**МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ**

2019-2020 уч. год, специальность 01.03.02, 6 семестр

**ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО КУРСУ**

**"УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"**

**ЗАДАЧА 1.** Функция $u(x,t)$ является: для вариантов с номерами $N=3n+1$ – решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), t>0, x\in R, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=0, \end{cases}$$

для $N=3n$ – решением краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), t>0,\ x>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$$

и для $N=3n+2$ – решением краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), t>0,\ x>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0. \end{cases}$$

График функции $\varphi(x)$ представляет собой ломаную с узлами в точках ABC…, причем левее первой точки и правее последней $\varphi(x)$ равна нулю.

Требуется построить график $u(x,t)$ (профиль струны) в характерные моменты времени (промежутки времени, в течение которых профиль струны не меняет своей формы, можно пропустить).

| № | $\varphi(x)$ | № | $\varphi(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $A(3,0), B(4,2), C(5,2), D(6,0)$ | 2 , 3 | $A(0,0), B(1,2), C(2,0)$ |
| 4 | $A(0,0), B(1,2), C(2,0), D(3,2), E(4,0)$ | 5 , 6 | $A(1,0), B(2,-2), C(4,0)$ |
| 7 | $A(0,0), B(1,2), C(2,0), D(3,-2), E(4,0)$ | 8 , 9 | $A(0,0), B(1,2), C(3,0)$ |
| 10 | $A(0,0), B(2,2), C(3,2), D(5,0)$ | 11 , 12 | $A(0,0), B(1,-2), C(2,0)$ |
| 13 | $A(0,0), B(1,2), C(2,0), D(3,2), E(4,0)$ | 14 , 15 | $A(2,0), B(3,-2), C(5,0)$ |
| 16 | $A(0,0), B(2,-2), C(4,0), D(6,2), E(8,0)$ | 17 , 18 | $A(4,0), B(5,2), C(7,0)$ |
| 19 | $A(-3,0), B(-2,-2), C(-1,-2), D(0,0)$ | 20 , 21 | $A(4,0), B(6,-2), C(7,0)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 | $A(-2,0), B(-1,-2), C(0,0), D(1,-2), E(2,0)$ | 23 , 24 | $A(3,0), B(5,-2), C(6,0)$ |
| 25 | $A(1,0), B(2,-2), C(4,-2), D(5,0)$ | 26 , 27 | $A(0,0), B(2,2), C(3,0)$ |
| 28 | $A(3,0), B(4,2), C(5,2), D(6,0)$ | 29 , 30 | $A(4,0), B(5,2), C(6,0)$ |
| 31 | $A(4,0), B(5,2), C(6,0), D(7,-2), E(8,0)$ | 32 , 33 | $A(4,0), B(5,-2), C(6,0)$ |
| 34 | $A(-3,0), B(-2,-2), C(-1,1), D(0,0)$ | | |

**ЗАДАЧА 2.** Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи (ограниченная струна)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), x \in (0,\pi), t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = \varphi(t), \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

