Seminário de Geometria - MA770
Construções com régua e compasso. Números construtíveis.
Prof.: Ricardo M. Martins.
Felippe Augusto Tossini Cabral, 167354.

Introdução.
Os primeiros quatros livros de *Os Elementos*, de Euclides, são livros que tratam de problemas do que chamamos de geometria elementar. E a exposição, a maneira de se escrever, as soluções desses problemas podem ser dadas por construções utilizando régua e compasso. Ou seja, as construções por régua e compasso residem no plano euclidiano. Todos os axiomas e postulados listados por Euclides valem. Para os matemáticos gregos solucionar um problema, provar uma proposição ou teorema era equivalente a construir, geometricamente, uma solução.

A régua utilizada não é graduada, apenas permite traçar uma reta passando por dois pontos ou estender uma reta dada. O compasso é utilizado para traçar circunferências dado um centro (ponta seca) e um raio (abertura do compasso), mas também pode ser utilizado para transportar segmentos. Os matemáticos gregos não consideravam réguas graduadas e transferidores ideais, apenas aproximados. Porque do ponto de vista dos matemáticos da época o que vali era a idealização da solução de um problema e não a precisão da construção (idealização matemática de Platão).

Como a utilização desse método na resolução de problemas tanto algébricos como geométricos algumas escolas gregas acreditavam que todo problema tinha uma solução dada por uma construção por régua e compasso (chamada solução “pura”). E a partir daí vieram problemas que se mostravam de extrema complexidade para se determinar a solução geométrica usual da época, como a duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo. Daí entramos no conceito dos construtíveis como veremos.

Princípios básicos e construções elementares.
Nas construções com régua e compasso os axiomas da geometria euclidiana valem, porém vamos usar principelmente os seguintes:

Axioma 1: Sejam A e B dois pontos distintos. Podemos traçar única reta que passa por A e B.

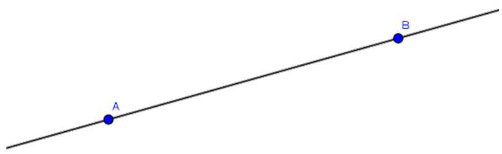

Figura 1. Reta que passa por A e B.

Axioma 2: Dado um segmento de medida r e um ponto C, traçamos uma circunferência de raio r e centro em C.

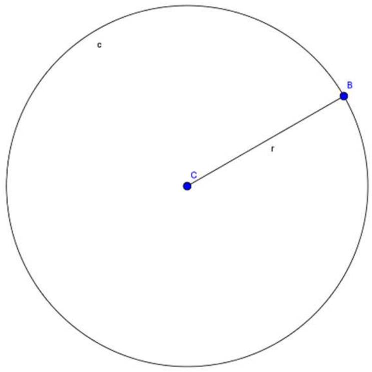

Figura 2. Circunferência de raio r e centro C.

A partir desses axiomas podemos começar com umas construções básicas.

1. **Mediatriz**
   Sejam A e B pontos distintos de uma reta r, encontrar o ponto médio do segmento AB.

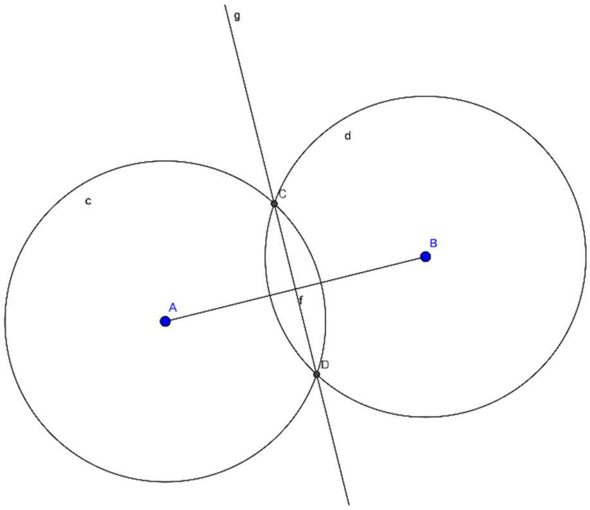

Figura 3. Mediatriz do segmento AB, a interseção de AB com CD é o ponto médio.

