Вопросы по темам «Счётные множества», «Мощность множества»
(в том числе уже рассмотренные на лекции или на практике)

1. Постройте взаимно однозначные отображения для следующих множеств:
- N и Z
- N и N×N
- Интервалы (a,b) и (c,d), $a<b$, $c<d$
- Интервал (0,1) и вещественная ось **R**
- Интервал (0,1) и множество (0,1]
- Интервал (0,1) и отрезок [0,1]
- Множество монотонно возрастающих последовательностей натуральных чисел и множество всех последовательностей натуральных чисел (не обязательно монотонных)
- Множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц, и множество подмножеств натурального ряда
- Множество подмножеств интервала (a,b) и множество функций на этом интервале, принимающих значения 0 и 1

2. Доказать, что
- объединение счётного множества и конечного счётно
- объединение двух счётных множеств счётно
- объединение конечного числа счётных множеств счётно
- объединение счётной совокупности счётных множеств счётно
- любое бесконечное множество содержит счётное подмножество
- объединение бесконечного множества с конечным или счётным равномощно исходному
- разность бесконечного несчётного множества и счётного (конечного) равномощно исходному

3. Доказать, что счётными являются множества:
- чётных чисел
- квадратов натуральных чисел
- упорядоченных пар натуральных чисел
- рациональных чисел
- конечных подмножеств натурального ряда N
- конечных последовательностей из нулей и единиц
- конечных слов, состоящих из букв конечного алфавита
- конечных последовательностей натуральных чисел, не превосходящих заданного числа n (эта задача эквивалентна предыдущей)
- всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел
- всевозможных конечных последовательностей рациональных чисел
- всех интервалов (a,b) с рациональными концами

4. Представить натуральный ряд в виде объединения счётной совокупности непересекающихся счётных множеств

5. Доказать, что следующие множества конечны или счётны:
- множество попарно не пересекающихся интервалов, заданных на оси
- множество попарно не пересекающихся кругов на плоскости
- множество, содержащее вещественные положительные числа, если известно, что все конечные суммы таких чисел ограничены некоторым фиксированным числом

6. Доказать, что следующие множества имеют различную мощность:
- N и множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц
- произвольное множество и множество его подмножеств (сравните доказательство в случае натурального ряда с решением предыдущей задачи!)
- произвольное числовое множество и множество вещественнозначных функций, заданных на этом множестве

7. Определить мощности следующих множеств:
- бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц
- подмножеств натурального ряда
- бесконечных последовательностей элементов конечного алфавита
- бесконечных последовательностей натуральных чисел
- бесконечных монотонно возрастающих последовательностей натуральных чисел
- бесконечных последовательностей рациональных чисел
- конечных последовательностей действительных чисел
- бесконечных последовательностей действительных чисел
- иррациональных чисел
- алгебраических чисел
- трансцендентных чисел
- точек квадрата
- точек плоскости
- точек плоскости с рациональными координатами
- точек плоскости с иррациональными координатами
- точек n-мерного пространства
- отрезков на прямой
- отрезков рациональной длины на прямой

8. Постройте взаимно однозначные отображения для следующих множеств
- точек отрезка длины 1 и квадрата со стороной 1
- точек отрезка длины 1 и куба со стороной 1

Задачи в основном были уже рассмотрены, а те, что не рассмотрены, похожи на рассмотренные. Прочтите список задач и убедитесь, что любую из них вы сможете решить (или воспроизвести доказательство, которое было на лекции). Если это не так - отметьте пункты, вызывающие затруднения. Некоторые вопросы друг друга дублируют полностью или частично. Какие именно?