

# Model konkurencji z dyfuzją

Nela Tomaszewicz

Luty 2020

## 1 Wstęp

W raporcie zostanie omówiona niestabilność Turinga dla modelu konkurencji z dyfuzją. Pokażemy ją na symulacjach numerycznych wykonanych w języku MATLAB.

## 2 Model

Omawiany model ma następującą postać:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_1 - d_1 \Delta u_1 = r_1 u_1 (1 - u_1 - \alpha_2 u_2) \\ \frac{\partial}{\partial t} u_2 - d_2 \Delta u_2 = r_2 u_2 (1 - \alpha_1 u_1 - u_2) \end{cases}$$

Jest to model uproszczony w porównaniu z modelem Lotki-Volterry. Tutaj stałe  $d_1$  oraz  $d_2$  oznaczają dyfuzję,  $r_1$ ,  $r_2$  liniowy przyrost populacji, natomiast stałe  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  łączą w sobie stałe wpływu konkurencji jednego gatunku na drugi, liczebność populacji oraz pojemność środowiska. Możemy w uproszczeniu przyjąć, że oznaczają one konkurencję między gatunkami. Zakładamy także, że wszystkie stałe są dodatnie.

Rozwiązania stacjonarne tego układu to  $(U_1, U_2) = (0, 0)$ ,  $(U_1, U_2) = (1, 0)$ ,  $(U_1, U_2) = (0, 1)$  oraz  $(U_1, U_2) = (\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2})$ . Pierwsze trzy rozwiązania stacjonarne są trywialne, zakładają albo, że gatunki nie istnieją w danym środowisku albo, że istnieje tylko jeden z nich. Dlatego w pokazywaniu niestabilności Turinga użyjemy ostatniego z wyznaczonych stanów stacjonarnych.

Aby wyznaczyć stabilność stanów stacjonarnych posługujemy się następującą zlinearyzowaną macierzą wokół punktu  $(U_1, U_2)$

$$L = \begin{pmatrix} -r_1 U_1 & -\alpha_2 r_1 U_1 \\ -\alpha_1 r_2 U_2 & -r_2 U_2 \end{pmatrix}$$

Zatem mamy:

$$\text{tr}(L) = -(r_1 U_1 + r_2 U_2) < 0$$

$$\det(L) = r_1 r_2 U_1 U_2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)$$

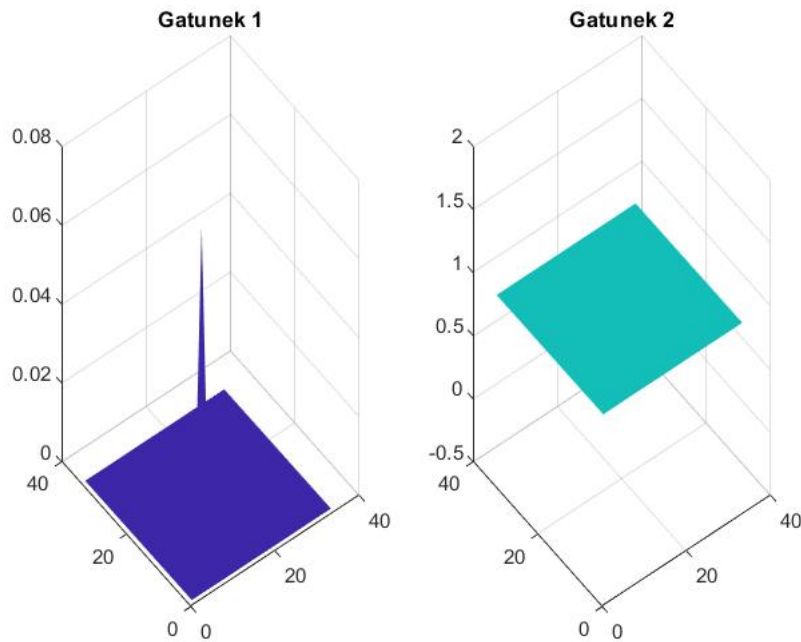
1. Dla  $\alpha_1\alpha_2 < 1$ ,  $\det(L) > 0$ , obydwie wartości własne mają ujemne części rzeczywiste. Układ jest stabilny.
2. Dla  $\alpha_1\alpha_2 > 1$ ,  $\det(L) < 0$  i wartości własne mają przeciwne znaki, zatem układ jest niestabilny.