Construção: Dado um AB numa reta r traçamos um circunferência de centro A e raio maior que a metade do segmento AB, do mesmo modo, traçamos um circunferência de centro B e mesmo raio. A os dois pontos de interseção ligados formam a mediatriz, que é perpendicular, de AB, e o ponto comum entre a mediatriz e o segmento é o ponto médio de AB.

2. **Bissetriz**
   Sejam r e s retas concorrentes num ponto C, dividir o ângulo rCs em dois ângulos congruentes.

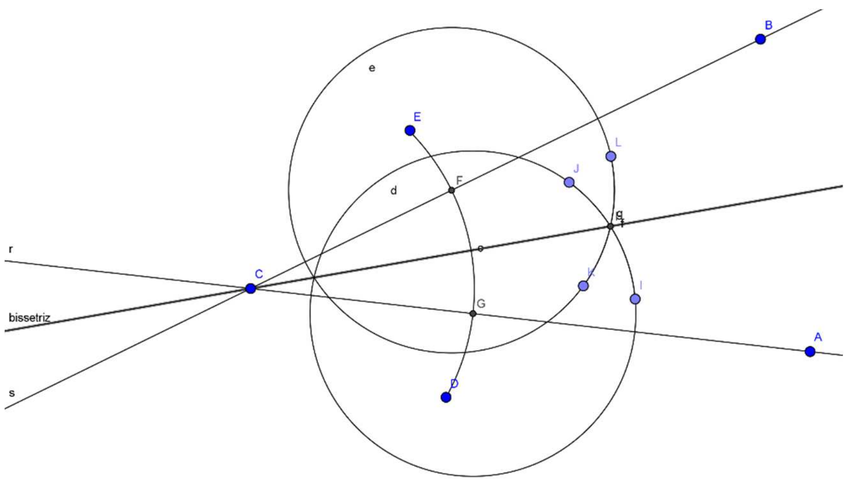

Figura 4. Bissetriz de um ângulo.

Construção: Traçamos um arco de circunferência de raio qualquer de centro em C, daí F e G são as interseções de s e r com o arco, respectivamente. Com centro em G, e um raio maior que a metade do segmento FG, traçamos o arco IJ e de modo análogo com centro em F e mesmo raio traçamos o arco LK. Ligando o ponto C e a interseção dos arcos IJ e LK (ponto M) temos a bissetriz do ângulo $F\hat{C}G$. Fato importante: as distâncias entre M e a reta r e M e a reta s são iguais.

3. **Paralelas**
Seja r um reta e P um ponto fora da reta. Encontrar a reta paralela a r passando por P.

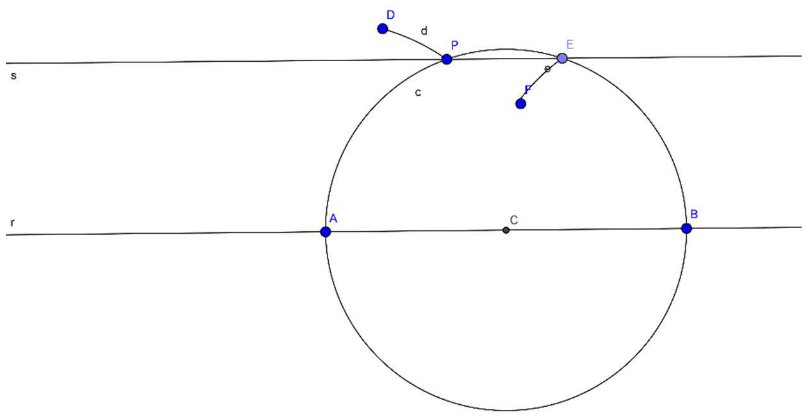

Figura 5. Reta s paralela à reta r, passando por P.

