

# CANA

## Lista 01

Victor Campos

1. Mostre que, se  $c$  é uma constante real positiva, então  $g(n) = 1 + c + c^2 + \dots + c^n$  é
  - (a)  $\Theta(1)$ , se  $c < 1$ ;
  - (b)  $\Theta(n)$ , se  $c = 1$ ;
  - (c)  $\Theta(c^n)$ , se  $c > 1$ .
2. Se  $F_n$  é o  $n$ -ésimo número de Fibonacci, então:
  - (a) Use indução para provar que  $F_n \geq 2^{0,5n}$  para  $n \geq 6$ .
  - (b) Encontre uma constante  $c < 1$  tal que  $F_n \leq 2^{cn}$ , para todo  $n \geq 0$ . Mostre que sua resposta está correta.
  - (c) Qual a maior constante  $c$  em que temos  $F_n = \Omega(2^{cn})$ ? Justifique sua resposta.
3. Reescreva os algoritmos MERGE e MERGESORT como descritos a seguir.

**Alg:**        **MERGESORT**( $A, i, j$ )  
**Entrada:**   vetor  $A$ , índices  $i$  e  $j$   
**Saída:**     permuta os elementos no subvetor  $A[i, \dots, j]$  para que esteja ordenado

**Alg:**        **MERGE**( $A, i, k, j$ )  
**Entrada:**   vetor  $A$ , índices  $i, k$  e  $j$  tais que os subvetores  $A[i, \dots, k]$  e  $A[k+1, \dots, j]$  estão ordenados  
**Saída:**     permuta os elementos no subvetor  $A[i, \dots, j]$  para que esteja ordenado
4. Escreva um algoritmo que realiza  $O(\log n)$  multiplicações de matrizes para calcular  $F_n$ , para qualquer  $n$  natural, usando a fórmula

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

5. Seja  $A[1, \dots, n]$  um vetor com  $n$  números distintos. Dizemos que um par  $(i, j)$  é uma **inversão** de  $A$  se  $i < j$  e  $A[i] > A[j]$ . Escreva um algoritmo com complexidade  $O(n \log n)$  que calcula o número de inversões de  $A$ .
6. Dizemos que um vetor  $A[1, \dots, n]$  tem um *elemento majoritário* se mais da metade dos seus elementos são iguais. Dado um vetor como entrada, escreva um algoritmo com complexidade  $O(n \log n)$  para achar um elemento majoritário de um vetor e retorná-lo, ou indicar que o vetor não possui elemento majoritário. Na implementação deste algoritmo, a única operação de comparação permitida é para verificar pela igualdade entre elementos, ou seja, é possível usar  $A[i] = A[j]$ , mas não é possível usar comparações de ordem como  $A[i] < A[j]$ .