Численные методы

5-8 семестры

ББК 22.193
УДК 519.6

Рецензенты:

Старший научный сотрудник ВЦ РАН, к.ф.-м.н. Забелок С.А.
Заведующий кафедрой высшей математики МГТУ МИРЭА
Худак Ю.И.

Аристов В.В., Строганов А.В. Лабораторный практикум по численным методам / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики" — М., 2012. —46 с., электронное издание

В данном пособии представлены лаборатоные работы по базовому курсу численных методов. По каждой теме приводится краткое конспективное изложение ключевых аспектов рассматриваемого раздела.

Библиогра.: 3 назв.

Издается в электронном виде по решению редакционно-издательского совета Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики.

ISBN

1 Аппроксимация функций. Численное интегрирование и дефференцирование

1.1 Приближенное вычисление элементарных функций

Для вычисления значений элементарных функций на компьютере используются разложения этих функций в степенные ряды и другие способы представления функций, например, непрерывными дробями.

Вычисление $\sin(x)$**,** $\cos(x)$

Для вычисления $\sin(x)$ и $\cos(x)$ используется их разложение в ряд Тейлора вблизи нуля:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\dots,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\dots.$$

При известном значении аргумента x значение функции может быть получено с точностью до погрешностей округления. Количество используемых членов ряда зависит от значения аргумента. Для предотвращения влияния погрешностей округления необходимо выполнение неравенства $|x| < 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — требуемая точность. Тогда алгоритм вычисления $\sin(x)$ будет следующим:

1. Если $|x| \le \varepsilon$, то x и будет приближенным значением $\sin(x)$.
2. Если $|x| \ge 2\pi$, свести значение x к интервалу $-2\pi < x < 2\pi$.
3. Если $|x| \ge \pi$, свести значение x к интервалу $-\pi < x < \pi$ заменой x на $x \pm \pi$. Следует заметить, что при этой замене поменяется знак аргумента.
4. Если $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, свести значение x к интервалу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ заменой x на $\pi \mp x$.
5. Если $|x| \ge \frac{\pi}{4}$, свести значение x к интервалу $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ заменой x на $\frac{\pi}{2} \mp x$. При этом необходимо использовать разложение в ряд функции $\cos(x)$.

Вычисление e^x

Для вычисления экспоненты можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\ .$$

либо, например, с помощью разложения в непрерывную дробь:

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \frac{x}{x+2-\frac{2x}{x+3-\frac{3x}{x+4-\dots}}}}$$

Вычисление $\ln(x)$

Используется разложение натурального логарифма в ряд Тейлора:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\ , \quad |x| < 1.$$

Удобно переписать эту формулу в виде:

$$\ln(x) = x\left(\frac{1}{1} - x\left(\frac{1}{2} - x\left(\frac{1}{3} - x\left(\frac{1}{4} - \dots\right)\right)\right)\right), \quad |x| < 1.$$

Для $x > 1$ используется следующий прием. Вводится константа $\ln(10) \approx 2.3025851$. Тогда значение аргумента можно свести к вычислению логарифма от $|x| < 1$ плюс $\alpha \ln(10)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Например:

$$\ln(607.81) = \ln(0.60781 \cdot 100) = \ln(0.60781) + 2\ln(10)\,.$$

Задание

Написать программу вычисления одной из функций в таблице с заданной точностью.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\sin(x)$	4	$\cos(x)$
2	e^x	5	$\ln(x)$
3	$\lg(x)$	6	$\log_a(x)$

1.2 Численное дифференцирование

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения Δy к Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производную можно аппроксимировать, положив

$$y' \approx \Delta y / \Delta x.$$

Шаблон дифференцирования определяет какие узлы используются при численном дифференцировании. Приведем некоторые шаблоны:

Левые разности:

$$\bigcirc \otimes \qquad y'_t \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \quad \Delta x = h.$$

Правые разности:

$$\otimes \bigcirc \qquad y'_t \approx \frac{y_2 - y_1}{h} + O(h), \quad \Delta x = h.$$

Центральные разности:

$$\bigcirc \otimes \bigcirc \qquad y'_t \approx \frac{y_2 - y_0}{2h} + O\left(h^2\right), \quad \Delta x = h.$$

Аналогично можно найти выражения для производных более высокого порядка:

$$\bigcirc \otimes \bigcirc \qquad y''_t = (y')' \approx \frac{y'_2 - y'_1}{h} \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + O\left(h^2\right), \quad \Delta x = h.$$

Задание

Вычислить первую и вторую производную от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ в точке $x = x^*$.

N	i	0	1	2	3	4	x^*
1	x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	1.0
	y_i	-0.5	0.0	0.50	0.86603	1.0	
2	x_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	2.0
	y_i	0.0	0.40547	0.69315	0.91629	1.0986	
3	x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.2
	y_i	1.0	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	
4	x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	2.0
	y_i	0.0	1.0	1.4142	1.7321	2.0	
5	x_i	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.2
	y_i	-0.20136	0.0	0.20136	0.41152	0.64350	
6	x_i	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.2
	y_i	1.7722	1.5708	1.3694	1.1593	0.9273	

1.3 Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

Пусть в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ таких, что $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ известны значения функции $y = (x)$. Функция $\phi(x)$ называется интерполирующей для $f(x)$ на $[a, b]$, если ее значения $\phi(x_0), \phi(x_1), \ldots \phi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, называемых узламы интерполяции, совпадают с заданными значениями $f(x)$, то есть с $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно. Геометрически факт интерполирования означает, что график функции $\phi(x)$ проходит так, что, по крайней мере, в $n+1$ заданных точках он пересекает или касается графика функции $f(x)$.

Задача полиномиальной интерполяции ставится следующим образом: для функции $f(x)$ найти многочлен $P_n(x)$ такой, что выполняется совокупность условий интерполяции

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots n\}.$$

Интерполяционный полином Лагранжа имеет следующий вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Для определения интерполяционного многочлена Ньютона введем понятие разделенной разности. Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка определеляются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}.$$

Разделенная разность произвольного порядка определяется так:

$$f(x_i, x_j, x_k, \ldots, x_l, x_n) = \frac{f(x_i, x_j, x_k, \ldots x_l) - f(x_j, x_k, \ldots, x_l, x_n)}{x_i - x_n}.$$

Тогда интерполяционный многочлен в форме Ньютона будет иметь вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \ldots +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Задание

Построить интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона для функции $y = f(x)$ в азаданных точках. Вычислить значение в точе x^*. Построить графики полученных многочленов и график исходной функции.

N	$f(x)$	x_i	x^*
1	$y = \sin x$	$0.1\pi,\ 0.2\pi,\ 0.3\pi,\ 0.4\pi$	$\pi/4$
2	$y = \cos x$	$0,\ \pi/6,\ 2\pi/6,\ 3\pi/6$	$\pi/4$
3	$y = e^x$	$-2,\ -1,\ 0,\ 1$	-0.5
4	$y = \sqrt{x}$	$0,\ 1.7,\ 3.4,\ 5.1$	3.0
5	$y = x \sin x$	$0,\ \pi/6,\ 2\pi/6,\ 3\pi/6$	$\pi/4$
6	$y = x^2 e^x$	$-1.2,\ -0.7,\ -0.2,\ 0.3$	-0.5

1.4 Интерполяция сплайнами

Использование одной интерполяционной формулы на большом числе узлов нецелесообразно. Интерполяционный многочлен может проявить свои колебательные свойства, при этом его значения между узлами могут существенно отличаться от значений интерполируемой функции.

