$\begin{aligned} 10s &= \frac{As+B}{s^2+16} + \frac{C}{s+1} = \frac{(As+B)(s+1) + C(s^2+16)}{(s^2+16)(s+1)} = \\ &= \frac{s^2(A+C) + s(A+B+16) + B}{(s^2+16)(s+1)}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+C=0, \\ A+B+16=10, \\ B=0. \end{array} \right\} \rightarrow A=-6, \quad B=0, \quad C=6.$$

Zatem

ROZDZIAŁ 1

$$\begin{aligned}y(s) &= -\frac{6s}{s^2 + 16} + \frac{6}{s+1}, \\ \rightarrow y(t) &= L^{-1}\left[-\frac{6s}{s^2 + 16} + \frac{6}{s+1}\right] = 6(e^{-t} - \cos 4t)\end{aligned}$$

2

Charakterystyki liniowych elementów I układów automatyki

2.1. Wprowadzenie

Analizę układu sterowania rozpoczyna się zwykle od budowy matematycznego modelu układu. Analizując i projektując układy sterowania należy pamiętać o porównywaniu ich właściwości poprzez wykorzystanie sygnałów testowych z tego względu, że istnieje korelacja pomiędzy odpowiedziami układu na typowy sygnał wejściowy a zdolnością układu do radzenia sobie z rzeczywistymi sygnałami wejściowymi. Podstawowe sygnały testowe są omówione w podrozdziale 1.4. Dla sygnałów testowych, z racji ich prostego opisu oraz wygenerowania, można łatwo przeprowadzić analizę matematyczną i eksperymentalną układów sterowania. O właściwościach układu decyduje charakterystyka statyczna (stan ustalony – wszystkie pochodne równania (1.1) są zerowe) i dynamiczna (stan nieustalony). Dla elementów linearyzowanych jest to równanie stycznej do charakterystyki rzeczywistej, gdzie początkiem układu współrzędnych jest punkt styczności zwany punktem pracy, wokół którego przeprowadzono linearyzację.

Właściwości dynamiczne określa się zwykle na podstawie przebiegu sygnału wyjściowego $y(t)$ (odpowiedzi), zależnego od sygnału wejściowego $u(t)$ (wymuszenia). Wyznaczenie przebiegu dynamicznego, wymaga rozwiązania równania różniczkowego, często nieliniowego. Jest to metoda bardzo kłopotliwa, dlatego w praktyce stosuje się aproksymację poprzez linearyzację otrzymując równanie liniowe. Metoda ta jest jednak uciążliwa, polega na wyprowadzeniu równania charakterystycznego układu, obliczeniu pierwiastków tego równania, wyznaczeniu stałych całkowania z warunków początkowych.

W automatyce stosowana jest powszechnie metoda operatorowa, pozwalająca zastąpić równania różniczkowo-całkowe zwykłymi równaniami algebraicznymi przy wykorzystaniu przekształcenia Laplace'a.

2.2. Charakterystyki czasowe (skokowe)

Przez charakterystykę czasową należy rozumieć wykres powstały z rozwiązania równania różniczkowego (1.1) przy wymuszeniu skokowym (pochodne tej funkcji są zerowe) i zerowych warunkach początkowych (położenie równowagi). Wówczas równanie różniczkowe (1.1) przyjmuje postać

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y = b_0 u. \quad (2.1)$$

W odniesieniu do układów jednowymiarowych, charakterystyki czasowe dają możliwość bezpośredniej oceny układu sterowania, ponieważ charakterystyka czasowa jest przebiegiem w czasie odpowiedzi układu dynamicznego $y(t)$ na określone wymuszenie $u(t)$.

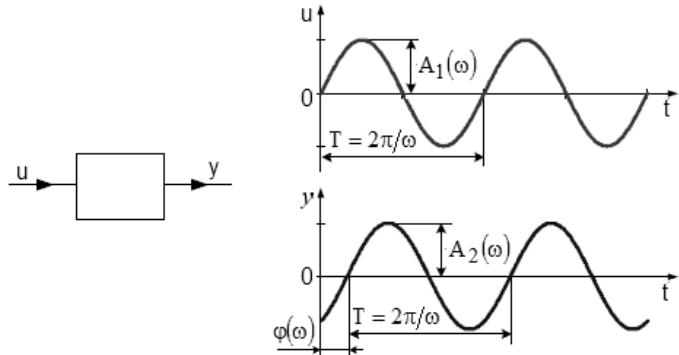
Przejście układu stabilnego od położenia równowagi $y=0$ po przyłożeniu na wejściu układu wymuszenia jednostkowego, spowoduje zajęcie nowego położenia równowagi $y = \frac{b_0}{a_0}$ zależy od parametrów układu, czyli od współczynników równania (2.1). Charakterystyka czasowa opisuje więc stan przejściowy układu, który może mieć charakter oscylacyjny zależnie od współczynników równania (2.1).

2.3. Charakterystyki częstotliwościowe

Jeżeli na wejście elementu lub układu liniowego stabilnego wprowadzone zostanie wymuszenie sinusoidalne o stałej częstotliwości, to na wyjściu, po zaniknięciu przebiegu przejściowego, ustali się odpowiedź sinusoidalna o tej samej częstotliwości, ale w ogólnym przypadku, o innej amplitudzie i fazie niż wymuszenie. Analizę układu sterowania rozpoczyna się zwykle od budowy matematycznego modelu układu. Na ry-

ROZDZIAŁ 2

sunku 2.1 przedstawiono przypadek, gdy odpowiedź jest przesunięta w kierunku ujemnym względem wymuszenia, tzn. $\varphi(\omega) < 0$.



Rysunek 2.1. Przechodzenie sygnału sinusoidalnego przez element liniowy

Zależności na sygnał wymuszający u (wejściowy) i odpowiedzi (wyjściowy) y są następujące

$$u = A_1(\omega) \sin \omega t, \quad (2.2)$$

$$y = A_2(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]. \quad (2.3)$$

Charakterystyki częstotliwościowe określają zachowanie się elementu lub układu przy wszystkich częstotliwościach wymuszenia, poprzez stosunek amplitud odpowiedzi do wymuszenia oraz przesunięcie fazowe między odpowiedzią a wymuszeniem jako funkcje częstotliwości. Teoretyczną podstawę charakterystyk częstotliwościowych stanowi transmitancja widmowa, którą można uważać za szczególny przypadek transmitancji operatorowej:

$$G(s)_{|s=j\omega} = G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.4)$$

która często się definiuje następująco

$$G(j\omega) = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}, \quad (2.5)$$

gdzie \bar{y} jest wartością zespoloną składowej ustalonej odpowiedzi układu wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym, a \bar{u} wartością zespoloną tego wymuszenia.

Wykorzystamy twierdzenie Eulera dla liczb zespolonych, mianowicie

$$e^{j\alpha} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (2.6)$$

Jeżeli na wejście elementu lub układu liniowego wprowadzimy wymuszenie harmoniczne

$$\bar{u} = A_l(\omega) e^{j\omega t} = A_l(\omega) [\cos \omega t + j \sin \omega t], \quad (2.7)$$

to na wyjściu ustali się odpowiedź harmoniczna

$$\begin{aligned} y &= A_2(\omega) e^{j[\alpha t + \varphi(\omega)]} = \\ &= A_2(\omega) \{ \cos[\alpha t + \varphi(\omega)] + j \sin[\alpha t + \varphi(\omega)] \}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Zatem podstawiając za \bar{u} i \bar{y} parę odpowiadających sobie funkcji harmonicznych zapisanych w postaci wykładniczej otrzymamy

$$G(j\omega) = \frac{A_2(\omega) e^{j\alpha t} e^{j\varphi(\omega)}}{A_l(\omega) e^{j\alpha t}} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.9)$$

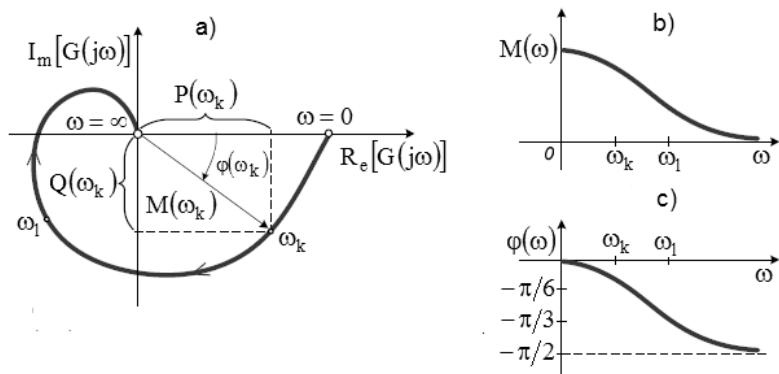
gdzie: $M(\omega) = A_2(\omega)/A_l(\omega)$ jest modułem charakterystyki częstotliwościowej (stosunkiem amplitud odpowiedzi do wymuszenia).

Wykres $G(j\omega)$ nazywamy charakterystyką amplitudowo-fazową (rysunek 2.2a) lub wykresem transmitancji widmowej. Wykres ten jest miejscem geometrycznym końców wektorów, których długość reprezentuje stosunek amplitud odpowiedzi do wymuszenia, a kąt $\varphi(\omega)$ jest przesunięciem fazowym między odpowiedzią a wymuszeniem. Zamiast wykresu $G(j\omega)$ można podać oddzielne wykresy jego współrzędnych biegunowych $M(j\omega)$ i $\varphi(j\omega)$, które nazywają się:

$M(\omega) = |G(j\omega)|$ – charakterystyka amplitudowa (rysunek 2.2b) (wykres modułu charakterystyki częstotliwościowej),

$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ – charakterystyka fazowa (rys. 2.2c) (wykres argumentu charakterystyki częstotliwościowej).

ROZDZIAŁ 2



Rysunek 2.2. Charakterystyki częstotliwościowe: a) charakterystyka amplitudowo-fazowa, b) charakterystyka amplitudowa, c) charakterystyka fazowa

Ponieważ $G(j\omega)$ jest funkcją zespoloną, można rozłożyć ją na część rzeczywistą i część urojoną (współrzędne prostokątne $G(j\omega)$), czyli

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.10)$$

gdzie

$$P(\omega) = R_e[G(j\omega)] - \text{część rzeczywista } G(j\omega),$$

$$Q(\omega) = I_m[G(j\omega)] - \text{część urojona } G(j\omega).$$

Z rysunku 2.2a wynikają następujące związki, bardzo istotne przy analitycznym wyznaczaniu charakterystyk częstotliwościowych elementów i układów automatyki

$$M(\omega) = A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2}. \quad (2.11)$$

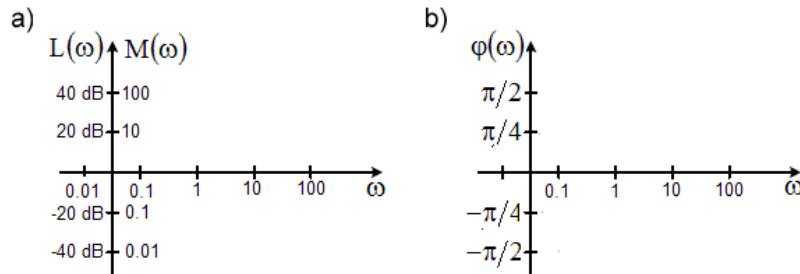
– spotykane oznaczenia w literaturze

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (2.12)$$

2.4. Charakterystyki logarytmiczne

Duże znaczenie praktyczne logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej wynika z łatwości ich budowania oraz wyznaczania charakterystyki wypadkowej układu automatyki, złożonego ze znanych elementów liniowych połączonych szeregowo. Wypadkowa transmitancja widmowa $G(j\omega)$ takiego układu jest równa iloczynowi transmitancji elementów składowych. Wówczas logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa są algebraiczną sumą charakterystyk elementów składowych. Wprowadzenie logarytmicznych charakterystyk umożliwia zastąpienie mnożenia przez łatwiejszą operację dodawania. Zaletą stosowania tych charakterystyk jest także to, że dla dużej grupy elementów liniowych można je zastępować asymptotycznymi (przybliżonymi) składającymi się z odcinków linii prostej.

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa $L(\omega)$ przedstawia wykres zależności między logarytmem dziesiętnym modułu transmitancji widmowej $M(\omega)$ i częstości ω . Logarytm z modułu transmitancji widmowej $M(\omega)$ przyjęto podawać w dB. Charakterystyki logarytmiczne mają osią odciętych wyrażoną w skali logarytmicznej i nazywającą się: $L(\omega)$ – logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, $\varphi(\omega)$ – logarytmiczna charakterystyka fazowa.



Rysunek 2.3. Współrzędne logarytmicznych charakterystyk:
a) amplitudowej $L(\omega)$, b) fazowej $\varphi(\omega)$

Współrzędne tych charakterystyk przedstawiono na rysunku 2.3. Poddziałka osi ω jest logarytmiczna, dekadowa, tzn. każdej dekadzie

ROZDZIAŁ 2

ω przyporządkowany jest odcinek o jednakowej długości na osi ω . Podziałka osi $L(\omega)$ jest liniowa, skalowana w decybelach (dB).

Często na tej osi odkłada się bezpośrednio stosunek amplitud $M(\omega)$. Podziałka osi $M(\omega)$ jest wówczas logarytmiczna.

Wartości $L(\omega)$ obliczamy według wzoru

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) \quad (2.13)$$

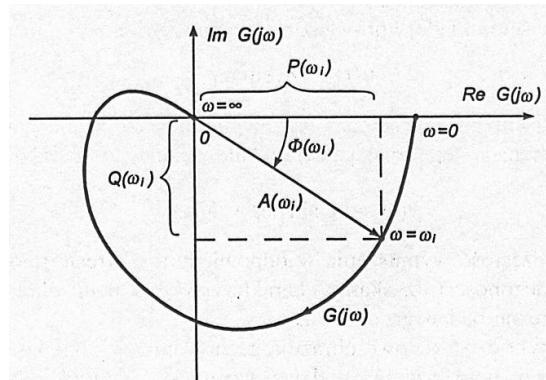
Przykład 2.1

Wyznaczyć równanie charakterystyki amplitudowo-fazowej elementu inercyjnego pierwszego rzędu, moduł i argument transmitancji widmowej oraz rzeczywiste przebiegi logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej dla $T = 0.1 \text{ sek}$, $k = 10$. Transmitancja operatorowa

elementu inercyjnego jest następująca $G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$.

Rozwiążanie

Należy obliczyć część rzeczywistą $P(\omega) = R_e[G(j\omega)]$ i urojoną $Q(\omega) = I_m[G(j\omega)]$ transmitancji widmowej wstawiając do transmitancji operatorowej zamiast s wielkość $j\omega$, a więc



Rysunek 2.4. Charakterystyka częstotliwościowa (amplitudowo-fazowa) elementu inercyjnego pierwszego rzędu

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k(Tj\omega - 1)}{(Tj\omega + 1)(Tj\omega - 1)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

Ogólne równanie charakterystyki amplitudowo-fazowej jest następujące

$$[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2 \pm f(k, \omega, T) = 0,$$

Zatem jak na rysunku 2.4 część rzeczywista i część urojona jest

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= R_e[G(j\omega)] = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}, \\ Q(\omega) &= I_m[G(j\omega)] = \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}. \end{aligned} \right\} \rightarrow [P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2 - kP(\omega).$$

Stąd korzystając z powyższego równania otrzymamy

$$[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2 - kP(\omega) + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{4} = 0,$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci

$$[Q(\omega)]^2 + \left[P(\omega) - \frac{k}{2} \right]^2 = \frac{k^2}{4}.$$

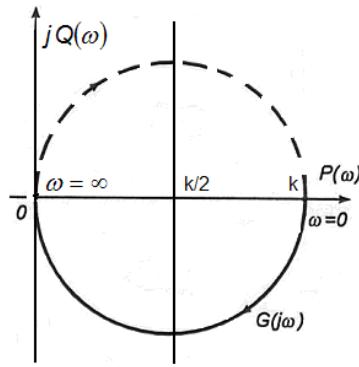
Jest to równanie okręgu o promieniu $r = \frac{k}{2}$ i przesuniętego od początku układu współrzędnych o $\frac{k}{2}$.

Ponieważ część urojona jest ujemna dla $\omega > 0$, więc charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu jest półokręgiem i leży pod osią $P(\omega)$.

Moduł transmitancji widmowej

$$\begin{aligned} M(\omega) &= |G(j\omega)| = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{1 + T^2\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2} \right)^2} = \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ 2



Rysunek 2.5. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu, linia ciągła – charakterystyka rzeczywista, linia przerywana – charakterystyka teoretyczna

Argument transmitancji widmowej

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg T\omega.$$

Aby mierzyć moduł w decybelach, to charakterystykę amplitudową zapisujemy następująco

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = \\ &= 20 \lg k - 10 \lg (1+T^2\omega) \quad [dB]. \end{aligned}$$

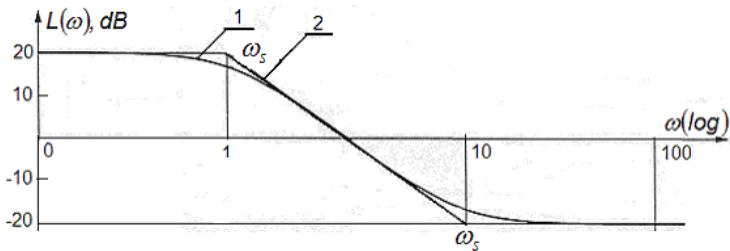
Charakterystykę przybliżoną otrzymamy, gdy

$$\omega < \omega_s = \frac{l}{T} \rightarrow L[dB] = 20 \lg k$$

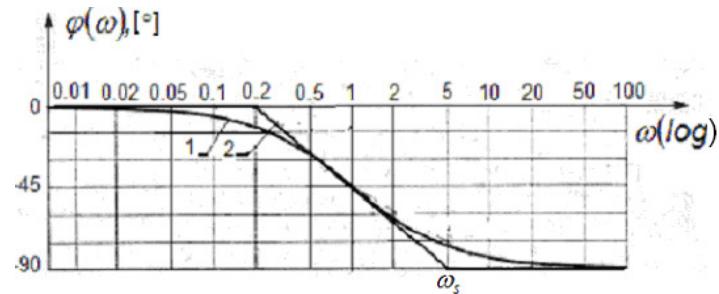
i dla

$$\omega > \omega_s = \frac{l}{T} \rightarrow L[dB] = 20 \lg k - 20 \lg T\omega.$$

ω_s – częstotliwość drgań własnych



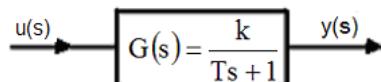
Rysunek 2.6. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu, 1 - rzeczywista, 2 - przybliżona



Rysunek 2.7. Logarytmiczna charakterystyka fazowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu, 1 - rzeczywista, 2 - przybliżona

Przykład 2.2

Mając układ automatyki z elementem o transmitancji $G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ gdzie $k = 6$, $T = 2$ sek, określić częstość ω począwszy od której stosunek amplitudy sygnału wyjściowego $y(s)$ do wejściowego $u(s)$ nie będzie większy niż 3.



Rysunek 2.8. Schemat układu z elementem inercyjnym pierwszego rzędu

Rozwiązanie

Moduł (amplituda) transmitancji operatorowej można wyrazić wzorem

ROZDZIAŁ 2

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = \frac{y(s)}{x(s)} \leq 3,$$

Należy wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną z transmitancji widmowej $G(j\omega)$.

Transmitancja widmowa ($s = j\omega$) jest następująca

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + I} = \frac{k(Tj\omega - I)}{(Tj\omega + I) \cdot (Tj\omega - I)} = \frac{k - jkT\omega}{I + T^2\omega^2},$$

$$P(\omega) = \frac{k}{I + T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = -\frac{kT\omega}{I + T^2\omega^2}.$$

A więc

$$\sqrt{\left(\frac{k}{I + T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kT\omega}{I + T^2\omega^2}\right)^2} \leq 3 \rightarrow k = 3\sqrt{I + T^2\omega^2},$$

Podstawiając wartości za k i T otrzymamy

$$36 = 9(I + 4\omega^2) \rightarrow \omega \geq \frac{1}{2}\sqrt{3} [l/s],$$

Przykład 2.3

Wyznaczyć charakterystyki amplitudowo-fazową, logarytmiczne amplitudową i fazową dla elementu oscylacyjnego opisanego transmitancją

$$\text{operatorową } G(s) = \frac{10}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + I}.$$

Rozwiązańe

Jeżeli współczynnik tłumienia $\xi > 1$, wówczas pierwiastki równania charakterystycznego (mianownik) są rzeczywiste i ujemne zaś przebieg odpowiedzi jest aperiodyczny, dający asymptotycznie do ustalonej wartości. Gdy $\xi = 1$ (wartość graniczna), wtedy mamy przypadek szczególny tzw. tłumienia krytycznego. Charakter odpowiedzi jest również aperiodyczny, ale najkrócej trwający.

Zajmiemy się przypadkiem charakterystycznym dla elementów oscylacyjnych, dla którego pierwiastki mianownika są liczbami zespolonymi i sprzężonymi.

Transmitancja widmowa otrzymana z operatorowej jest następująca

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10}{-T^2\omega^2 + 2\xi T\omega j + 1} = \\ &= \frac{10}{(1-T^2\omega^2) + 2\xi T\omega j} \cdot \frac{[(1-T^2\omega^2) - 2\xi T\omega j]}{(1-T^2\omega^2) - 2\xi T\omega j}, \\ G(j\omega) &= \frac{10(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} - j \frac{20\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{10(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}, \\ Q(\omega) &= - \frac{20\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Moduł transmitancji widmowej

$$\begin{aligned} M(\omega) &= |G(j\omega)| = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{10(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \right]^2 + \left[\frac{20\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \right]^2} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}. \end{aligned}$$

Argument transmitancji widmowej

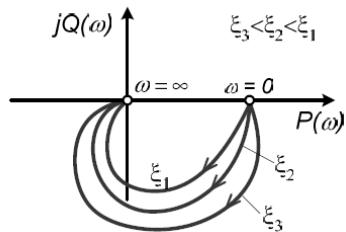
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \frac{10\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}.$$

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

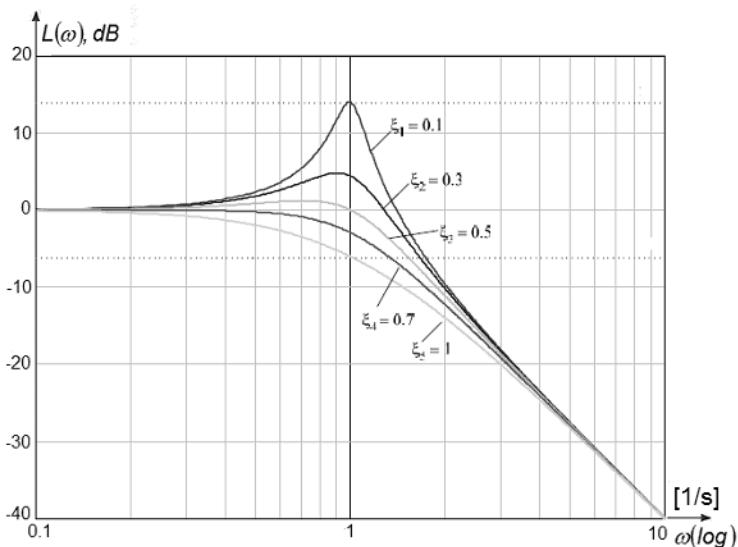
ROZDZIAŁ 2

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \frac{10}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} = \\ = 20 - 10 \lg [(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2] \text{ [dB].}$$

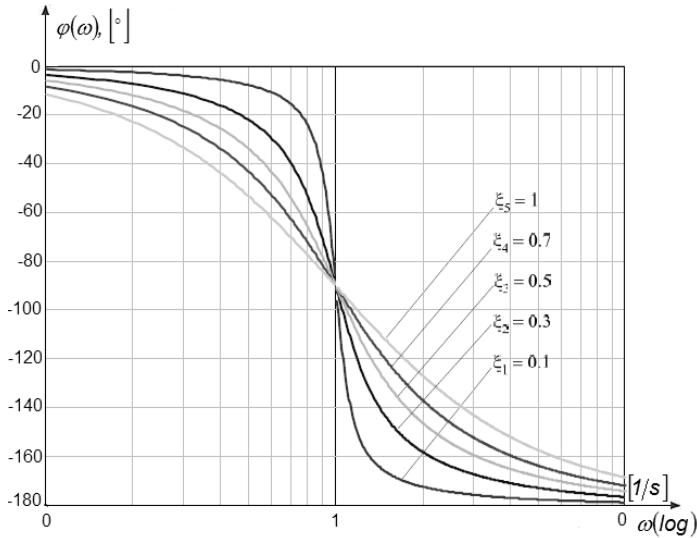
Wykresy charakterystyki amplitudowo-fazowej przedstawia rysunek 2.9, zaś charakterystyk logarytmicznych, amplitudowej i fazowej przedstawiają rysunki 2.10 i 2.11.



Rysunek 2.9. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu oscylacyjnego dla różnych wartości ξ



Rysunek 2.10. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa elementu oscylacyjnego dla różnych wartości ξ



Rysunek 2.11. Logarytmiczna charakterystyka fazowa elementu oscylacyjnego dla różnych wartości ξ

Przykład 2.4

Narysować, dla układu automatyki opisanego transmitancją zastępczą $G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$, charakterystykę amplitudowo-fazową.

Rozwiązanie

Transmitancja widmowa wyznaczona z transmitancji operatorowej jest następująca

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \\ = \frac{[(1-3\omega^2) - j\omega(1-\omega^2)]}{[(1-3\omega^2) + j\omega(1-\omega^2)][(1-3\omega^2) - j\omega(1-\omega^2)]},$$

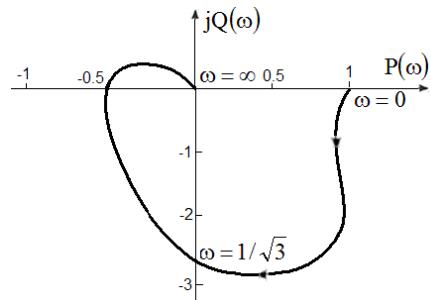
$$G(j\omega) = \frac{(1-3\omega^2)}{[(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(1-\omega^2)^2]} - j \frac{\omega(1-\omega^2)}{[(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(1-\omega^2)^2]},$$

$$P(\omega) = \frac{1-3\omega^2}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(1-\omega^2)^2},$$

ROZDZIAŁ 2

$$Q(\omega) = -\frac{\omega(1-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(1-\omega^2)^2}.$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest przedstawiona na rysunku 2.12



Rysunek 2.12. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu automatyki

3

**Właściwości
dynamiczne
podstawowych
liniowych elementów
automatyki**

3.1. Wprowadzenie

Duża ilość prostych mechanizmów, maszyn i urządzeń daje się sprowadzić w matematycznym opisie do elementów (członów) podstawowych. Ma to zasadnicze znaczenie przy rozpatrywaniu właściwości układów automatyki. Większość elementów rzeczywistych może być uważana za liniowe przy następujących założeniach upraszczających:

a. w odniesieniu do elementów mechanicznych

- występuje jedynie tarcie lepkie (wiskotyczne), a nie tarcie suche (Coulomba),
- siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości,
- sztywności elementów sprężystych są stałe, a pozostałych elementów oraz ich połączeń i zamocowań nieskończenie wielkie.

b. w odniesieniu do elementów płynowych (hydraulicznych i pneumatycznych)

- opór przepływu jest stały, tzn. natężenie przepływu płynu jest proporcjonalne do różnicy ciśnień,
- moduł sprężystości objętościowej płynu (odwrotność współczynnika ściśliwości) jest stały,

c. w odniesieniu do elementów elektrycznych

- rezystancje, indukcyjności i pojemności są stałe, niezależne od prądu i napięcia.

Oprócz powyższych założeń natury ogólnej, w poszczególnych przypadkach należy jeszcze uwzględnić założenia szczegółowe, np. idealna szczelność elementów hydraulicznych lub pomijalna masa niektórych części ruchomych. Należy, więc pamiętać, że równania i charakterystyki elementów liniowych są uproszczone i często można je stosować tylko do obliczeń wstępnych.

Podstawowe elementy (człony) automatyki zgrupowane są według właściwości dynamicznych, gdyż określają sposób przenoszenia sygnałów.

Niezależnie od takiego samego opisu matematycznego mogą różnić się między sobą konstrukcją i zasadami działania. Mogą być elementy mechaniczne pneumatyczne, hydrauliczne i elektryczne. Ze względu na właściwości dynamiczne wyróżniamy następujące grupy podstawowych elementów automatyki

1. proporcjonalne (bezineracyjne),
2. inercyjne pierwszego rzędu,
3. inercyjne drugiego rzędu,
4. oscylacyjne drugiego rzędu,
5. całkujące (idealne, rzeczywiste),
6. różniczkujące (idealne, rzeczywiste),
7. opóźniające.

Poniżej zostaną omówione podstawowe elementy automatyki za wyjątkiem elementu całkującego rzeczywistego i inercyjnego drugiego rzędu.

Własności statyczne wszystkich elementów będziemy określać podając równanie i wykres charakterystyki statycznej $y = f(u)$, a właściwości dynamiczne podając równanie różniczkowe i odpowiadającą mu transmitem operatorową oraz wykres odpowiedzi $y(t)$ na wymuszenie skokowe (charakterystyka czasowa) i charakterystyki amplitudowo-fazowe, logarytmiczne amplitudową oraz fazową.

Każdą grupę elementów będziemy ilustrować przykładami, przy czym w ramach danej grupy są to przykłady urządzeń konstrukcyjnie odmiennych, aby podkreślić, że podział ze względu na właściwości dynamiczne nie jest zależny od natury fizycznej elementów i że np. elementem inercyjnym może być zarówno urządzenie mechaniczne, jak i hydrauliczne, pneumatyczne lub elektryczne.

3.2 Elementy proporcjonalne (bezinercyjne)

Ogólna postać równania elementu bezinercyjnego jako zależność między sygnałem wyjściowym $y(t)$ a wejściowym $u(t)$ jest następująca

$$y(t) = ku(t), \quad (3.1)$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności (współczynnikiem wzmacniania).

Transmitancja operatorowa elementu bezinercyjnego jest równa współczynnikowi proporcjonalności, a więc transformując równanie (3.1) otrzymamy

$$y(s) = ku(s), \quad (3.2)$$

stąd

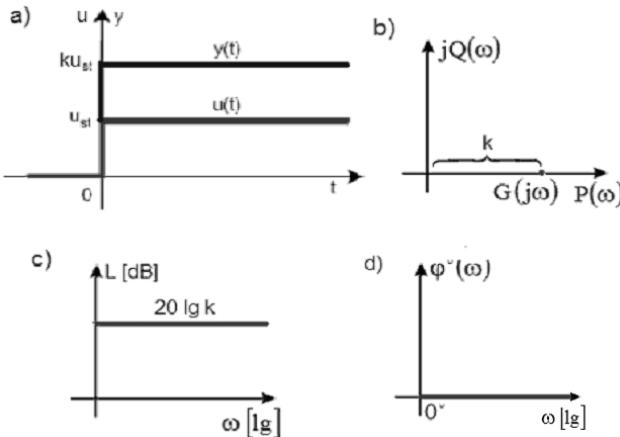
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = k. \quad (3.3)$$

Równanie charakterystyki statycznej elementu ma postać

$$y = ku. \quad (3.4)$$

Charakterystykę czasową, czyli odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t) = I(t) \cdot u_{st}$ otrzymamy z równania

$$y = ku_{st}. \quad (3.5)$$



Rysunek 3.1. Wykresy charakterystyk: a) czasowej, b) amplitudowo-fazowej, c) logarytmicznej amplitudowej, d) logarytmicznej fazowej

Element proporcjonalny odtwarza sygnał wejściowy bez żadnych opóźnień, wzmacniając sygnał do wartości k .

Transmitancję widmową wyznaczamy z równania (3.1), zatem

$$G(j\omega) = k. \quad (3.6)$$

Część rzeczywista transmitancji $P(\omega) = k$, a część urojona $Q(\omega) = 0$.

Wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej sprowadza się do punktu o współrzędnych $(k, 0)$ (rysunek 3.1b).

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest linią prostą (rysunek 3.1c).

$$L(\omega, dB) = 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = 20 \lg k. \quad (3.7)$$

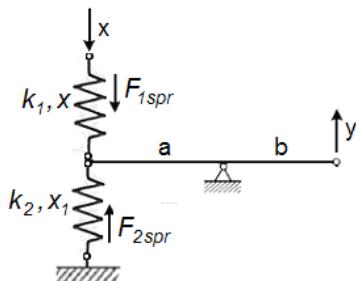
Logarytmiczna charakterystyka fazowa także jest linią prostą leżącą na osi odciętych (rysunek 3.1d).

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (3.8)$$

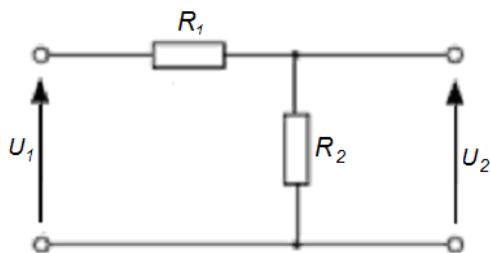
ROZDZIAŁ 3

Przykład 3.1

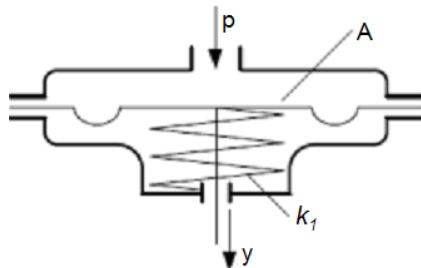
Dla różnych modeli układów automatyki określić transmitancje operatorowe



Rysunek 3.2. Schemat układu mechanicznego układu automatyki



Rysunek 3.3. Schemat układu elektrycznego



Rysunek 3.4. Schemat układu pneumatycznego

Rozwiązanie

dla modelu układu mechanicznego (rysunek 3.2)

Sygnalem wejściowym jest przemieszczenie x sprężyny górnej, sygnałem wyjściowym jest przemieszczenie y końca belki.

Z równowagi sił w liniowej sprężynie górnej i dolnej otrzymamy

$$F_{1spr} = F_{2spr},$$

$$k_1[x(t) - x_l(t)] = k_2x_l(t),$$

Z powyższego równania należy wyeliminować współrzędną pośrednią $x_l(t)$, czyli

$$\frac{x_l(t)}{a} = \frac{y(t)}{b} \rightarrow x_l(t) = \frac{a}{b}y(t),$$

zatem

$$k_1x(t) - k_1\frac{a}{b}y(t) = k_2\frac{a}{b}y(t) \rightarrow k_1x(t) = (k_1 + k_2)\frac{a}{b}y(t),$$

Transmitancja operatorowa jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{k_1b}{a(k_1 + k_2)} = k.$$

dla modelu układu elektrycznego (rysunek 3.3)

Sygnalem wejściowym jest napięcie U_1 , sygnalem wyjściowym jest napięcie U_2 .

Z równości prądów dla równoległego połączenia obwodu elektrycznego otrzymamy zależność pomiędzy sygnałami napięciowymi wejścia i wyjścia

$$i_1(t) = i_2(t) \rightarrow \frac{U_2(t)}{R_1 + R_2} = \frac{U_1(t)}{R_2} \rightarrow U_1(t) = U_2(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

Transmitancja operatorowa rozważanego układu elektrycznego jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = k.$$

ROZDZIAŁ 3

dla modelu układu pneumatycznego (rysunek 3.4)

Sygnalem wejściowym jest ciśnienie zewnętrzne p , sygnałem wyjściowym jest przemieszczenie y membrany, trzpienia i sprężyny.

Z równowagi sił w stanie równowagi układu, kiedy ciśnienie działające na membranę zrównoważy siłę sprężyny otrzymamy

$$p(t)A = k_I y(t),$$

Transmitancja operatorowa rozważanego układu pneumatycznego jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{A}{k_I} = k.$$

3.3. Elementy inercyjne pierwszego rzędu

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego element inercyjny pierwszego rzędu jest następująca

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t), \quad (3.9)$$

Równanie charakterystyki statycznej otrzymamy dla $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ z równania (3.9), czyli

$$y(t) = ku(t). \quad (3.10)$$

Stosując do równania (3.9) transformację Laplace'a otrzymamy transmitancję operatorową

$$Ts y(s) + y(s) = ku(s). \quad (3.11)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{Ts + I}. \quad (3.12)$$

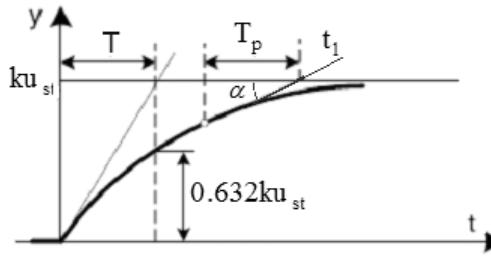
gdzie: k – współczynnik proporcjonalności, T – stała czasowa (ma wymiar czasu, [s])

Charakterystykę czasową otrzymamy jako odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t) = l(t)u_{st} \rightarrow u(s) = \frac{l}{s}u_{st}$ otrzymamy przekształcając równanie (3.12), a więc

$$\begin{aligned} y(s) &= G(s)u(s) = \frac{k}{s(Ts+1)} \cdot u_{st} = \frac{k}{T} u_{st} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{T}\right)} \rightarrow y(t) = \\ &= L^{-1}[y(s)] = \frac{k}{T} u_{st} \cdot T \left(1 - e^{-t/T}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Równanie (3.13) jest rozwiązaniem równania różniczkowego (3.9) przy zerowych warunkach początkowych.

Wykres $y(t)$ w postaci charakterystyki czasowej przedstawia rysunek 3.5.



Rysunek 3.5. Odpowiedź elementu inercjnego pierwszego rzędu na wymuszenie skokowe.

Stałą czasową T można określić wystawiając styczną w dowolnym punkcie krzywej wykładniczej $y(t)$ i wyznaczając odcinek podstycznej na asymptocie (rysunek 3.5)

Podstyczna

$$t_1 \rightarrow \tan \alpha = \frac{dy}{dt} = \frac{ku_{st} - y(t)}{dt} = ku_{st} \cdot T \cdot e^{-t/T}, \rightarrow T = T_p. \quad (3.14)$$

Rozdział 3

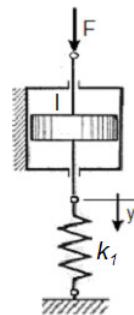
Stałą czasową T można również określić jako czas od chwili $t=0$ do chwili, kiedy $y(t)$ osiąga 63,2% swej końcowej wartości ustalonej ku_{st} . Podstawiając za $t=T$ otrzymujemy

$$y(t) = ku_{st} (1 - e^{-t}) = 0.632ku_{st}. \quad (3.15)$$

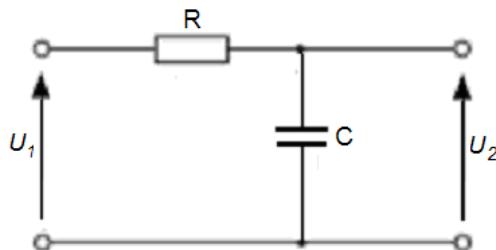
Dla elementu inercyjnego pierwszego rzędu charakterystyki są podane w przykładzie 2.1 rozdziału 2 (charakterystyka amplitudowo-fazowa – rysunek 2.5, logarytmiczna amplitudowa – rysunek 2.6, logarytmiczna fazowa – rysunek 2.7).

Przykład 3.2

Wyznaczyć transmitancje operatorowe układów automatyki podanych na rysunkach 3.6 i 3.7.



Rysunek 3.6. Schemat mechanicznego układu automatyki



Rysunek 3.7. Schemat czwórnika RC układu elektrycznego

Rozwiązanie (przykład – rysunek 3.6)

Sygnalem wejściowym jest zewnętrzna siła F , sygnałem wyjściowym jest przemieszczenie y tłoka, tłoczyska i sprężyny.

Zewnętrzna siła działająca na układ musi równoważyć siły pochodzące od tłumika i sprężyny.

Równanie równowagi sił jest następujące

$$ly(t) + k_l y(t) = F(t),$$

Stosując przekształcenie Laplace'a i zerowe warunki początkowe otrzymamy

$$csy(s) + k_l y(s) = F(s) \rightarrow y(s)(ls + k_l) = F(s),$$

stąd transmitancja operatorowa badanego układu jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ls + k_l} = \frac{1}{k_l \left(\frac{l}{k_l} s + 1 \right)} = \frac{k}{Ts + 1}, \quad k = \frac{l}{k_l}, \quad T = \frac{l}{k_l}.$$

gdzie: k – współczynnik wzmacniania, T – stała czasowa

Rozwiążanie (przykład – rysunek 3.7)

Sygnalem wejściowym jest napięcie U_1 , sygnalem wyjściowym jest napięcie U_2 .

Równanie obwodu elektrycznego

$$U_1(t) = i(t)R + U_2(t), \quad i(t) = C \frac{dU_2(t)}{dt},$$

zatem

$$U_1(t) = C \frac{dU_2(t)}{dt} R + U_2(t)$$

Transmitancja obwodu jest

$$U_1(s) = CSU_2(s)R + U_2(s), \quad \rightarrow G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T = RC.$$

3.4. Elementy oscylacyjne drugiego rzędu

Ogólna postać równania różniczkowego opisującego zależność między sygnałem wyjściowym $y(t)$ a wejściowym $u(t)$ elementu oscylacyjnego jest następująca

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t), \quad (3.16)$$

przy czym $T_2^2 < 4T_1^2$ (warunek powstawania drgań oscylacyjnych).

Stosując transformację Laplace'a do równania (3.16)

$$T_1^2 s^2 y(s) + T_2 s y(s) + y(s) = ku(s),$$

otrzymamy transmitancję operatorową w postaci

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}. \quad (3.17)$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcionalności (wzmocnienia), T_1 i T_2 są stałymi czasowymi elementu.

Należy podkreślić, że to nie postać równania (3.16) lub (3.17) decyduje o tym, że element jest oscylacyjny ($T_2^2 < 4T_1^2$) (taka sama może być postać równań elementu inercyjnego drugiego rzędu, w którym żadne oscylacje odpowiedzi skokowej nie występują). Wówczas mamy do czynienia z elementem inercyjnym drugiego rzędu ($T_2 \geq 2T_1$).

Często spotyka się również następującą postać równania różniczkowego używanego w teorii drgań, która ułatwia interpretację przebiegów przejściowych elementu oscylacyjnego, czyli

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = k\omega_0^2 u(t). \quad (3.18)$$

przy czym $\xi^2 < 1$. Wówczas transmitancja operatorowa jest opisana równaniem

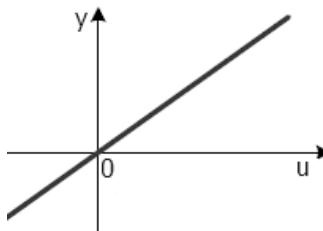
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (3.19)$$

gdzie: k – współczynnik proporcjonalności, $\omega_0 = I/T_1$ – częstotliwość drgań własnych elementu oscylacyjnego, $\xi = T_2/2T_1$ – zredukowany (względny) współczynnik tłumienia.

Równanie charakterystyki statycznej otrzymamy z równania wyjściowego (3.16) po przyrównaniu pochodnych funkcji do zera, a więc

$$y(t) = ku(t). \quad (3.20)$$

Wykresy charakterystyki statycznej pokazuje rysunek 3.8.



Rysunek 3.8. Charakterystyka statyczna elementu oscylacyjnego

Korzystając ze wzoru (3.17) odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t) = J(t)u_{st} \rightarrow u(s) = \frac{J}{s}u_{st}$ obliczamy według wzoru

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{k}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}\right]u_{st}, \quad (3.21)$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego (mianownik wzoru (3.17) przyrównany do zera) są

$$s_{1,2} = -\frac{1}{T_1} \left[\frac{T_2}{2T_1} \mp \sqrt{\left(\frac{T_2}{2T_1}\right)^2 - 1} \right] = -\omega_0 \left(\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1} \right), \quad (3.22)$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe będzie mieć charakter oscylacyjny, jeżeli spełniony jest podany na wstępie warunek $T_2^2 < 4T_1^2$ lub, co jest jednoznaczne $\xi^2 < 1$, wówczas pierwiastki $s_{1,2}$ zapiszemy w postaci

ROZDZIAŁ 3

$$s_{1,2} = -\frac{1}{T_1} \left[\frac{T_2}{2T_1} \mp j \sqrt{1 - \left(\frac{T_2}{2T_1} \right)^2} \right] = -\omega_0 \left(\xi \mp \sqrt{1 - \xi^2} \right). \quad (3.23)$$

otrzymujemy z tablic transformat

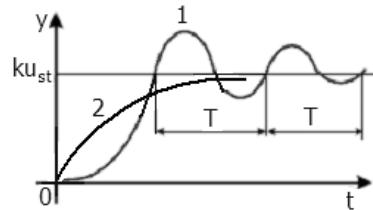
$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)} \right] k u_{st} = \\ &= k u_{st} \left[1 + \frac{1}{T_1^2 s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} - \frac{1}{T_1^2 s_2(s_1 - s_2)} e^{s_2 t} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

Stosując wzory Eulera ($e^{a \pm j\omega} = e^a (\cos \omega \pm j \sin \omega)$) oraz wcześniej przyjęte oznaczenia, można przedstawić $y(t)$ w postaci

$$y(t) = k u_{st} \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \right]. \quad (3.25)$$

gdzie

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}. \quad (3.26)$$



Rysunek 3.9. Odpowiedź elementu oscylacyjnego na wymuszenie skokowe $1(t)_{ust}$, 1) oscylacyjna, 2) aperiodyczna

Wykres odpowiedzi $y(t)$ na wymuszenie skokowe przedstawiono na rysunku 3.9 (1 – przebieg oscylacyjny, 2 – przebieg aperiodyczny). Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i ujemne oraz gdy występuje tłumienie krytyczne ($\xi = 1$), to otrzymujemy aperiodyczny przebieg odpowiedzi.

Składowa ustalona przebiegu wynosi ku_{st} , a składowa przejściowa jest gasnącą sinusoidą, której okres jest stały i wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (3.27)$$

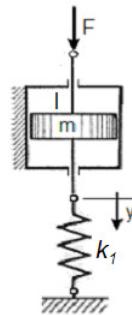
W przypadku szczególnym, kiedy $\xi = 0$ (tzn. $T_2 = 0$), występują drgania zachowawcze (nie tłumione) o częstotliwości własnej ω_0 . Wtedy

$$y(t) = ku_{st} [1 - \sin(\omega_0 t + 90^\circ)] = ku_{st} [1 - \cos \omega_0 t]. \quad (3.28)$$

Dla elementu inercyjnego drugiego rzędu charakterystyki częstotliwościowe podane są w przykładzie 2.3 rozdziału 2 (charakterystyka amplitudowo-fazowa – rysunek 2.9, logarytmiczna amplitudowa – rysunek 2.10, logarytmiczna fazowa – rysunek 2.11).

Przykład 3.3

Dla układu automatyki złożonego z tłumika, masy i sprężyny (rysunek 3.10) wyznaczyć transmitancję operatorową. Sygnałem wejściowym jest zewnętrzna siła F , sygnałem wyjściowym jest przemieszczenie y tłoka, tłoczyska i sprężyny.



Rysunek 3.10. Schemat mechanicznego układu automatyki

Rozwiązanie

Równanie równowagi sił dla badanego układu mechanicznego jest następujące

$$m\ddot{y}(t) + l\dot{y}(t) + k_f y(t) = F(t).$$

ROZDZIAŁ 3

Korzystając z rachunku operatorowego (przekształceń Laplace'a) przy zerowych warunkach początkowych powyższe równanie przyjmuje postać

$$ms^2 y(s) + ls y(s) + k_1 y(s) = F(s),$$

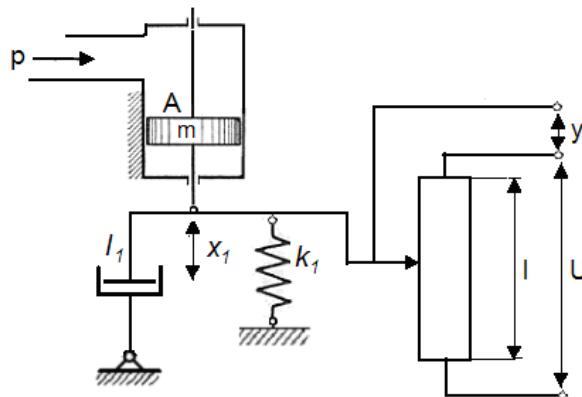
Stąd transmitancja operatorowa jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + ls + k_1} = \frac{k}{T_1 s^2 + T_2 s + 1},$$

$$T_1^2 = \frac{m}{k_1}, \quad T_2 = \frac{l}{k_1}, \quad k = \frac{1}{k_1}.$$

Przykład 3.4

Wyznaczyć transmitancję operatorową układu automatyki przedstawionego na rysunku 3.11 przy założeniu, że szczotka znajduje się na początku opornika w położeniu równowagi. Wielkością wejściową jest ciśnienie p , wyjściową zaś napięcie wyjściowe y . Przemieszczenie dźwigni o masie m , tłumika o współczynniku tłumienia l , sprężyny o sztywności k_1 jest x_1 .



Rysunek 3.11. Schemat mechanicznego układu automatyki

Rozwiązanie

Zależność pomiędzy przemieszczeniem x_1 a napięciem y jest następująca

$$\frac{y(t)}{U} = \frac{x_l(t)}{l} \rightarrow x_l(t) = \frac{l}{U} \cdot y(t),$$

Równanie ruchu układu

$$m\ddot{x}_l(t) + l_I \dot{x}_l(t) + k_l x_l(t) = p(t)A,$$

Stosując rachunek operatorowy Laplace'a otrzymamy

$$m s^2 x_l(s) + l_I s x_l(s) + k_l x_l(s) = p(s)A,$$

Podstawiając w miejsce x_l powyżej wyznaczoną zależność otrzymamy

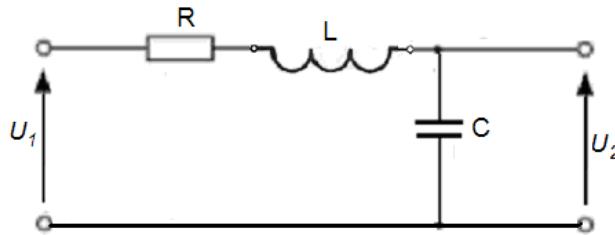
$$y(s)(mls^2 + ll_I s + k_l l) = p(s)AU,$$

Transmitancja operatorowa jest

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{AU}{mls^2 + ll_I s + k_l l} = \frac{AU}{k_l l \left(\frac{m}{k_l} s^2 + \frac{l_I}{k_l} s + 1 \right)} = \\ &= \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1} \\ k &= \frac{UA}{k_l l}, \quad T_1^2 = \frac{m}{k_l}, \quad T_2 = \frac{l_I}{k_l}. \end{aligned}$$

Przykład 3.5

Schemat elementu automatyki pokazano na rysunku 3.12. Sygnałem wejściowym jest napięcie U_1 , wyjściowym napięcie U_2 .



Rysunek 3.12. Schemat czwórnika RC układu elektrycznego

ROZDZIAŁ 3

Rozwiązańie

Równanie obwodu elektrycznego pokazanego na rysunku jest następujące

$$U_1(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + U_2(t),$$

$$U_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt, \quad \rightarrow \frac{dU_2(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t), \quad \rightarrow i(t) = C \frac{dU_2(t)}{dt},$$

$$\frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2U_2(t)}{dt^2}, \quad U_1(t) = RC \frac{dU_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + U_2(t).$$

Korzystając z rachunku operatorowego i powyższego równania wyznaczamy transmitancję operatorową, zatem

$$U_1(s) = RCsU_2(s) + LCS^2U_2(s) + U_2(s) = U_2(s)(LCs^2 + RCs + 1),$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}. \quad T_1^2 = LC, \quad T_2 = RC.$$

3.5 Elementy całkujące idealne

Są to elementy, w których wielkość wyjściowa jest proporcjonalna do całki wielkości wejściowej. Ogólna postać równania różniczkującego elementu całkującego o sygnałach różnoimiennych (te same miana) jest następująca

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad (3.29)$$

lub po scałkowaniu, przy zerowych warunkach początkowych,

$$y(t) = k \int_0^t u dt. \quad (3.30)$$

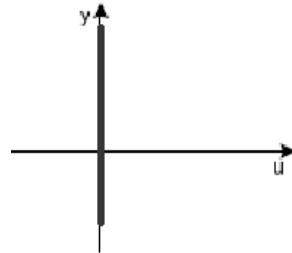
Z równania (3.29) wynika transmitancja operatorowa

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s}. \quad (3.31)$$

Równanie charakterystyki statycznej otrzymamy z równania (3.29). Dla $\frac{dy}{dt} = 0$, $y = \text{const.}$, wówczas $u = 0$ a jej wykres pokazuje rysunek 3.13.

Charakterystykę czasową jako odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t) = I(t)u_{st}$ wyznaczamy z transmitancji operatorowej, zatem

$$y(s) = G(s)u(s) = \frac{k}{s^2}u_{st} \rightarrow y(t) = L[y(s)] = ku_{st}t. \quad (3.32)$$



Rysunek 3.13. Charakterystyka statyczna elementu całkującego

Wykres $y(t)$ podano na rysunku 3.14a.

W szczególnym przypadku, kiedy wejście i wyjście są sygnałami jednoimiennymi, współczynnik k wzmocnienia elementu całkującego ma wymiar odwrotności czasu. Wówczas ogólna postać równania różniczkowego elementu całkującego przyjmuje postać

$$T \frac{dy(t)}{dt} = u(t). \quad (3.33)$$

której odpowiada transmitancja

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{I}{Ts}. \quad (3.34)$$

gdzie T jest stałą czasową lub krócej – stałą całkowania.

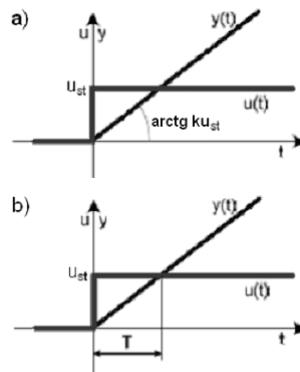
ROZDZIAŁ 3

Stałą tę można określić na wykresie odpowiedzi skokowej zgodnie z rysunkiem 3.14b.

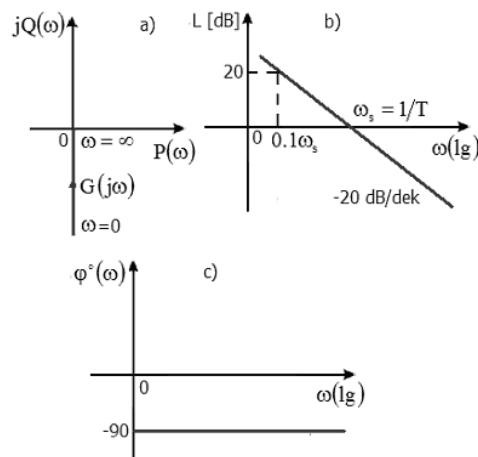
Transmitancję widmową otrzymamy z równania (3.31)

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{kj\omega}{j\omega \cdot j\omega} = -j\frac{k}{\omega}, \quad (3.35)$$

stąd $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = -k/\omega$.



Rysunek 3.14. Charakterystyka czasowa elementu całkującego:
a) wg wzoru (3.31), b) wg wzoru (3.34)



Rysunek 3.15. Charakterystyki częstotliwościowe elementu całkującego:
a) amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna amplitudowa, c) logarytmiczna fazowa

Logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową otrzymamy ze znanych już wzorów tj.

$$L(dB) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -90^\circ.$$

Dla sygnałów różnoimiennych otrzymamy

$$L(dB) = 20 \lg \frac{k}{\omega}. \quad (3.36)$$

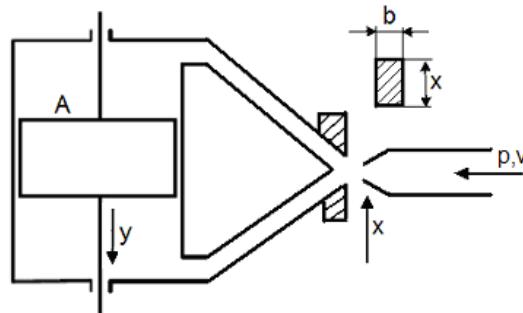
zaś dla jednoimiennych

$$L(dB) = 20 \lg \frac{l}{T\omega} = -20 \lg T\omega. \quad (3.37)$$

Zauważmy, że dla $\omega = \omega_s = l/T$ $L(dB)=0$.

Przykład 3.6

Wyznaczyć równanie serwomotoru hydraulicznego przedstawionego na rysunku 3.16 jeżeli wielkością wejściową jest przesunięcie x końca rurki strumieniowej o przekroju prostokątnym, zaś wyjściową przemieszczenie y tłoka siłownika powstające na wskutek ciśnienia p oleju płynącego z prędkością v .



Rysunek 3.16. Zespół rozdzielacz – siłownik hydrauliczny

Rozwiązanie

ROZDZIAŁ 3

Z równania ciągłości strugi, natężenie przepływu Q w cylindrze wynosi

$$Q_l = A \frac{dy(t)}{dt},$$

Wydatek oleju przez szczelinę o przekroju $A = x(t)b$ wynosi

$$Q_{szcz.} = x(t)bv.$$

Porównując oba wydatki otrzymamy

$$Q_l = Q_{szcz.} \rightarrow A \frac{dy(t)}{dt} = x(t)bv,$$

Stąd transmitancja operatorowa jest

$$A s y(s) = b v x(s) \rightarrow G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b v}{A s},$$

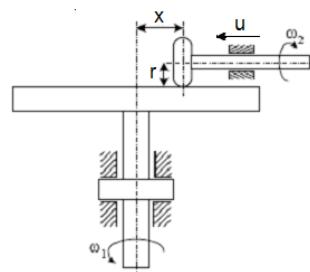
Ponieważ sygnały na wejściu i wyjściu są jednoimienne to

$$G(s) = \frac{1}{Ts}. \quad T = \frac{A}{b v}.$$

gdzie T – stała czasowa elementu całkującego

Przykład 3.7

Dla układu mechanicznego (rysunek 3.17) wyznaczyć transmitancję operatorową, jeżeli sygnałem wejściowym jest przemieszczenie liniowe u koła o promieniu r , sygnałem wyjściowym jest jego kąt obrotu α .



