Математический анализ, 4 семестр.
Контрольные задания.

Учебно-методическое пособие

УДК 517.53, 517.53
ББК 22.161.55
М 31

Авторы: Н.В.Белецкая, И.П.Драгилева, С.В.Костин,
М.И.Митягина, М.Н.Прохоров, А.Л.Шелепин

Редактор: Ю.И.Худак

Контрольные задания содержат типовой расчет по теории функций комплексного переменного (математический анализ, IV семестр), входящей в программу факультета кибернетики. Типовой расчет выполняется студентами в письменном виде и сдается преподавателю до начала зачетной сессии. Приведенные в пособии вопросы к зачету или экзамену могут быть уточнены и дополнены лектором.

Математический анализ, 4 семестр. Контрольные задания.
Учебно-методическое пособие

Рецензенты: доц., докт. физ.-мат. наук А.О.Смирнов,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
доц., канд. физ.-мат. наук И.С.Пулькин, МИРЭА

Минимальные системные требования:
Поддерживаемые ОС: Windows 2000 и выше
Память: ОЗУ 128 Мб
Жесткий диск: 20 Мб
Устройства ввода: клавиатура, мышь
Дополнительные программные средства: программа Adobe Reader

Оглавление

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО)

IV семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Каков геометрический смысл тождества
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)?$$

2. Найти область, заданную неравенствами
$$\alpha<\arg(z-z_0)<\beta \qquad (-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi).$$

3. Найти область, заданную неравенством $|z|<\arg z$, если $0\leqslant\arg z<2\pi$.

4. Найти ошибку в рассуждении, приводящем к парадоксу Бернулли: $(-z)^2=z^2$, поэтому $2\operatorname{Ln}(-z)=2\operatorname{Ln}z$, и следовательно, $\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln}z$.

5. Совпадают ли множества значений $a^{2\alpha}$, $(a^\alpha)^2$, $(a^2)^\alpha$? Рассмотреть для $a=\alpha=i$.

6. Для отображения $w=z^2$ найти образы линий $y=c$ и $|z|=R$. Какие из них преобразуются взаимно-однозначно?

7. Для отображения $w=e^z$ найти образ линии $x=y$ и прообраз линии $\rho=\theta$, $0\leqslant\theta<\infty$ (ρ, θ – полярные координаты).

8. Доказать, что функция $f(z)=\bar z$ нигде не дифференцируема.

9. Доказать, что функция $f(z)=z\operatorname{Re}z$ дифференцируема только в точке $z=0$, найти $f'(0)$.

10. Доказать, что для функции $f(z)=\sqrt{|xy|}$ в точке $z=0$ выполняются условия Коши-Римана, но производная не существует.

11. Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, если $f(z)$ – регулярная функция?

12. Доказать, что производные (любого порядка) гармонической функции также являются функциями гармоническими.

13. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w=z^2$, $w=1/z$, $w=e^z$?

14. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z=a$, причем $g(a)=b$ и функция $f(w)$ имеет в точке $w=b$ полюс порядка m. Доказать, что функция $F(z)=f(g(z))$ имеет в точке $z=a$ полюс порядка mn, где n – порядок нуля функции $g(z)-b$ в точке $z=a$.

15. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z=a$ и $g(a)=b$, а функция $f(w)$ имеет в точке $w=b$ существенно особую точку. Доказать, что

точка $z = a$ – существенно особая точка функции $F(z) = f(g(z))$.

16. Для каких рациональных функций

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

точка ∞ является устранимой особой точкой? Неустранимой особой точкой? Каков тип этой особой точки?

17. Построить пример функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс второго порядка в точке $z = 0$ и простой полюс на бесконечности.

18. Построить пример функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: 3 полюса первого порядка.

19. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс порядка 2 в точке $z = 0$ и полюс порядка 2 на бесконечности.

20. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс порядка 2 на бесконечности.

21. Доказать, что если $f(z)$ непрерывна в окрестности точки $z = a$, то

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

В чем отличие этого утверждения от интегральной формулы Коши?

22. Доказать, что для функции $f(z)$ имеет место равенство $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-a} f(z)$, если $f(z)$ – четная, и $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-a} f(z)$, если $f(z)$ – нечетная. Предполагается, что написанные вычеты имеют смысл.

23. Пусть $f(z) = g(az)$, где $a \neq 0$. Доказать, что

$$\operatorname*{res}_{z=az_0} f(z) = \frac{1}{a} \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

24. Найти res $f(\varphi(z))$, если $\varphi(z)$ регулярна в точке a и $\varphi'(z) \neq 0$, а $f(z)$ имеет в точке $\varphi(a)$ полюс первого порядка с вычетом, равным A.

25. Доказать, что к интегралу $\int\limits_{\Gamma} e^{-z^2} dz$, взятому по границе Γ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, теорема о вычетах неприменима.

26. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится в круге $|z| < 1$?

27. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится в кольце $1 < |z| < 3$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Записать комплексное число z в алгебраической, показательной и тригонометрической формах.

N	z	N	z
1	$\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\ln 2\right)$	2	$\frac{7}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\ln 3\right)$
3	$-\frac{5\sqrt{3}}{7}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-i\,\frac{\ln 3}{2}\right)$	4	$-\frac{5\sqrt{3}}{13}-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-i\,\frac{\ln 3}{2}\right)$
5	$\frac{1}{2\sqrt{3}}-\operatorname{ch}\left(\ln 3+i\,\frac{\pi}{6}\right)$	6	$\frac{7}{4\sqrt{3}}-\operatorname{sh}\left(\ln 2+i\,\frac{\pi}{6}\right)$
7	$1-\operatorname{th}\left(\frac{\ln 3}{4}+i\,\frac{5\pi}{12}\right)$	8	$\frac{1}{7}-\operatorname{cth}\left(\frac{\ln 3}{4}+i\,\frac{5\pi}{12}\right)$
9	$-\frac{1}{4\sqrt{2}}+\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\ln 4\right)$	10	$-\sqrt{2}+\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\ln 2\right)$
11	$1-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}+i\,\frac{\ln 2}{4}\right)$	12	$\frac{3}{5}-\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{8}+i\,\frac{\ln 2}{4}\right)$
13	$\frac{1}{5\sqrt{2}}+\operatorname{ch}\left(\ln 5-i\,\frac{3\pi}{4}\right)$	14	$\frac{3}{\sqrt{2}}+\operatorname{sh}\left(\ln 3-i\,\frac{3\pi}{4}\right)$
15	$-\frac{1}{7}+\operatorname{th}\left(\ln 2-i\,\frac{\pi}{6}\right)$	16	$-\frac{27}{13}+\operatorname{cth}\left(\ln 2-i\,\frac{\pi}{6}\right)$
17	$1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-i\ln 2\right)$	18	$\frac{7}{4}+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-i\ln 4\right)$
19	$\frac{1}{7\sqrt{3}}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+i\,\frac{\ln 3}{4}\right)$	20	$\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12}+i\,\frac{\ln 3}{4}\right)$
21	$-\frac{1}{12}-\operatorname{ch}\left(\ln 6+i\,\frac{2\pi}{3}\right)$	22	$-1-\operatorname{sh}\left(\ln 2+i\,\frac{2\pi}{3}\right)$
23	$\frac{3}{13}-\operatorname{th}\left(\frac{\ln 8}{4}+i\,\frac{\pi}{8}\right)$	24	$\frac{3}{5}-\operatorname{cth}\left(\frac{\ln 8}{4}+i\,\frac{\pi}{8}\right)$
25	$\frac{1}{7\sqrt{2}}-\operatorname{ch}\left(\ln 7+i\,\frac{\pi}{4}\right)$	26	$\frac{9}{\sqrt{2}}-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+i\ln 9\right)$
27	$-\frac{11}{7\sqrt{3}}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$	28	$-\frac{\sqrt{3}}{13}-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$