Сплайн-интерполяция заключается в определении интерполирующей функции по формулам одного типа для различных непересекающихся промежутков.

Пусть в точках $x_0, x_1, \ldots x_n$ таких, что $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ известны значения функции $y = f(x)$. Наиболее широко применяемым является случай, когда между любыми двумя точками разбиения исходного отрезка строится многочлен n-й степени:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{i,k} x^k, \quad x_{i-1} \le x \le x_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

который в узлах интерполяции приниает значения аппроксимируемой функции и непрерывен вместе со своими $(n-1)$ производными. Рассмотрим приближение многочленом третьей степени:

$$S(x) = a_i + b_i (x - x_{i-1}) + c_i (x - x_{i-1})^2 + d_i (x - x_{i-1})^3 .$$

Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$. Предполагая, что сплайн имеет нулевую кривизну на концах отрезка, выпишем формулы для нахождения коэиифциентов:

$$\begin{cases} 2(h_1 + h_2) c_2 + h_2 c_3 = 3\left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1}\right), \\ \ldots \\ h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \\ \ldots \\ h_{n-1} c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n) c_n = 3\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right), \end{cases}$$

$$a_i = y_{i-1}, \quad b_i = (y_i - y_{i-1}/\, h_i - h_i (c_{i+1} + 2c_i)/3, \quad d_i = (c_{i+1} - c_i)/3h_i,$$

$$a_n = y_{n-1}, \quad b_n = (y_n - y_{n-1})\, h_n - 2c_n h_n/3, \quad d_n = -c_n/3h_n.$$

Задание

Построить кубический сплайн для функции, заданной в узлах интерполяции, предполагая, что сплайн имеет нулевую кривизну при $x = x_0$ и $x = x_4$. Вычислить значение функции в точке $x = x^*$.

N	i	0	1	2	3	4	x^*
1	x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	1.5
	y_i	0.0	0.5	0.86603	1.0	0.86603	
2	x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	1.5
	y_i	1.0	0.86603	0.5	0.0	-0.5	
3	x_i	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6	1.5
	y_i	0.0	0.36892	0.85408	.7856	6.3138	
4	x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6	2.66666
	y_i	2.4142	1.0818	0.50953	0.11836	-0.24008	
5	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	0.8
	y_i	-2.3026	-0.69315	-0.10536	0.26236	0.53063	
6	x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	0.2
	y_i	0.13534	0.36788	1.0	2.7183	7.3891	

1.5 Метод наименьших квадратов

Пусть задана таблично в узлах x_j функция $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$. При этом значения функции y_j определены с некоторой погрешностью. Пусть также из физических соображений известен вид функции, которой должны приближенно удовлетворять табличные точки, например многочлен степени n:

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

у которого неизвестны коэффициента a_i. Будем их находить из условия минимума квадратичного отклонения многочлена от таблично заданной функции:

$$\Phi = \sum_{j=0}^{N} \left(F_n(x_j) - y_j\right)^2.$$

Необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i - y_j\right) x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Эту систему для удобства преобразуют к виду:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{N} x_j^{k+i} = \sum_{j=0}^{N} y_j x_j^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

которая называется нормальной системой метода нименьших квадратов (МНК) и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i. Решив ее, построим многочлен $F_n(x)$, приближающий функцию $f(x)$ и минимизирующий квадратичное отклонение.

Задание

Для таблично заданной функции путем решения нормальной системы МНК найти приближающие многочлены первой, второй и третьей степеней. Построить их графики.

N	i	0	1	2	3	4	5
1	x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
	y_i	-0.5	0.0	0.5	0.86603	1.0	0.86603
2	x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
	y_i	0.86603	1.0	0.86603	0.50	0.0	-0.50
3	x_i	-0.9	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
	y_i	-0.36892	0.0	0.36892	0.85408	1.7856	6.3138
4	x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6	5.5
	y_i	2.4142	1.0818	0.50953	0.11836	-0.24008	-0.66818
5	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	-2.3026	-0.69315	-0.10536	0.26236	0.53063	0.74194
6	x_i	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
	y_i	0.04979	0.13534	0.36788	1.0	2.7183	7.3891

1.6 Численное интегрирование

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем этот отрезок на n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Имеем набор точек таких, что $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i. Следующее выражение называется интегральной суммой:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Точки ξ, очевидно, можно выбрать разными способами. Так, при выборе $\xi = x_{i-1}$ имеем формулу левых прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i,$$

при $\xi_i = x_i$ получается формула правых прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i,$$

при $\xi_i = x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2$ имеем формулу средних прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1/2}\right)\Delta x_i,$$

Рассмотрим криволинейную трапецию с основаниями y_{i-1} и y_i, функция $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ заменим прямой, соединяющей соответствующие точки. Суммируя площади таких трапеций, получим аппроксимацию по методу трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\Delta x_i.$$

Или, если шаг постоянный и равен h, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right).$$

Аппроксимируя функцию на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ параболой, получим метод Симпсона, или метод парабол:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}\left(y_0 + 4\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2}\right) + 2\left(y_1 + y_2 + \ldots y_{n-1}\right) + y_n\right).$$

Задание

Вычислить определенный интеграл $F = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ методвами прямоугольников, трапеций, Симпсона с постоянным шагом h.

N	$f(x)$	a	b	h
1	$y = \frac{x}{2x+5}$	-1	1	0.5
2	$y = \frac{x}{(3x+4)^2}$	0	4	1.0
3	$y = \frac{x}{(3x+4)^3}$	-1	1	0.5
4	$y = \frac{3x+4}{2x+7}$	-2	2	1.0
5	$y = \frac{1}{x^2+4}$	-2	2	1.0
6	$y = x\sqrt{49 - x^2}$	-2	2	1.0

2 Численные методы алгебры

2.1 Метод Гаусса

При решении СЛАУ методом Гаусса, расширенная матрица коэффициентов с помощью равносильных преобразований превращается в верхнюю треугольную матрицу в результате прямого хода. При обратном ходе определяются неизвестные. Пусть дана СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

На первом шаге алгоритма Гаусса выберем диагональный элемент $a_{11} \neq 0$ (если он равен нулю, то первую строку поменяем местами с какой-либо нижележащей строкой) и объявляем его ведущим (строка и столбец, на пересечении которых он находится также называются ведущими). Обнулим элементы $a_{21}, \ldots, a_{n1}$ ведущего столбца. Для этого сформируем числа $(-a_{21}/a_{11})$; $(-a_{31}/a_{11})$; $\ldots$; $(-a_{n1}/a_{11})$. Умножая ведущую строку на число $(-a_{21}/a_{11})$, скадывая со второй и ставя результат на место второй строки, получим вместо элемента a_{21} нуль. Аналогично обнуляется второй столбец, начиная с третьей строки. После $(n-1)$-го шага алгоритма Гаусса, получаем следующую расширенную матрицу, представляющую собой верхнюю треугольную матрицу СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Прямой ход алгоритма Гаусса завершен. В обратном ходе из последнего уравнения сразу определяется x_n, из предпоследнего — x_{n-1} и т.д.

