Назирджанов Некруз Фарходович Р3110

1. Основные понятия механики. Размерность величин.

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей. Механика вообще подразделяется на три части: статику, кинематику и динамику. Кинематика (от греческого слова kinema – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил. Динамика (от греческого dynamis – сила) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обусловливают это движение. Статика (от греческого statike – равновесие) изучает условия равновесия тел. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики являются естественным следствием законов динамики и в данном курсе не изучаются.

Материальная точка - классической механики, обозначающее тело исчезающе малых размеров, но обладающее некоторой массой 7 основных единиц международной системы СИ: $[S]=$м, $[m]=$кг, $[t]=$с, $[I]=$А, $[T]=$К , $[\nu]=$моль, $[I]=$Кд (Канделла)

2. Способы описания движения

1. Векторный способ - это описание изменения радиус-вектора материальной точки в пространстве с течением времени. — вектор, соединяющий начало координат с этой точкой. представляет собой закон движения в векторном виде

2. Координатный способ - это описание изменения во времени координат точки в выбранной системе отсчета. При координатном способе положение точки в пространстве задается тремя координатами. Выбор системы координат зависит от конкретной задачи

3. Траекторный способ: выбирают начало отсчёта – неподвижную точку ‘O‘, а положение движущейся материальной точки ‘A‘ определяют при помощи так называемой дуговой координаты ‘l‘, которая представляет собой расстояние вдоль траектории от выбранного начала отсчёта ‘O‘ до точки ‘A‘.

3. Траекторный способ описания движения. Тангенциальное и нормальное ускорение

Траектория точки заранее известна. Положение точки задается дуговой координатой $l(t)$

Скорость:

$$\vec{V} = V_t\vec{t} \quad V_\tau = \frac{dl}{dt}$$

Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{t} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dl}V_\tau^2$$

$$d\tau = \tau d\alpha$$

$dl = Rd\alpha$, где R - радиус кривизны траектории

$\vec{a} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{1}{R}V_\tau^2\vec{n}$, где a_τ - тангенциальное ускорение, a_n - нормальное

Тангенциальное и нормальное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости, направлена по касательной к траектории движения. Нормальные ускорение отвечает за изменение направление вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории.

4. Кинематика движения материальной точки по окружности. Плоское движение твердого тела

Вращательное движение

OO' - неподвижная ось $\vec{r}$ - радиус-вектор точки А $d\vec{r}$ - перемещение

$d\vec{\varphi}$ - элементарный угол поворота (направление определяется по правилу Буравчика)

$$dr = Rd\varphi \quad R = r\sin\alpha$$

$$dr = rd\varphi\sin\alpha \quad d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}]$$

Угловая скорость: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Векторная величина, показывающая как меняется угловая скорость со временем.

$$\beta = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

Связь между линейными и угловыми величинами:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi}\vec{r} \quad dr = d\varphi r\sin\alpha = d\varphi R$$

$$V = \vec{\omega}\vec{r} \quad V = \omega r\sin\alpha = \omega R$$

Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{V}]$$

Перемещение, путь, скорость

$$dr = Rd\varphi \quad S = R\varphi \quad V = \omega R$$

Тангенциальное, нормальное и полное ускорение:

$a_\tau = \beta R;\ a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R;\ a = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$

Период, частота и число оборотов.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}; \quad N = \frac{\varphi}{2\pi}$

Плоское движение:

$\vec{V_c}$ - скорость центра колеса относительно Земли. $\vec{V_{\text{вр}}}$ - скорость точек колеса относительное его центра

$$\vec{V} = \vec{V_0} + [\vec{\omega}\vec{r}]$$

5. Динамика материальной точки. Системы отсчета. Принцип относительности Галилея.

Первый закон динамики (закон инерции): материальная точка при отсутствии внешних воздействий сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные к ней силы не изменят этого состояния.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением по инерции. Свойство тел сохранять свою скорость неизменной называется свойством инертности. Количественной мерой инертности материальной точки является ее масса.