N	z	N	z
29	$\dfrac{9}{7} - \operatorname{th}\left(\dfrac{\ln 12}{4} - i\,\dfrac{5\pi}{12}\right)$	30	$\dfrac{1}{4} - \operatorname{sh}\left(\dfrac{\ln 12}{2} - i\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$
31	$\dfrac{5}{6} - \operatorname{ch}\left(\dfrac{\ln 3}{2} + i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$	32	$\dfrac{11}{5} - \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{8} + i\,\dfrac{\ln 8}{4}\right)$

Решение варианта 31. Пусть $z_1 = \dfrac{\ln 3}{2} + i\,\dfrac{\pi}{6}$. Имеем:

$$\operatorname{ch} z_1 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}.$$

Находим числа e^{z_1} и e^{-z_1}:

$$e^{z_1} = e^{\frac{\ln 3}{2} + i\,\frac{\pi}{6}} = e^{\frac{\ln 3}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$e^{-z_1} = e^{-\frac{\ln 3}{2} - i\,\frac{\pi}{6}} = e^{-\frac{\ln 3}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch} z_1 = \frac{\left(\dfrac{3}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{2 + \dfrac{i}{\sqrt{3}}}{2} = 1 + \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Поэтому $z = \dfrac{5}{6} - \operatorname{ch} z_1 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{i}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{6}\,(-1 - i\sqrt{3}\,)$.
Мы записали число z в алгебраической форме.
Находим модуль и главное значение аргумента числа z:

$$|z| = \frac{1}{6}\,|-1 - i\sqrt{3}\,| = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3},$$

$$\arg z = \arg\,(-1 - i\sqrt{3}\,) = -\frac{2\pi}{3}.$$

Записываем число z в показательной и тригонометрической формах:

$$z = \frac{1}{3}\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Ответ: $z = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{i}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\, e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{3}\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right].$

Решение варианта 32. Пусть $z_1 = \dfrac{3\pi}{8} + i\,\dfrac{\ln 8}{4}$. Имеем:

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{\sin z_1}{\cos z_1} = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz_1} + e^{-iz_1}} = -i \cdot \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{e^{iz_1} + e^{-iz_1}} = -i \cdot \frac{e^{2iz_1} - 1}{e^{2iz_1} + 1}$$

(мы умножили числитель и знаменатель на e^{iz_1} и учли, что $\dfrac{1}{i} = -i$).

Находим число e^{2iz_1}:

$$e^{2iz_1} = e^{-\frac{\ln 8}{2} + i\,\frac{3\pi}{4}} = e^{-\frac{\ln 8}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} z_1 = -i \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) + 1} = -i \cdot \frac{-\frac{5}{4} + \frac{i}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{i}{4}} = \frac{1 + 5i}{3 + i}.$$

Умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное к знаменателю, то есть на $3 - i$:

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{(1 + 5i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{3 + 15i - i + 5}{9 + 1} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\,i.$$

Поэтому $z = \dfrac{11}{5} - \operatorname{tg} z_1 = \dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{5}\,i = \dfrac{7}{5}\,(1 - i)$.

Мы записали число z в алгебраической форме.

Находим модуль и главное значение аргумента числа z:

$$|z| = \frac{7}{5}\,|1 - i| = \frac{7}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{5},$$

$$\arg z = \arg\,(1 - i) = -\frac{\pi}{4}.$$

Записываем число z в показательной и тригонометрической формах:

$$z = \frac{7\sqrt{2}}{5}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{7\sqrt{2}}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Ответ: $z = \dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{5}\,i = \dfrac{7\sqrt{2}}{5}\;e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{7\sqrt{2}}{5}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

Задача 2. В нечетных вариантах записать в алгебраической форме все элементы множества E. В четных вариантах решить уравнение и записать в алгебраической форме все его решения.

N	Множество E	N	Уравнение
1	$\operatorname{Arth}\left(\dfrac{11+2i\sqrt{3}}{7}\right)$	2	$(1-4i\sqrt{3}\,)\operatorname{cth} z = 3+2i\sqrt{3}$
3	$\operatorname{Arsh}\left(\dfrac{1-3i}{2\sqrt{2}}\right)$	4	$7\operatorname{ch} z + 9\operatorname{sh} z = 1-3i\sqrt{3}$
5	$\operatorname{Arcctg}\left(\dfrac{-12-i}{5}\right)$	6	$(4-7i)\operatorname{tg} z = -3-16i$
7	$\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{3}{4}\,i\right)$	8	$3\cos z + i\sin z = 3-i$
9	$\operatorname{Arcth}\left(\dfrac{1+2i\sqrt{3}}{13}\right)$	10	$(5-8i\sqrt{3}\,)\operatorname{th} z = 2-13i\sqrt{3}$
11	$\operatorname{Arch}\left(\dfrac{3\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}}\right)$	12	$11\operatorname{ch} z - 5\operatorname{sh} z = -9+i\sqrt{3}$
13	$\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{4+5i\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}\right)$	14	$(8+11i\sqrt{3}\,)\operatorname{ctg} z = 7\sqrt{3}-28i$
15	$\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{-3-i}{2\sqrt{2}}\right)$	16	$6\cos z - 2i\sin z = 3\sqrt{3}+i$
17	$\operatorname{Arth}\left(\dfrac{7-6i}{5}\right)$	18	$(1+30i)\operatorname{cth} z = 11-10i$
19	$\operatorname{Arsh}\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$	20	$3\operatorname{ch} z - 5\operatorname{sh} z = -2-2i\sqrt{3}$
21	$\operatorname{Arcctg}\left(\dfrac{2\sqrt{3}-i}{13}\right)$	22	$(5+16i\sqrt{3}\,)\operatorname{tg} z = 12\sqrt{3}-7i$

N	Множество E	N	Уравнение
23	$\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{3\sqrt{3}-i}{4\sqrt{2}}\right)$	24	$2\cos z + 10i\sin z = \sqrt{3} + 9i$
25	$\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$	26	$(4 + 25i\sqrt{3}\,)\operatorname{th} z = 24 - 5i\sqrt{3}$
27	$\operatorname{Arch}\left(\dfrac{5}{12}\,i\right)$	28	$9\operatorname{ch} z - 7\operatorname{sh} z = -6 - 2i$
29	$\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$	30	$(3 + 11i)\operatorname{ctg} z = 19 + 9i$
31	$\operatorname{Arcth}\left(\dfrac{2-i\sqrt{3}}{7}\right)$	32	$\cos z + 7i\sin z = 2\sqrt{3} - 6i$

Решение варианта 31. Множество $E = \operatorname{Arcth}\left(\dfrac{2-i\sqrt{3}}{7}\right)$ состоит из всех комплексных чисел z таких, что

$$\operatorname{cth} z = \frac{2-i\sqrt{3}}{7}. \tag{$*$}$$

Поэтому задача сводится к решению уравнения $(*)$.