Задание

Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} -5x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 64, \\ 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -55, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -48, \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 68. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -26, \\ -7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -25, \\ -6x_1 + 2x_2 = -16, \\ -3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 93, \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 16, \\ 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -80, \\ 9x_2 + 7x_3 + 7x_4 = -119 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 7x_4 = -67, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -57, \\ -x_1 + 3x_2 - 9x_3 - x_4 = -26, \\ -5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 52. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 9x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 = 55, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -66, \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -43, \\ -9x_1 - 5x_2 - x_3 - 6x_4 = -24. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 57, \\ 4x_1 + 9x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -23, \\ -5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 23, \\ 4x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 6x_4 = -20. \end{cases}$$

2.2 Метод прогонки

Метод прогонки является частным случаем метода Гаусса. Он применяется для решения СЛАУ с трехдиагональными (пятидиагональными и т.д.) матрицами. Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{cases} b_1x_1 + x_1x_2 & = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2 \\ \qquad a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 & = d_3 \\ \dots & \\ \qquad a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n & = d_{n-1} \\ \qquad a_nx_{n-1} + b_nx_n & = d_n \end{cases}$$

При этом будем полагать, что $a_1 = 0$, $c_n = 0$. Решение будем искать в виде

$$x_i = P_ix_{i+1} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где P_i, Q_i — прогоночные коэффициенты, подлежащие определению. Они вычисляются по следуюим формулам:

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_iP_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_iQ_{i-1}}{b_i + a_iP_{i-1}},$$

$$P_1 = -c_i/b_i, \quad Q_1 = d_1/b_1,$$

$$P_n = 0, \quad Q_n = \frac{d_n - a_nQ_{n-1}}{b_n + a_nP_{n-1}}.$$

Задание

Решить СЛАУ методом прогонки:

$$1. \begin{cases} 12x_1 - 5x_2 = 148, \\ -3x_1 - 18x_2 - 8x_3 = 45, \\ -2x_2 - 16x_3 - 9x_4 = -155, \\ -4x_3 + 18x_4 - 7x_5 = 11, \\ 4x_4 - 9x_5 = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -12x_1 - 7x_2 = -102, \\ -7x_1 - 11x_2 - 3x_3 = -92, \\ -7x_2 + 21x_3 - 8x_4 = -65, \\ 4x_3 - 13x_4 + 5x_5 = 38, \\ -6x_4 + 14x_5 = -12. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 = -33, \\ 6x_1 - 23x_2 - 9x_3 = -107, \\ 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 18, \\ 5x_3 + 15x_4 - 9x_5 = -69, \\ 5x_4 - 11x_5 = -31. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 16x_1 - 9x_2 = -27, \\ 8x_1 - 13x_2 - 5x_3 = -84, \\ -3x_2 - 21x_3 + 9x_4 = -225, \\ -9x_3 + 16x_4 - 5x_5 = -89, \\ x_4 - 9x_5 = 69. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -158, \\ -8x_2 - 6x_3 = 66, \\ 6x_2 + 15x_3 - 2x_4 = -45, \\ 4x_3 + 6x_4 - x_5 = 24, \\ -7x_4 - 10x_5 = -1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 0, \\ -9x_1 - 17x_2 + 3x_3 = -99, \\ -3x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -107, \\ 2x_3 - 9x_4 - 6x_5 = 5, \\ -4x_4 + 5x_5 = -6. \end{cases}$

2.3 Итерационные методы решения СЛАУ

Итерационные методы предпочтительнее использовать для решения СЛАУ с разреженными матрицами.

Метод простых итераций

Рассмотрим СЛАУ с невырожденной матрицей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Приведем СЛАУ к эквивалентному виду

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n, \end{cases}$$

или, в векторно-матричной форме,

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta,$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & & \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

В качестве нулевого приближения примем $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Тогда метод простых итераций примет вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} = \beta, \\ &\mathbf{x}^{(1)} = \alpha\mathbf{x}^{(0)} + \beta, \\ &\dots \\ &\mathbf{x}^{(k)} = \alpha\mathbf{x}^{(k-1)} + \beta, \end{aligned}$$

Последовательность итераций прерывают когда невязка становится меньше требуемой точности.

Метод Зейделя

Метод простых итераций сходится довольно медленно. Для его ускорения используют метод Зейделя, который заключается в том, что при вычислении компоненты $x_i^{(k+1)}$ вектора неизвестных на $(k+1)$-й итерации используются компоненты $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ..., $x_{i-1}^{(k+1)}$, уже вычисленные на $(k+1)$-й итерации. Значения остальных компонент берутся из предыдущей итерации. Аналогично методу простых итераций, строится эквивалентная СЛАУ и за начальное приближение принимается вектор правых частей. Метод Зейделя имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k+1)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k+1)} + \alpha_{12}x_2^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ \dots \\ x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k+1)} + \alpha_{12}x_2^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k+1)} + \beta_1, \end{cases}$$

Задание

Решить СЛАУ методом простой итерации и зейделя с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

$$1. \begin{cases} 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 104, \\ 4x_1 - 14x_2 - x_3 + 4x_4 = 70, \\ 7x_1 - 7x_2 + 27x_3 - 8x_4 = 170, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 14x_4 = 48. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 16x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 50, \\ -x_1 + 14x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 + 26x_3 + 7x_4 = 273, \\ -2x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 24x_4 = 111. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 2x_4 = -51, \\ 2x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 85, \\ -7x_1 - 6x_2 - 23x_3 - 3x_4 = 71, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 13x_4 = 91. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 10x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 110, \\ 2x_1 + 16x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 128, \\ x_1 + 5x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 102, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 - 17x_4 = 81. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 15x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 36, \\ 7x_1 - 15x_2 - 6x_3 + x_4 = -112, \\ -4x_1 + 7x_2 - 19x_3 - 6x_4 = 19, \\ 3x_1 - 5x_3 + 8x_4 == -23. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 22x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -158, \\ -8x_1 - 22x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 254, \\ 8x_1 - 2x_2 - 18x_3 + 2x_4 = -108, \\ 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 24x_4 = -24. \end{cases}$

2.4 Решение нелинейных уравнений

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — функция, определенная и непрерывная на некотором промежутке. Требуется найти корни данного уравнения. Оно ищется в два этапа:

1. Находятся отрезки $[a_i, b_i]$, внутри каждого из которых содержится ровно один корень.

2. С помощью того или иного итерационного метода значения корней уточняются.

Общего алгоритма отделения корней не существует. В большинстве случаев используется анализ заданной функции. Рассмотрим основные итерационные методы вычисления корней.

Метод половинного деления

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$ и известно, что его корень x^* лежит на отрезке $[a, b]$ и на конах отрезка функция имеет значения противоположенные по знаку, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Отрезок $\left[a^{(0)}, b^{(0)}\right]$, где $a^{(0)} \equiv a$, $b^{(0)} \equiv b$ называется начальным интервалом неопреленности. Процедура уточнения положения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности:

$$c^{(k)} = \left(a^{(k)} + b^{(k)}\right)/2,$$

и в качестве следующего интервала неопределенности выбирается тот отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков.

Процесс завершается когда длина текущего интервала неопределенности становится меньше заданной точности ε. В качестве приближенного значения корня выбирается середина данного отрезка.