- Существуют такие системы отсчета, относительно которых свободное тело движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя. Такие системы называют инерциальными (ИСО)

- Принцип относительности Галилея

  1) Любая СО, движущаяся с постоянной скоростью относительно ИСО

  Все ИСО эквивалентны друг другу по своим механическим свойствам Во всех ИСО свойства пространства и времени одинаковы Законы механики одинаковы во всех ИСО

6. Фундаментальные взаимодействия. Силы.

Динамика - раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение тел.

Сила - физическая величина, определяющая количественную характеристику и направление воздействия, оказываемого на данное тело со стороны других тел.

Силы условно можно разделить на силы, возникающие при непосредственном взаимодействии, и на возникающие под действием полей.

7. Масса. Законы Ньютона.

Инертная масса - мера инертности тела, т.е. способность тела сохранять свою скорость при движении.

Гравитационная масса - масса гравитационного взаимодействия, величина, определяющая вес тел.

$m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}}$ с точностью до 10^{-13}кг

Масса - величина аддитивная

$m = m_1 + m_2 + \ldots$

$m = const$

I закон Ньютона: постулирует существование ИСО

II закон Ньютона: в инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на вектор ее ускорения равен вектору действующей на точку силы.

III закон Ньютона: Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны

8. Преобразование скорости и ускорения при переходе к неинерциальной системе отсчета.

Переход к НИСО:

СО K вращается с постоянной угловой скоростью относительно системы оси, движущейся со скоростью и ускорением в системе K:

$$\vec{a} = \vec{a_0} + \vec{a} + 2[\vec{\omega}\vec{V}] - \omega^2\vec{p}$$

Выразим ускорение в НИСО:

$\vec{a'} = \vec{a} - \vec{a_0} + 2[\vec{V'}\vec{\omega}] + \omega^2\vec{p}$

Умножим на массу:

$m\vec{a'} = F' - m\vec{a_0} + 2m[\vec{V'}\vec{\omega}] + m\omega^2\vec{p}$

9. Силы инерции.

1) Поступательная сила инерции - обусловлена поступательным движением СО

$$F_m = -m\vec{a_0}$$

2) Центробежная сила инерции - возникает во вращающейся системе отсчета

$F_{цб} = m\omega^2\vec{p}$.. $\vec{p}$ - радиус-вектор, направленный перпендикулярно оси вращения от неё, и характеризующий положение тела относительно этой оси

10. Сила Кориолиса и ее геофизическое проявление. Маятник Фуко.

Сила Королиса:

1) Диск стоит, шарик катится точно по радиусу

2) Диск вращается - траектория шарика такая-же, как если бы на него действовала сила, перпендикулярная к его скорости. Это и есть сила Кориолиса. Она меняет направление скорости, но не величину.

$$F_{кор} = -2m[\omega V'] = 2m[V'\omega]$$

Вектор F_k перпендикулярен векторам скорости V' тела и угловой скорости вращения ω системы отсчета

Свойства сил инерции:

1) Силы инерции обусловлены свойствами НИСО, являются фиктивными силами. (то есть 3 закон Ньютона не выполняется)

2) Существуют только в НИСО

3) Все силы пропорциональны массе тела

Сила Кориолиса действует на тело, движущегося вдоль меридиана в северном полушарии вправо и в южном - влево. Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов.

11. Импульс материальной точки и системы м.т. II закон Ньютона в импульсной форме.

Изучая законы механики на примере упругого столкновения движущегося и покоящегося тел (например, металлических шаров), можно легко убедиться, что результат такого столкновения зависит не только от скорости движущегося тела, но и от масс обоих тел. Чем больше масса движущегося тела, тем сильнее оно толкнет одно и то же покоящееся тело при равной скорости. Следовательно, необходимо ввести специальную величину, которая бы характеризовала эту особенность взаимодействия – количество движения или импульс.