### 3 Symulacje

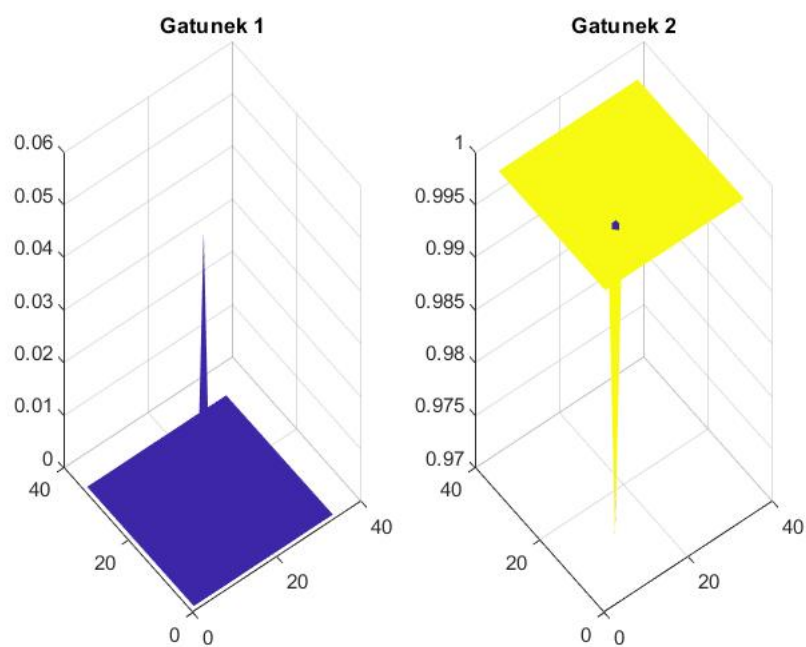
Symulacje zostały przeprowadzone dla warunku początkowego będącego czwartym z wyliczonych rozwiązań stacjonarnych z zaburzeniem rzędu 0.2 dla gatunku 1, czyli U1. Parametry wspólne dla wszystkich symulacji to:

$$T = 100, dt = 0.001$$

#### 3.1 Stałe dyfuzji równe 0



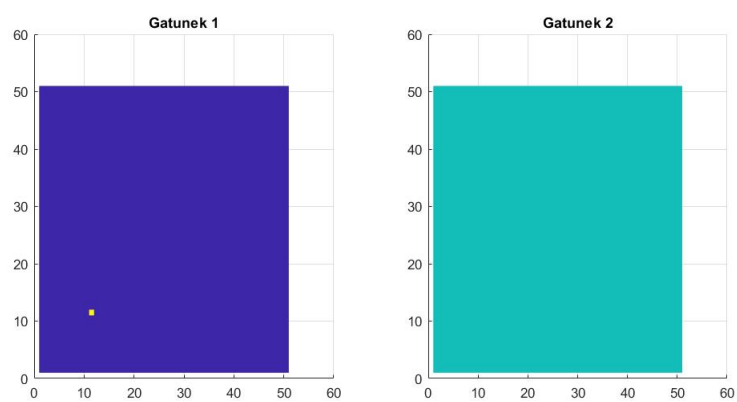
Rysunek 1: Chwila  $t = 1$



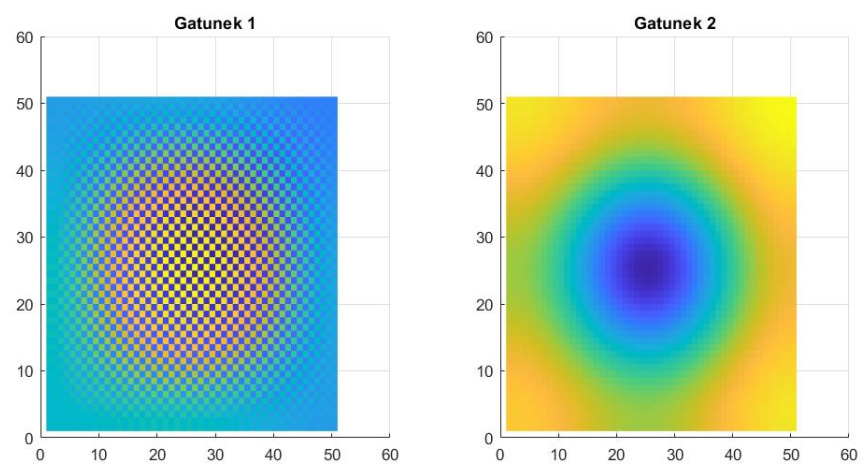
Rysunek 2: Chwila  $t = 100000$

## 3.2 Stałe dyfuzji różne od 0

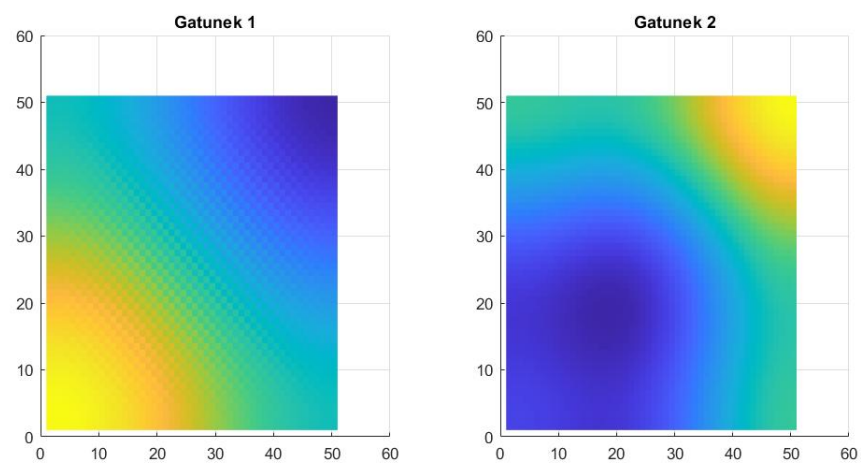
### 3.2.1 $\alpha_1\alpha_2 < 1$



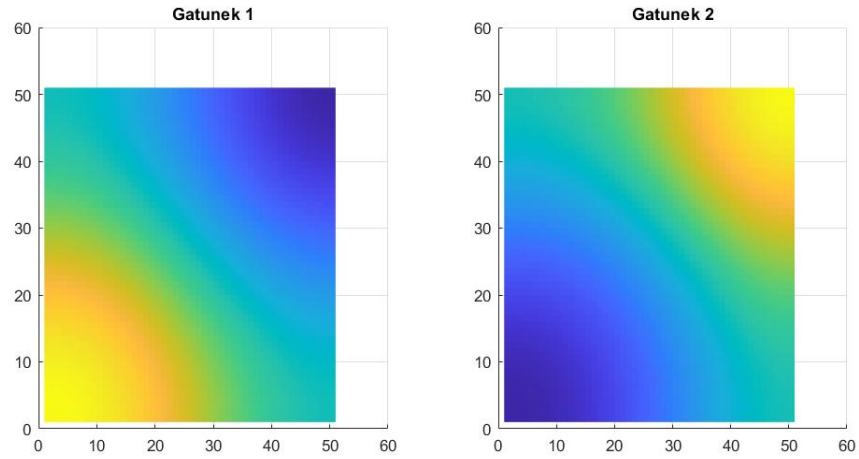
Rysunek 3: Chwila  $t = 1$



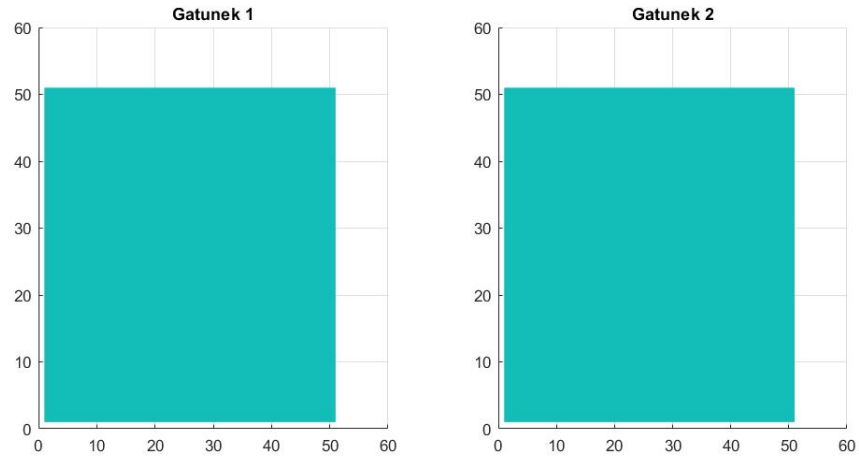
Rysunek 4: Chwila  $t = 1000$



Rysunek 5: Chwila  $t = 5000$



Rysunek 6: Chwila  $t = 10000$



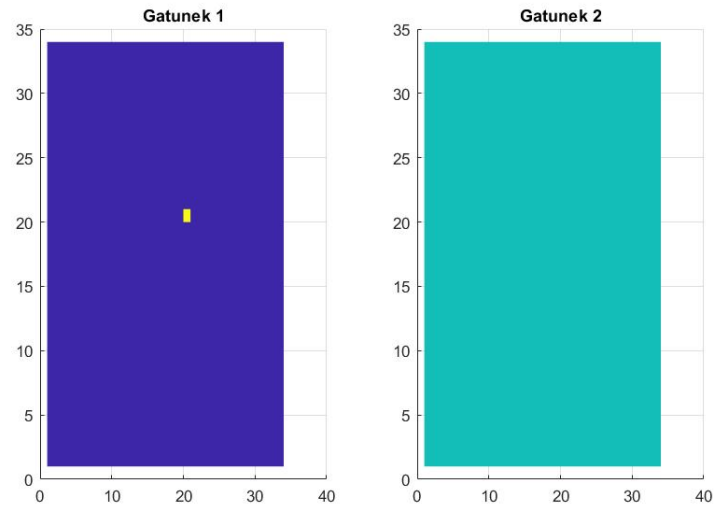