Метод простой итерации

Пусть известно, что корень x^* уравнения $f(x) = 0$ лежит на отрезке $F = \{a \leq x \leq b\}$. С помощью равносильного преобразования, уравнение приводят к виду:

$$x = \varphi(x).$$

Такое преобразование можно реализовать разными способами. При этом не любая полученная зависимость приведет к сходящемуся решению. Для сходимости необходимо чтобы выполнялось условие

$$|\varphi'(x)| \leq c < 1, \quad c \equiv const.$$

Если условие сходимости выполнено, выбирают начальное приближение $x^{(0)} \in [a, n]$ и вычисляют последующие приближения корня по формуле:

$$x^{(k+1)} = \varphi\left(x^{(k)}\right).$$

Метод Ньютона

Потребуем выполнения следующих условий:

1. на отрезке $x \in [a, b]$ существует вторая производная функции f(x);

2. $f(x) \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$;

3. $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют знаки на отрезке $x \in [a, b]$.

Выберем начальное приближение $x^{(0)} \in [a, b]$. Последующие приближения находятся из следующей рекуррентной формулы:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}.$$

Метод секущих

Данный метод является модификацией метода Ньютона. Отличие в том, что производная в точке $x^{(k)}$ заменяется разностной формулой:

$$f'\left(x^{(k)}\right) \approx \frac{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}.$$

расчетная формула будет иметь вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right).$$

Задание

Решить уравнение $f(x) = 0$ методами половинного деления, простой итерации, Ньютона и секущих. Если корней несколько, выберите любой нетривиальный.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$e^x - 2x - 2$	2	$\ln(x+1) - 2x^2 + 1$
3	$x^6 - 5x - 2$	4	$\sin x - x^2 + 1$
5	$4^x - 5x - 2 = 0$	6	$x \lg(x+2) + x^2 - 1$

2.5 Решение систем нелинейных уравнений

Пусть дана система из n нелинейных ураенений с n неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

где $f_i(x_1, \ldots, x_n) : R^n \to R, i = 1, \ldots, n,$ — нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $G \subset R^n$. В векторном виде систему можно записать так:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0,$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}), \\ f_2(\mathbf{x}), \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}), \end{pmatrix}$$

Метод простых итераций

Систему уравнений сводят к равносильному виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}).$$

Задается начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ и необходимая точность $\varepsilon > 0$. Последующие приближения вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right). \end{cases}$$

Процесс продолжается пока $\Delta^{(k+1)} = \max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| > \varepsilon$.

Теорема (о достаточном условии сходимости метода простых итераций). Пусть функции $\varphi_i(\mathbf{x})\varphi_i'(\mathbf{x}), i = 1, \ldots, n$, непрерывный в области G, причем, выполнено неравенство

$$\max_{\mathbf{x}\in G} \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq q < 1, \quad q \equiv const$$

Если последовательные приближения $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x^{(k)}}\right), k = 0, 1, \ldots$, не выходят из области G, то процесс последовательных приближений сходится к решению $\mathbf{x}^*$.

Метод Зейделя

Как и при решении СЛАУ, метод Зейделя является модификацией метода простых итераций, зачастую приводящий к ускорению сходимости. Отличие от метода простых итераций заключается в том, что найденные значения неизвестных на данной итерации сразу же используются для определения остальных неизвестных. Рекуррентные выражения для компонент $\mathbf{x}$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right), \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}\right), \end{cases}$$

Метод Ньютона

По аналогии с методом Ньютона для решения нелинейных уравнений можно получить следующее обобщение на случай системы нелинейных уравнений:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - W^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где

$$W(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Данная матрица называется матрицей Якоби. Вычисление обратной матрицы является достаточно трудоемкой задачей, поэтому обычно вместо вычисления $W^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ используют рекуррентное выражение:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)},$$

где приращения $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ находят, решая СЛАУ:

$$W\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Задание

Решить систему нелинейных уравнений методами Ньютона и простой итерации.

$$1. \begin{cases} x_1 - \cos x_2 = 3, \\ x_2 - \sin x_1 = 3. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 4x_1 - \cos x_2 = 0, \\ 4x_2 - e^{x_1} = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1^2 - 2\lg x_2 - 1 = 0, \\ x_1^2 - 3x_1x_2 + 3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1^2 - x_1 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_2 - tgx_1 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1^2 - x_2 + x_2^2 - 3 = 0, \\ x_1 - \sqrt{x_2 + 3} + 1 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} e^{x_1x_2} + x_1 - 6 = 0, \\ x_1^2 - 6x_2 - 1 = 0. \end{cases}$

2.6 Метод вращений Якоби

Метод вращений Якоби применим только для симметрических матриц и решает полную проблему собственных значений и собственных векторов таких матриц. С помощью итерационных процедур ищется матрица U в преобразовании подобия $\Lambda = U^{-1}AU = U^TAU$. При этом Λ — диагональная матрица с собственными значениями на главной диагонали:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Итерационный процесс поиска коэффициентов матрицы Λ строится следующим образом. Пусть дана симметрическая матрица A. На нулевой итерации имеем $A^{(0)} = A$. На k-й итерации выберем максимальный по модулю недиагональный элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы $A^{(k)}$. Теперь требуется найти такое преобразование подобия $A^{(k+1)} = U^{(k)^T}A^{(k)}U^{(k)}$ чтобы в $A^{(k+1)}$ данный элемент обнулился, то есть $a_{ij}^{(k+1)} \approx 0$. Матрица $U^{(k)}$ устроена следующим образом:

$$u_{ij}^{(k)} = -\sin\varphi^{(k)}, \quad u_{ji}^{(k)} = \sin\varphi^{(k)}, \quad u_{ii}^{(k)} = u_{jj}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)},$$

остальные элементы главной диагонали равны 1, а не попадающие на главную диагональ — 0. Угол $\varphi^{(k)}$ определяется так:

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}.$$

В качестве критерия окончания итерационного процесса используется условие малости суммы квадратов недиагональнях элементов:

$$t\left(A^{(k+1)}\right) = \left(\sum_{l<m}\left(a_{lm}^{(k+1)}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Итерационный процесс продолжается пока выполняется условие

$$t\left(A^{(k+1)}\right) > \varepsilon.$$

Задание

Используя метод вращений, найти собственные значения и собственные векторы симметрических матриц с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 4 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 1 & 9 & 1 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -8 & 5 & -7 \\ 5 & 1 & 4 \\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & -7 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \\ -8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

3 Численные методы решения дифференциальных уравнений

3.1 Методы Эйлера и Эйлера-Коши

Задача Коши

Требуется найти функцию $Y = Y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$Y' = f(x, Y)$$

и принимающую при $x = x_0$ заданное значение Y_0:

$$Y(x_0) = Y_0$$

При этом будем для определенности считать, что решение нужно получить для значений $x > x_0$.

Согласно теореме Коши решение $Y(x)$ данной задачи существует, единственно, и является гладкой фнкцией, если правая часть $f(x, Y)$, являющаяся функцией двух переменных x, Y, удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Будем считать, что эти условия выполнены и существует единственное гладкое решение $Y(x)$.