Construção: Na reta r traçamos a circunferência de raio CP e centro em C, sendo C um ponto qualquer de r. Daí obtemos A e B pontos comuns entre r e a circunferência. Tomando o segmento AP traçamos o arco EF onde E é a interseção do arco com a circunferência, então ligando os pontos P e E temos a reta s que é paralela à reta r.

Construções em triângulos.

1. **Incentro**
Seja ABC um triângulo qualquer, determinar a circunferência inscrita no triângulo.

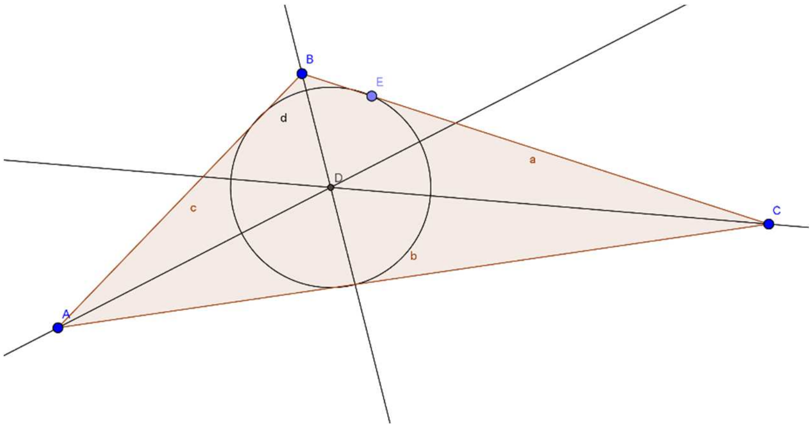

Figura 6. O ponto D é o incentro do triangulo ABC.

Construção: traçando as bissetrizes dos ângulos Â e Ĉ temos um ponto de interseção D. então como D pertence às duas bissetrizes temos que a distância entre D e os lados AB, AC e CB são iguais. Então como a distância de D até BA e de D até BC são iguais, D pertence a bissetriz do ângulo B. Então se tomarmos o centro em D e raio do tamanho da distância de D até AB (por exemplo) traçamos uma circunferência interna ao triangulo e que tangencia todos os seus três lados.

2. **Baricentro**
   Seja ABC um triângulo qualquer, encontrar o baricentro (centro de gravidade) do triângulo.

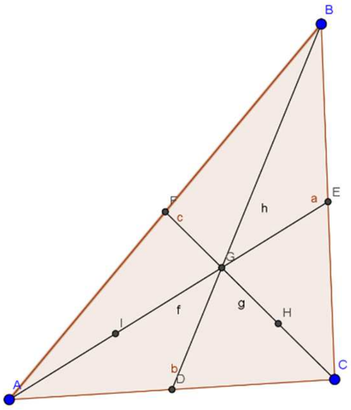

Figura 7. O ponto G, centro de gravidade, é o encontro das medianas.

Construção: traçando as mediatrizes dos segmentos AB, BC e CA temos os pontos médios F, E e D, respectivamente. Traçamos então as medianas, segmentos que ligam um vértice ao ponto médio do lado oposto. Como BF=AF e BE=CE temos que EF é paralelo à AC e que EF=(AC)/2. Sendo G o ponto de encontro das medianas AE e CF e tomando H e I pontos médios de GC e GA respectivamente temos que, de modo análogo ao anterior, HI é paralelo à AC e HI=(AC)/2, então temos que EFIH é um paralelogramo, pois EF=IH=AC/2 e EF//HI. O que implica EG=GI e FG=GH. Então vemos que o encontro de duas medianas as divide numa proporção de um terço e dois terços.
Agora baixando a mediana BD, vamos supor que BD intercepta a mediana CF num ponto X. Daí podemos aplicar o mesmo processo anterior de modo a obter segmentos tais que BX=2XD e CX=2XF, pelo resultado anterior temos então que X=G, logo as três medianas se interceptam num mesmo ponto que as divide numa proporção de um terço e dois terços.

3. **Circuncentro**
   Sejam A,B e C três pontos não colineares. Determinar a circunferência que passa por A,B e C.

