

## Типовой расчет по алгебре и геометрии (4 семестр).

### Задача 1.

- 1) Перечислите все собственные идеалы кольца  $\mathbb{Z}_n$ .
- 2) Укажите среди них максимальные идеалы и найдите факторкольца по ним.
- 3) Найдите нильрадикал  $Rad\mathbb{Z}_n$  и факторкольцо  $\mathbb{Z}_n/Rad\mathbb{Z}_n$ .
- 4) Найдите в  $\mathbb{Z}_n$  пару идемпотентов и соответствующее им разложение  $\mathbb{Z}_n$  во внутреннюю прямую сумму подколец.
- 5) Выпишите явные формулы прямого и обратного изоморфизма  $\mathbb{Z}_n$  и внешней прямой суммы соответствующих колец.

Вариант 1	$n = 250.$	Вариант 13	$n = 45.$
Вариант 2	$n = 99.$	Вариант 14	$n = 68.$
Вариант 3	$n = 242.$	Вариант 15	$n = 104.$
Вариант 4	$n = 147.$	Вариант 16	$n = 63.$
Вариант 5	$n = 88.$	Вариант 17	$n = 80.$
Вариант 6	$n = 117.$	Вариант 18	$n = 363.$
Вариант 7	$n = 56.$	Вариант 19	$n = 50.$
Вариант 8	$n = 63.$	Вариант 20	$n = 245.$
Вариант 9	$n = 135.$	Вариант 21	$n = 153.$
Вариант 10	$n = 76.$	Вариант 22	$n = 54.$
Вариант 11	$n = 275.$	Вариант 23	$n = 175.$
Вариант 12	$n = 75.$	Вариант 24	$n = 98.$

## Задача 2.

- 1) Докажите, что множество  $R$  матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  является коммутативным подкольцом кольца матриц  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{F}_p)$ .
- 2) Сколько в нем элементов?
- 3) Является ли кольцо  $R$  полем?

Если  $R$  не является полем, выполните пункты задания А.

Если  $R$  является полем, выполните пункты задания В.

- А4) Изоморфно ли кольцо  $R$  кольцу  $\mathbb{Z}_n$  при некотором  $n$ ?
- А5) Опишите группу  $R^\times$  обратимых элементов кольца  $R$ .
- А6) Найдите все идеалы  $R$ .
- А7) Найдите нильрадикал  $R$ .
- А8) Представьте  $R$  в виде внутренней прямой суммы его подколец и изоморфной внешней прямой суммы колец или докажите, что это невозможно.
- В4) Найдите характеристику  $R$  и его простое подполе  $F$ .
- В5) Найдите базис и степень расширения поля  $R$  над полем  $F$ .
- В6) Укажите какой-нибудь примитивный элемент расширения поля  $R$  над  $F$ , найдите его порядок в мультипликативной группе поля  $R$ .
- В7) Найдите минимальный многочлен указанного примитивного элемента.
- В8) Укажите изоморфное полю  $R$  факторкольцо кольца многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  по некоторому идеалу.

Вариант 1	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \delta = \alpha - \gamma \end{cases}$
Вариант 2	$p = 3$	$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \delta = \beta \end{cases}$
Вариант 3	$p = 7$	$\begin{cases} \gamma + 3\beta = 0 \\ \delta = \alpha + 2\beta \end{cases}$
Вариант 4	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma + \beta = 0 \\ \delta - \alpha = 3\beta \end{cases}$
Вариант 5	$p = 7$	$\begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \delta = \alpha + \beta \end{cases}$
Вариант 6	$p = 5$	$\begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = \beta + \delta \end{cases}$