Для вывода формулы импульса заметим, что ускорение, получаемое материальной точкой, изменяется по закону:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Это одна из записей Второго закона Ньютона. Ускорение в левой части формулы равно отношению изменения скорости ко время этого изменения. Подставляя, получим:

$$\frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$m\vec{V_2} - m\vec{V_1} = \vec{F}\Delta t$$

В левой части выражения мы получили разность произведений масс материальных точек на их скорости. Причем, эта разность пропорциональна величине приложенной силы и времени ее действия. То есть, действие силы состоит в изменении произведения массы и скорости. Это произведение и называется импульсом материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Свойства импульса:

Поскольку скорость – величина векторная, то и импульс – также векторная величина, и направлена она в том же направлении. Из этой формулы можно получить единицу измерения импульса. Масса в системе СИ измеряется в килограммах, а скорость в метрах в секунду. Значит, единица импульса – это килограмм-метр в секунду.

Если вернуться к мысленному эксперименту со столкновением покоящегося и движущегося тела, то интуитивно понятно, что если движущееся тело будет состоять из двух тел разной массы, то в результате столкновения покоящееся тело начнет двигаться вдвое быстрее, чем в случае, когда движущееся тело одно. Эксперименты подтверждают этот предположение. Следовательно, импульс, как и сила, подчиняется принципу суперпозиции – импульс системы материальных точек равен векторной сумме отдельных импульсов каждой точки.

Импульс во втором законе Ньютона:

Заменив разность произведений масс и скоростей в формуле выше изменением импульса, получаем:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

Изменение импульса материальной точки равно произведению силы, приложенной к этой точке на время приложения силы. Именно в таком виде второй закон Ньютона был первоначально сформулирован в труде «Математические начала натуральной философии». Измерение импульса тела проще, чем измерение ускорения, поэтому Ньютон исследовал влияние силы на тело именно по изменению импульса.

Из такой записи Второго закона Ньютона видно, что во-первых, изменение импульса материальной точки прямо пропорционально величине силы, приложенной к этой точке. Поэтому произведение $F\Delta t$ в правой части иногда называют импульсом силы. Во-вторых, одно и то же изменение импульса можно получить разными силами, изменяя время действия

12. Центр масс и ц-система. Закон сохранения импульса.

Положение центра масс системы материальных точек определяется радиусом вектором

$$\vec{r_c} = \frac{\Sigma m_i \vec{r_i}}{\Sigma m_i}$$

Скорость центра масс системы: $\vec{V_c} = \frac{\Sigma m_i \vec{V_i}}{\Sigma m_i} = \frac{\vec{p}}{\Sigma m_i}$

Импульс системы:

$$\vec{p} = m\vec{V_c}$$

Уравнение движения центра масс:

$$m\frac{d\vec{V_c}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\text{внешн}}$$

ц-система - система отсчета, жестко связанная с центром масс системы и передвигающаяся поступательно по отношению к инерциальным системам (центр масс неподвижен)

$$\vec{V_c} = 0 \Rightarrow \vec{P} = 0$$

Закон сохранения испульса:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma_{i=1}^{N} \vec{F}_{i \text{ внешн}}$$

Импульс системы может меняться только под воздействием внешних сил

Уравнение справедливы как для ИСО, так и для НИСО

$$\vec{P_2} - \vec{P_1} = \Delta\vec{P} = \int \vec{F}_{\text{внешн}} dt$$

Импульс замкнутой системы остается постоянной величиной $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\text{вн}}\right)$

Условия выполнения ЗСИ:

1) Система является замкнутой

2) В замкнутой системе сумма всех внешних сил равна 0 ($\Sigma \vec{F}_{\text{внешн}} = 0$)

3) $\Sigma F_{x,\text{внешн}} = 0, \ P_x = const$

4) При условии, что кратковременные силы взаимодействия в системе во много раз больше внешних сил

Импульс силы

1) Импульс силы за бесконечно малый промежуток времени:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

2) Импульс постоянной силы за время Δt:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

3) Импульс меняющейся во времени силы:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{F}_{\text{ср}}\Delta t$$

13. Реактивное движение: уравнение Мещерского, формула Циолковского.