Rysunek 3.17. Przekładnia cierna bezstopniowa w postaci elementu automatyki

Rozwiązanie

Zakładając, że nie ma poślizgu kół, równanie prędkości w punkcie ich styku jest następujące

$$\omega_1 x = \omega_2 r, \quad \omega_2 = \frac{d\alpha(t)}{dt}, \quad \text{stąd} \quad \omega_1 x(t) = r \frac{d\alpha(t)}{dt},$$

Transmitancja operatorowa jest

$$\omega_1 x(s) = rs\alpha(s) \rightarrow G(s) = \frac{\alpha(s)}{x(s)} = \frac{\omega_1}{rs},$$

Ponieważ sygnały na wejściu i wyjściu są różnoimienne to

$$G(s) = \frac{\omega_1}{rs} = \frac{k}{s}. \quad k = \frac{\omega_1}{r}.$$

3.6. Elementy różniczkujące

Element różniczkujący idealny

Idealny element różniczkujący jest to taki element, w którym wielkość wyjściowa jest proporcjonalna do pochodnej wielkości wejściowej.

Równanie idealnego elementu różniczkującego dla sygnałów różnoimiennych jest następujące

$$y(t) = k \frac{du}{dt}. \quad (3.38)$$

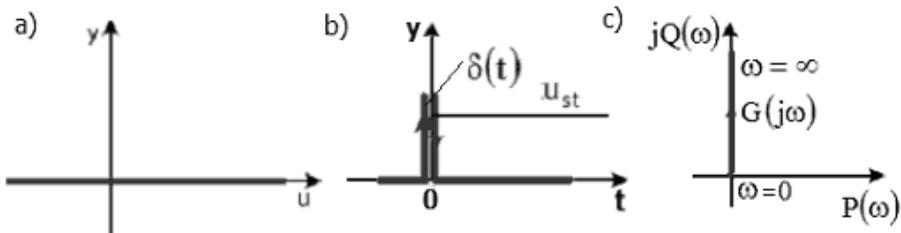
skąd wynika transmitancja

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = ks. \quad (3.39)$$

Współczynnik k definiuje się jako

ROZDZIAŁ 3

$$k = \frac{y(t)}{du/dt}. \quad (3.40)$$



Rysunek 3.18. Charakterystyki idealnego elementu różniczkującego:
a) statyczna, b) czasowa, c) amplitudowo-fazowa

Odpowiedź na wymuszenie skokowe (charakterystyka czasowa – rysunek 3.18b) jest funkcją Diraca pomnożoną przez k oraz przez amplitudę skoku u_{st} . Zatem

$$y(s) = G(s)u(s) = ks u(s) = ku_{st}. \quad (3.41)$$

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] = ku_{st}\delta(t). \quad (3.42)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0, \\ 0 & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

W przypadku szczególnym, kiedy wejście i wyjście są sygnałami jednoimennymi, równanie idealnego elementu różniczkującego zapisuje się w postaci

$$y(t) = T \frac{du}{dt}. \quad (3.43)$$

której odpowiada transmitancja

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = Ts. \quad (3.44)$$

gdzie T jest współczynnikiem, który można zdefiniować jak (3.40).

Transmitancja widmowa otrzymana z równania (3.44) jest

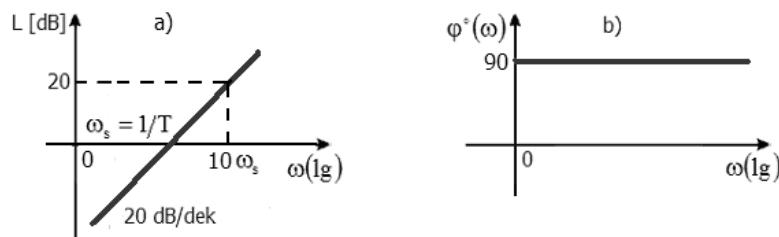
$$G(j\omega) = jT\omega. \quad (3.45)$$

stąd część rzeczywista $P(\omega) = 0$, część urojona $Q(\omega) = T\omega$. Łatwo zauważać, że wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej jest dla idealnego elementu różniczkującego dodatnią półosią urojonych (rysunek 3.18c). Jeżeli na wejście idealnego elementu różniczkującego podamy sygnał o małej wartości częstości, to jego amplitudy będą mocno zmniejszone. Sygnał będzie filtrowany. Gdy zaś częstości będą rosły to amplitudy będą również wzmacniane. Odpowiedź na wymuszenie skokowe jest w tym przypadku funkcją Diraca pomnożoną przez Tu_{st} .

Logarytmiczną charakterystykę amplitudową i fazową otrzymamy obliczając

$$\begin{aligned} L(dB) &= 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = 20 \lg T\omega, \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg(\infty) = 90^\circ. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Charakterystyki te przedstawia rysunek 3.19.



Rysunek 3.19. Logarytmiczne charakterystyki idealnego elementu różniczkującego: a) amplitudowa, b) fazowa

Idealnego elementu różniczkującego nie można zrealizować praktycznie, ale poznanie jego własności jest celowe z tego względu, że często w elementach złożonych wyodrębnia jako jeden ze składników idealne działanie różniczkujące. Ponadto, idealny element różniczkujący traktuje się czasami jako pierwsze przybliżenie rzeczywistego elementu różniczkującego.

Elementy różniczkujące rzeczywiste

Ogólna postać równania rzeczywistego elementu różniczkującego dla sygnałów różnoimiennych jest następująca

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}. \quad (3.47)$$

z tego równania wynika transmitancja

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{ks}{Ts + 1}. \quad (3.48)$$

gdzie k współczynnikiem proporcjonalności, a T stałą czasową elementu.

Jeżeli wejście i wyjście są sygnałami jednoimiennymi, równanie różniczkowe zapisuje się w postaci

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T \frac{du(t)}{dt}. \quad (3.49)$$

której odpowiada transmitancja

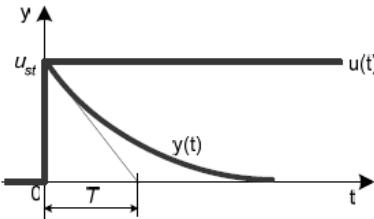
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1}. \quad (3.50)$$

Charakterystyka statyczna będzie identyczna z podaną na rysunku 3.18a), natomiast charakterystykę czasową jako odpowiedź na wymuszenie skokowe wyznaczamy z ogólnej postaci transmitancji (3.48), czyli

$$y(s) = \frac{ks}{Ts + 1} u(s) = \frac{ku_{st}}{Ts + 1} = \frac{k}{T} u_{st} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}, \quad (3.51)$$

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] = \frac{k}{T} u_{st} e^{-t/T}. \quad (3.52)$$

Wykres $y(t)$ przedstawiono na rysunku 3.20.



Rysunek 3.20. Charakterystyka czasowa dla rzeczywistego elementu różniczkującego jako odpowiedź na wymuszenie skokowe

Transmitancję widmową oraz część rzeczywistą i urojoną wyznaczymy z równania (3.48) podstawiając za $s = j\omega$, a więc

$$G(j\omega) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1} = \frac{kj\omega(Tj\omega - 1)}{(Tj\omega + 1)(Tj\omega - 1)} = \frac{kT\omega^2 + jk\omega}{1 + T^2\omega^2}. \quad (3.54)$$

stąd

$$P(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2}. \quad (3.55)$$

Można wykazać jak w przykładzie 2.1 rozdziału drugiego, że częstotliwościowa charakterystyka amplitudowo-fazowa jest półokręgiem o współrzędnych środka w punkcie $(k/2T, j0)$ i o dodatniej części urojonej (rysunek 3.21a).

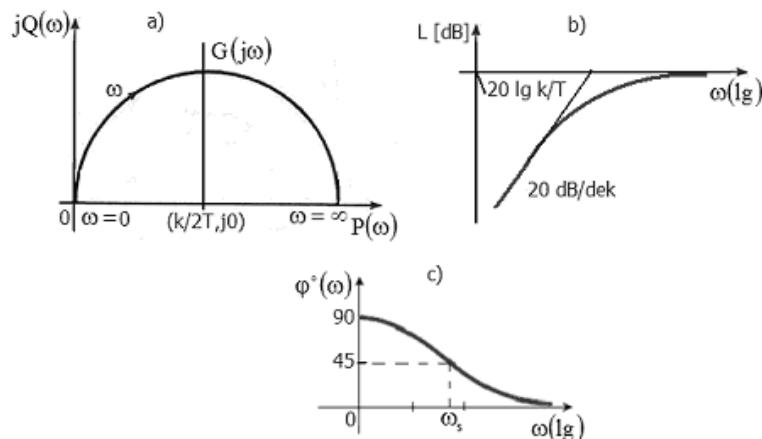
Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa wyraża się wzorem

$$L(dB) = 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = 20 \lg \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad (3.56)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \left(\frac{1}{T\omega} \right) = 90^\circ - \arctg(T\omega). \quad (3.57)$$

Wykresy tych charakterystyk przedstawia rysunki 3.21 b) i c).

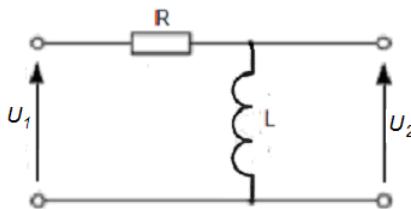
ROZDZIAŁ 3



Rysunek 3.21. Charakterystyki częstotliwościowe dla rzeczywistego elementu różniczkującego:
a) Charakterystyka amplitudowo-fazowa,
b) logarytmiczna amplitudowa, c) logarytmiczna fazowa

Przykład 3.8

Schemat elektrycznego elementu automatyki złożonego z oporności i indukcyjności podano na rysunku 3.22. Wielkością wejściową jest napięcie U_1 , wyjściową napięcie U_2 . Wyznaczyć transmitancję operatorową.



Rysunek 3.22. Schemat elektrycznego elementu automatyki

Rozwiązanie

Równanie obwodu elektrycznego jest

$$U_1(t) = U_R(t) + U_L(t),$$

$$U_R(t) = i(t)R,$$

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U_2(t) \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{U_2(t)}{L}.$$

Stąd

$$U_1(t) = i(t)R + U_2(t),$$

Różniczkując powyższe równanie otrzymamy

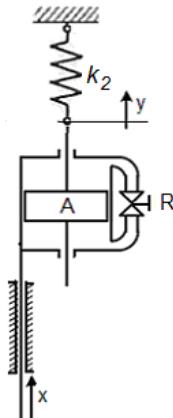
$$\frac{dU_1(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{dU_2(t)}{dt} = \frac{R}{L} \cdot U_2(t) + \frac{dU_2(t)}{dt},$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} = \frac{s}{\frac{R}{L} \left(\frac{L}{R}s + 1 \right)} = \frac{Ts}{Ts + 1}. \quad T = \frac{L}{R}.$$

T jest stałą czasową rzeczywistego elementu różniczkującego. Otrzymana zależność na transmitancję dotyczy sygnałów jednoimennych.

Przykład 3.9

Schemat tłumika hydraulicznego ze sprężyną jako elementu automatyki podano na rysunku 3.23. Wielkością wejściową jest przemieszczenie x cylindra, wyjściową jest przemieszczenie y tłoczyska tłumika. Wyznaczyć transmitancję operatorową przyjmując, że natężenie przepływu oleju przez opór R jest $Q = k_2 \cdot \Delta p$.



Rysunek 3.23. Schemat elementu automatyki złożonego z tłumika hydraulicznego i sprężyny

Rozdział 3

Rozwiązańie

Ugięcie sprężyny o y powoduje różnicę ciśnień Δp na oporze R

$$\Delta p = \frac{y(t)}{A} k_1,$$

Z równania ciągłości strugi otrzymamy

$$A \frac{d}{dt} [x(t) - y(t)] = \Delta p k_2 = \frac{y(t)}{A} k_1 k_2,$$

Wprowadzając do powyższego równania rachunek operatorowy oraz uwzględniając zerowe warunki początkowe otrzymamy

$$Asx(s) = Asy(s) + \frac{k_1 k_2}{A} y(s) = y(s) \left(As + \frac{k_1 k_2}{A} \right)$$

Transmitancja operatorowa badanego układu jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{As}{As + \frac{k_1 k_2}{A}} = \frac{As}{\frac{k_1 k_2}{A} \left(\frac{A^2}{k_1 k_2} s + 1 \right)} = \frac{Ts}{Ts + 1}. \quad T = \frac{A^2}{k_1 k_2}.$$

T jest stałą czasową rzeczywistego elementu różniczkującego. Otrzymana zależność na transmitancję dotyczy także sygnałów jednoimennych.

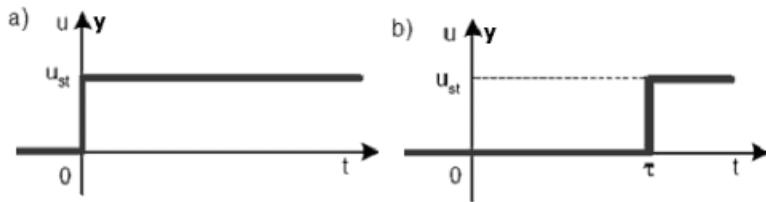
3.7. Elementy opóźniające

Równanie elementu opóźniającego ma postać

$$y(t) = u(t - \tau). \quad (3.58)$$

skąd wynika transmitancja

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = e^{-\tau s}. \quad (3.59)$$



Rysunek 3.24. Wymuszenie skokiem jednostkowym $u(t) = I(t)u_{st}$ (a) i odpowiedź $y(t) = I(t - \tau)u_{st}$ elementu opóźniającego (b)

Z podanych równań wynika, że element opóźniający nie znieksztalca sygnału wejściowego, lecz jedynie przesuwa go w czasie.

Charakterystyka statyczna będzie, zatem

$$y = u. \quad (3.60)$$

a odpowiedź na wymuszenie skokowe będzie takim samym sygnałem skokowym przesuniętym w czasie o wielkość opóźnienia τ . Wykresy wymuszenia i odpowiedzi skokowej pokazano na rysunku 3.24.

Elementami opóźniającymi są w szczególności urządzenia służące do przemieszczania substancji (przenośniki taśmowe), jeżeli miejsce wprowadzania sygnału wejściowego u i miejsce odbioru sygnału wyjściowego y znajdują się w pewnej odległości od siebie.

Transmitancję widmową wyznaczamy z równania (3.59), a więc

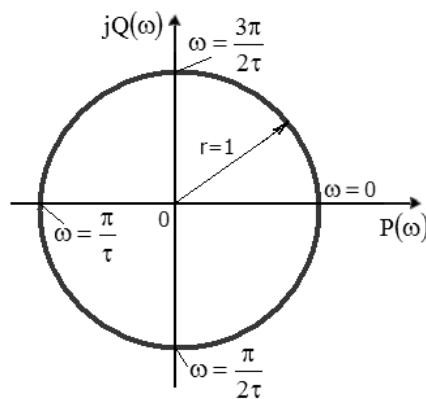
$$G(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = e^{-j\omega\tau}. \quad (3.61)$$

Ze wzoru Eulera wynika $e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$, stąd otrzymamy część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej, czyli

$$P(\omega) = \cos \omega\tau, \quad Q(\omega) = -\sin \omega\tau. \quad (3.62)$$

Ze wzorów tych wynika, że wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej przedstawionej na rysunku 3.25 jest okręgiem o promieniu $r = 1$.

ROZDZIAŁ 3



Rysunek 3.25. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu opóźniającego

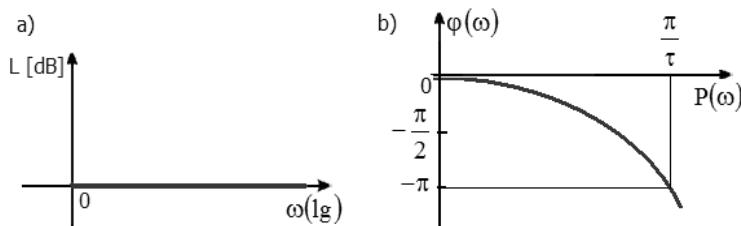
Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest niezależna od częstotliwości i równa się zero. Wynika to z następującego wzoru

$$L(dB) = 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = 20 \lg 1 = 0, \quad (3.63)$$

Interesujący jest przebieg logarytmicznej charakterystyki fazowej. Zależy ona od czasu opóźnienia i częstotliwości kołowej. Obliczamy ją ze wzoru

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg(-\tan \omega \tau) = -\omega \tau \quad (3.64)$$

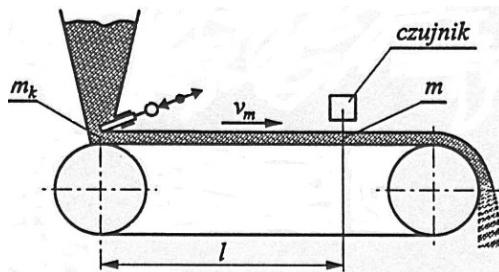
Wykresy tych charakterystyk są pokazane na rysunku 3.26.



Rysunek 3.26. Logarytmiczne charakterystyki elementu opóźniającego:
a) amplitudowa, b) fazowa

Przykład 3.10

Wyznaczyć transmitancję elementu opóźniającego, którego schemat przedstawia rysunek 3.27.



Rysunek 3.27. Schemat przenośnika taśmowego

Rozwiążanie

Rozpatrzmy układ regulacji grubości warstwy materiału na przenośniku taśmowym przedstawionym na rysunku 3.27.

Zmiana grubości warstwy zachodzi w zbiorniku zasypowym. Zmiana ta wiąże się ze zmianą masy transportowanego materiału w czasie t i zarejestrowana jest przez czujnik, zatem

$$\tau = \frac{l}{v_m},$$

$$m(t) = m_k(t - \tau),$$

Na podstawie twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s),$$

otrzymamy

$$G(s) = \frac{m(s)}{m_k(s)} = e^{-\tau s}.$$

Rozdział 3

4

**Opis układów
automatyki za pomocą
schematów
strukturalnych**

4.1. Schematy konstrukcyjne i blokowe (strukturalne)

W praktyce do złożonych dynamicznych układów automatyki najczęściej stosuje się schematy blokowe pokazujące strukturę dowolnego elementu lub układu automatyki w postaci bloków. Dla każdego z bloków jest określony związek między sygnałem wejściowym i wyjściowym oraz kierunek przepływu sygnałów w postaci transmitancji. Przekształcając złożony schemat blokowy układu, można zredukować go do jednego bloku o transmitancji zastępczej całego układu. Elementarne bloki zawierają poszczególne fragmenty lub składowe elementy układu automatyki są rysowane w postaci prostokątów, z umieszczonymi wewnątrz informacjami dotyczącymi ich właściwości w postaci transmitancji.

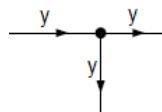
Zasadę działania układu automatyki można przedstawić na schemacie konstrukcyjnym i na jego podstawie zbudować schemat strukturalny. Schemat konstrukcyjny budujemy opierając się na konstrukcji układu (obiektu) poprzez przedstawienie poszczególnych jego elementów i ich połączeń. Należy jednak pamiętać, aby wprowadzając uproszczenia konstrukcyjne nie zmienić działania badanego układu. Na podstawie schematu konstrukcyjnego możemy zbudować schemat strukturalny (blokowy) układu. Schemat blokowy pokazuje sposób łączenia poszczególnych elementów układu, przebiegi i zmianę sygnałów.

Schematy blokowe możemy podzielić na schematy funkcjonalne i schematy ze znany transmitancjami. Schematy funkcjonalne pokazują przemieszczanie się sygnałów między poszczególnymi blokami. Kierunek przepływu sygnałów wynika ze schematu konstrukcyjnego. W każdym fizycznym układzie jest przynajmniej jeden element jednokierunkowy, w którym sygnał może przechodzić w określonym kierunku wyznaczającym kierunek przepływu dla całego układu np. w siłowniku hydraulicznym. W tym układzie sygnał może tylko przechodzić z rozdzielacza do cylindra silownika. Aby ze schematu funkcjonalnego zbudować schemat strukturalny z transmitancjami, należy określić, która z wielkości jest wielkością regulowaną. Następnie należy ustalić jej wartość zadaną i element wprowadzający tę wartość oraz znaleźć dla każdego elementu zależności funkcjonalne między wielkościami wyjściowymi i wejściowymi.

Sporządzanie schematów blokowych elementów lub układów automatyki na podstawie ich schematów konstrukcyjnych sprawia zwykle początkowo wiele trudności. Przyczyną tego jest konieczność dokładnego zrozumienia działania rozpatrywanego urządzenia lub układu, rozróżnienia wejść i wyjść, a zatem „kolejności” oddziaływania jednych zespołów na drugie, uwzględnienia natury fizycznej występujących sygnałów itd. Proste elementy przedstawiane są na schematach blokowych przez jeden „blok” – prostokąt, wewnątrz którego wpisuje się transmitancję lub wrysowuje się charakterystykę danego elementu, najczęściej odpowiedź skokową dla elementów liniowych lub charakterystykę statyczną dla elementów nieliniowych.

Złożone elementy lub układy mają własne schematy blokowe, w których poszczególne bloki reprezentują z reguły kolejne zespoły (elementy podstawowe) wchodzące w skład elementu złożonego. Schematy blokowe układów, zwłaszcza zawierających złożone elementy mogą być rozbudowane. Dla zwiększenia ich czytelności często przekształcamy schemat złożonych elementów do postaci pojedynczego bloku i dopiero wówczas wstawiamy je do schematu całego układu. Ponieważ w każdym układzie występuje, co najmniej jeden element skierowany, tzn. element o działaniu jednokierunkowym to kierunek przepływu sygnałów jest jednoznaczny.

Węzły informacyjne (zaczeplowe) przedstawiają na schematach blokowych urządzenia, które pozwalają pobierać tę samą informację do kilku gałęzi układu automatyki. Symbol graficzny podstawowego węzła informacyjnego, w którym pobiera się informację, co najmniej do dwóch gałęzi układu (wyjście), jest następujący



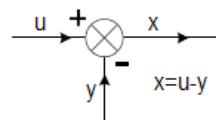
Rysunek 4.1. Przykład węzła informacyjnego

Przykładem węzła informacyjnego może być zbiornik ciśnieniowy, w którym znajduje się medium o ciśnieniu p , odprowadzane rurociągiem do dalszych części instalacji. Jeżeli założymy, że w całym zbiorniku i wychodzących z niego przewodach panuje to samo ciśnienie p , to otrzymany typowy przypadek węzła informacyjnego, z którego wychodzi tyle gałęzi o sygnałach p , ile jest wyprowadzeń tego ciśnienia ze zbiornika.

ROZDZIAŁ 4

Drugim przykładem może być tłoczyko siłownika hydraulicznego, na którego wejściu jest zainstalowane urządzenie wykonujące ruch postępowy. Przesunięcie tłocyska przed tłokiem jak i pod tłokiem związanym na sztywno z tłocyskiem jest takie samo.

Węzły sumacyjne reprezentują na schematach blokowych urządzenia, w których zachodzi algebraiczne sumowanie sygnałów (z uwzględnieniem znaków). Symbol graficzny podstawowego węzła sumacyjnego, w którym zachodzi sumowanie dwóch sygnałów, jest następujący:



Rysunek 4.2. Przykład węzła sumacyjnego

W elemencie lub urządzeniu reprezentowanym przez ten węzeł realizowany jest związek $x = u - y$.

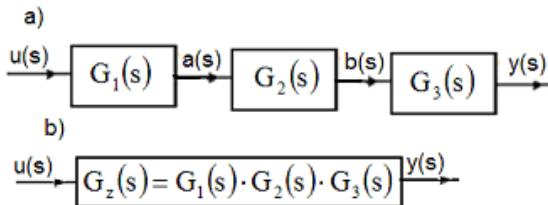
W schematach blokowych węzły informacyjne i sumacyjne, stanowiące z elementami decydującymi o zależnościach dynamicznych wspólną część konstrukcyjną, zawsze rysowane są poza blokami.

4.2. Przekształcenia schematów blokowych

Pierwotna postać schematu blokowego jest niekiedy dosyć uwikłana i nie można bezpośrednio zastosować do niej żadnego ze wzorów określających transmitancje połączeń podstawowych. Przekształcenie schematów blokowych umożliwia określenie transmitancji zastępczej (wypadkowej) całego układu automatyki, także liniowego równania różniczkowego opisującego cały układ. Możemy to zrobić dzięki temu, że układy liniowe są jednorodne i addytywne. Przekształcone układy muszą być układami równoważnymi w odniesieniu do zależności funkcyjnych między wielkością wyjściową a wejściową. Układy, których transmitancje są takie same nazywamy układami równoważnymi. Biorąc pod uwagę powyższą definicję możemy przekształcić układy blokowe do prostych i przejrzystych schematów tych układów. Przy rozbudowanych schematach blokowych, wszystkie rodzaje występujących połączeń

w układach sterowania w zależności od sposobu oddziaływanie przepływających sygnałów można sprowadzić do połączeń szeregowych, równoległych i ze sprzężeniem zwrotnym. Poniżej omówimy przekształcanie tych podstawowych połączeń w układy równoważne.

Szeregowe (kaskadowe) połączenie elementów przedstawia rysunek 4.3. Jest to takie połączenie elementów, w którym sygnał wyjściowy jednego bloku jest jednocześnie sygnałem wejściowym do następnego.



Rysunek 4.3. Schemat szeregowego połączenia bloków:
a) schemat pierwotny, b) schemat równoważny

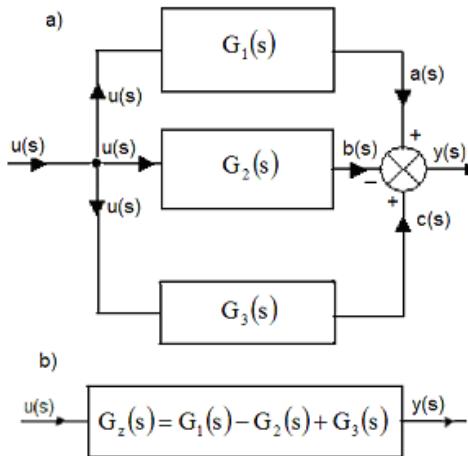
Z definicji transmitancji układu wynika

$$G_z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)b(s)a(s)}{b(s)a(s)u(s)} = G_3(s) \cdot G_2(s) \cdot G_1(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s). \quad (4.1)$$

Wynika stąd, że transmitancja szeregowego połączenia elementów równa się iloczynowi transmitancji $G_i(s)$ poszczególnych elementów.

Równoległe połączenie elementów przedstawia rysunek 4.4. Jest to takie połączenie elementów, w którym sygnał wejściowy działa równocześnie na kilka bloków, a sygnał wyjściowy takiego połączenia jest algebraiczną sumą sygnałów wyjściowych z poszczególnych bloków.

ROZDZIAŁ 4



Rysunek 4.4. Schemat równoległego połączenia bloków:
a) schemat pierwotny, b) schemat równoważny

Z równania węzła sumacyjnego wynika

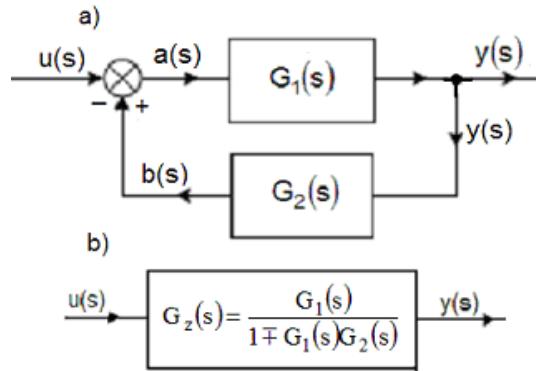
$$y(s) = a(s) - b(s) + c(s), \quad (4.2)$$

zaś z definicji transmitancji układu mamy

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{a(s) - b(s) + c(s)}{u(s)} = \frac{a(s)}{u(s)} - \frac{b(s)}{u(s)} + \frac{c(s)}{u(s)} = \\ &= G_1(s) - G_2(s) + G_3(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$G_i(s)$ – transmitancje elementów składowych.

Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim lub ujemnym przedstawia rysunek 4.5. Jest to połączenie elementów, w którym sygnał wyjściowy z bloku w torze głównym oddziałuje wstecznie na sygnał wejściowy tego bloku.



Rysunek 4.5. Schemat blokowy połączenia ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim i ujemnym: a) schemat pierwotny, b) schemat równoważny

Sprzężenie zwrotne jest ujemne, jeżeli równanie węzła sumacyjnego przyjmuje postać

$$a(s) = u(s) - b(s) \rightarrow u(s) = a(s) + b(s), \quad (4.4)$$

Z definicji transmitancji układu wynika

$$G_z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)}{a(s) + b(s)} = \frac{\frac{y(s)}{a(s)}}{1 + \frac{b(s)y(s)}{a(s)}} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}, \quad (4.5)$$

W przypadku dodatniego sprzężenia zwrotnego, równanie węzła sumacyjnego przyjmuje postać

$$a(s) = u(s) + b(s) \rightarrow u(s) = a(s) - b(s), \quad (4.6)$$

Fizycznie znaczy to, że zmiana wielkości regułowanej spowodowana zewnętrznym zakłóceniem wywołuje taką reakcję układu, która wzmacnia skutki tego zakłócenia. Postępując analogicznie jak powyżej przy uwzględnieniu zależności (4.6) otrzymamy

$$G_z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}, \quad (4.7)$$

Ogólny wzór na transmitancję zastępczą dla połączenia ze sprzężeniem zwrotnym jest

ROZDZIAŁ 4

$$G_z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}. \quad (4.8)$$

gdzie

$G_1(s)$ – transmitancja układu w torze głównym,

$G_2(s)$ – transmitancja układu w torze sprzężenia zwrotnego,

Znak „+” w mianowniku równania (4.8) dotyczy ujemnego sprzężenia zwrotnego, a znak „–”, dodatniego sprzężenia zwrotnego. Jeżeli $G_2(s) = 1$ i cały sygnał wyjściowy jest podawany na wejście, to takie sprzężenie nazywamy sprzężeniem bezpośrednim inaczej jednostkowym. Wówczas

$$G_z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}. \quad (4.9)$$

Jeżeli w torze sprzężenia zwrotnego występuje człon proporcjonalny $G_2(s) = k$, to takie sprzężenie nazywamy sprzężeniem sztywnym. Jeżeli w torze sprzężenia zwrotnego występuje człon różniczkujący $G_2(s) = Ts$, to otrzymujemy układ z podatnym sprzężeniem elastycznym. Dodatnie podatne sprzężenie zwrotne powoduje przyspieszenie procesu, zaś ujemne spowalnia proces. Korzystając z definicji transmitancji zastępczej oraz z równań węzłów sumacyjnych można określić (wyznaczyć) transmitancje podstawowych układów równoważnych. Z układów tych zbudowane są dowolne układy automatyki. Takie podstawowe układy są zestawione w tablicy 4.1.

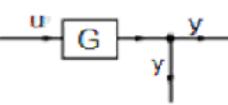
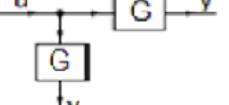
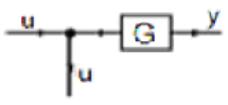
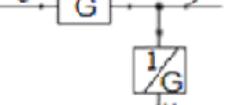
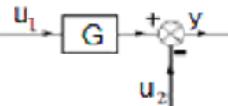
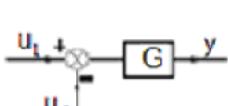
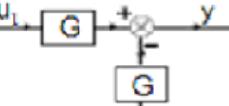
Dla elementów o wielu wejściach i wyjściach (wielowymiarowych) odpowiednie zależności mają identyczną postać, jedynie zamiast transmitancji $G(s)$ występują wszędzie macierze transmitancji $G(s)$. W iloczynie (4.1) nie wolno zmieniać kolejności macierzy.

Przekształcenia sprowadzające schemat blokowy do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów (4.3) i (4.8) polegają na przesunięciach węzłów informacyjnych lub sumacyjnych. W każdym przypadku przekształcania schematu blokowego musi być spełniony warunek, że w części układu nie podlegającej przekształcieniu, żadna wielkość nie ulega zmianie. Oznacza to, że wejścia i wyjścia przekształconej części schematu muszą pozostać nie zmienione.

Reguły kilku najczęściej stosowanych przekształceń schematów blokowych lub ich części zawierających wyłącznie elementy liniowe zestawiono w tab. 4.1.

Przekształcenia nr 1 do 4 polegają na przesunięciach węzłów informacyjnych lub sumacyjnych w przód lub w tył, tzn. z wejścia bloku o transmitancji $G(s)$ na jego wyjście lub odwrotnie. Przekształcenia te pozostają ważne również dla elementów o wielu wejściach i wyjściach, z tym zastrzeżeniem, że przekształcenia nr 2 i 4 są wykonalne tylko dla macierzy kwadratowych nieosobliwych (o wyznaczniku różnym od zera), gdyż tylko wówczas istnieje macierz odwrotna $[G(s)]^{-1}$.

Tablica 4.1

Przesunięcia węzłów informacyjnych i sumacyjnych		
L.p.	Schemat pierwotny	Schemat równoważny
1		
2		
3		
4		

Rozdział 4

cd. tablicy 4.1

Przesunięcia węzłów informacyjnych i sumacyjnych		
L.p.	Schemat pierwotny	Schemat równoważny
5	 $u_1 + u_2 - u_3 = y$	 $u_1 + u_2 + u_3 = y$
6	 $y_1 = u - y_2$	 $y_1 = y_1$
7	 $u_1 + u_2 - u = y$	 $y = u_1 - u_2$
8	 $u_1 - u_2 + u = y$	 $y = u_1 - u_2$

Przekształcenia nr 5 i 6 pokazują, że można zmieniać kolejność węzłów jednego rodzaju (informacyjnych lub sumacyjnych), a nr 7 i 8 podają zasady zmiany kolejności węzłów różnego rodzaju, tzn. przesuwania węzła informacyjnego przed sumacyjny lub odwrotnie.

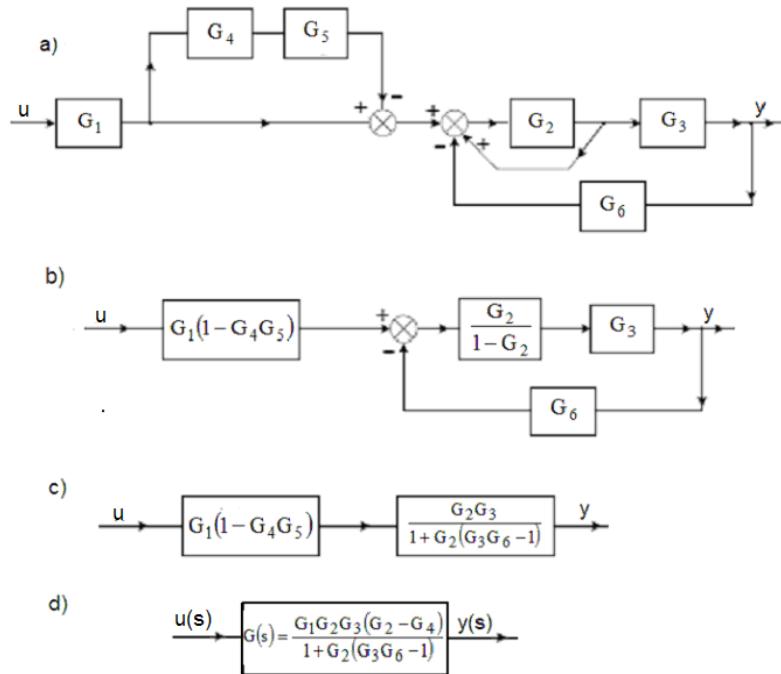
Niżej podane zostaną przykłady wyznaczania transmitancji złożonych układów automatyki na podstawie ich schematów blokowych. Wybrano takie przypadki, w których konieczne są obydwa etapy postępowania, tzn. najpierw doprowadzenie schematu za pomocą przekształceń podanych w tabl. 4.1 do postaci połączeń podstawowych, a następnie zwijanie tych połączeń za pomocą zależności (4.1) do (4.8), oraz do postaci pozwalającej na wyznaczenie transmitancji całego układu.

Przykład 4.1

Wyznaczyć transmitancję zastępczą układu automatyki, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 4.6a)

Rozwiązanie

Do wyznaczania transmitancji zastępczych układów automatyki stosujemy wzory na połączenia szeregowe, równoległe, dodatnie i ujemne sprzężenia zwrotne, węzły informacyjne i sumacyjne, odpowiednie operacje dotyczące przesuwania węzłów, a więc zastępowania układów pierwotnych układami równoważnymi (wtórnymi).



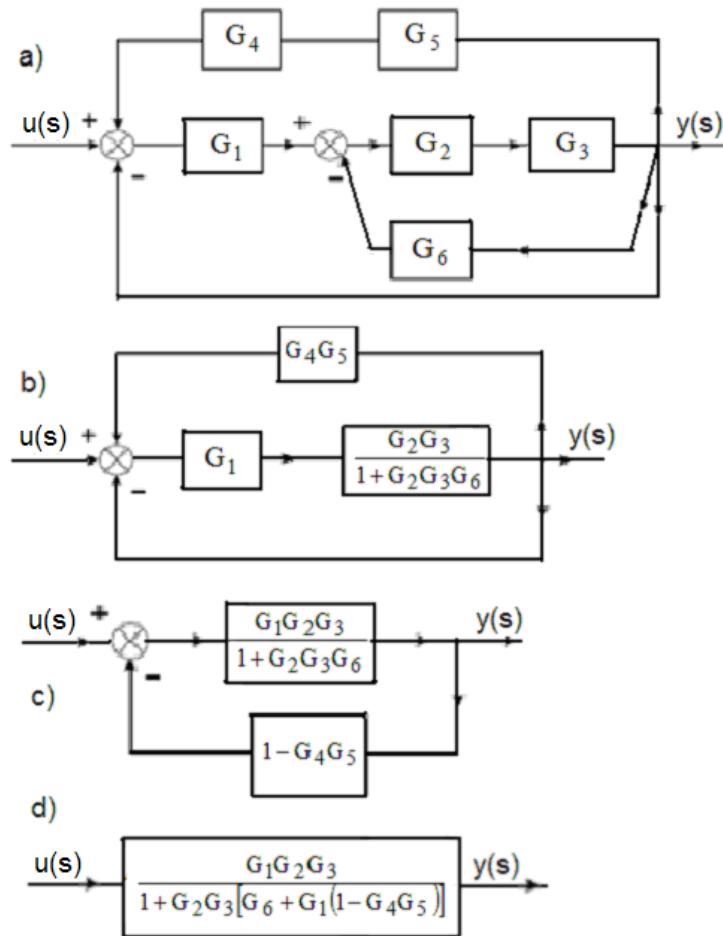
Rysunek 4.6. Wyznaczanie transmitancji zastępczej ze schematu funkcjonalnego układu automatyki

Przykład 4.2

Wyznaczyć transmitancję zastępczą układu automatyki, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 4.7 a)

ROZDZIAŁ 4

Rozwiązańie



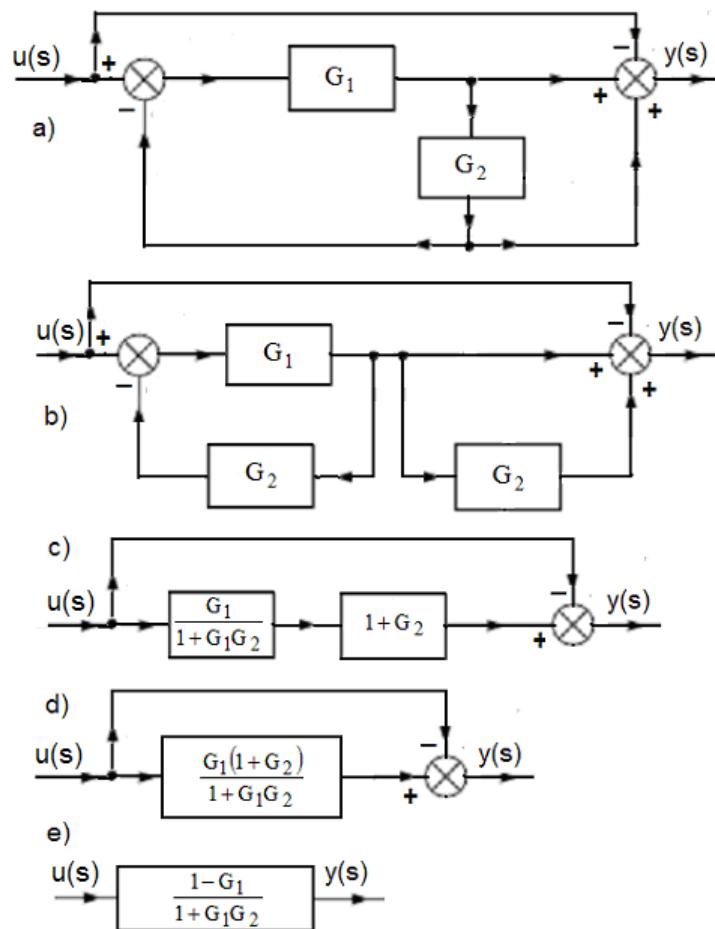
Rysunek 4.7. Wyznaczanie transmitancji zastępczej ze schematu funkcjonalnego układu automatyki

Przykład 4.3

Wyznaczyć transmitancję zastępczą układu automatyki, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 4.8 a)

Rozwiązańie

Przekształcamy kolejno na schematy równoważne



Rysunek 4.8. Wyznaczanie transmitancji zastępczej ze schematu funkcjonalnego układu automatyki

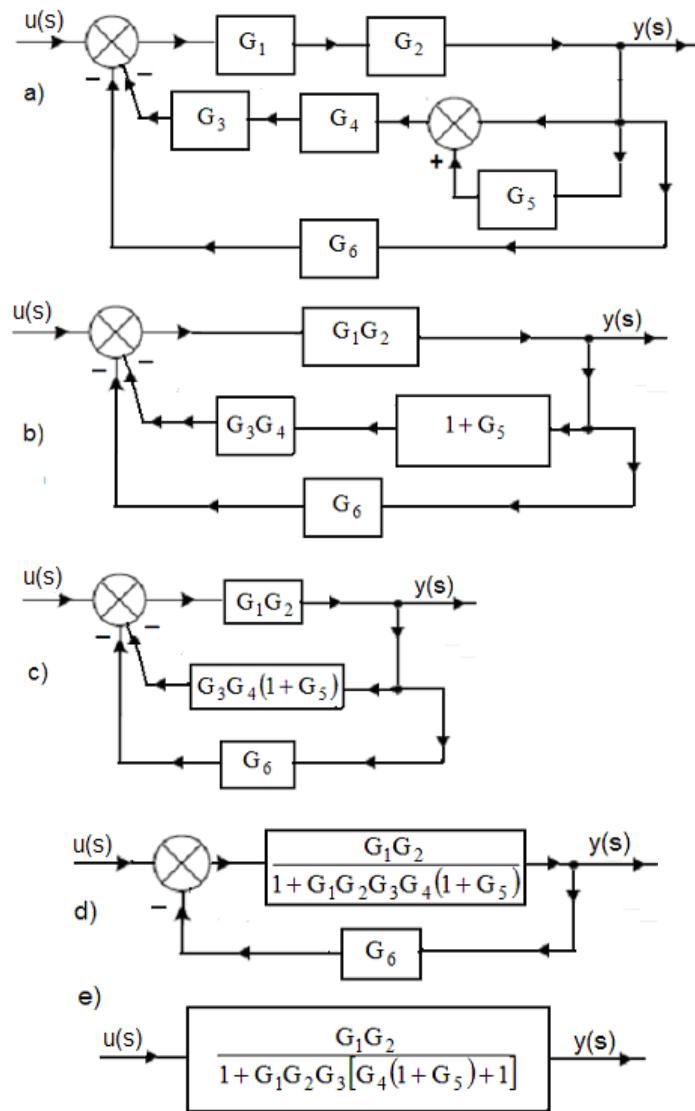
Przykład 4.4

Wyznaczyć transmitancję zastępczą układu automatyki, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 4.9 a)

Rozwiązanie

Przekształcamy schemat funkcyjonalny kolejno na schematy równoważne

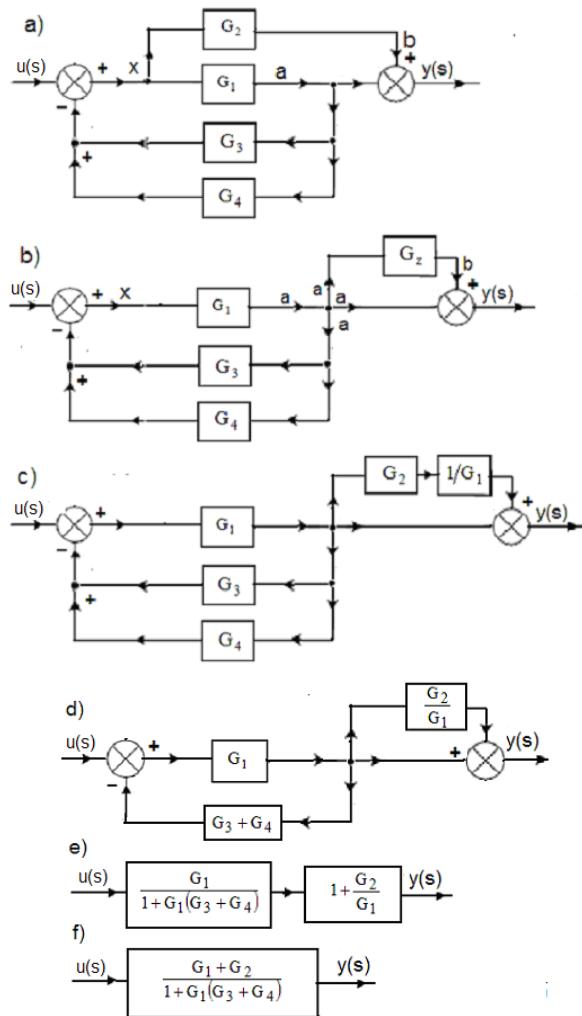
ROZDZIAŁ 4



Rysunek 4.9. Wyznaczanie transmitancji zastępczej ze schematu funkcjonalnego układu automatyki

Przykład 4.5

Wyznaczyć transmitancję zastępczą układu automatyki, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 4.10 a)



Rysunek 4.10. Wyznaczanie transmitancji zastępczej ze schematu funkcyjnego układu automatyki

Rozdział 4

Rozwiążanie

Przekształcamy kolejno na schematy równoważne.

Aby można było stosować wzory podstawowe dotyczące przekształcania układu automatyki do coraz prostszej postaci należy schemat pierwotny przedstawiony na rysunku 4.10a) zastąpić innym poprzez wyznaczenie transmitancji $G_z(s)$ (rysunek 4.10 b).

$$G_z(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{x(s)} \cdot \frac{x(s)}{a(s)} = G_2(s) \cdot \frac{I}{G_1(s)} = \frac{G_2(s)}{G_1(s)}$$

Dalsze przekształcenia przedstawiają rysunki 4.10 c), d), e) i f)

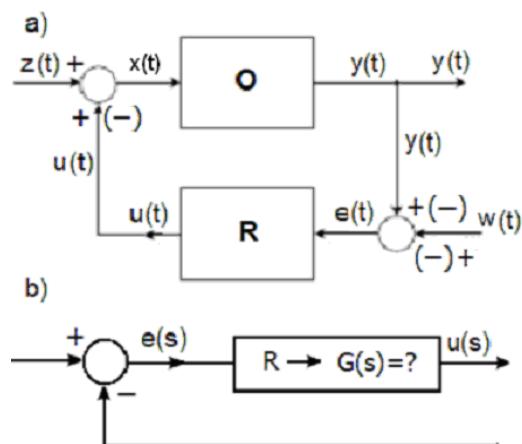
5

Rodzaje regulatorów oraz ich charakterystyki

5.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale przedstawimy transmitancje oraz charakterystyki czasowe i częstotliwościowe podstawowych liniowych regulatorów o działaniu ciągłym (algorytmów sterowania) wykorzystywanych w przemysłowych układach sterowania. Przemysłowe układy sterowania zawierają regulatory elektroniczne, hydrauliczne i pneumatyczne.

Zastosowanie regulatora ze sprzężeniem zwrotnym w układzie regulacji powinno powodować optymalną pracę tego układu. Regulator jest urządzeniem formującym sygnał sterujący według określonego algorytmu, wchodzący w skład układu automatycznej regulacji, który ma dwa wejścia. Jedno służy do wprowadzania informacji o bieżącej wartości wielkości regulowanej $y(t)$, drugie służy do wprowadzania informacji o wartości zadanej $w(t)$, tak jak na rysunku 5.1 a).



Rysunek 5.1. Schematy blokowe: a) układu regulacji automatycznej, b) fragmentu układu z regulatorem R o transmitancji $G(s)$, O – obiekt, R - regulator

Usytuowanie regulatora w układzie regulacji automatycznej pokazano na powyższym rysunku. Sygnałem wyjściowym regulatora jest sygnał sterujący $u(t)$, sygnałem wejściowym uchyb regulacji $e(t)$ (rysunek 5.1a). Aby regulator mógł wypełnić swoje zadanie to musi zmierzyć wielkość

regulowaną, porównać jej wartość z wartością zadaną $w(t)$ i wytworzyć uchyb regulacji $e(t)$ oraz przetworzyć sygnał uchybu w sygnał sterujący.

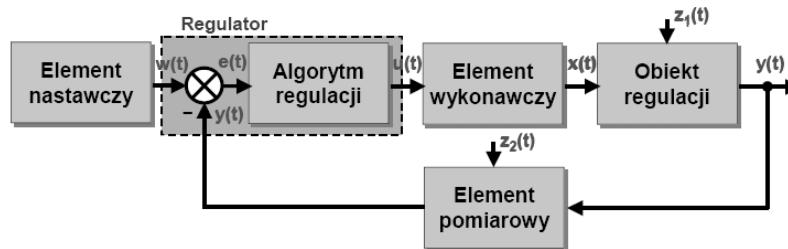
W konkretnych rozwiązaniach konstrukcyjnych regulatorów przyrządy te realizują oprócz algorytmów wiele dodatkowych funkcji. W szczególności w regulatorach wyznaczane są zawsze odchyłki regulacji $e(t) = y(t) - w(t)$ lub $e(t) = w(t) - y(t)$ (działanie proste lub odwrotne) oraz generowany jest wewnętrzny sygnał wartości zadanej $w(t)$.

5.2. Podstawowa klasyfikacja regulatorów

Regulator jako jeden z podstawowych elementów układu automatycznej regulacji, decyduje o charakterze i właściwości całego układu. Zadania i wymagania stawiane układowi mają znaczący wpływ na dobór typu regulatora.

Przemysłowy układ sterowania (rysunek 5.2) zawiera:

- regulator z wbudowanym algorytmem regulacji,
- element wykonawczy,
- obiekt,
- element pomiarowy.



Rysunek 5.2. Regulator w układzie automatycznej regulacji

gdzie $z_1(t)$ i $z_2(t)$ są zakłóceniami (zaburzeniami) zewnętrznymi.

ROZDZIAŁ 5

Regulator pobiera sygnał uchybu $e(t)$ o niskim poziomie mocy, wzmacniając go do wystarczająco wysokiego poziomu. Sygnał wyjściowy z regulatora $u(t)$ podawany jest do elementu wykonawczego, którym może być silnik elektryczny, hydrauliczny, siłownik hydrauliczny, zawór. Element pomiarowy (czujnik) przetwarza zmienną wyjściową $y(t)$ na inną odpowiednią zmienną np. przemieszczenie, ciśnienie napięcie, siła, tak, aby mogła być stosowana do porównania sygnału wyjściowego z sygnałem wejściowym zadającym. Sygnał wchodzący do regulatora musi być w tych samych jednostkach, co sygnał od sprzężenia zwrotnego z czujnika lub elementu pomiarowego.

Według sposobu budowy uwzględniającej energię zasilania, regulatory dzielimy na dwie podstawowe grupy:

- regulatory o działaniu bezpośrednim (nie korzystające z energii pomocniczej),
- regulatory o działaniu pośrednim (korzystające z energii pomocniczej), czyli wymagające elementu wykonawczego.

W regulatorach o działaniu bezpośredniem (nie korzystające z energii pomocniczej) energia potrzebna do oddziaływanego na obiekt najczęściej jest czerpana z urządzenia pomiarowego. Stanowi to istotne uproszczenie konstrukcji regulatora.

Regulatory o działaniu pośrednim, korzystające z energii pomocniczej, czyli wymagające elementu wykonawczego dzielimy według rodzaju nośnika energii, użytego do zasilania znajdującego się w regulatorze wzmacniacza. Najczęściej są to regulatory elektroniczne, rzadziej pneumatyczne i hydrauliczne. Regulatory te wykorzystują jako źródła mocy prąd elektryczny, sprężone powietrze, olej pod ciśnieniem.

Ze względu na rodzaj przetwarzanych w regulatorze sygnałów regulatory dzielimy na:

- regulatory analogowe,
- regulatory cyfrowe,
- regulatory działania nieciągłego (impulsowe, przekaźnikowe)

Regulatory przekaźnikowe przetwarzają ciągły sygnał wejściowy uchybu regulacji na skokowy sygnał nastawczy, który pojawia się przy określonych wartościach uchybu regulacji.

W regulatorach impulsowych (praca wycieraczek w pojazdach mechanicznych) ciągły sygnał uchybu regulacji jest przetwarzany na szereg krótkotrwałych impulsów wyjściowych oddziaływujących na obiekt regulowany w określonych i powtarzających się chwilach czasowych. Podziałem podstawowym, określającym właściwości dynamiczne regulatorów jest ich transmitancja operatorowa.

Tak, więc ze względu na właściwości dynamiczne regulatory dzielimy na następujące rodzaje:

- regulatory proporcjonalne (**P**),
- regulatory całkujące (**I**),
- regulatory proporcjonalno-całkujące (**PI**),
- regulatory proporcjonalno-różniczkujące (**PD**),
- regulatory proporcjonalno-całkująco-różniczkujące (**PID**),

Ogólną strukturę regulatora PID (również cyfrowego) da się sprowadzić do równoległego połączenia trzech członów podstawowych P, I, oraz D, którą przedstawia rysunek 5.22.

5.3. Regulatory proporcjonalne

W regulatorze pokazanym na rysunku 5.3 z proporcjonalnym algorytmem sterowania (P), zależność (prawo regulacji) sygnału wyjściowego $u(t)$ od wejściowego $e(t)$ (uchybu regulacji) jest następująca

$$u(t) = k_p e(t). \quad (5.1)$$

Po zastosowaniu transformacji Laplace'a otrzymamy transmitancję operatorową regulatora P, zatem

$$u(s) = k_p e(s) \rightarrow G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p. \quad (5.2)$$

ROZDZIAŁ 5

gdzie k_p jest wzmocnieniem proporcjonalnym.

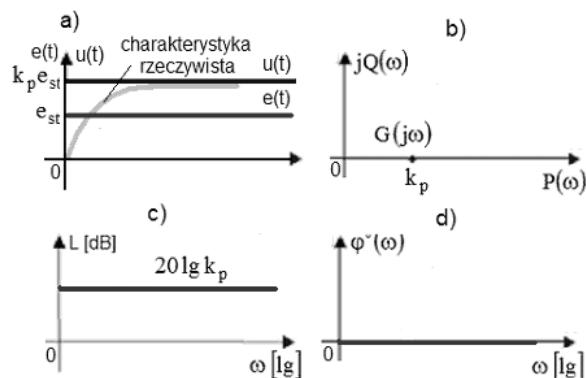


Rysunek 5.3. Schemat blokowy fragmentu układu regulacji automatycznej z regulatorem P o transmitancji $G(s)$

Regulator proporcjonalny ma stałą transmitancję i jest zawsze wzmocnianym z nastawianym wzmocnieniem. Czasami zamiast współczynnika wzmocnienia, podaje się tzw. zakres proporcjonalności wyrażony w procentach, czyli

$$P = \frac{1}{k_p} \cdot 100\%$$

Charakterystykę czasową oraz charakterystyki częstotliwościowej otrzymuje się analogiczne jak w rozdziale 3.2 to znaczy należy nadać wielkości wejściowej (uchybowi regulacji $e(t)$) sygnał w postaci skoku jednostkowego. Wyznaczamy charakterystykę widmową regulatora P i otrzymujemy wykresy charakterystyk częstotliwościowych pokazanych na rysunku 5.4.



Rysunek 5.4. Charakterystyki regulatora P: a) czasowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

5.4. Regulatorzy całkujące

W regulatorze całkowym I przyrost wartości sygnału wyjściowego $u(t)$ zmienia się proporcjonalnie do sygnału uchybu $e(t)$, czyli prawo regulacji jest następujące

$$\frac{du(t)}{dt} = k_i e(t) = \frac{1}{T_i} e(t), \quad (5.3)$$

lub

$$u(t) = k_i \int_0^t e(t) dt = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt. \quad (5.4)$$

Stąd transmitancja regulatora całkowego (rysunek 5.5) ma postać

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{k_i}{s}. \quad (5.5)$$

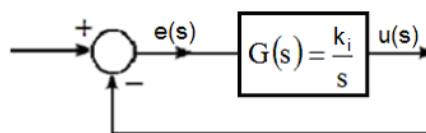
lub

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{T_i s}. \quad (5.6)$$

gdzie k_i jest stałą nastawną, T_i jest stałą czasową całkowania zwaną czasem zdwojenia, $1/T_i$ nazywa się szybkością działania całkującego

$$k_i = \frac{1}{T_i}.$$

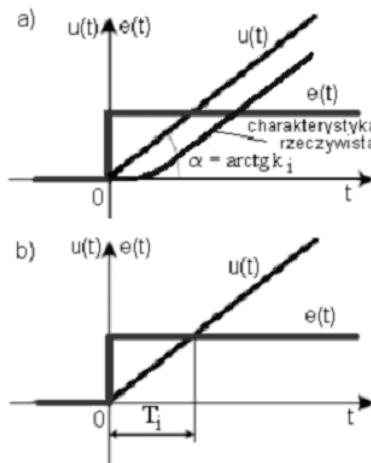
Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem I przedstawiony jest na rysunku 5.5.