Метод Эйлера

Заменим $f(x,Y)$ в левой части производную Y' правой разностью. При этом значения функции Y в узлах x_i заменим значениями сеточной функции y_i:

$$\frac{y_{n+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i).$$

Полученная аппроксимация имеет первый порядок (то есть точность метода $O(h_i)$). Общая формула для приближения решения будет иметь вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Метод Эйлера с пересчетом

Заменим функцию в правой части средним арифметическим значений $f(x_i, y_i)$ и $f(x_{i+1} + y_{i+1})$:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right).$$

Отсюда:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right).$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение y_{i+1} входит в обе части выражение и его, вообще говоря, нельзя выразить явно. Для вычисления y_{i+1} можно применить один из итерационных методов. Если имеется хорошее начальное приближение y_i, то можно построить решение с использованием двух итераций следущим образом. Считая y_i начальным приближением, вычисляем первое приближение $\tilde{y}_{i+1}$ по формуле метода Эйлера:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Вычисленное значение $\tilde{y}_{i+1}$ подаставляем вместо y_{i+1} в правую часть и находим окончательное значение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right).$$

Общая рекуррентная формула будет иметь вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))\right).$$

точность данного метода — $O(h^2)$

Задание

Решить задачу Коши методом Эйлера и методом Эйлера с пересчетом со значениями шага $h_1 = 0.1$ и $h_2 = 0.01$. Сравнить результаты графически.

1. $y' = x^2\left(y^2 + 1\right), \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 1].$
2. $y' = -\frac{y}{2x} + x^2, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 2].$
3. $y' = \frac{y}{x^2} + e^{x-1/x}, \quad y(1) = 1.367879, x \in [1, 2].$
4. $y' = e^{x-y} + e^x, \quad y(0) = 0.541325, \quad x \in [0, 1].$
5. $y' = \frac{-y+x\sin x}{x}, \quad y(1) = 0.3011687, \quad x \in [1, 2].$
6. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln|x|}, \quad y(2) = -0.733026, \quad x \in [2, 3].$

3.2 Метод Рунге-Кутты

Семейство явных методов Рунге-Кутты p-го порядка записывается в виде совокупности формул:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \qquad y_k = \sum_{i=1}^{p} c_k K_i^k,$$

$$K_i^k = hf\left(x_k + a_i h, y_k + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j^k\right), \quad i = 2, 3, \dots, p.$$

Параметры a_i, b_{ij}, c_i подбираются так, чтобы значение y_{k+1} совпадало со значением разложения в точке x_{k+1} точного решения в ряд Тейлора с погрешностью $O(h^{p+1})$.

Метод Рунге-Кутты третьего порядка

Имеем:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{3},$$

$$b_{21} = 0, \quad b_{32} = \frac{2}{3},$$

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0 \quad c_3 = \frac{3}{4},$$

тогда

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = \frac{1}{4}\left(K_1^k + 3K_3^k\right),$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k), \quad K_2^k = hf\left(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}K_1^k\right),$$

$$K_3^k = hf\left(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}K_2^k\right).$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Имеем:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = 1,$$

$$b_{21} = \frac{1}{2}, \quad b_{31} = 0, \quad b_{32} = \frac{1}{2}, b_{41} = 0, \quad b_{42} = 0, \quad b_{43} = \frac{1}{2},$$

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{3} \quad c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{6},$$

тогда

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = \frac{1}{6}\left(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + k_4^k\right),$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k), \quad K_2^k = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k\right),$$

$$K_3^k = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k\right), \quad K_4^k = hf\left(x_k + h, y_k + K_3^k\right).$$

Задание

Решить задачу Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка со значениями шага $h_1 = 0.1$ и $h_2 = 0.01$. Сравнить результаты графически.

1. $y' = \frac{y}{x} + x^2 \sin x, \quad y(1) = 1.3011687, \quad x \in [1, 2]$

2. $y' = \frac{-yx + x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$

3. $y' = -\frac{y}{x} - x^2, \quad y(1) = 0.75, \quad x \in [1, 2].$

4. $y' = \frac{1-yx}{x^2+1}, \quad y(1) = 0.623225, \quad x \in [1, 2].$

5. $y' = -y^2 + \frac{y}{x}, \quad , y(1) = \frac{2}{3}, \quad x \in [1, 2].$

6. $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1, 2].$

3.3 Метод Адамса

Метод Адамса относится к многошаговым методам. То есть для того, чтобы вычислить значение функции на данном слое, необходимо знать значения функции на нескольких предыдущих слоях. Представим решение дифференциального уравнения в виде

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k=1}} f\left(x, y(x)\right) dx.$$

Если решение задачи Коши получено в узлах вплоть до k-го, то можно аппроксимировать подынтегральную функцию, например, интерпояционным многочленом какой-либо степени. Вычислив интеграл от построенного многочлена на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, получим ту или иную формулу Адамса. При использовании интерполяционного многочлена третьей степени, построенного по значениям подынтегральной функции в последних четырех узлах, получим метод Адамса четвертого порядка точности:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right),$$

где f_k – значние подынтегральной функции в узле x_k. Для использования данного метода необходимо знать значения функции на четырех предыдущих слоях, их можно определить, воспользовавшись какимнибудь подходящим одношаговым методом, например - методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Задание

Решить задачу Коши методом Адамса со значениями шага $h_1 = 0.1$ и $h_2 = 0.01$. Сравнить результаты графически.

1. $y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x}, \quad y(1) = 0.5, \quad x \in [1, 2].$
2. $y' = \frac{y(2y \ln x - 1 - 1)}{x}, \quad y(1) = 0.3333333, \quad x \in [1, 2].$
3. $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 2].$
4. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} + 1, \quad y(1) = -0.541325, \quad x \in [1, 2].$
5. $y' = \frac{y \ln y}{x}, \quad y(1) = e, \quad x \in [1, 2].$
6. $y' = \frac{y(\ln(xy) - 1)}{x}, \quad y(1) = e, \quad x \in [1, 2].$

3.4 Решение задачи Коши для ОДУ второго и более высоких порядков

Задача Коши для ОДУ n-го порядка ставится следующим образом:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y_{01},$$

$$y''(x_0) = y_{02},$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}.$$

Основной прием, используемый при решении задач такого типа заключается в введении новых переменных и сведении исходной задачи для ОДУ высокого порядка к решению системы ОДУ первого порядка. Введем новые переменные

$$z_1 = y',$$

$$z_2 = y'',$$

$$\dots$$

$$x_{n-1} = y^{(n-1)}.$$

С ними исходную задачу можно переписать в виде системы n ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} y' = z_1, \\ z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \dots \\ z_{n-2}' = z_{n-1}, \\ z_{n-1}' = f(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{cases}$$

Задание

Решить задачу Коши со значениями шага $h_1 = 0.1$ и $h_2 = 0.01$. Сравнить результаты графически.