Реактивное движение - движение тела, возникающее при отдалении некоторой его части с определенной скоростью относительно тела. При этом возникает так называемая реактивная сила, сообщающая телу ускорение.

Уравнение Мещерского

$$d\vec{p} = -(M\vec{V} + dm\vec{U}) + (M + dm)(\vec{V} + d\vec{V}) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$d\vec{p} = -M\vec{V} - dm\vec{U} + M\vec{V} + dmd\vec{V} + Md\vec{V} = dm(\vec{V} - \vec{U}) + Md\vec{V}$$

$$Md\vec{V} = d\vec{P} + dm(\vec{U} - \vec{V})$$

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{U}$$

$\vec{U}$ - скорость отделяемого или присоединяемого вещества

$\frac{dm}{dt}\vec{U}$ - реактивная сила

$\vec{F}$ - сумма сил, действующих на тело со стороны других тел или силового поля

1) $U = 0,\ R = 0$. Масса присоединяется или отсоединяется без скорости относительно тела.

$$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$$

$$V(t) = \frac{F}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$

2) $U = -V$. Присоединяемая или отсоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета.

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}$$

$$V(t) = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$$

3) $\vec{F} = 0$:

$$\frac{md\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{U}\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{md\vec{V}}{dt} = \vec{U}\frac{dm}{dt}$$

$$md\vec{V} = \vec{U}dm$$

$$d\vec{V} = \vec{U}\frac{dm}{m}$$

$$\vec{V} = \vec{U}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \vec{U}\ln\frac{m}{m_0} = \vec{U} - \ln\frac{m_0 - \mu t}{m_0}$$

14. Работа. Мощность. Энергия.

Механическая работа

dr - элементарное перемещение в пределах которого сила $\vec{F}$ постоянна F_s - проекция силы на направление перемещения

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fds\cos\alpha = F_s ds$$

Механическая работа A силы F на конечном участке траектории 1-2:

$A = \Sigma dA = \int dA$

$A = \int Fdr$

$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$

$A = FS\cos\alpha \ \Rightarrow \ F = const$

Работа результативной силы:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots)d\vec{r} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$

Мощность - скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени.

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V} \quad A = \int_{t_1}^{t_2} Ndt$$

Средняя мощность

$N = \vec{F}\cdot\vec{V}_{\text{ср}}$

Работа силы упругости:

$$A = \int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

Работа однородной силы тяжести:

$$A = \int_{z_1}^{z_2} mgdz = -mgz_2 + mgz_1 = mgz_1 - mgz_2$$

15. Потенциальная энергия. Взаимосвязь силы и потенциальной энергии.

Потенциальное поле - поле, в котором взаимодействуют консервативные силы

Так как работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений тела, то существует скалярная величина, определяющая положение тел, убыль которой равна работе.

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Взаимосвязь силы и потенциальной энергии:

$A = -\Delta U$

$dA = -dU$

$\vec{F} d\vec{r} = -dU$

$F_x dx = -dU \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx};\ F_y = -\frac{dU}{dy};\ F_z = -\frac{dU}{dz}$

$\vec{F} = -\mathrm{grad} U = -\nabla U$

Условия выполнения системы:

$\frac{dU}{dx} = 0\ F_x = 0$

16. Консервативные и неконсервативные силы. Закон сохранения энергии.

Сила называется консервативной или потенциальной, если ее работа A не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечным положениями тела. Работа таких сил по перемещению тела по замкнутой траектории всегда равна нулю.

ЗСЭ - сумма кинетической и потенциальной энергии тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и силами упругости, остается неизменной.

17. Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера.

Момент инерции - мера инертности тела при вращательном движении, аналог массы тела.

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I\beta_z$$

Момент инерции:

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс:

$$I = \int r^2 dm$$

Теорема Штейнера — момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + md^2$$

18. Момент импульса. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса.

Момент импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] \quad L = rp\sin\alpha = pl$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d[\vec{r}\vec{p}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right]$$

Уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_1^2 \vec{M} dt$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} - \vec{M}_{\text{внутр}} + \vec{M}_{\text{внешн}}$$

19. Основной закон динамики вращательного движения. Аналогии между поступательными и вращательными величинами.