Имеем:

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \cdot \frac{2}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}$$

(мы умножили числитель и знаменатель на e^z).

Обозначим число e^{2z} буквой t. Мы приходим к уравнению

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{2-i\sqrt{3}}{7}.$$

Решаем это уравнение:

$$7(t+1) = (2 - i\sqrt{3}\,)(t-1);$$

$$7t + 7 = (2 - i\sqrt{3}\,)t - 2 + i\sqrt{3};$$

$$(5 + i\sqrt{3}\,)t = -9 + i\sqrt{3};$$

$$t = -\frac{9 - i\sqrt{3}}{5 + i\sqrt{3}}.$$

Умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное к знаменателю, то есть на $5 - i\sqrt{3}$:

$$t = -\frac{(9 - i\sqrt{3}\,)(5 - i\sqrt{3}\,)}{(5 + i\sqrt{3}\,)(5 - i\sqrt{3}\,)} = -\frac{45 - 5i\sqrt{3} - 9i\sqrt{3} - 3}{25 + 3} =$$

$$= -\frac{42 - 14i\sqrt{3}}{28} = -\frac{14(3 - i\sqrt{3}\,)}{14 \cdot 2} = -\frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(-\sqrt{3} + i).$$

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$e^{2z} = t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(-\sqrt{3} + i).$$

Находим модуль и главное значение аргумента числа t:

$$|t| = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|-\sqrt{3} + i| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3},$$

$$\arg t = \arg\,(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}.$$

Следовательно,

$$2z = (\ln t)_k = \ln|t| + i(\arg t + 2\pi k) =$$

$$= \ln\sqrt{3} + i\Big(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\Big) = \frac{\ln 3}{2} + i\Big(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $z = \dfrac{\ln 3}{4} + i\Big(\dfrac{5\pi}{12} + \pi k\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $E = \Big\{\,\dfrac{\ln 3}{4} + i\Big(\dfrac{5\pi}{12} + \pi k\Big)\;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

Решение варианта 32. Имеем:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + 7i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2\sqrt{3} - 6i.$$

Обозначим число e^{iz} буквой t. Тогда $e^{-iz} = \dfrac{1}{t}$ и мы приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{7}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{3} - 6i.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$4t^2 - (2\sqrt{3} - 6i)t - 3 = 0. \qquad (*)$$

Находим дискриминант:

$$D = (2\sqrt{3} - 6i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 12 - 24i\sqrt{3} - 36 + 48 =$$

$$= 24 - 24i\sqrt{3} = 24(1 - i\sqrt{3}\,).$$

Находим модуль и главное значение аргумента числа D:

$$|D| = 24\,|1 - i\sqrt{3}\,| = 24 \cdot 2 = 48,$$

$$\arg D = \arg\,(1 - i\sqrt{3}\,) = -\frac{\pi}{3}.$$

Записываем число D в показательной форме: $D = 48\,e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.
Находим главное значение корня 2-й степени из числа D:

$$(\sqrt{D}\,)_0 = \sqrt{48}\;e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 6 - 2i\sqrt{3}.$$

Находим корни квадратного уравнения $(*)$:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 6i + (6 - 2i\sqrt{3}\,)}{8} = \frac{6 + 2\sqrt{3} - i(6 + 2\sqrt{3}\,)}{8} =$$

$$= \frac{(6 + 2\sqrt{3}\,)(1 - i)}{8} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\,(1 - i);$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{3} - 6i - (6 - 2i\sqrt{3}\,)}{8} = \frac{-(6 - 2\sqrt{3}\,) - i(6 - 2\sqrt{3}\,)}{8} =$$

$$= \frac{(6 - 2\sqrt{3}\,)(-1 - i)}{8} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\,(-1 - i).$$

Таким образом, мы приходим к двум уравнениям:

$$e^{iz} = t_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\,(1 - i);$$

$$e^{iz} = t_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\,(-1 - i).$$

Находим модуль и главное значение аргумента чисел t_1 и t_2:

$$|t_1| = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\,|1-i| = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$\arg t_1 = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

$$|t_2| = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\,|-1-i| = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$\arg t_2 = \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$iz = (\ln t_1)_k = \ln|t_1| + i(\arg t_1 + 2\pi k) =$$

$$= \ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\Big(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\Big), \quad k\in\mathbb{Z};$$

$$iz = (\ln t_2)_k = \ln|t_2| + i(\arg t_2 + 2\pi k) =$$

$$= \ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\Big(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\Big), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда $z = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$; $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$ (мы умножили обе части равенств на $\frac{1}{i} = -i$).

Заметим, что число $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ больше 1, а число $\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ меньше 1. Поэтому $\ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} > 0$, $\ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 0$. Для того чтобы было яснее видно, что решения второй серии имеют положительную мнимую часть, произведем следующее тождественное преобразование:

$$\ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\ln\Big(\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big)^{-1} = -\ln\frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}} =$$

$$= -\ln\frac{2\sqrt{2}\,(3+\sqrt{3}\,)}{(3-\sqrt{3}\,)(3+\sqrt{3}\,)} = -\ln\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6} = -\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $z = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$; $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k + i\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. Определить, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ функция $u(x, y)$ (четные варианты) или $v(x, y)$ (нечетные варианты) является действительной или, соответственно, мнимой частью некоторой регулярной функции $f(z)$. Восстановить $f(z)$.

N	$v(x,y)$	N	$u(x,y)$
1	$e^{-y}(x\cos x - y\sin ax)$	2	$\cos ay \cdot \operatorname{ch} x$
3	$e^{x}(y\cos y + x\sin ay)$	4	$e^{-2y}\cos ax$
5	$\sin y \operatorname{ch} ax$	6	$x\sin x \operatorname{ch} ay - y\cos x \operatorname{sh} y$
7	$y/(ax^2+y^2)$	8	$x\sin x \operatorname{ch} y + y\cos x \operatorname{sh} ay$
9	$\cos ax \cdot \operatorname{ch}(2y+1)$	10	$1 - e^{ax}\sin y$
11	$\sin x \cdot \operatorname{ch} ay$	12	$\cos x \cdot \operatorname{ch} ay$
13	$2y/(3x^2 - ay^2)$	14	$e^{-y}\sin x + ay$
15	$\cos x \cdot \operatorname{ch}(y-a)$	16	$e^{-y}\cos x + ax$
17	$\sin ay \cdot \operatorname{ch} x$	18	$x/(ax^2 - y^2)$
19	$3y/(2x^2 - ay^2)$	20	$\sin ax \cdot \operatorname{ch} 3y$
21	$3y/(4x^2 - ay^2)$	22	$\cos ax \cdot \operatorname{sh}(ay+2)$
23	$\sin 3y \cdot \operatorname{sh} ax$	24	$y/(2x^2 + ay^2)$
25	$\sin 2ax \cdot \operatorname{sh} y$	26	$2x/(x^2 + ay^2)$
27	$x^2 - (ay-1)^2$	28	$\cos(ax+2) \cdot \operatorname{ch} y$
29	$ax^2 + 4y^2$	30	$ax^2 - y^2 - x$
31	$\sin ax \cdot \operatorname{sh} y$		

Решение варианта 31. Если $v(x, y)$ есть мнимая часть аналитической функции $f(z)$, то $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\triangle v(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a\cos ax \cdot \operatorname{sh} y \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -a^2 \sin ax \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sin ax \cdot \operatorname{ch} y \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sin ax \cdot \operatorname{sh} y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\sin ax\cdot\operatorname{sh} y\cdot(1-a^2)=0 \;\Rightarrow\; 1-a^2=0 \;\Rightarrow\; a=\pm 1.$$

Итак, при $a=\pm 1$ функция $v(x,y)=\sin ax\cdot\operatorname{sh} y$ есть гармоническая функция на всей комплексной плоскости.