1. $(x-2)^2 y'' - (x-2)y' - 3y = 0,$
$y(3) = 2, \quad y'(3) = 2, x \in [3, 4].$

2. $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0,$
$y(1) = 1, \quad y'(1) = 2, \quad x \in [1, 2].$

3. $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)\, y = 0,$
$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right].$

4. $x^2 y'' - 2xy' + 4y - 5x = 0,$
$y(1) = 6, \quad y'(1) = 8, \quad x \in [1, 2].$

5. $x^2 y'' - 3xy' - 5y - x^2 \ln x = 0,$
$y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad x \in [1, 2].$

6. $x^2(x+1)y'' - x(2x+1)y' + (2x+1)y = 0,$
$y(1) = 2, \quad y'(1) = 4, \quad x \in [1, 2].$

3.5 Метод стрельбы

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу на отрезке $[a, b]$:

$$y'' = f(x, y, y')$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с данным уравнением и с начальными условиями:

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = \eta$$

где η – некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = a$. Положим сначала некоторое начальное значение параметру $\eta = \eta_0$, после чего решим каким-либо методом полученную задачу Коши. Пусть $y = y(x, y_0, \eta_0)$ – решение этой задачи на интервале $[a, b]$. Тогда сравнивая значение функции $y(b, y_0, \eta_0)$ со значением y_1 на правом конце отрезка, можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению на левом конце отрезка. Решая задачу Коши для нового значения $\eta = \eta_1$, получим другое решение со значением $y(b, y_0, \eta_1)$ на правом конце. Таким образом значение решения на правом конце $y(b, y_0, \eta)$ будет являться функцией одной переменной η. Задачу можно сформулировать следующим образом: требуется найти значение переменной η^* такое, чтобы решение $y(b, y_0, \eta^*)$ на правом конце отрезка совпало со значением y_1. Другими словами, решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\eta) = 0,$$

в котором $\Phi(\eta) = y(b, y_0, \eta) - y_1$.

Задание

Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка методом стрельбы.

1. $(x^2 + 1)\, y'' - 2y = 0,$
$y'(0) = 0, \quad y(2) - y'(2) = 1.$

2. $(x^2 - 1)\, y'' + (x - 3)y' - y = 0,$
$y(0) = -18, \quad y(3) = 0.$

3. $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0,$
$y'(0) = 2, \quad y(1) = e^2.$

4. $(2x + 1)y'' + (2x - 1)y' - 2y = x^2 + x,$
$y'(0) = 1, \quad y'(1) + y(1) = 5.$

5. $x(x + 1)y'' + (x + 2)y' - y = x + \frac{1}{x},$
$y'(1) = \frac{3}{2}, \quad 4y'(2) + y(2) = 13 + 4\ln 2.$

6. $2x(x + 2)y'' + (2 - x)y' + y = 0,$
$y'(1) = \frac{3}{2}, \quad y'(4) + y(4) = \frac{21}{4}.$

3.6 Конечно-разностный метод

Рассмотрим краевую задачу для линейного дифференциального уравненя второго порядка на отрезке $[a, b]$ с соответствующими краевыми условиями

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Введем на отрезке $[a, b]$ разностную сетку $\Omega^{(h)} = \{x_k = x_a + hk\}$, $h = (b-a)/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Решение данной задачи будем искать в виде сеточной функции $y^{(k)} = \{y_k, k = 0, 1, \ldots, N\}$, предполагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{h^2} + O\left(h^2\right), \quad y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O\left(h^2\right).$$

подставляя аппроксимации производных в исходное уравнение, получим систему уравнений для нахождения y_k:

$$\begin{cases} y_0 = y_a, \\ \ldots \\ \frac{y_{n+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p(x_k)\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q\left(x_k\right) y_k = f\left(x_k\right), \\ \ldots \\ y_N = y_b, \end{cases}$$

где

$$k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода две неизвестные y_0, y_N уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\begin{cases} \left(-2 + h^2 q\left(x_1\right)\right) y_1 + \left(1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right) y_2 = h^2 f\left(x_1\right) - \left(1 - \frac{p(x_1)h}{2}\right) y_a, \\ \\ \left(1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right) y_{k-1} + \left(-2 + h^2 q\left(x_k\right)\right) y_k + \left(1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right) y_{k+1} = h^2 f\left(x_k\right) k, \\ \\ \left(1 - \frac{p(x_{N-1})h}{2}\right) y_{N-1} + \left(-2 + h^2 q\left(x_{N-1}\right)\right) y_{N-1} = \\ \qquad = h^2 f\left(x_{N-1}\right) - \left(1 + \frac{p(x_{N-1})h}{2}\right) y_b, \end{cases}$$

где

$$k = 2, \ldots, N-2.$$

Для данной системы при достаточно малых шагах сетка выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\begin{cases} \left|-2 + h^2 q\left(x_k\right)\right| > \left|1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right|, \\ \\ \left|-2 + h^2 q\left(x_k\right)\right| > \left|1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right| + \left|1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right|, k = 2, \ldots, N-2, \\ \\ \left|-2 + h^2 q\left(x_{N-1}\right)\right| > \left|1 - \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right|, \end{cases}$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого или второго порядков.

$$\begin{cases} y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \\ \\ y'_N = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O\left(h^2\right), \\ \\ y'_N = \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} + O\left(h^2\right). \end{cases}$$

Задание

Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка Конечно-разностным методом.

1. $(x^2+1)\,y''-2y=0,$
$y'(0)=2, \quad y(1)=3+\frac{\pi}{2}.$

2.$x\,(x^2+6)\,y''-4\,(x^2+3)\,y'+6xy=0,$
$y'(0)=0, \quad y(4)-y'(4)=26.$

3. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0,$
$y'(0)=1, \quad y(2)-y'(2)=3.$

4. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0,$
$y'(1)=0, \quad y(3)-y'(3)=\frac{31}{9}.$

5. $xy''-(2+1)y'+2y=0,$
$y'(0)=4, \quad y'(1)-2y(1)=-4.$

6. $y''+4xy'+(4x^2+2)\,y=0,$
$y'(0)=1, \quad 4y(2)-y'(2)=e3e^{-4}.$

4 Численные методы решения уравнений в частных производных

4.1 Уравнений параболического типа

Постановка задачи для уравнений параболического типа

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0. \tag{1}$$

Если на границах $x=0$ и $x=t$ заданы значения искомой функции $u(x,t)$ в виде

$$u(0,t)=\phi_0(t), \quad t>0, \tag{2}$$

$$u(l,t)=\phi_l(t), \quad t>0, \tag{3}$$

т.е. граничные условия первого рода, и, кроме того, заданы начальные условия при $t=0$

$$u(x,0)=\psi(x), \quad 0\le x\le l, \tag{4}$$

то задачу (1)—(4) называют первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (1).

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \phi_0(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \phi_l(t), \quad t > 0, \tag{6}$$

то есть граничные условия второго рода, то задачу (1), (5), (6), (4) называют второй начально-краевой задачей для уравнения тепелопроводности.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной

$$\alpha\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta u(0,t) = \phi_0(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$\gamma\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta u(l,t) = \phi_l(t), = \quad t > 0, \tag{8}$$

то есть граничные условия третьего рода, то задачу (1), (7), (8), (4) называют третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (1).

Метод конечных разностей

Нанесем на пространственно-временную область $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$ конечно-разностную сетку $\omega_{h\tau}$

$$\omega_{h\tau} = \left\{x_j = jh,\ j = 0, 1, \ldots, N; \quad t^k = k\tau,\ k = 0, 1, \ldots, K\right\}$$

с пространственным шагом $h = l/N$ и шагом по времени $\tau = T/K$. Введем два временных слоя: нижний $t^k = k\tau$, на котором распределение искомой функции $u\left(x_j, t^k\right)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, известно (при $k = 0$ распределение определяется начльным условием (4) вида $u\left(x_j, t^0\right) = \psi\left(x_j\right)$) и верхний временной слой $t^{k+1} = (k+1)\tau$, на котором распределение искомой функции $u\left(x_j, t^{k+1}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, подлежит определению.