Rysunek 7: Chwila  $t = 100000$

Gatunki zaczynają żyć ze sobą w pewnej symbiozie aż w końcu dochodzimy do sytuacji stałej. Nie ma tutaj oczywiście niestabilności Turinga, ponieważ układ równań dyfuzji jest stabilny. Ustalonymi parametrami były:

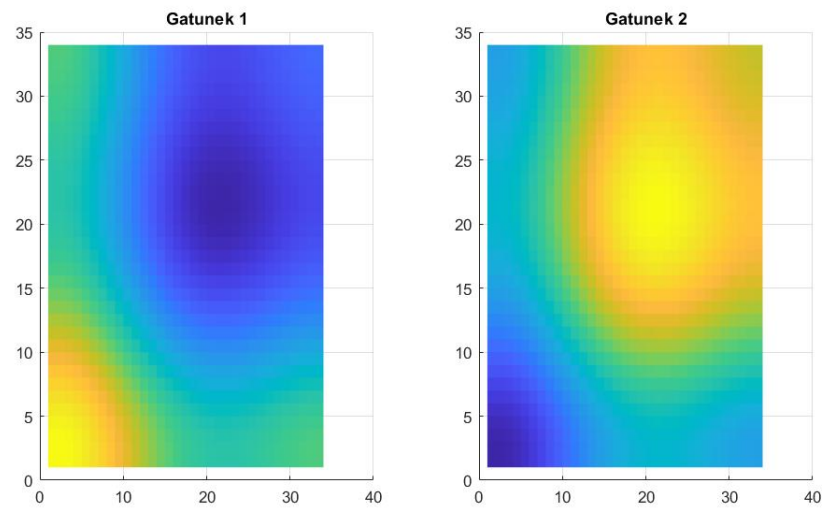
$$d_1 = 0.1, d_2 = 0.01, r_1 = 1, r_2 = 0.5, \alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.97$$

Parametry są większe dla pierwszego gatunku, co widać na symulacjach, ponieważ jego wpływ na środowisko jest większy ze względu na szybszy przyrost.

