Modelowanie chorób wenerycznych

Nela Tomaszewicz

Listopad 2019

1 Wprowadzenie

Choroby weneryczne są specyficznym przypadkiem chorób zakaźnych. Po pierwsze, ograniczają się do osób aktywnych seksualnie, a nie do całej populacji. Po drugie, objawy takich chorób ukazują się najczęściej w późnym stadium rozwoju infekcji. Po trzecie, choroby te nie prowadzą do nabycia odporności.

2 Klasyczny model epidemiologiczny

2.1 Założenia

W modelu zakładamy, że:

- Rozważana populacja jest jednostajnie przemieszana.
- Rozważamy tylko kontakty heteroseksualne.
- Populacja składa się z dwóch grup: samców i samic, a infekcja przechodzi z jednego członka jednej grupy na członka drugiej grupy.
- Infekcja jest typu krzyżowego, gdzie każda z grup jest nosicielem choroby dla drugiej grupy.
- Zakładamy jednostajne mieszanie między podgrupami pewnej populacji.
- Liczba mężczyzn i kobiet nie zmienia się.

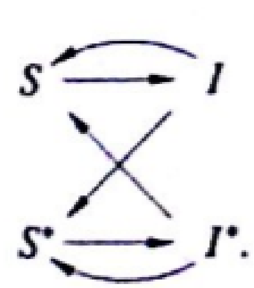
2.2 Model krzyżowy SI

2.2.1 Grupy w populacji

W populacji mamy dwie grupy: podatnych (S) i zainfekowanych (I) w przypadku mężczyzn i S_1 oraz I_1 w przypadku kobiet.

2.3 Model

Krzyżowy model SI można zwizualizować w następujący sposób:



Rysunek 1: Krzyżowy model SI

Na pokazanym rysunku S^* oraz I^* oznaczają podatne i zainfekowane grupy kobiet. W modelu tym zakłada się, że osoby, które przeszły daną chorobę nie nabywają na nią odporności. Zakładamy, że liczba obu płci w danej populacji jest stała, zatem możemy zapisać następującą zależność dla stałych N i N_1 oznaczających odpowiednio liczbę mężczyzn i kobiet:

$$S(t) + I(t) = N$$

$$S_1(t) + I_1(t) = N_1$$

Zakładamy, że spadek liczebności podatnych mężczyzn jest proporcjonalny zarówno do ich liczebności jak i liczebności zainfekowanych kobiet. W podobny sposób zmienia się liczebność grupy kobiet. Biorąc pod uwagę te założenia oraz własność omawianego modelu mówiącą o tym, że osobnik po wyzdrowieniu trafia z powrotem do grupy podatnych, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\frac{dS}{dt} = -rSI_1 + aI$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI_1 - aI$$