Вариант 7	$p = 3$	$\begin{cases} \gamma - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = \delta \end{cases}$
Вариант 8	$p = 7$	$\begin{cases} \gamma = 4\beta \\ \delta + 5\beta = \alpha \end{cases}$
Вариант 9	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \delta = \alpha + \beta \end{cases}$
Вариант 10	$p = 3$	$\begin{cases} \gamma - \beta = 0 \\ \delta + \beta = \alpha \end{cases}$
Вариант 11	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma + 2\beta = 0 \\ \alpha - \delta = -\beta \end{cases}$
Вариант 12	$p = 3$	$\begin{cases} \gamma + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$
Вариант 13	$p = 5$	$\begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \delta - \alpha = \beta \end{cases}$
Вариант 14	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma - 3\beta = 0 \\ \alpha + 4\delta = 4\beta \end{cases}$
Вариант 15	$p = 7$	$\begin{cases} \gamma = -2\beta \\ \delta - \alpha = -3\beta \end{cases}$
Вариант 16	$p = 3$	$\begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \delta = \beta \end{cases}$
Вариант 17	$p = 3$	$\begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = \delta \end{cases}$
Вариант 18	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \delta - \alpha = -2\beta \end{cases}$
Вариант 19	$p = 7$	$\begin{cases} \gamma + 3\beta = 0 \\ \delta = \alpha + 2\beta \end{cases}$
Вариант 20	$p = 5$	$\begin{cases} \gamma + 2\beta = 0 \\ \alpha - \delta = -\beta \end{cases}$
Вариант 21	$p = 5$	$\begin{cases} 2\beta - \gamma = 0 \\ 4(\alpha - \delta) = 3\beta \end{cases}$
Вариант 22	$p = 3$	$\begin{cases} \gamma = \beta \\ \delta - \alpha = \beta \end{cases}$
Вариант 23	$p = 5$	$\begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 \\ 3(\delta - \alpha) = \beta \end{cases}$
Вариант 24	$p = 3$	$\begin{cases} \gamma - \beta = 0 \\ \alpha = \beta + \delta \end{cases}$

### Задача 3.

Пусть  $A$  — наименьшее целостное подкольцо поля  $\mathbb{R}$ , содержащее число  $\alpha = \sqrt[s]{d}$  ( $\alpha$  — корень  $f(x) = x^s - d$ ).  $K = \text{Quot } A$  — его поле отношений.

1) Найдите общий вид элементов кольца  $A$ . Покажите, что  $A = \mathbb{Z}[\alpha]$ , где  $\alpha$  — корень  $f(x)$ .

2) Докажите, что  $\mathbb{Z}[\alpha] \simeq \mathbb{Z}[x]/(f(x))$ .

3) Найдите общий вид элементов  $\mathbb{Q}[\alpha]$ , где  $\alpha$  — корень  $f(x)$ . Докажите, что  $\mathbb{Q}[\alpha] \simeq \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ .

4) Докажите, что  $\mathbb{Q}[\alpha] \simeq \mathbb{Q}[x]/(f(x))$  является полем.

5) Докажите, что  $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ .

6) Найдите простое подполе поля  $K$ .

7) Найдите степень расширения поля  $K$  над его простым подполем.

8) Найдите все подполя поля  $K$ .

9) Найдите минимальный многочлен  $\gamma = 1 + \alpha \in K$  над простым подполем поля  $K$ .

10) Найдите явную формулу для обратного элемента в  $K^*$ .

Вариант 1	$s = 2$	$d = 6$	Вариант 13	$s = 2$	$d = 13$
Вариант 2	$s = 3$	$d = 4$	Вариант 14	$s = 3$	$d = 19$
Вариант 3	$s = 2$	$d = 15$	Вариант 15	$s = 2$	$d = 7$
Вариант 4	$s = 3$	$d = 5$	Вариант 16	$s = 3$	$d = 21$
Вариант 5	$s = 2$	$d = 10$	Вариант 17	$s = 3$	$d = 17$
Вариант 6	$s = 2$	$d = 5$	Вариант 18	$s = 3$	$d = 12$
Вариант 7	$s = 2$	$d = 8$	Вариант 19	$s = 2$	$d = 22$
Вариант 8	$s = 3$	$d = 6$	Вариант 20	$s = 3$	$d = 7$
Вариант 9	$s = 2$	$d = 3$	Вариант 21	$s = 3$	$d = 10$
Вариант 10	$s = 3$	$d = 15$	Вариант 22	$s = 3$	$d = 13$
Вариант 11	$s = 2$	$d = 35$	Вариант 23	$s = 3$	$d = 11$
Вариант 12	$s = 3$	$d = 9$	Вариант 24	$s = 2$	$d = 19$

#### Задача 4.

Пусть  $R = A/(p)$ , где  $A$  — кольцо из задачи 3.

- 1) Найдите общий вид элементов кольца  $R$ . Покажите, что  $R = \mathbb{F}_p[\beta]$ , где  $\beta$  — корень  $g(x) = x^s - [d]_p \in \mathbb{F}_p[x]$ .
- 2) Найдите  $|R|$ .
- 3) Докажите, что  $R \simeq \mathbb{F}_p[x]/(g(x))$ .
- 4) Выясните, является ли  $R$  полем.