Сеточной функцией задачи (1)—(4), имеющей обозначение u_j^k, назовем однозначное отображение целых аргументов j, k в значения функции $u_j^k = u\left(x_j, t^k\right)$.

Введем сеточные функции u_j^k, $u_j^{k=1}$, первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для ее определения в задаче (1)—(4) аппроксимируем дифференциальные операторы отношением конечных разностей:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k = \frac{y_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O\left(h^2\right).$$

Подставляя эти выражения в задачу (1)—(4), получим явную конечно-разностную схему:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O\left(\tau + h^2\right),$$

где

$$k = 0, 1, \ldots, K-1, \quad j = 1, \ldots, N-1,$$

Начальные и граничные условия будут иметь вид:

$$u_0^k = \phi_0\left(t^k\right), \quad u_N^k = \phi_l\left(t^k\right), \quad u_j^0 = \psi\left(x_j\right),$$

где

$$k = 0, 1, \ldots, K, \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

где для каждого j-го уравнения все значения сеточной функции известны, за исключением одного – u_j^{k+1}, которое может быть определено явно.

Задание

Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа.

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0.$
$u_x(0,t) + u(0,t) = \exp\left((c-a)t\right)\left(\cos(bt) + \sin(bt)\right),$
$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -\exp\left((c-a)t\right)\left(\cos(bt) + \sin(bt)\right),$
$u(x,0) = \sin x.$

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}, \quad a > 0, \quad b > 0,$
$u_x(0,t) - u(0,t) = \exp(-at)\left(\cos(bt) + \sin(bt)\right),$
$u_x(\pi,t) - u(\pi,t) = \exp(-at)\left(\cos(bt) + \sin(bt)\right),$
$u(x,0) = \cos x.$

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \quad a > 0, \quad c < 0,$
$u_x(0,t) = \exp\left((c-a)t\right), \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \exp\left((c-a)t\right), \quad u(x,0) = \sin x.$

4. $dudt = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\cos x,$
$u_x(0,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right), \quad u_x(\pi,t) = -\exp\left(-\frac{1}{2}t\right), \quad u(x,0) = \sin x.$

5. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x(\cos t + \sin t),$
$u(0,t) = \sin t, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\sin t, u(x,0) = 0.$

6. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x),$
$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$

4.2 Уравнения гиперболического типа

Постановка задачи

Рассотрим волновое уравнение в области $0 < x < l$, $t > 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

Данное уравнение описывает, в частности, процесс малых поперечных колебаний струны. В этом случае $u(x,t)$ – поперечные перемещения струны, a – скорость распространения малых возмущений в материале, из которого изготовлена струна.

Если концы струны движутся по заданным законам, то есть на концах заданы перемещения или значения искомой функциии, то первая начально-краевая задачача для волнового уравнения имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \phi_0(t), \\ u(l,t) = \phi_l(t), \\ u(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l, \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \end{cases}$$

причем если концы струны жестко закреплены, то $\phi_0(t) = \phi_l(t) = 0$.

Конечно-разностная аппроксимация

Заменяя производные соответствующими разностными аналогами получим явную схему:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O\left(\tau^2 + h^2\right),$$

$$j = 1, \ldots, N-1; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если в правой части использовать выражение для следующего временного слоя, то получим неявную схему:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O\left(\tau^2 + h^2\right),$$

$$j = 1, \ldots, N-1; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Задание

Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t)$,
$u_x(0,t) = \exp(-1)$, $\quad u(x,0) = \sin x$,
$u_x(\pi,t) = -\exp(-t)$, $\quad u_t(x,0) = -\sin x$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + \sin x \exp(-t)$,
$u(0,t) = \exp(-t)$, $\quad u(x,0) = \cos x, u(\pi,t) = -\exp(-t)$, $\quad u_t(x,0) = -\cos x$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 3u$,
$u(0,t) = 0$, $\quad u(x,0) = 0$,
$u(\pi,t) = 0$, $\quad u_t(x,0) = 2\exp(-x)\sin x$.

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 3u$,
$u(0,t) = \exp(-t)\cos(2t)$, $\quad u(x,0) = \exp(-x)\cos x$,
$u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0$, $\quad u_t(x,0) = -\exp(-x)\cos x$.

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2u$,
$u(0,t) = \cos(2t)$, $\quad u(x,0) = \exp(-x)\cos x$,
$u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0$, $\quad u_t(x,0) = 0$.

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x}$,
$u(0,t) = 0$, $\quad u(x,0) = 0$,
$u(\pi,t) = 0$, $\quad u_t(x,0) = \exp(-x)\sin x$.

4.3 Уравнения эллиптического типа

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

Если на границе Γ расчетной области задана искомая функция, то говорят, что задана задача Дирихле:

$$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, u(x,y)|_\Gamma = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \right.$$

Если на границе Γ задается нормальная производная искомой функции, то соответствующая вторая краевая задача называется задачей Неймана для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \end{cases}$$

где n – направление внешней нормали к границе Γ.

Конечно-разностная аппроксимация

Рассмотрим краевую задачу для уравениня Пуассона в прямоугольнике $x \in [0, l_1]$, $y \in [0, l_2]$, на который наложим сетку

$$\omega_{h_1,h_2} = \left\{ x_i = ih_1,\ i = 0, \ldots, N_1; \quad y_j = jh_2,\ j = 0, \ldots, N_2 \right\}.$$

Введем сеточную функцию u_{ij}, $i = 0, \ldots, N_1$, $j = 0, \ldots, N_2$ и аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O\left(h_1^2 + h_2^2\right) = f\left(x_i, y_j\right),$$

$$i = 1, \ldots, N_1 - 1, \quad j = 1, \ldots, N_2 - 1.$$

Данная схема имеет второй порядок точности по переменным x и y.

Задание

Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$
$u(0, y) = \exp(-y)\cos y, \quad u(x, 0) = \exp(-x)\cos x,$
$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial y} - 3u,$
$u(0, y) = \exp(-y)\cos y, \quad u(x, 0) = \cos x,$
$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$
$u(0, y) = \cos y, \quad u(x, 0) = \exp(-x)\cos x,$
$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2u,$
$u(0, y) = \cos y, \quad u(x, 0) = \cos x,$
$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u,$
$u(0, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = \sin x,$
$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right), \quad u_y(x, 1) - u(x, 1) = 0.$

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u,$
$u_x(0, y) = \cos y, \quad u(x, 0) = x,$
$u_x(1, y) - u(1, y) = 0, \quad u(x, \frac{\pi}{2}) = 0.$

4.4 Метод переменных направлений

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0, \\ ux, 0, t) = \phi_1(x, t), \quad x \in [0, l_1], \\ u(x, l_2, t) = \phi_2(x, t), \quad x \in [0, l_1], \\ u(0, y, t) = \phi_3(y, t), \quad y \in [0, l_2], \\ u(l_1, y, t)\ \phi_4(y, t), \quad y \in [0, l_2], \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad x \in [0, l_1], \quad y \in [0, l_2]. \end{cases}$$

В схеме метода переменных направлений (МПН) шаг по времени разбивается на несколько шагов, число которых равно числу независимых пространственных переменных (в двумерном случае – на два). На каждом дробном временном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно(по соотвтетствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а в остальные – явно. на следующем дробном шаге другой дифференциальных оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для рассмотренной задачи будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{u_{ij}^{k+1/2}-u_{ij}^{k}}{\tau/2} = \tfrac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}\right) + \\
&+\tfrac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right) + f_{ij}^{k+1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \tfrac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}\right) + \\
&+\tfrac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}\right) + f_{ij}^{k+1/2},
\end{aligned}
$$

Задание

Решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа.