Rysunek 5.5. Schemat blokowy fragmentu układu regulacji automatycznej z regulatorem I o transmitancji $G(s)$

ROZDZIAŁ 5

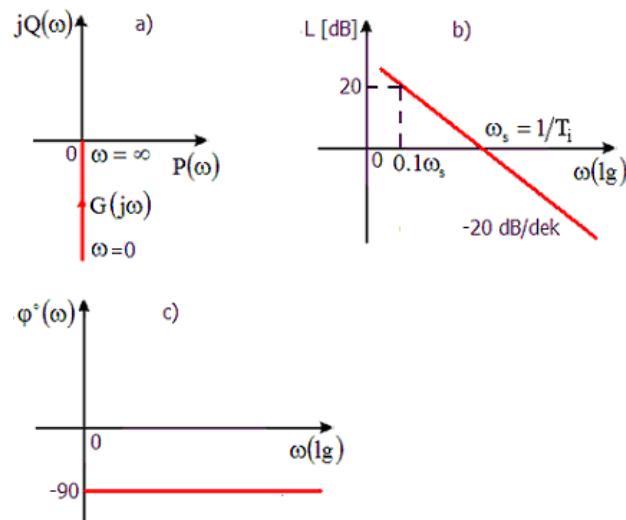
Zastosowanie regulatora I stabilizuje pracę układu i zmniejsza uchyb ustalony. Zapas stabilności jest duży, ale nieznacznie pogarszają się właściwości dynamiczne poprzez obniżenie górnej granicy pasma przenoszenia. W regulatorze P, w odpowiedzi na wejściowy sygnał skokowy występuje na wyjściu uchyb w postaci sygnału ustalonego. Uchyb taki można wyeliminować, jeżeli do regulatora dodamy algorytm sterowania całkowego. Jeżeli wartość uchybu e_{st} jest stała w czasie T_i , to wartość odpowiedzi $u(t)$ podwoi się po upływie tego czasu. Odpowiedź na wymuszenie skokowe $e(t) = l(t)e_{st}$ otrzymamy w sposób identyczny jak w rozdziale 3.5. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe regulatorów I są zestawione na rysunkach 5.6 i 5.7.



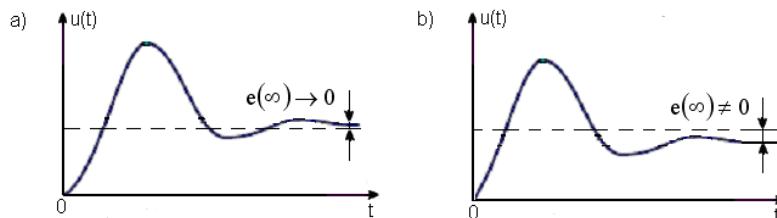
Rysunek 5.6. Charakterystyka czasowa elementu całkującego:
a) opisanego wzorem (5.5), b) opisanego wzorem (5.6)

Aby uchyb w stanie ustalonym dążył do zera (był równy zero), to w torze głównym lub w regulatorze musi być całkowanie. Sprowadzenie uchybu do zera jest najważniejszą cechą regulatora I (rysunek 5.8).

Uchyb położenia istnieje wtedy, gdy układ sterowania położeniem pobudzony sygnałem skokowym w stanie ustalonym ($t \rightarrow \infty$) będzie wykazywał stały uchyb (rysunek 5.8 b). W niektórych układach sterowania nie może być stałego uchybu np. tor lotu samolotu, rakiety itp.



Rysunek 5.7. Charakterystyki częstotliwościowe regulatora I:
 a) amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna amplitudowa,
 c) logarytmiczna fazowa



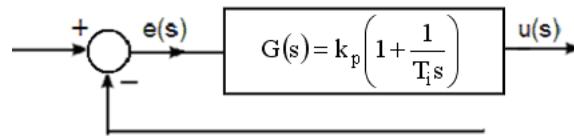
Rysunek 5.8. Ilustracja uchybu położenia: a) brak uchybu położenia,
 b) istnieje uchyb położenia

5.5. Regulatorы proporcjonalno-całkujące

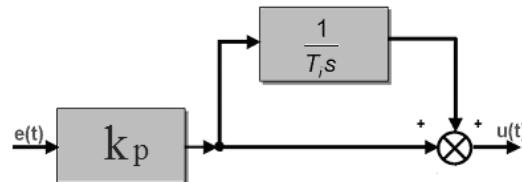
Właściwości regulatorów (PI) są połączeniem właściwości regulatorów P oraz I.

Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem PI przedstawiony jest na rysunku 5.9 oraz jego ogólna struktura na rysunku 5.10.

ROZDZIAŁ 5



Rysunek 5.9. Schemat blokowy fragmentu układu regulacji automatycznej z regulatorem **PI** o transmitancji $G(s)$



Rysunek 5.10. Ogólna struktura regulatora **PI**

Algorytm pracy takiego regulatora definiujemy wzorem

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt, \quad (5.7)$$

Stosując transformację Laplace'a otrzymamy

$$u(s) = k_p e(s) + \frac{k_p}{T_i s} e(s), \quad (5.8)$$

a transmitancja operatorowa regulatora

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right). \quad (5.9)$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe jest następująca

$$u(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{1}{s} e_{st}, \quad (5.10)$$

$$u(t) = L^{-1}[u(s)] = k_p e_{st} \left(1 + \frac{1}{T_i} t \right). \quad (5.11)$$

Charakterystyka czasowa na podstawie równania (5.11) pokazana jest na rysunku 5.11a). Z powyższego równania wynika, że przy $t = T_i$ wartość $u(t) = 2k_p e_{st}$ z czego wynika pojęcie czasu zdwojenia T_i po upływie, którego składowa działania całkującego równa się składowej działania proporcjonalnego.

Charakterystyki częstotliwościowe otrzymamy z transmitancji widmowej wykorzystując wzór (5.9), a więc

$$G(j\omega) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i j \omega} \right). \quad (5.12)$$

Stąd część rzeczywista i urojona

$$P(\omega) = k_p, \quad Q(\omega) = -\frac{k_p}{T_i \omega}.$$

Charakterystyki logarytmiczne amplitudową i fazową otrzymamy ze wzorów

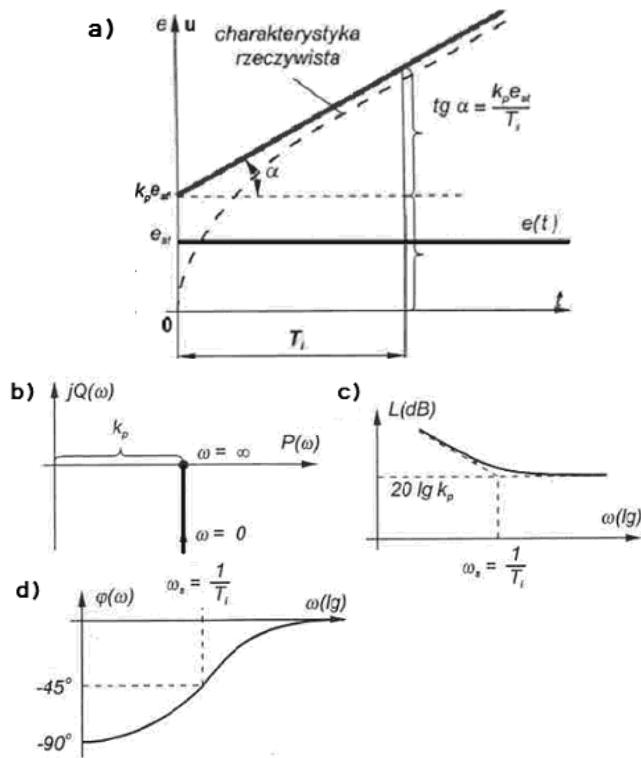
$$\begin{aligned} L(dB) &= 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = \\ &= 20 \left(\lg k_p + \lg \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} - \lg T_i \omega \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{T_i \omega} \right) = \\ &= -90^\circ + \operatorname{arctg} T_i \omega. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Na podstawie wzorów (5.13) i (5.14) zbudowano charakterystyki częstotliwościowe regulatora PI (rysunek 5.11).

Zmiana wartości k_p wpływa na część proporcjonalną, jak i na część całkową algorytmu sterowania.

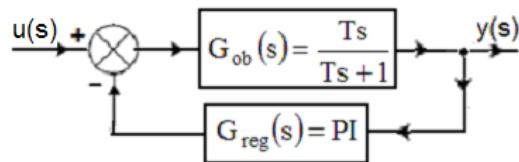
ROZDZIAŁ 5



Rysunek 5.11. Charakterystyki regulatora PI:
 a) czasowa,
 b) amplitudowo-fazowa,
 c) logarytmiczna amplitudowa,
 d) logarytmiczna fazowa

Przykład 5.1

Na podanym na rysunku 5.12 układzie automatyki w rezonansie stosunek sygnału wejściowego do wyjściowego wynosi 5. Przy $T_i = T$ określić wzmacnienie regulatora PI oraz dla $\varphi = -45^\circ$ wyznaczyć częstotliwość.



Rysunek 5.12. Schemat układu automatyki

RODZAJE REGULATORÓW ORAZ ICH CHARAKTERYSTYKI

Rozwiążanie

Transmitancja zastępcza układu automatyki jest

$$G_z(s) = \frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_{reg}(s)} = \frac{y(s)}{u(s)} = 0.2$$

Transmitancja regulatora PI

$$G_{reg}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Zatem

$$G_z(s) = \frac{\frac{Ts}{Ts+1}}{1 + \frac{Ts}{Ts+1} \cdot k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)} = \frac{Ts}{(Ts+1)(1+k_p)}$$

Dla rezonansu $Ts \gg 1$, $\rightarrow Ts+1 \approx Ts$,

Czyli współczynnik wzmacnienia regulatora k_p jest

$$G_z(s) = \frac{1}{1+k_p} = 0.2 \rightarrow k_p = 4$$

Aby wyznaczyć częstotliwość, należy przejść z transmitancji operatorowej na widmową, zatem

$$\begin{aligned} G_z(j\omega) &= \frac{T\omega}{(1+k_p)} \left[\frac{j}{(jT\omega+1)} \cdot \frac{(jT\omega-1)}{(jT\omega+1)} \right] = \frac{T\omega}{(1+k_p)} \left[\frac{T\omega+j}{(T^2\omega^2+1)} \right] = \\ &= \frac{T^2\omega^2}{(1+k_p)(1+T^2\omega^2)} + \frac{jT\omega}{(1+k_p)(1+T^2\omega^2)}. \end{aligned}$$

Część rzeczywista i urojona transmitancji widmowej

$$P(\omega) = \frac{T^2\omega^2}{(1+k_p)(T^2\omega^2+1)},$$

ROZDZIAŁ 5

$$Q(\omega) = \frac{T\omega}{(1 + k_p)(T^2\omega^2 + 1)}.$$

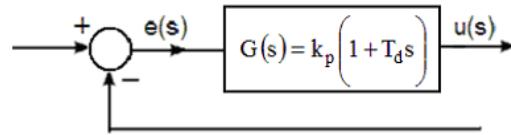
Częstość wyznaczamy ze wzoru

$$\tan \varphi = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{1}{T\omega} = \tan 45^\circ = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{T}.$$

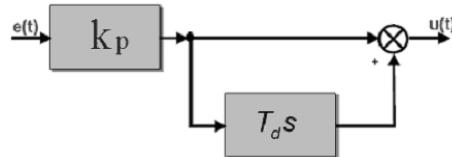
5.6. Regulatory proporcjonalno-różniczkujące

Regulator PD wykonuje operacje działania proporcjonalnego i różniczkującego. Podczas różniczkowania wartość wielkości wyjściowej $u(t)$ jest proporcjonalna do zmian uchybu $e(t)$ regulacji.

Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem PD przedstawia rysunek 5.13 oraz jego ogólną strukturę rysunek 5.14.



Rysunek 5.13. Schemat blokowy fragmentu układu regulacji automatycznej z idealnym regulatorem **PD** o transmitancji $G(s)$



Rysunek 5.14. Ogólna struktura idealnego regulatora **PD**

Dla tego typu regulatora prawo regulacji możemy zapisać w postaci

$$u(t) = k_p e(t) + k_p T_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (5.15)$$

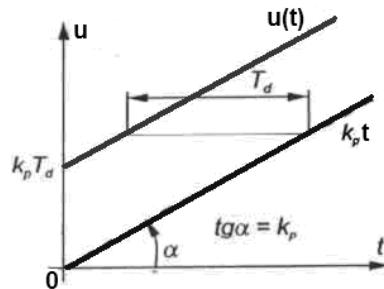
gdzie T_d jest czasem wyprzedzenia sygnału wyjściowego regulatora PD w stosunku do sygnału wyjściowego regulatora P przy zakłóceniu liniowym i tych samych wartościach k_p . Stosując transformację Laplace'a otrzymamy wzór na transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p(1 + T_d s), \quad (5.16)$$

Aby uzasadnić nazwę T_d należy zbadać odpowiedź regulatora PD na zakłócenie liniowo narastające $e(t) = t$. Stąd $e(s) = 1/s^2$, zatem na podstawie wzoru (5.16) otrzymamy

$$u(s) = G(s)e(s) = k_p(1 + T_d s) \frac{1}{s^2} = k_p T_d \frac{1}{s} + k_p \frac{1}{s^2}, \quad (5.17)$$

czyli z oryginału funkcji $u(s)$ otrzymamy charakterystykę czasową jako odpowiedź regulatora PD na wymuszenie liniowe (rysunek 5.15)



Rysunek 5.15. Odpowiedź idealnego regulatora **PD** na zakłócenie liniowo narastające

W praktyce idealny element różniczkujący nie występuje. Regulator PD generuje odpowiedź z wyprzedzeniem tzn. wyprzedza regulator P o T_d sekund dla wzrastającego liniowo błędu $e(t)$ (rysunek 5.15).

Czas wyprzedzenia powoduje wzrost wartości sygnału w stosunku do regulatora P i szybsze sprowadzenie obiektu do położenia równowagi. Jest to ważne przy sterowaniu obiekty o dużej inercji. Stąd regulatory PD mają szerokie zastosowanie.

Rozdział 5

Odpowiedź na skok jednostkowy o dowolnej wartości (wymuszenie skokowe) $e(t) = I(t)e_{st}$ otrzymamy z transformaty (wzór 5.16)

$$u(s) = G(s)e(s) = k_p e_{st} (I + T_d s) \frac{1}{s}, \quad (5.18)$$

której oryginał przyjmuje postać

$$u(t) = k_p e_{st} [I + T_d \delta(t)]. \quad (5.19)$$

Jest to równanie charakterystyki czasowej, którą przedstawia rysunek 5.16.a).

Charakterystyki częstotliwościowe otrzymamy z transmitancji widmowej wykorzystując wzór (5.16), a więc

$$G(j\omega) = k_p (I + T_d j\omega). \quad (5.20)$$

Stąd część rzeczywista i urojona

$$P(\omega) = k_p, \quad Q(\omega) = k_p T_d \omega.$$

Charakterystyki logarytmiczne amplitudową i fazową otrzymamy ze wzorów

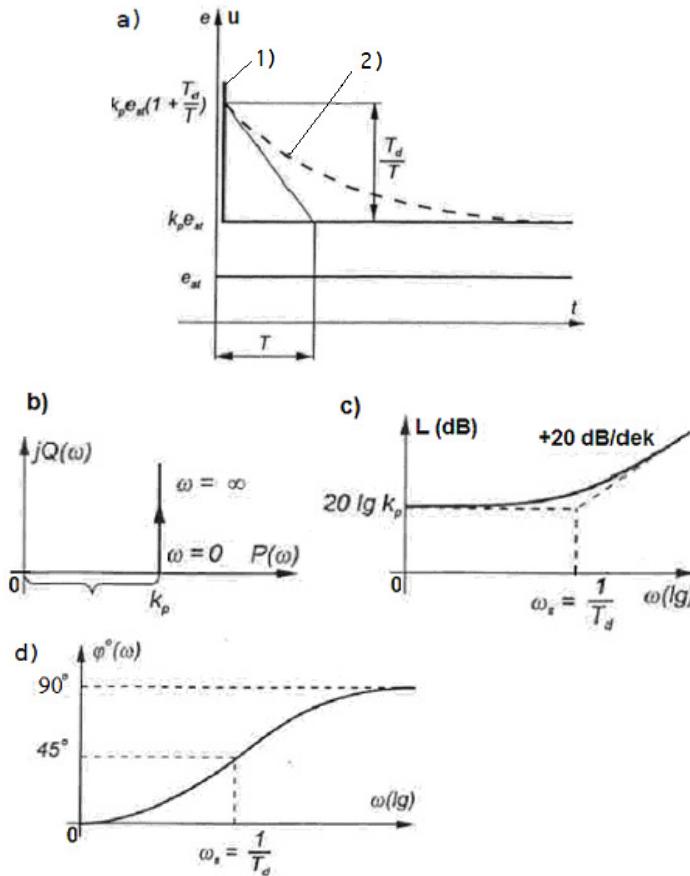
$$L(dB) = 20 \lg \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = 20 \lg k_p \sqrt{1 + T_d^2 \omega^2}. \quad (5.21)$$

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg T_d \omega. \quad (5.22)$$

Na podstawie wzorów (5.20-5.22) zbudowano charakterystyki częstotliwościowe regulatora PD (rysunek 5.16).

Wyżej opisany regulator był pozbawiony inercyjności, czyli jest regulatorem idealnym, którego w rzeczywistych konstrukcjach nie można zrealizować. W rzeczywistości urządzenia mają bezwładność (inercyjność), dlatego opis regulatora rzeczywistego modelujemy poprzez przybliżenie opisem modelu zbliżonego do inercyjności pierwszego rzędu. Zatem transmitancja takiego regulatora przyjmuje postać

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left(1 + \frac{T_d s}{Ts + 1} \right), \quad (5.23)$$

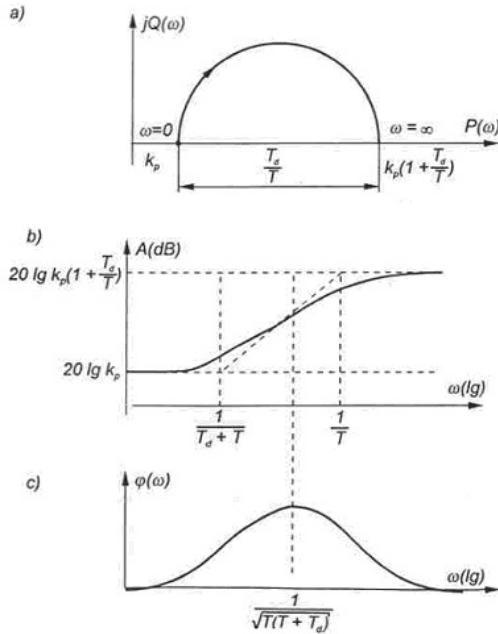


Rysunek 5.16. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe idealnego regulatora **PD**: 1a) czasowa z idealnym elementem **D**, 2a) czasowa z elementem rzeczywistym **D**, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

Charakterystykę czasową otrzymamy ze wzoru (5.23) jako odpowiedź na wymuszenie (skokowe) jednostkowe o dowolnej wartości tj. $e(t) = I(t)e_{st}$, zatem

ROZDZIAŁ 5

$$u(s) = G(s)e(s) = k_p e_{st} \left(\frac{I}{s} + \frac{T_d}{T} \frac{I}{s + \frac{I}{T}} \right). \quad (5.24)$$



Rysunek 5.17. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe rzeczywistego regulatora PD: a) amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna amplitudowa, c) logarytmiczna fazowa

Na podstawie tablic otrzymamy oryginał transformaty w postaci

$$u(t) = G(s)e(s) = k_p e_{st} \left(I + \frac{T_d}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (5.25)$$

Powyższy wzór przedstawia krzywą wykładniczą dążącą do asymptoty o wartości $k_p e_{st}$ przy $t \rightarrow \infty$ (rysunek 5.16a2)). Transmitancję widmową otrzymamy ze wzoru (5.23) wstawiając za s $j\omega$, zatem

$$G(j\omega) = k_p \left(1 + \frac{T_d j\omega}{T j\omega + 1} \right), \quad (5.26)$$

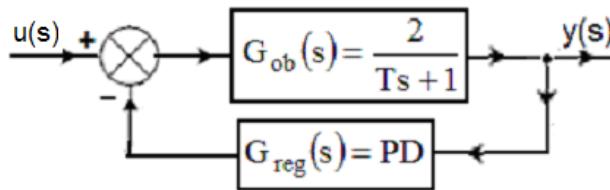
Postępując jak wcześniej otrzymamy z transmitancji widmowej część rzeczywistą i urojoną, czyli

$$P(\omega) = k_p \frac{T(T_d + T)\omega^2 + 1}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = k_p \frac{T_d\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Ze wzorów (5.21, 5.22) i powyższych zależności $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ możemy wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe przedstawione na rysunkach 5.17.

Przykład 5.2

Dla częstotliwości $\omega = 7 [1/s]$ i opóźnienia fazowego $\varphi = -35^\circ$ dobrać czas wyprzedzenia regulatora T_D i stałą czasową T obiektu, tak, aby $T = T_D$. Schemat układu automatyki złożonego z obiektu i regulatora przedstawia rysunek 5.18.



Rysunek 5.18. Schemat układu automatyki

Rozwiązanie

Transmitancja zastępcza układu automatyki jest

$$G_z(s) = \frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_{reg}(s)},$$

Transmitancja regulatora PD

$$G_{reg}(s) = k_p(1 + T_D s),$$

Rozdział 5

Zatem

$$G_z(s) = \frac{\frac{2}{Ts+1}}{1 + \frac{2}{Ts+1} \cdot k_p (1 + T_D s)} = \frac{2}{as + b},$$

gdzie

$$a = T + 2k_p T_D, \quad b = 1 + 2k_p.$$

Aby wyznaczyć czas wyprzedzenia regulatora i stałą czasową obiektu przy zadanych parametrach, należy przejść z transmitancji operatorowej na widmową, zatem

$$\begin{aligned} G_z(j\omega) &= \frac{2(b - aj\omega)}{(b + aj\omega)(b - aj\omega)} = \frac{2b - j2a\omega}{(b^2 + a^2\omega^2)} = \\ &= \frac{2b}{(b^2 + a^2\omega^2)} - j \frac{2a\omega}{(b^2 + a^2\omega^2)}, \end{aligned}$$

Część rzeczywista i urojona transmitancji widmowej

$$P(\omega) = \frac{2b}{(b^2 + a^2\omega^2)}, \quad Q(\omega) = -\frac{2a\omega}{(b^2 + a^2\omega^2)}.$$

Czas wyprzedzenia regulatora T_D i stałą czasową T obiektu wyznaczamy ze wzoru

$$\tan \varphi = -\tan 35^\circ = -0.7 = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{a\omega}{b} = -\frac{\omega(T + 2k_p T_D)}{1 + 2k_p},$$

Przy nastawie $T = T_D$ otrzymamy

$$0.7 = \omega T \rightarrow T = \frac{0.7}{\omega} = \frac{0.7}{7} = 0.1 [s]$$

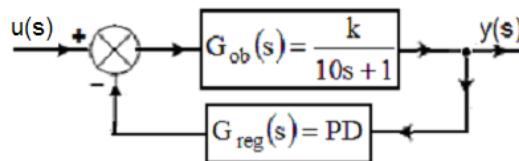
Tak, więc, aby były spełnione wartości parametrów φ i ω , muszą być $T = T_D = 0.1 [s]$.

Przykład 5.3

Dla układu automatyki jak na rysunku 5.20 wyznaczyć kąt przesunięcia fazowego φ między odpowiedzią a wymuszeniem dla $T_D = 0.1 [s]$,

$$k_p = \frac{10}{k}, \omega = 10 [1/s].$$

Schemat układu automatyki złożonego z obiektu i regulatora przedstawia rysunek 5.20.



Rysunek 5.20. Schemat układu automatyki

Rozwiązanie

Transmitancja zastępcza układu automatyki jest

$$G_z(s) = \frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_{reg}(s)},$$

Transmitancja regulatora PD

$$G_{reg}(s) = k_p(1 + T_D s),$$

Zatem

$$G_z(s) = \frac{\frac{k}{Ts + 1}}{1 + \frac{k}{Ts + 1} \cdot k_p(1 + T_D s)} = \frac{k}{1 + kk_p + s(10 + T_D kk_p)},$$

Podstawiając dane otrzymamy

$$G_z(s) = \frac{k_1}{s + 1}, \quad k_1 = \frac{k}{11}.$$

Aby wyznaczyć kąt przesunięcia fazowego φ przy zadanych parametrach, należy przejść z transmitancji operatorowej na widmową, zatem

Rozdział 5

$$G_z(j\omega) = \frac{k_1(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{k_1}{(1+\omega^2)} - j \frac{k_1\omega}{(1+\omega^2)},$$

Część rzeczywista i urojona transmitancji widmowej

$$P(\omega) = \frac{k_1}{(1+\omega^2)}, \quad Q(\omega) = -\frac{k_1\omega}{(1+\omega^2)}.$$

Stąd kąt wyprzedzenia fazowego wyznaczymy ze wzoru

$$\tan \varphi = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\omega = -10 \rightarrow \varphi = -24^\circ 11'.$$

5.7. Regulatorы proporcjonalno-całkująco-różniczkujące

Podstawowe rodzaje regulatorów o działaniu ciągłym lub quasi-ciągłym realizują funkcje PID (działania: P – proporcjonalne, I – całkujące, D – różniczkujące).

W celu zmniejszenia błędów stanów ustalonych i przejściowych, zachowując jednocześnie stabilność i tłumienie na dostatecznym poziomie, możemy połączyć sterowanie proporcjonalne, całkowe i różniczkowe, które nazywane jest algorytmem sterowania proporcjonalno-całkowo-różniczkowego, w skrócie PID. Ten połączony algorytm ma zalety w stosunku do wcześniej omawianych algorytmów.

Dla liniowych regulatorów o działaniu ciągłym z idealnym elementem różniczkującym, równanie regulatora PID jako prawo regulacji ma postać

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (5.27)$$

gdzie k_p – wzmocnienie proporcjonalne, T_i – stała czasowa całkowania, zwana czasem zdwojenia, T_d – stała czasowa różniczkowania, zwana czasem wyprzedzenia.

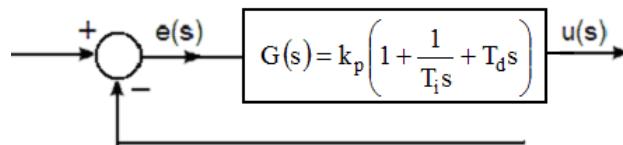
Stosując przekształcenie Laplace'a otrzymamy transformatę

$$u(s) = k_p \left[e(s) + \frac{1}{s} e(s) + T_d s e(s) \right], \quad (5.28)$$

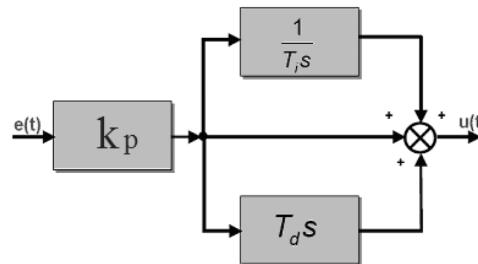
Transmitancja operatorowa regulatora idealnego PID jest następująca

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (5.29)$$

Schemat blokowy fragmentu układu z regulatorem PID przedstawiony jest na rysunku 5.21 oraz jego ogólna struktura na rysunku 5.22.



Rysunek 5.21. Schemat blokowy fragmentu układu regulacji automatycznej z regulatorem PID o transmitancji $G(s)$



Rysunek 5.22. Ogólna struktura regulatora **PID** utworzonego z członów podstawowych (**P**, **I**, **D**)

Wprowadzając na wejście układu sygnał w postaci funkcji Diraca (wymuszenie impulsowe), otrzymamy charakterystykę czasową opisaną równaniem

$$u(t) = k_p e_{st} \left[1 + \frac{1}{T_i} t + T_d \delta(t) \right]. \quad (5.30)$$

ROZDZIAŁ 5

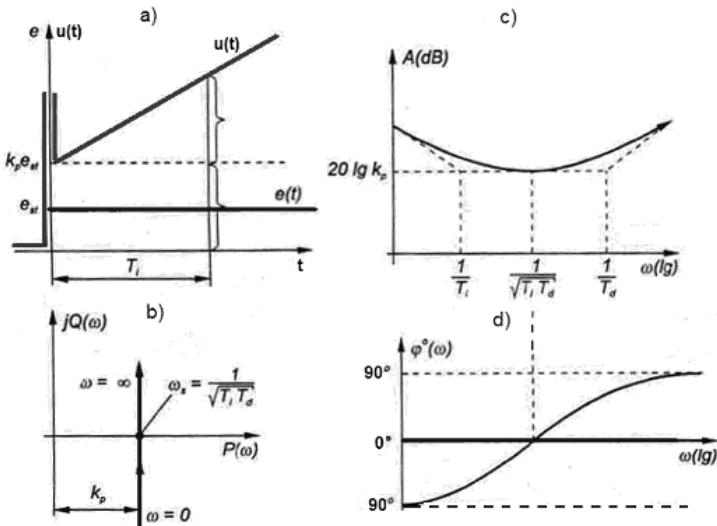
Transmitancja widmowa ma postać

$$G(j\omega) = \frac{u(j\omega)}{e(j\omega)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega \right), \quad (5.31)$$

stąd część rzeczywista i urojona tej transmitancji jest

$$P(\omega) = k_p, \quad Q(\omega) = k_p \left(T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega} \right). \quad (5.32)$$

Na podstawie powyższych równań otrzymamy charakterystykę czasową (skokową) i charakterystykę częstotliwościową (rysunek 5.23).



Rysunek 5.23. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe regulatora

PID z idealnym elementem różniczkującym: a) czasowa,

b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa,

d) logarytmiczna fazowa

Jeżeli do idealnego działania różniczkującego wprowadzimy element integracyjny pierwszego rzędu połączony szeregowo (rzeczywisty element różniczkujący), to otrzymamy przybliżone charakterystyki rzeczywistego regulatora PID.

Transmitancja takiego regulatora przyjmuje postać

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{Ts + 1} \right). \quad (5.33)$$

gdzie T jest stałą czasową elementu inercyjnego pierwszego rzędu

Wprowadzając na wejście sygnał w postaci skoku jednostkowego, otrzymamy na wyjściu charakterystykę czasową regulatora rzeczywistego tj.

$$u(t) = k_p e_{st} \left[1 + \frac{1}{T_i} t + \frac{T_d}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right]. \quad (5.34)$$

Transmitancję widmową rzeczywistego regulatora PID otrzymamy z równania (5.33), zatem

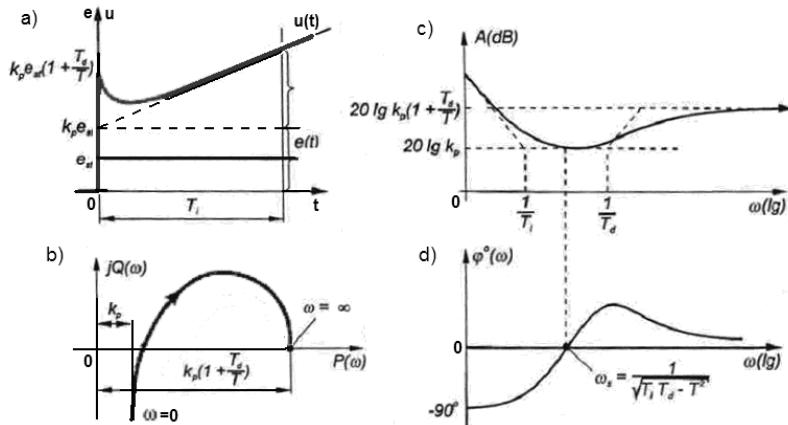
$$G(j\omega) = \frac{u(j\omega)}{e(j\omega)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i j\omega} + \frac{T_d j\omega}{T j\omega + 1} \right). \quad (5.35)$$

Część rzeczywista i urojona tej transmitancji jest następująca

$$P(\omega) = k_p \frac{T(T_d + T)\omega^2 + 1}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = k_p \frac{(T_d T_i - T^2)\omega^2 - 1}{T_i \omega (T^2\omega^2 + 1)}. \quad (5.36)$$

Na podstawie powyższych równań otrzymamy charakterystykę czasową (skokową) i charakterystyki częstotliwościowe regulatora rzeczywistego (rysunek 5.24).

Wszystkie trzy otrzymane stałe k_p , T_i , T_d można regulować w szerokich granicach, w zależności od rodzaju regulatora. Porównując charakterystyki regulatorów można zauważyc, że w regulatorach rzeczywistych inercyjności zmieniają przede wszystkim początkową strefę charakterystyk czasowych. Regulator PI powodują zmniejszanie wartości amplitud w funkcji częstotliwości oraz mają ujemne przesunięcie fazowe (element całkujący) w przypadku małych wartości częstotliwości. Z charakterystyk logarytmicznych wynika, że elementy różniczkujące $T_d s$ (regulatory PD i PID) wytwarzają dodatnie kąty fazowe, szczególnie dla większych wartości częstotliwości oraz generują większe wartości amplitud.



Rysunek 5.24. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe regulatora PID z rzeczywistym elementem różniczkującym: a) czasowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

5.8. Wybór typu i nastaw regulatorów

A) Dobór typu regulatora

O wyborze typu regulatora należy zadecydować na podstawie własności fizycznych obiektu, narzuconych kryteriami jakości regulacji, uwzględniając niezawodność, dokładność, wagę, bezpieczeństwo, koszty, dostępność.

Aby osiągnąć zamierzony rezultat zaprojektowanego układu regulacji, projektant musi jedynie dobrą stałe k_p , T_i , T_d . Dołączenie elementu różniczkującego powoduje zmniejszenie poziomu oscylacji oraz pozwala na pełniejsze kształtowanie jego dynamiki. Dodanie zaś elementu całkującego przyczynia się do wzrostu oscylacji odpowiedzi układu. Tak, więc, połączenie regulatora PID może zmniejszyć poziom błędu, zachowując jednocześnie tłumienie na wymaganym poziomie i stabilność układu. Proces doboru stałych nazywany jest strojeniem regulatora. Zwiększenie wartości k_p i $1/T_i$ powoduje zmniejszanie błędu układu

automatyki, ale może pogorszyć jego stabilność, natomiast wzrost wartości T_d prowadzi do poprawy stabilności. Kryteria strojenia bazują na różnych zasadach. Niektóre z nich omówimy. Dopuszczalne są oscylacje w normalnym trybie pracy (np. proste procesy termiczne, załączanie-wyłączanie).

W zależności od potrzeby możemy dokonać następującego wyboru typu regulatora:

Regulatory, dwustawne (2P) – obiekty statyczne, $\tau/T \leq 0.2$, dopuszczalne oscylacje w normalnym trybie pracy (np. proste procesy termiczne tj. załączanie, wyłączanie). Sterowanie dwupołożeniowe jest proste, a więc i niedrogie. Z tego powodu jest szeroko stosowane w domowych, jak i w przemysłowych układach sterowania. W sterowaniu dwupołożeniowym sygnał wyjściowy $u(t)$ jest na minimalnym lub maksymalnym poziomie wartości, w zależności od tego, czy sygnał uchybu $e(t)$ jest dodatni czy ujemny. Regulatory dwupołożeniowe najczęściej są urządzeniami elektrycznymi, a zawór elektryczny uruchamiany jest po przez cewkę. Regulatory P pneumatyczne z bardzo dużymi wzmacnianiami działają jak sterowniki dwupołożeniowe.

Regulatory trójstawne (3P) - zespoły wykonawcze z trójstawnym elementem napędowym, np. silnikiem nawrotnym („-1”- w lewo, „0”- stop, „+1”- w prawo) lub z dwoma torami działania, np. w układach klimatyzacyjnych („-1”- chłodzenie, „0”- stop, „+1”- grzanie).

Regulatory ciągłe (P, I, PI, PD, PID) - najszerzy obszar zastosowań, obiekty statyczne i astatyczne, $\tau/T \leq 1$.

Regulatory impulsowe - obiekty z dużymi opóźnieniami transportowymi lub zastępczymi, $\tau/T > 1$.

Regulatory cyfrowe o algorytmach specjalnych, np.:

- minimalnowariancyjne, - predykcyjne, - Smith'a
Regulatory ciągłe lub quasi-ciągłe (cyfrowe) o algorytmach **P, PI, PID** są najbardziej rozpowszechnione. Przy wyborze jednego z tych algorytmów należy pamiętać o kilku podstawowych zaleceniach:
 - dla uzyskania odchyłek statycznych bliskich zeru (teoretycznie równych zeru) niezbędne jest całkowanie (w algorytmach **PI, PID**)

ROZDZIAŁ 5

- w przypadku obiektów opisujących np. procesy termiczne, zalecane jest różniczkowanie, gdyż pozwala na wytworzenie silnego oddziaływania korekcyjnego regulatora już przy małych odchyłkach regulacji
- regulator **PI** zapewnia dobrą jakość regulacji tylko przy zakłóceniach o małych częstotliwościach
- regulator **PD** zapewnia szersze pasmo regulacji niż regulator PI, jednak przy zakłóceniach wolnozmiennych wartości wskaźników jakości regulacji są gorsze
- regulator **PID** łączy zalety obu poprzednich regulatorów

Według zaleceń E. Kollmana (Regelungstechnik, 1992), dla procesów o własnościach bliskich bezinerencyjnym (np. przepływ), inercyjnych pierwszego rzędu lub całkujących właściwe są zwykle regulatory P, PI, czasami I, natomiast dla procesów inercyjnych wyższego rzędu, lub całkujących z inercją (astatycznych) należy wybierać regulatory PD lub PID.

B) Dobór nastaw regulatora

B1) Metoda Zieglera-Nicholsa

Wyróżnia się metody analityczne i doświadczalne doboru nastaw, dla regulatorów o jednym wejściu i jednym wyjściu sygnału (regulatory jednowymiarowe SISO; – single input – single output) i dla regulatorów wielowymiarowych MIMO (multi input – multi output). W niniejszym punkcie omówione będą tylko dwie metody dla regulatorów o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO).

Metoda Zieglera-Nicholsa stosowana jest wówczas, gdy regulator i inne elementy układu są już zainstalowane, ich funkcjonowanie jest sprawdzone, należy tylko dobrać nastawy regulatora. Reguły doboru regulatora PID zostały sformułowane na podstawie prowadzonych badań doświadczalnych. Reguły te prowadzą do minimalizacji całki z modułu uchybu (kryterium całkowe). Stosowanie tych reguł wymaga wstępnego wprowadzenia dwóch pojęć:

Wzmocnienie krytyczne k_{pkr} jest to wzmocnienie regulatora P połączonego szeregowo z obiektem, które spowoduje, że układ zamknięty znajdzie się na granicy stabilności i wówczas pojawią się niegasnące

drgania okresowe (oscylacje) o okresie nazywanym okresem drgań krytycznych T_{osc} . Bezpośredni pomiar tych wielkości na drodze doświadczalnej jest niemożliwy, dlatego też opracowano metody pośrednie wyznaczania tych parametrów.

Procedura:

- d. pozostawiamy tylko działanie **P** regulatora (wyłączamy regulatory **I** i **D** poprzez zerowe nastawy wartości parametrów T_i i T_d)
- e. zwiększamy stopniowo współczynnik wzmacnienia k_p aż do osiągnięcia granicy stabilności (oscylacje o stałej amplitudzie)
- f. mierzymy okres oscylacji T_{osc} (na rejestratorze lub ekranie monitora) i notujemy wartość k_{pkr} , przy której wystąpiły niegasnące oscylacje
- g. zależnie od typu regulatora, należy przyjąć nastawy:

W układzie z tak dobranymi nastawami regulatora będą występować przebiegi przejściowe tj. oscylacyjne z przeregulowaniem $\kappa = 20 - 30\%$. Mając wartości obu zmierzonych wielkości, należy nawiązać regulator według tych wielkości, jak następuje:

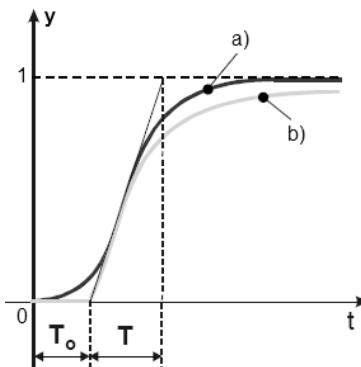
- dla regulatora **P** : $k_p = 0.5k_{pkr}$
- dla regulatora **PI** : $k_p = 0.45k_{pkr}$, $T_i = 0.83T_{osc}$
- dla regulatora **PID** : $k_p = 0.60k_{pkr}$, $T_i = 0.5T_{osc}$, $T_d = 0.125T_{osc}$

Metody doboru parametrów regulatorów oparte są na przybliżeniu odpowiedzi skokowej obiektu statycznego wyższego rzędu (rysunek 5.25).

Według Zieglera i Nicholsa parametry k_{pkr} i T_{osc} wyrażone są wzorami

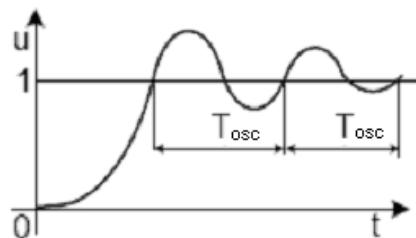
$$k_{pkr} = \frac{T}{T_0}, \quad T_{osc} = 4T_0. \quad (5.38)$$

ROZDZIAŁ 5



Rysunek 5.25. Przybliżenie odpowiedzi skokowej obiektu statycznego:
a) charakterystyka skokowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu,
b) z opóźnieniem o transmitancji $G(s)$

Przyjęcie podanych powyżej nastaw regulatorów, pozwala uzyskać przebiegi przejściowe o charakterze zbliżonym do przedstawionego na rysunku 5.26. Wówczas przeregulowanie jest rzędu 15-20%, zaś liczba oscylacji nie przekracza dwóch.



Rysunek 5.26. Odpowiedź skokowa układu regulacji przy nastawach regulatora wg reguły Zieglera-Nicholsa

B2) Metoda charakterystyk częstotliwościowych

Chociaż zasady Zieglera i Nicholsa uwzględniają właściwości regulatorów, to nie zawsze dają dostatecznie zadowalające wyniki regulacji. Dlatego w literaturze fachowej często spotyka się różne zasady nastawiania np. według Pessena, Cypkina, metody linii pierwiastkowych.

Dobór regulatora, bądź elementu korekcyjnego możemy także przeprowadzić na podstawie analizy charakterystyk częstotliwościowych układu. Z tych charakterystyk możemy określić:

- zapas stabilności (zapas modułu i fazy),

RODZAJE REGULATORÓW ORAZ ICH CHARAKTERYSTYKI

- czas regulacji,
- przeregulowanie (ocena na podstawie zapasu fazy), czyli podstawowe parametry przebiegu odpowiedzi skokowej.

Należy dokonać następującego toku postępowania:

1. Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe obiektu,
2. Wyznaczyć minimalną wartość wzmocnienia takiego, aby zapewniał ograniczenie uchybu ustalonego,
3. Wyznaczyć minimalne wartości zapasu modułu i fazy, konieczne ze względu na ograniczenie przeregulowania,
4. Wyznaczyć minimalną wartość częstości ω_0 (pulsacji) przecięcia układu skorygowanego, konieczną ze względu na ograniczenie czasu regulacji,
5. Wybrać typ regulatora spośród będących do dyspozycji i naszkicować charakterystykę układu z regulatorem, spełniającego warunki 2-4.
6. Sprawdzić, czy warunki 2-4, są spełnione,
7. Jeżeli wybrany typ regulatora nie spełnia podstawowych warunków, bez względu na odpowiedni dobór nastaw, należy wybrać inny typ regulatora oraz powtórzyć postępowanie.

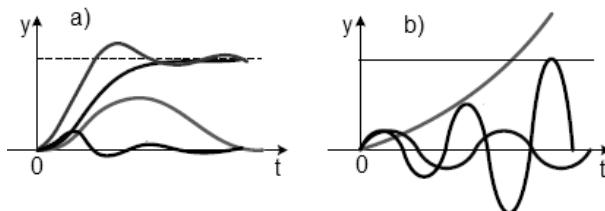
ROZDZIAŁ 5

6

Stabilność liniowych układów automatyki

6.1. Ogólne warunki stabilności

Stabilność jest cechą układu, polegającą na zdolności zachowania pewnego stanu równowagi stałej po zaniku działania zakłócenia (wymuszenia), które wywróciło układ z tego stanu. Każdy układ sterowania powinien być tak zbudowany, aby mógł właściwie wykonywać postawione zadania pomimo zakłóceń. Na rysunku 6.1. a) jest pokazane zachowanie się układu polegające na powrocie do stanu równowagi stałej po ustaniu działania wymuszenia, które wywróciło układ z tego stanu, lub na osiągnięciu nowego stanu równowagi stałej, jeżeli wymuszenie zostało na stałym poziomie. W układach sterowania stabilność charakteryzuje właściwości dynamiczne układu, które są warunkiem jego prawidłowej pracy.



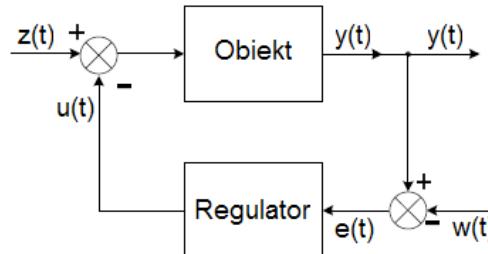
Rysunek 6.1. Przykładowe charakterystyki czasowe układów dynamicznych: a) układów stabilnych, b) układów niestabilnych

Zamknięty układ liniowy (rysunek 6.2) będziemy uważać za stabilny, jeżeli przy każdej skończonej wartości zakłócenia $z(t)$ i wartości zadanej $w(t)$ oraz dla dowolnych warunków początkowych sygnał wyjściowy $y(t)$ dążyć będzie do skończonej wartości ustalonej dla czasu t dążącego do nieskończoności. Gdy po zaniknięciu zakłócenia układ powraca do tego samego stanu równowagi jakiego poprzednio zajmował, wówczas jest stabilny asymptotycznie (rysunek 6.1 a)).

Zakłócenie $z(t)$ może być wprowadzone w dowolnym miejscu układu. W szczególności zakłóceniem może być również zmiana wartości zadanej $w(t)$.

Koniecznym i dostatecznym warunkiem stabilności asymptotycznej (w sensie Lapunowa) układu (swobodnego) jest, aby wszystkie pierwiastki rzeczywiste oraz części rzeczywiste pierwiastków urojonych równania charakterystycznego układu zamkniętego (mianownika trans-

mitancji operatorowej przyrównanego do zera) były ujemne, a krotność pierwiastków rzeczywistych równych zera, jak i krotność par pierwiastków urojonych, powinna być co najwyżej równa jedności. Następuje wtedy zanik przebiegów $y(t)$ w czasie (rysunek 6.1 a)).



Rysunek 6.2. Schemat zamkniętego układu regulacji automatycznej

$$R_e(s_i) \neq 0, \quad (6.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_0 z_w. \quad (6.2)$$

gdzie A_0 jest współczynnikiem o wartości skończonej i układ jest stabilny, z_w jest wartością zakłócenia. Składowe przejściowe wielkości wyjściowej zanikają wówczas do zera przy $t \rightarrow \infty$, a pozostaje jedynie składowa ustalona, określona statycznymi własnościami układu.

Dotychczasowe rozważania dotyczą ogólnie stabilności jednowymiarowego układu liniowego, którego stan swobodny jest opisany jednorodnym liniowym równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach tj.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y(t) = 0, \quad (6.3)$$

Na podstawie rozwiązań tego równania badamy stabilność układu swobodnego. Postać tych rozwiązań zależy od pierwiastków równania charakterystycznego.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (6.4)$$

Ponieważ rodzaj sygnału wejściowego nie ma znaczenia przy badaniu stabilności, to układ opisany równaniem (6.3) będzie stabilny, gdy

Rozdział 6

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (6.5)$$

Jeżeli pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_n są pierwiastkami rzeczywistymi równania charakterystycznego (6.4) to rozwiązanie ma postać

$$y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t}, \quad (6.6)$$

gdzie C_1, C_2, \dots, C_n są stałymi całkowania, które można wyznaczyć z warunków początkowych.

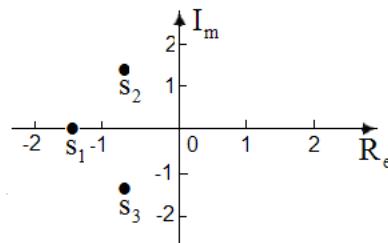
Jeżeli rozwiązanie równania (6.4) ma pierwiastki zespolone sprzężone $s_{1,2} = \alpha_1 \pm j\omega_1, s_{3,4} = \alpha_2 \pm j\omega_2$ to rozwiązanie jest następujące

$$y(t) = e^{\alpha_1 t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) + e^{\alpha_2 t} (A_3 \cos \omega_2 t + A_4 \sin \omega_2 t). \quad (6.7)$$

Jeżeli chociażby jedna z części rzeczywistych s_i jest dodatnia, to odpowiednia składowa rozwiązania określonego wyrażeniem (6.7) ma składnik $e^{\alpha t}$, co przy $\alpha > 0$ i $t \rightarrow \infty$ powoduje, że $y(t)$ zmierza do nieskończoności, czyli układ jest niestabilny (rysunek 6.1 b)).

Z reguły żąda się, aby układ liniowy był stabilny asymptotycznie, ponieważ wtedy występuje globalna stabilność asymptotyczna (dla dowolnych warunków początkowych).

Zatem układ liniowy jest stabilny w sensie Lapunowa, jeżeli pierwiastki jego równania charakterystycznego leżą w lewej półpłaszczyźnie liczb zespolonych. Wówczas składowa swobodna ma charakter zanikający zmierzając do zera. Natomiast na osi urojonej występują pierwiastki pojedyncze w tym, co najwyżej jeden równy zeru.



Rysunek 6.3. Rozkład wartości własnych pierwiastków równania charakterystycznego

Podsumowując ogólne kryterium badania stabilności należy zauważyc, że ocena stabilności układu na podstawie znajomości rozkładu pierwiastków (wartości własnych) wymaga rozwiązania równania charakterystycznego, czyli wyznaczenia miejsc zerowych wielomianu. W przypadku równania wysokiego rzędu jest to kłopotliwe. Z tego względu, do badania stabilności stosowane są inne kryteria pozwalające ominąć tę trudność. Najbardziej są znane i najczęściej stosowane kryteria analityczne Hurwitz'a, Routha, analityczno-graficzne Nyquista. Kryteria te wymagają znajomości transmitancji układu w postaci analitycznej.

6.2. Kryterium Hurwitz'a oceny stabilności układów automatyki

Przedstawimy praktyczne sformułowanie algebraicznego kryterium stabilności Hurwitz'a, opartego na badaniu współczynników równania charakterystycznego (6.4). Kryterium to pozwala na sprawdzenie, czy równanie algebraiczne dowolnego stopnia ma wyłącznie pierwiastki ujemne lub o ujemnych częściach rzeczywistych. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ liniowy stacjonarny ciągły był stabilny asymptotycznie, jest, aby wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (6.4) miały części rzeczywiste ujemne, muszą być spełnione następujące warunki

- h. wszystkie współczynniki równania (6.4) istnieją i ich wartości są większe od zera (jest to warunek konieczny, ale nie dostateczny)

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

- i. podwyznaczniki Δ_i , od $i = 2$ do $i = n - 1$, wyznaczone z wyznacznika głównego Δ_n są większe od zera (warunek dostateczny).

Wyznacznik Δ_n , utworzony ze współczynników równania (6.4), ma n wierszy i n kolumn

ROZDZIAŁ 6

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4

Przedstawiliśmy praktyczne sformułowanie kryterium Hurwitz'a.

$$A_n = a_0 A_{n-1} \quad (6.9)$$

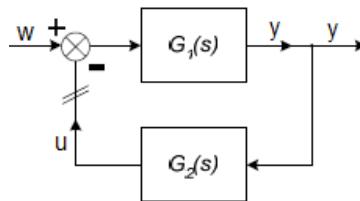
Ze wzoru (6.8) widać, że wyznacznik główny Hurwitz'a tworzymy umieszczając na głównej przekątnej kolejne współczynniki wielomianu od a_{n-1} do a_0 . Następnie w poszczególnych kolumnach wpisujemy powyżej wyrazu na głównej przekątnej wyznacznika współczynniki o indeksach kolejno zmniejszających się o jeden, zaś poniżej wyrazu na głównej współczynniki o indeksach kolejno zwiększających się o jeden. Wszystkie współczynniki, których indeksy są większe od n i mniejsze od zera zastępujemy zerami.

Jeżeli rozważany układ jest niestabilny, to kryterium Hurwitz'a nie daje odpowiedzi ile pierwiastków równania charakterystycznego ma dodatnią część rzeczywistą. Jeżeli któryś z podwyznaczników jest zerowy to równanie charakterystyczne zawiera pierwiastki w dziedzinie urojonej (zespolone o zerowej części rzeczywistej). W układzie występują drgania niegasnące o stałej amplitudzie. Świadczy to, że układ znajduje się na granicy stabilności o charakterze przebiegu oscylacyjnego

6.3. Kryterium Nyquista oceny stabilności układów automatyki

Kryterium Nyquista ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ pozwala badać stabilność układu zamkniętego na podstawie przebiegu charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego, którą można wyznaczyć zarówno analitycznie, jak i doświadczalnie.

Rozpatrzmy układ liniowy o schemacie blokowym przedstawionym na rysunku 6.4.



Rysunek 6.4. Schemat blokowy otwartego układu automatyki

Transmitancja układu otwartego jest następująca

$$G_o(s) = \frac{u(s)}{w(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s), \quad (6.10)$$

Przedstawiając tę transmitancję w postaci ilorazu wielomianów zmiennej s otrzymamy

$$G_o(s) = \frac{M_o(s)}{N_o(s)}, \quad (6.11)$$

przy czym

$$N_o(s) = 0, \quad (6.12)$$

jest równaniem charakterystycznym układu otwartego; zakładamy, że stopień tego równania równe się n .

Transmitancja układu zamkniętego (rysunek 6.4) jest

ROZDZIAŁ 6

$$G_z(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_i(s)}{1 + G_i(s) \cdot G_o(s)} = \frac{G_i(s)}{1 + G_o(s)}. \quad (6.13)$$

Równanie charakterystyczne tego układu przyjmuje postać

$$1 + G_o(s) = 0. \quad (6.14)$$

W ten sposób określiliśmy równanie charakterystyczne układu zamkniętego poprzez *transmitancję układu otwartego*. Mając opis matematyczny funkcji $G_o(s)$ można sprawdzić stabilność układu zamkniętego rozwiązuając równanie (6.14). Jeżeli równanie (6.14) zapiszemy w postaci $G_o(s) = -1$ to na płaszczyźnie, na której narysujeśmy wykres $G_o(s)$, wszystkie zera równania (6.14) odwzorowują się w punkcie A (-1,j0).

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego można także zapisać w postaci

$$N_z(s) = M_o(s) + N_o(s) = 0. \quad (6.15)$$

jest również stopnia n , ponieważ stopień $M_o(s)$ nie jest nigdy większy od stopnia $N_o(s)$.

Zbadajmy zmianę argumentu funkcji

$$1 + G_o(j\omega) = \frac{N_z(j\omega)}{N_o(j\omega)}, \quad (6.16)$$

$$\Delta \arg [1 + G_o(j\omega)]_{0 < \omega < \infty} = \Delta \arg N_z(j\omega) - \Delta \arg N_o(j\omega), \quad (6.17)$$

Przypadek 1. Układ otwarty jest stabilny. Równanie charakterystyczne układu otwartego ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s . Zgodnie z kryterium Michajłowa

$$\Delta \arg N_o(j\omega)_{0 < \omega < \infty} = n \cdot \frac{\pi}{2},$$

Układ zamknięty będzie stabilny, jeżeli

$$\Delta \arg N_z(j\omega) = n \cdot \frac{\pi}{2},$$

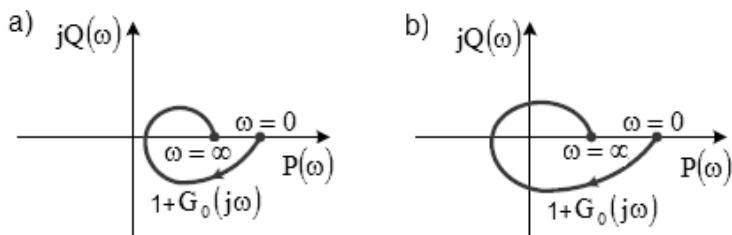
Warunek stabilności układu zamkniętego można, więc zapisać

$$\Delta \arg [I + G_o(j\omega)] = 0. \quad (6.18)$$

Oznacza to, że wykres krzywej $[I + G_o(j\omega)]$ nie może obejmować początku układu współrzędnych. Musi się zaczynać i kończyć na jednej prostej wychodzącej z początku układu. Ten sam warunek odniesiony do charakterystyki częstotliwościowej (amplitudowo-fazowej) układu otwartego $G_o(j\omega)$ formułujemy następująco

Jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa otwartego układu regulacji automatycznej $G_o(j\omega)$ dla częstości ω od 0 do ∞ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, to wtedy i tylko wtedy po zamknięciu będzie on również stabilny.

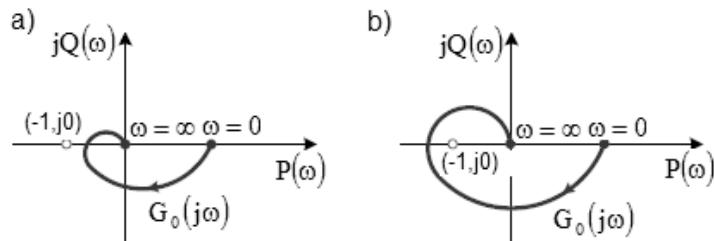
Przykładowe wykresy krzywych $[I + G_o(j\omega)]$ układu stabilnego i niestabilnego (po zamknięciu) pokazują wykresy na rysunku 6.5.



Rysunek 6.5. Charakterystyki amplitudowo-fazowe układów statycznych $[I + G_o(j\omega)]$, które po zamknięciu są : a) stabilne, b) niestabilne
(podstawowe kryterium Nyquista)

Wykresy krzywych $G_o(j\omega)$ układu stabilnego i niestabilnego (po zamknięciu) pokazują wykresy na rysunku 6.6.