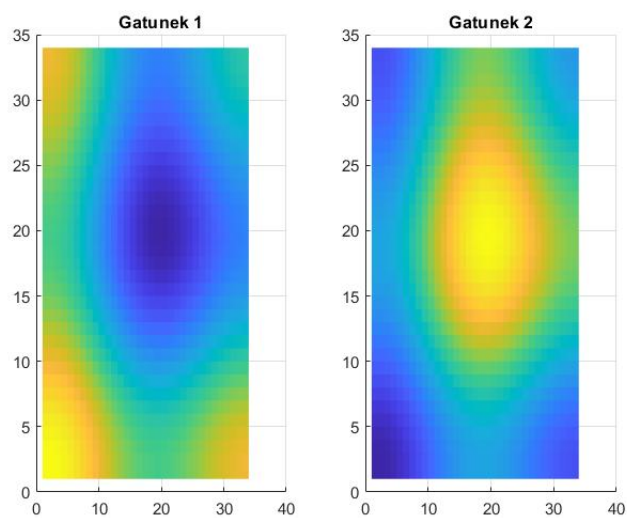
### 3.2.2 $\alpha_1\alpha_2 > 1$



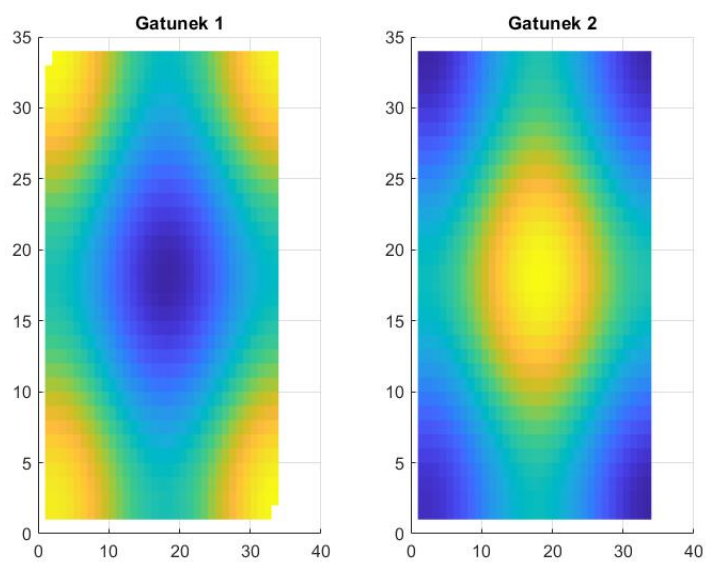
Rysunek 8: Chwila  $t = 1$



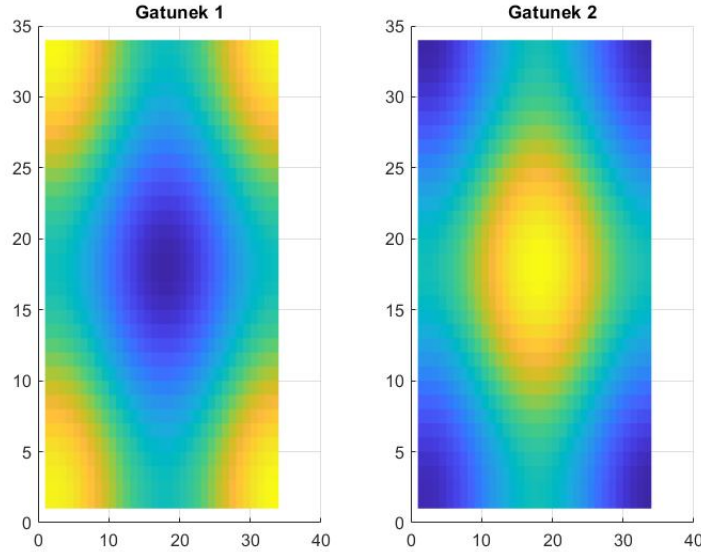
Rysunek 9: Chwila  $t = 1000$



Rysunek 10: Chwila  $t = 5000$



Rysunek 11: Chwila  $t = 50000$



Rysunek 12: Chwila  $t = 100000$

W tym przypadku mamy już do czynienia z niestabilnością Turinga. Powstaje regularny kształt, który można zinterpretować jako grupy osobników otaczające inną grupę. Układ nie osiąga stabilności. Parametry użyte dla tej symulacji to:

$$d_1 = 0.1, d_2 = 0.01, r_1 = 1, r_2 = 0.5, \alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 2.4$$

Została także zmniejszona powierzchnia symulacji.

## 4 Wnioski

Przedstawione w raporcie symulacje to tylko ułamek możliwości jakie daje model konkurencji. Dobierając odpowiednie parametry można otrzymać wiele ciekawych form gotowych do interpretacji w przełożeniu na biologię. Niestety, nie udało mi się uzyskać ciekawszych układów niż ostatni przedstawiony w raporcie. Innym przypadkiem zaobserwowanym dla niestabilności Turinga była na przykład zupełna symbioza i mieszanie się gatunków przypominające model ze stabilnością z tą różnicą, że w ostatniej chwili czasu wyglądał dalej tak samo i nigdy się nie stabilizował.