Równanie dyfuzji

Nela Tomaszewicz

Grudzień 2019

1 Wstęp

W raporcie rozważymy równanie dyfuzji w zależności od warunku początkowego i różnych warunków brzegowych (jednorodnych, niejednorodnych Dirichleta oraz Neumanna). Rozważane równanie wraz z warunkami ma postać:

$$u_t(x) = D\Delta u \quad x \in \Omega \quad t > 0 \quad \text{(równanie dyfuzji)}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \quad \text{(warunek początkowy)}$$

$$u(x,t) = f(x,t) \quad x \in C \quad t > 0 \quad \text{(warunek brzegowy Dirichleta)}$$

$$u_\nu(x,t) = g(x,t) \quad x \in D \quad t > 0 \quad \text{(warunek brzegowy Neumanna)}$$

W powyższym wzorze D oznacza stałą dyfuzji, Ω jest obszarem dyfuzji, natomiast rozłączne zbiory C i D oznaczają brzegi. Do obliczeń numerycznych wykorzystywany jest schemat Eulera.

1.1 Informacje techniczne

Symulacje zostały wykonane w języku MATLAB. Ustawione parametry dla wszystkich symulacji wynoszą dx = 0.1, dt = 0.001 oraz dy = 0.1 w przypadku kwadratu i wycinka.

2 Odcinek

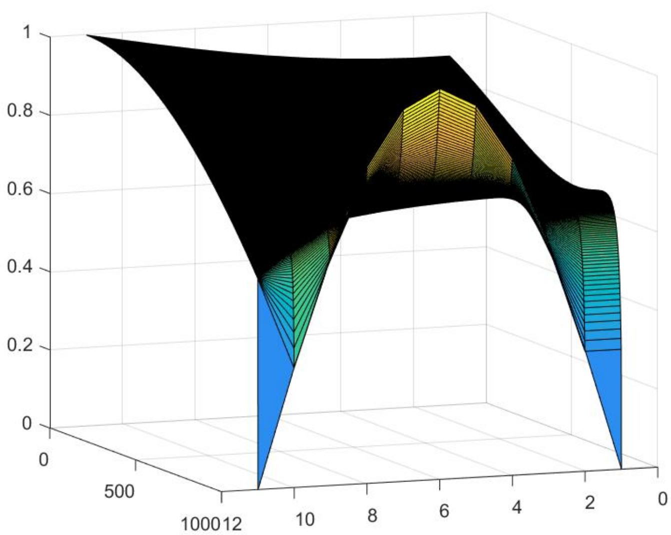
Mamy odcinek $\Omega = [0, 1]$. Dla mojego przypadku zadane zostały następujące warunki:

$$u_0(x) = sin(\pi x)$$

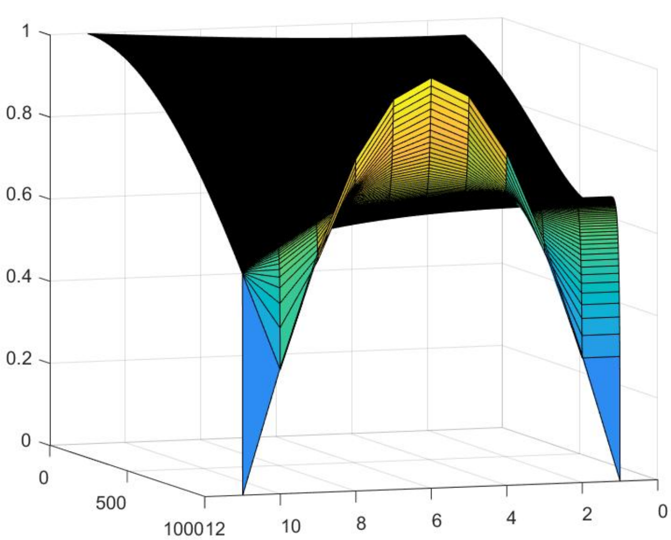
$$u_x(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = cos(t)$$