ROZDZIAŁ 6

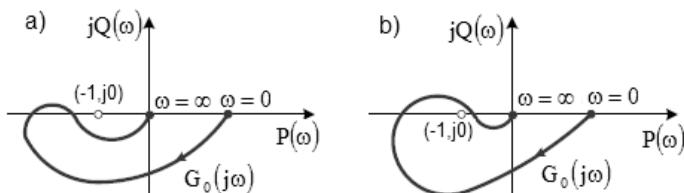


Rysunek 6.6. Charakterystyki amplitudowo-fazowe układów statycznych $G_o(j\omega)$, które po zamknięciu są : a) stabilne, b) niestabilne
(podstawowe kryterium Nyquista)

W przypadku złożonego kształtu krzywych $G_o(j\omega)$ trudno jest ocenić, czy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego obejmuje punkt A $(-1,j0)$, czy nie. Duża trudność zachodzi w przypadku, gdy punkt dla $\omega=0$ leży w nieskończoności. Wówczas wygodnie jest posługiwać się wynikającą bezpośrednio z podanego kryterium tzw. „regułą lewej strony”, która mówi, że

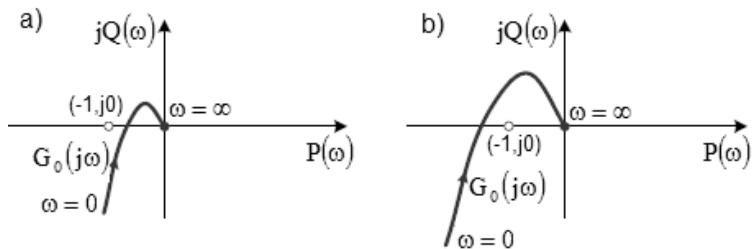
Układ zamknięty jest stabilny wtedy, kiedy punkt $(-1,j0)$ znajduje się w obszarze leżącym po lewej stronie charakterystyki $G_o(j\omega)$, idąc od początku w stronę rosnących częstotliwości ω .

Zastosowanie tej reguły można sprawdzić na przykładzie charakterystyk podanych na rysunkach 6.7 i 6.8.



Rysunek 6.7. Charakterystyki amplitudowo-fazowe układów statycznych, które po zamknięciu są : a) stabilne, b) niestabilne (**reguła lewej strony**)

Układamy astatycznymi nazywamy takie układy, które oprócz ujemnych pierwiastków części rzeczywistej mają, co najmniej jeden pierwiastek zerowy.



Rysunek 6.8. Charakterystyki amplitudowo-fazowe układów astatycznych, które po zamknięciu są : a) stabilne, b) niestabilne
(podstawowe kryterium Nyquista)

Reguła lewej strony jest słuszna w zastosowaniu jedynie w przypadku, gdy badany otwarty układ automatyki jest stabilny. W innych przypadkach należy stosować ogólne kryterium Nyquista. Większość układów automatyki jest zbudowana tak, że układ otwarty jest stabilny i wtedy można stosować bez zastrzeżeń „regułę lewej strony”.

6.4. Ocena stabilności układów automatyki poprzez kryterium zapasu modułu i fazy

W przypadku dynamicznych stacjonarnych liniowych i ciągłych układów automatyki (DLSC) spełnienie kryterium Nyquista oznacza, że równanie charakterystyczne nie ma pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie. Mogą jednak istnieć pierwiastki ujemne, położone blisko osi urojonej. Wykres charakterystyki widmowej przechodzi blisko punktu krytycznego A (-1, j0) (granicy stabilności). Stopień stabilności (zapas) może być określony przez odległość wykresu charakterystyki widmowej $G_o(j\omega)$ od punktu A (-1, j0). W tym celu wprowadzono pojęcie zapasu modułu ΔM (zapas wzmacnienia) i zapasu fazy $\Delta\varphi$. Z rysunku 6.9. wynika

$$\Delta M = 1 - |G(j\omega_{-\pi})|. \quad (6.19)$$

ROZDZIAŁ 6

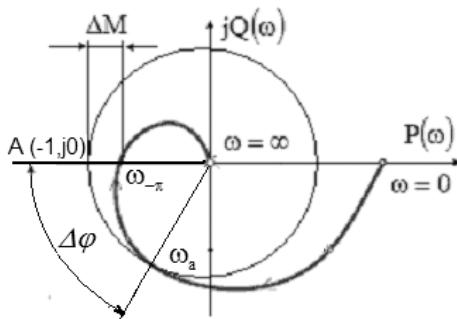
$|G(j\omega_{-\pi})|$ jest modułem wektora transmitancji widmowej dla częstotliwości $\omega_{-\pi}$ odpowiadającej przesunięciu fazowemu -180° . Dla układów stabilnych $\Delta M > 0$, dla niestabilnych $\Delta M < 0$.

Zapas modułu wskazuje o ile mogłaby się zwiększyć amplituda drgań układu zamkniętego, aby przestał być stabilny. Czasami zapas modułu nazywany jest zapasem wzmacnienia, ponieważ amplitudę można zwiększyć przez zwiększenie wzmacnienia układu automatyki.

Zapasem fazy nazywa się kąt zawarty między ujemną osią liczb rzeczywistych a wektorem $|G_o(j\omega)| = 1$. Aby kąt ten był dodatni to definiujemy go w następujący sposób

$$\Delta\varphi = \varphi(\omega_a) + \pi. \quad (6.20)$$

$\varphi(\omega_a)$ - argument wektora transmitancji widmowej dla częstotliwości ω_a (częstość przecięcia okręgu o promieniu jednostkowym z amplitudowo-fazową), przy której $|G_o(j\omega)| = 1$. Zapas fazy jest to dodatkowe przesunięcie fazowe, które może powodować przejście wykresu $G_o(j\omega)$ do punktu krytycznego. Dla układów stabilnych $\Delta\varphi > 0$.



Rysunek 6.9. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu automatyki

Z rysunku 6.9 wynika, że zapas fazy można zdefiniować następująco

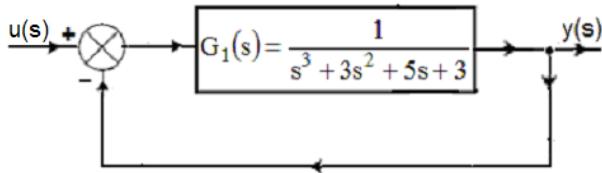
$$\Delta\varphi = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (6.21)$$

Zapas stabilności wyrażony przez zapas modułu i fazy stanowi zabezpieczenie, że gdy przy pewnych zmianach parametrów układu, które mogą

zachodzić podczas pracy lub z upływem czasu i powodować przesunięcia charakterystyk w niekorzystnym kierunku, układ dalej pozostanie stabilny. Praktycznie przyjmuje się za wystarczający zapas modułu od 0.3 do 0.5, zaś zapas fazy od 30° do 50°.

Przykład 6.1

Zbadać stabilność układu automatyki, którego schemat przedstawia rysunek 6.10 korzystając z ogólnego warunku stabilności oraz z kryteriów Hurwitz'a i Nyquista. Określić zapas modułu.



Rysunek 6.10. Schemat układu automatyki

Rozwiązanie

a) Kryterium ogólne dla układu zamkniętego

Transmitancja zastępcza zamkniętego układu automatyki jest

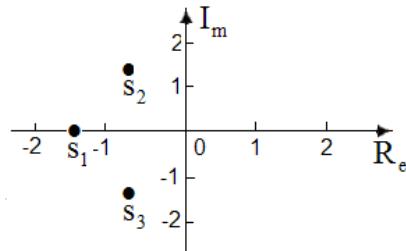
$$G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 5s + 4}, \quad G_2(s) = 1.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są

$$\begin{aligned} s^3 + 3s^2 + 5s + 4 &= 0 \quad \rightarrow s_1 = -1.45, \quad s_2 = -0.77 + i \cdot 1.46, \\ s_3 &= -0.77 - i \cdot 1.46, \end{aligned}$$

Kryterium ogólne jest spełnione, ponieważ wszystkie części rzeczywiste pierwiastków Hurwitz'a są spełnione i leżą w lewej półpłaszczyźnie liczb zespolonych.

Rozdział 6



Rysunek 6.11. Rozkład pierwiastków równania charakterystycznego

b) Kryterium Hurwitz'a dla układu zamkniętego

Kryterium koniecznym Hurwitz'a jest, aby wszystkie współczynniki równania charakterystycznego były większe od zera, zatem

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1.$$

Jak widać kryterium to jest spełnione ($a_i > 0$)

Kryterium dostatecznym Hurwitz'a jest, aby wszystkie podwyznaczniki utworzone z wyznacznika głównego były większe od zera, tj.

Wyznacznik główny

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_3 \\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 0 \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \dots \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = [a_2] = [3] > 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 11 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 44 > 0,$$

$$\text{lub } \Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}, \rightarrow \Delta_3 = a_0 \Delta_2 = 4 \cdot 11 = 44.$$

Według obydwu kryteriów Hurwicza układ zamknięty jest stabilny

c) Kryterium Nyquista dla układu otwartego

Według kryterium Nyquista, charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego nie może obejmować punktu o współrzędnych (-1,j0).

Należy, więc określić transmitancję operatorową $G_o(s)$ układu otwartego i przejść do transmitancji widmowej $G_o(j\omega)$ wydzielając część rzeczywistą $P(\omega)$ i urojoną $Q(\omega)$.

$$G_o(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3},$$

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 3} = \frac{1}{3(1-\omega^2) + j\omega(5-\omega^2)} = \\ &= \frac{3(1-\omega^2) - j\omega(5-\omega^2)}{[3(1-\omega^2) + j\omega(5-\omega^2)][3(1-\omega^2) - j\omega(5-\omega^2)]} = \\ &= \frac{3(1-\omega^2) - j\omega(5-\omega^2)}{9(1-\omega^2)^2 + \omega^2(5-\omega^2)^2}. \end{aligned}$$

$$P(\omega) = \frac{3(1-\omega^2)}{9(1-\omega^2)^2 + \omega^2(5-\omega^2)^2},$$

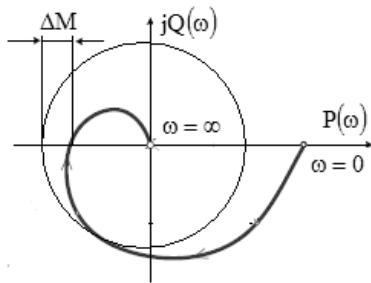
$$Q(\omega) = -\frac{\omega(5-\omega^2)}{9(1-\omega^2)^2 + \omega^2(5-\omega^2)^2}.$$

$$Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega(5-\omega^2) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{5} [1/s].$$

$$P(\omega = \sqrt{5}) = -\frac{1}{12},$$

$$\Delta M = 1 - |P(\omega)|_{-\pi}| = 1 - 0.08 = 0.92.$$

ROZDZIAŁ 6



Rysunek 6.12. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu automatyki

Według obydwu kryteriów Hurwitza dla układu otwartego jest

Równanie charakterystyczne

$$s^3 + 3s^2 + 5s + 3, \quad a_0 = 3, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1. \quad a_i > 0.$$

$$\Delta_1 = [a_2] = [3] > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 12 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 36 > 0,$$

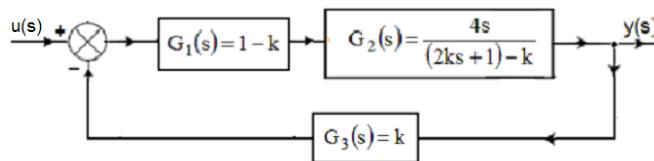
lub

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_3 = a_0 \Delta_2 = 3 \cdot 12 = 36.$$

Oba kryteria Hurwitza są również spełnione, a więc układ automatyki jest stabilny.

Przykład 6.2

Dla układu automatyki, którego schemat przedstawia rysunek 6.13. Określić współczynnik wzmocnienia, dla którego istnieje zapas modułu.



Rysunek 6.13. Schemat układu automatyki

Rozwiązanie

Transmitancja zastępcza układu automatyki jest

$$G_z(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)G_3(s)} = \frac{4s(1-k)}{4k^2s^2 + 4k(2-k)s + 1-k},$$

Równanie charakterystyczne

$$4k^2s^2 + 4k(2-k)s + 1-k = 0,$$

$$a_0 = 1-k > 0 \rightarrow k < 1,$$

$$a_1 = 4k(2-k) > 0 \rightarrow k > 0 \text{ i } k < 2,$$

$$a_2 = 4k^2 > 0 \rightarrow k > 0, \quad 0 < k < 2.$$

Dla układu otwartego

$$G_o(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{4k(1-k)s}{(2ks+1)^2 - k},$$

Transmitancja widmowa $G_o(j\omega)$

$$\begin{aligned} G_o(j\omega) &= \frac{4k(1-k)j\omega}{-4k^2\omega^2 + j4k\omega + 1 - k} = \\ &= \frac{4k(1-k)j\omega[(1-k) - 4k^2\omega^2] - j4k\omega}{\{(1-k) - 4k^2\omega^2\} + j4k\omega \{(1-k) - 4k^2\omega^2\} - j4k\omega} = \\ &= \frac{16k^2\omega^2(1-k) + j4k\omega(1-k)\{(1-k) - 4k^2\omega^2\}}{\{(1-k) - 4k^2\omega^2\}^2 + 16k^2\omega^2}, \end{aligned}$$

Część rzeczywista $P(\omega)$ i urojona $Q(\omega)$.

$$P(\omega) = \frac{16k^2\omega^2(1-k)}{\{(1-k) - 4k^2\omega^2\}^2 + 16k^2\omega^2},$$

$$Q(\omega) = \frac{4k\omega(1-k)[(1-k) - 4k^2\omega^2]}{\{(1-k) - 4k^2\omega^2\}^2 + 16k^2\omega^2}.$$

ROZDZIAŁ 6

$$Q(\omega) = \frac{4k\omega(1-k)[(1-k)-4k^2\omega^2]}{[(1-k)-4k^2\omega^2]^2 + 16k^2\omega^2} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 4k\omega(1-k)[(1-k)-4k^2\omega^2] = 0$$

stąd

$$\omega = \frac{1}{2k} \sqrt{1-k},$$

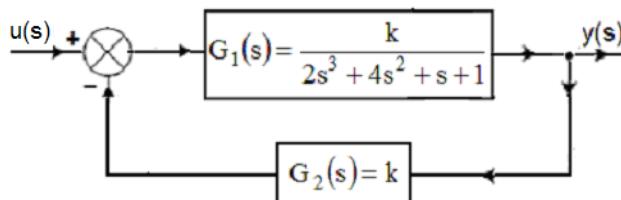
$$P\left(\omega = \frac{1}{2k} \sqrt{1-k}\right) = \frac{4}{1-k},$$

$$\Delta M = 1 - \left| P\left(\omega = \frac{1}{2k} \sqrt{1-k}\right) \right| = 1 - \left| \frac{4}{1-k} \right| > 0 \rightarrow k > 5.$$

Aby istniał zapas modułu to współczynnik wzmacnienia k musi być większy od 5.

Przykład 6.3

W przedstawionym na rysunku 6.14 układzie automatyki, wyznaczyć funkcję zmiany zapasu modułu układu otwartego w funkcji wzmacnienia k . Obliczyć, jaka będzie maksymalna amplituda sygnału wejściowego odpowiedzi w układzie zamkniętym, jeśli przesunięcie fazowe $\varphi = 0^\circ$, $k = 0.5$, zaś amplituda wymuszenia $x_0 = 3 \text{ cm}$.



Rysunek 6.14. Schemat układu automatyki

Rozwiązanie

Transmitancja widmowa, zastępcza otwartego układu automatyki jest

$$\begin{aligned}
 G_o(j\omega) &= \frac{k^2}{2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \\
 &= \frac{k^2[(1-4\omega^2) - j\omega(1-2\omega^2)]}{[(1-4\omega^2) + j\omega(1-2\omega^2)][(1-4\omega^2) - j\omega(1-2\omega^2)]} = \\
 &= \frac{k^2[(1-4\omega^2) - j\omega(1-2\omega^2)]}{[(1-4\omega^2)^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2]} = \\
 &= \frac{k^2(1-4\omega^2)}{[(1-4\omega^2)^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2]} - j \frac{\omega(1-2\omega^2)}{[(1-4\omega^2)^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2]},
 \end{aligned}$$

Część rzeczywista $P(\omega)$ i urojona $Q(\omega)$.

$$P(\omega) = \frac{k^2(1-4\omega^2)}{[(1-4\omega^2)^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2]},$$

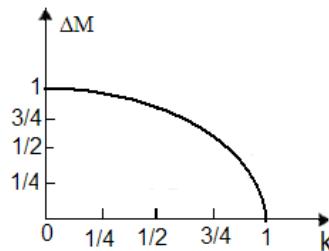
$$Q(\omega) = - \frac{\omega(1-2\omega^2)}{[(1-4\omega^2)^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2]}.$$

Zapas modułu

$$Q(\omega) = - \frac{\omega(1-2\omega^2)}{[(1-4\omega^2)^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2]} = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{0.5} \text{ [1/s]},$$

$$P(\omega = \sqrt{0.5}) = k^2,$$

$$\Delta M = 1 - |P(\omega = \sqrt{0.5})| = 1 - k^2.$$



Rysunek 6.15. Wykres zmiany modułu w funkcji współczynnika wzmocnienia k

Rozdział 6

Transmitancja operatorowa badanego układu automatyki jest

$$G_z(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)} = \frac{k}{2s^3 + 4s^2 + s + 1 + k^2},$$

Transmitancja widmowa

$$\begin{aligned} G_z(j\omega) &= \frac{k}{2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + j\omega + 1 + k^2} = \\ &= \frac{k[(1+k^2)-4\omega^2] - j\omega(1-2\omega^2)}{[(1+k^2)-4\omega^2] + j\omega(1-2\omega^2)[(1+k^2)-4\omega^2] - j\omega(1-2\omega^2)} \\ &= \frac{k[(1+k^2)-4\omega^2]}{[(1+k^2)-4\omega^2]^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2} - j \frac{k\omega(1-2\omega^2)}{[(1+k^2)-4\omega^2]^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2} \end{aligned}.$$

Część rzeczywista $P(\omega)$ i urojona $Q(\omega)$.

$$Q(\omega) = \frac{k[(1+k^2)-4\omega^2]}{[(1+k^2)-4\omega^2]^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2},$$

$$P(\omega) = \frac{k\omega(1-2\omega^2)}{[(1+k^2)-4\omega^2]^2 + \omega^2(1-2\omega^2)^2},$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \tan 0^\circ = -\frac{k\omega(1-2\omega^2)}{k[(1+k^2)-4\omega^2]} \rightarrow \\ &\rightarrow \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{0.5} [1/s] \end{aligned}$$

$$Q(\omega = 0) = 0, \quad Q(\omega = \sqrt{0.5}) = 0,$$

$$P(\omega = 0) = \frac{k}{1+k^2} = 0.4, \quad P(\omega = \sqrt{0.5}) = \left| \frac{k}{1+k^2-4\omega^2} \right| = \frac{2}{3},$$

$$G(j\omega) = \frac{y_0}{x_0} = M = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = P(\omega) \rightarrow y_0 = P(\omega)x_0,$$

$$\text{dla } y_0 = P(\omega = 0)x_0 = 0.4 \cdot 3 = 1.2 [cm],$$

STABILNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW AUTOMATYKI

$$y_0 = P(\omega = \sqrt{0.5})x_0 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ [cm]}.$$

ROZDZIAŁ 6

7

Wprowadzenie do układów automatycznego sterowania

7.1. Pojęcia podstawowe

Automatyka – dziedzina wiedzy, która ma na celu częściowe lub całkowite wyłączenie człowieka (operatora) z procesu sterowania procesem produkcji, obsługi maszyn i urządzeń.

Automatyzacja – jest to działalność zmierzająca do wprowadzenia metod i środków automatyki.

Regulacja – sterowanie w układzie zamkniętym ze sprzężeniem zwrotnym.

Regulator – urządzenie sterujące w układzie zamkniętym.

Sterowanie automatyczne – wpływanie na przebieg procesu technologicznego w taki sposób, aby osiągnąć zamierzony cel poprzez użycie urządzeń sterujących (sterowniki, regulatory) zastępujących człowieka.

Regulacja automatyczna – polega na utrzymaniu, bez ingerencji człowieka, fizycznego parametru na określonym poziomie wartości.

Obiekt regulacji (sterowania) – jako zestaw aparatury technologicznej procesu fizycznego o określonej dynamice, w której zachodzi proces regulowany, np. zbiornik ciśnieniowy (regulacja ciśnienia), zbiornik cieczy (regulacja poziomu), piec hartowniczy (regulacja temperatury) itp.

Obiektem sterowania może być maszyna, urządzenie, pojazd mechaniczny, samolot, statek itp. Wielkościami, którymi działamy na obiekt sterowania są sygnały wejściowe, wpływające na wielkości sterowane, zwane sygnałami wyjściowymi.

Element automatyki – układ w którym wyróżniamy sygnał wejściowy i wyjściowy. Elementy automatyki dzielimy na liniowe i nieliniowe, opisywane liniowymi bądź nieliniowymi równaniami różniczkowymi, różnicowymi lub algebraicznymi.

Układ automatyki – połączenie elementów automatyki (obiekt, regulator), które współdziałają wykonując postawione zadanie.

Zakłócenie – może być generowane wewnętrz układow (wewnętrzne) lub poza układem (zewnętrzne) stanowiąc sygnał wejściowy. Zakłócenie niekorzystnie działa na wartość sygnału wyjściowego.

7.2. Rodzaje regulacji

stałowartościowa – polega na utrzymaniu stałej wartości wielkości regulowanej wartości zadanej $w = \text{const}$.

programowa – wartość wielkości regulowanej ma zmieniać się w czasie z góry ustalony sposob. Wartość zadana jest zdeterminowana.

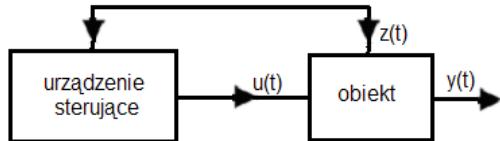
Nadążna (śledząca) - wartość zadana zmienia się w sposób niezdeterminowany, jest funkcją czasu. Zmiany tej funkcji nie zależą od procesu zachodzącego wewnątrz układu. Związane są natomiast ze zjawiskami występującymi na zewnątrz.

Zakładamy, że obiekt sterowania i działające na niego zakłócenia nie zmieniają swoich właściwości w czasie (są stacjonarne). Czasami tak nie jest i potrzebne jest dostrajanie parametrów regulatora w czasie sterowania (adaptacja).

Wyróżniamy także układy analogowe i cyfrowe oraz układy regulacji ciągłej i dyskretnej.

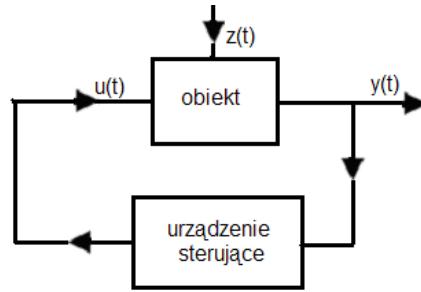
Wielkości (sygnały) wejściowe oddziałyujące na obiekty o transmitancjach $G(s), G_1(s)$ i $G_2(s)$ dzielimy na sterujące $u(t)$ i zakłóciowe $z(t)$, ($z(t)=0$ lub $z(t)\neq 0$) $z(t)\neq 0$, wówczas stosujemy układy sterowania:

- j. układ stabilizacji z kompensacją zakłóceń



Rysunek 7.1. Schemat układu stabilizacji z kompensacją zakłóceń

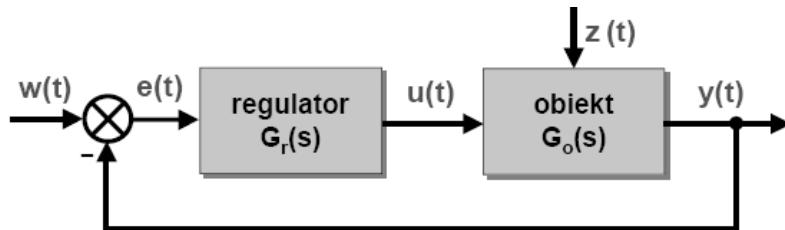
- k. układ stabilizacji ze sprzężeniem zwrotnym



Rysunek 7.2. Schemat układu stabilizacji ze sprzężeniem zwrotnym

7.3. Elementy prostego i złożonego układu automatycznej regulacji

Schemat blokowy prostego układu automatycznej regulacji przedstawia rysunek 7.3.



Rysunek 7.3. Schemat blokowy prostego układu automatycznej regulacji

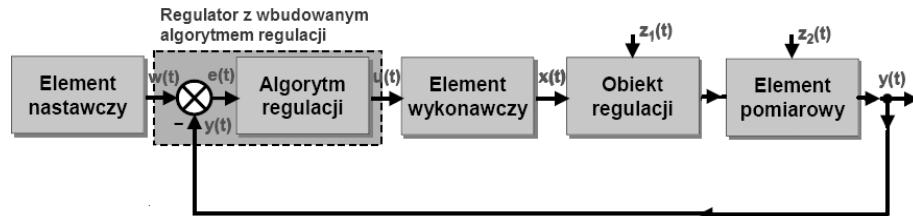
Układy automatycznej regulacji są układami zamkniętymi, wykorzystującymi ujemne sprzężenia zwrotne. Zadaniem układu regulacji jest minimalizacja sygnału uchybu regulacji $e(t)$, tak aby sygnał zadany $w(t)$ jak najmniej różnił się od sygnału wyjściowego, zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0, \quad (7.1)$$

czyli $e(t) = 0$ gdy $w(t) = y(t)$.

Na wartość uchybu $e(t)$ wpływają zakłócenia zewnętrzne $z(t)$ działające na obiekt, jak i zmiany wartości zadanej $w(t)$ na wejściu regulatora, zmiany parametrów układu itp.

Ogólny schemat blokowy złożonego układu automatycznej regulacji przedstawia rysunek 7.4



Rysunek 7.4. Schemat blokowy złożonego układu automatycznej regulacji

Zadaniem regulatora jest, aby sygnał sterujący $u(t)$ zależny od sygnału uchybu $e(t)$, tak ukształtować, by sygnał regulowany $y(t)$ jak najmniej różnił się od sygnału zadanej $w(t)$. Regulatorem z wbudowanym algorytmem regulacji może być P, PI, PD, PID.

Najczęściej stosowanym regulatorem jest regulator PID, utworzony z członów (elementów) podstawowych P, I, D (rys.7.5 a). W skład regulatora wchodzi układ formujący sygnał (algorytm działania regulatora), wezel sumacyjny. Kryteria podziału regulatorów są różne np. podział ze względu na rodzaj przetwarzanych sygnałów mogą być analogowe lub cyfrowe. Ze względu na sposób budowy mamy regulatory o działaniu bezpośrednim, które nie korzystają z energii pomocniczej oraz korzystające (o działaniu pośrednim), wymagające elementu wykonawczego.

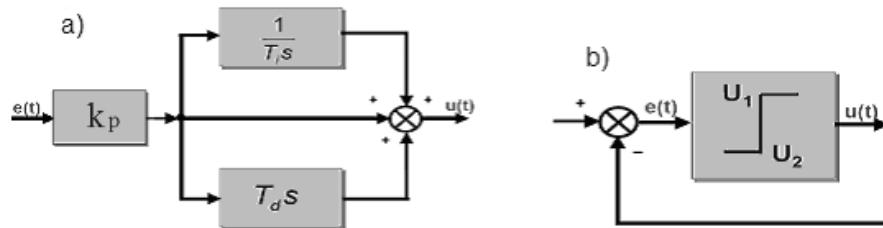
Najważniejszymi parametrami regulatora PID są k_p , T_i , T_d oraz zakres proporcjonalności x_p

$$x_p = \frac{1}{k_p} \cdot 100 \% . \quad (7.2)$$

Większość regulatorów przemysłowych jako źródła energii wykorzystuje prąd elektryczny, sprężone powietrze lub olej pod ciśnieniem. W skali przemysłowej najczęściej korzysta się z regulatorów o działaniu

ROZDZIAŁ 7

pośrednim. Urządzenie wykonawcze i element pomiarowy są wtedy odzielone od siebie.



Rysunek 7.5. Schemat blokowy:
a) regulatora złożonego z **P, I, D**,
b) regulatora dwupołożeniowego

k_p – współczynnik wzmacniania regulatora, T_i – czas zdwojenia (wyraża intensywność działania całkującego), T_d – czas wyprzedzenia (określa działanie różniczkujące regulatora)

W dwupołożeniowym układzie regulacji element wykonawczy ma tylko dwa ustalone położenia (rys.7.5b). Sygnał sterujący $u(t)$ jest na poziomie wartości minimalnej, lub maksymalnej, w zależności od tego, czy sygnał uchybu $e(t)$ jest ujemny, czy dodatni, otrzymujemy

$$u(t) = U_1 \quad \text{dla } e(t) > 0, \quad (7.3)$$

$$u(t) = U_2 \quad \text{dla } e(t) < 0. \quad (7.4)$$

U_1, U_2 – są stałymi

Regulatory pneumatyczne, proporcjonalne z dużymi wzmacnieniami, działają jak sterowniki dwupołożeniowe. Sterowanie dwupołożeniowe jest stosunkowo proste i głównie z tego powodu stosuje się w sprzęcie domowym jak i w przemysłowych układach sterowania.

Element wykonawczy służy do przenoszenia sygnału sterującego $u(t)$, uformowanego w regulatorze, na obiekt regulacji. Najczęściej spotykanym elementem wykonawczym jest silownik hydrauliczny, pneumatyczny, układ piezoelektryczny lub mechaniczny.

Element pomiarowy w postaci układu pomiarowego składa się z:
a) czujnika (tensometrycznego, indukcyjnego, magnetycznego, piezoelektrycznego), mogącego mierzyć przemieszczenie, siłę, moment, ci-

śnienie, temperaturę, b) wzmacniacza sygnału, zasilacza, c) miernika cyfrowego. Czujnik dokonuje pomiaru wielkości wyjściowej $y(t)$. Sygnał wyjściowy z czujnika często trzeba jeszcze odpowiednio przekształcić stosując przetwornik pomiarowy.

Obiekty regulacji jak inne elementy automatyki, podlegają klasyfikacji ze względu na ich własności dynamiczne.

Ze względu na końcową wartość odpowiedzi skokowej wyróżnia się dwie grupy obiektów regulacji:

- a. **statyczne z samo-wyrównaniem**, których sygnał odpowiedzi skokowej dąży do skończonej wartości. Obiekty te nie posiadają działania całkującego tzn. sygnał wyjściowy przyjmuje stałą wartość po zadaniu na wejściu sygnału skokowego.

Układ jest opisany równaniem charakterystycznym

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.5)$$

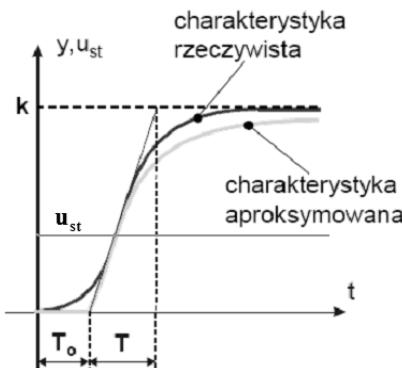
którego pierwiastki zespolone części rzeczywistej lub pierwiastki rzeczywiste są ujemne.

- b. **astatyczne bez samo-wyrównania**, których wartość odpowiedzi skokowej dąży do nieskończoności. Obiekty takie posiadają działanie całkujące. Najczęściej występujące to serwomechanizmy, regulatory dwu i trójpołożeniowe.

Jeżeli stałej wartości wielkości wejściowej odpowiada w stanie ustalonym stała wartość pierwszej pochodnej wielkości wyjściowej, to człon jest astatyczny pierwszego rzędu (człon całkujący). Gdyby w tych samych warunkach na wejściu wartość stała miała w stanie ustalonym n-ta pochodna wielkości wyjściowej, to jest to astatyczność n-tego rzędu. Układem astatycznym regulacji nazywa się układ, w którym przy stałej wartości zmiany wielkości zadającej uchyb statyczny e_{st} równy jest zeru.

7.4. Charakterystyki skokowe obiektów statycznych

Często analityczne wyznaczanie transmitancji nie jest możliwe, ponieważ równania opisujące własności obiektów regulacji nie są dostatecznie znane. W takich przypadkach należy korzystać z doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk skokowych. Wyznaczoną doświadczalnie charakterystykę aproksymuje się graficznie za pomocą elementu inercyjnego pierwszego rzędu i czasu opóźnienia T_0 (rysunek 7.6).



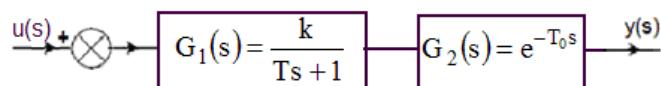
Rysunek 7.6. Aproksymacja charakterystyki skokowej obiektu statycznego obiektem z opóźnieniem i inercją pierwszego rzędu
 k – współczynnik wzmocnienia, T – zastępca stała czasowa,

$$T_0 \text{ -- czas opóźnienia}$$

Równanie różniczkowe obiektu

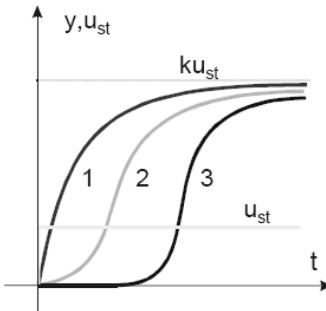
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t - T_0). \quad (7.6)$$

Transmitancja obiektu zastępczego



Rysunek 7.7. Schemat blokowy statycznego układu automatycznej regulacji

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k}{Ts + I} \cdot e^{-T_0 s}. \quad (7.7)$$

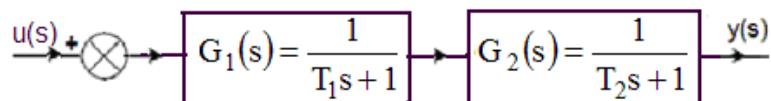


Rysunek 7.8. Charakterystyki skokowe obiektów statycznych

k – współczynnik wzmocnienia, T_i – stałe czasowe ($i=1,2,3$),
 T_0 – czas opóźnienia, $G_i(s)$ – transmitancje operatorowe

$$1 - \text{element inercyjny pierwszego rzędu} \rightarrow G(s) = \frac{k}{Ts + I}, \quad (7.8)$$

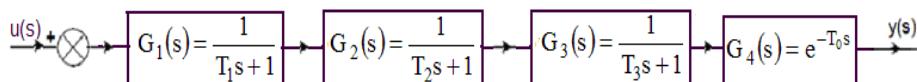
2 - element inercyjny wyższego rzędu



Rysunek 7.9. Schemat blokowy statycznego układu automatycznej regulacji złożonego z dwóch inercyjnych pierwszego rzędu

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k}{(T_1 s + I)(T_2 s + I)}. \quad (7.9)$$

3 - element inercyjny wyższego rzędu z opóźnieniem

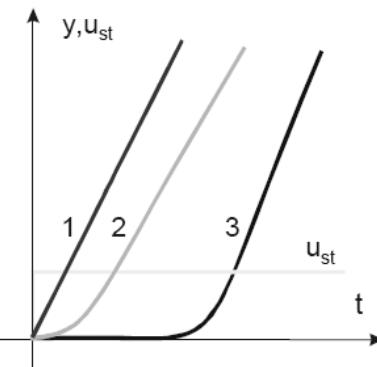


Rysunek 7.10. Schemat blokowy astatycznego układu automatycznej regulacji złożonego z trzech inercyjnych pierwszego rzędu i opóźniającego

Rozdział 7

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \cdot e^{-T_0 s} \quad (7.10)$$

7.5. Charakterystyki skokowe obiektów astatycznych



Rysunek 7.11. Charakterystyki skokowe obiektów astatycznych

k – współczynnik wzmacniania, T – stałe czasowe, T_0 – czas opóźnienia, $G_i(s)$ – transmitancje operatorowe

$$\text{1 - element całkujący, } \rightarrow G(s) = \frac{k}{s}, \quad (7.11)$$

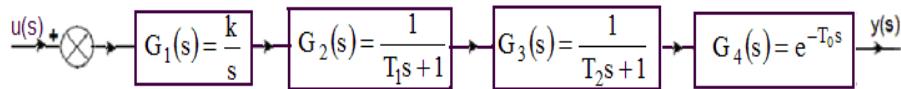
2 – element całkujący z inercją pierwszego rzędu,



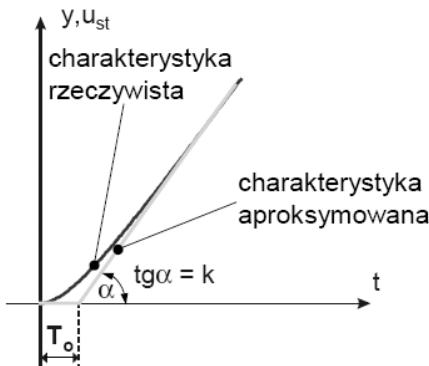
Rysunek 7.12. Schemat blokowy astaticznego układu automatycznej regulacji złożony z elementu całkującego i inercyjnego pierwszego rzędu

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} \quad (7.12)$$

3 – element całkujący z inercją wyższego rzędu i opóźnieniem.

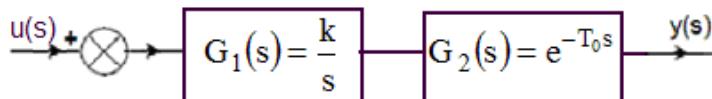


Rysunek 7.13. Schemat blokowy astatycznego układu automatycznej regulacji złożonego z elementu całkującego, dwóch inercyjnych pierwotego rzędu i opóźniającego



Rysunek 7.14. Aproksymacja charakterystyki skokowej obiektu astatycznego

k – współczynnik wzmocnienia, T_0 – czas opóźnienia



Rysunek 7.15. Schemat blokowy astatycznego układu automatycznej regulacji złożonego z elementu całkującego i opóźniającego

Równanie różniczkowe obiektu

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t - T_0), \quad (7.13)$$

Transmitancja obiektu zastępczego

$$G(s) = \frac{k}{s} \cdot e^{-T_0 s}. \quad (7.14)$$

7.6. Kryteria oceny jakości liniowych układów automatyki

Stan ustalony układu

Na ocenę jakości regulacji układu automatyki ma wpływ kształt przebiegu procesu przejściowego, czas osiągania stanu ustalonego po zniku działania zakłóceń, odchylenia przebiegu amplitud. Tak, więc ocena jakości regulacji sprowadza się do analizy stanu przejściowego (dokładność dynamiczna) i ustalonego (dokładność statyczna). Podstawowym wymogiem stawianym układowi automatycznej regulacji jest, aby uchyb regulacji $e(t)$ (zdefiniowany wzorem (7.1), rysunek 7.4) był jak najmniejszy. Dokładność statyczna określa zdolność układu do utrzymywania wartości regulowanej jak najbliżej wartości zadanej po zakończeniu stanu przejściowego, a więc w stanie ustalonym. Dokładność dynamiczna oznacza zdolność układu do dokładnego i szybkiego śledzenia zmiany wartości zadanej $w(t)$.

Dokładność statyczną określa się na podstawie odchyłki statycznej $e_{st}(t)$ będącej sumą odchyłki oddziaływanego zakłócenia $z(t)$ (uchyb zakłóceń) $e_z(t)$ i odchyłki wywołanej zmianą wartości zadanej $w(t)$ na wejściu układu (uchyb nadążania) $e_w(t)$. Zatem

$$e(t) = e_z(t) + e_w(t), \quad (7.15)$$

$$e_{st} = e_{z, st} + e_{w, st}. \quad (7.16)$$

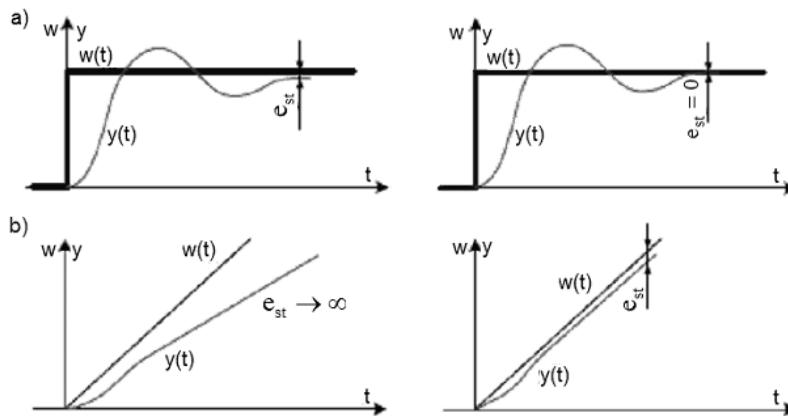
Na podstawie twierdzenia o wartości końcowej można napisać

$$e_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s). \quad (7.17)$$

Regulator PID ma duży wpływ na dokładność statyczną, gdy współczynnik wzmacnienia regulatora rośnie to uchyb statyczny maleje (ale jest problem ze stabilnością - maleje). Gdy jest całkowanie, to dla każdej

skończonej i ustalonej wartości wymuszenia, odchyłka statyczna jest likwidowana.

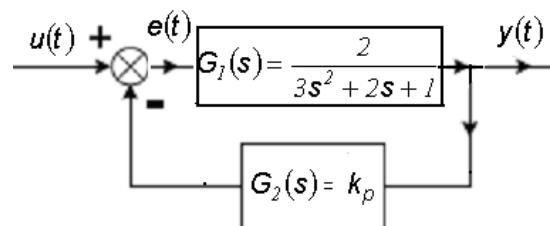
Przykłady odpowiedzi układu automatyki na wymuszenie skokowe pokazuje rysunek 7.16.



Rysunek 7.16. Przykłady odpowiedzi układów automatyki na wymuszenie skokowe oraz liniowo narastające: a) statycznego z regulatorem P, b) astatycznego z regulatorem PI

Przykład 7.1

Określić odchyłkę statyczną sygnału wyjściowego y_{st} układu URA przedstawionego na rysunku 7.17. Obiektem jest człon oscylacyjny, zaś w torze pomocniczym sprzężenia zwrotnego jest regulator P.



Rysunek 7.17. Schemat układu z elementem oscylacyjnym i regulatorem proporcjonalnym

Rozdział 7

Transmitancja układu zamkniętego jest

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{3s^2 + 2s + 1 + k_p},$$

Zakładamy, że sygnałem wejściowym (sterującym) jest sygnał jednostkowy tzn.

$$u(t) = 1(t) \rightarrow u(s) = \frac{1}{s},$$

zatem odpowiedź

$$y(s) = \frac{2}{3s^2 + 2s + 1 + k_p} \cdot \frac{1}{s},$$

Z twierdzenia o wartości końcowej wynika

$$y_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s),$$

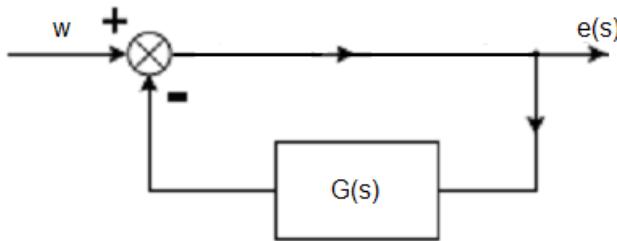
stąd

$$y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{3s^2 + 2s + 1 + k_p} = \frac{2}{1 + 2k_p}.$$

Z otrzymanego wyniku nasuwa się wniosek, że wzmocnienie regulatora P powoduje zmniejszenie uchybu statycznego. Czasami tak nie jest ponieważ przy dość dużym wzmocnieniu dla określonych parametrach układu można pogorszyć jego stabilność. Poprawę można uzyskać poprzez zastosowanie regulatora PID.

Przykład 7.2

Wyznaczyć odchyłkę statyczną (uchybę $e_{st}(t)$) układu którego schemat blokowy (strukturalny) przedstawia rysunek 7.18 przy założeniu zerowych warunków początkowych dla danych: $w = 2t^2 + 5t + 10$, $G(s) = \frac{50(0.15s + 1)}{(0.02s + 1)s^2}$.



Rysunek 7.18. Schemat strukturalny badanego układu automatyki

Rozwiążanie

Transmitancja zastępcza badanego układu automatyki jest

$$G_z(s) = \frac{e(s)}{w(s)} = \frac{0.02s^3 + s^2}{0.02s^3 + s^2 + 7.5s + 50}, \quad \rightarrow e(s) = G_z(s)w(s) = \frac{w(s)}{1 + G(s)},$$

Dokonujemy rozkładu transmitancji $G_z(s)$ w szereg potęgowy, a więc

$$G_z(s) = \frac{0.02s^3 + s^2}{0.02s^3 + s^2 + 7.5s + 50} = C_0 + C_1s + \frac{1}{2}C_2s^2 + \frac{1}{6}C_3s^3 + \dots$$

stąd

$$e_{st}(s) = \left(C_0 + C_1s + \frac{1}{2}C_2s^2 + \frac{1}{6}C_3s^3 + \dots \right) w(s),$$

Po poddaniu powyższego równania odwrotnemu przekształceniu Laplace'a otrzymamy wzór na odpowiedź w stanie ustalonym, a więc

$$e_{st}(t) = C_0 w(t) + C_1 \frac{dw(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \frac{1}{6} C_3 \frac{d^3 w(t)}{dt^3} + \dots$$

gdzie

$$C_0 = G(s)_{\downarrow s=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{dG(s)}{ds}_{\downarrow s=0} = \\ &= \frac{(0.06s^2 + 2s)(0.02s^3 + s^2 + 7.5s + 50) - (0.06s^2 + 2s + 7.5)(0.02s^3 + s^2)}{(0.02s^3 + s^2 + 7.5s + 50)^2} = 0 \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ 7

$$C_2 = \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{dC_1}{ds} \Big|_{s=0} = 0.04,$$

$$C_3 = \frac{d^3 G(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} = \frac{dC_2}{ds} \Big|_{s=0},$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = 4t + 5,$$

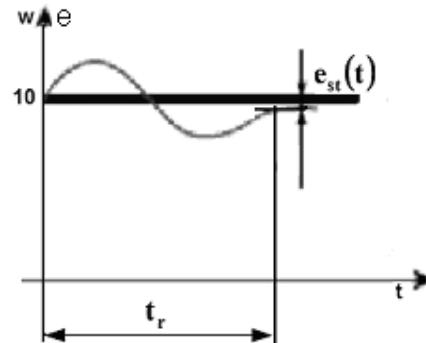
$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = 4, \quad \frac{d^3 w(t)}{dt^3} = 0.$$

Po podstawieniu poszczególnych składników do powyższego równania otrzymamy

$$e_{st}(t) = 0.08.$$

Zadanie można również rozwiązać inną metodą przy wykorzystaniu przekształcenia Laplace'a, a więc

$$e(t) = G_z(s)w(s), \quad \rightarrow e(t) = L^{-1}[e(s)] = L^{-1}[G_z(s)w(s)].$$

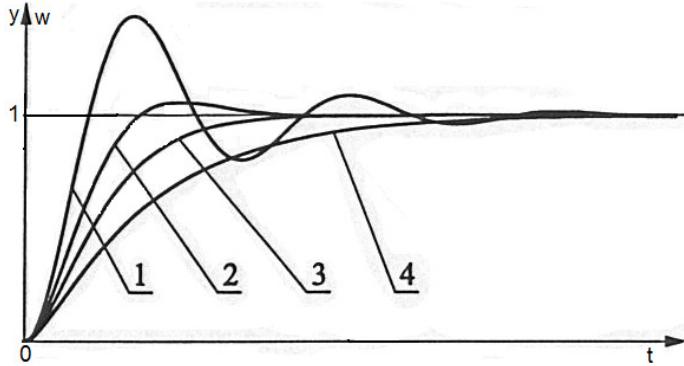


Rysunek 7.19. Wykres zmiany odchyłki statycznej

Stan nieustalony (dynamiczny) układu

Jeżeli układ automatyki jest stabilny, to wiadomo, że przebiegi przejściowe zanikają dając do ustalonego poziomu wartości. Nie znamy natomiast wielu informacji, istotnych do zastosowań praktycznych, jak czasu wygaszania procesów przejściowych (czas regulacji t_r), pasma

częstotliwości, w którym przebiega odtwarzanie sygnałów wymuszających z zadaną dokładnością, wartości maksymalnych odchyleń amplitud, rodzaju przebiegów (rysunek 7.20) itp.



Rysunek 7.20. Charakterystyki czasowe układu dla skokowego sygnału sterującego

1 – charakterystyka oscylacyjna o dużym przeregulowaniu κ i długim czasie regulacji t_r , dla małej wartości współczynnika tłumienia ξ ($0 < \xi < 0.4$) (element oscylacyjny),

2 – charakterystyka oscylacyjna o małym przeregulowaniu κ i krótkim czasie regulacji t_r , dla większej niż poprzednio wartości współczynnika tłumienia ξ ($0.4 < \xi < 0.8$) (element oscylacyjny),

3 – charakterystyka inercyjna o krótkim czasie regulacji t_r ,

4 – charakterystyka inercyjna o długim czasie regulacji t_r .

Układ o charakterystyce 2 lub 3 posiada właściwy zapas stabilności i praktycznie do celów automatycznej regulacji nadaje się najlepiej. Układem najgorszym, mającym mały zapas stabilności (małe tłumienie) jest układ 1. Układ o charakterystyce 4 również się nie nadaje, gdyż ma za duży zapas stabilności. Należy dodać, że zapas stabilności jest niezbędny również na możliwość zmian parametrów układu.

Kryteria oceny jakości liniowych układów regulacji

1. ocena parametrów odpowiedzi skokowej,
2. wskaźniki częstotliwościowe,

ROZDZIAŁ 7

3. całkowe kryteria jakości regulacji.

Ad1) Ocena parametrów odpowiedzi skokowej

Jakość regulacji układu w stanie nieustalonym określa się na podstawie następujących parametrów (Rysunek 7.21):

- a. czasu narastania (czasu wzrostu) t_n ,
- b. czasu szczytowego t_{sz} ,
- c. maksymalnego przeregulowania y_1 ,
- d. czasu regulacji t_r ,
- e. przeregulowanie κ .

Ad a) Czas wzrostu t_n dla układów o małym tłumieniu (o odpowiedzi oscylacyjnej) wykorzystywany jest od 0 do 100 % swojej wartości końcowej. Dla układów o dużym tłumieniu (o odpowiedzi aperiodycznej) od 10 % do 90 %.

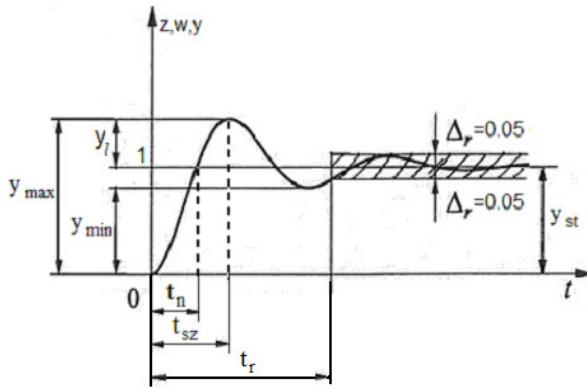
Ad b) Czas maksymalnego przeregulowania t_{sz} jest czasem osiągnięcia pierwszego szczytu przeregulowania.

Ad c) Maksymalne przeregulowanie y_1 mierzony jest w procentach i jest maksymalną wartością odpowiedzi y_{max} , mierzoną od wartości ustalonej y_{st} . Definicja jest następująca

$$y_1 = \frac{y_{\max}(t_{sz}) - y_{st}}{y_{st}} \cdot 100 \%, \quad (7.18)$$

Wartość maksymalnego przeregulowania jest miarą zapasu stabilności układu. Jeżeli układ ma $y_1=100\%$ to jest na granicy stabilności.

Ad d) Czas regulacji t_r jest to czas potrzebny, aby krzywa odpowiedzi osiągnęła wartość ustaloną. Wartość tego czasu przyjmuje się najczęściej 5%.

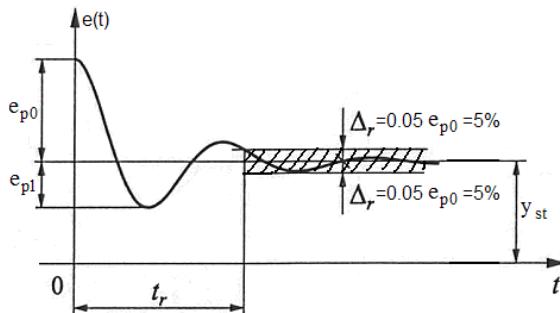


Rysunek 7.21. Przebieg wielkości regulowanej jako odpowiedzi na skokową zmianę wielkości zadanej

Ad e) Przeregulowanie κ jest to stosunek maksymalnego uchybu wartości początkowej e_{p1} do e_{p0} (rysunek 7.22), wyrażony w procentach. A więc

$$\kappa = \frac{e_{p1}}{e_{p0}} \cdot 100 \%. \quad (7.19)$$

Wskaźnik przeregulowania świadczy także jak wskaźnik maksymalnego przeregulowania o stabilności układu. Im wartość przeregulowania jest większa tym mniejszy jest zapas modułu, a więc pogarszana jest stabilność automatyki.



Rysunek 7.22. Określenie przeregulowania układu automatyki

Ad 2) wskaźniki częstotliwościowe

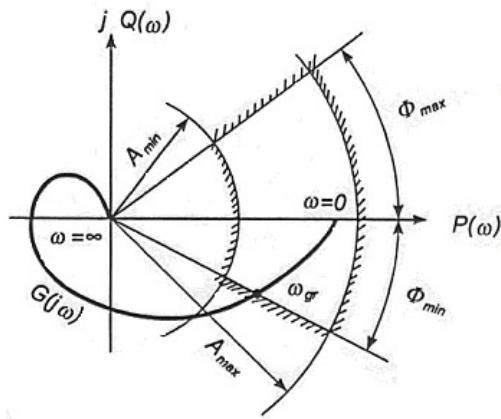
Podstawowymi parametrami określonymi na podstawie charakterystyk częstotliwościowych badanego układu regulacji automatycznej są zapas modułu i fazy (zapas stabilności). Duże znaczenie ma kształt przebiegu charakterystyki części rzeczywistej $P(\omega)$.

Podstawowymi wskaźnikami częstotliwościowymi są:

- pasmo przenoszenia,
- wskaźnik regulacji (wskaźnik skuteczności regulacji).

Ad a) Pasmem przenoszenia nazywamy taki zakres częstości roboczych ($0 < \omega < \omega_{gr}$), w którym stosunek amplitud wyjścia do wejścia oraz przesunięcie fazowe między wyjściem a wejściem są utrzymane w żądanych granicach z dokładnością $\pm 3dB$ (rysunek 7.23).

Znając charakterystykę częstotliwościową układu zamkniętego lub charakterystyki logarytmiczne możemy wyznaczyć pasmo przenoszenia. Na rysunku 7.23 jest przedstawione wyznaczanie pasma przenoszenia. W praktyce częstość graniczna ω_{gr} nie powinna być większa od częstości własnej układu. Im większa jest wartość częstości własnej układu, tym szersze jest pasmo przenoszenia, większa jest szybkość odpowiedzi układu.



Rysunek 7.23. Określenie pasma przenoszenia dla

$$|\phi| < |\phi_{max}| \text{ i } A_{min} < A < A_{max}.$$

Ad b) Wskaźnik regulacji definiujemy w następujący sposób

$$q(j\omega) = \frac{e(j\omega)_{z_{reg}}}{e(j\omega)_{bez_{reg}}} \quad (7.20)$$

gdzie e jest uchybem regulacji

Jeżeli mamy znane wartości wskaźnika regulacji dla kilku częstotliwości, wówczas możemy wyznaczyć obszar, w którym powinna leżeć charakterystyka amplitudowa układu otwartego, aby układ spełniał postawione wymagania.

Ad 3) całkowe kryteria jakości regulacji

Miarą jakości regulacji jest także wielkość pola (pole regulacji) pod krzywą uchybu regulacji a asymptotą, do której dąży ta krzywa (rysunek 7.24). Dąży się do minimalizacji pola. Im pole to jest mniejsze, tym lepszy jest wskaźnik jakości. Pole regulacji znajdujące się powyżej osi czasu (Rysunek 7.24 a), b)) oblicza się z całek

$$I_a = \int_0^{\infty} e(t) dt, \quad I_b = \int_0^{\infty} [e_{st} - e(t)] dt, \quad (7.21)$$

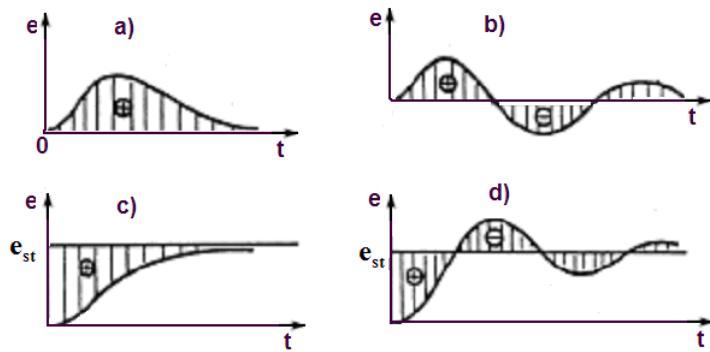
W celu uniknięcia sumowania pól dodatnich i ujemnych przy przebiegach przejściowych, wymuszonych poprzez skok jednostkowy korzystamy z całek pól regulacji podniesionych do kwadratu.

$$I_c = \int_0^{\infty} e^2(t) dt, \quad I_d = \int_0^{\infty} [e_{st} - e(t)]^2 dt. \quad (7.22)$$

Kryteria całkowe są łatwiejsze do obliczania niż różne wskaźniki podane powyżej. Gdy trzeba uwzględnić długość trwania odchylenia, czas jego występowania, oprócz wartości odchylenia, wprowadzono kryterium w postaci całki

$$I_3 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt. \quad (7.23)$$

ROZDZIAŁ 7



Rysunek 7.24. Graficzna interpretacja całkowych kryteriów jakości regulacji: a) układ astatyczny (przebieg aperiodyczny), b) układ astatyczny (przebieg oscylacyjny), c) układ statyczny (przebieg aperiodyczny), d) układ statyczny (przebieg oscylacyjny)

Przykład 7.3

Wyznaczyć odpowiedź na zakłócenie liniowo narastające $x(t) = t$ oraz stan ustalony sygnału wyjściowego dla elementu automatyki o transmitancji $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

Rozwiązażanie

Z transmitancji wyznaczamy odpowiedź układu tj.