| № | $f(x,t)$ | $\varphi(t)$ | $\psi(x)$ | № | $f(x,t)$ | $\varphi(t)$ | $\psi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x+t$ | $t$ | $x/\pi$ | 2 | $2x-t$ | $t^2$ | $\sin 2x$ |
| 3 | $x+2t$ | $2t$ | $1-\cos x$ | 4 | $1$ | $\sin^2 t$ | $x(\pi-x)$ |
| 5 | $2x$ | $e^t-1$ | $\frac{1-\cos x}{2}$ | 6 | $-x$ | $\cos t-1$ | $\sin 3x$ |
| 7 | $2x+t$ | $3t$ | $3x/\pi$ | 8 | $3x-t$ | $e^{2t}-1$ | $1-\cos x$ |
| 9 | $x-t$ | $-2t$ | $\cos 3x-1$ | 10 | $x^2$ | $t$ | $x/\pi$ |
| 11 | $x+t$ | $-2t$ | $-2x/\pi$ | 12 | $x+3t$ | $\cos t-1$ | $x(\pi-x)$ |
| 13 | $3x+t$ | $t^2$ | $\sin 3x$ | 14 | $2x+3t$ | $\cos 2t-1$ | $\sin 2x$ |
| 15 | $x+3t$ | $t^2+t$ | $\frac{1-\cos x}{2}$ | 16 | $2x+t$ | $t^2-t$ | $-x/\pi$ |
| 17 | $2x+3t$ | $-t$ | $-x^2/\pi^2$ | 18 | $x-2t$ | $2t$ | $x(x+3\pi)/(2\pi^2)$ |
| 19 | $4x-t$ | $\sin t$ | $\sin x + x/\pi$ | 20 | $x+3t$ | $e^{-t}-1$ | $\frac{\cos x-1}{2}$ |
| 21 | $3x-2t$ | $e^{-2t}-1$ | $\cos 5x-1$ | 22 | $x+4t$ | $-\sin 2t$ | $\cos 3x-1$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | $3x+t$ | $\sin 3t$ | $-3x/\pi$ | 24 | $x+t$ | $\sin^2 t$ | $\sin 4x$ |
| 25 | $xt$ | $t^2-t$ | $\dfrac{\cos 5x-1}{2}$ | 26 | $-2xt$ | $e^{-3t}-1$ | $-3x/\pi$ |
| 27 | $5x+t$ | $t^2-3t$ | $\sin x-3x/\pi$ | 28 | $3xt$ | $t^2+2t$ | $1-\cos x$ |
| 29 | $-xt$ | $e^{-2t}-1$ | $\cos 3x-1$ | 30 | $x+2t$ | $2t$ | $1-\cos 5x$ |
| 31 | $3x-2t$ | $t-t^2$ | $\cos 2x$ | 32 | $3x+t$ | $t^2$ | $\sin x$ |
| 33 | $4x-t$ | $t^2$ | $\sin 4x$ | 34 | $x+3t$ | $2t-t^2$ | $1+\cos 2x$ |

**ЗАДАЧА 3.** Найти решение $u(x,y,t)$ задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+ f(x,y,t);\ (x,y)\in R^2, t>0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y). \end{cases}$$

Для нахождения одного из слагаемых, входящих в формулу для $u(x,y,t)$, использовать формулу Пуассона, для второго – воспользоваться тем, что одна из функций $\varphi,\psi$ или $f$ является собственной функцией оператора Лапласа (в частности, гармонической функцией).

| № | $f(x,y,t)$ | $\varphi(x,y)$ | $\psi(x,y)$ | № | $f(x,y,t)$ | $\varphi(x,y)$ | $\psi(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x^2yt$ | 0 | $e^{-x}\sin y$ | 2 | $xy^2t$ | $e^x\cos y$ | 0 |
| 3 | $(x^2+y)t$ | $e^x\sin y$ | 0 | 4 | $(y^2-x)t$ | 0 | $e^{-x}\cos y$ |
| 5 | 0 | $x^2-y^2$ | $xy^3$ | 6 | 0 | $x^3-y$ | $3xy^2-x^3$ |
| 7 | $x^2t^2$ | 0 | $chx\sin y$ | 8 | $y^2t$ | $shx\sin y$ | 0 |
| 9 | $x^3t$ | $chx\cos y$ | 0 | 10 | $y^3t$ | 0 | $shx\cos y$ |
| 11 | 0 | $\sin x\cos 2y$ | $y^3-3yx^2$ | 12 | 0 | $xy$ | $\cos y\sin 2x$ |
| 13 | $t(x-y^2)$ | 0 | $e^{-2x}\cos 2y$ | 14 | $t(x+y^2)$ | $e^{2x}\sin 2y$ | 0 |
| 15 | $t(y-x^2)$ | $e^{2x}\sin 2y$ | 0 | 16 | $t(y+x^3)$ | 0 | $e^{-2x}\cos 2y$ |
| 17 | 0 | $chy\sin x$ | $x^2-y^3$ | 18 | 0 | $2y^2-x^3$ | $x^2-y^2$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | $(t^2-x^2)y$ | $0$ | $shy\cos x$ | 20 | $(t^2+y^2)x$ | $chy\cos x$ | $0$ |
| 21 | $(t^2-x)y$ | $shy\cos x$ | $0$ | 22 | $(t^2+2y)x$ | $0$ | $ch2x\sin 2y$ |
| 23 | $0$ | $ch2x\cos y$ | $2x^3-3xy^2$ | 24 | $0$ | $ch2x\cos 2y$ | $x^2+y^2$ |
| 25 | $t(x^2-y^2)$ | $0$ | $x^3-y^2$ | 26 | $te^x\sin y$ | $x^2-y^2$ | $0$ |
| 27 | $te^y\cos x$ | $xy^3$ | $0$ | 28 | $t^2e^y\sin x$ | $0$ | $x^2y^2$ |
| 29 | $0$ | $e^x\sin y$ | $xy^2$ | 30 | $0$ | $yx^3-x^2$ | $e^y\cos x$ |
| 31 | $tchx\sin y$ | $0$ | $x-y^3$ | 32 | $tshx\cos y$ | $x^3y$ | $0$ |
| 33 | $t^2(x^2-y^2)$ | $y^2+x$ | $0$ | 34 | $t^2chy\sin x$ | $0$ | $x-y^3$ |