Основное уравнение динамики.

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I\beta_z$$

Доказательство:

$$L = R_i \cdot p_i = R_i m_i V_i = R_i m_i \omega R_i \Rightarrow L = \omega m_i R_i^2 = I$$
$$I = \Sigma m_i r_i^2$$
$$L_z = I\omega_z \Rightarrow M_z = \tfrac{dL_z}{dt} = I\beta_z$$

Аналоги:

Поступательными	Вращательными
$V = \frac{dr}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a_\tau = \frac{dV}{dt}$	$\beta = \frac{d\omega}{dt}$
$p = mV$	$L = I\omega$
$F = \frac{dp}{dt}$	$M = \frac{dL}{dt}$
$F = ma$	$M = I\beta$
$E_{\text{кин}} = \frac{mV^2}{2}$	$E_{\text{кин}} = \frac{I\omega^2}{2}$
$A = \int Fdr$	$A = \int Md\varphi$

20. Элементы теории упругости и гидродинамики.

Все реальные тела деформируемы.

$$|\vec{F}| = k\Delta l$$

Упругие деформации происходят в том случае, если сила не превосходит некоторый, определенный для данного тела предел

После этого предела тело получает остаточные или пластические деформации

Типы деформации: сжатие, растяжение, сдвиг.

Модули Юнга. Продольное растяжение.

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} l$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,\ \sigma\ -\ \text{нормальное растяжение}$$

$$\frac{F}{S} = \sigma$$

Чем больше модуль Юнга, тем хуже растягивается тело.

Коэффициент Пуассона

Относительное поперечное сжатие/растяжение:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\varepsilon = -M\varepsilon'$$

M - коэффициент Пуассона или коэффициент поперечного сжатия

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \Rightarrow F = \frac{\Delta l \cdot E \cdot S}{l}$$

$$A = \int F dx = U_1 - U_2$$

$$\frac{ES}{l}\Big|_0^{\Delta l} x dx = \frac{ES}{l} \cdot \frac{\Delta l^2}{2} = V\frac{E\varepsilon^2}{2} = U$$

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2}V \quad \omega = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}\ -\ \text{объёмная плотность энергии}$$

21. Типы колебаний. Основные характеристики колебаний.

Типы колебаний:

- Свободные - колебания, происходящие под воздействием только одной возвращающей силы
- Вынужденные - колебания, происходящие под воздействием внешней периодически изменяющейся силы
- Автоколебания - колебания, происходящие при периодическом поступании энергии от источника внутри колебательной системы

Характеристики: Амплитуда, период, частота, циклическая частота, фаза колебаний, координата

22. Сложение колебаний. Биения, фигуры Лиссажу.

Гармонические колебания задаются с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, а направление образует угол с осью OX, равный начальной фазе

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Метод векторных диаграмм широко используется при сложении колебаний. Угол между любыми двумя векторами, характеризующими колебания равен разности фаз соответствующих колебаний.

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{0_1})$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{0_2})$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Биение - периодическое изменение амплитуды в результате сложения колебаний в одном направлении с близкими частотами

$$x_1 = A\cos(\omega t)$$

$$x_2 = A\cos(\omega_\Delta \omega)t$$

$$\Delta\omega << \omega$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{2\omega + \Delta\omega}{2}t\cos\frac{\Delta\omega}{2} = 2A\cos\omega t\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$

$$x = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t)$$

Период биений - $T_\sigma = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$

Период колебаний - $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Фигуры Лиссажу - замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Вид фигур зависит от соотношения между периодами, фазами и амплитудами колебаний.