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)}, \quad \rightarrow y(s) = G(s)x(s), \quad x(t) = t, \quad \rightarrow x(s) = \frac{1}{s}.$$

Korzystając z odwrotnego przekształcenia Laplace'a otrzymamy

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] = L^{-1}[G(s)x(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+2)(s+1)}\right].$$

Ponieważ z tablic Laplace'a nie można odczytać funkcji przedstawiającej rozwiązanie, dlatego też należy dokonać rozkładu wyrażenia na ułamki proste, czyli

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+2)(s+1)s^2} &= \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2} = \\ &= \frac{s^3(A+B+C) + s^2(A+2B+3C+D) + s(2C+3D) + 2D}{(s+2)(s+1)s^2}, \end{aligned}$$

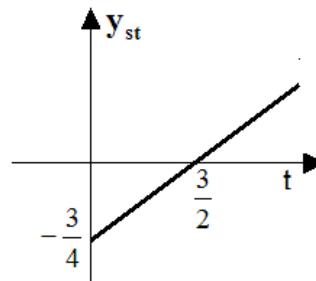
Z powyższego równania otrzymamy następujący układ równań algebraicznych z których wyznaczamy współczynniki A, B, C, D, zatem

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 0, \\ A + 2B + 3C + D = 0, \\ 2C + 3D = 0, \\ 2D = 1. \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ B = 1, \\ C = -\frac{3}{4}, \\ D = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+2)(s+1)}\right] &= L^{-1}\left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2}\right] \rightarrow \\ &\rightarrow y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}, \end{aligned}$$

W stanie ustalonym po zaniku procesów przejściowych sygnał wyjściowy zmienia się według wzoru

$$y_{st} = y(t)_{\downarrow t \rightarrow \infty} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t.$$



Rysunek 7.25. Wykres zmiany sygnału wyjściowego w stanie ustalonym

Powyższy przykład można szybciej rozwiązać poprzez rozkład transmitemacji $G(s)$ w szereg potęgowy, zatem

ROZDZIAŁ 7

$$G(s) = C_0 + \frac{C_1}{1!} s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \frac{C_3}{3!} s^3 + \dots$$

A więc

$$y(s) = \left(C_0 + C_1 s + \frac{1}{2} C_2 s^2 + \frac{1}{6} C_3 s^3 + \dots \right) x(s).$$

Poddając powyższe równanie odwrotnemu przekształceniu Laplace'a otrzymamy odpowiedź w stanie ustalonym, a więc

$$y_{ust}(t) = C_0 x(t) + C_1 \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{1}{6} C_3 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + \dots$$

$$C_0 = G(s)_{\downarrow s=0} = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{dG(s)}{ds}_{\downarrow s=0} = \frac{-2s-3}{(s^2+3s+2)^2} = -\frac{3}{4},$$

$$C_2 = \frac{d^2 G(s)}{ds^2}_{\downarrow s=0} = \frac{dC_1}{ds}_{\downarrow s=0} \neq 0 \quad ale \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 1.$$

Ostatecznie otrzymamy

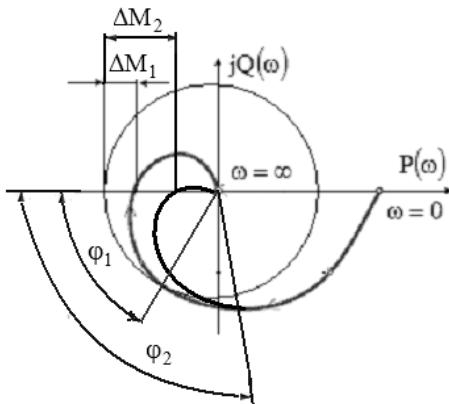
$$y_{ust}(t) = \frac{1}{2} t - \frac{3}{4}.$$

Uzyskany wynik jest identyczny jak otrzymany z powyżej zastosowanej metody rozwiązań

Korekcja układów automatyki

Wprowadzenie

Korekcję układu automatyki nazywamy zmianę charakterystyki układu otwartego tak, aby miała korzystniejszy przebieg. Korekcja polega więc na zmianie kształtu charakterystyki tak, aby zapas stabilności był w żądanych granicach (rysunek 7.26). Występuje wówczas zmiana fazy, stąd metoda zmiany korekcji poprzez przyspieszenie fazy.



Rysunek 7.26. Skorygowana charakterystyka amplitudowo-fazowa układu regulacji

$$\Delta M_1 < \Delta M_2, \quad \varphi_1 < \varphi_2.$$

$\Delta M_1, \varphi_1$ – przed korekcją, $\Delta M_2, \varphi_2$ – po korekciach układu

Element korekcyjny najczęściej jest opisany transmitancją

$$G_k(s) = \frac{1 + Ts}{as^2 + bs + 1}, \quad (7.24)$$

Współczynniki a i b powinny być tak dobrane, aby wyrazy $as^2 + bs \ll 1$, przy częstotliwości rezonansowej układu.

Korzystną deformację charakterystyki możemy otrzymać stosując metody pośrednie między dwoma skrajnymi przypadkami:

1. wykres $G(j\omega)$ stabilizować w obszarze dużych częstotliwości przez odpowiednią deformację poprzez zwiększenie fazy (korekcja przez przyspieszenie fazy, lub różniczkowanie).
Korekcja przez przyspieszenie fazy jest ograniczona tym, że operacja różniczkowania powoduje wzmacnianie szkodliwych drgań przypadkowych.
2. wykres $G(j\omega)$ stabilizować przez zwiększenie wzmacnienia bez zmiany fazy w obszarze małych częstotliwości (wprowadzenie całkowania).

Rozdział 7

Ze względu na sposób realizacji można wyróżnić następujące typy korekcji:

- przez działanie różniczkujące (przyspieszenie fazy),
- przez działanie całkujące,
- przez zastosowanie regulatorów P, PD, PI, PID,
- przez zastosowanie techniki analogowo-cyfrowej.

Korekcja układu powinna zapewniać:

- poprawę własności statycznych,
- poprawę własności dynamicznych,
- poprawę zapasu stabilności poprzez wzrost wartości zapasu modułu i fazy.

Cele te mogą być osiągnięte różnymi drogami:

1. przez zmianę wartości parametrów bloków wchodzących w skład układu regulacji (parametry elementów korekcyjnych nie są nastawiane),
2. przez wprowadzenie do układu nowych bloków, zwanych elementami (członami) korekcyjnymi lub regulatorami (parametry mogą być nastawiane) i umieszczenie ich w odpowiednim miejscu układu regulacji.

Przez poprawę własności statycznych rozumiemy zmniejszenie wartości uchybu ustalonego przy wymuszeniu odpowiedniego typu. Zmniejszenie uchybu osiąga się przez wprowadzenie członu korekcyjnego. Często wystarcza człon proporcjonalny P (wzmacniacz o $k>1$),łączony szeregowo w tor główny układu.

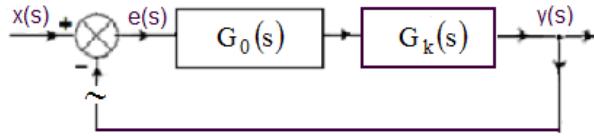
Poprawa własności dynamicznych polega na zapewnieniu żądanego kształtu przebiegu przejściowego reprezentowanego przez takie parametry jak: (a) przeregulowanie κ , (b) czas regulacji t_r , i inne, wcześniej omówione.

Przy doborze korekcji najdokładniejsza jest droga analityczna, ale też najbardziej uciążliwa. Dlatego w praktyce najczęściej korzysta się ze związków przebiegu przejściowego z charakterystykami częstotliwościowymi.

ściowymi. Stosowane są również metody modelowania analogowego i cyfrowego.

Ze względu na sposóbłączenia elementu korekcyjnego w układ regulacji automatycznej, korekcję można określić jako

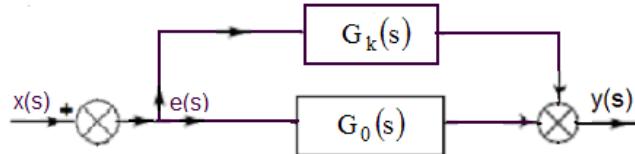
a) szeregową (rysunek 7.27)



Rysunek 7.27. Schemat blokowy układu z elementem korekcyjnym włączonym szeregowo

$$G(s) = G_o(s)G_k(s), \quad (7.25)$$

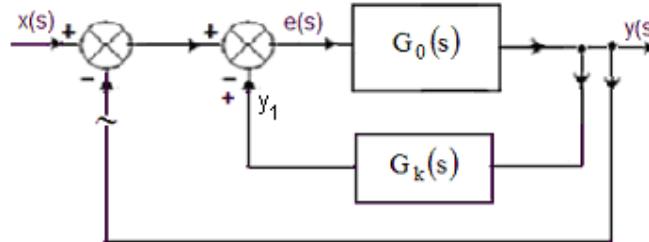
b) równoległą (rysunek 7.28)



Rysunek 7.28. Schemat blokowy układu z elementem korekcyjnym włączonym równolegle

$$G(s) = G_o(s) + G_k(s), \quad (7.26)$$

c) ze sprzężeniem zwrotnym (włączenie anty-równoległe) (rysunek 7.29)



Rysunek 7.29. Schemat blokowy układu z elementem korekcyjnym w sprzężeniu zwrotnym (włączenie anty-równoległe)

Rozdział 7

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_k(s)}. \quad (7.27)$$

Układy korekcji w sprzężeniu zwrotnym nazywa się także układami z pomocniczą wielkością regulowaną o sygnale y_1 .

Podstawowym warunkiem do spełnienia korekcji jest zwykle odpowiedni zapas stabilności (zapas ΔM i $\Delta\varphi$).

Wyróżnia się trzy rodzaje korekcji szeregowej:

- a. wprowadzenie jednakowego tłumienia dla wszystkich wartości częstotliwości poprzez zmianę wzmacnienia,
- b. wprowadzenie przy dużych częstotliwościach tłumienia za pomocą elementu korekcyjnego opóźniającego fazę (element całkujący),
- c. zmniejszenie opóźnienia fazowego za pomocą elementu korekcyjnego przyspieszającego fazę (element różniczkujący – ma zawsze dodatnią fazę).

Korekcja przez całkowanie

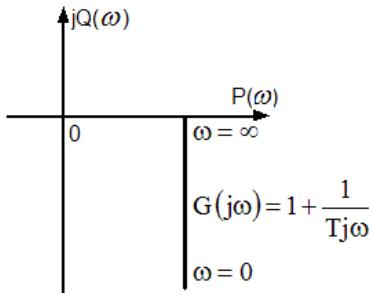
Jeśli mamy układ regulacji, którego wzmacnienie statyczne jest za małe, możemy zwiększyć to wzmacnienie wprowadzając całkowanie do transmitancji układu otwartego w postaci elementu o wzmacnieniu dążącym do ∞ przy $\omega = 0$. Transmitancja takiego elementu jest

$$\begin{aligned} G_k(s) &= I + \frac{1}{Ts}, \quad P(\omega) = I, \quad Q(\omega) = -\frac{1}{T\omega}, \\ \varphi &= -\arctan \frac{1}{T\omega}. \rightarrow \text{faza ujemna} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Aby zmniejszyć uchyb statyczny wprowadza się element korekcyjny

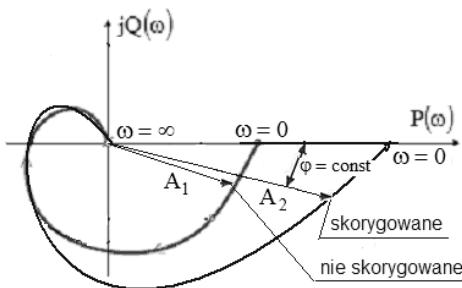
$$G_k(s) = I + \frac{k}{Ts}. \quad (7.29)$$

o module dążącym do 1 przy dużych częstotliwościach i module dążącym do k przy małych częstotliwościach.



Rysunek 7.30. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu całkującego

Dla $\varphi = \text{const}$, $A_{1 \text{ nie skoryg.}} < A_{2 \text{ skoryg.}}$



Rysunek 7.31. Charakterystyka amplitudowo-fazowa regulacji przed i po korekcji (wprowadzenie elementu całkującego)

Jeżeli zależy nam na zmianie amplitudy w obszarze małych częstotliwości, redukcji odchyłki statycznej, utrzymanie w odpowiednich granicach zapasu stabilności paśmie przenoszenia, to stosujemy regulator PI. Oczekiwania te mogą być spełnione poprzez duże wzmacnienie amplitudy przy małych częstotliwościach, ale kosztem zmniejszenia fazy

poniżej tzw. częstotliwości sprzęgającej $\omega_s = \frac{l}{T}$ (częstość niższa od rezonansowej). Poza tym w obszarze niskich częstotliwości, nie ma nadmiernego ujemnego przesunięcia fazowego. Dla tak skorygowanych układów zapas fazy jest za mały. Wtedy prowadzi się aproksymację regulatorów PI.

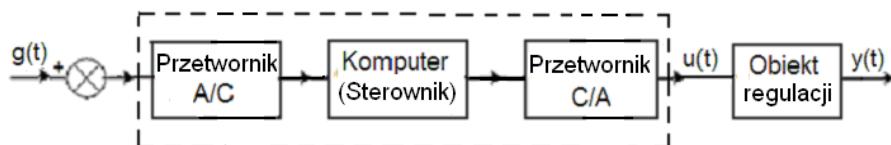
Jeżeli chcemy utrzymać dużą wartość zapasu stabilności w zakresie częstotliwości rezonansowych to stosujemy do korekcji regulatory PD lub PI. Fizyczne działanie korekcyjnego elementu różniczkującego można wyjaśnić jako przeciwdziałanie wzbudzaniu się układu regulacji przez

ROZDZIAŁ 7

tłumienie uchybu skorygowanego tym elementem. Zatem w obszarze niskich częstotliwości powinna przeważać korekcja przez PI, zaś w obszarze wysokich częstotliwości, korekcja przez PD. Poprzez odpowiednie połączenie tych kombinacji regulatorów, można otrzymać korekcję typu PID. Jeżeli chcemy zwiększyć kąt przesunięcia fazowego (max. 90^0) między odpowiedzią a wymuszeniem to do korekcji stosujemy regulator rzeczywisty PD. Przesunięcie fazowe dla tego typu regulatora występuje w ograniczonym zakresie i dla wąskiego zakresu częstotliwości powyżej $0.1\omega_s$.

Korekcja analogowo-cyfrowa

Na rysunku 7.32 jest przedstawiony typowy schemat układu automatycznej regulacji, w którym jako urządzenie sterujące zastosowano komputer. Specyfika analizy sterowania komputerowego polega na tym, że proces sterowania jest rozpatrywany jako dyskretny w czasie.



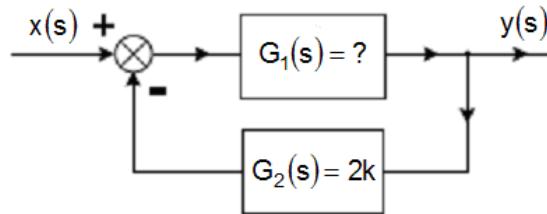
Rysunek 7.32. Schemat cyfrowego układu korekcji

Aby przejść na postać cyfrową sygnału, z którą mamy do czynienia w regulatorze cyfrowym lub sterowniku, należy przekształcić sygnał z postaci analogowej na cyfrową i odwrotnie. Regulatorzy analogowe generują ciągły w czasie sygnał wyjściowy w odpowiedzi na ciągły sygnał wejściowy. Regulatorzy cyfrowe zaś tylko przetwarzają sygnał w chwilach próbkowania, wytwarzając ciąg czasowy sygnałów wyjściowych. Jeżeli pierwotny sygnał jest analogowy, to konieczne staje się przekształcenie analogowo-cyfrowe (wejście regulatora cyfrowego musi być skwantowane). Tak więc w analogowych układach sterowania, sygnały wejściowe muszą być próbkowane i kwantowane przez przetwornik A/C dla ich wprowadzenia do regulatora cyfrowego. Dobór nastaw dla typowego regulatora analogowego, a następnie określenie parametrów odpowiadającego mu algorytmu cyfrowej regulacji można dokonać przez zastosowanie zmodyfikowanej reguły Zieglera-Nicholsa.

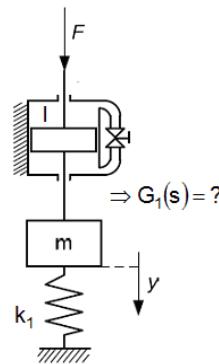
Przykład 7.4

Dla układu automatyki (rysunek 7.33 i 7.34) przy danych $l = 10 \text{ Ns/m}$, $k_l = 10 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $k = 5$ wyznaczyć zapas modułu oraz

polepszyć stabilność układu poprzez wmontowanie w tor pomocniczy członu korekcyjnego o transmitancji $G_k(s) = \frac{1}{s+1}$, ($k = 1, T = 1 \text{ sek}$)



Rysunek 7.33. Układ automatyki ze sprzężeniem zwrotnym



Rysunek 7.34. Układ mechaniczny złożony z tłumika, masy i sprężyny

Równanie równowagi sił dla badanego układu mechanicznego jest następujące

$$m\ddot{y}(t) + l\dot{y}(t) + k_1 y(t) = F(t),$$

Korzystając z rachunku operatorowego (przekształceń Laplace'a) przy zerowych warunkach początkowych powyższe równanie przyjmuje postać

$$ms^2 y(s) + ls y(s) + k_1 y(s) = F(s),$$

Stąd transmitancja operatorowa jest

$$G(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + ls + k_1} = \frac{k}{T_1 s^2 + T_2 s + 1},$$

ROZDZIAŁ 7

$$T_1^2 = \frac{m}{k_1}, \quad T_2 = \frac{l}{k_1}, \quad k = \frac{1}{k_1}.$$

Zastępcza transmitancja operatorowa $G_z(s)$ badanego układu automatyki z otwartym sprzężeniem zwrotnym jest

$$G_z(s) = G(s) \cdot 2k = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

Część rzeczywista $P(\omega)$ i urojona $Q(\omega)$ transmitancji widmowej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} G_z(j\omega) &= \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{[(1 - \omega^2) - j\omega]}{[(1 - \omega^2) + j\omega][(1 - \omega^2) - j\omega]} = \\ &= \frac{(1 - \omega^2) - j\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

zatem

$$P(\omega) = \frac{(1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}, \quad Q(\omega) = -\frac{\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}.$$

Zapas modułu wyznaczamy ze wzoru

$$\Delta M = 1 - |P(\omega_{-\pi})|.$$

Wyznaczamy częstotliwość przyrównując $Q(\omega)$ do zera. Stąd dla tak wyznaczonej wartości częstotliwości wyliczamy $|P(\omega_{-\pi})|$, czyli

$$Q(\omega) = -\frac{\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} = 0 \Rightarrow \omega = 0,$$

$$P(\omega = 0) = 1, \text{ zatem } \Delta M = 1 - |P(\omega_{-\pi})| = 0.$$

Ponieważ $\Delta M = 0$, więc badany układ może być niestabilny. Należy więc zbadać, czy wprowadzenie członu korekcyjnego przyczyni się do poprawy stabilności, zatem po wprowadzeniu członu korekcyjnego do

toru pomocniczego (obok członu proporcjonalnego) transmitancja otwartego układu automatyki jest następująca

$$G_{ok}(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Transmitancja widmowa jest

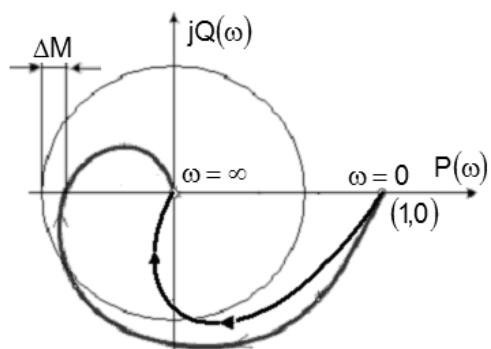
$$\begin{aligned} G_{ok}(j\omega) &= \frac{1}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 1} = \\ &= \frac{[(1-2\omega^2)-j\omega(2-\omega^2)]}{[(1-2\omega^2)+j\omega(2-\omega^2)][(1-2\omega^2)-j\omega(2-\omega^2)]} = \\ &= \frac{[(1-2\omega^2)-j\omega(2-\omega^2)]}{[(1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2]}, \end{aligned}$$

Zatem część rzeczywista $P(\omega)$ i urojona $Q(\omega)$ transmitancji widmowej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{(1-2\omega^2)}{[(1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2]}, \\ \text{stąd } Q(\omega) &= -\frac{\omega(2-\omega^2)}{[(1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2]}, \\ Q(\omega) = 0 &\Rightarrow -\omega(2-\omega^2) = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{2} \text{ } 1/s, \\ P(\omega = \sqrt{2}) &= -\frac{1}{3}, \\ \Delta M &= 1 - |P(\omega_{-r})| = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu członu korekcyjnego uzyskaliśmy duży zapas modułu, a więc układ automatyki jest stabilny

ROZDZIAŁ 7



Rysunek 7.36. Charakterystyka amplitudowo-fazowa

8

**Opis liniowych
układów regulacji
w przestrzeni stanów**

8.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym zostanie przedstawiony materiał do analizy automatycznych układów sterowania przez wykorzystanie przestrzeni stanów. Nowoczesne układy sterowania są bardziej skomplikowane, mogą mieć większą liczbę sygnałów wejściowych i wyjściowych, także mogą się zmieniać w czasie (podejście w dziedzinie czasu). Matematyczny opis takich układów metodami klasycznymi (podejście w złożonej dziedzinie częstotliwości) jest niewystarczający, a nawet w wielu przypadkach niemożliwy. Zatem nowe podejście do analizy i projektowania złożonych układów sterowania opiera się na pojęciu równań stanu i wyjścia.

Zaletą metod przestrzeni stanu jest to, że równania opisujące układy regulacji nie muszą być równaniami liniowymi lub stacjonarnymi. Wielowymiarowe sygnały wejścia i wyjścia mogą być liniowe i nieliniowe, niezmienne lub zmienne w czasie. Klasyczna teoria nadaje się tylko do układów liniowych, stałych w czasie, z jednym wejściem i wyjściem. Jak widać na początku należy zdefiniować stan, zmienne stanu, wektor stanu oraz przestrzeń stanów np. dla układu dynamicznego. Zauważmy więc że pojęcie stanu nie odnosi się tylko do układów fizycznych. Może być także stosowane do układów ekonomicznych, społecznych, biologicznych i innych.

Stan układu jest najmniejszym zbiorem zmiennych, nazywanych zmiennymi stanu, takich, że znajomość w chwili $t = t_0$, wraz ze znajomością sygnału wejściowego dla $t \geq t_0$, w pełni określa zachowanie układu w każdej chwili $t \geq t_0$. Stan układu jest określany jako zbiór niezależnych współrzędnych stanu opisujących układ i jego pochodne.

Zmiennymi stanu układu dynamicznego są zmienne tworzące najmniejszy zbiór zmiennych, które określają stan tego układu. Zmienne te nie muszą być wielkościami fizycznie mierzalnymi ani obserwowalnymi. W praktyce o ile to jest możliwe wygodnie jest wybrać na zmienne stanu wielkości łatwo mierzalne.

Do pełnego opisu zachowania się układu potrzebnych jest n składowych zmiennych stanu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, które mogą być przyjęte jako n składowych wektora stanu x . To te n zmiennych tworzy zbiór zmiennych stanu.

Wektorem stanu nazywamy więc n składowych zmiennych stanu wektora x . Tak, więc wektor stanu jednoznacznie określa stan $x(t)$ układu w każdej chwili czasu $t \geq t_0$, gdy tylko jest znany stan w chwili $t = t_0$ i określony jest sygnał wejściowy (sterujący) $u(t)$ dla $t \geq t_0$.

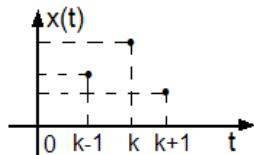
Przestrzenią stanów nazywa się n wymiarową przestrzeń, której układ współrzędnych składa się z osi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Każdy dowolny stan może być przedstawiony przez punkt w przestrzeni stanów.

8.2. Klasyfikacja modeli matematycznych opisujących układy dynamiczne stacjonarne ciągłe (DLSC)

Model matematyczny obiektu sterowania dla układu dynamicznego powinien wyrażać swoje cechy poprzez zależności matematyczne.

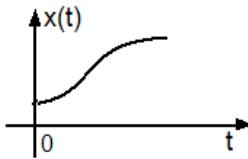
Modele które reprezentują właściwości dynamiczne:

- a. dynamiczne dyskretne (rysunek 8.1) (impulsowe) – wartości zmiennych modelu zmieniają się jedynie w danych dyskretnych chwilach czasu
- b. dynamiczne ciągłe (rysunek 8.2) – czas zmienia się w sposób ciągły, zaś wartości zmiennych modelu określone są w każdej dowolnej chwili t ,



Rysunek 8.1. Model dynamiczny dyskretny

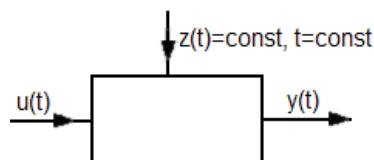
ROZDZIAŁ 8



Rysunek 8.2. Model dynamiczny ciągły

Modele dynamiczne akumulują energię. Modele dynamiczne ciągłe opisywane są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, zaś dyskretne równaniami różnicowymi.

- c. statyczne – zaniedbuje się akumulację energii, zakładając stan ustalony gdy oddziaływanie zewnętrzne nie ulegają zmianom,



Rysunek 8.3. Model statyczny

Dalsza klasyfikacja (podział) podany jest w rozdziale 1.

8.3. Przestrzeń zmiennych stanu, wybór zmiennych stanu

Stan układu jest zwykle określany jako minimalna ilość informacji wymaganych do całkowitego określenia zachowania się układu przy danym sterowaniu. Składowe wektora są rzutami wektora stanu na osie współrzędnych. Każdy układ można opisać na wiele sposobów, a mianowicie jako zmienne zależne można wybrać dla układu: elektrycznego – prąd, napięcie, ładunek; dla mechanicznego – przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, obrót, siłę reakcji, moment; dla hydromechanicznego lub pneumatycznego – przepływy, ciśnienie.

||| Szczególnym i ważnym przypadkiem wyboru zmiennych stanu jest taki wybór, przy którym zmienne są pochodnymi poprzednich ($\dot{x}_{n-I}(t) = x_n(t)$).

Mówimy wówczas, że zmienne stanu są zmiennymi fazowymi, a przestrzeń stanu przestrzenią fazową. Przestrzeń fazową tworzy zbiór wszystkich możliwych wartości wektora stanu $x(t)$ w chwilach t .

Aby wybrane zmienne można było nazwać zmiennymi stanu to równania ułożone przy ich użyciu muszą spełniać warunki:

- dawać pełny i jednoznaczny opis dynamiki układu,
- stanowić układ równań różniczkowych.

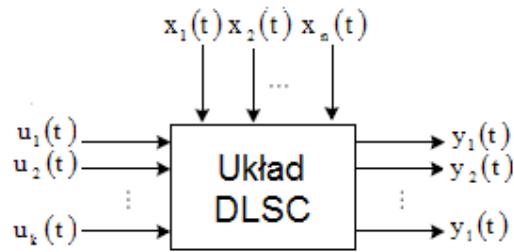
Najbardziej ogólną metodą matematycznego opisu złożonych układów automatyki, mających wiele wejść i wyjść są metody opisu w przestrzeni. Stan układu określany jako zbiór niezależnych współrzędnych położenia i ich pochodnych, związany jest z energią zmagazynowaną w jego elementach w danej chwili.

Podstawą analizy układów DLSC są równania stanu i równanie wyjścia. Równania te mogą być zapisane w postaci ogólnej lub macierzowo-wektorowej.

8.4. Opis układów DLSC we współrzędnych stanu (równania stanu i wyjścia, zapisane postaci ogólnej i macierzowo-wektorowej)

Układy o wielu wejściach i wyjściach (MIMO – multi input, multi output) oraz całe systemy układów opisujemy jak już wspomniano, używając współrzędnych stanu.

ROZDZIAŁ 8



Rysunek 8.4. Schemat układu MIMO, DLSC

x_i ($i \rightarrow$ od 1 do n) - składowe wektora stanu, u_i ($i \rightarrow$ od 1 do k) - składowe wektora wejść (sterowań), y_i ($i \rightarrow$ od 1 do l) - składowe wektora wyjść, k - ilość sygnałów wejściowych, l - ilość sygnałów wyjściowych. Mogą być trzy warianty sygnałów: 1) $k = 1$, 2) $k < 1$, 3) $k > 1$.

Grupę sygnałów wejściowych $u(t)$ (sygnałów sterowań) zdefiniujemy jako wektor sygnałów wejściowych, którego współrzędne są poszczególnymi sygnałami wejściowymi układu.

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ u_k(t) \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

Grupę sygnałów wyjściowych $y(t)$ zdefiniujemy jako wektor sygnałów wyjściowych, którego współrzędne są poszczególnymi sygnałami wyjściowymi układu.

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ y_l(t) \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

Grupę składowych wektora stanu $x(t)$ zdefiniujemy jako wektor stanu.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

Z wektora sygnałów wejściowych można wyodrębnić wektor sygnałów sterujących $u(t)$ i wektor sygnałów zakłócających $z(t)$. Wyznaczenie przebiegu położenia $y(t)$ elementu dla czasu $t > t_0$ wymaga:

- znajomości położenia $y(t_0)$ i prędkości $\dot{y}(t_0)$ - współrzędne te określają stan układu w chwili t_0 i można je rozumieć jako zachowanie się układu w czasie $t < t_0$,
- znajomości przebiegu wielkości wejściowych np. sił dla $t > t_0$.

W celu osiągnięcia jednoznaczności rozwiązania należy podać również wektor $x(t_0)$ uwzględniający warunki początkowe. Każdej parze funkcji wektorowych $u(t)$, $y(t)$ przyporządkowany jest wektor stanu $x(t)$. Składowe tego wektora są współrzędnymi (zmiennymi) stanu. Liczba tych współrzędnych jest zawsze równa rzędowi układu, tzn. rzędowi równania różniczkowego opisującego związek wyjścia z wejściem. Nie należy jednak utożsamiać liczby współrzędnych stanu z liczbą wielkości wejściowych, choć czasami może tu zachodzić równość. Układ może też mieć jedną wielkość wyjściową, a być opisany równaniem czwartego rzędu i wówczas wektor stanu będzie zawierał cztery współrzędne stanu (układ MISO – multi input, single output).

Równanie stanu można zapisać w postaci ogólnej tj.

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \quad (8.4)$$

i z n warunkami początkowymi

$$x(t_0) = x_0, \quad (8.5)$$

ROZDZIAŁ 8

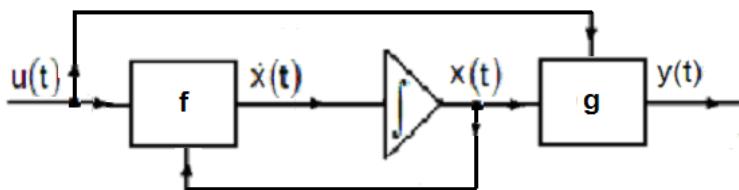
gdzie: f – jednoznaczna funkcja stanu, jako k elementowa funkcja wektorowa, $x(t)$ – n wymiarowy wektor stanu w chwili t, $u(t)$ – k wymiarowy wektor sterowania, t – chwila bieżąca, $t \geq t_0$.

Ponieważ żadna ze współrzędnych stanu może nie być wielkością wyjściową układu, to do określenia tej wielkości niezbędny jest dodatkowy związek

$$y(t) = g[x(t), u(t), t], \quad (8.6)$$

gdzie: g – jest l elementową jednoznaczną wektorową funkcją wyjścia.

Równanie (8.6) zwane jest równaniem wyjścia. Równanie wyjścia nie jest równaniem różniczkowym, gdyż całość dynamiki układu opisana jest równaniem stanu. Może ono natomiast zależeć od czasu t. Równania stanu i wyjścia nie zawierają pochodnych wielkości wejściowej. Równanie stanu (8.4) i wyjścia (8.6) można przedstawić na schemacie blokowym (strukturalnym) (rysunek 8.5).



Rysunek 8.5. Schemat blokowy równania stanu i wyjścia

Równanie stanu (8.4) można zapisać szczegółowo w postaci

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, x_1(t_0)) = x_{10}, \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, x_n(t_0)) = x_{n0}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Równanie stanu (8.4) można zapisać szczegółowo w postaci

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, t), \\ y_l(t) &= g_l(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, t). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Jeżeli równania (8.7) i (8.8) są nieliniowe, to mogą być zlinearyzowane w otoczeniu wybranego punktu pracy. Wówczas przyjmuję następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} x_3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} x_n + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} u_3 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_k} u_k + \frac{\partial f_1}{\partial t} t, \\ \frac{\partial x_n(t)}{\partial t} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f_n}{\partial x_3} x_3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} x_n + \frac{\partial f_n}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial f_n}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial f_n}{\partial u_3} u_3 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial u_k} u_k + \frac{\partial f_n}{\partial t} t. \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial g_1}{\partial x_3} x_3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} x_n + \frac{\partial g_1}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial g_1}{\partial u_3} u_3 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial u_k} u_k + \frac{\partial g_1}{\partial t} t, \\ y_l(t) &= \frac{\partial g_l}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial g_l}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial g_l}{\partial x_3} x_3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial g_l}{\partial x_n} x_n + \frac{\partial g_l}{\partial u_1} u_1 + \frac{\partial g_l}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial g_l}{\partial u_3} u_3 + \dots + \frac{\partial g_l}{\partial u_k} u_k + \frac{\partial g_l}{\partial t} t. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Zlinearyzowane równania stanów (8.9) i wyjścia (8.10) zapisuje się zwykle skrótnie w postaci wektorowo-macierzowej tj.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (8.11)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (8.12)$$

gdzie: $A(t)$ – macierz układu stopnia $n \times n$ (macierz stanu), $B(t)$ – macierz wejść stopnia $n \times k$ (macierz sterowań), $C(t)$ - macierz wyjścia stopnia $l \times n$, $D(t)$ – macierz transmisyjna układu stopnia $l \times k$.

Poszczególne elementy macierzy A , B , C , D są pochodnymi częstotliwościowymi występującymi w równaniach (8.11) i (8.12).

Dla układu DLSC (niezmiennego w czasie, gdy funkcje f i g nie wprowadzają jawnie czasu t) są stałymi liczbami, zależnymi od struktury i parametrów opisywanego układu. Odpowiada to układowi liniowym

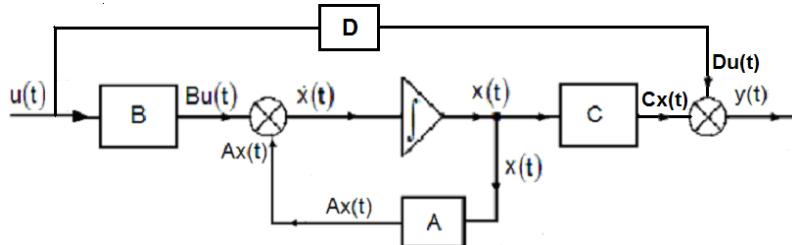
ROZDZIAŁ 8

równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Wówczas równania (8.11) i (8.12) można zapisać w postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (8.13)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (8.14)$$

Równania stanu (8.13) i wyjścia (8.14) w zapisie macierzowo-wektorowym przedstawia rysunek 8.6.

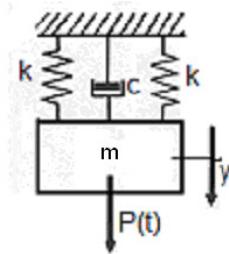


Rysunek 8.6. Schemat strukturalny równań stanu i wyjścia w zapisie macierzowo-wektorowym

W niniejszym skrypcie będziemy zajmować się tylko układami opisanymi równaniami (8.13) i (8.14).

Przykład 8.1

Na układ mechaniczny przedstawiony na rysunku 8.7 złożony ze sprężyn, każda o sztywności $k = 2 \text{ N/mm}$, tłumika o współczynniku tłumienia $c = 3 \text{ Ns/mm}$ działa siła zewnętrzna $P(t) = 5u(t) \text{ N}$, która jest przyłożona do masy $m = 2 \text{ kg}$ powodując jej przemieszczenie y . Ułożyć równania stanu i wyjścia w postaci ogólnej i macierzowo-wektorowej oraz narysować odpowiadające im schematy strukturalne



Rysunek 8.7. Badany układ mechaniczny

Rozwiążanie

Sygnałem wejściowym jest przyłożona siła $P(t)$, wyjściowym przemieszczenie $y(t)$



Równanie ruchu układu jest następujące

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + 2ky(t) = P(t),$$

Po podstawieniu danych otrzymamy

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4ky(t) = 5u(t) \rightarrow \ddot{y}(t) = -\frac{3}{2}\dot{y}(t) - 2y(t) + \frac{5}{2}u(t),$$

Przyjmujemy współrzędne wektora stanu: $x_1(t), x_2(t)$ (mamy dwie współrzędne ponieważ równanie różniczkowe jest drugiego rzędu)

Niech

$$x_1(t) = y(t) - \text{przemieszczenie masy } m$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) - \text{prędkość masy } m$$

Z pochodnych powyższych współrzędnych wektora stanu otrzymujemy ogólnione równania stanu, zatem

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\frac{3}{2}\dot{y}(t) - 2y(t) + \frac{5}{2}u(t) = -2x_1(t) - \frac{3}{2}x_2(t) + \frac{5}{2}u(t) = \\ &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + b_0u(t), \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad b_0 = \frac{5}{2}.$$

Równania stanu $\dot{x}(t)$ i wyjścia $y(t)$ zapisane w postaci macierzowej-wektorowej

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

ROZDZIAŁ 8

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

gdzie macierze A, B, C, D, $\dot{x}(t)$, $x(t)$, $u(t)$ są następujące

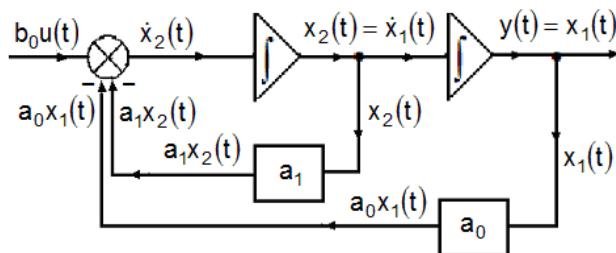
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

$$C = [I \quad \theta], \quad D = \theta,$$

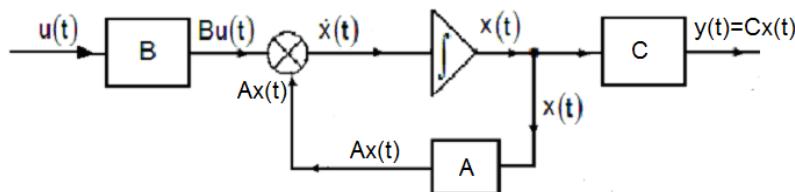
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}.$$

Schematy strukturalne otrzymane z równań stanu i wyjścia w zapisie ogólnym i macierzowo-wektorowym przedstawiają rysunki 8.8 i 8.9.



Rysunek 8.8. Schemat strukturalny w zapisie ogólnym



Rysunek 8.10. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej (URA)

Wykorzystamy przekształcenia Laplace'a oraz twierdzenie o splocie

Dla układu przedstawionego na rysunku można napisać równania

$$x_I^*(s) = x_I(s) - x_4(s)$$

$$\left. \begin{array}{l} G_1(s) = \frac{x_I(s)}{u(s)} \rightarrow x_I(s) = G_1(s)u(s) = \frac{1}{s+4}u(s), \\ G_2(s) = \frac{x_2(s)}{x_I^*(s)} \rightarrow x_2(s) = G_2(s)x_I^*(s) = \frac{1}{s+3}[x_I(s) - x_4(s)], \\ G_3(s) = \frac{x_3(s)}{x_2(s)} \rightarrow x_3(s) = G_3(s)x_2(s) = \frac{1}{s+2}x_2(s), \\ G_4(s) = \frac{x_4(s)}{x_2(s)} \rightarrow x_4(s) = G_4(s)x_2(s) = \frac{1}{s}x_2(s). \end{array} \right\},$$

Dokonując odwrotnego przekształcenia Laplace'a powyższego układu równań otrzymamy ogólną postać równań stanu $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $\dot{x}_3(t)$, $\dot{x}_4(t)$ i wyjścia $y(t)$, zatem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad F(s) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(s)].$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -4x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 3x_2(t) - x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) - 2x_3(t), \\ \dot{x}_4(t) &= x_2(t), \\ y(t) &= x_3(t). \end{aligned}$$

Z ogólnej postaci równań stanu otrzymujemy równanie stanu w postaci macierzowo-wektorowej, a więc

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix},$$

ROZDZIAŁ 8

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1-3 & 0-1 & & \\ 0 & 1-2 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1], \quad D = 0.$$

Stosując twierdzenie o splocie można również wyprowadzić równania stanu w postaci ogólnej, zatem

$$x_1(s) = \frac{1}{s+4} \cdot u(s) \rightarrow x_1(t) = e^{-4t} \bullet u(t) = \int_0^t e^{-4(t-\tau)} u(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t e^{-4(t-\tau)} u(\tau) d\tau \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau} u(\tau) d\tau \right) = \\ &= -4e^{-4t} \cdot \int_0^t e^{4\tau} u(\tau) d\tau + e^{-4t} \cdot e^{4t} u(t) = \\ &= -4 \int_0^t e^{-4(t-\tau)} u(\tau) d\tau + u(t) = -4x_1(t) + u(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(s) &= \frac{1}{s+3} \cdot x_1^*(s) = \frac{1}{s+3} \cdot [x_1(s) - x_4(s)] \rightarrow x_2(t) = \\ &= e^{-3t} \bullet [x_1(t) - x_4(t)] = \\ &= \int_0^t e^{-3(t-\tau)} [x_1(\tau) - x_4(\tau)] d\tau, \end{aligned}$$

$$x_3(s) = \frac{1}{s+2} \cdot x_2(s) \rightarrow x_3(t) = e^{-2t} \bullet x_2(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau) d\tau \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} x_2(\tau) d\tau \right) = \\
 &= -2e^{-2t} \cdot \int_0^t e^{2\tau} x_2(\tau) d\tau + e^{-2t} \cdot e^{2t} x_2(t) = \\
 &= -2 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau) d\tau + x_2(t) = x_2(t) - 2x_3(t), \\
 x_4(s) &= \frac{1}{s} \cdot x_2(s) \rightarrow x_4(t) = x_2(t) \bullet 1 = \int_0^t e^{\theta} x_2(\tau) d\tau, \\
 \dot{x}_4(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t x_2(\tau) d\tau \right) = x_2(t).
 \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymaliśmy identyczne ogólne równania stanu. W wielu przypadkach druga metoda jest znacznie skuteczniejsza i mniej uciążliwa w zastosowaniu.

8.5. Wyznaczenie transmitancji operatorowej układu DLSC opisanego równaniem stanu i równaniem wyjścia

Dla zerowych warunków początkowych i układu dynamicznego opisanego równaniami stanu (8.13) i wyjścia (8.14), można napisać macierz transmitancji dokonując przekształcenia Laplace'a tych równań, a więc

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad (8.15)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s), \quad (8.16)$$

gdzie $x(s)$, $u(s)$, $y(s)$ są transformatami Laplace'a wektorów x , u i y .

ROZDZIAŁ 8

Z równania (8.15) otrzymamy

$$x(s)[sI - A] = Bu(s) \rightarrow x(s) = Bu(s)[sI - A]^{-1}, \quad (8.17)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, $[sI - A]^{-1}$ jest macierzą odwrotną

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad [sI - A]^{-1} = \frac{[sI - A]^p}{|sI - A|}, \quad (8.18)$$

$[sI - A]^p$ - jest macierzą algebraicznymi dopełnień, $|sI - A|$ - wyznacznik macierzy charakterystycznej.

Podstawiając równanie (8.17) do równania (8.16) otrzymamy

$$y(s) = CBu(s)[sI - A]^{-1} + Du(s) = u(s)\{CB[sI - A]^{-1} + D\}, \quad (8.19)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D. \quad (8.20)$$

Z powyższego wzoru można wyznaczyć transmitancję operatorową, gdy dane są macierze A, B, C, D. Mogą być pewne trudności obliczeniowe przy wyznaczaniu macierzy odwrotnej i iloczynu macierzy, ale w pakiecie Matlab są programy do wykonywania tych operacji matematycznych.

8.6. Wyznaczenie równania stanu i równania wyjścia dla układów opisanych równaniem różniczkowym zwyczajnym wyższego rzędu

Niech układ DLSC będzie opisany następującym równaniem różniczkowym zwyczajnym wyższego rzędu

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t), \quad (8.21)$$

Aby przedstawić opis układu we współrzędnych stanu, należy określić wektor stanu rozważanego układu. Ponieważ do jednoznacznego opisu zależności $y(t) = f[x(t)]$ potrzeba n warunków początkowych $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \dots, y^{n-1}(0)$, możemy przyjąć następujące współrzędne wektora stanu

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \dot{y}(t), \\ x_3(t) = \ddot{y}(t), \\ \dots \\ x_n(t) = y^{n-1}(t). \end{array} \right\}, \quad (8.22)$$

Wyznaczamy pochodne układu równań (8.22) i wprowadzamy do równania (8.21) otrzymując układ n równań różniczkowych pierwszego rzędu, które są równaniami stanu tj.

Rozdział 8

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= y^n(t) = \\ &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t) - \dots - a_{n-1}x_n(t) + b_0u(t) = \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}(t) + b_0 u(t). \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Na podstawie równań stanu (8.23) w zapisie ogólnym można napisać równanie stanu w postaci macierzowo-wektorowej (8.13) tj.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

macierz stanu A i macierz sterowania B są

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ -a_0 - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} & & & & & \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (8.24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (8.25)$$

Równanie wyjścia (8.14) jest w postaci

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = x_1(t). \quad (8.26)$$

$$C = [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{l \times n}, \quad D = [0]_{l \times k} = 0. \quad (8.27)$$

Przykład 8.3

Mając dane macierze układu dynamicznego wyznaczyć jego transmitancję $G(s)$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Zależność pomiędzy sygnałem wyjściowym a wejściowym w zapisie macierzowo-wektorowym jest następująca

$$\begin{aligned} y(s) &= C[sI - A]^{-1} Bu(s) + Du(s) \rightarrow \\ &\rightarrow G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C[sI - A]^{-1} B + D \end{aligned}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix},$$

$$adj[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix},$$

$$\det[sI - A] = s^2 + 4s + 3 = (s+3)(s+1),$$

$$\begin{aligned} [sI - A]^{-1} &= \frac{adj[sI - A]}{\det[sI - A]} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 4s + 3} & -\frac{3}{s^2 + 4s + 3} \\ \frac{1}{s^2 + 4s + 3} & \frac{s+4}{s^2 + 4s + 3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= [3 \ 5] \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 4s + 3} & -\frac{3}{s^2 + 4s + 3} \\ \frac{1}{s^2 + 4s + 3} & \frac{s+4}{s^2 + 4s + 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= [3 \ 5] \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 4s + 3} \\ \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \end{bmatrix} = \frac{3s+5}{s^2 + 4s + 3}
 \end{aligned}$$

8.7. Metoda bezpośrednia, równoległa i iteracyjna opisu układu DLSC we współrzędnych stanu

Jeżeli znamy transmitancję układu dynamicznego to można ją przedstawić w postaci równania stanu i równania wyjścia stosując metody

- a. bezpośrednią,
- b. równoległą.
- c. iteracyjną.

Metoda bezpośrednią (kanoniczna forma sterowania) polega na n krotnym całkowaniu równania opisującego układ, czyli podzieleniu licznika i mianownika przez s^n .

Transmitancja operatorowa dana jest w postaci

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{y(s)}{u(s)}, \quad (8.28)$$

$n > m$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \\
 &= \frac{b_m s^{m-n} + b_{m-1} s^{m-1-n} + b_{m-2} s^{m-2-n} + \dots + b_1 s^{1-n} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + a_{n-2} s^{-2} + \dots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}} = \quad (8.29) \\
 &= \frac{y(s)}{u(s)}.
 \end{aligned}$$

gdzie n, m jest rzędem równania różniczkowego zwyczajnego.

Jeśli założymy, że zmiennymi stanu są współrzędne fazowe $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ tzn. takie zmienne, które spełniają równania

$$\left. \begin{array}{l}
 \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\
 \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\
 \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\
 \dots \\
 \dot{x}_n(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) = \\
 = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}(t) + u(t).
 \end{array} \right\}. \quad (8.30)$$

Równanie wyjścia przyjmuje postać

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1}(t). \quad (8.31)$$

gdzie macierz stanu (macierz fundamentalna) A i macierz sterowania B są

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ -a_0 - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} & & & & & \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (8.32)$$

Rozdział 8

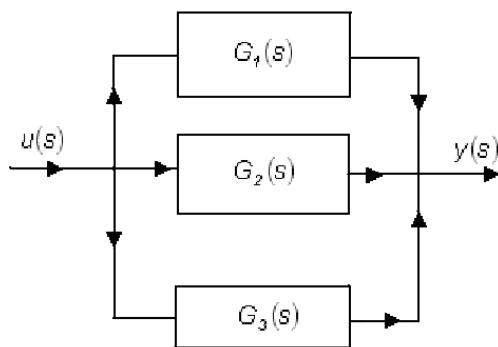
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (8.33)$$

Równanie wyjścia (8.14) przyjmuje postać

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = Cx(t), \quad (8.34)$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \ b_m]_{l \times n}, \quad D = [0]_{l \times k} = 0. \quad (8.35)$$

Metoda równoległa (kanoniczna forma modalna) polega na przedstawieniu transmitancji operatorowej w postaci sumy ułamków prostych, zatem



Rysunek 8.11. Schemat strukturalny połączenia równoległego układu automatyki

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \sum_{i=1}^n G_i(s), \quad (8.36)$$

$$G_i(s) = \frac{k_i}{s - s_i}, \quad (8.37)$$

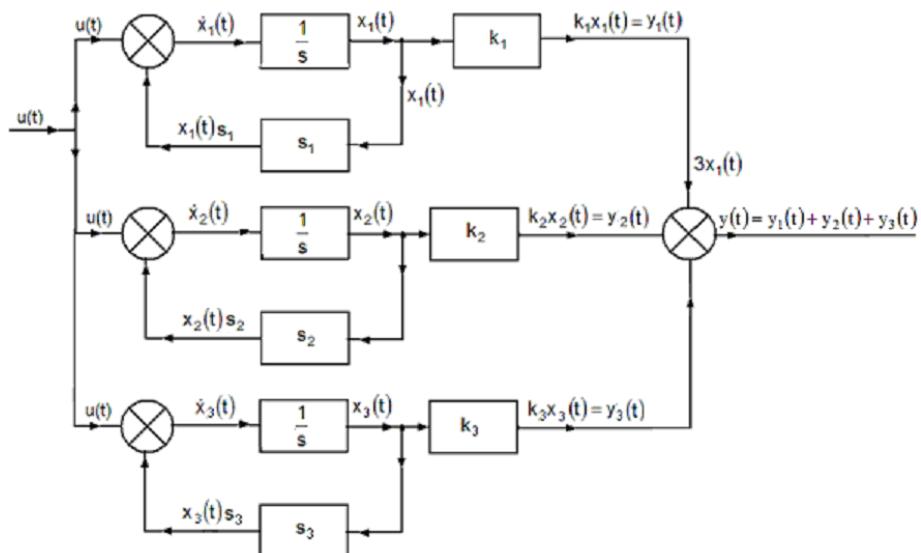
gdzie: k_i – stałe współczynniki, s_i – i-ty pierwiastek równania charakterystycznego

Jeżeli transmitancja da się rozłożyć na ułamki proste to dla układu równorękiego równania stanu $x_i(t)$ przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)s_1 + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)s_2 + u(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_3(t)s_3 + u(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= x_n(t)s_n + u(t). \end{aligned} \right\}, \quad (8.38)$$

Równanie wyjścia ma postać

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) = \sum_{i=1}^n k_i x_i(t). \quad (8.39)$$



Rysunek 8.12. Schemat strukturalny (blokowy) badanego układu automatyki równań stanu i wyjścia w zapisie ogólnym dla metody równoległej

Macierze A, B, C, D przyjmują postać

Rozdział 8

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (8.40)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (8.41)$$

$$C = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n]_{l \times n}, \quad D = [0] = 0. \quad (8.42)$$

Metoda iteracyjna polega na przedstawieniu transmitancji operatorowej w postaci iloczynu. Jeżeli $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ są biegunami transmitancji (pierwiastki mianownika – sygnały wejściowe), a $s_1^0, s_2^0, s_3^0, \dots, s_n^0$ są zerami transmitancji (pierwiastki licznika – sygnały wyjściowe) to transmitancję operatorową możemy zapisać w postaci

$$G(s) = b_m \cdot \frac{s - s_1^0}{s - s_1} \cdot \frac{s - s_2^0}{s - s_2} \cdot \frac{s - s_3^0}{s - s_3} \cdot \dots \cdot \frac{s - s_{m-1}^0}{s - s_{m-1}} \cdot \frac{I}{s - s_n}. \quad (8.43)$$

Równania stanu można zapisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)s_1 + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)(s_1 - s_1^0) + x_2(t)s_2 + u(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)(s_1 - s_1^0) + x_2(t)(s_2 - s_2^0) + x_3(t)s_3 + u(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_m(t) &= x_1(t)(s_1 - s_1^0) + x_2(t)(s_2 - s_2^0) + x_3(t)(s_3 - s_3^0) + \dots \\ &\dots + x_{m-1}(t)(s_{m-1} - s_{m-1}^0) + x_m(t)s_m + u(t), \\ \dot{x}_n(t) &= x_{n-1}(t) + x_n(t)s_n + u(t). \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

Równanie wyjścia

$$y(t) = b_m x_n(t). \quad (8.45)$$

Macierze A, B, C, D przyjmują postać

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 - s_1^0 & s_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 - s_1^0 & s_2 - s_2^0 & s_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{m-1} - s_{m-1}^0 & s_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_n \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (8.46)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (8.47)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \dots \ b_m]_{1 \times n}, \quad D = [0] = 0. \quad (8.48)$$

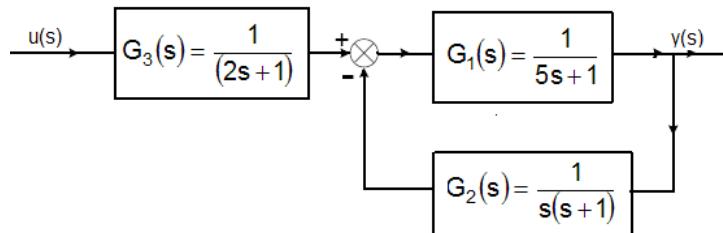
Schemat funkcjonalny jest w budowie analogiczny do schematu dla metody równoległej (rysunek 8.12)

Przykład 8.4

Metoda bezpośrednia

Dla układu przedstawionego na rysunku 8.13 wyznaczyć równania stanu i wyjścia

Rozdział 8



Rysunek 8.13. Schemat blokowy badanego układu

Rozwiążanie

Transmitancja zastępcza rozważanego układu jest następująca

$$G_z(s) = \frac{G_1(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{1}{5s+1} \cdot \frac{1}{2s+1}}{1 + \frac{1}{5s+1} \cdot \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{s^2 + s}{10s^3 + 17s^2 + 10s + 2},$$

Aby można było zastosować metodę bezpośrednią, należy podzielić licznik i mianownik przez współczynnik przy najwyższej potędze wyrazu mianownika z s^n

Zatem

$$G_z(s) = \frac{0.1s^2 + 0.1s}{s^3 + 1.7s^2 + 1.0s + 0.2},$$

Współczynniki wyrazów licznika i mianownika są następujące

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0.1, \quad b_2 = 0.1, \quad a_0 = 0.2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1.7,$$

Ogólne równania stanu wyznaczamy ze wzoru

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t),$$

Tak, więc

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + u(t).$$

Równanie wyjścia wyznaczamy ze wzoru

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1}(t),$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t) = 0.1x_2(t) + 0.1x_3(t),$$

Stąd możemy wyznaczyć macierze stanu i wyjścia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -1 & -1.7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ b_2] = [0 \ 0.1 \ 0.1], \quad D = [0] = 0.$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Przykład 8.5

Metoda równoległa

Stosując metodę równoległą, dla układu o transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{2s+1}{2s^2+6s+4}$ wyznaczyć równania stanu i wyjścia oraz narysować schemat strukturalny (blokowy).

Rozwiążanie

Transmitancja operatorowa układu automatyki przy wykorzystaniu metody równoległej jest

$$G(s) = \sum G_i(s), \quad G_i(s) = \frac{k_i}{s - s_i},$$

Pierwiastki mianownika są następujące

$$2s^2 + 6s + 4, \quad \rightarrow s_1 = -2, \quad s_2 = -1.$$

Rozdział 8

Zatem

$$G(s) = \frac{2s+1}{2s^2+6s+4} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+B(s+2)}{(s+2)(s+1)},$$

$$\begin{aligned} A(s+1)+B(s+2) &= 2s+1 \rightarrow \\ \rightarrow (A+B)s+A+2B &= 2s+1 \rightarrow \begin{cases} A+B=2, \\ A+2B=1. \end{cases} \rightarrow A=3, \quad B=-1. \end{aligned}$$

$$G_i(s) = \frac{2s+1}{2s^2+6s+4} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+1} = \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+1}.$$

Równanie wyjścia jest następujące

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^n k_i x_i(t) = 3x_1(t) - x_2(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad D = 0, \quad C = [k_1 \ k_2] = [3 \ -1]. \end{aligned}$$

Ogólny zapis równań stanu jest

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)s_1 + u(t) = -2x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)s_2 + u(t) = -x_2(t) + u(t). \end{aligned}$$

Równania stanu w zapisie macierzowo-wektorowym są

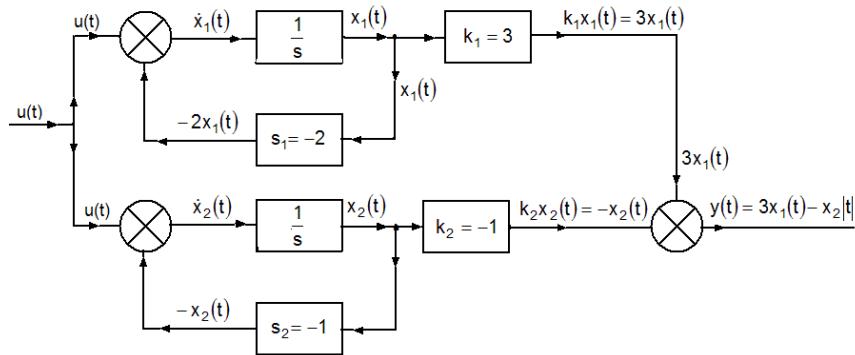
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix},$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 8.14. Schemat blokowy badanego układu równań stanu i wyjścia w zapisie ogólnym dla metody równoległej

Przykład 8.6

Metoda iteracyjna

Stosując metodę iteracyjną dla układu o transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{k(s+a)}{(s+b)(s+c)^2}$ sformułować równania stanu ukłdu URA.

