Задачи по теме «Метрические пространства»

1. Пусть функция ρ – неотрицательная симметричная функция на $X\times X$, удовлетворяющая неравенству треугольника. Пусть для некоторых x,y, принадлежащих X, $\rho(x,y)=0$. Следует ли из этого, что для произвольного z, принадлежащего X, $\rho(x,z)=\rho(y,z)$?
2. Пользуясь неравенством треугольника, докажите, что для произвольных элементов $x_{1,2,\ldots,n}$ метрического пространства выполнено *неравенство многоугольника* $\rho(x_1, x_n)\le \rho(x_1, x_2)+\rho(x_2, x_3)+\ldots+\rho(x_{n-1}, x_n)$
3. Пользуясь неравенством треугольника, докажите, что для произвольных элементов метрического пространства x,y,z выполнено *второе неравенство треугольника* $\rho(x,z)\ge|\rho(x,y)-\rho(y,z)|$
4. Пользуясь неравенством треугольника, докажите, что для произвольных элементов метрического пространства a,b,c,d выполнено *неравенство четырёхугольника* $|\rho(a,b)-\rho(c,d)|\le\rho(a,c)+\rho(b,d)$.
5. Пусть M_1 и M_2 – метрические пространства, расстояния на которых задаются с помощью функций ρ_1 и ρ_2 соответственно. Докажите, что на декартовом произведении $M_1\times M_2$ расстояние может быть задано с помощью формулы $\rho(X,Y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$ Здесь x_1,y_1 – элементы M_1, x_2,y_2 – элементы M_2, $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$ – элементы декартова произведения $M_1\times M_2$.
6. Пусть M_1 и M_2 – метрические пространства, расстояния на которых задаются с помощью функций ρ_1 и ρ_2 соответственно. Докажите, что на декартовом произведении $M_1\times M_2$ расстояние может быть задано с помощью формулы $\rho(X,Y)=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$ Здесь x_1,y_1 – элементы M_1, x_2,y_2 – элементы M_2, $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$ – элементы декартова произведения $M_1\times M_2$.
7. Пусть M_1 и M_2 – метрические пространства, расстояния на которых задаются с помощью функций ρ_1 и ρ_2 соответственно. Докажите, что на декартовом произведении $M_1\times M_2$ расстояние может быть задано с помощью формулы $\rho(X,Y)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)}$ Здесь x_1,y_1 – элементы M_1, x_2,y_2 – элементы M_2, $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$ – элементы декартова произведения $M_1\times M_2$.
8. Пусть $M_X=(X,\rho_X)$ и $M_Y=(Y,\rho_Y)$ - метрические пространства. Докажите, что на декартовом произведении $M_X\times M_Y$ расстояние между элементами $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$, где $x_{1,2}\in X$, $y_{1,2}\in Y$, может быть задано, в частности с помощью любой из трёх формул: $\rho_\infty(z_1,z_2)=\max\{\rho_X(x_1,x_2),\rho_Y(y_1,y_2)\}$, $\rho_1(z_1,z_2)=\rho_X(x_1,x_2)+\rho_Y(y_1,y_2)$, $\rho_2(z_1,z_2)=\sqrt{\rho_X^2(x_1,x_2)+\rho_Y^2(y_1,y_2)}$. Понятно ли, что эта задача – это просто переформулировка предыдущих трёх в других терминах?
9. Докажите, что введённые в предыдущей задаче расстояния удовлетворяют неравенствам $\rho_\infty(z_1,z_2)\le\rho_2(z_1,z_2)\le\rho_1(z_1,z_2)$. Приведите примеры, когда выполняются равенства.
10. Докажите, что расстояние в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ может быть задано, в частности с помощью любой из трёх формул: $\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$, $\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$ [доказано на лекции, повторить], $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.
Докажите, что эти расстояния удовлетворяют неравенствам $\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})\le\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})\le\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$

11. Пусть l_2 - метрическое пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, ...)$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ («квадратично суммируемые»), а метрика задаётся формулой $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}$. Докажите, что формула для расстояния корректно определена (т.е. ряд сходится), и что выполняются все аксиомы метрического пространства [доказано на лекции, повторить].
12. Пусть l_1 - метрическое пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, ...)$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ («абсолютно суммируемые»), а метрика задаётся формулой $\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$. Докажите, что формула для расстояния корректно определена (т.е. ряд сходится), и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
13. Пусть l_∞ - метрическое пространство, элементами которого являются ограниченные бесконечные последовательности $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, ...)$, а метрика задаётся формулой $\rho_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_i |x_i - y_i|$. Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
14. Докажите, что $l_1 \subset l_2 \subset l_\infty$, причём каждое включение строгое.
15. Докажите, что $\forall x, y \in l_1 : \rho_1(x, y) \geq \rho_2(x, y)$. Приведите пример, когда выполняется равенство.
16. Докажите, что $\forall x, y \in l_2 : \rho_2(x, y) \geq \rho_\infty(x, y)$. Приведите пример, когда выполняется равенство.
17. Пусть $C[a,b]$ - метрическое пространство, элементами которого являются непрерывные на $[a,b]$ функции $\mathbf{x} = x(t)$, а метрика задаётся формулой $\rho_C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$. Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
18. Пусть $D_k[a,b]$ (другое обозначение - $C_k[a,b]$)- метрическое пространство, элементами которого являются *k* раз непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции $\mathbf{x} = x(t)$, а метрика задаётся формулой $\rho_{D_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{0 \leq j \leq k} \rho_C(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)})$, где $\mathbf{x}^{(j)} = x^{(j)}(t)$ - *j*-я производная функции $x(t)$, а под нулевой производной понимается сама функция. Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства [доказано на лекции, повторить].

