Типовой расчёт №2 по функциональному анализу, 6 семестр

Задачи 1-3

В задачах 1-3 под M, w, и φ понимаются следующие множества и функции:

1. $M = (-1, 1)$, $w(t) = |t|$, $\varphi(t) = \sqrt{1 - t^2}$
2. $M = (0, +\infty)$, $w(t) = e^{-t}$, $\varphi(t) = \sin t$
3. $M = (-1, 1)$, $w(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $\varphi(t) = t^3$
4. $M = (0, \pi)$, $w(t) = t(\pi - t)$, $\varphi(t) = \cos t$
5. $M = (-\infty, 0)$, $w(t) = e^t$, $\varphi(t) = \cos t$
6. $M = (-1, 1)$, $w(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, $\varphi(t) = \sqrt{1 + t}$
7. $M = (0, 1)$, $w(t) = t^3$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
8. $M = (0, +\infty)$, $w(t) = te^{-3t}$, $\varphi(t) = e^t$
9. $M = (0, 1)$, $w(t) = t^2(1 - t)$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$
10. $M = (-1, 1)$, $w(t) = 1$, $\varphi(t) = e^t$
11. $M = (-\infty, +\infty)$, $w(t) = e^{-t^2}$, $\varphi(t) = e^{-2t}$
12. $M = (0, 2)$, $w(t) = t$, $\varphi(t) = \sqrt{2 - t}$
13. $M = (-1, 1)$, $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\varphi(t) = \sqrt{1 + t}$
14. $M = (0, +\infty)$, $w(t) = \sqrt{t}e^{-t}$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$
15. $M = (0, 1)$, $w(t) = \frac{1-t}{\sqrt{t}}$, $\varphi(t) = \sqrt{1 - t}$
16. $M = (-1, 1)$, $w(t) = 1 - t^2$, $\varphi(t) = \sqrt{1 - t}$
17. $M = (-\infty, 0)$, $w(t) = e^{2t}$, $\varphi(t) = e^t$
18. $M = (0, 1)$, $w(t) = t^2$, $\varphi(t) = \sqrt{1 - t}$
19. $M = (-\pi, \pi]$, $w(t) = \pi - t$, $\varphi(t) = \sin t$
20. $M = (0, +\infty)$, $w(t) = t^2e^{-t}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$
21. $M = (0, 1)$, $w(t) = t$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
22. $M = (0, 1)$, $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$
23. $M = (0, +\infty)$, $w(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, $\varphi(t) = t\sqrt{t}$
24. $M = (0, 1)$, $w(t) = 1 - t^2$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

Под $C_{L_2}(M; w)$ будем понимать пространство непрерывных вещественных функций f, заданных на множестве M, для которых сходится интеграл $I(f) = \int_M |f(t)|^2 w(t)\, dt$, под $P_2(M; w)$ – его подпространство, содержащее многочлены степени не выше 2.

Задача 1

1. Убедитесь, что $P_2(M;w) \subset C_{L_2}(M;w)$.
2. Докажите, что функционал $\|f\| = \sqrt{I(f)}$ обладает свойствами нормы в пространстве $C_{L_2(M;w)}$.
3. Докажите, что на $C_{L_2}(M;w)$ можно задать скалярное произведение с помощью формулы $(f,g) = \int_M f(t)g(t)w(t)\,dt$, и это скалярное произведение согласовано с описанной выше нормой.
4. Убедитесь, что $\varphi \in C_{L_2(M;w)}$, найдите $\|\varphi\|$

Задача 2

Используя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, постройте w-ортонормированный (в смысле описанного выше скалярного произведения) базис подпространства $P_2(M;w)$.

Задача 3

Найдите ортогональную проекцию элемента φ на $P_2(M;w)$, представив её в виде линейной комбинации найденных базисных элементов и в виде линейной комбинации степеней t. Найдите расстояние от φ до $P_2(M;w)$ и относительную погрешность аппроксимации.

Задачи 4-5

В задачах 4-5 M – множество, $C(M)$ – пространство непрерывных ограниченных вещественных функций, заданных на M, $x \in C(M)$, $f \in C(M)$ – функции, $A : C(M) \to C(M)$ – оператор.

Задача 4

Описать образ и ядро оператора A, найти его собственные числа и соответствующие собственные функции.

Задача 5

Решить уравнение $x = Ax + f$.

Варианты:

1. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi \sin(t+s)x(s)\,ds$, $f(t) = t$
2. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\sin t + s\cos t)x(s)\,ds$, $f(t) = 1$
3. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\sin s + t\cos s)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$
4. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\sin s + \cos t\cos s)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$
5. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (s\sin t - \cos s)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$
6. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\sin t - s\cos s)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$
7. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\cos s\sin t + \sin s)x(s)\,ds$, $f(t) = t$
8. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\cos s + \sin t)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$
9. $M = [0,\pi/2]$, $(Ax)(t) = \int_0^{\pi/2} \sin(t+s)x(s)\,ds$, $f(t) = 1$
10. $M = [0,\pi/2]$, $(Ax)(t) = \int_0^{\pi/2} \cos(t-s)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin 2t$
11. $M = [0,\pi/2]$, $(Ax)(t) = \int_0^{\pi/2} (s\sin t + \cos s)x(s)\,ds$, $f(t) = t$
12. $M = [0,\pi/2]$, $(Ax)(t) = \int_0^{\pi/2} (t\sin s + \cos t)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$
13. $M = [-\pi/2,\pi/2]$, $(Ax)(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - s)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$
14. $M = [-\pi/2,\pi/2]$, $(Ax)(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t\sin s - ts)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin 2t$
15. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\sin t\sin s - t\cos s)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$
16. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\sin t\sin s - s\cos t)x(s)\,ds$, $f(t) = t$
17. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (t\cos s - s\sin t)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$
18. $M = [0,\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (t\cos s + s)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$

19. $M = [0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (t\cos s + \sin s)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$

20. $M = [0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (s\cos t + \sin s)x(s)\,ds$, $f(t) = t$

21. $M = [0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (s\cos t + \sin t)x(s)\,ds$, $f(t) = 1$

22. $M = [0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (s\cos t + t\sin t)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$

23. $M = [0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (s\cos t + t\sin s)x(s)\,ds$, $f(t) = \sin t$

24. $M = [0, \pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^\pi (\cos s - s\sin t)x(s)\,ds$, $f(t) = \cos t$