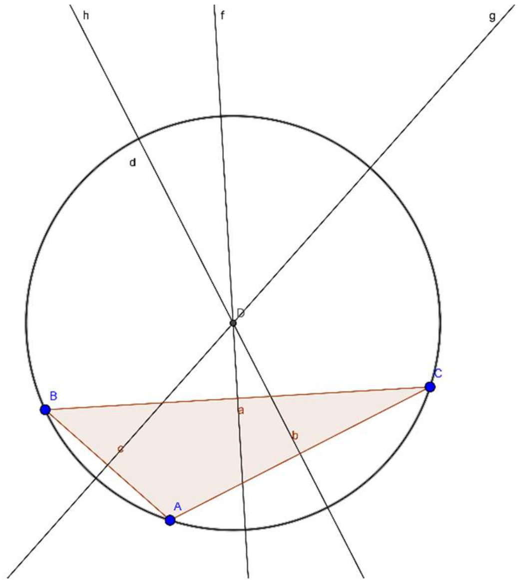

Figura 8. Circunferência determinada pelos pontos A, B e C não colineares.

Construção: traçando as mediatrizes dos segmentos AB e AC temos que a interseção é o ponto D. Daí temos que os triângulos BDA e CDA são isósceles =, ou seja, BD=AD e como os triângulos tem o lado AD em comum então BD=AD=DC. Temos então que o triangulo BDC é isóscele então sua mediatriz passa pelo ponto D. Logo podemos traçar uma circunferência de raio DC e centro em D que passa pelos três pontos.

Definição números construtíveis.

Um segmento é construtível se pode ser obtido a partir de um número finito de construções utilizando os axiomas 1 e 2. Um real a é dito construtível se: a=0 ou a>0 e um segmento de medida a é construtível ou ainda a<0 e um segmento de medida -a é construtível. Tudo a partir de uma unidade pré-definida.

Teorema: $Sejam\ a\ e\ b\ números\ construtíveis, então\ a+b, a-b,\ \frac{a}{b}, ab\ e\ \sqrt{a}$ $são\ construtíveis.$

Tomemos um segmento qualquer como a unidade e dois segmentos tais que AB=a e CD=b.
Então temos as seguintes construções:
Tomemos o segmento AB, daí na reta suporte de AB traçamos CD de modo que B=C como na figura. Então traçamos a circunferencia de centro em B e raio CD, obtendo assim o ponto E.

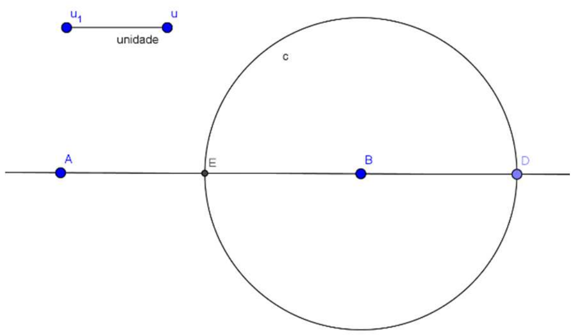

Figura 9. Construção a+b, a-b.

Assim temos que AE=a-b e AD=a+b, então a+b e a-b são ambos construtíveis.

Agora tomamos a reta suporte de AB, e por A passa uma reta qualquer tal que C pertence a essa reta e AC=unidade. Então traçamos o segmento CD nessa retal onde AD=b (na figura assumimos que b>1). Tomando a reta qu passa por C e B e sua paralela que passa por D e intercepta a reta suporte de AB num ponte E temos por semelhança: (AC/AD)=(AB/AE), daí, 1/b=a/(AP) o que implica em a.b=AP, logo a.b é construtível.

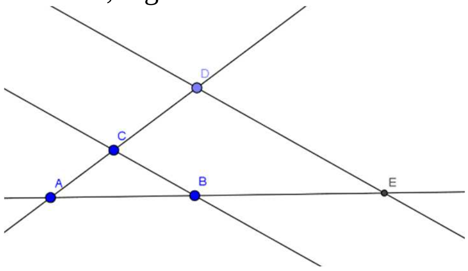

Figura 10. Construção a.b.