**ЗАДАЧА 4.** Решить задачу о колебаниях прямоугольной мембраны, закрепленной по контуру, т.е. найти решение $u(x,y,t)$ задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y,t);t>0,(x,y)\in \Pi=(0,a)\times(0,b), \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y),u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y),(x,y)\in\Pi, \\ u(0,y,t)=u(a,y,t)=u(x,0,t)=u(x,b,t)=0. \end{cases}$$

| № | $a$ | $b$ | $f(x,y,t)$ | $\varphi(x,y)$ | $\psi(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $\pi$ | $t+xy$ | $x(1-x)\sin y$ | $0$ |
| 2 | $\pi$ | $1$ | $t^2+x^2$ | $0$ | $y(1-y)\sin x$ |
| 3 | $2$ | $\pi$ | $t-y^2$ | $\sin \pi x\sin y$ | $0$ |
| 4 | $\pi$ | $2$ | $x^2-y$ | $0$ | $y(2-y)\sin 2x$ |
| 5 | $1$ | $2\pi$ | $t^2+y^2$ | $x(x-1)\sin\dfrac{y}{2}$ | $0$ |
| 6 | $2\pi$ | $1$ | $t^2-y^2$ | $0$ | $(y^2-y)\sin\dfrac{x}{2}$ |
| 7 | $\dfrac{\pi}{2}$ | $2$ | $tx^2$ | $(2y-y^2)\sin 2x$ | $0$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | $\frac{\pi}{2}$ | $t^2(y+x)$ | 0 | $(2x-x^2)\sin 4y$ |
| 9 | $\frac{\pi}{3}$ | 1 | $t(x^2+3y)$ | $(y^2-y)\sin 3x$ | 0 |
| 10 | 3 | $\frac{\pi}{3}$ | $t^2-3x^2$ | 0 | $(x^2-3x)\sin 6y$ |
| 11 | $3\pi$ | 2 | $y^2-tx$ | $(y^2-2y)\sin\frac{2x}{3}$ | 0 |
| 12 | 1 | $\pi$ | $t^2-2xy$ | 0 | $\sin\pi x\sin 2y$ |
| 13 | $2\pi$ | 1 | $txy$ | $\sin\frac{x}{2}\sin 3\pi y$ | 0 |
| 14 | 2 | $3\pi$ | $t(2x-y)$ | 0 | $x(2-x)\sin y$ |
| 15 | $3\pi$ | 1 | $x(t-y)$ | $y(y-1)\sin x$ | 0 |
| 16 | 2 | 2 | $tx-y$ | 0 | $y(y-2)\sin\frac{\pi x}{2}$ |
| 17 | 1 | $2\pi$ | $ty+x$ | $x(x-1)\sin y$ | 0 |
| 18 | $4\pi$ | 1 | $tx-2y$ | 0 | $y(y-1)\sin\frac{x}{4}$ |
| 19 | 3 | $3\pi$ | $t^2x+y$ | $x(3-x)\sin 2y$ | 0 |
| 20 | 1 | 1 | $t(x^2-3y^2)$ | 0 | $\sin\pi x\sin 2\pi y$ |
| 21 | $3\pi$ | 2 | $x^2-ty$ | $(y^2-2y)\sin\frac{2x}{3}$ | 0 |
| 22 | 1 | $\pi$ | $xt+y^2$ | 0 | $\sin\pi x\sin 2y$ |
| 23 | $2\pi$ | 1 | $t^2+x^2$ | $\sin\frac{x}{2}\sin 3\pi y$ | 0 |
| 24 | 2 | $3\pi$ | $t(x-3y)$ | 0 | $x(2-x)\sin y$ |
| 25 | $3\pi$ | 1 | $x(t-y)$ | $y(y^2-1)\sin x$ | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 2 | 2 | $tx^2+y$ | 0 | $y(y-2)\sin\frac{\pi x}{2}$ |
| 27 | 1 | $\pi$ | $ty+x$ | $x(x-1)\sin y$ | 0 |
| 28 | $4\pi$ | 1 | $t^2-2yx$ | 0 | $y(y-1)\sin\frac{x}{4}$ |
| 29 | 3 | $3\pi$ | $t^2x-y$ | $x(3-x)\sin 2y$ | 0 |
| 30 | 1 | 2 | $tx-y^2$ | 0 | $y(2-y)\sin\pi x$ |
| 31 | 2 | $\pi$ | $x^2+2y^2$ | $x(2-x)\sin 3y$ | 0 |
| 32 | $\pi$ | 1 | $x^2-3y^2$ | 0 | $y(1-y)\sin 2x$ |
| 33 | 3 | $\pi$ | $x^2+2t^2$ | $x(3-x)\sin y$ | 0 |
| 34 | 1 | 2 | $t^2-y^2$ | 0 | $y(2-y)\sin\pi x$ |