Rozwiążanie

Pierwiastki sześciennego równania mianownika są

$$G(s) = \frac{k(s+a)}{(s+b)(s+c)^2} = \frac{ks+ka}{s^3 + s^2(b+2c) + s(c^2 + 2bc) + bc^2},$$

$$s^3 + s^2(b+2c) + s(c^2 + 2bc) + bc^2, \rightarrow$$

$$\rightarrow s_1 = -b, \quad s_2 = -c, \quad s_3 = -c.$$

Dla metody iteracyjnej zakładając, że zera transmitancji s_i^0 ($s_1^0 = s_2^0 = s_3^0 = 0$) są równe zero, mamy

ROZDZIAŁ 8

$$G(s) = b_m \cdot \frac{s}{s - s_1} \cdot \frac{s}{s - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_3} = k \cdot \frac{s}{s + b} \cdot \frac{s}{s + c} \cdot \frac{1}{s + c},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)(s_1 - s_1^0) + u(t) = -bx_1(t) + u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)(s_1 - s_1^0) + x_2(t)(s_2 - s_2^0) + u(t) = -bx_1(t) - cx_2(t) + u(t),$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= x_1(t)(s_1 - s_1^0) + x_2(t)(s_2 - s_2^0) + x_3(t)(s_3 - s_3^0) + u(t) = \\ &= -bx_1(t) - cx_2(t) - cx_3(t) + u(t).\end{aligned}$$

$y(t) = b_m x_n = b_1 x_3(t) = kx_3(t)$ - równanie wyjścia w zapisie ogólnym,
 $b_m = b_1 = k, \quad n = 3.$

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 \\ -b & -c & -c \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ b_m] = [0 \ 0 \ k], \quad D = [0] = 0.$$

Równanie stanu i wyjścia w zapisie macierzowo-wektorowym

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 \\ -b & -c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \ 0 \ k] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

8.8. Rozwiązywanie równań stanu układów automatyki DLSC

Aby ocenić zachowanie się modelu, należy znaleźć rozwiązanie układu równań, zaczynając od rozwiązywania równania stanu a następnie równania wyjścia. Zakładamy, że macierze A i B są funkcjami całkowalnymi w przedziale (t_0, t_k) , który odpowiada przedziałowi określoności układu. Na początku rozwiązywania równania stanu znajdujemy rozwiązanie jednorodne ($u(t) = 0$) przy $x(t_0) = x_0$, a więc

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (8.49)$$

Pod wpływem warunków początkowych x_0 i przy założeniu, że nie ma zewnętrznych oddziaływań (wymuszeń), otrzymamy całkę ogólną równania stanu (8.49) w postaci odpowiedzi swobodnej

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad (8.50)$$

W rozwiązywaniu pełnym tzw. metodą klasyczną dynamicznego stacjonarnego i liniowego równania stanu mamy dwie składowe rozwiązania. Pierwsza składowa to rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (uwzględnia warunki początkowe i brak wymuszenia). Druga składowa rozwiązania, zaś opisuje zmiany stanu układu w zależności od wymuszeń zewnętrznych. Jest to rozwiązanie wynikające ze zmiany wektora stanu pod wpływem sterowania u(t). Zatem

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (8.51)$$

e^{At} - nazywa się macierzą przejścia stanu

Uwzględniając powyższe rozwiązanie otrzymamy równanie wyjścia w postaci

Rozdział 8

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right] + Du(t). \quad (8.52)$$

Otrzymane zależności umożliwiają analizę zachowania się modeli dynamicznych stacjonarnych i liniowych warunków początkowych i oddziaływań zewnętrznych. Rozwiązywanie równania stanu układu DLSC umożliwia ocenę procesów przejściowych wywołanych warunkami początkowymi oraz określenie wpływu zmiennych wejściowych na zachowanie się układu.

Wynik rozwiązywania równania stanu metodą przekształcenia Laplace'a jest następujący

$$x(s) = [sI - A]^{-1} x_0 + [sI - A]^{-1} Bu(s). \quad (8.53)$$

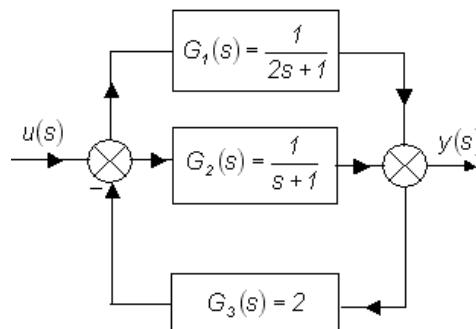
Macierz przejścia stanu e^{At} znajdujemy za pomocą przekształcenia Laplace'a. Zatem porównując rozwiązania jednorodne równań stanu metodą klasyczną (8.51) i metodą Laplace'a (8.53) pamiętając, że $x(t) = L^{-1}[x(s)]$ otrzymamy

$$e^{At} = L^{-1}[sI - A]^{-1}. \quad (8.54)$$

Każdy z elementów macierzy $[sI - A]^{-1}$ jest ilorazem wielomianów względem s. Mianownik jest wielomianem charakterystycznym macierzy A, zaś licznik jest wielomianem względem s będącym odpowiednim dopełnieniem algebraicznym macierzy charakterystycznej $[sI - A]$.

Przykład 8.7

Dla stanu ustalonego układu regulacji automatycznej (URA) przy zadany warunku początkowym $x(0) = [1 \ 0]^T$ wyznaczyć rozwiązanie równania stanu oraz podać równanie wyjścia.



Rysunek 8.15. Schemat blokowy (strukturalny) badanego URA

Rozwiązanie

Należy wyznaczyć transmitancję badanego układu automatyki, zatem

$$G_{2,3}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} = \frac{1}{s+3},$$

$$G_z(s) = G_1(s) + G_{2,3}(s) = \frac{3s+4}{2s^2 + 7s + 3},$$

Wybieramy metodę bezpośrednią, stąd przy najwyższej potędze przy s musi być współczynnik równy jedności, zatem

$$G_z(s) = \frac{1.5s+2}{s^2 + 3.5s + 1.5} = \frac{1.5s+2}{(s+3)(s+0.5)}.$$

Współczynniki równania stanu i wyjścia są następujące

$$a_0 = 1.5, \quad a_1 = 3.5, \quad b_0 = 2, \quad b_1 = 1.5.$$

Równania stanu w zapisie ogólnym są

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + u(t) = -1.5x_1(t) - 3.5x_2(t) + u(t).$$

Równanie wyjścia przyjmuje postać

Rozdział 8

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1}(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) = 2x_1 + 1.5x_2.$$

Macierze równania stanu w zapisie macierzowo-wektorowym są następujące

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{macierz jednostkowa } sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & -3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1.5 & s + 3.5 \end{bmatrix}.$$

Macierz algebraicznych dopełnień jest

$$\text{adj}[sI - A] = \begin{bmatrix} s + 3.5 & 1 \\ -1.5 & s \end{bmatrix},$$

zaś wyznacznik z macierzy

$$\det[sI - A] = s(s + 3.5) + 1.5 = s^2 + 3.5s + 1.5 = (s + 3)(s + 0.5) = m,$$

Macierz odwrotna wynosi

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]} = \begin{bmatrix} \frac{s + 3.5}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{-1.5}{m} & \frac{s}{m} \end{bmatrix},$$

Zatem rozwiążanie równania stanu można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s + 3.5}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{-1.5}{m} & \frac{s}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s + 3.5}{m} \\ \frac{-1.5}{m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Z tablic Laplace'a nie można bezpośrednio odczytać funkcji obrazującej rozwiązań, dlatego też należy dokonać rozkładu wyrazów macierzy na ułamki proste, czyli

$$\frac{s+3.5}{m} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+0.5)} = \frac{s(A+B) + 0.5A + 3B}{m},$$

$$A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B = -\frac{1}{5},$$

stąd

$$0.5A + 3B = 3.5 \Rightarrow B = \frac{6}{5},$$

$$\frac{1.5}{m} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+0.5)} = \frac{s(A+B) + 0.5A + 3B}{m},$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B = -\frac{5}{3},$$

stąd

$$0.5A + 3B = 1.5 \Rightarrow B = \frac{5}{3}.$$

Ostatecznie posługując się tablicami przekształceń Laplace'a otrzymamy

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+3.5}{m} \\ -\frac{1.5}{m} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5(s+3)} + \frac{6}{5(s+0.5)} \\ \frac{5}{3(s+3)} - \frac{5}{3(s+0.5)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{6}{5}e^{-0.5t} \\ \frac{5}{3}e^{-3t} - \frac{5}{3}e^{-0.5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Przykład 8.8

Wyznaczyć rozwiązanie równania stanu $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$

dla sterowania $u(\tau) = k$, $x(0) = [1 \ 0]^T$.

Rozwiązanie

ROZDZIAŁ 8

Rozwiązywanie równania stanu wyznaczymy poprzez zastosowanie metody klasycznej, zatem

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad e^{At} = \frac{x(t)}{x(0)} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}],$$

Macierze jednostkowe wynoszą

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \\ [sI - A] &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}, \\ adj[sI - A] &= \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\det [sI - A] = s(s-3) + 2 = (s-1)(s-2) = m,$$

$$\begin{aligned} [sI - A]^{-1} &= \frac{adj[sI - A]}{\det[sI - A]} = \begin{bmatrix} \frac{s-3}{m} & \frac{1}{m} \\ -\frac{2}{m} & \frac{s}{m} \end{bmatrix}, \\ e^{At} &= L^{-1}[sI - A]^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s-3}{m} & \frac{1}{m} \\ -\frac{2}{m} & \frac{s}{m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Posługując się tablicami transformat Laplace'a otrzymamy transformaty odwrotne wszystkich elementów macierzy $[sI - A]^{-1}$ po rozłożeniu na ułamki proste tj. np.

$$\frac{s-3}{m} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s-1)}{m} = \frac{s(A+B) - 2A - B}{m},$$

stąd

$$A + B = 1, \Rightarrow A = 1 - B = 2, \quad L^{-1} \left[\frac{2}{(s-1)} - \frac{1}{(s-2)} \right] = 2e^t - e^{2t},$$

$$-2A - B = -3, \Rightarrow B = -1.$$

zatem

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

$$e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

$$u(\tau)Be^{A(t-\tau)} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{t-\tau} - e^{2t-2\tau} & -e^{t-\tau} + e^{2t-2\tau} \\ 2e^{t-\tau} - 2e^{2t-2\tau} & -e^{t-\tau} + 2e^{2t-2\tau} \end{bmatrix} =$$

$$= k \begin{bmatrix} -e^{t-\tau} + e^{2t-2\tau} \\ -e^{t-\tau} + 2e^{2t-2\tau} \end{bmatrix},$$

a więc

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = k \begin{bmatrix} 0.5(1 - 2e^t + e^{2t}) \\ e^t \end{bmatrix},$$

ostatecznie otrzymamy sumaryczne rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0.5(1 - 2e^t + e^{2t}) \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Przykład 8.9

Określić rozwiązanie równania wyjścia $y(t)$ na sterowanie $u(t) = I(t)$ układu URA o transmitancji $G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.7s + 0.1}$

Rozwiązanie

Współczynniki licznika i mianownika transmitancji $G(s)$ są następujące

$$a_0 = 0.1, \quad a_1 = 0.7, \quad b_0 = 10, \quad b_1 = 0.$$

ROZDZIAŁ 8

Zależność na transmitancję układu w zapisie macierzowo-wektorowym jest następująca

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D, \Rightarrow , \\ \Rightarrow y(s) = C[sI - A]^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

gdzie: C, D – macierze równania wyjścia w zapisie macierzowo-wektorowym, B – macierz równania wejścia w zapisie macierzowo-wektorowym, $u(s)$ – sygnał sterujący (wejściowy)

Równanie wyjścia w zapisie macierzowo-wektorowym przyjmuje postać

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

lub w zapisie ogólnym

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1}(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) = 10x_1.$$

Postać równań stanu w zapisie ogólnym jest następująca

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t) = -0.1x_1(t) - 0.7x_2(t) + u(t).$$

zatem macierze A, B, C, D są następujące

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [10 \quad 0], \quad D = 0.$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.1 & s + 0.7 \end{bmatrix},$$

$$adj[sI - A] = \begin{bmatrix} s + 0.7 & 1 \\ -0.1 & s \end{bmatrix},$$

$$\det[sI - A] = s(s + 0.7) + 0.1 = (s + 0.5)(s + 0.2) = m,$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{adj[sI - A]}{\det[sI - A]} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.7}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{-0.1}{m} & \frac{s}{m} \end{bmatrix},$$

Zatem

$$\begin{aligned} y(s) &= C[sI - A]^{-1}Bu(s) + Du(s) = [10 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+0.7}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{-0.1}{m} & \frac{s}{m} \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \\ &= \frac{10}{s} \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} = \frac{10}{s(s+0.5)(s+0.2)}, \end{aligned}$$

Ponieważ nie można bezpośrednio skorzystać z tablic Laplace'a, więc funkcję $y(s)$ należy rozłożyć na ułamki proste, zatem

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left[\frac{10}{s(s+0.5)(s+0.2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+0.5} + \frac{C}{s+0.2}\right], \\ \frac{10}{s(s+0.5)(s+0.2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0.5} + \frac{C}{s+0.2} = \\ &= \frac{A(s+0.5)(s+0.2) + Bs(s+0.2) + Cs(s+0.5)}{s(s+0.5)(s+0.2)} = \\ &= \frac{s^2(A+B+C) + s(0.7A+0.2B+0.5C) + 0.1A}{s(s+0.5)(s+0.2)}, \end{aligned}$$

Współczynniki A, B, C rozkładu funkcji na ułamki proste wyznaczymy z następującego układu równań algebraicznych

stąd

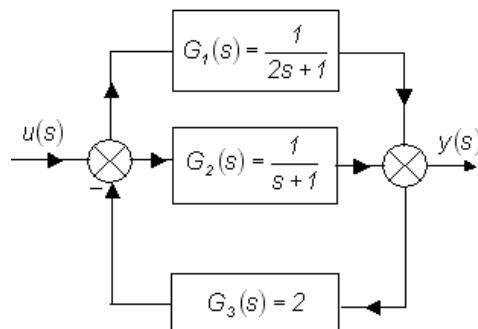
$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 0, \\ 0.7A + 0.2B + 0.5C = 0, \\ 0.1A = 10. \end{array} \right\} \Rightarrow A = 100, \quad B = \frac{200}{3}, \quad C = -\frac{500}{3}.$$

Ostatecznie na podstawie tablic Laplace'a otrzymamy

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{100}{s} + \frac{200}{3(s+0.5)} - \frac{500}{3(s+0.2)} \right] = 100 \left(1 - \frac{5}{3} e^{-0.2t} + \frac{2}{3} e^{-0.5t} \right).$$

8.9. Sterowalność i obserwowałość układów automatyki DLSC

Właściwość sterowalności i obserwowałości modelu w znacznym stopniu wpływa na możliwości badania stabilności dynamicznych układów automatyki. Sterowalność jest funkcją stanu układu automatyki i nie może być bezpośrednio określona z transmitancji. Stosując właściwe zmienne sterujące, można sprowadzić każdy dowolny stan początkowy $x(t_0)$ do żądanego stanu końcowego $x_k(t_k)$ w skończonym przedziale czasu (t_0, t_k) (Rysunek 8.15), x_1, x_2 – współrzędne przestrzeni zmiennych stanu). W tym celu wprowadzono pojęcie sterowalności.



Rysunek 8.15. Przebieg zmiany stanu

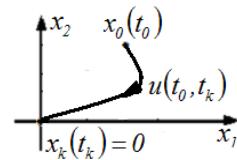
Obiekt dynamiczny liniowy nazywamy sterowalnym do zera, jeżeli istnieje takie sterowanie $u(t_0, t_k)$, ze zbiór sterowań dopuszczalnych, że obiekt ze stanu początkowego $x_0(t_0)$ daje się sprowadzić w skończonym przedziale czasu (t_0, t_k) do stanu końcowego $x_k(t_k) = 0$ (do początku układu współrzędnych – Rysunek 8.16). Zatem przebieg wektora stanu $x(t)$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = e^{At} \left[x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right], \quad (8.55)$$

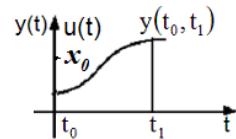
powinien osiągnąć początek układu współrzędnych $x=0$ po czasie $t = t_k$, a więc

$$x_0 = - \int_0^{t_k} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau. \quad (8.56)$$

Jest to warunek sterowalności do zera dla układu dynamicznego dla dowolnego wektora warunków początkowych x_0 .



Rysunek 8.16. Schemat układu całkowicie sterowalnego



Rysunek 8.17. Schemat układu całkowicie obserwowlanego

Układ dynamiczny opisany za pomocą równania stanu i równania wyjścia jest całkowicie sterowalny wtedy, gdy macierz blokowa S jest rzędu n . A więc

$$S = [B \ AB \ A^2B \ ... \ A^{N-1}B] = n. \quad (8.57)$$

gdzie n jest maksymalną liczbą liniowo niezależnych wierszy i kolumn macierzy S

W technicznych rozwiązańach często pojawia się pytanie, czy możliwe jest wybranie takich zmiennych wyjściowych obiektu, które w pełni określają procesy zachodzące w tym obiekcie. Tak więc, czy można wyznaczyć stan obiektu $x(t_0)$ w chwili t_0 obserwując wektor wyjść

ROZDZIAŁ 8

$y(t)$ w skończonym przedziale czasu (t_0, t_k) przy założeniu znajomości mierzalnych zmiennych sterujących.

Układ dynamiczny jest całkowicie sterowalny ze względu na wyjście, jeżeli istnieje takie ograniczenie, przedziałami ciągłe sterowanie $u(t)$, które dowolny początkowy wektor sygnałów wyjściowych $y(t_0)$ w chwili $t = t_0$ zmienia na dowolny wektor sygnałów wyjściowych $y(t_k)$, w chwili $t = t_k$, w czasie skończonym $t_k \geq t_0$. Układ jest całkowicie sterowalny ze względu na wyjście, gdy macierz H jest rzędu q (q – liczba sygnałów wyjściowych układu).

$$H = [CB \ CAB \ CA^2B \CA^{n-1}B] = q. \quad (8.58)$$

Jeżeli sterowanie jest skalarnie, to macierz S staje się kwadratowa i warunkiem sterowalności jest aby S była nieosobliwa.

Stan $x(t_0) = x_0$ nazywamy obserwowalnym w chwili t_0 , jeżeli dla każdej chwili $t_1 > t_0$ znajomość przebiegu zmiennych wyjściowych $y(t)$ oraz zmiennych sterujących $u(t)$ w przedziale czasu (t_0, t_1) umożliwia określenie stanu x_0 . Jeżeli każdy stan x_0 jest obserwowalny w każdej chwili x_0 , to mówimy, że dany układ jest całkowicie obserwowalny (rysunek 8.17).

Układ dynamiczny opisany za pomocą równania stanu i równania wyjścia jest całkowicie obserwowalny wtedy, gdy macierz Q jest rzędu n . Zatem

$$Q = [C^T \ C^T A^T \ C^T (A^T)^2 \ ... \ C^T (A^T)^{n-1}] = n. \quad (8.59)$$

T oznacza macierz transponowaną.

Jeżeli wyznaczniki macierzy sterowalności S i obserwowalności Q są równe zeru to rząd tych macierzy jest mniejszy od n . Wtedy stwierdzamy, że badany układ jest niesterowalny i nieobserwowalny.

Z punktu widzenia obserwowalności modelu należy zbadać powiązanie z warunkami początkowymi x_0 wektora $y_0(t)$, określonego zależnością

$$y_o(t) = y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau - Du(t), \quad (8.60)$$

czyli

$$y_o(t) = Ce^{At}x_0. \quad (8.61)$$

Badając obserwowalność układu musimy stwierdzić, czy na podstawie znajomości przebiegu wektora wyjścia $y(t)$ oraz wektora wejścia $u(t)$ w skończonym przedziale czasu $(0, t_k)$ możemy wyznaczyć wektor stanu w chwili początkowej $t_0 = 0$.

Przykład 8.10

Zbadać sterowalność i obserwowalność układu URA opisanego równaniem stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \ 0 \ 1] x(t).$$

Rozwiązanie

Sterowalność układu automatyki zbadamy poprzez wyznaczenie macierzy sterowalności i jej zbadanie, zatem

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \dots \ A^nB],$$

Ponieważ macierz A jest wymiaru 3×3 , więc wystarczy w macierzy S uwzględnić trzy pierwsze wyrazy

ROZDZIAŁ 8

$$AB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1^2} \\ -\frac{1}{T_2^2} \\ k\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1^2} \\ -\frac{1}{T_2^2} \\ k\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1^3} \\ \frac{1}{T_2^3} \\ -k\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\right) \end{bmatrix},$$

Po podstawieniu wyznaczonych wyrazów do macierzy sterowalności otrzymamy

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & -\frac{1}{T_1^2} & \frac{1}{T_1^3} \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2^2} & \frac{1}{T_2^3} \\ 0 & k\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) & -k\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\right) \end{bmatrix}.$$

$$\det S = \frac{2k}{T_1^2 T_2^2} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Układ będzie sterowalny względem stanu $\underline{0}$ o ile $n \neq 0$ ($n = 3$),
 $\det S \neq 0$, stąd $T_1 \neq T_2$ oraz $k \neq 0$, $T_1 \neq 0$, $T_2 \neq 0$

Układ będzie obserwowałny względem stanu $\underline{0}$ o ile $n \neq 0$ ($n = 3$) oraz
wyznacznik z macierzy obserwonalności $\det Q \neq 0$, zatem

$$Q = [C \ C A \ C A^2 \ \dots \ C A^n]^T.$$

W tym przypadku macierz obserwonalności zawiera trzy wyrazy, a więc

$$CA = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = [k \ k \ 0],$$

$$CA^2 = [k \ k \ 0] \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = \left[-\frac{k}{T_1} \ -\frac{k}{T_2} \ 0 \right],$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & k & 0 \\ -\frac{k}{T_1} & -\frac{k}{T_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det Q \neq 0 \Rightarrow \det Q = k^2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

stąd przy $k > 0, T_1 > T_2$ badany układ automatyki będzie również obserwonalny.

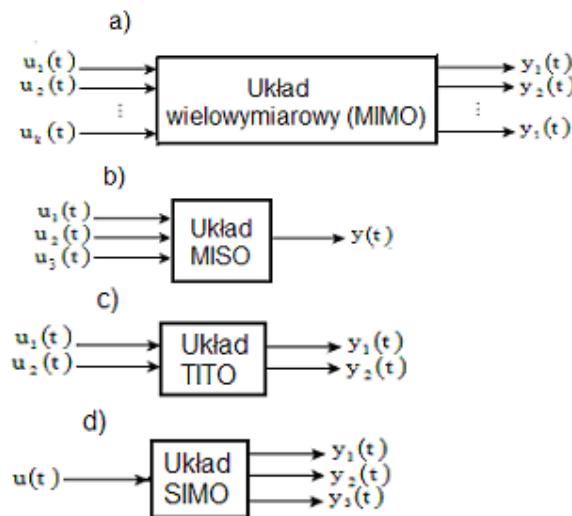
8.10. Układy wielowymiarowe

Jak wiadomo, element automatyki opisuje sygnał wejściowy $x(s)$ i wyjściowy $y(s)$ o transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$ (rysunek 8.18)



Rysunek 8.18. Symbol jednowymiarowego elementu, układu automatyki lub obiektu i jego transmitancja operatorowa

Układ automatyki jako zbiór elementów o wielu sygnałach wejściowych i wyjściowych przedstawia rysunek 8.19 a).



Rysunek 8.19. Symbol wielowymiarowego układu automatyki i jego transmitancja operatorowa: a) układ MIMO – multi input – multi output, b) – układ MISO – multi input – single output, c) układ TITO – two input – two output, d) SIMO – single input – multi output

$u_i (i \rightarrow \text{od } 1 \text{ do } k)$ - składowe wektora wejścia (sterowań),
 $y_j (j \rightarrow \text{od } 1 \text{ do } l)$ - składowe wektora wyjścia, k – ilość sygnałów

wejściowych, 1 - ilość sygnałów wyjściowych. Mogą być trzy warianty sygnałów: 1) $k = 1$, 2) $k < l$, 3) $k > l$.

Grupę sygnałów wejściowych $u(t)$ (sygnałów sterowań) i sygnałów wyjściowych $y(t)$ definiujemy jako wektory sygnałów wejściowych i wyjściowych, których współrzędne są poszczególnymi sygnałami wejściowymi i wyjściowymi układu automatyki.

Elementy wielowymiarowe określa macierz transmitancji

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1k} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \dots & G_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{l1} & G_{l2} & G_{l3} & \dots & G_{lk} \end{bmatrix}, \quad (8.62)$$

gdzie

$$G_{ij}(s) = \frac{y_j(s)}{u_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (8.63)$$

Wzór (8.63) dotyczy założenia, że wszystkie pozostałe wartości wejściowe oraz warunki początkowe są zerowe.

W przypadku układu automatyki o trzech wejściach i trzech wyjściach otrzymujemy

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}. \quad (8.64)$$

Znajomość transmitancji operatorowej daje możliwość opisania właściwości statycznych i dynamicznych układu automatyki przy pomocy równań algebraicznych zmiennej s . Najwyższa potęga s w mianowniku funkcji przejścia świadczy o układzie nazywanym układem n -tego rzędu. Możliwość stosowania transmitancji operatorowej jest ograniczona do układów opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi i niezmiennymi w czasie. Pomimo takiego ograniczenia, transmitancja operatorowa jest często stosowana w analizie i projektowaniu układów automatyki. Układy wielowymiarowe należy stosować, gdy pomiędzy sygnałami wyjściowymi występuje sprzężenie (interakcja) i/lub, gdy sygnał wyjściowy jest wynikiem wielu oddziaływań.

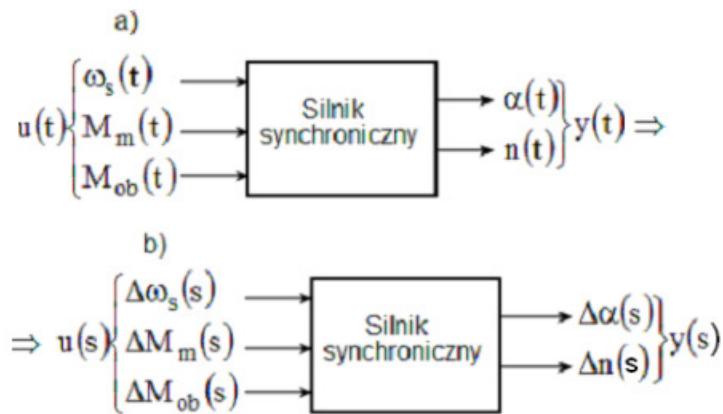
Rozdział 8

Przykład 8.11

Określić transmitancję układu wielowymiarowego silnika synchronicznego, którego sygnałami wejściowymi są częstość napięcia zasilania stojana $\omega_s(t)$, moment maksymalny $M_m(t)$, moment obciążenia $M_{ob}(t)$. Sygnałami wyjściowymi są kąt obciążenia $\alpha(t)$, prędkość obrotowa $n(t)$.

Rozwiązanie

Opis elementów silnika synchronicznego pokazuje rysunek 8.20



Rysunek 8.20. Schemat blokowy elementów silnika: a) układ nie zlinearyzowany, b) zlinearyzowany

$u(s)$ – wektor wejść (sterowań), $y(s)$ – wektor wyjść (odpowiedzi)

$$u(s) = \begin{bmatrix} \Delta\omega_s(s) \\ \Delta M_m(s) \\ \Delta M_{ob}(s) \end{bmatrix},$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} \Delta\alpha(s) \\ \Delta n(s) \end{bmatrix},$$

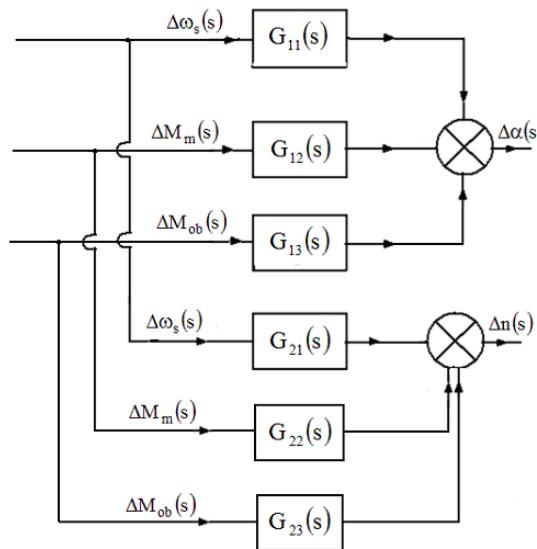
$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy $G(s)$ wyznaczamy z operatorowych równań silnika przy założeniu, że pozostałe sygnały wejściowe są stałe (oprócz aktualnie rozpatrywanego). Na podstawie rysunku 8.20 b) transmitancje układu zlinearyzowanego przyjmują postać

$$G_{11}(s) = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\omega_s(s)}, \quad G_{12}(s) = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta M_m(s)}, \quad G_{13}(s) = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta M_{ob}(s)},$$

$$G_{21}(s) = \frac{\Delta n(s)}{\Delta\omega_s(s)}, \quad G_{22}(s) = \frac{\Delta n(s)}{\Delta M_m(s)}, \quad G_{23}(s) = \frac{\Delta n(s)}{\Delta M_{ob}(s)}.$$

Powyższe zależności przedstawia schemat blokowy na rysunku 8.21.



Rysunek 8.21. Schemat strukturalny (blokowy) układu wielowymiarowego

Rozdział 8



Literatura

LITERATURA

- [1] Amborski K., Maruszak A.: Teoria sterowania w ćwiczeniach, WPW, 1978.
- [2] Amborski K.: Zbiór zadań z Automatyki, WNT, Warszawa, 1986.
- [3] Amborski K.: Teoria sterowania podręcznik programowany, PWN, Warszawa, 1987.
- [4] Awrejcewicz J., Wodzicki W.: Podstawy Automatyki, teoria i przykłady, WPŁ, Łódź, 2001.
- [5] Engel Z., Kowal J.: Sterowanie Procesami Wibroakustycznymi, Wyd. AGH, Kraków, 1995.
- [6] Franklin G. F., Powell J. D.: Feedback Control of Dynamic Systems, USA, Addison-Wesley Publishing, 1994.
- [7] Gajić Z., Lelić M.: Modern Control Systems Engineering, London, Prentice Hall, 1996.
- [8] Gessing R.: Podstawy Automatyki, Gliwice, WPŚ, 2001.
- [9] Gosiewski Z.: Łożyska magnetyczne do maszyn wirnikowych, Sterowanie i badanie, Warszawa, Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, 1999.
- [10] Grzelka J., Mazur E.: Podstawy Automatyki, Zbiór zadań z rozwiązaniami, Częstochowa, WPCz, 2000.
- [11] Holejko D., Kościelny W., Niewczas W.: Zbiór zadań z podstaw automatyki, WPW, 1985.
- [12] Janiszowski K.: Podstawy wyznaczania opisu i sterowania obiektów dynamicznych, 1991.
- [13] Jędrzykiewicz Z.: Zbiór zadań z teorii sterowania, Kraków, Wyd. AGH, 1983.
- [14] Jędrzykiewicz Z.: Teoria sterowania układów jednowymiarowych, Kraków, UWND, AGH, 1983.
- [15] Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej, WPW, Warszawa, 1974.
- [16] Kaczorek T. i inni: Wybrane metody analizy liniowych układów dynamicznych, WPW, Warszawa 1984.

- [17] Kołacin T.: Podstawy teorii maszyn i automatyki, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.
- [18] Kołacin T., Kosior A.: Zbiór zadań do ćwiczeń z podstaw automatyki i teorii maszyn, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 1980.
- [19] Kościelny W.: Materiały pomocnicze do nauczania podstaw automatyki, Warszawa, WPW, 2001.
- [20] Kowal J.: Sterowanie drganiami, Kraków, Gutenberg, 1996.
- [21] Kowal J.: Podstawy automatyki, Kraków, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, 2004.
- [22] Kwiatkowski W.: Podstawy teorii sterowania, 2002.
- [23] Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.: Podstawy Automatyki, Warszawa, OWPW, 1996.
- [24] Mikulski J.: Podstawy Automatyki, Liniowe Układy Regulacji, Gliwice, WPŚ, 2001.
- [25] Niederlański N.: Układy dynamiczne o działaniu ciągłym, WNT, Warszawa, 1992.
- [26] Ogata K.: Metody przestrzeni stanu w teorii sterowania, 1974.
- [27] Ogata K.: Modern Control Engineering, NY, Prentice Hall International, Inc., 1997.
- [28] Pełczewski W.: Teoria sterowania, WNT, Warszawa, 1980.
- [29] Shinners S. M.: Modern Control System Theory and Design, NY, John Wiley & Sons Inc., 1998.
- [30] Szacka K.: Teoria układów dynamicznych, WPW, Warszawa, 1986.
- [31] Takahashi Y.: Sterowanie i systemy dynamiczne, WNT, Warszawa, 1976.
- [32] Urbaniak A.: Podstawy Automatyki, Poznań, WPP, 2001.
- [33] Żelazny M.: Podstawy Automatyki, Warszawa, PWN, 1976.

LITERATURA

Strona **238**

9

Ćwiczenia laboratoryjne

9.1. Badanie układu dwupołożeniowej regulacji temperatury

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z doświadczalnym wyznaczeniem charakterystyk czasowych elementów automatyki na przykładzie obiektu cieplnego oraz działaniem układu dwupołożeniowej regulacji temperatury z uwzględnieniem korekcji.

Wprowadzenie teoretyczne

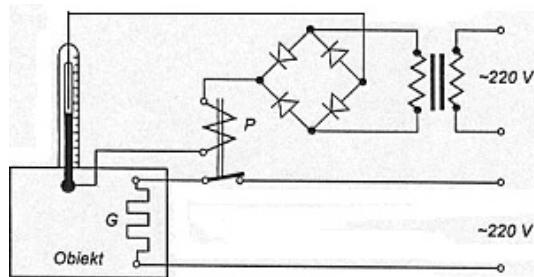
Istota i cel stosowania dwupołożeniowej regulacji temperatury

Układ , w którym sygnał wyjściowy z regulatora może tylko przyjmować dwie wartości, nazywamy układem regulacji dwupołożeniowej. Rezultatem takiego działania regulatora jest to, że wielkość regulowana wykonuje wahania wokół wartości zadanej. W przypadku dwupołożeniowej regulacji temperatury, regulator steruje procesem włączania i wyłączania grzejnika elektrycznego znajdującego się w układzie, powodując w ten sposób zmiany temperatury obiektu. Obiekty cieplne mają dużą inertję, a wtedy regulacja dwupołożeniowa daje najlepsze rezultaty. W praktycznych zastosowaniach konieczność regulacji temperatury wynika z dwóch powodów:

- Wiele procesów produkcyjnych dla prawidłowego ich przebiegu wymaga zapewnienia odpowiedniego poziomu temperatury (stałego lub zmiennego w czasie),
- Dla otrzymania określonej temperatury obiektu (pieca hutniczego, obróbki cieplnej itp.) konieczne jest dostarczenie odpowiedniej ilości energii.

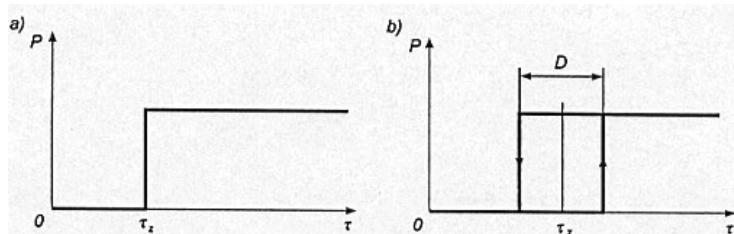
Rysunek 9.1.1 przedstawia schemat układu dwupołożeniowej regulacji temperatury. Jako dwupołożeniowego regulatora użyto ręciowego ter-

mometru kontaktowego, który jest także elementem pomiarowym w tym układzie. Wewnątrz termometru znajduje się ruchoma elektroda w postaci drucika. Położenie elektrody określa wartość zadanej temperatury. W położeniu przedstawionym na rysunku, styki przekaźnika P są zamknięte i grzejnik G jest włączony. Gdy temperatura obiektu wzrośnie powyżej wartości zadanej, tzn. słupek rtęci zetknie się z drucikiem, wówczas zostanie zamknięty obwód cewki przekaźnika. Spowoduje to otwarcie styków przekaźnika i wyłączenie grzejnika. Spadek temperatury obiektu spowoduje obniżenie słupka rtęci w termometrze, otwarcie obwodu cewki przekaźnika i ponowne załączenie grzejnika. Po pewnym czasie nastąpi wzrost temperatury i cykl załączania i wyłączania będzie się powtarzał.



Rysunek 9.1.1. Schemat układu dwupołożeniowej regulacji temperatury

Na dokładność regulacji zasadniczy wpływ mają właściwości samego regulatora. Wskutek przyczepności rtęci do drucika charakterystyka regulatora posiada strefę niejednoznaczności w postaci histerezy D (rysunek 9.1.2b). Charakterystyki statyczne idealnego regulatora dwupołożeniowego i ze strefą niejednoznaczności przedstawia rysunek 9.1.2.



Rysunek 9.1.2. Charakterystyki statyczne regulatorów dwupołożeniowych: a) idealnego, b) ze strefą niejednoznaczności

W praktyce szerokie zastosowanie znajdują także regulatorы, których działanie oparte jest na wykorzystaniu rozszerzalności cieplnej ciał stałych jak regulatory: bimetalowe, cieczy i gazów oraz elektroniczne.

ROZDZIAŁ 9

Przepływ energii cieplnej między grzejnikiem a obiektem zależy w dużym stopniu od właściwości samego obiektu regulowanego oraz przebiegu temperatury podczas regulacji. Dlatego do przeprowadzenia analizy procesu dwupołożeniowej regulacji konieczne jest określenie właściwości obiektu.

Określenie właściwości obiektu

Właściwości dynamiczne obiektów określane są poprzez związki pomiędzy sygnałami wejściowymi i wyjściowymi przebiegającymi w czasie. W celu ujednolicenia opisu sformułowane zostało pojęcie charakterystyki dynamicznej obiektu. Jest nią zależność wielkości wyjściowej od czasu, przy jednorazowej określonej zmianie wielkości wejściowej. Charakterystyką dynamiczną grzejnika będzie zależność rzeczywistej temperatury τ od czasu przy jednorazowej skokowej zmianie wartości mocy grzejnej P_g w określonej temperaturze otoczenia. Przebieg zmian temperatury grzejnika uzależniony jest od załączonej mocy grzejnej P_g , mocy strat cieplnych P_s oraz od czynników wynikających z konstrukcji pieca (grzejnika) określonych przez jego masę m i ciepło właściwe c_w .

Bilans mocy cieplnej pieca możemy opisać równaniem

$$mc_w \frac{d\tau}{dt} = P_g - P_s, \quad (9.1.1)$$

Straty cieplne uzależnione są od różnicy temperatury obiektu i temperatury otoczenia. Jeżeli przyjmiemy takie założenie, to

$$P_s = b(\tau_r - \tau_0) = b\tau, \quad (9.1.2)$$

gdzie: b – stały współczynnik, τ_r – temperatura pieca, τ_0 – temperatura otoczenia.

Po wstawieniu zależności (9.1.2) do równania (9.1.1) otrzymamy

$$\frac{mc_w}{b} \frac{d\tau}{dt} + \tau = \frac{I}{b} P_g, \quad (9.1.3)$$

a po wprowadzeniu oznaczeń: $u = P_g$ – sygnał wejściowy, $y = \tau$ – sygnał wyjściowy, $k = I/b$ – współczynnik proporcjonalności, $T = mc_w/b$ – stała czasowa obiektu inercyjnego pierwszego rzędu, otrzymamy

$$T \frac{dy}{dt} + y = ku, \quad (9.1.4)$$

Stosując rachunek operatorowy Laplace'a z równania (9.1.4) otrzymamy

$$Tsy(s) + y(s) = ku(s), \quad (9.1.5)$$

Transmitancja operatorowa określona jako $G(s) = y(s)/u(s)$ przyjmuje postać

$$G(s) = \frac{k}{Ts + I}. \quad (9.1.6)$$

Charakterystykę czasową elementu $y(t)$ wyznaczmy jako odpowiedź na wymuszenie skokowe wielkości wejściowej $u(t) = I(t)u_{st}$ otrzymamy, transformując funkcję czasu $u(t)$ na funkcję zmiennej s

$$u(s) = \frac{I}{s}u_{st}, \quad (9.1.7)$$

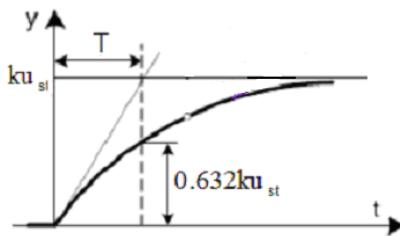
Zatem sygnał wyjściowy jest

$$y(s) = G(s) = y(s)u(s) = \frac{k}{Ts + I} \frac{I}{s} u_{st}, \quad (9.1.8)$$

Dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymamy poszukiwane równanie charakterystyki czasowej

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] = ku_{st}(1 - e^{-t/T}). \quad (9.1.9)$$

Wykres tej zależności przedstawia rysunek 9.1.3



Rysunek 9.1.3. Charakterystyka czasowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu bez opóźnienia

ROZDZIAŁ 9

Dla czasu $t \rightarrow \infty$ otrzymamy maksymalną wartość temperatury

$$y(t) = ku_{st} (1 - e^{-\infty/T}) = ku_{st}, \quad (9.1.10)$$

Korzystając z podstawienia $y = \tau$ oraz podstawiając wzór (9.1.10) do (9.1.9) otrzymamy

$$\tau = \tau_{max} (1 - e^{-t/T}), \quad (9.1.11)$$

Jeżeli do równania(9.1.9) wstawimy czas $t = T$, to otrzymamy

$$y(T) = ku_{st} (1 - e^{-1}) = 0.632ku_{st}. \quad (9.1.12)$$

Oznacza to, że stała czasowa T jest czasem od chwili $t = 0$ do chwili, w której sygnał wyjściowy w postaci temperatury obiektu osiągnie 0.632 wartości maksymalnej ku_{st} . Otrzymane z badań doświadczalnych rzeczywiste charakterystyki obiektów cieplnych różnią się od charakterystyk obiektów idealnych. W celu zbudowania matematycznego opisu takich obiektów zachodzi potrzeba przeprowadzenia identyfikacji obiektu.

Identyfikacja obiektu

Identyfikacja obiektu rzeczywistego polega na określeniu związków pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym na podstawie danych doświadczalnych. Sprawdza się do wyznaczenia modelu funkcjonalnego lub strukturalnego badanego obiektu. Model funkcjonalny jest modelem wykazującym podobieństwo sygnału wyjściowego z sygnałem wyjściowym obiektu przy takich samych sygnałach wejściowych modelu i obiektu. Przez model strukturalny należy rozumieć model matematyczny, którego struktura równań odzwierciedla strukturę równań opisujących obiekt rzeczywisty. Proces identyfikacji wymaga przeprowadzenia badań doświadczalnych i wyznaczenia właściwości obiektu poprzez charakterystyki czasowe, częstotliwościowe itp.

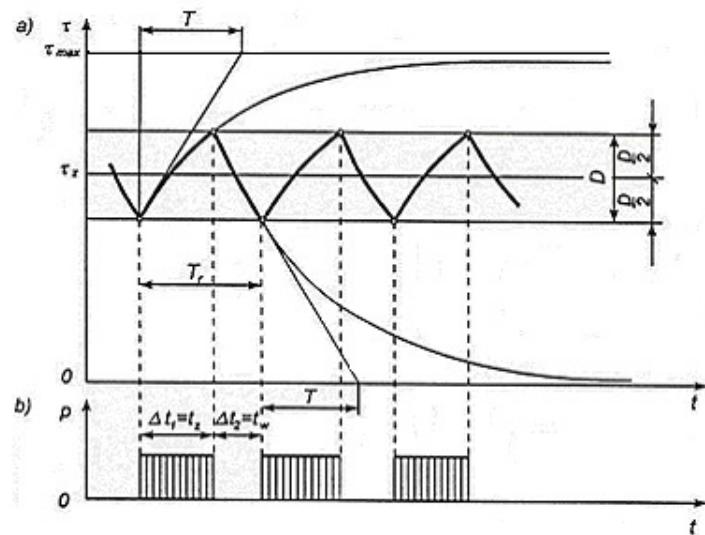
Do budowy modelu matematycznego służą metody oparte na:

1. analizie charakterystyk czasowych,
2. analizie charakterystyk częstotliwościowych,
3. symulacji komputerowej modelu o założonej strukturze poprzez dobór jego parametrów.

Pierwsza z metod, którą zaproponował K. ü pfmüller, polega na zastąpieniu rzeczywistej charakterystyki czasowej obiektu charakterystykami członu inercyjnego pierwszego rzędu i członu opóźniającego. Parametry tych charakterystyk wyznacza się poprzez poprowadzenie stycznej do charakterystyki rzeczywistej w jej punkcie przegięcia. Styczna ta odcina na osi czasu zastępuje czas opóźnienia T_0 i wartość stałej czasowej T . Schemat takiej aproksymacji przedstawia rysunek 7.7, punkt 7.4, str.158 oraz schemat blokowy aproksymowanego obiektu przedstawia rysunek 7.8 i jego transmitancję wzór (7.7) str. 159. Druga wymieniona metoda jest pracochłonna i mało przydatna w praktycznych zastosowaniach. Natomiast duże znaczenie mają metody symulacji komputerowej dające możliwość automatycznego doboru parametrów modelu.

Analiza procesu dwupołożeniowej regulacji temperatury obiektu bez opóźnienia

Do teoretycznych rozważań dotyczących przebiegu procesu dwupołożeniowej regulacji przyjmujemy najprostszy model obiektu w postaci elementu inercyjnego pierwszego rzędu bez opóźnienia. Przebieg zmian temperatury takiego obiektu podczas regulacji pokazuje rysunek 9.1.4.



Rysunek 9.1.4. Przebieg zmian temperatury obiektu inercyjnego pierwszego rzędu bez opóźnienia: a) podczas regulacji, b) przebieg zmian mocy grzejnej

Rozdział 9

Przyjmujemy następujące założenia:

τ_{max} – maksymalna temperatura pieca (obiektu),

Δt_1 – czas narastania temperatury,

t_z – czas załączania grzejnika,

t_w – czas wyłączania grzejnika,

D – strefa niejednoznaczności,

P – moc grzejna,

P' – moc grzejna,

Jakość regulacji jest oceniana na podstawie wielkości odchyleń rzeczywistej temperatury obiektu od temperatury zadanej. Z rysunku 9.1.4 wynika, że w przypadku obiektu bez opóźnienia decyduje o tym tylko strefa niejednoznaczności regulatora. Drugim istotnym parametrem procesu regulacji jest okres wahań temperatury. Wielkość ta nie tylko zależy od właściwości regulatora, ale także od właściwości samego obiektu oraz relacji między temperaturą zadaną i maksymalną temperaturą obiektu. Przebiegi charakterystyki dynamicznej elementu inercyjnego pierwszego rzędu dla narastania i opadania temperatury pokazane są na rysunku 9.1.5 i 9.1.6. Są to krzywe wykładnicze opisane równaniem (9.1.11). Wahań temperatury podczas regulacji odbywać się będą wg odcinków tych krzywych.

Krzywą narastania temperatury w analogii do (9.1.11) można opisać wzorem

$$\tau_1 = \tau_{max} \left(1 - e^{-t_1/T}\right), \quad (9.1.13)$$

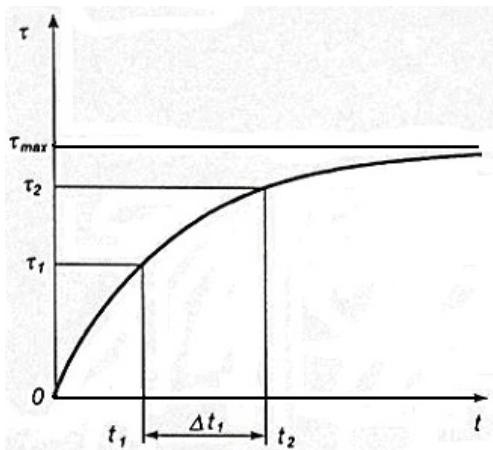
oraz

$$\tau_2 = \tau_{max} \left(1 - e^{-t_2/T}\right), \quad (9.1.14)$$

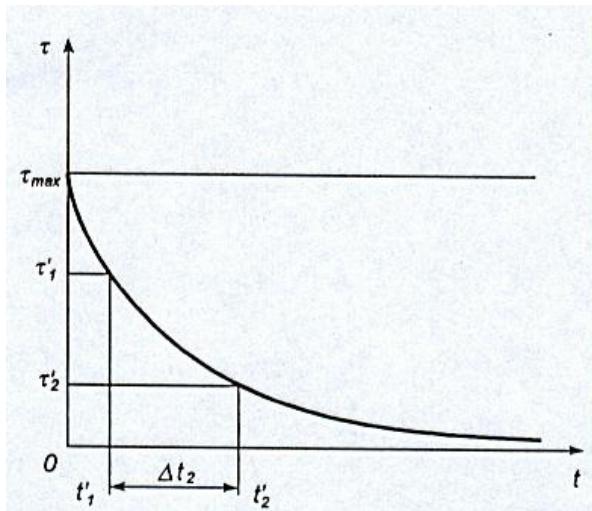
Z rysunku 9.1.5 wynika

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1, \quad (9.1.15)$$

Analogicznie można sformułować odpowiednie zależności dla przebiegu opadania temperatury



Rysunek 9.1.5. Przebieg krzywej narastania temperatury



Rysunek 9.1.6. Przebieg krzywej opadania temperatury

$$\tau_i' = \tau_{max} e^{-i_1/T}, \quad (9.1.17)$$

$$\tau_2' = \tau_{max} e^{-i_2/T}, \quad (9.1.18)$$

Na podstawie rysunku 9.1.6

Rozdział 9

$$\Delta t_2 = t_2' - t_1', \quad (9.1.19)$$

Ze wzoru (9.1.18) po wykorzystaniu wzorów (9.1.17) i (9.1.19) otrzymamy

$$\tau_2' = \tau_1' e^{-\Delta t_2/T}, \quad (9.1.20)$$

Wymienione zależności zostaną wykorzystane do wyznaczania czasu narastania i czasu opadania temperatury podczas regulacji. Na podstawie rysunku 9.1.4 oraz wzoru (9.1.16) przebieg narastania temperatury można opisać następująco

$$\tau_z + \frac{D}{2} = \left(\tau_z - \frac{D}{2} \right) e^{-\Delta t_1/T} + \tau_{\max} \left(1 - e^{-\Delta t_1/T} \right), \quad (9.1.21)$$

stąd po przekształceniach wzoru (9.1.21) wzór określający czas narastania temperatury przyjmuje postać

$$\Delta t_1 = T \ln \frac{\left| \tau_{\max} - \left(\tau_z - \frac{D}{2} \right) \right|}{\left| \tau_{\max} - \left(\tau_z + \frac{D}{2} \right) \right|}. \quad (9.1.22)$$

Analogicznie dla opadania temperatury

$$\tau_z - \frac{D}{2} = \left(\tau_z + \frac{D}{2} \right) e^{-\Delta t_2/T}, \quad (9.1.23)$$

stąd

$$\Delta t_2 = T \ln \frac{\frac{\tau_z + \frac{D}{2}}{D}}{\frac{\tau_z - \frac{D}{2}}{2}}. \quad (9.1.24)$$

Okres wahań jako suma dwóch czasów wynosi

$$\Delta t_1 = T \ln \left| \frac{\tau_{\max} - \left(\tau_z - \frac{D}{2} \right)}{\tau_{\max} - \left(\tau_z + \frac{D}{2} \right)} \cdot \frac{\left(\tau_z + \frac{D}{2} \right)}{\left(\tau_z - \frac{D}{2} \right)} \right|. \quad (9.1.25)$$

Z otrzymanych wzorów (9.1.22) i (9.1.23) wynika, że przy $\tau_z > \tau_{\max}/2$ czas narastania temperatury jest większy od czasu opadania, czyli $\Delta t_1 > \Delta t_2$. W miarę oddalania się τ_z w górę od $\tau_{\max}/2$ czas Δt_1 rośnie, a Δt_2 maleje. Dla $\tau_z < \tau_{\max}/2$ jest odwrotnie, tzn. $\Delta t_2 > \Delta t_1$.

Równość czasów zachodzi, gdy $\tau_z = \tau_{\max}/2$. Jednocześnie przy $\tau_z = \tau_{\max}/2$ okres wahań jako suma czasu wzrostu i opadania osiąga swoje minimum i można go wyznaczyć ze wzoru

$$T_{r\min} = 2T \ln \left| \frac{1 + \frac{D}{\tau_{\max}}}{1 - \frac{D}{\tau_{\max}}} \right|. \quad (9.1.26)$$

W miarę oddalania się τ_z od $\tau_{\max}/2$ w dół lub w górę, okres wahań wzrasta i ten wzrost jest symetryczny względem $\tau_{\max}/2$. W rozważanym przypadku czas wzrostu t_z i czas opadania t_w są równoważne z czasami podłączenia i wyłączenia grzejnika. Wobec tego, wyciągnięte powyżej wnioski, dotyczące czasów Δt_1 i Δt_2 pozostają także słuszne w odniesieniu do czasów t_z i t_w .

Analiza procesu dwupołożeniowej regulacji temperatury obiektu z opóźnieniem

Przebieg zmian temperatury podczas regulacji obiektu z opóźnieniem oraz uzupełnienie oznaczeń charakterystycznych wielkości podaje rysunek 9.1.7.

Dodatkowe oznaczenia to:

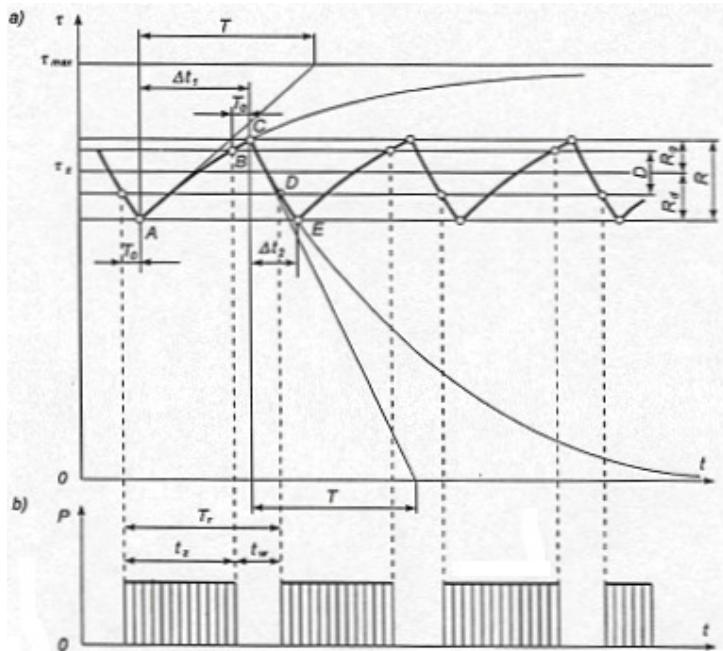
R – rozrzut temperatury,

Rozdział 9

R_g – górnna składowa rozrzutu,

R_d – dolna składowa rozrzutu.

Przy wykorzystaniu wzorów (9.1.16) i (9.1.20) zostaną wyznaczone wielkości rozrzutu temperatury i jego składowych.



Rysunek 9.1.7. Przebieg zmian temperatury podczas regulacji obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem:
a) podczas regulacji,
b) przebieg zmian mocy grzejnej

Dla narastania temperatury jest

$$\tau_z + R_g = \left(\tau_z + \frac{D}{2} \right) e^{-T_0/T} + \tau_{\max} \left(1 - e^{-T_0/T} \right), \quad (9.1.27)$$

Stąd górnna składowa rozrzutu jest

$$R_g = (\tau_{\max} - \tau_z) \left[\tau_{\max} - \left(\tau_z + \frac{D}{2} \right) \right] e^{-T_0/T}. \quad (9.1.28)$$

Podobnie dla opadania temperatury

$$\tau_z - R_d = \left(\tau_z - \frac{D}{2} \right) e^{-T_0/T}, \quad (9.1.29)$$

Zatem, składowa dolnego rozrzutu jest

$$R_d = \tau_z - \left(\tau_z - \frac{D}{2} \right) e^{-T_0/T}. \quad (9.1.30)$$

A więc rozrzut przy wykorzystaniu wzorów 9.1.28 i (9.1.30) można wyrazić następująco

$$R = R_d + R_g = \tau_{\max} - (\tau_{\max} - D) e^{-T_0/T}. \quad (9.1.31)$$

Ze wzoru (9.31) wynika, że rozrzut temperatury dla obiektu z opóźnieniem nie jest równoznaczny ze strefą niejednoznaczności, jak to miało miejsce w przypadku obiektu bez opóźnienia.

Rozrzut temperatury w obiekcie z opóźnieniem zależy od strefy niejednoznaczności regulatora D, maksymalnej temperatury τ_{\max} oraz od właściwości obiektu w postaci stałych T i T_0 , aściślej od stosunku T_0/T .