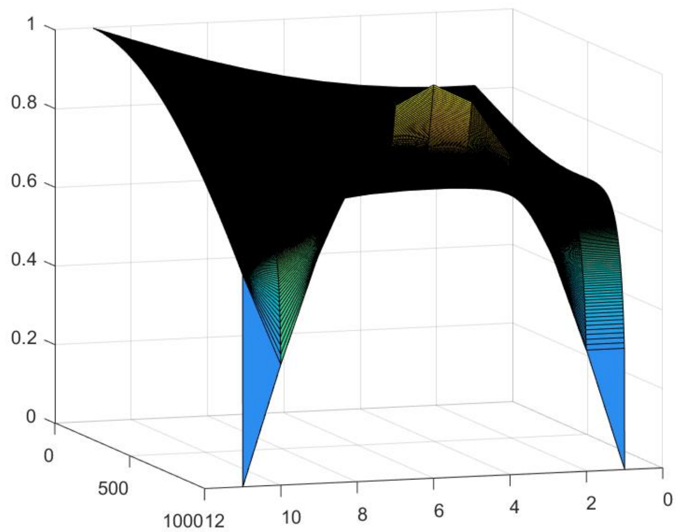
Symulacje zostaną przeprowadzone dla czterech różnych wartości współczynnika dyfuzji.



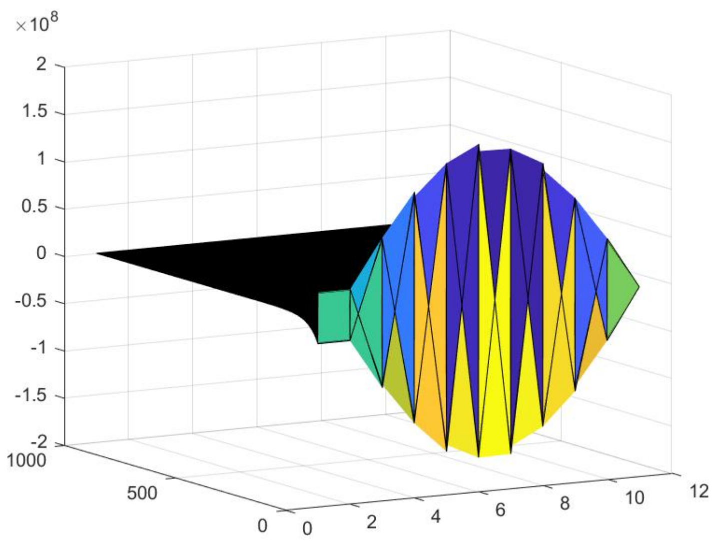
Rysunek 1: D=1



Rysunek 2: D=2



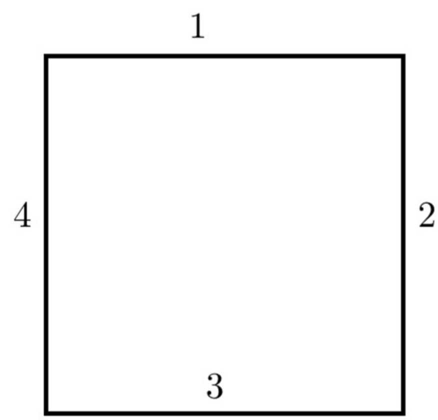
Rysunek 3: D=0.5



Rysunek 4: D=5.2

3 Kwadrat

Mamy obszar $\Omega = [0,1]^2$, który wygląda w następujący sposób:



Warunki zadane dla mojego przykładu są następujące:

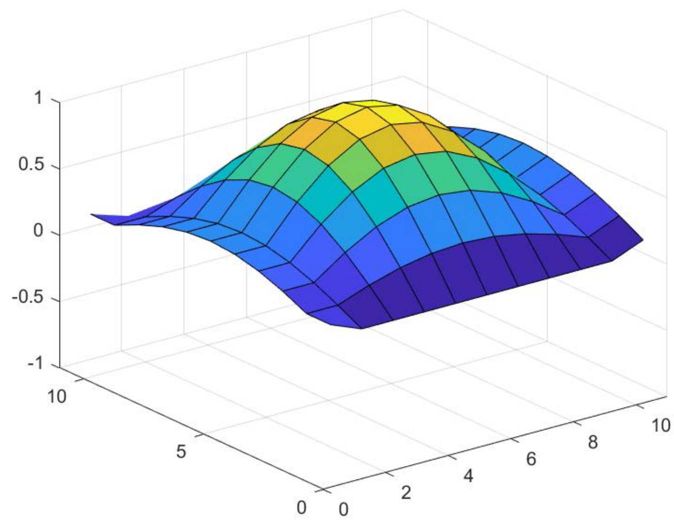
$$u_0(x) = sin(\pi x) sin(\pi y)$$

$$u_x(x,t) = cos(t) \quad \text{dla x z odcinka 1}$$

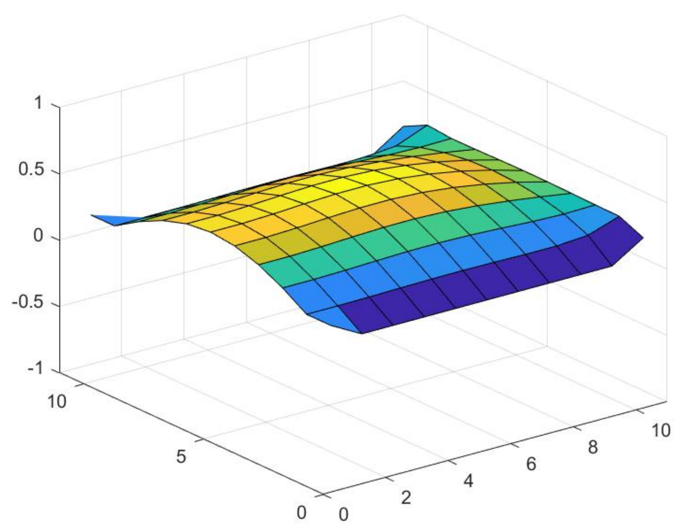
$$u_x(x,t) = 0 \quad \text{dla x z odcinków 3 i 4}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{dla x z odcinka 2}$$

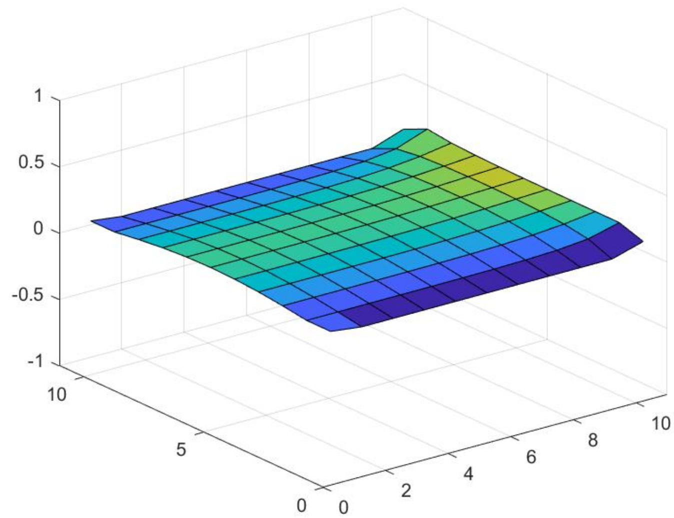
Symulacje wykonam dla współczynnika dyfuzji D = 1, ponieważ rezultaty dla D = 2 były bardzo podobne, natomiast dla $D \geq 3$ wykres już dla drugiego czasu był bardzo rozregulowany. Dla D = 0.5 wykres opada wolniej.