$$\frac{dS_1}{dt} = -r_1S_1I + a_1I_1$$

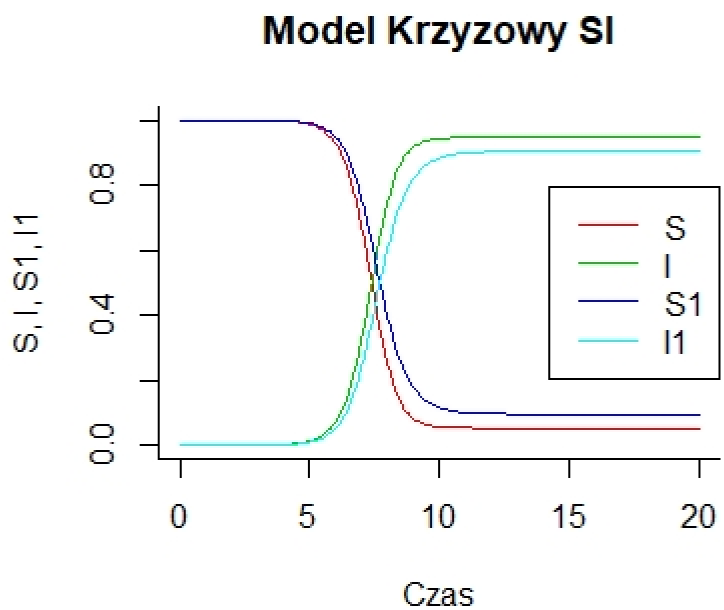
$$\frac{dI_1}{dt} = r_1S_1I - a_1I_1$$

Stałe a oraz a_1 mówią o tempie wyzdrowień, natomiast stałe r i r_1 o tempie zakażeń poprzez kontakt z osobą zainfekowaną dla obydwu rozważanych grup. Rozwój choroby badany jest przy warunkach początkowych $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $S_1(0) = S_10$, $I_1(0) = I_10$. Uwzględniamy także warunek o stałych liczebnościach grup kobiet i mężczyzn.

W prezentacji rozwiązań liczby S, I, S_1, I_1 traktujemy jako stosunek liczby osób podatnych i zainfekowanych w grupie kobiet i mężczyzn do liczebności całej grupy danej płci. Przyjmujemy, że proporcje dla każdej grupy są takie same.

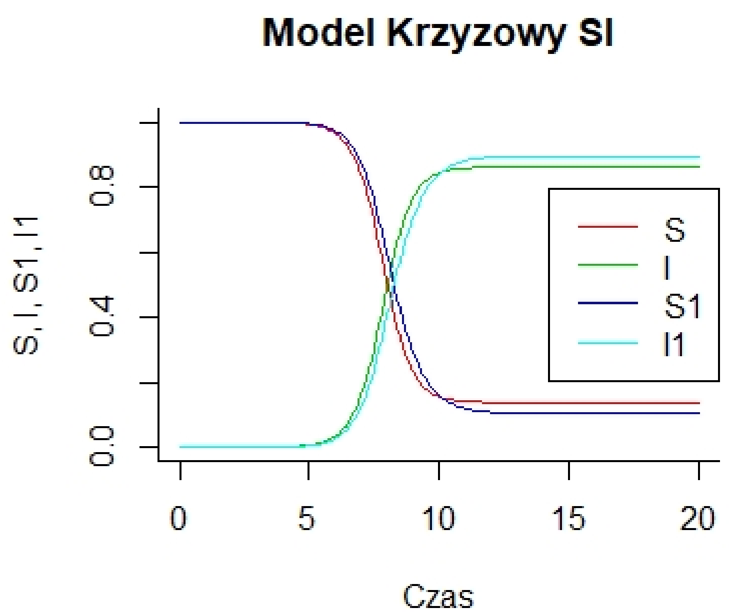
Wykresy rozwiązań dla tego układu równań i różnych stałych następujący:

1. $r = 2.8, a = 0.14, r_1 = 1.4, a_1 = 0.14$, czyli mężczyźni dwa razy szybciej zarażają się chorobami wenerycznymi, np. poprzez większą liczbę kontaktów seksualnych.



Po pewnym czasie liczba osób zainfekowanych dla obydwu grup przewyższa liczbę osób podatnych na infekcję. Liczba ta dla obydwu grup stabilizuje się. W przypadku grupy kobiet zmiana następuje później a populacja osób podatnych jest większa. Ponieważ u mężczyzn tempo zakażenia jest większe, zatem również poziom liczby osobników zainfekowanych jest wyższy.

2. $r = 2.8, a = 0.4, r_1 = 1.4, a_1 = 0.14$, czyli mężczyźni dwa razy szybciej zarażają się chorobami wenerycznymi, ale także dwa razy szybciej wracają do zdrowia.



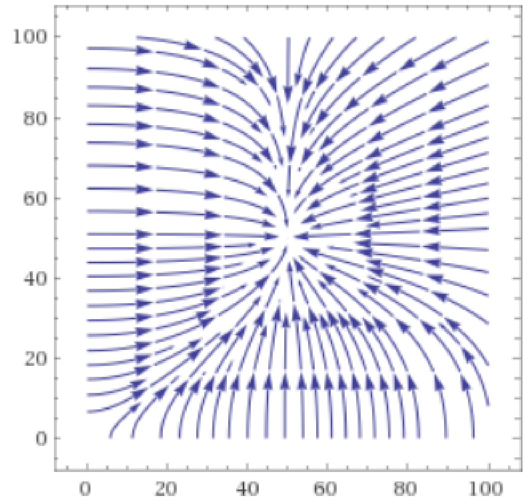
W tym przypadku, tempo wyzdrowień mężczyzn sprawia, że stała zarażeń nie ma aż takiego wpływu na populację. Liczba mężczyzn zainfekowanych jest mniejsza niż liczba zainfekowanych kobiet, a także liczba osób podatnych staje się większa dla pierwszej grupy.