Если  $R$  не является полем, выполните пункты задания А.

Если  $R$  является полем, выполните пункты задания В.

А5) Найдите нильрадикал  $Rad R$ .

А6) Представьте  $R$  в виде внутренней прямой суммы его подколец и изоморфной внешней прямой суммы колец или докажите, что это невозможно.

А7) Найдите порядок группы  $R^*$  обратимых элементов кольца.

В5) Найдите в поле  $R$  его простое подполе и степень расширения  $R$  над простым подполем. Найдите минимальный многочлен элемента  $\beta$ .

В6) Какой известной группе изоморфна мультипликативная группа поля  $R^*$ ? Найдите порядок элемента  $\beta$  в  $R^*$ .

В7) Разложите многочлен  $g(x)$  на линейные множители над  $R$ . Докажите, что  $R$  является полем разложения многочлена  $g(x)$ .

Вариант 1	$p = 5.$	Вариант 13	$p = 7.$
Вариант 2	$p = 7.$	Вариант 14	$p = 2.$
Вариант 3	$p = 3.$	Вариант 15	$p = 11.$
Вариант 4	$p = 7.$	Вариант 16	$p = 3.$
Вариант 5	$p = 7.$	Вариант 17	$p = 2.$
Вариант 6	$p = 3.$	Вариант 18	$p = 2.$
Вариант 7	$p = 7.$	Вариант 19	$p = 3.$
Вариант 8	$p = 3.$	Вариант 20	$p = 2.$
Вариант 9	$p = 5.$	Вариант 21	$p = 5.$
Вариант 10	$p = 2.$	Вариант 22	$p = 2.$
Вариант 11	$p = 5.$	Вариант 23	$p = 11.$
Вариант 12	$p = 7.$	Вариант 24	$p = 3.$

## Задача 5.

Даны многочлены  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ .

1) Разложите  $f(x)$  на неприводимые множители над  $\mathbb{F}_3$ . Найдите поле разложения  $K$  многочлена  $f(x)$ .

2) Найдите  $\dim_{\mathbb{F}_3} K$  и  $|K|$ .

3) Решите в поле  $K$  уравнение  $g(x) = 0$ .

4) Докажите, что  $K$  является полем разложения многочлена  $g(x)$ .

5) Найдите какой-нибудь неприводимый многочлен  $h(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ , не имеющий корней в  $K$ .

Вариант1	$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	$g(x) = x^3 + x - 1$
Вариант2	$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$	$g(x) = x^3 + x^2 + 1$
Вариант3	$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$	$g(x) = x^3 - x^2 - x$
Вариант4	$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$	$g(x) = x^4 + x^2 - x$
Вариант5	$f(x) = x^4 - 1$	$g(x) = x^4 + x^3 + x$
Вариант6	$f(x) = x^3 + x$	$g(x) = x^4 - x^2 + x - 1$
Вариант7	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$	$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 1$
Вариант8	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$
Вариант9	$f(x) = x^3 - x^2 - 1$	$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
Вариант10	$f(x) = x^3 + x + 1$	$g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
Вариант11	$f(x) = x^3 + x^2 - x$	$g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
Вариант12	$f(x) = x^4 - x^3 - x$	$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$
Вариант13	$f(x) = x^4 + x^3 + x$	$g(x) = x^4 - 1$
Вариант14	$f(x) = x^4 - x^2 - x - 1$	$g(x) = x^3 + x$
Вариант15	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$	$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$
Вариант16	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$

Вариант17	$f(x) = x^3 + x - 1$	$g(x) = x^3 - x^2 - 1$
Вариант18	$f(x) = x^3 + x^2 + 1$	$g(x) = x^3 + x + 1$
Вариант19	$f(x) = x^3 - x^2 - x$	$g(x) = x^3 + x^2 - x$
Вариант20	$f(x) = x^4 + x^2 - x$	$g(x) = x^4 - x^3 - x$
Вариант21	$f(x) = x^4 + x^3 + x$	$g(x) = x^4 + x^2 + x$
Вариант22	$f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$	$g(x) = x^4 - x^2 - x - 1$
Вариант23	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 1$	$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$
Вариант24	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$