Składowe rozrzutu: górną R_g maleje ze wzrostem τ_z , dolna R_d rośnie, ponadto również zależy od wielkości temperatury zadanej τ_z . W wyniku procesu dwupołożeniowej regulacji otrzymuje się stałe wahania temperatury rzeczywistej obiektu wokół pewnej wartości średniej τ_{sr} , której nie można utożsamiać z temperaturą zadaną. Wartość średniej określa się jako średnią arytmetyczną minimalnej i maksymalnej temperatury obiektu w ustalonym procesie regulacji. A więc

$$\tau_{sr} = \frac{(\tau_z + R_g)}{2} + \frac{(\tau_z - R_d)}{2} = \tau_z + \frac{R_g - R_d}{2}. \quad (9.1.32)$$

Po przekształceniu powyższego wzoru jako różnicy pomiędzy temperaturą zadaną i średnią, umownie nazwaną przesunięciem środka wałań i oznaczeniu przez δ otrzymamy

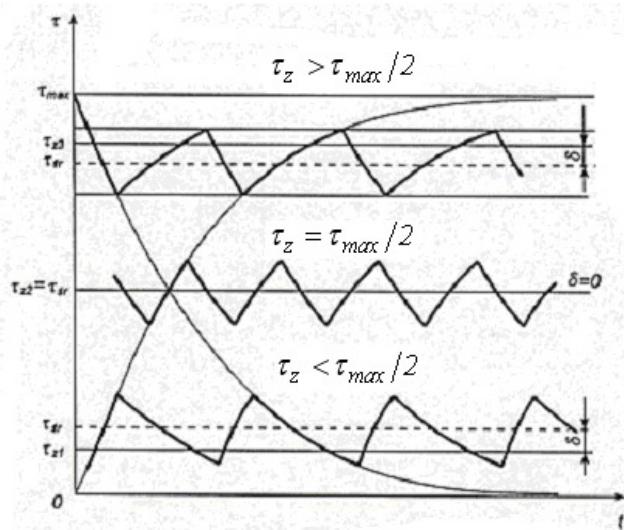
$$\delta = \tau_z - \tau_{sr} = \frac{R_d - R_g}{2}, \quad (9.1.33)$$

Podstawiając wzory (9.1.28) i (9.1.30) do (9.1.33) otrzymamy

ROZDZIAŁ 9

$$\delta = \left(\tau_z - \frac{\tau_{max}}{2} \right) \left(1 - e^{-T_0/T} \right). \quad (9.1.34)$$

Stąd wynika, że dla obiektu o wartości przesunięcia środka oscylacji δ decydują wielkości τ_z i τ_{max} . Można wyróżnić trzy charakterystyczne przypadki przedstawione na rysunku 9.1.8. Temperatura zadana τ_z pokrywa się z temperaturą średnią τ_{sr} jedynie w przypadku, gdy $\tau_z = \tau_{max}/2$. Przesunięcie środka oscylacji jest tym większe, im temperatura zadana jest bardziej odległa od $\tau_{max}/2$, ponieważ stosunek T_0/T dla danego obiektu jest stałą wielkością. Jest to bardzo istotna cecha dwupołożeniowej regulacji. Znajomość relacji pomiędzy τ_z i τ_{sr} może być w praktyce wykorzystana do poprawienia dokładności regulacji przez wprowadzenie określonych poprawek wartości temperatury zadanej, różnych w poszczególnych zakresach τ_z .



Rysunek 9.1.8. Przebiegi rzeczywistej temperatury obiektu przy różnych wartościach temperatury zadanej

Okras wahań

$$\Delta t_l = T \ln \frac{\left| \tau_{max} - (\tau_z - R_d) \right|}{\left| \tau_{max} - (\tau_z + R_g) \right|}, \quad (9.1.35)$$

zaś czas opadania

$$\Delta t_2 = T \ln \left| \frac{(\tau_z + R_g)}{(\tau_z - R_d)} \right|, \quad (9.1.36)$$

zaś okres wahań temperatury jest

$$T_r = \Delta t_1 + \Delta t_2 = T \ln \left| \left\{ \frac{\tau_{max} - (\tau_z - R_d)}{\tau_{max} - (\tau_z + R_g)} \right\} \left\{ \frac{\tau_z + R_g}{\tau_z - R_d} \right\} \right|. \quad (9.1.37)$$

Minimalną wartość okresu wahań, analogicznie jak poprzednio, występującego przy $\tau_z = \tau_{max}/2$ można obliczyć ze wzoru

$$T_{rmin} = 2T \ln \left| \frac{\frac{\tau_{max} + R}{2}}{\frac{\tau_{max} - R}{2}} \right|. \quad (9.1.38)$$

Reasumując można stwierdzić, że prawie wszystkie wnioski wynikające dla obiektu bez opóźnienia pozostają słuszne także i dla obiektu z opóźnieniem. Opóźnienie obiektu powoduje wydłużenie wszystkich omawianych czasów i wzrost rozrzutu temperatury. Należy również pamiętać, że nie należy utożsamiać czasu załączania i wyłączania grzejnika z czasem wzrostu i opadania temperatury w obiekcie. Jak wynika z rysunku 9.1.7 czasy te są sobie równe (rzuty odcinków BC i DE na oś czasu są równe) i wynoszą T_o , ale początek podłączenia grzejnika (punkt D) następuje wcześniej o czas T_o niż początek wzrostu temperatury (punkt E). Jak widać zjawiska te nie przebiegają jednocześnie, chociaż ich czasy trwania są jednakowe.

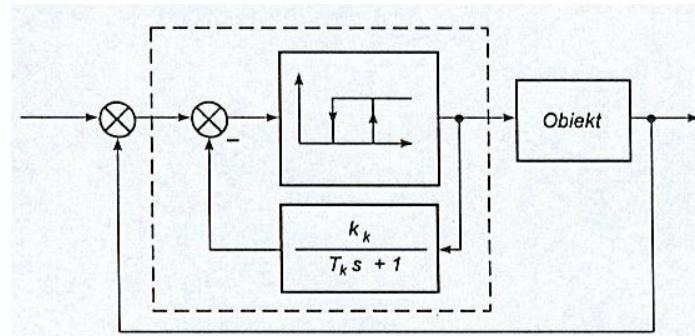
Metody korekcji

Jak już stwierdzono rozrzut temperatury jest uzależniony od właściwości obiektu, maksymalnej temperatury i od histerezy regulatora. Aby zmniejszyć rozrzut należy zastosować układ korekcyjny. Ze wzoru (9.1.38) wynika, że przy stałych właściwościach obiektu wielkość rozrzutu można zmniejszyć poprzez zwiększenie częstości przełączeń regulatora i zastosowanie sprzężenia zwrotnego wokół regulatora. Schemat takiego układu przedstawia rysunek 9.1.9.

ROZDZIAŁ 9

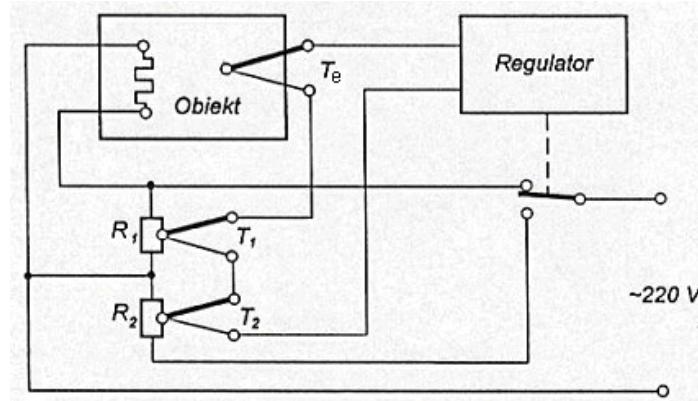
W torze sprzężenia zwrotnego najczęściej umieszcza się element (korekcyjny) w postaci elementu inercyjnego pierwszego rzędu o transmitancji

$$G_k = \frac{k_k}{T_k s + 1}. \quad (9.1.39)$$



Rysunek 9.1.9. Schemat blokowy układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym wokół regulatora

Częstotliwość przełączeń takiego układu poprzez dobór parametrów jego elementów, można w większym stopniu uzależnić od właściwości elementu sprzężenia zwrotnego niż od samego obiektu. Układ korekcyjny, oznaczony linią przerywaną, można traktować jako niezależny układ dwupołożeniowy, w którym nie występuje opóźnienie. Częstotliwość takiego układu jest znacznie większa niż częstotliwość układu bez korekcji. Przykład realizacji takiego układu pokazuje rysunek 9.1.10.



Rysunek 9.1.10. Układ dwupołożeniowej regulacji temperatury z dwoma elementami korekcyjnymi

Jak widać na powyższym rysunku, zastosowano dwa dodatkowe małe mocy grzejniki R_1 i R_2 oraz termopary T_1 i T_2 . W momencie załączania głównego grzejnika pieca włączany jest także grzejnik dodatkowy R_1 .

Sygnal z termopary T_1 dodaje się do sygnału z termopary T_e umieszczonej w obiekcie. Wobec tego regulator wyłączy dopływ mocy grzejnej przed osiągnięciem przez obiekt temperatury zadanej. W momencie wyłączenia mocy grzejnej następuje włączenie grzejnika R_2 . Sygnal z termopary T_2 odejmie się od sygnału z termopary T_e i regulator wcześniej włączy moc grzejną, ponieważ otrzymuje on informację o spadku temperatury obiektu z wyprzedzeniem.

Innym sposobem poprawy jakości dwupołożeniowej regulacji jest zastosowanie w obiekcie dwóch oddzielnnych grzejników. Jednego włączanego na stałe, drugiego połączonego z regulatorem dwupołożeniowym. Maksymalna temperatura, jaką może zapewnić grzejnik włączony na stałe, musi być niższa od temperatur zadanych. Stanowi ona jednocześnie temperaturę otoczenia dla grzejnika włączonego poprzez regulator. W ten sposób można uzyskać względne zmniejszenie wartości maksymalnej temperatury obiektu, zawsze mierzonej od poziomu temperatury otoczenia. Wobec tego maleje rozrzut temperatury. Takie rozwiązanie uzasadnia wó (9.1.31).

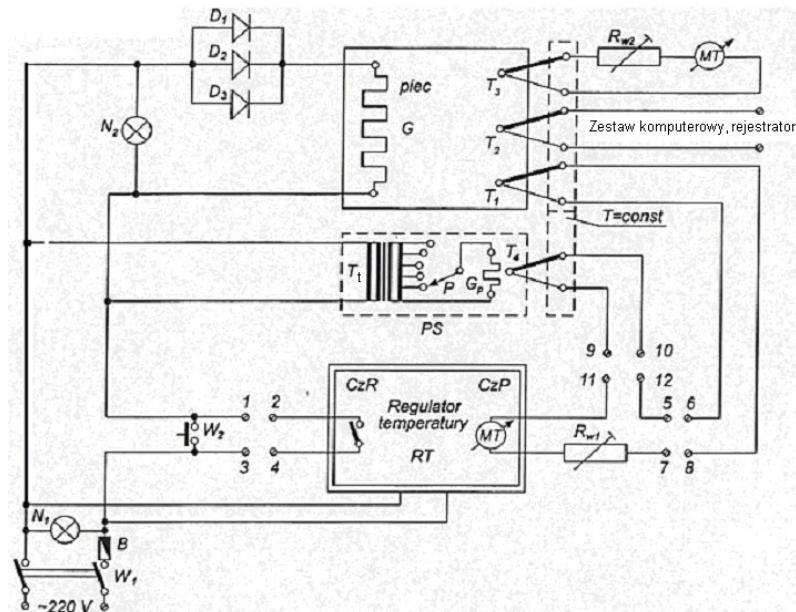
Opis stanowiska

Schemat zastosowanego w ćwiczeniu układu dwupołożeniowej regulacji temperatury przedstawia rysunek 9.1.11. Grzejnik G pieca (obiektu) zasilany jest z sieci napięciem 220 V, 50 Hz poprzez włączony szeregowo zespół diod $D_1 - D_3$. Zastosowanie jednopołówkowego prostownika prądu płynącego przez grzejnik G oznacza, że doprowadzona moc do grzejnika jest dwukrotnie mniejsza. Zostało to uwzględnione przy dobrze mocy grzejnika, aby dopasować maksymalną wartość temperatury pieca do parametrów miernika temperatury MT i regulatora RT .

Napięcie zasilania obiektu (pieca) może być ręcznie załączane za pomocą wyłącznika W_2 lub automatycznie poprzez człon regulujący CzR regulatora. Realizacja automatycznego sterowania wymaga połączenia zacisków $1 - 2$ i $3 - 4$ oraz rozłączenia obwodu wyłącznikiem W_2 . Czujnik pomiarowy w postaci termoelementu T_1 jest umieszczony we-

ROZDZIAŁ 9

wnętrz pieca w pobliżu grzejnika i połączony z zaciskiem 6 i 8. W przypadku połączenia zacisków 5–6, 7–8 i 11–12 termoelement T_1 jest połączony bezpośrednio z członem pomiarowym regulatora, zaś dzięki połączeniu zacisków 10–12 i 9–11 w obwód pomiarowy włączony zostaje dodatkowy termoelement T_4 przystawki sprzężenia zwrotnego PS. Przystawka ta składa się z transformatora T_t , przełącznika P , grzejnika G_p i wcześniej wspomnianego termoelementu T_4 . Sygnał sprzężenia zwrotnego jest jednokierunkowy, tylko powstaje w czasie dogrzewania obiektu, a jego wielkość zależy od położenia przełącznika P . Ponadto w układ są wbudowane dwa dodatkowe niezależne obwody pomiarowe. Jeden z nich służy do pomiaru rzeczywistej temperatury obiektu za pomocą termometru T_3 i miernika temperatury MT .



Rysunek 9.1.11. Schemat układu dwupołożeniowej regulacji temperatury

Drugi zaś służy do rejestracji przebiegów czasowych temperatury za pomocą termometru T_2 i rejestratora. Dla umożliwienia porównania wyników pomiarów i rejestracji, termometry T_1 , T_2 i T_3 umieszczone prawie w tym samym punkcie pieca. Wolne końce termometrów

T_1, T_2, T_3 i T_4 znajdują się w stałej temperaturze odniesienia, $t = \text{const.}$, którą w tym przypadku jest temperatura otoczenia. Wskazane na schemacie stanowiska oporności R_{w1} i R_{w2} są opornościami wyrównawczymi.

Z chwilą włączenia zasilania grzejnika, temperatura obiektu zaczyna wzrastać. Po przekroczeniu temperatury nastawionej w regulatorze następuje przełączenie styków CzR regulatora i wyłączenie mocy grzejnej. Temperatura zaczyna spadać i w chwili gdy osiągnie odpowiednio niższą wartość od zadanej, następuje ponowne włączenie mocy grzejnej i jednocześnie elementu grzejnego przystawki. Włączenie termoelementu T_4 w obwód CzP (szeregowo z T_1) powoduje przyspieszenie ruchu wskazówki miernika temperatury umieszczonego w regulatorze RT i wcześniejsze wyłączenie mocy grzejnej. Stan podłączenia stanowiska do sieci zasilającej jest sygnaлизowany przez neonówkę N_1 , a stan grzania neonówką N_2 .

Wykonanie ćwiczenia

1. Określenie własności obiektu:

- podłączyć do układu rejestrator lub zestaw komputerowy,
- odłączyć regulator temperatury RT ,
- włączyć moc grzejną pieca i zarejestrować przebieg, aż do ustalenia się jej wartości.

2. Badanie dwupołożeniowej regulacji bez korekcji:

- do wejścia regulatora RT przyłączyć termoelement T_1 ,
- połączyć zaciski 1-2 i 3-4, a wyłącznik W_2 pozostawić w stanie otwartym,
- podłączyć rejestrator lub zestaw komputerowy,
- włączyć moc grzejną pieca i zarejestrować przebiegi temperatury dla trzech różnych wartości temperatury zadanej τ_z ,

3. Badanie dwupołożeniowej regulacji z korekcją:

ROZDZIAŁ 9

- układ pomiarowy połączyć jak w punkcie 2, a ponadto włączyć szeregowo z termoelementem T_1 termoelement T_4 ,
- włączyć moc grzejną pieca i zarejestrować przebiegi temperatury dla dwóch różnych wartości, temperatury zadanej τ_z przy dwóch różnych położeniach przełącznika korekcji P.

Opis i podstawowe dane programu do zapisu wyników ćwiczenia "Regulacja dwupołożeniowa"



I. Funkcje podstawowe:

1. Ustawienie współczynników przeliczeń sygnałów napięciowych na wielkości fizyczne – pola A, B dla temperatura w [$^{\circ}\text{C}$]
2. Ustawienie ścieżki dostępu i nazwy pliku do zapisu wyników próby – pole „NAZWA PLIKU DO ZAPISU”
3. Rejestracja zmian parametrów a czasie i ich zobrazowanie na wykresie „WYKRESY” (klawisze „START” – „STOP”)
4. Zapis zebranych danych w pliku (klawisz „ZAPISZ”)
5. Kasowanie pliku wyników o nazwie zadeklarowanej w polu „NAZWA PLIKU DO ZAPISU” – klawisze „Kasuj plik” oraz „TAK” i „NIE”

6. Sygnalizacja:

- istnienia pliku wyników o wybranej nazwie – „PLIK ISTNIEJE! ZMIEN NAZWE PLIKU DO ZAPISU!”
- pracy – „ZBIERAM DANE!”
- skasowania pliku – „PLIK SKASOWANY”

7. Wskazywanie:

- czasu rejestracji w sekundach - [s]
- aktualnej wartości temperatury - [$^{\circ}C$]
- przekroczenia poziomu $+280^{\circ}C$ – zmiana koloru pola wskazań

8. Edycja wykresu i dobór sposobu i zakresu przedstawienia wyników

9. Wybór drukarki i ustawienie parametrów wydruku oraz Wydruk kopii wykresu

II. Uruchomienie programu:

1. Uruchomienie programu należy poprzedzić uruchomieniem aplikacji testującej kartę pomiarową, oceniąc prawidłowość wskazań (wskazywane poziomy napięć) oraz wielkość zakłóceń (zakres zmian poziomów napięć wskazywanych)
2. Po zamknięciu aplikacji testującej, uruchomić aplikację „Rejestrator Ćwiczenia „Regulacja Dwupołożeniowa””
3. Wpisać wartości współczynników przeliczeniowych temperatury A i B
4. Wpisać nazwę i ścieżkę dostępu do pliku w którym zapisane zostaną wyniki próby
5. Uruchomić akwizycję wyników – przyciskiem START – co sygnalizowane jest napisem „ZBIERAM DANE”
6. Obserwować wskazania temperatury i zmian napięcia sterującego na wykresie „WYKRESY”

ROZDZIAŁ 9

7. Po zarejestrowaniu wymaganego fragmentu przebiegu zatrzymać zapis klawiszem „STOP”
8. Zapisać zebrane dane do pliku klawiszem „ZAPISZ”
9. Poddać wykres edycji klawiszem „INSPECT” – pokaże się nowe okno „Copy of „WYKRESY:””
10. Z menu „File” w oknie „Copy of „WYKRESY:”” wybrać polecenie „Print Setup ...” i ustawić parametry wydruku i orientację strony wydruku
11. Z menu „File” w oknie „Copy of „WYKRESY:”” wybrać „Print” i wydrukować na drukarce kopię wykresu
12. Zamknąć okno „Copy of „WYKRESY:”” polecienniem „File”, „Close Window”
13. Kontynuować dalsze rejestracje wg. Punktów 4 do 12.
14. Wyłączenie aplikacji następuje poprzez zamknięcie okna aplikacji lub klawiszami ALT+F4

III. Obsługa programu:

15. Ustawienie współczynników przeliczeń sygnałów napięciowych np. dla temperatura w [°C] – pola A, B
 - Kliknąć pole opisane przez nazwę współczynnika
 - Wpisać wybraną wartość
 - Zaakceptować wpis klawiszem „ENTER”
 - Nastawy wpisywane są jednokrotnie po uruchomieniu aplikacji, wartościami domyślnymi są A = 50, B=-100
16. Ustawienie lub zmiana nazwy pliku wyników:
 - Wybrać funkcję wyboru nazwy pliku przyciskiem „FILE” w polu „NAZWA PLIKU DO ZAPISU”
 - Wskazać ścieżkę dostępu do katalogu i wpisać nazwę pliku do zapisu wyników próby.
 - Potwierdzić wybór przyciskiem „OTWÓRZ” Program automatycznie uzupełni rozszerzenie „.dat”

- Nowa nazwa zostanie wpisana w pole nazwy pliku do zapisu
17. Obsługa kasowania pliku wyników:
- Uruchom przycisk „Kasuj plik”
 - Potwierdź decyzję „TAK” lub „NIE” w polu „CZY SKASOWAĆ ZAPISANY PLIK ?”
 - Plik o nazwie zapisanej w polu „NAZWA PLIKU DO ZAPISU” zostaje skasowany , co sygnalizowane jest napisem „PLIK ZOSTAŁ SKASOWANY”
18. Obsługa Wydruku wykresu na drukarce:
- Poddać wykres edycji klawiszem „INSPECT” – pokaże się nowe okno „Copy of „WYKRESY:””
 - Klikając odpowiedni element wykresu: oś, podziałkę, liczby opisujące, pole wykresu, linie wykresowe, poddać go edycji i wybrać sposób zobrazowania
 - Z menu „File” w oknie „Copy of „WYKRESY:”” wybrać polecenie „Print Setup ...” i ustawić parametry wydruku i orientację strony wydruku
 - Z menu „File” w oknie „Copy of „WYKRESY:”” wybrać „Print” i wydrukować na drukarce kopię wykresu
 - Zamknąć okno „Copy of „WYKRESY:”” poleceniem „Close Windows” z menu „File”

IV. Uwagi dodatkowe:

1. Każdorazowe uruchomienie rejestracji przyciskiem „START” wymaga zatrzymania przyciskiem „STOP”
2. Ponowne uruchomienie rejestracji następuje przy użyciu przycisku „START”. Zebrane wcześniej dane – jeśli nie zostały zapisane przyciskiem „ZAPISZ” - nie zostają zachowane.
3. Zapis wyników do pliku następuje dopiero po dokonaniu rejestracji zobrazowanej na wykresie i uruchomieniu tej funkcji przyciskiem „ZAPISZ”. Zapis do istniejącego pliku wyników jest programowo uniemożliwiony, ponowny zapis zarejestrowanych wyników jest możliwy po zmianie nazwy pliku wyników

ROZDZIAŁ 9

4. W przypadku wywołania Wykresu do edycji przyciskiem „INSPECT” zatrzymany zostaje przebieg akwizycji po uruchomieniu któregokolwiek polecenia z menu okna „Copy of „WYKRESY:””
5. Wybranie polecenia „ABORT” w oknie informacyjnym aplikacji powoduje zamknięcie aplikacji, wybranie polecenia „OK” lub „Cancel” kontynuuje działanie aplikacji.

Format pliku wyników rejestracji ćwiczenia „REGULACJA DWUPOŁOŻENIOWA”:

Czas[s] t [oC] syg.zalacz [V]			NAGŁÓWEK
plik wynikow = C:\WYNIKI\ZAPIS.DAT data zapisu = 04:14:41 04/12/09 kanal komp.= 0,1 ; probkowanie = co 1 s Wspolcz. wzorcowania = A = 50 [oC/V] B = -100 [oC]			
			DANE
0	24.7	220	
1	25.2	220	
2	28.1	220	
3	31.6	220	
4	33	220	
5	35.8	220	
6	43.7	220	
7	48.9	220	
8	50.5	220	
9	52.9	220	
10	53.9	220	
11	58.3	220	
...			
...			
1220	266.4	0	
1221	260.4	0	
1222	258.1	220	
1223	256.4	220	

Nagłówek:

- ścieżka do katalogu wyników i nazwa pliku wyników
- czas i data realizacji próby (zapisu)
- numery kanałów komputerowych użytych do rejestracji (zazwyczaj 0 i 1)

- częstotliwość próbkowania (zazwyczaj co 1 s)
- użyte współczynniki wzorcowania temperatury
- (początkowo $A = 50 [{}^{\circ}\text{C}/\text{V}]$ $B = -100 [{}^{\circ}\text{C}]$)
- oznaczenie kolumn wyników
 - kolumna 1 - czas[s] – czas rejestracji
 - kolumna 2 - $t [{}^{\circ}\text{C}]$ – zmierzona temperatura
 - kolumna 3 – sygnał załączenia napięcia na grzałce stanowiska [V]

Treść sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Krótki opis stanowiska,
2. Zarejestrowany przebieg temperatury wg punktu 1 przebiegu ćwiczenia wraz z wyznaczeniem T i T_0 ,
3. Zarejestrowany przebieg temperatury wg punktu 2 przebiegu ćwiczenia wraz z wyznaczeniem R_g , R_d , Δt_1 , Δt_2 i T_r ,
4. Obliczenie wielkości, wymienionych w poprzednim punkcie na podstawie wzorów teoretycznych (9.1.28, 9.1.30, 9.1.35-9.1.37),
5. Zarejestrowane przebiegi temperatury wg punktu 3 przebiegu ćwiczenia,
6. Porównanie wyników i wnioski.

Literatura

1. Górecki H.: Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem, PWN, Warszawa 1978.
2. Kołacina T i inni: Ćwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki i teorii maszyn, Praca zbiorowa pod redakcją Tadeusza Kołacina, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.
3. Kołacina T.: Podstawy teorii maszyn i automatyki, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.
4. Węgrzyn S.: Podstawy automatyki, PWN, Warszawa, 1972.
5. Żelazny M.: Podstawy Automatyki, PWN, Warszawa, 1976.

9.2. Badanie regulatorów Eftronik X i układu sterowania z regulatorem PID LB 600

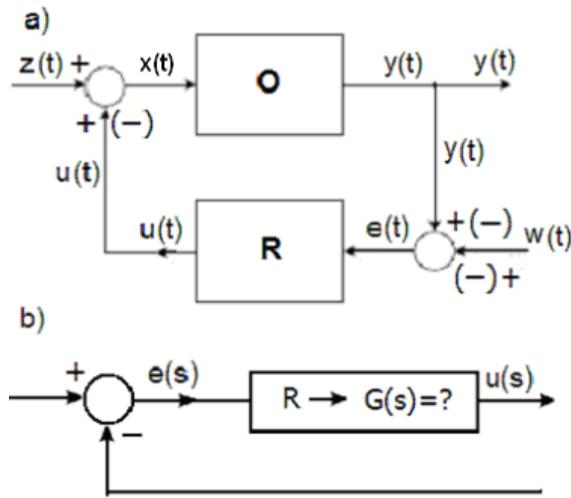
Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zbadanie odpowiedzi na wymuszenie skokowe różnych typów regulatorów na podawane na wejście sygnały wymuszające, analiza tych odpowiedzi, wyznaczenie z nich nastaw regulatorów oraz zbadanie, z jaką dokładnością można te nastawy określić dla normalnie stosowanych regulatorów przemysłowych. Zostanie także zbadane oddziaływanie regulatora PID na obiekt w zamkniętym układzie regulacji.

Wprowadzenie teoretyczne

Przedstawimy transmitancje oraz charakterystyki czasowe i częstotliwościowe podstawowych liniowych regulatorów o działaniu ciągłym (algorytmów sterowania) wykorzystywanych w przemysłowych układach sterowania. Podstawowym zadaniem regulatora jest wytworzenie takiego sygnału sterującego, wchodzącego do maszyny lub urządzenia jako obiektu regulacji by był wytwarzany taki sygnał jakiego żądamy i aby uchyb regulacji był jak najmniejszy. Wtedy uchyb regulacji dąży do zera. Regulator jest urządzeniem formującym sygnał sterujący według określonego algorytmu, wchodzącym w skład układu automatycznej regulacji, który ma dwa wejścia. Jedno wejście służy do wprowadzania informacji o bieżącej wartości wielkości regulowanej $y(t)$, drugie służy do wprowadzania informacji o wartości zadanej $w(t)$, tak jak na rysunku 9.2.1 a).

ROZDZIAŁ 9



Rysunek 9.2.1. Schematy blokowe: a) układu regulacji automatycznej, b) fragmentu układu z regulatorem R o transmitancji $G(s)$, O – obiekt, R - regulator

Usytuowanie regulatora w układzie regulacji automatycznej pokazano na powyższym rysunku. Sygnałem wyjściowym regulatora jest sygnał sterujący $u(t)$, sygnałem wejściowym uchyb regulacji $e(t)$ (rys.9.2.1a). Aby regulator mógł wypełnić swoje zadanie to musi zmierzyć wielkość regulowaną, porównać jej wartość z wartością zadaną $w(t)$ i wytworzyć uchyb regulacji $e(t)$ oraz przetworzyć sygnał uchybu w sygnał sterujący.

W szczególności w regulatorach wyznaczane są zawsze odchyłki regulacji $e(t)=y(t)-w(t)$ lub $e(t)=w(t)-y(t)$ (działanie proste lub odwrotne) oraz generowany jest wewnętrzny sygnał wartości zadanej $w(t)$.

Transmitancje obiektu i regulatora przyjmują postać

$$G_{ob}(s) = \frac{y(s)}{x(s)}, \quad G_r(s) = \frac{u(s)}{e(s)}. \quad (9.2.1)$$

Transformatę wielkości regulowanej $y(s)$ otrzymamy z transformaty obiektu, zatem

$$y(s) = G_{ob}(s)x(s), \quad (9.2.2)$$

Z równania węzła sumacyjnego (rys.9.2.1a)

$$x(s) = z(s) - u(s) = z(s) - G_r(s)e(s), \quad e(s) = y(s) - w(s). \quad (9.2.3)$$

Podstawiając powyższy związek do wzoru (9.2.2) otrzymamy transformatę sygnału wyjściowego $y(s)$ w zależności od transformaty zakłócenia $z(s)$ i wartości zadanej $w(s)$, a więc

$$\begin{aligned} y(s) &= G_{ob}(s)[z(s) - G_r(s)e(s)] = \\ &= G_{ob}(s)\{z(s) - G_r(s)[y(s) - w(s)]\} = \\ &= \frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_r(s)}z(s) + \frac{G_{ob}(s)G_r(s)}{1 + G_{ob}(s)G_r(s)}w(s), \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Wyrażenie $G_{ob}(s)/[1 + G_{ob}(s)G_r(s)]$ określa, jak wpływa zakłócenie na sygnał wyjściowy i nazywamy transmitancją zakłócenową. Transmitancja ta pozwala określić wielkość sygnału wyjściowego, gdy jest dana wielkość zakłócenia. Wyrażenie $G_{ob}(s)G_r(s)/[1 + G_{ob}(s)G_r(s)]$ wiążące transformatę wielkości regulowanej z transformatą wielkości zadanej nazywamy transmitancją ze względu na wartość zadaną. Transmitancja układu otwartego $G_{ob}(s)G_r(s)$ z reguły jest dużo większa od jedności, wtedy

$$y(s) \equiv \frac{I}{G_r(s)}z(s) + w(s). \quad (9.2.5)$$

Z tej zależności wynika, że znacznie zmniejsza się skutki zaburzenia nie wpływając na wartość sygnału wyjściowego przy zmianie wielkości zadanej.

Podstawiając do drugiej zależności wzoru (9.2.3) wzór (9.2.4) otrzymamy odpowiedź, jak wpływa zakłócenie $z(t)$ i wartość zadana $w(t)$ na uchybę regulacji $e(t)$, czyli

$$e(s) = \left[\frac{I}{1 + G_{ob}(s)G_r(s)} \right] [G_{ob}(s)z(s) - w(s)], \quad (9.2.6)$$

Jeżeli do układu wprowadzimy zakłócenie skokowe $z \cdot I(t)$ ($z = const$) i pozostawimy wartość $w(t)$ na stałym poziomie, wówczas transformatę uchybu otrzymamy z równania (9.2.6) w postaci

Rozdział 9

$$e(s) = \frac{z}{s} \frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_r(s)}, \quad (9.2.7)$$

Korzystając z twierdzenia o wartości końcowej otrzymamy dla stanu ustalonego wzór na uchyb regulacji

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} z \frac{I}{\frac{I}{G_{ob}(s)} + G_r(s)}. \quad (9.2.8)$$

Z powyższego wzoru wynika, że uchyb regulacji w stanie ustalonym jest równy zero, gdy $G_r(0) \rightarrow \infty$. Oznacza to, że regulator musi mieć działanie całkujące. Tak samo będzie, jeśli wystąpi działanie całkujące w dowolnym miejscu układu (obiekt- regulator), gdy mamy wymuszenie skokowe.

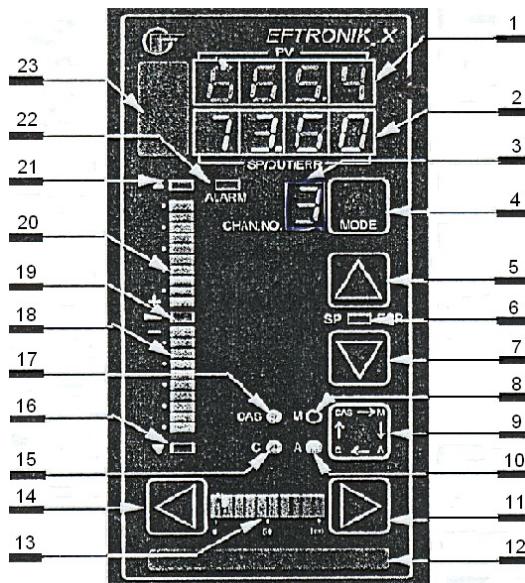
Podstawowe rodzaje regulatorów, ich charakterystyki czasowe i częstotliwościowe są przedstawione na str. 101-122.

Ocena jakości regulacji opisana jest punkcie 7.6 na str. 166-171.

Aproxymacja charakterystyki obiektu na podstawie charakterystyki skokowej przedstawiona jest w punktach 7.4, str.158 i 7.5, str. 160.

Regulator PID omówiony jest w punkcie 5.7, str. 118, zaś nastawianie jego parametrów na str. 124-126.

Opis elementów pulpitu operatorskiego regulatora PID Eftronik X



Rysunek 9.2.2 Widok płyty czołowej regulatora FTRONIK X

1. Wyświetlacz górny (czerwony), wyświetlający: a) w trybie pracy – wartość mierzoną (regulowaną) PV, b) w trybie programowania: – rodzaj regulatora, adres parametru (WAR-K-NP) –
2. Wyświetlacz dolny (zielony), wyświetlający: a) w trybie pracy – wartość sygnału wyjściowego CV, wartość zadaną SP, kody alarmów, b) w trybie programowania: – wartość parametru k_p, T_i, T_d ,
3. Wyświetlacz (zielony) CHAN, NO, wyświetlający: a) w trybie pracy – numer kanału regulacyjnego, b) w trybie programowania: – symbol "P",
4. Przycisk "MODE" realizujący funkcje: a) przełączanie trybu pracy (PRACA/PROGRAMOWANIE) oraz: a) w trybie pracy – przełączanie kanałów, kwitowanie alarmów, b) w trybie pro-

ROZDZIAŁ 9

gramowania: – przełączanie aktywności wyświetlaczy (górnego ↔ dolny),

5. Przycisk realizujący funkcje: a) w trybie pracy – przewijanie wyświetlanych na wyświetlaczu „2” wielkości, **b) w trybie programowania: – zwiększenie wartości aktywnej cyfry adresu lub wartości parametru,** c) w trybie włączania zasilania: włączenie zasilania z wcisniętymi przyciskami  i  (5 i 7) powoduje kasowanie hasła (PASS),
6. Dioda (zielona) SP-ERR sygnalizująca: a) gdy nie świeci to na wyświetlaczu „2” jest wartość sygnału wyjściowego, b) gdy świeci to na wyświetlaczu „2” jest wartość zadana SP lub kod alarmu,
7. Przycisk  realizujący funkcje: a) w trybie pracy – przewijanie wyświetlanych na wyświetlaczu „2” wielkości, **b) w trybie programowania: – zmniejszanie wartości aktywnej cyfry adresu lub wartości parametru,** c) w trybie włączania zasilania: włączenie zasilania z wcisniętymi przyciskami  i  (5 i 7) powoduje kasowanie hasła (PASS),
8. Dioda czerwona „M” (Manual) sygnalizująca pracę regulatora w trybie ręcznym,
9. Przycisk M, A, CAS, C realizujący: **a) w trybie pracy – przełączanie trybu pracy regulatora M ↔ A** (oraz CAS i C jeżeli zaprogramowano takie tryby pracy), **b) w trybie programowania: – nieaktywny,**
10. Dioda żółta „A” sygnalizująca pracę regulatora w trybie automatycznym (Automatic),
11. Przycisk  realizujący funkcje: a) w trybie pracy – zwiększenie/zmniejszanie (w zależności od logiki sygnału wyjściowego) sygnału wyjściowego (sterującego) regulatora w trybie pracy M, zmiana aktywnej pozycji wartości zadanej przy jej ustawianiu w trybie pracy (świeci dioda SP-ERR), przewijanie alarmów przy podglądzaniu kolejki alarmów (świeci dioda SP-ERR), **b) w trybie programowania: – przesuwanie pozycji aktywnej cyfry adresu lub wartości parametru,** c) w trybie włączania zasilania: włączenie zasilania z wcisniętymi przyciskami  i  (11 i 14)

ĆWICZENIA LABORATORYJNE

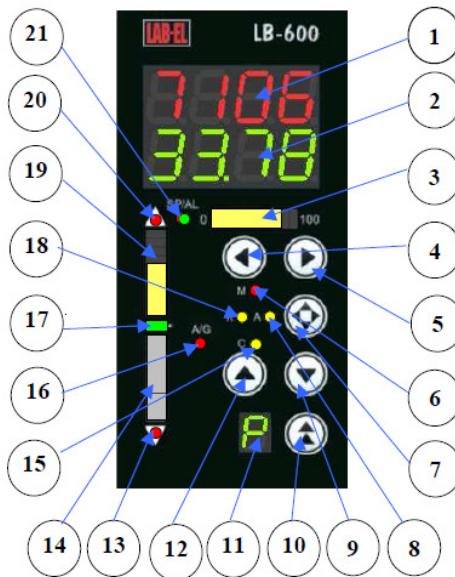
powoduje kasowanie struktury funkcjonalnej bez naruszenia wartości skalujących (EEPr),

12. Puste miejsce na dodatkowy przycisk,
13. Bargraf diodowy sygnalizujący: **a) przy regulacji ciągłej – procentową wartość sygnału wyjściowego**, b) przy regulacji dwustawnej 2P **regulacji** lewa skrajna dioda sygnalizuje stan załączania, c) przy regulacji trójstawnej 3P (wszystkie trzy rodzaje regulacji) – dwie skrajne diody bargrafu sygnalizują stan włączenia w kierunku włącz, otwórz, w lewo i /lub włącz, zamknij, w prawo,
14. Przycisk **◀** realizujący funkcje: a) w trybie pracy – zwiększańe/zmniejszanie (w zależności od logiki sygnału wyjściowego) sygnału wyjściowego (sterującego) regulatora w trybie pracy M, zmiana aktywnej pozycji wartości zadanej przy jej ustawianiu w trybie pracy (świeci dioda SP-ERR), przewijanie alarmów przy podglądzaniu kolejki alarmów (świeci dioda SP-ERR), **b) w trybie programowania: – zmniejszanie pozycji aktywnej cyfry adresu lub wartości parametru**, c) w trybie włączania zasilania: włączenie zasilania z wcisniętymi przyciskami **◀** i **▶** (11 i 14) powoduje kasowanie struktury funkcjonalnej (EEPr),
15. Dioda żółta „C” sygnalizująca pracę regulatora w trybie Computer (jeżeli został wybrany jeden z dostępnych algorytmów komputerowych), b) realizację funkcji BACKUP,
16. Dioda czerwona sygnalizująca przekroczenie dolnej wartości odchyłki regulacji,
17. Dioda żółta „CAS” sygnalizująca pracę regulatora w trybie kaskadowym (CAScade) możliwość pracy w tym trybie pojawia się przy zaadresowaniu wartości SP jako zdalnej (nie lokalnej),
18. Bargraf diodowy ujemnej odchyłki regulacji (programowana rozdzielcość wyświetlania),
19. Dioda zielona tzw. „zielona linia” świeci bezwarunkowo po włączeniu zasilania (sygnalizuje obecność napięcia +5 V zasilającego procesor),
20. Bargraf diodowy dodatniej odchyłki regulacji (programowana rozdzielcość wyświetlania),

ROZDZIAŁ 9

21. Dioda czerwona sygnalizująca przekroczenie górnej wartości odchyłki regulacji,
22. Dioda czerwona ALARM sygnalizuje obecność w kolejce aktywnych alarmów (nie dotyczy to alarmów od błędnej struktury AxxS)

Opis elementów pulpitu operatorskiego regulatora PID LB 600



UWAGA: dokonano zamiany miejscami przycisków 9 i 12

Rysunek 9.2.3. Opis elementów pulpitu operatorskiego regulatora **PID**
LB 600

1. Wyświetlacz (górny) czerwony:

- w trybie włączania zasilania regulatora słowo PrAC,
- w trybie kasowania pamięci Flash słowo EEPr,
- w trybie wprowadzania haseł zabezpieczających słowa PAS1 lub PAS2,

ĆWICZENIA LABORATORYJNE

- w trybie programowania wyświetla adres programowanego parametru lub słowa PrAC, podczas przełączania regulatora do trybu pracy oraz tAbl w momencie przejścia do programowania tablic (w trybie programowania – przy aktywnej cyfrze adresu warstwy 0 np. 0 1 0 1 naciśnięcie przycisku . W przypadku programowania tablic na górnym wyświetlaczu wyświetlane są: na trzech pierwszych pozycjach – numer modułu tablicy (moduły 5 elementowe) w zakresie od 001 – 200; ostatnia, czwarta cyfra oznacza numer parametru w module (1 – 5) ,,
- w trybie pracy:
 - wartość mierzoną PV w aktywnym kanale regulacyjnym,
 - wyświetlana wartość pulsuje w przypadku awarii któregokolwiek toru pomiarowego (wartość mierzona mniejsza lub większa od wartości wprowadzonych w trybie skalowania danego toru (kanału) – alarm AH lub AL),
 - PrOG – w momencie przejścia z trybu pracy do trybu programowania,
 - PrAC – w momencie przejścia z trybu programowania do trybu pracy,
 - in xy – w trybie wyświetlania wartości wejść analogowych, gdzie: in – input, x – numer pakietu, y – numer wejścia,
 - ou xy – w trybie wyświetlania wartości wyjść analogowych, gdzie: ou – output, x – numer pakietu, y – numer wyjścia,
 - St x – w trybie stacyjki zadawania stosunku, gdzie: x – numer kanału w którym ustawiana jest wartość regulowanego stosunku,
 - Stac – w trybie stacyjki sterowania ręcznego,
 - blad – w przypadku nieudanego eksperymentu,

ROZDZIAŁ 9

- PAS1 lub PAS2 – przy przejściu do trybu programowania w przypadku gdy zostały wcześniej wprowadzone hasła zabezpieczające,
- Exyy – adres parametru gdy wpisano hasło PAS 2, gdzie: x – numer kanału regulatora, yy – numer parametru,
- P01,...,P06 w trybie podglądu wartości identyfikacyjnych z eksperymentu i obliczonych nastaw PID, w przypadku udanego eksperymentu,

UWAGA

Przejście do trybu podglądu wartości identyfikacyjnych lub kodu błędu następuje poprzez naciśnięcie jedno lub dwukrotne przycisku  lub , po przeprowadzonym eksperymencie. Wyświetlanie wartości wejść i wyjść analogowych odbywa się poprzez naciśnięcie i trzymanie w tym stanie przycisku  (SHIFT) oraz odpowiednio dla wyjść naciskanie , a dla wejść .

2. Wyświetlacz (dolny) zielony:

- w trybie programowania wyświetlana jest: wartość programowanego parametru,
- w trybie programowania tablic: wartość parametru programowanego modułu tablicy,
- w trybie pracy: normalna praca:
 - wartość sygnału sterującego CV (wyświetlaną w skali 0...100%),
 - wartość zadaną SP (wyświetlaną w skali wartości mierzonych PV),
 - kody alarmów (wyświetlanych podczas pracy lub podczas przeglądu kolejki alarmów), w przypadkach realizacji programów czasowych:
 - dla programu dwustrefowego, oprócz parametrów wyświetlanych podczas normalnej pracy, wyświetla się numer dnia roku wg. zaprogramowanego kalendarza,
 - dla regulacji programowej, oprócz parametrów wyświetlanych podczas normalnej pracy, wyświetla

się P_{ppp} (gdzie p_{ppp}- liczba pętli pozostałą do zrealizowania – zliczanie wstecz, naprzemienne z Ottt-gdzie t_{ttt} jest numerem aktualnie realizowanego kroku programu, numer kroku stanowi adres początkowy tablicy zapisany w 7x38 powiększony o faktycznie realizowany krok programu - liczbę kroków programu określa się w parametrach tablic,

- dla regulacji FUZZY LOGIC, oprócz parametrów wyświetlanych podczas normalnej pracy, wyświetla się numer aktualnie pobieranego z tablic zestawu nastaw PID,
- dla regulacji adaptacyjnej ($k_p, T_i, T_d = f(\epsilon)$), oprócz parametrów wyświetlanych podczas normalnej pracy, wyświetla się numer aktualnie pobieranego z tablic zestawu nastaw PID,
- dla realizacji procedur samostrojenia:
- w przypadku niepowodzenia wyświetla się numer błędu,
- w przypadku poprawnego przeprowadzenia eksperymentu:
 - _ wartość z eksperimentu τ - stała czasowa obiektu – parametr P01,
 - _ wartość z eksperimentu τD - opóźnienie obiektu – parametr P02,
 - _ wartość z eksperimentu K - wzmacnienie obiektu – parametr P03,
 - _ obliczona wartość nastawy regulatora k_p – wzmacnienie proporcjonalne – parametr P04,
 - _ obliczona wartość nastawy regulatora T_i - czas zdwojenia (stała całkowania) – parametr P05,
 - _ obliczona wartość nastawy regulatora T_d - czas wyprzedzenia (stała różniczkowania) – parametr P06,

3. Bargraf diodowy przedstawiający:

ROZDZIAŁ 9

- dla regulacji ciągłej, wartość wielkości sterującej CV w skali 0...100% (z rozdzielczością wyświetlania 10%/pojedynczy LED),
 - dla regulacji dwustawnej 2P, sygnalizuje stan załączenia elementu wykonawczego (zapalenie trzech diod po lewej stronie w takt wysterowywania odpowiedniego przekaźnika na pakiecie wejść/wyjść binarnych),
 - dla regulacji trójstawnych 3P, 3Psprz. zew., 3P sprz. wew. , sygnalizuje stan załączenia w kierunku otwierania, grzania, itp. (zapalenie trzech diod po prawej stronie) oraz stan załączenia w kierunku zamknięcia, chłodzenia, itp. (zapalenie trzech diod po lewej stronie) – zaświecenie odpowiedniego zespołu diod na bargrafie odwzorowuje załączenie odpowiedniego przekaźnika na pakiecie wejść/wyjść binarnych,
4. Przycisk  służący do:
W trybie programowania:
- przewijanie aktywności cyfry na wyświetlacza - aktywność sygnalizowana pulsowaniem (gotowość do zmiany),
- w trybie pracy:
- zmniejszanie wartości sygnału sterującego CV w trybie pracy ręcznej (z przyrostem zaprogramowanym w 7-x-36),
 - przegląd "kolejki alarmów",
 - naciśnięty wraz z  podczas włączania zasilania powoduje wykasowanie hasła,
 - naciskane, z wcisniętym przyciskiem  (SHIFT) powoduje wyświetlanie wartości na poszczególnych wyjściach analogowych regulatora (ou xy -_ ou - wyjście, x - numer pakietu, y - numer wyjścia na pakiecie),
5. Przycisk  służący do:
W trybie programowania:
- przewijanie aktywności cyfry na wyświetlacza - aktywność sygnalizowana pulsowaniem (gotowość do zmiany)

W trybie pracy:

- zwiększanie wartości sygnału sterującego CV w trybie pracy ręcznej (z przyrostem zaprogramowanym w 7-x-36),,
- przegląd "kolejki alarmów",
- naciśnięty wraz z  podczas włączania zasilania powoduje wykasowanie hasła.
- naciskane, z wciśniętym przyciskiem  (SHIFT) powoduje wyświetlanie wartości na poszczególnych wejściach analogowych regulatora (in xy _ in - wejście, x - numer pakietu, y - numer wejścia na pakiecie),

6. Czerwona dioda "M" (Manual) sygnalizuje tryb pracy ręcznej,

7. Przycisk  służący do przełączania:

- wciśnięty wraz z naciśniętym  (SHIFT) powoduje przejście do trybu programowania oraz wyjście z trybu programowania do trybu pracy,
- w trybie programowania: przełączanie pomiędzy wyświetlaczem górnym (adres parametru), a dolnym (wartość),
- w trybie pracy: przełączanie trybu pracy _ M _ A_K_
- kasowanie błędów wyświetlanych w efekcie zakończenia z niepowodzeniem eksperymentów samostrojenia – funkcja obowiązkowa bez realizacji której, nie będzie możliwe ponowne uruchomienie procedur samostrojenia,

8. Żółta dioda "A" - sygnalizuje tryb pracy AUTOMATYKA,

9. Przycisk  służący do:

- w trybie programowania:
 - zmiana aktywnej cyfry w kierunku malejącym,
 - zmiana numeru programowanej tablicy w kierunku malejącym,

ROZDZIAŁ 9

- wraz z naciśniętym (SHIFT) przełączanie numeru pakietu (o ile system stwierdza obecność pakietów tego samego rodzaju),
- w trybie pracy:
 - przełączanie wielkości wyświetlanej na wyświetlaczu 2 w kolejności : PV => SP => Alarmy => inne wartości patrz opis w punkcie 2 =>.....
 - wraz z naciśniętym (SHIFT) przełączanie aktywnych kanałów w kierunku malejącym,
 - wraz z wciśniętym (SHIFT), akceptacja nastaw PID, wyliczonych po zakończeniu z powodzeniem procedury samostrojenia,
 - wraz z naciśniętym (SHIFT) – kwitowanie alarmów w trybie aktywności alarmowej,

10. Przycisk  (SHIFT) służący do:

- w trybie programowania:
 - z przyciskiem  wejście/wyjście w tryb/z trybu programowania ,
 - wraz z naciśniętym  lub  przełączanie numeru pakietu (o ile system stwierdza obecność pakietów tego samego rodzaju),
- w trybie pracy:
 - z przyciskiem  wejście/wyjście w tryb/z trybu programowania,
 - z przyciskiem  przełączanie kanałów - w góre,
 - z przyciskiem  przełączanie kanałów - w dół,
 - z przyciskiem  przełączanie podglądu wartości wyjścia analogowego - patrz opis w punkcie 4,
 - z przyciskiem  przełączanie podglądu wartości wejścia analogowego - patrz opis w punkcie 5,

- naciśnięty wraz z lub po pozytywnym zakończeniu realizacji procedur samostrojenia, powoduje zapisanie wyliczonych parametrów PID do regulatora (tj. kp _ 7-x-14, Ti _ 7-x-15 i Td _ 7-x-16), w przypadku, gdy wybrano konieczność akceptacji wyliczonych nastaw przez użytkownika tj. gdy 7-x-55 = 0000,
- w trybie alarmowym - kwitowanie alarmów z przyciskami lub

11. wyświetlacz:

- w trybie programowania:
 - wyświetla literę „P” na przemian z numerem położenia programowanego pakietu wejściowo-wyjściowego (położenie liczy się od dołu czyli położenie dolne to 1, a górne to 3),
 - wyświetla literę „t” w przypadku programowania tablic,
- w trybie pracy:
 - wyświetla numer aktualnego kanału regulacyjnego,
 - w przypadku alarmu, wyświetla literę ”A” na przemian z numerem położenia pakietu,
 - pulsuje kropka podczas realizacji funkcji regulacji czasowych

12. Przycisk służący do:

- w trybie programowania:
 - zmiana aktywnej cyfry w kierunku rosnącym,
 - zmiana numeru programowanej tablicy w kierunku rosnącym,
 - wraz z naciśniętym (SHIFT) przełączanie numeru pakietu (o ile system stwierdza obecność pakietów tego samego rodzaju),

ROZDZIAŁ 9

- w trybie pracy:
 - przełączanie wielkości wyświetlanej na wyświetlaczu 2 w kolejności : PV => SP => Alarmy => inne wartości patrz opis w punkcie 2 =>.....
 - wraz z naciśniętym  (SHIFT) przełączanie aktywnych kanałów w kierunku rosnącym,
 - wraz z wciśniętym  (SHIFT), akceptacja nastaw PID, wyliczonych po zakończeniu z powodzeniem procedury samostrojenia
 - wraz z naciśniętym  (SHIFT) – kwitowanie alarmów w trybie aktywności alarmowej
- 13. Dioda czerwona sygnalizująca przekroczenie zaprogramowanej wartości uchyby regulacji dla przypadku, gdy wartość uchybu jest ujemna.
- 14. Bargraf diodowy, wskazujący procentową wartość uchybu regulacji (zakres wskazań programowalny) dla uchybu ujemnego.
- 15. Dioda sygnalizująca tryb pracy „C” – praca w systemie komputerowym lub w systemie BACKUP.
- 16. Dioda czerwona sygnalizuje światłem pulsującym obecność jakiegokolwiek z alarmów w kolejce alarmów (można je podejrzeć w kolejce alarmów)
- 17. Dioda zielona tzw. „zielona linia”, świeci po wyłączeniu zasilania regulatora, pulsuje podczas trwania eksperymentu samostrojenia
- 18. Dioda sygnalizująca tryb pracy „K – praca w układzie kaskadowym
- 19. Bargraf diodowy, wskazujący procentową wartość uchybu regulacji (zakres wskazań programowalny) dla uchybu dodatniego.
- 20. Dioda czerwona sygnalizująca przekroczenie zaprogramowanej wartości uchyby regulacji dla przypadku, gdy wartość uchybu jest dodatnia.
- 21. Dioda dwubarwna:

- nie świeci się, gdy na dolnym wyświetlaczu 2 wyświetlana jest wartość sygnału sterującego CV,
- świeci się na zielono wtedy, gdy na dolnym wyświetlaczu 2 wyświetlana jest wielkość SP lub kody alarmów,
- świeci się na czerwono wtedy, gdy na dolnym wyświetlaczu 2 wyświetlana jest wielkość parametrów związanych z realizowaną funkcją programów czasowych i samostrojenia - patrz punkt 1 i 2.

Uruchomienie regulatora LB 600

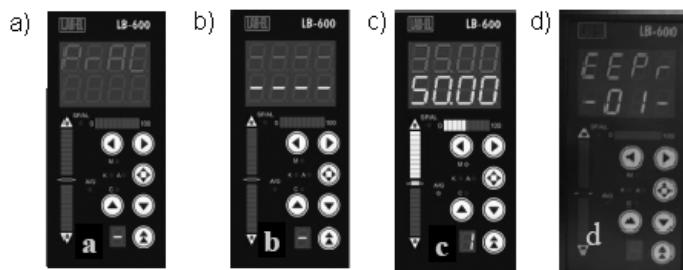
Po włączeniu regulatora do sieci zasilającej pojawia się napis PrAC na górnym wyświetlaczu, informujący o przejściu regulatora do trybu pracy (rys.9.2.5a). Po kilku sekundach uzyskuje się:

1. w przypadku, gdy regulator nie był zaprogramowany (posiadał tzw. „strukturę pustą”) jak na rys. 9.2.5b,
2. w przypadku, gdy był wcześniej zaprogramowany prawidłowo przynajmniej jeden kanał, jak na rys. 9.2.5c

Struktura pusta regulatora sygnalizowana jak na rys. 9.2.5b występuje w kilku przypadkach:

- regulator zakupiony w firmie LAB-EL (chyba że użytkownik zleci opracowanie i zaprogramowanie struktury funkcjonalnej),
- po wykasowaniu struktury przez użytkownika (włączenie zasilania regulatora z wciśniętymi przyciskami  i ),
- nieprawidłowo zaprogramowana struktura funkcjonalna (brak niektórych parametrów np. wartość maksymalna sygnału wejściowego równa minimalnej, itp.).

ROZDZIAŁ 9



Rysunek 9.2.5. Włączenie regulatora do sieci zasilającej: a) regulator w trybie pracy – PrAC, b) regulator z „pustą strukturą”, c) regulator zaprogramowany

Tylko prawidłowo zaprogramowane kanały regulacji będą uwidocznione w trybie pracy. Możliwa jest taka sytuacja gdzie występują tzw. przeskoki przy przełączaniu kanałów np. 1_3_8, a nie 1, 2, ..., 8, jest to spowodowane nieprawidłową strukturą w kolejnych przeskakiwanych kanałach.

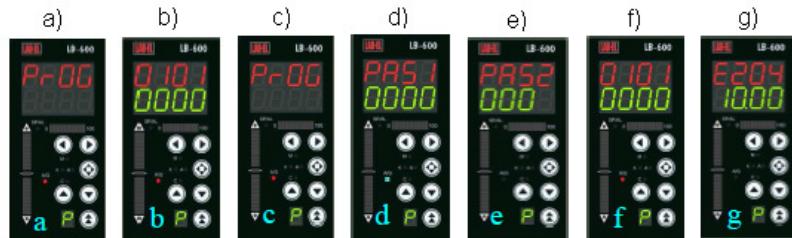
Włączenie regulatora z wciśniętymi przyciskami i powoduje wykasowanie hasła PAS1 (hasło o wyższym priorytecie blokujące dostęp do programowania całej struktury regulatora – w tym przypadku na wyświetlaczu nic się nie zmienia).

Włączenie zasilanie z wciśniętymi przyciskami i powoduje wykasowanie całej struktury funkcjonalnej regulatora.

Na górnym wyświetlaczu pojawia się słowo EEPPr (rys.9.2.5d) i pozostaje podczas całego, trwającego kilka sekund procesu kasowania pamięci Flash. Po wykasowaniu pamięci zapalają się kreski jak na rys.9.2.5b.

Regulator będący w stanie „struktury pustej” rys.9.2.5b lub w trybie pracy rys.9.2.5c jest gotowy do przełączenia w tryb programowania.

Przełączenie w tryb programowania następuje po naciśnięciu w dowolnym momencie przycisków (SHIFT) i . Po tej operacji na górnym wyświetlaczu pojawia się słowo PrOG (rys.9.2.6a) a po chwili w przypadku braku wcześniej wpisanych haseł jak na rys. 9.2.6b.



Rysunek 9.2.6. Tryb programowania regulatora LB 600

W przypadku kiedy wprowadzono hasło PAS1 lub PAS2 (samo PAS2 jest nieskuteczne), po wejściu w tryb programowania jak poprzednio pojawia się słowo PrOG (rys.9.2.6c), a następnie jak na rys.9.2.6d. Kiedy występuje tylko PAS1, po wprowadzeniu prawidłowego hasła następuje przejście do trybu programowania rys.9.2.6f. W przypadku obecności hasła PAS2 (można przełączać hasła przyciskiem), po wprowadzeniu hasła następuje przejście do trybu wpisywania tylko wybranych parametrów oznaczonych literą E, jak na rys.9.2.6g. Parametry które są udostępnione pod hasłem PAS2 dotyczą głównie procesu technologicznego, a nie budowy struktury sterowania.