23. Свободные незатухающие колебания. Вывод и решение уравнения.

$$T = 2\int dt = 2\int\frac{dx}{V(x)} = 2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

$$V(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}\cdot(x - x_0)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2U(x)}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}\cdot(x - x_0)^2$$

$$F(x) = -\delta ex \qquad \delta e = \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=0}$$

$$ma = m\ddot{x} = -\delta ex$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) + B\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$-mA\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\delta e A\sin\omega t + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\delta e}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

24. Затухающие колебания. Основные характеристики, уравнение и решение.

$$F_{\text{сопр}} = -rV = -r\dot{x}$$

$$ma = -kx - rV$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\beta = \frac{r}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Решение уравнения свободных затухающих колебаний:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),\ \text{где}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период свободных затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}}$$

Характеристика затухающих колебаний:

1) Выбор релаксации τ - время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз

2) Коэффициент затухания β:

$$\beta = \frac{r}{2m} = \frac{1}{\tau}$$

3)Логарифмический декремент затухания λ:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

4) При маленьких затуханиях ($\beta^2 \ << \ \omega_0^2$)

$$\lambda \approx \beta T_0 \approx \beta\frac{2\pi}{\omega_0}$$

5) Добротность колебательного контура Q - отношение запасенной энергии в контуре к энергии, теряемой системой за один период.

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t+T) - W(t)} = 2\pi\frac{W}{\Delta W}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

При малых затуханиях ($\beta^2 \ << \ \omega_0^2$)

$$Q = \frac{\pi}{\beta T_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

25. Вынужденные колебания. Резонанс.

Вынужденные колебания - колебания под действием внешней периодической силы.

II закон Ньютона: $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$

Уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t)$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \qquad \beta = \frac{r}{2m} \ - \text{ коэффициент затухания}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ - \text{ собственная частота колебаний}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi') \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Частное решение:

$$x(t) = a\cos(\omega t - \varphi)$$

Проверим:

$$x(t) = a\cos(\omega t - \varphi) \ \Big| \ \cdot \omega_0^2$$

$$x'(t) = -a\omega\sin(\omega t - \varphi) \ \Big| \ \cdot 2\beta$$

$$x'' = -a\omega^2\cos(\omega t - \varphi)$$

$$x'(t) = a\omega\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$x''(t) = a\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$a\cos(\omega t - \varphi)\cdot\omega_0^2 + 2\beta a\omega\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + a\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi) = f_0\cos(\omega t)$$

$$f_0^2 = (2\beta\omega a)^2 + ((\omega^2 - \omega_0^2)a)^2$$

$$f_0^2 = 4\beta^2\omega^2 a^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2\cdot a^2$$

Вынужденные колебания:

$$a^2 = \frac{f_0^2}{4\beta^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

$$(4\beta^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)'_\omega = 8\beta^2\omega + 4\omega^3 - 4\omega\omega_0^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{4\omega_0^2 - 8\beta^2}{4} = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \ - \text{ частота, при которой } A = \max$$

$$\omega^2 \ >> \ \beta^2$$

Резонанс:

Резкое возрастание амплитуды колебаний на резонансной частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Связь с добротностью:

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\omega}$$

$$a = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \left|\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right| = \frac{f_0\cdot m}{k} = \frac{F_0}{k} = x_0$$

$$\frac{f_0\cdot k}{2\beta\omega_0\cdot F_0} = \frac{F_0\cdot k}{m\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot F_0\cdot 2\beta} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Ядерный магнитный резонанс - резонансное поглощение или излучение электромагнитной энергии веществом, содержащим ядра с ненулевым спином во внешнем магнитном поле, на частоте ν, обусловленное переориентацией магнитных моментов ядер.

Продольные волны - колебания происходят в направлении распространения волны.

Поперечные волны - колебания происходят перпендикулярно распространению волны.

Процесс распространения поперечных волн:

Частицы колеблются около положений равновесий с разным сдвигом фаз. Частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии VT колеблются в одной фазе

Общее решение играет роль только в начальной стадии процесса. Установившиеся колебания представляют собой гармонические колебания с частотой равной частоте вынуждающей силы.

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

26. Типы волн и их основные характеристики. Уравнение волны.

Характеристики волны:

1) Длина волны - расстояние, проходимое волной за период.

$$\lambda = VT$$

2) Фронт волны - геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t.

3) Волновая поверхность - геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе.