1) Пусть $a=1$. Тогда $v(x,y)=\sin x\cdot\operatorname{sh} y$. Найдем действительную часть аналитической функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $v(x,y)=\sin x\cdot\operatorname{sh} y$. Поскольку $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, то они связаны условиями Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}=\sin x\cdot\operatorname{ch} y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial u}{\partial y}=-\cos x\cdot\operatorname{sh} y.$$

Будем искать функцию $u(x,y)$ в виде:

$$u(x,y)=\int(\sin x\cdot\operatorname{ch} y)dx+\varphi(y).$$

Здесь интегрирование производится по переменной x, а y выполняет роль параметра; $\varphi(y)$ — неизвестная функция, зависящая от y, но не от x.

Итак,

$$u(x,y)=\int(\sin x\cdot\operatorname{ch} y)dx+\varphi(y)=-\cos x\cdot\operatorname{ch} y+\varphi(y).$$

Для $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\cos x\cdot\operatorname{sh} y=-\cos x\cdot\operatorname{sh} y+\varphi'(y) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\cos x\cdot\operatorname{sh} y=-\cos x\cdot\operatorname{sh} y+\varphi'(y) \;\Rightarrow\; \varphi'(y)=0 \;\Rightarrow\; \varphi(y)=\mathrm{const}=C.$$

Окончательно для $u(x,y)$ имеем: $u(x,y)=-\cos x\cdot\operatorname{ch} y+C$.

Тогда

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=-\cos x\cdot\operatorname{ch} y+C+i\sin x\cdot\operatorname{sh} y=$$

$$=-\cos x\cdot\cos iy+\sin x\cdot\sin iy+C=-(\cos x\cdot\cos iy-\sin x\cdot\sin iy)+C=$$

$$=-\cos(x+iy)+c=-\cos z+C\Rightarrow f(z)=-\cos z+C.$$

$f(z)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

Замечание. Мы здесь воспользовались следующими формулами и обозначениями: $\operatorname{ch} y = \cos iy$, $\operatorname{sh} y = -i \sin y$, $z = x + iy$.

2) $a = -1$. Тогда $v(x, y) = \sin(-x) \cdot \operatorname{sh} y = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y$. Проводим те же выкладки, что и в пункте 1):

$$f(z) = u(x, y) + i(-\sin x \cdot \operatorname{sh} y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cdot \operatorname{ch} y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Тогда $u(x, y) = \int(-\sin x \cdot \operatorname{ch} y)dx + \varphi(y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y + \varphi(y)$.

Для $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cdot \operatorname{sh} y = \cos x \cdot \operatorname{sh} y + \varphi'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \operatorname{sh} y = \cos x \cdot \operatorname{sh} y + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = \text{const} = C.$$

Окончательно: $u(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y + C$.

Тогда

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y + C + i(-\sin x \cdot \operatorname{sh} y) =$$

$$= \cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy + C =$$

$$= \cos(x + iy) + C = \cos z + C \Rightarrow f(z) = \cos z + C.$$

Таким образом, при $a = -1$ $f(z) = \cos z + C$.

$f(z)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

Ответ: 1) $a = 1$, $f(z) = -\cos z + C$; 2) $a = -1$, $f(z) = \cos z + C$.

Задача 4. Даны функция $f(z)$ и множество E.

1) Изобразить множество E на комплексной плоскости.
2) Найти образ $E' = f(E)$ множества E при отображении $w = f(z)$ (описать множество E' с помощью неравенств), изобразить его на комплексной плоскости.

N	$f(z)$	E
1	$(\sqrt{3} + i)z^2 + 1 + 5i$	$1/2 < \lvert z\rvert < 1, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi/4$
2	$(2 - 2i)z^3 + 2 - i$	$1 < \lvert z\rvert, \quad \pi/4 < \arg z \leqslant 3\pi/4$

N	$f(z)$	E
3	$e^z + i - 1$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant 2, \quad -\pi/6 < \operatorname{Im} z \leqslant \pi/6$
4	$\ln z + 1 - i$	$1 \leqslant \lvert z\rvert < 2, \quad -\pi/6 \leqslant \arg z < \pi/6$
5	$(-\sqrt{3} - i)z^2 - 1 - 5i$	$1 \leqslant \lvert z\rvert < 2, \quad -\pi/4 < \arg z \leqslant 0$
6	$2e^z + 3 - 2i$	$\operatorname{Re} z < 0, \quad \pi/3 \leqslant \operatorname{Im} z < 2\pi/3$
7	$e^{2zi + i\pi/4} + 3i$	$-\pi/4 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2, \quad 0 < \operatorname{Im} z$
8	$\ln(iz) - 1 + 5i$	$2 \leqslant \lvert z\rvert < 3, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi/4$
9	$(-2 + 2i)z^3 - 2 + i$	$2 < \lvert z\rvert \leqslant 3, \quad -3\pi/4 < \arg z \leqslant -\pi/4$
10	$e^{z + i\pi/3} + 2 - 4i$	$1 \leqslant \operatorname{Re} z < 3, \quad -\pi/4 < \operatorname{Im} z \leqslant \pi/3$
11	$\ln(2z) - 3 + 2i$	$\lvert z\rvert < 1, \quad -\pi/4 \leqslant \arg z < \pi/3$
12	$\ln(-z) - 2 + 3i$	$1 \leqslant \lvert z\rvert < 3, \quad -\pi/2 \leqslant \arg z < -\pi/4$
13	$(\sqrt{3} - i)z^2 - 3i$	$2 < \lvert z\rvert \leqslant 5, \quad \pi/6 \leqslant \arg z < \pi/3$
14	$e^{iz + i\pi/8} + 1 + 2i$	$0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/4, \quad \operatorname{Im} z < 1$
15	$\ln(3z) - 1 - 6i$	$1 \leqslant \lvert z\rvert, \quad \pi/4 < \arg z \leqslant 2\pi/3$
16	$(-1 - i)z^3 + 6 - i$	$\lvert z\rvert < 2, \quad \pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$
17	$e^{-z + i3\pi/2} - 2 - 3i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant 1, \quad \pi/6 \leqslant \operatorname{Im} z < \pi/3$
18	$(1 + i)\ln z - 2$	$1 < \lvert z\rvert \leqslant 3, \quad 0 < \arg z \leqslant \pi/6$
19	$(-\sqrt{3} + i)z^3 - 2i$	$1 \leqslant \lvert z\rvert \leqslant 3, \quad \pi/2 < \arg z < 2\pi/3$
20	$e^{3iz - i\pi/4} - i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/6, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
21	$(1 - i)\ln(2z) + i$	$2 \leqslant \lvert z\rvert < 3, \quad \pi/3 < \arg z \leqslant \pi/2$
22	$(1 - i)z^4 - 2 + 3i$	$1 < \lvert z\rvert, \quad 2\pi/3 \leqslant \arg z \leqslant \pi$
23	$e^{2z + i\pi/2} + 1 + 3i$	$1 \leqslant \operatorname{Re} z < 2, \quad 3\pi/4 \leqslant \operatorname{Im} z < \pi$
24	$i\ln(3z) - 2 - 3i$	$2 \leqslant \lvert z\rvert, \quad \pi/6 < \arg z \leqslant \pi/4$
25	$(2 - 2i)z^2 + 5 - i$	$\lvert z\rvert \leqslant 3, \quad \pi/6 \leqslant \arg z < \pi/2$
26	$e^{-2iz + i\pi/4} - 1 - 3i$	$\pi/3 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
27	$-i\ln(iz) + 1$	$1 < \lvert z\rvert \leqslant 2, \quad -\pi/4 \leqslant \arg z < -\pi/6$
28	$(1 + i)z^4 - 3 + 2i$	$\lvert z\rvert < 1, \quad -\pi/6 \leqslant \arg z < 0$
29	$e^{-iz - i\pi/2} + 5i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/3, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 2$
30	$2\ln(3iz) - 2 + 4i$	$2 \leqslant \lvert z\rvert < 4, \quad -\pi/3 < \arg z \leqslant -\pi/6$