Ainda nas condições anteriores se tomarmos a reta que passa por D e B e tomando sua paralela que passa por C temos por semelhança (figura abaixo) que: (AD/AC)=(AB/AE), o que implica em, b/1=a/AQ, logo, a/b=AQ construtível.

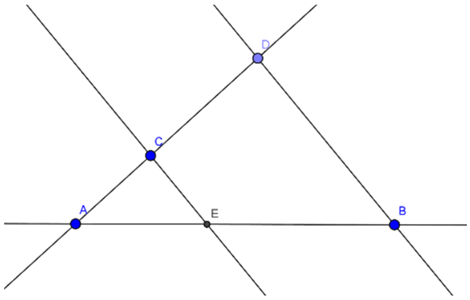

Figura 11. Construção a/b.

Tomando o segmento AB=a traçamos na reta suporte de AB e o ponto C na reta talque BC=unidade. Então traçamos a semi-circunferência de centro em M, ponto médio de AC, e centro em M. traçando a perpendiular de AC passando por B temos o ponto D na interseção dessa perpendicular com a semi-circunferência. Sabemos que o triangulo é retangulo em D, dái pelas propriedades métricas do triangulo retangulo temo que $(BD)^2=(AB)(BC)$. Então $(BD)^2=(a)(1)$, assim, BD=$\sqrt{a}$. O que nos mostra que $\sqrt{a}$ é construtível.

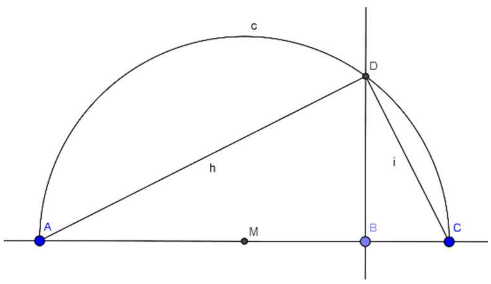

Figura 12. Construção $\sqrt{a}$.

Números não construtíveis

Sem muitos detalhes da teoria algébrica de extensão do corpo dos racionais, tomemos o seguinte teorema como válido:

Teorema: se um número a é construtível temos que (1) a é algébrico, (2) o grau do polinômio mínimo sobre os inteiros (Q), também dito irredutível, é uma potência de 2.

Agira avaliemos o problema da duplicação do cubo, um problema da geometria clássica, que consiste em duplicar o volume de um dado cubo de aresta a. Então,
$V_1 = a^3 e\ V_2 = 2(a)^3$. Seja l a aresta do novo cubo daí,

$$V_2 = 2(a)^3 = l^3 \rightarrow l = a\sqrt[3]{2}$$

Temos que l é construtível se $\sqrt[3]{2}$ é construtível. Mas o polinômio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ é: $irr(\sqrt[3]{2}, Q) = x^3 - \sqrt[3]{2}$, vemos que o grau do polinômio é 3, então $\sqrt[3]{2}$ não é construtível. Logo não é possível duplicar o cubo.

Referências.

Introdução (livros):
Howard Eves. Introdução à história da matemática. 2011.
Rogério S. Mol. Introdução à história da matemática. 2013
José L.R. Pinho, Eliezer Batista, Neri T.B. Carvalho. Geometria I. 2010.

Construções elementares (material/teses do PROFMAT):
Alex G. da Silva. Construções geométricas com régua e compasso. 2013.
Eduardo Wagner. Uma introdução às construções geométricas. 2015.

Material da UFV, departamento de arquitetura e urbanismo:
ALBRECHT, Clarissa e OLIVEIRA, Luiza - Desenho Geométrico. Viçosa, 2012.

Números construtíveis:
Bruno Suzuki, Daniel G. Fadel. Números construtíveis e construções com régua e compasso. Campinas. 2014.
Luís P. da Silva Júnior. Construções geométricas por régua e compasso e números construtíveis. Campinas Grande. 2013. PROFMAT.
Valderi C. da Costa. Números construtíveis. Campina Grande. 2013. PROFMAT.