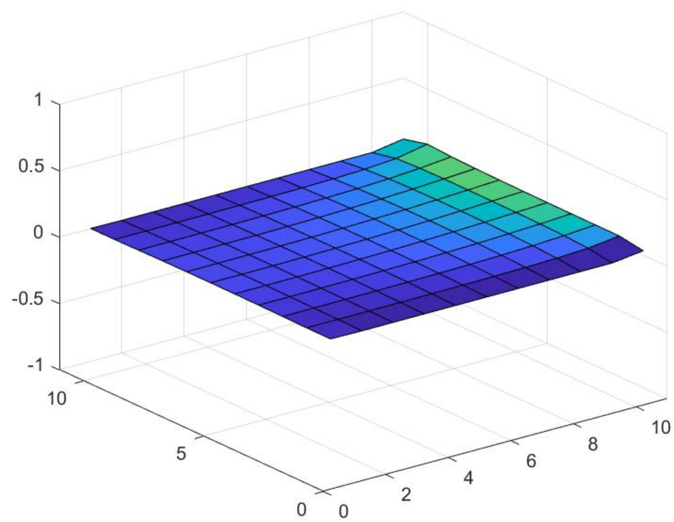
Rysunek 5: Równanie dyfuzji dla chwili t = 1



Rysunek 6: Równanie dyfuzji dla chwili t = 50



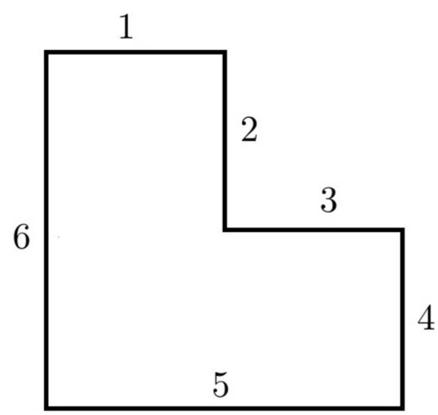
Rysunek 7: Równanie dyfuzji dla chwili t = 200



Rysunek 8: Równanie dyfuzji dla chwili t = 1000

4 Wycinek

W przypadku wycinka mamy do czynienia z obszarem $\Omega = [0,2]^2 \setminus (1,2]^2$, wyglądającym następująco:



Warunki dla mojego przypadku są zadane w następujący sposób:

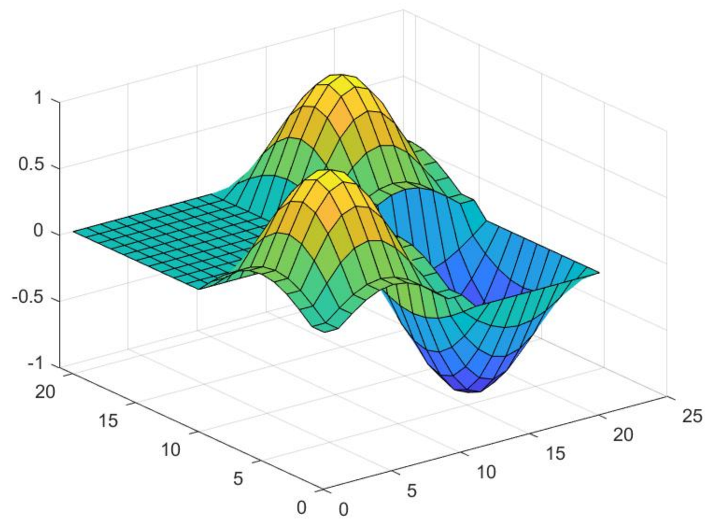
$$u_0(x) = sin(\pi x)sin(\pi y)$$

$$u_x(x,t) = cos(t) \quad \text{dla x z odcinka 1}$$

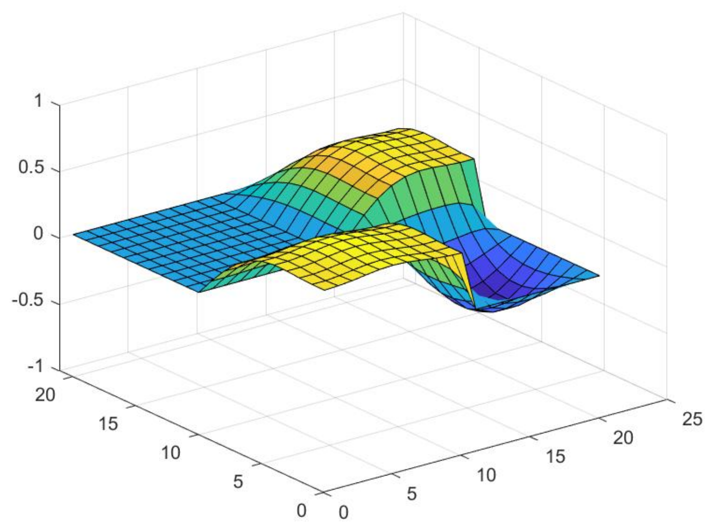
$$u_x(x,t) = 0 \quad \text{dla x z odcinków 2, 3, 4, 6}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{dla x z odcinka 3}$$

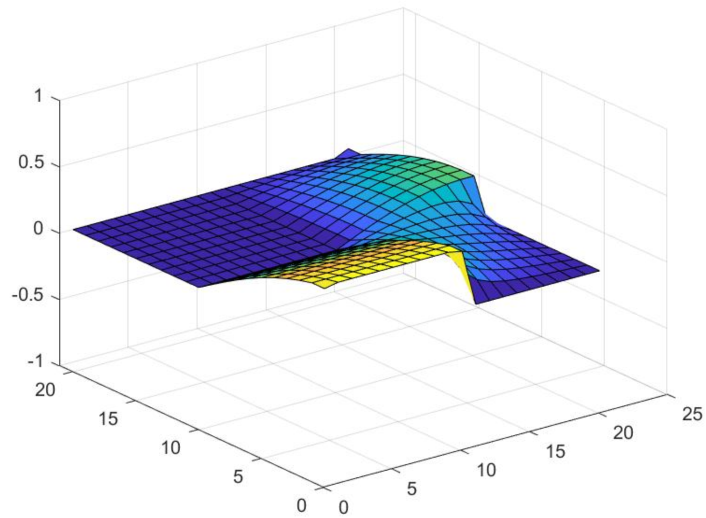
Podobnie jak w przypadku kwadratu symulacje zostaną przeprowadzone dla D = 1 i różnych czasów.



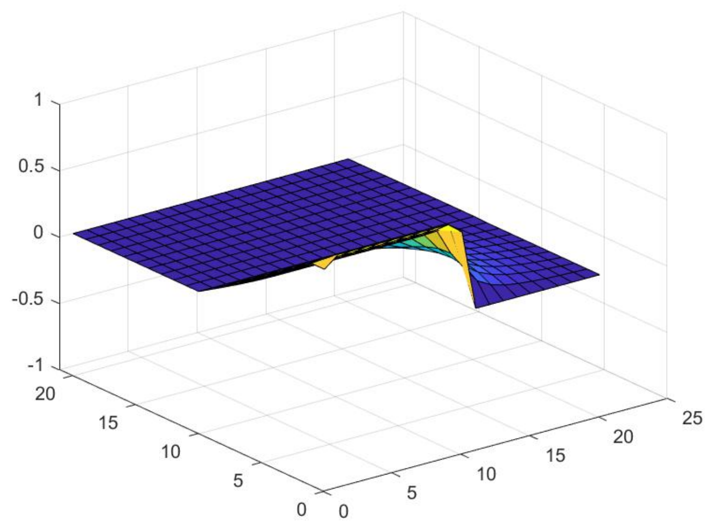
Rysunek 9: Równanie dyfuzji dla chwili t = 1



Rysunek 10: Równanie dyfuzji dla chwili t = 50



Rysunek 11: Równanie dyfuzji dla chwili t = 200



Rysunek 12: Równanie dyfuzji dla chwili t = 1000