Задача 5. Дана функция $f(z)$ и дано число z_0.

1) Найти все возможные разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана (ряд Тейлора) по степеням $z - z_0$. Указать области, в которых справедливы полученные разложения.

2) Определить, является ли точка z_0 изолированной особой точкой функции $f(z)$. Если да, то, используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.
3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$, определить тип особой точки $z=\infty$ и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$\dfrac{z-1}{z(z+1)}$	-1	2	$\dfrac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$	-2
3	$\dfrac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$	2	4	$\dfrac{z+1}{z(z-1)}$	$-3-2i$
5	$\dfrac{z+2}{z^2-1}$	1	6	$\dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$	2
7	$\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}$	-1	8	$\dfrac{z}{z^2+4}$	0
9	$\dfrac{2z^2-z+1}{z^3-z}$	1	10	$\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$	0
11	$\dfrac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$	-2	12	$\dfrac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$	-1
13	$\dfrac{2z^2-3z+2}{(z-1)^2z}$	1	14	$\dfrac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$	1
15	$\dfrac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$	2	16	$\dfrac{1}{z^2-7z+12}$	3
17	$\dfrac{z^2+z+1}{z^3+z}$	0	18	$\dfrac{2}{z^2-4z+3}$	-1
19	$\dfrac{2z^2+z+3}{z^2(z+3)}$	-3	20	$\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$	-1
21	$\dfrac{2z^2+5z+4}{z^2(z+4)}$	0	22	$\dfrac{1}{z^2-5z+6}$	0
23	$\dfrac{3z^2-1}{z^2(z-1)}$	0	24	$\dfrac{2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$	-1
25	$\dfrac{9-2z}{z(3-z)^2}$	3	26	$\dfrac{z+3}{z^2-1}$	$-2-2i$
27	$\dfrac{z^2}{z^2+9}$	0	28	$\dfrac{2z}{z^2+4}$	$-3+2i$
29	$\dfrac{z-1}{z^2+2z}$	$-2-3i$	30	$\dfrac{z-2}{z^2-2z-3}$	$2-2i$

Задача 6. Дана функция $f(z)$ и дано число z_0.

1) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$.
2) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.
3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, определить тип особой точки $z = \infty$ и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$z\cos\dfrac{1}{z-2}$	2	2	$\sin\dfrac{z}{z-1}$	1
3	$ze^{z/(z-5)}$	5	4	$\sin\dfrac{2z-1}{z+2}$	-2
5	$\cos\dfrac{3z}{z-i}$	i	6	$\sin\dfrac{5z}{z-2i}$	$2i$
7	$\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$	$-\dfrac{i}{3}$	8	$z\cos\dfrac{3z}{z-1}$	1
9	$z\sin\dfrac{z}{z-1}$	1	10	$(z-3)\cos\dfrac{\pi(z-3)}{z}$	0
11	$z^2\sin\dfrac{\pi(z+1)}{z}$	0	12	$z\cos\dfrac{z}{z+2i}$	$-2i$
13	$\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	14	$\sin\dfrac{z+i}{z-i}$	i
15	$\sin\dfrac{z}{z-3}$	3	16	$ze^{1/(z-2)}$	2
17	$e^{z/(z-3)}$	3	18	$\sin\dfrac{2z}{z-4}$	4
19	$\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	20	$e^{(4z-2z^2)/((z-1)^2)}$	1
21	$ze^{\pi/(z-a)}$	a	22	$ze^{\pi z/(z-\pi)}$	π
23	$z\sin\dfrac{\pi(z+2)}{z}$	0	24	$z\cos\dfrac{\pi(z+3)}{z-1}$	1
25	$z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$	0	26	$z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$	1
27	$z\cos\dfrac{z}{z-3}$	3	28	$z\sin\dfrac{\pi(z-1)}{z-2}$	2
29	$\dfrac{\sin^2 z}{z}$	0	30	$\dfrac{\sin^2(2/z)}{z}$	0
31	$ze^{z/(z-i)}$	i			

Решение варианта 31. $f(z) = ze^{z/(z-i)}$, $z_0 = i$.

1) Функция $f(z) = ze^{z/(z-i)}$ представляет собой произведение двух множителей. Разложим каждый множитель в ряд Лорана по степеням $(z-i)$: $z = i + (z-i)$, разложение справедливо на всей комплексной плоскости;

$$e^{z/(z-i)} = e^{1+\frac{i}{z-i}} = (\text{в области } 0 <\mid z-i \mid< \infty) =$$
$$= e \cdot \left(1 + \tfrac{i}{z-i} + \left(\tfrac{i}{z-i}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2!} + \ldots + \left(\tfrac{i}{z-i}\right)^n \cdot \tfrac{1}{n!} + \ldots\right).$$

Тогда

$$f(z) = e(z-i) + 2ei + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e \cdot i^{n+1}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)}{(z-i)^n},$$

причем разложение справедливо в области $0 <\mid z-i \mid< \infty$.

2) Так как ряд содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями, то $z_0 = i$ — существенно особая точка.

Вычет равен коэффициенту при $(z-z_0)^{-1}$:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = e \cdot (-1)\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}\right) = -\frac{3e}{2}.$$

3) $z_0 = i$ — единственная конечная изолированная особая точка функции. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{3e}{2}.$$

Так ряд Лорана содержит конечное число слагаемых с положительными степенями (1 слагаемое), то $z = \infty$ — полюс первого порядка.