**ЗАДАЧА 5.** Найти решение смешанной задачи для волнового уравнения ($m$ – номер варианта, $\mu_m^{(0)} > 0$ – $m$-ый корень функции Бесселя $J_0(\mu)$ нулевого порядка):

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(x,y,t), x^2+y^2<R^2, t>0, \\ u\big|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \\ u\big|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{R}\right), u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

| № | $f(x,y,t)$ | № | $f(x,y,t)$ | № | $f(x,y,t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x-y$ | 2 | $x+y$ | 3 | $xy$ |
| 4 | $x+t$ | 5 | $x-t$ | 6 | $xt$ |
| 7 | $y-t$ | 8 | $y+t$ | 9 | $yt$ |
| 10 | $2x+y$ | 11 | $x+3y$ | 12 | $3x-y$ |
| 13 | $3y-x$ | 14 | $2x-y$ | 15 | $t(x-y)$ |
| 16 | $t(x+y)$ | 17 | $y(t+x)$ | 18 | $2y-x$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | $y(t-x)$ | 20 | $t(2x-y)$ | 21 | $t(y+2x)$ |
| 22 | $x(t+y)$ | 23 | $x(t-y)$ | 24 | $x(2t-y)$ |
| 25 | $1+x+y$ | 26 | $2-x+2y$ | 27 | $3+2y$ |
| 28 | $t-xy$ | 29 | $t+xy$ | 30 | $t+3xy$ |
| 31 | $t-y^2$ | 32 | $x^2-y^2$ | 33 | $txy$ |
| 34 | $x^2+ty$ | | | | |

**ЗАДАЧА 6.** Найти решение $u(x,y,z,t)$ задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x,y,z,t), t>0, (x,y,z)\in R^3; \\ u\big|_{t=0} = u_0(x,y,z), u_t\big|_{t=0} = u_1(x,y,z). \end{cases}$$

Для нахождения одного из слагаемых, входящих в формулу для $u(x,y,z,t)$, использовать формулу Кирхгофа, для второго – воспользоваться гармоничностью (бигармоничностью) одной из функций $\varphi, \psi$ или $f$ .