Уравнение плоской волны:

Плоская волна - волна, фронт которой представляет собой плоскость.

$$\xi(x, y, z, t) = \xi(x, t)$$

$$\xi(x, t) = a\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \ - \ \text{фазовая скорость} \qquad \frac{\omega}{V} = k \ - \ \text{волновое число}$$

Уравнение сферической волны:

$$\xi(r, t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr)$$

Волновое уравнение:

$$\xi(x, t) = a\cos(\omega t - kx)$$

$$\xi(x, t)'_x = ak\sin(\omega t - kx)$$

$$\xi(x, t)''_x = -ak^2\cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{d^2\xi}{Vt^2}$$

Уравнение волны - выражение, определяющее смещение колеблющейся точки, как функцию координат и времени

$$\xi(x, y, z, t) = \xi(x, y) - ?$$

Допустим точка плоскость $x = 0$ совершает колебания

$$\xi(0, t) = a\cos(\omega t)$$

Она достигнет плоскости x за время $\tau = \frac{x}{V}$. Колебания в плоскости x:

$$\xi(x, t) = a\cos(\omega t - \frac{\omega x}{V})$$

Зафиксируем фазу волны и продифференцируем выражение:

$$\omega t - \frac{\omega x}{V} = \text{const}$$

$$\frac{dx}{dt} = V \ - \ \text{фазовая скорость волны}$$

$$\frac{\omega}{V} = k \ - \text{волновое число}$$

27. Волновое уравнение.

Волновое уравнение:

$$\frac{\delta\xi}{\delta x^2} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\delta^2\xi}{\delta t^2}$$

Продифференцируем дважды уравнение плоской волны по времени t и по всем координатам:

$$\xi = A\cos(\omega t - kr)$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kr) = -\omega^2 \xi$$

$$\xi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2}$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta x^2} = -k_x^2 A\cos(\omega t - kx) = -k_x^2 \xi$$

$$V = \frac{\omega}{k} :\Rightarrow \qquad \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} + \dots = \frac{1}{V^2}\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2}$$

28. Звуковые волны и их характеристики.

Звуковая волна (звуковые колебания) — это передающиеся в пространстве механические колебания молекул вещества (например, воздуха). В результате каких-либо возмущений (например, колебаний диффузора громкоговорителя или гитарной струны), вызывающих движение и колебания воздуха в определенной точке пространства, возникает избыточное давление (поскольку воздух в процессе движения сжимается), толкающее окружающие слои воздуха. Эти слои тоже сжимаются, что, в свою очередь, снова создает избыточное давление, влияющее на соседние слои воздуха. Так, по цепочке, происходит передача первоначального возмущения в пространстве из одной точки в другую. Тело, создающее возмущение (колебания воздуха), называют источником звука.

Если говорить о звуковых колебаниях, то необходимо упомянуть такую характеристику, как скорость их распространения. Она зависит от среды, в которой эти колебания распространяются. На нее влияют такие факторы, как упругость среды, ее плотность и температура. Так, например, чем выше температура среды, тем в ней больше скорость звука. В нормальных условиях (при комнатной температуре и атмосферном давлении) скорость звука в воздухе составляет приблизительно 330 м/с. Таким образом, время, через которое слушатель начинает воспринимать звуковые колебания, зависит от его удаленности от источника звука, а также от характеристик среды, в которой распространяется звуковая волна. Надо заметить, что скорость распространения звука почти не зависит от частоты звуковых колебаний. Это означает, что звук воспринимается именно в той последовательности, в какой он создается источником. Звуковым волнам присущи различные явления, связанные с распространением колебаний в пространстве. Перечислим наиболее важные из них.

Интерференция — усиление колебаний звука в одних точках пространства и ослабление в других в результате наложения двух или нескольких звуковых волн. Когда мы слышим звуки разных, но достаточно близких частот сразу от двух источников, к нам приходят то гребни обеих звуковых волн, то гребень одной волны и впадина другой. В результате наложения двух волн звук то усиливается, то ослабевает, что воспринимается на слух как биения. Этот эффект называется интерференцией во времени.