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y \left(\mu \cos \mu t + (a+b)\sin \mu t\right),$
$u(0,y,t) = 0, \quad u_x(\pi,y,t) = -\sin y \sin(\mu t),$
$u(x,0,t) = 0, \quad u_y(x,\pi,t) = -\sin x \sin(\mu t),$
$u(x,y,0) = 0,$
$a = 1, \quad b = 1, \quad \mu = 1.$

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y \left(\mu \cos \mu t + (a+b)\sin \mu t\right),$
$u(0,y,t) = 0, \quad u(\frac{\pi}{2},y,t) = \sin y \sin \mu t,$
$u(x,0,t) = 0, \quad u_y(x,\pi,t) = -\sin x \sin \mu t,$
$u(x,y,0) = 0,$
$a = 1, \quad b = 1, \quad \mu = 1.$

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$
$u(,t,t) = 0, \quad u(1,y,t) - u_x(1,y,t) = 0,$
$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,1,t) - u_y(x,1,t) = 0,$
$u(x,y,0) = xy.$

4. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$
$u(0,y,t) = 0, \quad u(1,y,t) = y\cos t,$
$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,1,t) = x\cos t,$
$u(x,y,0) = xy.$

5. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0,y,t) = sh(y)\exp(-3at),$
$u_x(\frac{pi}{4},y,t) = -2sh(y)\exp(-3at),$
$u_y(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x,\ln 2,t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x,y,0) = \cos 2x sh(y).$

6. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0,y,t) = sh(y)\exp(-3at),$
$u(\frac{\pi}{2},y,t) = -sh(y)\exp(-3at),$
$u_y(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x,\ln 2,t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x,y,0) = \cos 2x sh(y).$

4.5 Метод дробных шагов

В отличие от метода переменных направлений, в методе дробнах шагов используются только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанных производных. Для задачи (ссылка) схема метода дробных шагов имеет вид:

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^{k}}{\tau} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}\right) = \frac{f_{ij}^{k}}{2},$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1j}^{k+1}\right) = \frac{f_{ij}^{k+1}}{2},$$

С помощью чисто неявной подсхемы осуществляются скалярные прогонки в направлении оси x в количестве, равном $(J-1)$ в результате чего получается сеточная функция $u_{ij}^{k+1/2}$. На втором дробном шаге по времени осуществляются скалярные прогонки в направлении оси y в количестве, равном $(I-1)$, в результате чего получается сеточная функция u_{ij}^{k+1} Схема метода дробных шагов имеет порядок сходимости $O(\tau + h^2)$, то есть первый порядок по времени и второй по переменным x и y.

Задание

Решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа.

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0, y, t) = ch(y)\exp(-3at),$
$u(\frac{\pi}{2}, y, t) = 0,$
$u(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at),$
$u_y(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x, y, 0) = \cos(2x)ch(y).$

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0, y, t) = ch(y)\exp(-3at),$
$u(\frac{\pi}{4}, y, t) = 0,$
$u(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x, \ln(2, t) = \frac{5}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$
$u(x, y, 0) = \cos(2x)ch(y).$

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(\frac{\pi}{2}\mu_1, y, t) = 0,$
$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, \frac{\pi}{2}, \mu_2, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y),$
$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1.$

4. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(\frac{\pi}{2}\mu_1, y, t) = 0,$
$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, \frac{\pi}{2}, \mu_2, t) = 0,$
$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y),$
$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1.$

5. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(\pi, y, t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, \pi, t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_1 x)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu 2y),$
$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1.$

6. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$
$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(\pi, y, t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, \pi, t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_1 x)\exp\left(-\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)at\right),$
$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu 2y),$
$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1.$

4.6 Решение интегральных уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{9}$$

где $u(x)$ – искомая функция с областью определения $[a,b]$, а $K(x,s)$ – ядро уравнения.

Если функция $K(x,s)$ отвечает условию

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds < \inf,$$

а однородное интегральное уравнение

$$u(x) - \int_a^b K(x,s)u(s)ds = 0$$

имеет только нулевое решение, то исходное уравнение имеет при любой $f(x) \in L_2[a,b]$ только одно решение. Рассмотрим метод квадратур, который заключается в том, что интеграл аппроксимируется некоторой формулой численного интегрирования (например, формулами методов трапеций, Симпсона и т.д.). Для функции с непрерывной m-й производной введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$\int_a^b g(s)ds = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) + O\left(\frac{1}{n^m}\right). \tag{10}$$

При $m = 2$ это может быть составная формула трапеций или средних прямоугольников, при $m = 4$ – составная формула Симпсона или Гаусса по двум узлам и т.д.

Будем считать, что решение рассматриваемого интегрального уравнения существует и единственно.

Аппроксимируя интеграл формулой (10), получим:

$$u(x) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) = f(x) + R_n(x), \quad x \in [a,b].$$

Пренебрегая величиной $R_n(x)$, получим:

$$u(x) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{11}$$

Примем функцию $u_n(x)$ за приближенное решение уравнения (9). Процесс решения уравнения (11) может быть сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$U_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\left(s_i^{(n)}, s_j^{(n)}\right) U_j^{(n)} = f\left(s_i^{(n)}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, можно выделить следующие этапы алгоритма численного решения уравнения (9):

— выбирается квадратурная формула

— строится и решается система линейных алгебраических уравнений

— по ее решению находится приближенное решение исходного интегрального уравнения в виде функции $u_n(x)$.

Задание

Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

1. $u(x) - \int_0^1 xtu(t)dt = \frac{5}{6}x$
2. $u(x) - \int_{-1}^1 x^2 e^{xt} u(t)dt = 1 - x\left(e^x - e^{-x}\right).$
3. $u(x) - \int_0^1 xt^2 u(t)dt = 1.$
4. $u(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t u(t)dt = \cos 2x.$
5. $u(x) - \int_0^{0.5} \sin xt u(t)dt = 1 + \frac{1}{x}\left(\cos\frac{x}{2} - 1\right).$
6. $u(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xe^t u(t)dt = e^{-x}.$

Библиографические источники

1. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие/В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. — 3-е изд. стер. — М.: Высш. шк., 2008. — 480 с.: ил.

2. Гидаспов В. Ю., Иванов И. Э., Ревизников Д. Л. Численные методы. Сборник задач : учеб. пособие для вузов. под ред. У. Г. Пирумова. — М. : Дрофа, 2007. — 144 с. : ил.

3. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с.

4. Вержбицкий В.М. Основы Численных методов: Учебник для вузов. — 3-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2009. — 840 с.: ил.

5. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство Лань, 2008. — 368 с.