Теперь задачи, которых я не задавал, но было бы неплохо, если бы вы над ними подумали (часть из них есть в книжке).

19. Пусть X – произвольное непустое множество. Докажите, что функция $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ задаёт на этом множестве метрику (такая метрика называется *дискретной*).
20. Докажите, что если для некоторого элемента *a* метрического пространства *M* значения ρ(*x,a*) при всевозможных *x*, принадлежащих *M*, в совокупности ограничены (т.е. не превосходят некоторой константы *A*), то значения ρ(*x,y*) при произвольных *x,y* из *M* также не превосходят некоторой константы *B*. Как связаны *A* и *B*? Перепишите данное утверждение, используя логическую символику. (Такое метрическое пространство называется *ограниченным*, а величина $\operatorname{diam}(M)=\sup\limits_{x,y\in M}\rho(x,y)$ называется его *диаметром*.)
21. Для каких наименьших значений $k_{1,2,3}$ для произвольных $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ выполнены неравенства $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\le k_1\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})\le k_2\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\le k_3\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$? Приведите примеры, когда выполняются равенства.
22. Пусть $\mathbf{c}$ - метрическое пространство, элементами которого являются сходящиеся бесконечные последовательности $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n,\dots)$, а метрика задаётся формулой $\rho_{\mathbf{c}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sup\limits_i|x_i-y_i|$. Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
23. Пусть $\mathbf{s}$ - метрическое пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n,\dots)$, а метрика задаётся формулой $\rho_{\mathbf{s}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}2^{-i}\dfrac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$. Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
24. Докажите, что $l_1\subset l_2\subset\mathbf{c}\subset l_\infty\subset\mathbf{s}$, причём каждое включение строгое.
25. Можно ли на прямой **R** ввести метрику по формуле $\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$?
26. Для каких функций *f*: **R** → **R** формула $\rho'(x,y)=|f(x)-f(y)|$ будет определять метрику на **R**?
27. Пусть *M*=(*X*,ρ) – метрическое пространство. Для каких функций *f*: *X* → *X* формула $\rho'(x,y)=\rho(f(x),f(y))$ будет определять метрику на *X*?
28. Можно ли на прямой **R** ввести метрику по формуле $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$?
29. Какое свойство функции *f*: **R** → **R** гарантирует нам, что функция $\rho'(x,y)=f(|x-y|)$ будет определять метрику на **R**?
30. Пусть *M*=(*X*,ρ) – метрическое пространство. Какое свойство функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ гарантирует нам, что функция $\rho'(x,y)=f(\rho(x,y))$ будет определять метрику на *X*, каково бы ни было пространство *M*?

Задачи, рассмотренные на последней лекции и семинарском занятии:

31. Докажите, что *неотрицательная непрерывная* функция $x(t)$, удовлетворяющая условию $\int_a^b x(t)dt = 0$, тождественно равна нулю на $[a,b]$.

32. $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_1}[a,b]$ - метрическое пространство, элементами которого являются непрерывные на $[a,b]$ функции $\mathbf{x} = x(t)$, а расстояние задаётся формулой $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$. Докажите, что при таком определении выполнены все аксиомы метрического пространства.

33. $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_2}[a,b]$ - метрическое пространство, элементами которого являются непрерывные на $[a,b]$ функции $\mathbf{x} = x(t)$, а расстояние задаётся формулой $\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}$. Докажите, что при таком определении выполнены все аксиомы метрического пространства.

34. Для каких наименьших значений $k_{1,2,3}$ для произвольных $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C[a,b]$ выполнены неравенства $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le k_1\rho_C(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le k_2\rho_C(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le k_3\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$? Приведите примеры, когда выполняются равенства.

35. Пусть метрическое пространство является одновременно линейным пространством. Можно ли утверждать, что произвольное подпространство этого пространства в смысле линейной алгебры является одновременно подпространством метрического пространства? Можно ли утверждать, что произвольное подпространство этого пространства как метрического является одновременно подпространством в смысле линейной алгебры?

Ещё одна задача, продолжение первой:

36. Пусть функция ρ – неотрицательная симметричная функция на *X*×*X*, удовлетворяющая неравенству треугольника. Докажите, что равенство ρ(*x,y*)=0 задаёт на *X* отношение эквивалентности. Докажите, что функция ρ задаёт метрику на множестве классов эквивалентности.