Ответ: 1) $f(z) = e(z-i) + 2ei + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e \cdot i^{n+1}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)}{(z-i)^n}$;

2) $z = i$ — существенно особая точка; $\operatorname*{res}\limits_{z=i} f(z) = -\dfrac{3e}{2}$;

3) $z = \infty$ — полюс первого порядка; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \dfrac{3e}{2}$.

Задача 7. Найти интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ с помощью вычетов. Кривая Γ ориентирована против часовой стрелки.

N	$f(z)$	Γ	N	$f(z)$	Γ
1	$\dfrac{z^2+1}{(2z+3)z^2}$	$\lvert z+1\rvert=2$	2	$\dfrac{\sin z}{z^2(z+4)^2}$	$\lvert z+2\rvert=3$
3	$\dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+4)(z^2-9)}$	$\lvert z-3-4i\rvert=5$	4	$\dfrac{1}{z^4+1}$	$\lvert z-1\rvert=1$
5	$\dfrac{z(z+1)^2}{\sin^2(2\pi z)}$	$\lvert z-1/5\rvert=1/4$	6	$\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$	$\lvert z-1-i\rvert=2$
7	$\dfrac{\cos z}{z^3-z^2-2z}$	$\lvert z-i\rvert=2$	8	$\dfrac{(z^2+9)^2}{\operatorname{ch} z}$	$\lvert z+3i\rvert=3$
9	$\dfrac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)^2}$	$\lvert z-1-i\rvert=\sqrt{3}$	10	$\dfrac{e^z-1}{z(z^2+2z+5)^2}$	$\lvert z-i\rvert=2$
11	$\dfrac{e^z}{z^4+8z^2-9}$	$\lvert z-1-2i\rvert=5/2$	12	$\dfrac{\sin(2z)}{z^2(z^2+4)}$	$\lvert z-2i\rvert=3$
13	$\dfrac{\sin z}{z^2(z-2)^2}$	$\lvert z-2-2i\rvert=3$	14	$\dfrac{z}{(z^2-1)(z-2)^2}$	$\lvert z-2\rvert=3/2$
15	$\dfrac{z^3}{z^4-1}$	$\lvert z+1-i\rvert=\sqrt{2}$	16	$\dfrac{1-e^{4z}}{z(z^2-16)}$	$\lvert z+2\rvert=3$
17	$\dfrac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$\lvert z+1-i\rvert=5/4$	18	$\dfrac{\operatorname{sh} z}{z(z^2+2z+5)}$	$\lvert z+i\rvert=2$
19	$\dfrac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$\lvert z-1-i\rvert=2$	20	$\dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z(z-1)^2}$	$\lvert z-3/2\rvert=2$
21	$\dfrac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$\lvert z-2-i\rvert=2$	22	$\dfrac{e^z}{z^2(z-\pi i)}$	$\lvert z\rvert=4$
23	$\dfrac{\sin^3(z+2)}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\lvert z+1\rvert=5$	24	$\dfrac{e^z-1}{z^3(z-2)}$	$\lvert z-2\rvert=3$
25	$\dfrac{z-\sin z}{z^3\sin(\pi z)}$	$\lvert z\rvert=3/2$	26	$\dfrac{\cos(z+2)-1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\lvert z-1-i\rvert=3$
27	$\dfrac{e^z-1}{(z^2-1)^2 z}$	$\lvert z-2\rvert=5/2$	28	$\dfrac{\sin(3z)}{z(z^2-4)^2}$	$\lvert z-1\rvert=2$
29	$\dfrac{1-\cos(2z)}{z^3(z^2+1)}$	$\lvert z-i\rvert=3/2$	30	$\dfrac{e^z-1}{z(z^2+9)^2}$	$\lvert z-2\rvert=3$
31	$\dfrac{\sin 2z}{2z^2(z-4)^2}$	$\lvert z-2\rvert=3$			

Решение варианта 31. Пусть

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{2z^2(z-4)^2} dz, \quad \text{где} \;\; \Gamma: \; |z-2| = 3.$$

Нарисуем контур Γ и найдем особые точки функции $f(z)$.

$\Gamma: \; |z-2| = 3$ — окружность радиуса $R = 3$ с центром в точке $(2,0)$.

Особые точки функции $f(z)$:

$z = 0$ — полюс 1-го порядка, находится внутри контура Γ;

$z = 4 = 4 + i \cdot 0$ — полюс 2-го порядка.

Тогда

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{2z^2(z-4)^2} dz = 2\pi i (\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=4} f(z)).$$

Имеем:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin 2z}{2z^2(z-4)^2} \cdot z = \lim_{z \to 0} \frac{2 \cdot z \cdot z}{2z^2(z-4)^2} = \frac{1}{(0-4)^2} = \frac{1}{16};$$

$$\operatorname*{res}_{z=4} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 4} \left[\frac{\sin 2z}{2z^2(z-4)^2} \cdot (z-4)^2 \right]' =$$

$$= \lim_{z \to 4} \left[\frac{\sin 2z}{2z^2} \right]' = \lim_{z \to 4} \frac{2\cos 2z \cdot 2z^2 - 4z \cdot \sin 2z}{2z^4} =$$

$$= \frac{2\cos 8 \cdot 2 \cdot 16 - 4 \cdot 4 \cdot \sin 8}{4 \cdot 4^4} = \frac{4\cos 8 - \sin 8}{4^3} = \frac{\cos 8}{16} - \frac{\sin 8}{64}.$$

Окончательно:

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{2z^2(z-4)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{16} + \frac{\cos 8}{16} - \frac{\sin 8}{64} \right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; I = \pi i \left(\frac{1}{8} + \frac{\cos 8}{8} - \frac{\sin 8}{32} \right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; I = i\frac{\pi}{32} \left(4 + 4\cos 8 - \sin 8 \right).$$

Ответ: $I = i\dfrac{\pi}{32} \left(4 + 4\cos 8 - \sin 8 \right)$.

Задача 8. Найти несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с помощью вычетов.