Układ możemy zredukować do dwóch równań opisujących dynamikę zmiennych S i S_1 lub I i I_1 podstawiając zależność $N = I + S$ lub $N_1 = I_1 + S_1$. Otrzymujemy wtedy:

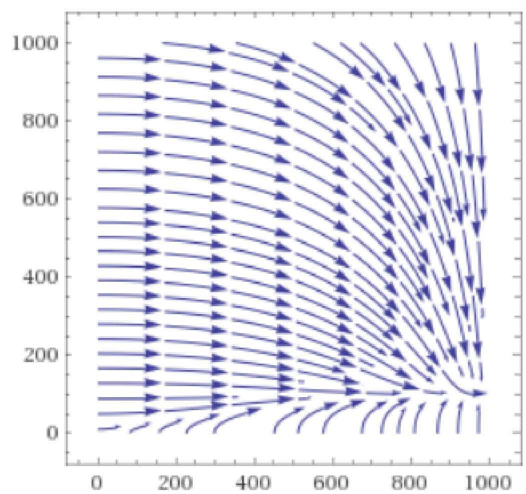
$$\frac{dI}{dt} = rI_1(N - I) - aI$$

$$\frac{dI_1}{dt} = r_1 I(N_1 - I_1) - a_1 I_1$$

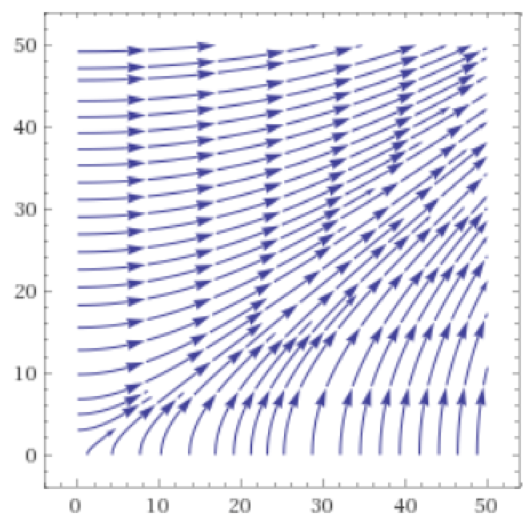
Dzięki temu możemy przeanalizować portrety fazowe w przestrzeni fazowej (I, I_1).



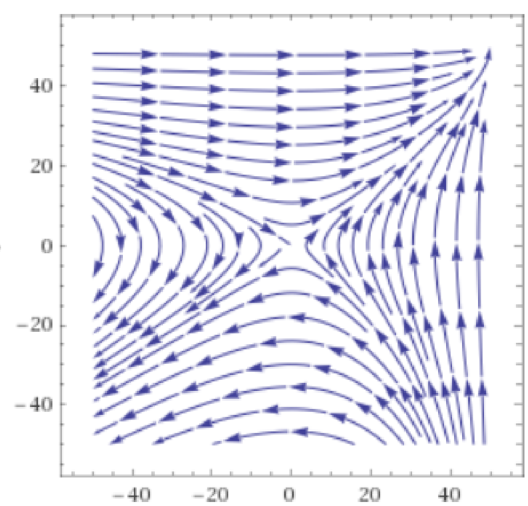
Rysunek 2: Dla pierwszego zbioru stałych oraz $N = N_1 = 50$



Rysunek 3: Dla pierwszego zbioru stałych oraz $N = 1000$, $N_1 = 100$ oraz dłuższego czasu



Rysunek 4: Dla pierwszego zbioru stałych oraz $N = N_1 = 100$ i krótszego czasu



Rysunek 5: Dla pierwszego zbioru stałych oraz $N = N1 = 50$, ale dla $-50 \leq I, I_1 \leq 50$