Звуковая волна при падении на границу раздела с другой средой может отразиться от нее, пройти в другую среду, изменить направление движения, т. е. преломиться от границы раздела (это явление называют рефракцией), поглотиться или одновременно совершить несколько из перечисленных действий. Степень поглощения и отражения зависит от свойств сред на границе раздела.

Энергия звуковой волны в процессе ее распространения поглощается средой. Этот эффект называют поглощением звуковых волн. Важно отметить, что степень поглощения звуковой энергии зависит как от свойств среды (температура, давление, плотность), так и от частоты звуковых колебаний: чем выше частота, тем большее рассеяние претерпевает на своем пути звуковая волна.

Очень важно упомянуть также явление волнового движения в замкнутом объеме, суть которого состоит в отражении звуковых волн от стенок некоторого закрытого пространства. Отражения звуковых колебаний могут сильно влиять на конечное восприятие звука — изменять его окраску, насыщенность, глубину. Так, звук от источника, расположенного в закрытом помещении, многократно отражаясь от стен помещения, воспринимается слушателем как сопровождающийся специфическим гулом. Такой гул называется реверберацией. Эффект реверберации очень широко используется в обработке звука для придания звучанию специфических свойств и тембральной окраски.

Способность огибать препятствия — еще одно ключевое свойство звуковых волн, называемое дифракцией. Степень огибания зависит от соотношения между длиной звуковой волны (ее частотой) и размером стоящего на ее пути препятствия или отверстия. Если препятствие оказывается намного больше длины волны, то звуковая волна отражается от него. Если же размер препятствия сопоставим с длиной волны или меньше ее, то звуковая волна дифрагирует.

Еще один эффект, связанный с волновым движением, о котором нельзя не вспомнить, — резонанс. Он заключается в значительном усилении амплитуды при наложении нескольких колебаний с одинаковой частотой. Звуковая волна, создаваемая некоторым колеблющимся телом, распространяясь в пространстве, может переносить энергию колебаний другому телу (резонатору), имеющему равную частоте звуковой волны частоту собственных колебаний, которое, поглощая эту энергию, начинает колебаться и фактически само становится источником звука. При этом исходная звуковая волна усиливается, и звук становится громче. Надо заметить, что в случае появления резонанса энергия звуковой волны расходуется на "раскачивание"резонатора, что соответственно сказывается на длительности звучания.

29. Эффект Доплера

Эффект Доплера — еще одно интересное явление, связанное с распространением звуковых волн в пространстве. Он состоит в том, что длина волны (а, значит, и ее частота) изменяется в соответствии со скоростью движения слушателя относительно источника волны. Чем быстрее слушатель (регистрирующий датчик) приближается к источнику звуковых колебаний, тем регистрируемая им длина волны становится меньше и наоборот.

Зная скорость источника волн по отношению к неподвижному наблюдателю, можно определить регистрирующую приемником частоту волн.

$\lambda = \frac{V}{\nu_0}$. Если источник приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью $V_{\text{ист}}$ относительно среды, то:

$$\lambda = \frac{V - V}{\nu_0} \Rightarrow \nu = \frac{V}{\lambda} = \frac{V \cdot \nu_0}{V - V_{\text{ист}}} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{V_{\text{ист}}}{V}}$$

Если же сам приемник движется относительно среды со скоростью $V_{\text{пр}}$, то частота регистрируемых ими волн будет равна:

$$\nu = \nu_0 (1 + \frac{V_{\text{пр}}}{V})$$

Если же источник, и приемник движутся относительно друг друга, то:

$$\nu = \frac{\nu_0 \left(1 + \frac{V_{\text{пр}}}{V}\right)}{1 - \frac{V_{\text{ист}}}{V}} = V_0 \left(\frac{V + V_{\text{пр}}}{V - V_{\text{ист}}}\right)$$

Применение: Док-во того, что вселенная расширяется. Спектры наблюдаемых нами звезд немного сдвинуты по частоте в меньшую сторону ⇒ галактики удаляются друг от друга