N	$f(x)$	a	b	N	$f(x)$	a	b
1	$\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$	0	$+\infty$	2	$\dfrac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+45}$	$-\infty$	$+\infty$
3	$\dfrac{e^{ix}}{x^2-2ix-2}$	$-\infty$	$+\infty$	4	$\dfrac{(x+1)\cos 3x}{x^2+4x+104}$	$-\infty$	$+\infty$
5	$\dfrac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}$	$-\infty$	$+\infty$	6	$\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$	$-\infty$	$+\infty$
7	$\dfrac{(x-1)\cos x}{x^2-4x+5}$	$-\infty$	$+\infty$	8	$\dfrac{x^2+2}{x^4-2ix(x^2+1)-1}$	$-\infty$	$+\infty$
9	$\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$	0	$+\infty$	10	$\dfrac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}$	$-\infty$	$+\infty$
11	$\dfrac{1}{x^4-(4ix+5)^2}$	$-\infty$	$+\infty$	12	$\dfrac{x\sin x}{x^2+2x+10}$	$-\infty$	$+\infty$
13	$\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$	0	$+\infty$	14	$\dfrac{x^2+2}{(x^2-2ix-5)(x^2+4)}$	$-\infty$	$+\infty$
15	$\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}$	$-\infty$	$+\infty$	6	$\dfrac{x^2}{(x^2+4)^3}$	0	$+\infty$
17	$\dfrac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}$	$-\infty$	$+\infty$	18	$\dfrac{x+5}{(x^2-4ix-13)^3}$	$-\infty$	$+\infty$
19	$\dfrac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}$	$-\infty$	$+\infty$	20	$\dfrac{x^2}{x^4-4ix(x^2+4)-16}$	$-\infty$	$+\infty$
21	$\dfrac{x\sin x}{x^2+9}$	0	$+\infty$	22	$\dfrac{\cos x}{x^2+4}$	0	$+\infty$
23	$\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$	$-\infty$	$+\infty$	24	$\dfrac{x\sin x}{(x^2+1)^2}$	0	$+\infty$
25	$\dfrac{x^2}{x^4-(2ix+3)^2}$	$-\infty$	$+\infty$	26	$\dfrac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}$	$-\infty$	$+\infty$
27	$\dfrac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$-\infty$	$+\infty$	28	$\dfrac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+409}$	$-\infty$	$+\infty$
29	$\dfrac{\cos x}{(x^2+1)^3}$	0	$+\infty$	30	$\dfrac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+2)(x^2+9)}$	$-\infty$	$+\infty$

Задача 9. Используя теорему Руше, найти число нулей функции $F(z)$ в области D (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

N	$F(z)$	D
1	$z^5 - 5z^2 + 2z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
2	$z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
3	$z^4 - 5z^3 - z^2 - 1$	$1/2 < \|z\| < 1$
4	$2z^5 - 3z^3 + 2z^2 - 5$	$1/2 < \|z\| < 2$
5	$3z^4 + 2z^3 - z^2 - z + 3$	$1/2 < \|z\| < 2$
6	$2z^3 - 7z^2 + 3z + 1$	$1 < \|z\| < 4$
7	$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
8	$z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3$	$1 < \|z\| < 3$
9	$3z^6 - 4z^4 + 5z^2 - 15z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
10	$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7$	$1 < \|z\| < 5$
11	$5z^5 + 4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 17$	$1 < \|z\| < 2$
12	$z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 3$	$1 < \|z\| < 2$
13	$5z^4 + 2z^3 - 13z^2 + 4z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
14	$2z^4 + 3z^3 - z^2 + 11z - 1$	$1/2 < \|z\| < 3$
15	$2z^5 - 5z^4 + 5z - 1$	$2 < \|z\| < 3$
16	$z^6 - 10z^3 + 2z^2 + 3z - 1$	$2 < \|z\| < 3$
17	$z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1$	$1 < \|z\| < 3$
18	$3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2$	$1 < \|z\| < 2$
19	$10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3$	$1/2 < \|z\| < 1$
20	$2z^3 - 3z^2 - 7z - 1$	$1 < \|z\| < 3$
21	$z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 + 13z - 5$	$1 < \|z\| < 4$
22	$z^5 - 2z^2 + 5z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
23	$z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
24	$z^3 - 17z^2 + 25z - 5$	$1 < \|z\| < 2$
25	$4z^3 + 10z^2 - 3z + 1$	$2 < \|z\| < 3$
26	$3z^3 + 9z^2 - 5z - 1$	$2 < \|z\| < 4$
27	$2z^4 - z^3 + 6z^2 - z - 1$	$1/4 < \|z\| < 1$
28	$z^6 - 5z^3 + z^2 + 1$	$1/2 < \|z\| < 1$
29	$z^3 - 2z - 5$	$1 < \|z\| < 3$
30	$z^8 + 5z^7 - z^4 + 2$	$4 < \|z\| < 6$

Задача 10. В вариантах 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 28 с помощью вычетов найти оригинал $f(t)$ изображения $F(p)$. Сделать проверку (найти изображение функции $f(t)$, используя таблицу стандартных изображений и свойства преобразования Лапласа, и убедиться, что оно равно $F(p)$).

В вариантах 2, 6, 10, 15, 18, 22, 26, 29 с помощью вычетов найти косинус-преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

В вариантах 3, 7, 11, 14, 19, 23, 27, 30 с помощью вычетов найти синус-преобразование Фурье $F_s(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

N	$F(p)$	N	$f(x)$	N	$f(x)$	N	$F(p)$
1	$\frac{p}{p^3+1}$	2	$\frac{1}{(1+x^2)^3}$	3	$\frac{x^3}{1+x^6}$	4	$\frac{p}{p^2-2p+5}$
5	$\frac{p}{(p^2+4)^2}$	6	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	7	$\frac{x}{(1+x^2)^2}$	8	$\frac{1}{p^3+2p^2+p}$
9	$\frac{1}{(p^3-8)^2}$	10	$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$	11	$\frac{x}{(1+x^2)(9+x^2)}$	12	$\frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$
13	$\frac{p}{p^4-1}$	14	$\frac{x^3}{(1+x^2)^3}$	15	$\frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$	16	$\frac{p-1}{(p^2+1)(p+1)}$
17	$\frac{p}{p^4+1}$	18	$\frac{1}{1+x^4}$	19	$\frac{x}{1+x^4}$	20	$\frac{p-3}{(p^2+2p+5)}$
21	$\frac{1}{(p+1)^3}$	22	$\frac{x^2}{1+x^4}$	23	$\frac{x^3}{1+x^4}$	24	$\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$
25	$\frac{p^2}{p^6-1}$	26	$\frac{x^2}{1+x^6}$	27	$\frac{x}{1+x^6}$		
28	$\frac{1}{p(p-1)^3}$	29	$\frac{1}{1+x^2}$	30	$\frac{x}{1+x^2}$		

Задача 11. Найти интеграл, используя свойства гамма- и бета-функций.

N	Интеграл	N	Интеграл
1	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^7}{(x^3+1)^3}\,dx$	2	$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{10} x\,dx$
3	$\int\limits_{-2}^{2} x^2\,\sqrt[4]{16-x^4}\,dx$	4	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4\,e^{-2x^2}\,dx$
5	$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}$	6	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^6}\,dx$
7	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+3)^2}\,dx$	8	$\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{\operatorname{tg} 3x}\,dx$
9	$\int\limits_0^{1} \sqrt[6]{x(1-x)^5}\,dx$	10	$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x^3}\,dx$
11	$\int\limits_0^{2} \sqrt[3]{\frac{x}{2-x}}\,dx$	12	$\int\limits_0^{2} \frac{\ln^3(x/2)}{\sqrt{x}}\,dx$
13	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^6+1)^2}\,dx$	14	$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt[3]{\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}}\,dx$
15	$\int\limits_0^{4} x\,\sqrt[3]{64-x^3}\,dx$	16	$\int\limits_0^{+\infty} x^8\,e^{-2x}\,dx$
17	$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$	18	$\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{\frac{\ln x}{x^3}}\,dx$
19	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+4)^3}\,dx$	20	$\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \sin^{12}\frac{x}{4}\,dx$
21	$\int\limits_0^{1} \sqrt[4]{x^3\,(1-x)}\,dx$	22	$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x^3}\,e^{-x^5}\,dx$