Stany stacjonarne układu wyznaczamy jako $I = I_1 = 0$ a także:

$$I_s = \frac{NN_1 - \rho\rho_1}{\rho + N_1}$$

$$I_{1s} = \frac{NN_1 - \rho\rho_1}{\rho_1 + N}$$

$$\rho = \frac{a}{r}$$

$$\rho_1 = \frac{a_1}{r_1}$$

Z wyprowadzonych wzorów wynika, że dodatni stan stacjonarny odpowiadający poziomowi zainfekowanych populacji istnieje tylko wtedy, gdy $\frac{NN_1}{\rho\rho_1} > 1$. Możemy zatem podejrzewać, że stan zerowy jest niestabilny, co faktycznie widać na rysunku 5 oraz linearyzując układ wokół punktu $I = 0 = I_1$ i wyliczając wartości własne:

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & rN \\ r_1N_1 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda = -(a+a_1) \pm \left((a+a_1)^2 + 4aa_1\Big(\frac{NN_1}{\rho\rho_1} - 1\Big) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Zatem jeśli zachodzi nierówność $\frac{NN_1}{\rho\rho_1} > 1$ to $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ i punkt zerowy jest siodłem w przestrzeni fazowej (I, I_1). Jeśli ta nierówność nie zachodzi, to obie wartości własne będą ujemne i stan będzie stabilny. W takim wypadku nie będzie istniał stan stacjonarny dodatni.

Natomiast jeśli (I_s, I_{1s}) istnieje, to znaczy, że jego współrzędne są dodatnie, co daje następujące równanie i wartości własne po zlinearyzowaniu wokół tego stanu:

$$\begin{vmatrix} -a - rI_{1s} - \lambda & rN - rI \\ r_1N_1 - r_1I_1 & -a_1 - r_1I_{1s} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda(a + a_1 + rI_{1s} + r_1I_s) + (a_1rI_{1s} + rr_1(I_1N + IN_1) + aa_1 - rr_1NN_1) = 0$$

Pierwiastki tego równania kwadratowego mają części rzeczywiste ujemne, czyli dodatni stan stacjonarny jest stabilny. Można zobaczyć to, na przykład, na rysunku 2.

2.3.1 Podsumowanie

Reasumując, warunek progowy istnienia niezerowego stanu stacjonarnego osobników zainfekowanych ma postać $\frac{NN_1}{\rho\rho_1} > 1$. Można interpretować tę zależność w następujący sposób: jeśli każdy mężczyzna jest podatny, to $\frac{rN}{a}$ opisuje średnią liczbę mężczyzn kontaktujących się z zainfekowaną kobietąw czasie trwania jej choroby. Dla kobiet mamy interpretację analogiczną ze zmienionymi parametrami $\frac{r_1N_1}{a_1}$. Wspomniane wartości średnie odzwierciedlają maksymalne współczynniki kontaktu dla mężczyzn i kobiet.

2.4 Model krzyżowy SIR

Innym sposobem prostego opisu zachorowań na infekcje przenoszone drogą płciową jest model krzyżowy SIR, wyglądający bardzo podobnie do modelu SI, ale z jedną dodatkową grupą ozdrowiałych. W omawianym raporcie, uogólniamy jednak model SIR do modelu SI.

3 Inne modele

Oczywiście, model SI oddaje bardzo uproszczony wycinek rzeczywistości, nie uwzględniając wielu skomplikowanych czynników mających wpływ na chorobę, a co za tym idzie na populację. W przypadku chorób wenerycznych, bardzo duże znaczenie ma rozwój choroby leczonej, nieleczonej, a także aktywnosć seksualna badanych osobników, sprawiająca, że mogą być one bardziej podatne na zachorowania. Do zamodelowania przebiegu choroby z uwzględnieniem takich czynników mogą służyć modele wielogrupowe, gdzie wydzielamy odpowiednie mniejsze grupy z większych. W przypadku chorób wenerycznych, można by podzielić kobiety i mężczyzn, przykładowo, względem aktywności seksualnej. Takie modele są już dużo bardziej skomplikowane, ale dające dużo lepsze rezultaty.