Parametry te opisane są w umiejscowionej warstwie 7

Wykaz parametrów dostępnych po wprowadzeniu hasła pomocniczego (PAS2) gdzie: x = 1....8 (numer kanału regulacji)

Adres E-x jest umieszczony pod hasłem PAS2

E-x-01 Rodzaj regulacji 7-x-09,

E-x-02 Algorytm regulacji 7-x-10

E-x-03 Współczynnik wzmacnienia kp 7-x-14,

E-x-04 Czas zdwojenia (całkowania) Ti 7-x-15,

E-x-05 Czas wyprzedzenia (różniczkowania) Td 7-x-16,

W trybie programowania rozróżnia się dwie zmienne: adres parametru ustawiany na wyświetlaczu górnym oraz wartość parametru ustawiana na wyświetlaczu dolnym. Do przełączania adresu lub wartości służy przycisk , do zmiany pozycji aktywnej (znak pulsujący) gotowej do zwiększenia lub zmniejszenia na poszczególnych wyświetlaczach służą przyciski i , do zmiany wartości pozycji aktywnej służą przyciski i .

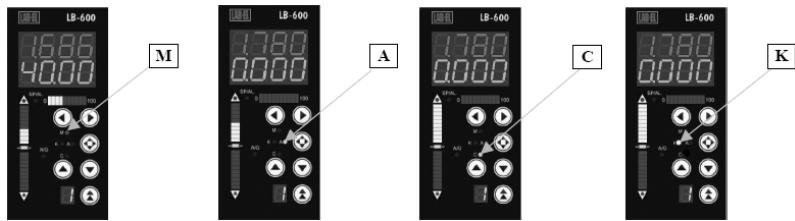
ROZDZIAŁ 9

W trybie programowania regulatora występują dwie możliwości: programowanie struktury funkcjonalnej, co opisano wyżej oraz programowanie tablic (różne programy regulacji tablicowych opisano w końcowej części niniejszej instrukcji). Do programowania tablic przechodzi się z warstwy zerowej regulatora uaktywniając (pulsowanie) pozycję skrajną lewą na górnym wyświetlaczu (rys.9.2.6a) i naciskając przycisk . Pojawia się słowo tAbL jak na rys.9.2.6b, a po chwili jak na rys.9.2.6c na górnym wyświetlaczu w trybie programowania tablic trzy pierwsze cyfry na rys. c 001, stanowią numer (adres) modułu pamięciowego tablicy. Adres ten może zawierać się pomiędzy 001 a 400, czwarta cyfra stanowi numer parametru w module (dopuszcza się do 5 parametrów). Rys.9.2.6d przedstawia adresowanie 3 parametru w 265 module tablicy. Wyjście z trybu programowania tablic następuje poprzez przejście do pozycji zerowej jak na rys.9.2.6c i 9.2.6e, uaktywnienie skrajnej, lewej pozycji adresu i naciśnięcie przycisku , następuje przejście do trybu programowania struktury jak na rys.9.2.6f, a następnie na rys. 9.2.6g. Przejście do trybu programowania struktury następuje również w dowolnym momencie po naciśnięciu przycisków  (SHIFT) i .

Tryb pracy regulatora

Regulator LB-600 może pracować w czterech trybach pracy (rys.9.2.7):

- tryb pracy ręcznej „M” - sterowanie elementem wykonawczym odbywa się ręcznie przez operatora,
- tryb pracy automatycznej „A” – sterowanie realizowane jest na podstawie algorytmu regulacji zaprogramowanego przez użytkownika w układzie z lokalną wartością zadaną,
- tryb pracy kaskadowej „C” – sterowanie w trybie automatycznym, lecz w układzie z zewnętrzną wartością zadaną,
- tryb pracy komputerowej „K” – sterowanie realizowane jest na podstawie algorytmów realizowanych przez program komputerowy, a regulator służy jedynie jako generator sygnałów sterujących. W przypadku awarii komputera regulator przejmuje sterowanie (redundancja, Backup) - tryb pracy „K” zostanie omówiony w dalszej części opracowania.



Rysunek 9.2.7. Sygnalizacja trybu pracy (regulator w czterech trybach pracy)

Pierwsze dwa tryby pracy, tj. M i A, są trybami standardowymi i użytkownik nie musi czynić specjalnych zabiegów w celu ich zaprogramowania. Tryb kaskady „K” wymaga podania w trakcie programowania źródła pochodzenia wartości zadanej (patrz warstwa 7 parametry 7-x-04, 7-x-05 i 7-x-06) SP. W takim przypadku regulator z trybu „A” może zostać

przełączony w tryb „C”. W przypadku, gdy parametry wskazujące pochodzenie wartości zadanej SP są wartości zerowej (pierwszy i/lub drugi), operacja przełączenia z „A” na „C” będzie niemożliwa. W przypadku, gdy źródło pochodzenia wartości zadanej nie jest podane (domniemany brak zewnętrznej wartości zadanej) można jedynie realizować przełączenie M □ A – nie jest możliwa praca w trybie Kaskady „C”.

Programowanie regulatora LB-600



Rysunek 9.2.8. Opis wyświetlanych informacji w trybie programowania

ROZDZIAŁ 9

pozycja cyfry	1	2	3	4
znaczenie	nr warstwy	nr kanału (toru)	nr parametru	
zakres zmienności	0...b	1...F	01...nn	



Rysunek 9.2.9. Poszczególne elementy adresu i wartości parametru

Wykorzystanie przycisków

- Kasowanie pamięci Flash.** Włączenie zasilania regulatora przy wciśniętych przyciskach powoduje przejście do trybu kasowania całej struktury funkcjonalnej regulatora zapisanej w **pamięci Flash**. Na górnym wyświetlaczu pojawia się napis **EEPr**, który widoczny jest podczas kilkunasto sekundowej procedury kasowania. Po zakończeniu kasowania regulator zgłasza się jak pokazano na rys.9.2.8, a następnie rys. 9.2.9 (i),
- Kasowanie hasła PAS1.** Włączenie zasilania regulatora przy wciśniętych przyciskach powoduje wykasowanie zapisanego hasła głównego PAS1 (i),
- Przełączanie haseł PAS1 i PAS2.** W przypadku gdy zostały wprowadzone dwa hasła PAS1 i PAS2 możliwe jest przełączanie haseł, przy czym hasło PAS1 ma wyższy priorytet i umożliwia dostęp do całej struktury programowania, hasło PAS2 umożliwia dostęp tylko do niektórych parametrów ().

Tryb programowania

- Przełączanie pomiędzy wyświetlaczem górnym (adres parametru), a dolnym (wartość parametru) (),**
- Przesuwanie aktywności cyfry w lewo/w prawo (pulsowanie, uaktywnienie do zmiany) lub na górnym wyświetlaczu (czerwonym) regulatora, ustawa się czterocyfrowy adres parametru.** Adres określa numer warstwy funktora, kanału (toru) oraz numer konkretnego parametru. Na wyświetlaczu dolnym (zielonym) ustawa się wartość parametru wpisywanego pod wyżej ustalony adres. Wartość parametru może być zapisana w postaci

0000 (bez przecinka) dla zmiennych typu INTEGER lub w postaci 0.000 dla zmiennych typu FLOAT (lub),.

3. Zmiana wartości aktywnej cyfry w góre/w dół (lub),
4. **W przypadku programowania struktur wielopakietowych** tzn. gdy pośród pakietów występują przynajmniej 2 tej samej grupy (wejścia analogowe, wyjścia analogowe lub wejścia/wyjścia binarne) przy pomocy przycisków można przełączać programowane pakiety. Możliwość taka występuje dla wejść analogowych w warstwie 1, dla wyjść analogowych w warstwie 9, dla wejść binarnych w warstwie 2 i dla wyjść binarnych w warstwie A. Funkcja ta działa również przy skalowaniu wejść i wyjść analogowych w warstwie b (i lub i),
5. **Przełączanie regulatora z trybu programowania do trybu pracy** następuje poprzez naciśnięcie przycisków pokazanych powyżej. Po przełączeniu do trybu pracy na górnym wyświetlaczu regulatora pojawia się na kilka sekund napis PrAC, a następnie następuje przejście do trybu pracy regulatora (i).

Tryb pracy

1. **Przełączanie numeru kanału regulatora w góre (1 – 8)** (i),
2. **Przełączanie numeru kanału regulatora w dół (8 – 1)** (i),
3. **Wyświetlanie stanu kolejnych wejść analogowych:** in xy – w trybie wyświetlania wartości wejść analogowych, gdzie: in – input (wejście), x – numer pakietu, y – numer wejścia (i),
4. **W przypadku normalnej pracy regulatora** (regulator PID bez wykorzystania funkcji samostrojenia, funkcji tablicowych, itp.), kolejne naciskanie przycisku powoduje przełączanie wyświetlanej na dolnym wyświetlaczu wielkości: _ sygnał sterujący (wyjściowy) regulatora CV _ wartość zadana regulatora SP _ kody alarmów umieszczonych w kolejce alarmów _. W przypadku pracy danego bloku regulatora w charakterze stacyjki sterowania ręcznego lub stacyjki zadawania stosunku: _ sygnał wyjściowy stacyjki _ kody alarmów umieszczonych w kolejce alarmów _.

ROZDZIAŁ 9

W przypadku wykorzystania funkcji samostrojenia:

- przy udanym eksperymencie kolejne naciśnięcie przycisku przywołuje _ P01, ...,P06 – parametry identyfikacyjne obiektu oraz wartości PID obliczone dla regulatora _,
- w przypadku nieudanego eksperymentu kolejne naciśnięcie przycisku przywołuje _ wyświetlenie kodu błędu powstałego podczas przebiegu procedury eksperymentu _.

W trybie wyświetlania wartości zadanej, gdy wartość SP jest uaktywniona do zmian, przycisk służy do zwiększenia wartości aktywnej pozycji (),

--

5. j.w. + W trybie wyświetlania wartości zadanej, gdy wartość SP jest uaktywniona do zmian, przycisk służy do **zmniejszania** wartości aktywnej pozycji (),
6. W trybie pracy „M” – RĘKA (Manual) przycisk służy do **zwiększenia** wartości sygnału sterującego z przyrostem sygnału zaprogramowanym w warstwie 7, fakt **zwiększenia** uwidoczniony jest na bargrafie poziomym (pod wyświetlaczami) i tak:
 - **dla regulacji ciągłej** następuje **przyrost** ciągły,
 - **dla regulacji 2P** (dwustawnej) pojedyncze naciśnięcie przycisku powoduje zaświecenie trzech ostatnich (po prawej stronie) diod bargrafa poziomego na czas trwania wysterowania przekaźnika załączającego element wykonawczy (czas wysterowania zgodny z przyrostem dla regulacji ciągłej),
 - **dla regulacji 3P** (trójstawnej dla układów grzania-chłodzenia) pojedyncze naciśnięcie
 - przycisku powoduje zaświecenie trzech ostatnich (po prawej stronie) diod bargrafa poziomego na czas trwania wysterowania przekaźnika załączającego **układ grzejny**,
 - dla regulacji 3P sprz. zewn. i 3P sprz. wewn. pojedyncze naciśnięcie przycisku powoduje zaświecenie trzech ostatnich (po prawej stronie) diod bargrafa poziomego na czas trwania

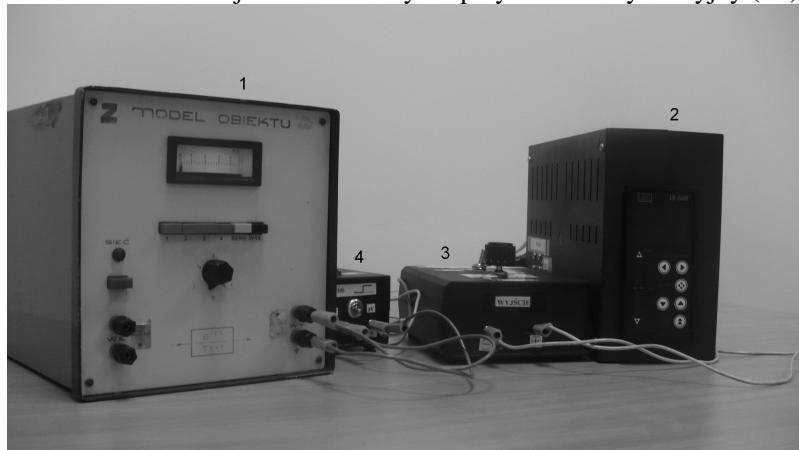
wysterowania przekaźnika załączającego element wykonawczy (silnik siłownika napędzającego zawór regulacyjny) w kierunku **otwierania**.

- W trybie wyświetlania wartości zadanej służy do uaktywniania cyfry (**w lewo**) w wartości zadanej w celu ewentualnej jej zmiany (☞),
7. W trybie pracy „M” – RĘKA (Manual) przycisk służy do **zmniejszania** wartości sygnału sterującego z przyrostem sygnału zaprogramowanym w warstwie 7, fakt **zmniejszania** uwidoczniony jest na bargrafie poziomym (pod wyświetlaczami) i tak:
- dla regulacji ciągłej następuje **spadek ciągły**,
 - dla regulacji 3P (trójstawnej dla układów grzania-chłodzenia) pojedyncze naciśnięcie przycisku powoduje zaświecenie trzech pierwszych (po lewej stronie) diod bargrafa poziomego na czas trwania wysterowania przekaźnika załączającego element wykonawczy (silnik siłownika napędzającego zawór regulacyjny) w kierunku **chłodzący**,
 - dla regulacji 3Psprz. zewn. i 3Psprz. wewn. pojedyncze naciśnięcie przycisku powoduje zaświecenie trzech pierwszych (po lewej stronie) diod bargrafa poziomego na czas trwania wysterowania przekaźnika załączającego element wykonawczy (silnik siłownika napędzającego zawór regulacyjny) w kierunku **zamykania**.
 - W trybie wyświetlania wartości zadanej służy do uaktywniania cyfry (**w prawo**) w wartości zadanej w celu ewentualnej jej zmiany (☜),
8. **Przełączanie trybu pracy regulatora – M – A – C – K –.**
W podstawowych układach regulacji stałwartościowych istnieje możliwość przełączania **_ M _ A _**. Dostępność trybów C i K ustalana jest automatycznie. W przypadku KASKADY „C” algorytm sprawdza czy podano inne niż tylko lokalne źródło pochodzenia wartości zadanej SP. **Realizacja regulacji tablicowych** (gdzie wartości zadane zapisywane są w tablicy) również uaktywnia pracę w trybie kaskady. Tryb „K” – KOMPUTER realizowany jest w przypadku wykonywania funkcji BACKUP (⊕),

ROZDZIAŁ 9

9. **Przełączanie regulatora z trybu pracy do trybu programowania** następuje poprzez naciśnięcie przycisków (⬆️ ⬇️). Po przełączeniu do trybu programowania na górnym wyświetlaczu regulatora pojawia się na kilka sekund napis ProG, a następnie w przypadku gdy nie było wcześniej wprowadzone hasło zabezpieczające następuje umożliwienie programowania regulatora,

10. Kwitowanie alarmów (⬆️ i ⬇️ lub ⬤),
11. Akceptacja parametrów wyliczonych podczas udanego eksperymentu identyfikacyjnego (⬆️ i ⬇️ lub ⬤),
12. Kasowanie błędów wygenerowanych podczas realizacji procedur samostrojenia – nieudany eksperiment identyfikacyjny (✖️).



Rysunek 9.2.10 Widok stanowiska regulacji automatycznej złożonego z obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem (1) i regulatora PID LB 600 (2), z zasilaczem (3), generatorem (4)

Przebieg ćwiczenia

Wyznaczanie charakterystyk czasowych regulatorów P, PI, PD, PID

Ze względu na skomplikowaną strukturę i obsługę nowoczesnych wielozadaniowych regulatorów **PID** (rys.9.2.2 i 9.2.3), prowadzący ćwiczenie powinien być obecny w czasie wykonywania ćwiczenia przez studentów.

1. Dokonywanie zapisu charakterystyk czasowych regulatora prowadzimy przy zasilaniu mikroprocesorowego regulatora EFTRONIK X (rys.9.2.2) stałym napięciem 1.5 V w układzie otwartym. W tym celu należy połączyć badany układ w następujący sposób: źródło stałego napięcia → wejście regulatora → wyjście regulatora → pisak nastawiony na Y – time. Zawsze należy łączyć plus z plusem, minus z minusem. Gniazdka wejść wyjść opisane są na płycie czołowej stanowiska.
2. Włączyć regulator przez wcisnięcie przycisku przycisku SIEĆ REG. znajdującego się na płycie czołowej stanowiska. Wówczas powinny włączyć się wyświetlacze (1,2) regulatora oraz czerwony sygnał alarmu (22), ponieważ regulator nie może być zasilany napięciem zerowym. Aby zlikwidować alarm należy włączyć „źródło DC”.
3. Jeżeli pojawi się sygnał dźwiękowy i na dolnym (zielonym) wyświetlaczu pojawią się kody alarmów należy nacisnąć, w sposób przerywany przycisk Mode (4) tyle razy, aż znikną kody alarmów i przestanie świecić się dioda zielona z napisem SP-ERR (6).
4. Nastawić odpowiednie wartości współczynnika wzmacnienia $0.5 \leq k_p \leq 6$, stałej całkowania $5 \leq T_i \leq 60$ sek., stałej różniczkowania $0.5 \leq T_d \leq 6$ sek. przy których mamy rejestrować charakterystyki regulatorów **P, PI, PD, PID**. Współczynniki można nastawiać tylko w trybie „PROGRAMOWANIE” tj. na wyświetlaczu (3) pojawi się zielona litera (**P**). Przejście do trybu programowania dokonujemy **wciskając przycisk „MODE” (4) na czas większy niż 3 sekundy**. Do ustawienia określonego ADRESU (rodzaju regulatora) należy przy użyciu przycisków ▲ (14), ▼ (11) uaktywnić określone pole górnego wyświetlacza (miganie pola) a następnie przyciskami △ (5), ▽ (7) wpisać odpowiednie cyfry podane w punktach 5), 6), 7). **Krótkie wcisnięcie przycisku „MODE” (4)** powoduje przejście z wyświetlacza górnego na wyświetlacz dolny, na którym w wyżej opisany sposób ustawia się czteropozycyjną liczbę stanowiącą „**WARTOŚĆ**” współczynnika. Ponowne krótkie użycie przycisku „**MODE**” powoduje zapamiętanie ustawionej wartości i przejście na wyświetlacz górny, gdzie ustawiamy kolejny ADRES itp. Zakończenie programowania następuje po 3 sekundowym naciśnięciu przycisku „**MODE**”, regulator wraca do trybu

ROZDZIAŁ 9

„PRACA”. Na wyświetlaczu (3) świeci się zielona litera (I) (kanał 1). **Regulator można tylko nastawić w warstwie 4** tzn. pierwsza cyfra (czerwona) na górnym wyświetlaczu musi być 4. **Zmiana jakichkolwiek nastaw regulatora w innych warstwach spowoduje wadliwe działanie regulatora lub jego uszkodzenie.**

5. Aby nastawić współczynnik wzmacnienia $0.5 \leq k_p \leq 6$ należy wejść w warstwę 4, kanał 1, miejsce 13 tzn. na górnym wyświetlaczu ma być adres **4 1 13**. Następnie należy przejść na wyświetlacz dolny i nastawić żądaną wartość k_p . **Uwaga** – najmniejsza możliwa wartość k_p jest 0.1, zaś maksymalna 6, ponieważ regulator może pracować w zakresie do 10 V. Zasilanie jest 1.5 V, a więc przy wzmacnieniu $k=6$, $U=1.5 \cdot 6 = 9$ V i dlatego nie należy przekraczać dopuszczalnej wartości wzmacnienia,
6. Aby nastawić wartość $5 \leq T_i \leq 60$ sek., należy wejść w adres **4 1 15** zgodnie z punktem 4) i nastawić żądaną wartość T_i w sek. **Uwaga** – działanie całkujące jest wyłączone, gdy $T_i = 0.00$.
7. Aby nastawić wartość $0.5 \leq T_d \leq 6$ w sek., należy wejść w adres **4 1 17** zgodnie z punktem 4) i nastawić żądaną wartość T_d w sek. **Uwaga** – działanie różniczkujące jest wyłączone, gdy $T_d = 0.00$.
8. **Regulatory można badać**, gdy działanie regulatora jest nastawione w adresie **4 1 22** i gdy wpisana jest w dolnym wskaźniku (2) **wartość 0001**.
9. Aby przeprowadzić eksperyment przy wyborze danego regulatora i jego zaprogramowaniu oraz badać ich charakterystyki należy:
 - włączyć pisak nastawiony na odpowiedni czas przesuwu i skoku sygnału Y,
 - sprawdzić, czy jest włączona dioda (10) – „Automatyka”, jeśli nie to włączyć przyciskiem (9),
 - podawać na regulator skok stałego napięcia 1.5 V przez włączenie na odpowiedni czas przycisku dźwigniowego źródła

zasilania (1.5-3 V). Napięcie 3 V zasila regulator napięciem 1.5 V i wywołuje skok jednostkowy napięcia o amplitudzie 1.5 V jako sygnał wejściowy do pobudzenia regulatora.

UWAGA

Jeżeli nastawiona jest dowolna wartość stałej całkowania T_i to regulator cały czas całkuje. Widać to po włączeniu diod dolnego bargrafu (13). Jeśli włączone są wszystkie diody to znaczy to, że regulator osiągnął 100% nasycenia i **skok napięcia musi być wyłączony** (włącznik dźwigniowy 1.5V przełączyć na 1.5V) **aby nie uszkodzić regulatora**. Wówczas należy poczekać aż zniknie sygnał napięciowy na bargrafie (13), a wartość na wyświetlaczu zielonym dolnym (2) osiągnie wartość 0.000. Przed przeprowadzeniem kolejnego eksperymentu, regulator **musi być sprowadzony do zerowego stanu nasycenia. Jeżeli wyzerowania** nie nastąpią, wówczas można tego dokonać poprzez włączenie przycisku (14).

Badanie układu sterowania z regulatorem PID LB 600

W tej części ćwiczenia mamy do czynienia z zamkniętym układem sterowania przedstawionym w postaci schematu blokowego na rysunku 9.2.1. Opis elementów pulpułu czołowego regulatora LB 600 przedstawia rysunek 9.2.3.

Jak wynika ze schematu blokowego badany układ automatyki należy połączyć w następujący sposób:

Zakłócenie w postaci skoku o wartości 1.5 V, połączyć z pierwszym wejściem regulatora, wyjście regulatora z wejściem obiektu, wyjście z obiektu z drugim wejściem regulatora oraz z pisakiem lub zestawem komputerowym aby zapisać przebieg sygnału wyjściowego y(t).

Celem tej części ćwiczenia jest pokazanie, jak w zamkniętym układzie regulacji, regulator PID oddziałuje na obiekt.

Obsługa regulatora do tej części ćwiczenia

- Nastawy regulatora można zmieniać tylko w trybie „PROGRAMOWANIE”. Aby wejść w tryb programowania należy jednocześnie naciśnąć przyciski 10 i 7 . Wtedy na chwilę włącza się na wyświetlaczu górnym (1) napis PrOG, a po chwili na dole (11) pojawia się napis P.
- Wyświetlenie litery P oznacza, że jesteśmy w trybie programowania. Na górnym wyświetlaczu (1) ustawia się czterocyfrowy adres parametru.

ROZDZIAŁ 9

Pierwsza cyfra określa numer warstwy regulatora, druga cyfra określa numer kanału (toru), dwie ostatnie określają rodzaj regulatora. Cyfra, która migą jest zmieniana. Numerowi warstwy jest przyporządkowana cyfra 7, kanału – 1, regulatorom: P – 14, I – 15, D – 16. Aby przejść na konkretne miejsce należy posługiwać się przyciskami (4 –) i (5 –). Na wyświetlaczu dolnym (2) ustawia się wartość parametru pod wyżej ustawiony adres. Przełączanie pomiędzy wyświetlaczem górnym (adres parametru) a dolnym (wartość parametru) odbywa się przyciskiem (7) .

- Zmiana wartości aktywnej cyfry w górę lub dół odbywa się przyciskami (9) , (12) .
- Aby wejść w tryb „PRACA” należy jednocześnie nacisnąć przyciski (10) i (7) . Wtedy na chwilę włącza się na górnym wyświetlaczu (1) napis „PrAC” a po chwili na dole pojawia się numer kanału , w którym pracuje regulator. W ćwiczeniu musi być włączona cyfra 1 (nr. kanału).
- W trybie pracy przyciskiem (7) możemy przełączać tryb pracy regulatora z pracy ręcznej (manual), włącza się dioda M (6), na pracę automatyczną A (8), włącza się dioda A.
- Bargraf diodowy (3) dla regulacji ciągłej przedstawia wartość wielkości sterującej CV w skali od 0 do 100% (z rozdzielczością wyświetlacza 10% dla pojedynczej diody). Bargrały pionowe (14) i (19) wskazują procentową wartość uchybu regulacji ujemną i dodatnią. Diody czerwone (13) (dla przypadku, gdy wartość uchybu jest ujemna) i (20) (dla przypadku, gdy wartość uchybu jest dodatnia) sygnalizują przekroczenie zaprogramowanej wartości uchybu regulacji.

Identyfikacja badanego obiektu

a) Badanie układu sterowania z regulatorem PID nastawionym dowolnie

W tej części ćwiczenia należy określić ustawione stałe obiektu. W tym celu należy:

1. Ustawić zadane przez prowadzącego ćwiczenie stałe obiektu (k, T, T_o) ,
2. Włączyć regulator przez podłączenie go do sieci,

3. Przejść do trybu „**PROGRAMOWANIE**”. Na wyświetlaczu górnym (1) wybrać adres **7114 (regulator P)**. Przejść na dolny wyświetlacz i nastawić wartość **1.000**. Przejść na górny wyświetlacz, wybrać adres **7115 (regulator I)**. Przejść na dolny wyświetlacz i nastawić wartość $T_i = 0.000$. Przejść na górny wyświetlacz, wybrać adres **7116 (regulator D)**. Przejść na dolny wyświetlacz i nastawić wartość $T_d = 0.000$. **W ten sposób mamy zaprogramowany regulator proporcjonalny z współczynnikiem wzmocnienia $k_p = 1.000$.**
4. Włączyć sygnał zasilający na poziomie 1.5 V. Jest to zerowy poziom – wewnętrzne zasilanie obwodu regulatora.
5. Na rejestratorze ustalić poziom zera na górnej części arkusza i narysować linię zera.
6. Włączyć podstawę czasu pisaka, zadać zakłócenie na poziomie 3 V (amplituda sygnału 1.5 V) i zarejestrować przebieg odpowiedzi układu. Wyłączyć zakłócenie o poziomie 3 V. Z wykresu odczytać nastawione stałe obiektu k, T, T_0 ,
7. Gdyby w odpowiedzi na skok 1.5 V nie pojawiły się oscylacje, to należy stopniowo zwiększyć wzmocnienie obiektu k aż pojawią się ustalone oscylacje obiektu,
8. W stanie ustalonych oscylacji obiektu zmierzyć okres T_{osc} (rys.5.26, str. 126) oraz wartość współczynnika $k_{kryt.}(obiektu) = k_p$ przy którym pojawiły się ustalone oscylacje.

b) Sterowania z regulatorem PID nastawionym odpowiednio do obiektu

W tej części ćwiczenia zapoznajemy się z działaniem regulatora, którego nastawy dobrane są do obiektu regulacji.

- a. Mając wartości obu zmierzonych wielkości tj. $k_{kryt.}$ i $T_{osc.}$, należy obliczyć właściwe nastawy k_p, T_i, T_d według reguły podanej w punkcie 5.8, str. 124-126, rys.5.26.
- b. Po obliczeniu właściwych nastaw należy je wprowadzić do regulatora na adresy: 7114 (wstawić odpowiednią wartość

Rozdział 9

- k_p), 7115 (wstawić odpowiednią wartość T_i), 7116 (wstawić odpowiednią wartość T_d),
- c. Po wprowadzeniu określonych nastaw, czyli zaprogramowaniu regulatora PID należy włączyć zakłócenie i obserwować jak regulator działa na obiekt (uchyb powinien znacznie szybciej zmierzać do zera).

Treść sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Wykresy odpowiedzi skokowych w postaci charakterystyk czasowych poszczególnych regulatorów, otrzymane podczas wykonywania ćwiczenia.
2. Obliczenie nastaw regulatorów z wykresów odpowiedzi skokowych, opis sposobu obliczania nastaw oraz porównanie otrzymanych wartości z wartościami nastawionymi przez prowadzącego ćwiczenie.
3. Analizę dokładności nastaw w badanym regulatorze.
4. Analizę wpływu poszczególnych nastaw na odpowiedź skokową regulatora.
5. Wykresy odpowiedzi skokowych obiektu otrzymane podczas wykonywania ćwiczenia, dla różnych stałych obiektu.
6. Obliczenie na podstawie odpowiedzi skokowych nastawionych stałych obiektu.
7. Wykres oscylacji obiektu przy granicznym wzmacnieniu. Opis i obliczenie na podstawie wykresu prawidłowych nastaw regulatora, obliczonych według reguły Zieglera-Nicholsa.
8. Wykres i analizę odpowiedzi obiektu przy regulatorze nastawionym odpowiednio do obiektu.

Literatura

- [1] Frelek B., Komor Z., Kruszyński H., Markowski A.: Laboratorium podstaw automatyki, WPW, Warszawa, 1979.
- [2] Kołacin T i inni: Ćwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki i teorii maszyn, Praca zbiorowa pod redakcją Tadeusza Kołacina, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.
- [3] Kołacin T.: Podstawy teorii maszyn i automatyki, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.
- [4] Żelazny M.: Podstawy Automatyki, Warszawa, PWN, 1976.

9.3. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe układów automatyki

Cel ćwiczenia

Podstawowym celem ćwiczenia jest wyznaczenie transmitancji zastępczych zbudowanych układów regulacji, zawierających elementy automatyki połączone szeregowo, równolegle i ze sprzężeniem zwrotnym oraz wykreślenie ich charakterystyk czasowych i częstotliwościowych tj. teoretycznej i doświadczalnej charakterystyki amplitudowo-fazowej dla zbudowanego układu regulacji zawierającego w/w. elementy automatyki.

Wprowadzenie teoretyczne

Opisywanie układów automatyki we współrzędnych stanu jest podane w rozdziale 8, punkty 8.1, 8.3, 8.4, str. 186-194. Ilustracją jest przykład 8.1, str. 194, który zawiera schemat funkcjonalny w zapisie ogólnym i macierzowo-wektorowym.

Charakterystyki skokowe inaczej czasowe (wymuszenie skokiem jednostkowym) i częstotliwościowe (amplitudowo-fazowe, logarytmiczne amplitudowe i logarytmiczne fazowe) podstawowych elementów automatyki omówione i podane są w rozdziale 2, str. 47-81 i w rozdziale 3, str. 32-47.

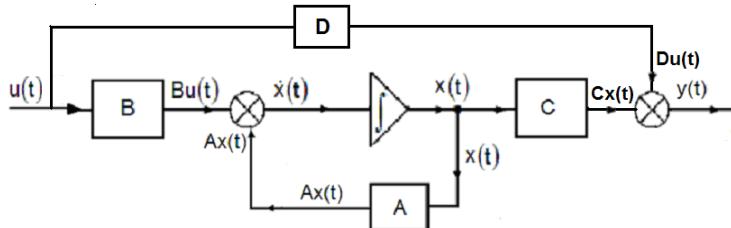
Układ regulacji automatycznej można opisać wektorowo-macierzowymi równaniami stanu $\dot{x}(t)$ i wyjścia $y(t)$, zatem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (9.3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (9.3.2)$$

Istnieje możliwość zmian wartości współczynników występujących w dwuwymiarowym układzie regulacji, opisany powyższymi równaniami.

Równania stanu (9.3.1) i wyjścia (9.3.2) w zapisie macierzowo-wektorowym przedstawia rysunek 9.3.1.



Rysunek 9.3.1. Schemat strukturalny równań stanu i wyjścia w zapisie macierzowo-wektorowym

Ogólny zapis powyższych równań jest następujący

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \quad (9.3.3)$$

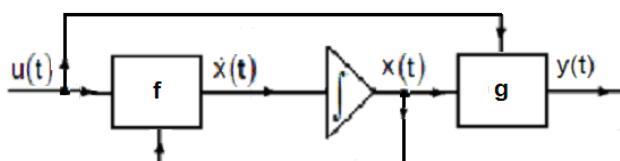
gdzie: f – funkcja stanu, jednoznaczna jako k elementowa funkcja wektorowa, $x(t)$ – n wymiarowy wektor stanu w chwili t , $u(t)$ k wymiarowy wektor sterowania, t – chwila bieżąca, $t \geq t_0$.

Ponieważ żadna ze współrzędnych stanu może nie być wielkością wyjściową układu, to do określenia tej wielkości niezbędny jest dodatkowy związek

$$y(t) = g[x(t), u(t), t]. \quad (9.3.4)$$

gdzie: g – jest l elementową jednoznaczna wektorową funkcją wyjścia

Równanie stanu (9.3.3) i wyjścia (9.3.4) można przedstawić na schemacie blokowym (strukturalnym) (rys.9.3.2).



Rysunek 9.3.2. Schemat blokowy równania stanu i wyjścia

Doświadczalne wyznaczanie charakterystyk obiektów regulacji

Jeżeli równania opisujące właściwości obiektów regulacji nie są wystarczająco znane lub układy automatyki są skomplikowane i trudne do opisu matematycznego, wówczas charakterystyki wyznaczamy na podstawie eksperymentalnej rzeczywistych obiektów. Wyróżniamy pomiary właściwości statycznych i dynamicznych. Pomiary statyczne są wykonywane w zakresie zmian wielkości sygnałów wejściowych i wyjściowych. Pomiary wielkości dynamicznych są wykonywane w celu ustalenia struktury oraz parametrów związków funkcjonalnych, wiążących pomiędzy sobą wielkości sygnałów wejściowych i wyjściowych.

Zakładamy, że badane obiekty są z reguły liniowe i cechują się jednym "wejściem" i "wyjściem".

Istnieją trzy główne metody wyznaczania właściwości dynamicznych obiektów regulacji tj.:

- wyznaczanie charakterystyk czasowych (dotyczy przebiegu przejściowego przy zdeterminowanym sygnale wymuszającym),
- wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych (wyznaczanie przebiegów ustalonych przy wymuszeniach sinusoidalnych),
- badanie właściwości stochastycznych przebiegów czasowych (badanie najmniej dokładne i wymagające żmudnego opracowania).

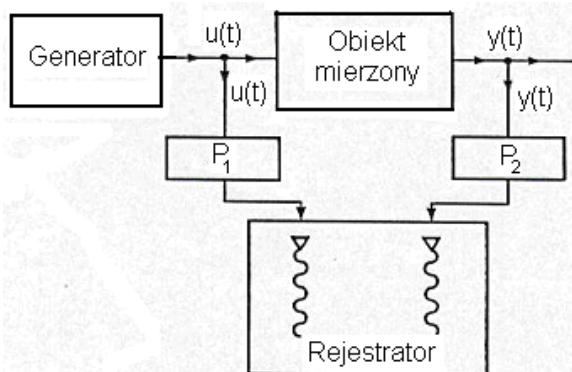
Można także wyróżnić dwa przypadki szczególne:

- mamy znaną strukturę obiektu i jego równania i poszukujemy wartości niektórych lub wszystkich współczynników tych równań,
- zupełnie nieznany obiekt tzw. "czarna skrzynka".

W praktyce najczęściej występują przypadki pomiędzy tymi skrajnościami.

Wszystkie metody pomiarowe dotyczą wyznaczania przebiegu $u(t)$ przed obiektem i poza obiektem przebiegu $y(t)$. Przez odpowiednią obróbkę

wyników pomiarów otrzymujemy właściwości badanego obiektu (rys.9.3.3). Właściwości obiektu można również określić stosując metodę symulacji komputerowej. Metoda ta polega na tym, że należy zbudować model obiektu tak, aby można było zmieniać jego parametry i strukturę, dobierając doświadczalnie jego właściwości, które były by zbliżone do obiektu rzeczywistego.



Rysunek 9.3.3. Schemat układu pomiarowego

Przetworniki P_1 i P_2 (rys.9.3.3) aby nie zwiększać przebiegów sygnałów u i y muszą mieć niski poziom inercyjności. Służą do pomiaru tych sygnałów o dowolnej wielkości fizycznej i przekształcenia wyników pomiaru na standardowe sygnały wejściowe rejestratora.

Wyznaczanie charakterystyk czasowych i parametrów obiektu regulacji na podstawie charakterystyki skokowej

Wyznaczenie charakterystyki skokowej jest proste, ponieważ sygnał wejściowy jest jednym parametrem w postaci skoku x_{st} , oraz wartość współczynnika wzmacniania obiektu otrzymuje się bezpośrednio ze stosunku wartości ustalonej odpowiedzi obiektu do wartości sygnału wejściowego. Charakterystykę czasową zwaną charakterystyką skokową lub odpowiedzią skokową obiektu można wyznaczyć z pomiaru sygnału wyjściowego obiektu regulacji, przy zdeterminowanym sygnale na wejściu. Sygnałem wejściowym jest najczęściej sygnał skokowy.

W praktyce przyjęto przedstawianie obiektów statycznych równaniami wysokiego rzędu z wyłączeniem obiektów oscylacyjnych za pomocą

ROZDZIAŁ 9

obiektów zastępczych, scharakteryzowanych tylko trzema parametrami tj. współczynnikiem wzmacnienia k , czasem opóźnienia T_0 oraz stałą czasową T . Obiekowi zastępczemu dla obiektu statycznego przypisuje się transmitancję opisaną wzorem (7.7), str. 158. Przez odpowiedni dobór jednostek wielkości wejściowej i wyjściowej, współczynnik wzmacnienia k można sprowadzić do jedności. Wówczas pozostają tylko dwa charakterystyczne parametry T_0 i T . Na rysunku 7.6 (str. 158) przedstawiono ten umowny rodzaj aproksymacji. W punkcie przegięcia charakterystyki rzeczywistej prowadzi się styczną, która odcina na osi czasu zastępcze parametry obiektu. Dla obiektu statycznego w stanie ustalonym stałemu sygnałowi wejściowemu odpowiada stała wartość sygnału wyjściowego. Jeżeli w stanie ustalonym stałemu sygnałowi wejściowemu odpowiada stała wartość pochodnej sygnału wyjściowego, to obiekt jest astatyczny pierwszego rzędu. Obiekt astatyczny opisuje transmitancja zastępcza w postaci wzoru (7.14), str. 161, rys. 7.14. Obiekty astatyczne aproksymuje się również za pomocą transmitancji opisanej wzorem (7.12), rys. 7.12, str. 160. Sposoby wyznaczania stałych dla obu tych transmitancji przedstawiają rysunki 7.12, str. 160 i 7.15, str. 161.

Zastępowanie charakterystyki rzeczywistej charakterystyką zastępczą (aproksymowaną) jest dokonywane w nieoptymalny sposób (np. z minimalizacją całki kwadratu jako różnicy między krzywymi), lecz arbitralnie na konstrukcji graficznej. Można także zastępować obiekt wysokiego rzędu o wielu różnych stałych czasowych obiektem także wysokiego rzędu, lecz o jednakowych stałych czasowych (rozdział 7, punkty 7.4, 7.5, str. 158-162). Pomiary charakterystyk skokowych przeprowadza się w niewielkim obszarze zmian sygnału wejściowego wokół wybranego punktu pracy obiektu. W tym obszarze zmian sygnału wejściowego obiekt można traktować jako liniowy. Stosowanie wymuszenia skokowego czasami jest niemożliwe, gdy mamy na wyjściu duże odchylenie. Dotyczy to szczególnie obiektów astatycznych. Wówczas wprowadzamy wymuszenie impulsowe o kształcie przedstawionym na rysunku 1.8 h), str. 20. Tego typu wymuszenie należy potraktować jako dwa kolejne wymuszenia skokowe o tej samej wartości i przeciwnych znakach.

Opis stanowiska

Na płycie czołowej stanowiska przedstawionego na rysunku 9.3.4 w obszarze "wejście" znajdują się dwa mierniki sygnałów wejściowych

ĆWICZENIA LABORATORYJNE

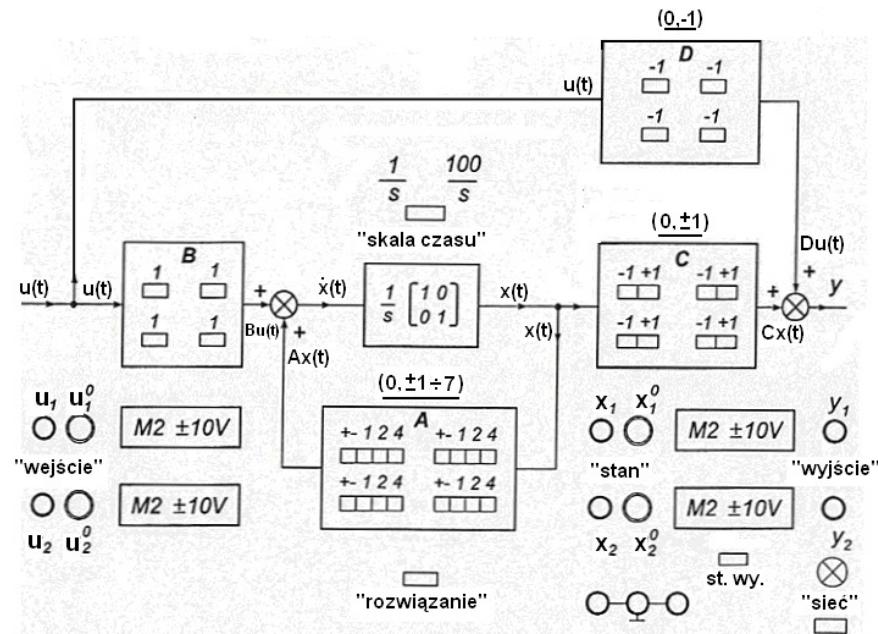
u_1 i u_2 (lewa strona płyty czołowej) o zakresie napięcia zasilania $\pm 10V$, dwa potencjometry do nastawiania wartości u_1 i u_2 (lewa strona płyty czołowej) oraz dwa gniazda służące do wprowadzania wielkości u_1 i u_2 z generatora zewnętrznego.

W obszarze "stan" znajdują się dwa mierniki sygnałów x_1 i x_2 (prawa strona płyty czołowej) lub y_1 i y_2 . Wybór wielkości mierzonych jest dokonywany przełącznikiem "stan-wyjście" (st.wy.).

Ponadto w wymienionych obszarach znajdują się dwa potencjometry służące do nastawiania wartości początkowych x_1^0 i x_2^0 (prawa strona płyty czołowej) oraz gniazda pomiarowe sygnałów x_1 i x_2 (prawa strona płyty czołowej) oraz y_1 i y_2 . Przełącznik "skala czasu" pozwala na zmianę czasu rozwiązywania zadania. Przełącznik "rozwiążanie" służy do uruchamiania rozwiązywania czasowego dla badanego obiektu regulacji. Na płycie czołowej znajdują się także trzy gniazda połączone z uziemieniem układu, wyłącznik "sieć" i lampka kontrolna zasilania prądowego.

Wartości elementów macierzy **A** można wybierać przyciskami \pm , 1, 2, 4 w zakresie wartości 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 5 , ± 6 , ± 7 . Wciśnięcie kilku przycisków daje sumę odpowiadających im wartości. Podobnie wciśnięcie przycisków w obszarach odpowiadających elementom macierzy **B**, **C** i **D** powoduje nadanie tym elementom wartości zaznaczonych nad odpowiadającymi im przyciskami. Przedstawione stanowisko badawcze umożliwia badanie właściwości dynamicznych obiektów liniowych pierwszego i drugiego rzędu.

ROZDZIAŁ 9



Rysunek 9.3.4. Płyta czołowa stanowiska
A,B,C,D – macierze równania stanu (9.3.1) i wyjścia (9.3.2)

Stanowisko umożliwia tworzenie modeli obiektów regulacji i ich badanie poprzez pomiary odpowiedzi na wymuszenie skokowe sygnałów sterujących, wyznaczanie charakterystyk czasowych i częstotliwościowych. Wyniki pomiarów można otrzymać w naturalnej 1/s lub przyspieszonej 100/s skali czasu i obserwować na oscyloskopie lub zapisywać za pomocą rejestratora lub komputera. Sygnały sterujące oraz warunki początkowe dla zmiennych stanu są wprowadzane za pomocą potencjometrów i mierzone dwiema parami mierników. Układ regulacji zbudowany jest na dwóch sumatorach i dwóch integratorach. Współczynniki odpowiednich macierzy realizują układy rezystorów łączących bloki funkcjonalne. Integratory zbudowane na wzmacniaczach mają możliwość dodawania dodatkowych kondensatorów, pozwalających na zmianę skali czasu modelu.

Na wejścia integratorów oprócz sygnałów u_1 i u_2 (lewa strona płyty czołowej) są doprowadzane sygnały x_1 i x_2 (prawa strona płyty czołowej). Umożliwia to realizację zapisu macierzowo-wektorowego równania stanu układu regulacji (wzór 9.3.3). Ponadto na odpowiednich wzmacniaczach są sumowane sygnały u_1 i u_2 oraz x_1 i x_2 w wyniku

czego realizowane jest równanie wyjścia (wzór 9.3.2) badanego obiektu regulacji, w którym elementy macierzy C mogą przyjmować wartości 0, ± 1 , natomiast macierzy D wartości 0 lub -1. Warunki początkowe u_1^0 i u_2^0 (lewa strona płyty czołowej) oraz wartości sygnałów x_1^0 i x_2^0 (prawa strona płyty czołowej) należy nastawiać w pozycji zwolnionej przycisku "rozwiążanie". Włączenie tego przycisku powoduje włączenie sygnałów u na wejściu układu regulacji i zmianę pracy integratorów ze stanu "warunki początkowe" w stan "rozwiążanie".

Wyboru wartości elementów macierzy A, B, C, i D oraz stałej czasowej całkowania (skala czasu) dokonuje się przy zwolnionym przycisku "rozwiążanie". Całkowanie zaznaczone schematycznie blokiem macierzy jednostkowej pomnożone przez 1/s może odbywać się w dwóch skalach czasu tj. naturalnej 1/sekundę i przyspieszonej 100/sekundę. W drugim przypadku wartości elementów macierzy A i B należy pomnożyć przez 100.

Sygnały x lub y są mierzone za pomocą mierników typu M2, w zależności od położenia przycisku "stan-wyjście".

Teoretyczne i doświadczalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych obiektów regulacji

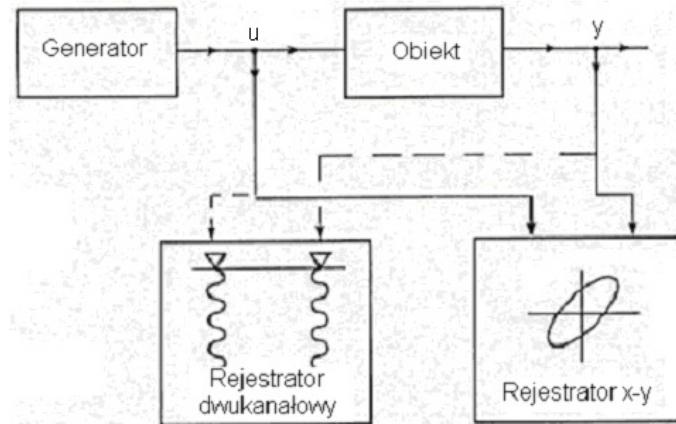
Po wyznaczeniu części rzeczywistej i urojonej transmitancji widmowej $G(j\omega)$ badanego obiektu możemy wyznaczyć punkty charakterystyki dla pełnego zakresu częstości od 0 do nieskończoności. Wyniki obliczeń zapisujemy w tablicy 9.3.1.

Tablica 9.3.1. Wyniki obliczeń do teoretycznej charakterystyki częstotliwościowej amplitudowo-fazowej

ω	0	0,01	0,1	1	10	100	∞
$P(\omega)$							
$Q(\omega)$							

Schemat układu pomiarowego z zastosowaniem rejestratora dwukanałowego lub rejestratora x-y przedstawia rysunek 9.3.5.

Rozdział 9



Rysunek 9.3.5. Schemat układu pomiarowego

Częstość kołową ω [rad/s] dla podanej częstotliwości f [Hz] wyznaczamy z zależności $\omega = 2\pi f$. Zakres częstotliwości generatora przebiegów sinusoidalnych potrzebny w praktyce jest bardzo niski od 0.01 [Hz] do kilkudziesięciu herców.

W przypadku rejestratora dwukanałowego otrzymujemy równoległy zapis wielkości wejściowej $u(t)$ i wielkości wyjściowej $y(t)$. W przypadku zastosowania do wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych rejestratora x-y otrzymujemy dla zadanej częstotliwości krzywą zamkniętą $y = f(u)$, gdzie

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 \sin \omega t \\ y &= A_2 \sin(\omega t + \Phi) \end{aligned} \right\}, \quad (9.3.5)$$

Wyznaczając z pierwszego równania (9.3.5) $\sin \omega t$ i podstawiając do drugiego równania otrzymamy równanie krzywej w postaci

$$\frac{u^2}{A_1^2} - 2 \frac{uy}{A_1 A_2} \cos \Phi + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \Phi, \quad (9.3.6)$$

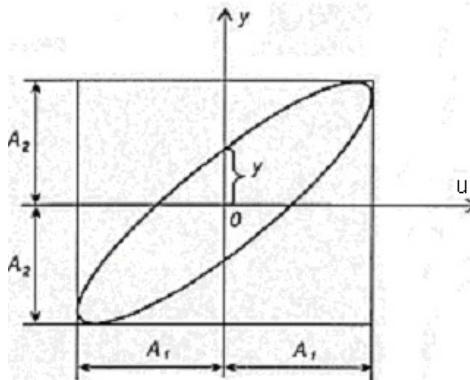
Z równania (9.3.6) dla $x = 0$ otrzymamy kąt przesunięcia fazowego

$$\sin \Phi = \frac{y}{A_2}. \quad (9.3.7)$$

Stosunek amplitud odpowiedzi (sygnały wyjściowe) do wymuszenia (sygnały wejściowe) wyznaczymy z zależności

$$A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)}. \quad (9.3.8)$$

Wykres krzywej $y = f(u)$, uzyskany z równania (9.3.6), jest przedstawiony na rysunku 9.3.6.



Rysunek 9.3.6. Wykres krzywej $y = f(u)$ dla zadanej częstotliwości wymuszenia

Z krzywej przedstawionej na rysunku 9.3.6, wyznaczonej dla zadanej częstotliwości wymuszenia ω , możemy odczytać amplitudę odpowiedzi A_2 po narysowaniu prostokąta obejmującego krzywą oraz współrzędną y przecięcia krzywej z osią Oy. Z równania (9.3.7) otrzymamy zależność na kąt przesunięcia fazowego $\Phi(\omega)$, a z równania (9.3.8) wyznaczamy bezwymiarową amplitudę $A(\omega)$ odpowiedzi do wymuszenia przy zadanej wartości amplitudy wymuszenia. Wyznaczona amplituda $A(\omega)$ ze wzoru (9.3.8) oraz kąt kąt przesunięcia fazowego $\Phi(\omega)$ z zależności (9.3.7) stanowią punkt $[A(\omega), \Phi(\omega)]$ poszukiwanej charakterystyki amplitudowo-fazowej. Praktycznie pomiary przeprowadzamy dla kilkunastu wybranych częstotliwości ω , obejmujących zakres pracy badanego obiektu $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Wyniki pomiarów i obliczeń wstawiamy do tablicy 9.3.2.

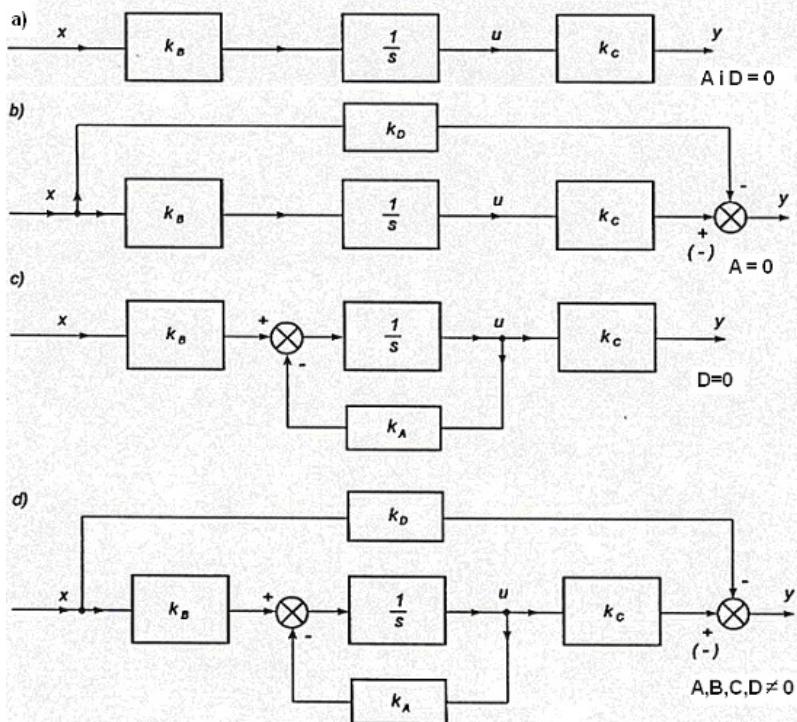
Tablica 9.3.2. Wyniki pomiarów i obliczeń do charakterystyki doświadczalnej

ROZDZIAŁ 9

Lp.	f [Hz]	ω [rad/s]	A_1 [mm]	A_2 [mm]	y [mm]	$A = \frac{A_2}{A_1}$	$\Phi = \arcsin \frac{y}{A_2}$
1							
2							
3							
.							
.							
.							

Przebieg ćwiczenia

1. Zbudować trzy obiekty regulacji z jednym wejściem i jednym wyjściem z przykładowych połączeń elementów automatyki przedstawionych na rysunku 9.3.7. Dokonać tego przy zwolnionym przycisku "rozwiążanie", wybierając odpowiednie wartości elementów macierzy A, B, C i D odpowiednimi przyciskami na płycie czołowej stanowiska.
2. Narysować schematy blokowe tych obiektów i wyznaczyć ich transmitancje zastępcze $G_z(s)$.
3. Przeprowadzić rejestrację charakterystyk skokowych dla zbudowanych obiektów regulacji. Odpowiedzi na niezerowe warunki początkowe powinny być rejestrowane przy zerowych wartościach sygnałów sterujących u_1^0 i u_2^0 . Przy zerowych warunkach początkowych x_1^0 i x_2^0 można rejestrować odpowiedzi na skoki sygnału sterującego u_1 lub u_2 wprowadzane przez zmianę stanu wybranego potencjometru u_1^0 lub u_2^0 . Odpowiedzi na skoki sygnału sterującego można realizować przez połączenie generatora dającego napięcie skokowe z wejściem obiektu. Do badania charakterystyk czasowych zaleca się stosować rejestrator o przesuwie taśmy 5 mm/s przy naturalnej skali czasu. Przebiegi czasowe można także obserwować na ekranie oscyloskopu.



Rysunek 9.3.7. Przykładowe połączenia układów regulacji

4. Wyznaczyć parametry zbudowanych obiektów regulacji, takie jak współczynnik wzmacnienia k , stałą czasową T i inne z wyznaczonych transmitancji zastępczych $G_z(s)$ oraz z zarejestrowanych doświadczalnie charakterystyk czasowych.
5. Dla jednego z układów przedstawionych na rysunku 9.3.7, ze sprzężeniem zwrotnym, wyznaczyć zastępczą transmitancję widmową.
6. Przeprowadzić pomiar charakterystyk częstotliwościowych. Ustawić potencjometrami x_1^0 i x_2^0 (prawa strona płyty czołowej) i u_1^0 i u_2^0 (lewa strona płyty czołowej) wartości składowe stałych sygnałów sterujących u_1 i u_2 oraz zerowe warunki początkowe na zmienne u_1 i u_2 (najlepiej ustawić $x_1^0 = x_2^0 = u_1^0 = u_2^0 = 0$). Połączyć gniazdo u_1 lub u_2 z generatorem napięcia sinusoidal-

ROZDZIAŁ 9

nego o regulowanej częstotliwości. Wyjście obiektu y_1 lub y_2 połączyć z rejestratorem x-y, do którego także należy podłączyć sygnał sterujący u z generatora (rys.9.3.5). Przełącznik "st. wy." ustawić na pozycji "wy.". Uruchomić układ wcisnięciem przełącznika "rozwiążanie". Dla kolejnych częstotliwości generatora zarejestrować przebiegi krzywych zamkniętych (elipsy) $y = f(u)$ na rejestratorze x-y. Zaleca się stosowanie amplitudy wymuszenia 1 V, zaś częstotliwość najlepiej zmieniać w postępie geometrycznym, np. 0.01, 0.02, 0.04, 0.08, 0.12 Hz itd.

Treść sprawozdania

W sprawozdaniu należy zamieścić

1. Schematy blokowe badanych obiektów regulacji.
2. Transmitancje zastępcze tych obiektów.
3. Wykresy charakterystyk czasowych z zaznaczonymi parametrami: stała czasowa T , współczynnik wzmacnienia k , czas opóźnienia T_0 itp.
4. Porównanie wartości parametrów zbudowanych obiektów, wyznaczonych z transmitancji zastępczych i otrzymanych z wykresów zarejestrowanych doświadczalnie.
5. Zastępczą transmitancję widmową $G_z(j\omega)$ obiektu regulacji.
6. Wykresy charakterystyki amplitudowo-fazowej obiektu wyznaczonej teoretycznie na podstawie tablicy 9.3.2.
7. Wnioski dotyczące punktów 3 i 4 oraz wnioski dotyczące zakresu częstotliwości, dla których narysowane charakterystyki znacząco się różnią. Podać przyczyny ewentualnych różnic.

Literatura

1. Kołacin T i inni: Ćwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki i teorii maszyn, Praca zbiorowa pod redakcją Tadeusza Kołacina, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.

ĆWICZENIA LABORATORYJNE

2. Kołacin T.: Podstawy teorii maszyn i automatyki, Oficyna wydawnicza, PW, 2005.
3. Żelazny M.: Podstawy Automatyki, Warszawa, PWN, 1976.

ROZDZIAŁ 9