23	$\int\limits_0^5 \sqrt[6]{\dfrac{x}{5-x}}\,dx$	24	$\int\limits_0^{1/5} \sqrt{-\dfrac{x}{\ln 5x}}\,dx$
25	$\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^8}{(x^4+1)^3}\,dx$	26	$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}\,dx$
27	$\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x^4\sqrt{125-x^6}\,dx$	28	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4\,e^{-2x^2}\,dx$
29	$\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx$	30	$\int\limits_1^{+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^3 dx$
31	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^{10}}{(x^6+8)^3}\,dx$	32	$\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x\cos^2\dfrac{x}{2}}\,dx$

Основные формулы:

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx \quad (a>0); \tag{1}$$

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \quad (a>0); \tag{2}$$

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(2)=1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}; \tag{3}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n\in\mathbb{N}); \tag{4}$$

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin\pi a} \quad (0<a<1); \tag{5}$$

$$B(a,\ b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \quad (a>0,\ b>0); \tag{6}$$

$$B(a,\ b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(x+1)^{a+b}}\,dx \quad (a>0,\ b>0); \tag{7}$$

$$B(a,\ b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (a>0,\ b>0). \tag{8}$$

Решение варианта 31. $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^{10}}{(x^6+8)^3}\,dx.$

Поскольку подынтегральная функция является четной, то

$$I = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{10}}{(x^6+8)^3}\,dx.$$

Сделаем замену переменной $t = \dfrac{x^6}{8}$. Тогда $x = \sqrt[6]{8t} = \sqrt{2}\cdot t^{1/6}$, $dx = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot t^{-5/6}\,dt.$

Имеем:

$$I = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{2^5\cdot t^{5/3}}{(8t+8)^3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot t^{-5/6}\,dt = \frac{1}{24\sqrt{2}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{5/6}}{(t+1)^3}\,dt = \frac{1}{24\sqrt{2}}\cdot B\Big(\frac{11}{6},\ \frac{7}{6}\Big).$$

Поскольку

$$B\Big(\frac{11}{6},\ \frac{7}{6}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{11}{6}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{7}{6}\Big)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\Gamma\Big(\frac{5}{6}\Big)\cdot\frac{1}{6}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{6}\Big)}{2} =$$

$$= \frac{5}{72}\cdot\Gamma\Big(\frac{5}{6}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{6}\Big) = \frac{5}{72}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/6)} = \frac{5\pi}{36},$$

то окончательно получаем, что $I = \dfrac{1}{24\sqrt{2}}\cdot\dfrac{5\pi}{36} = \dfrac{5\pi}{864\sqrt{2}}.$

Ответ: $I = \dfrac{5\pi}{864\sqrt{2}}.$

Решение варианта 32. $I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x\cos^2\dfrac{x}{2}}\,dx.$

Преобразуем интеграл следующим образом:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\Big(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\Big)^3\cos^2\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}}\,d\Big(\frac{x}{2}\Big) = \Big[t = \frac{x}{2}\Big] = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^3 t\cos^5 t}\,dt.$$

Сделаем замену переменной $u = \sin^2 t$. Тогда $t = \arcsin\sqrt{u}$, $dt = \dfrac{du}{\sqrt{1-u}\cdot 2\sqrt{u}}$.

Имеем:

$$I = 4\sqrt{2}\int\limits_0^1 u^{3/4}(1-u)^{5/4}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u}\cdot 2\sqrt{u}} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^1 u^{1/4}(1-u)^{3/4}\,du = 2\sqrt{2}\cdot B\Big(\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\Big).$$

Поскольку

$$B\Big(\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{7}{4}\Big)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\cdot\frac{3}{4}\cdot\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)}{2} =$$

$$= \frac{3}{32}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big) = \frac{3}{32}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}},$$

то окончательно получаем, что $I = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3\pi}{16\sqrt{2}} = \dfrac{3\pi}{8}$.

Ответ: $I = \dfrac{3\pi}{8}$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Корни n-й степени из комплексного числа.

2. Определение регулярной (аналитической) функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана.

3. Линейная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Отображение, которое она осуществляет.

4. Степенная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.

5. Показательная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Период. Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.

6. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Их регулярность (аналитичность). Периоды.

7. Логарифм комплексного переменного. Регулярность (аналитичность). Многозначность отображения, которое он осуществляет.

8. Общая степенная функция комплексного переменного. Регулярность (аналитичность). Многозначность отображения, которое она осуществляет.

9. Гармонические функции. Их связь с регулярными функциями комплексного переменного.

10. Геометрический смысл модуля и аргумента производной регулярной (аналитической) функции. Понятие конформного отображения.

11. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его связь с криволинейными интегралами. Основные свойства.

12. Интеграл от регулярной (аналитической) функции, его независимость от пути интегрирования. Формула Ньютона — Лейбница.

13. Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

14. Интегральная формула Коши для регулярной (аналитической)

функции.

15. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Интегральная формула Коши для производных регулярной (аналитической) функции.

16. Разложение регулярной (аналитической) функции в ряд Тейлора. Область сходимости. Формулы для коэффициентов.

17. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.

18. Изолированные особые точки регулярной (аналитической) функции и их классификация. Примеры.

19. Устранимая особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

20. Полюс n-го порядка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

21. Существенно особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

22. Нули аналитической функции. Порядок нуля. Связь между нулем и полюсом.

23. Вычет аналитической функции в точке. Его связь с рядом Лорана. Основная теорема о вычетах.

24. Формулы для вычисления вычетов в простом и кратном полюсе.

25. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Ряд Лорана в окрестности бесконечности. Классификация особенностей в бесконечности.

26. Вычет в бесконечно удаленной точке. Его связь с рядом Лорана. Вторая теорема о вычетах.

27. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов по вещественной прямой от рациональных функций.

28. Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx.$$

29. Логарифмический вычет. Связь числа нулей и полюсов функции внутри замкнутого контура с интегралом по этому контуру.

30. Принцип аргумента. Теорема Руше.

31. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность по параметру.

32. Интегралы, зависящие от параметра. Интегрирование и дифференцирование по параметру.

33. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости.

34. Равномерная непрерывность несобственного интеграла по параметру. Примеры.

35. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

36. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

37. Гамма-функция и ее свойства: формула понижения, связь с факториалом, формула дополнения.

38. Аналитическое продолжение гамма-функции в комплексной плоскости. Ее значения на отрицательной полуоси. Свойства $\Gamma(z)$.

39. Бета-функция. Ее связь с гамма-функцией. Применение к вычислению интегралов. Пример.

40. Определение преобразования Лапласа. Его аналитичность.

41. Определение преобразования Лапласа. Его обращения с помощью вычетов.

42. Степенные ряды. Теорема Абеля.

43. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости.

44. Свойства степенных рядов. Сформулировать условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости степенного ряда в заданной области.

45. Преобразование Фурье и его свойства.

46. Тригонометрические ряды Фурье: вещественная и комплексная формы записи, ряды Фурье для четных и нечетных функций, разложение функций на полупериоде в ряды по синусам и по косинусам.

47. Тригонометрические ряды Фурье: признаки сходимости и равномерной сходимости, теорема единственности.

48. Свойства коэффициентов ряда Фурье.