| № | $f$ | $u_0$ | $u_1$ | № | $f$ | $u_0$ | $u_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $xyz$ | $(x^2-y^2)z$ | 0 | 2 | $tx^2$ | 0 | $x^2+y^2+z$ |
| 3 | 0 | $x^2+y^2-z^2$ | $xyz$ | 4 | $x^2+t^2$ | $xy-z^2$ | 0 |
| 5 | $(x^2+y^2)t$ | 0 | $x^2+y^2-z^2$ | 6 | 0 | $x(y+z)$ | $(x+y)z^2$ |
| 7 | $xyz-t$ | $(x-y)z$ | 0 | 8 | $tx^2-z$ | 0 | $yz+x$ |
| 9 | 0 | $(y-z)x^2$ | $y^2(x+z)$ | 10 | $t(x^2+y^2-z)$ | $xy^2z$ | 0 |
| 11 | $t(y-x)z$ | 0 | $x^2(y+z)$ | 12 | 0 | $x(2y-z)$ | $z(x^2+y^2)$ |
| 13 | $t(x-2y)z$ | $xyz$ | 0 | 14 | $t^2(x-y)$ | 0 | $x^2-y^2+z$ |
| 15 | 0 | $xyz^2$ | $(x^2-y^2)z$ | 16 | $x^2-y^2+t$ | $x^2-y^2+z^2$ | 0 |
| 17 | $tx(y-z)$ | 0 | $xyz^2$ | 18 | 0 | $(x^2+z)y$ | $x^2-y^2-z^2$ |
| 19 | $(t-x+y)(z-x)$ | $(x^2-y^2)z^2$ | 0 | 20 | $(x^2-2y^2)t$ | 0 | $xzy$ |
| 21 | 0 | $x-z^2$ | $(x^2+2y^2)z$ | 22 | $x^2+2y^2-t$ | $3x^2+y^2+z^2$ | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | $tz(y+z)$ | 0 | $xy^2z^2$ | 24 | 0 | $(x^2-2z)y$ | $x^2-y^2+3z^2$ |
| 25 | $(t-x^2)(z-x)$ | $(x^2-2y^2)z^2$ | 0 | 26 | $(x^2+y^2)t$ | 0 | $x^2zy$ |
| 27 | 0 | $z(y+z)$ | $x^2y^2z$ | 28 | $(x^2-2z)t^2$ | $x^2-y^2+3z^2$ | 0 |
| 29 | $(t+x^2)(z+2x)$ | 0 | $(x^2-2y^2)z^2$ | 30 | 0 | $(x^2+3y^2)$ | $x^2zy$ |
| 31 | $x^2(t-y)$ | $2x^2+yz$ | 0 | 32 | $(t^2-x)y^2$ | 0 | $xyz$ |
| 33 | 0 | $x^2-yz$ | $xyz^2$ | 34 | $t^2-z^2x$ | $x^2+y^2-z$ | 0 |

**ЗАДАЧА 7.** Найти решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+k^2u=0, x^2+y^2<R^2, k=const>0, \\ \qquad u\big|_{x^2+y^2=R^2}=g(\varphi). \end{cases}$$

Предполагается, что число $kR$ не является корнем уравнения $J_n(\mu)=0$, где $J_n(x)$ - функция Бесселя порядка $n, n=0,1,2...$

| № | $g(\varphi)$ | № | $g(\varphi)$ | № | $g(\varphi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\sin\varphi-\cos 2\varphi$ | 2 | $\cos^2\varphi$ | 3 | $\sin^2\varphi$ |
| 4 | $\sin\varphi+\cos 2\varphi$ | 5 | $2\sin\varphi+\cos 3\varphi$ | 6 | $\sin^2 2\varphi$ |
| 7 | $\cos 2\varphi+\sin\varphi$ | 8 | $\cos^2 2\varphi$ | 9 | $\sin 3\varphi-1$ |
| 10 | $1-2\cos\varphi$ | 11 | $2-\sin 2\varphi$ | 12 | $\cos 3\varphi-1$ |
| 13 | $2+\sin 2\varphi$ | 14 | $\cos 3\varphi+2$ | 15 | $1+2\cos\varphi$ |
| 16 | $\sin 3\varphi+\cos\varphi$ | 17 | $1+\sin^2\varphi$ | 18 | $1-\cos^2 2\varphi$ |
| 19 | $-\sin 3\varphi+\cos\varphi$ | 20 | $\cos 2\varphi+\sin 3\varphi$ | 21 | $\sin 3\varphi-\cos 2\varphi$ |
| 22 | $2-\sin 3\varphi$ | 23 | $1+2\sin\varphi\cos 3\varphi$ | 24 | $1-\cos 4\varphi$ |
| 25 | $1+\sin 4\varphi$ | 26 | $\sin 2\varphi\cos 4\varphi$ | 27 | $2-\cos 4\varphi$ |
| 28 | $1-2\cos\varphi\sin 3\varphi$ | 29 | $\sin\varphi\cos 2\varphi$ | 30 | $1+\sin\varphi\cos\varphi$ |
| 31 | $1-2\sin 3\varphi\cos 5\varphi$ | 32 | $2\sin\varphi\cos 5\varphi$ | 33 | $\sin^4\varphi$ |
| 34 | $2-\cos 4\varphi$ | | | | |