

Construções com régua e compasso

Nelson Alexandre Vieira Ramalho

Universidade Federal do Amazonas - 2020

28 de setembro de 2020

Operações fundamentais

As operações que podem ser feitas com esses instrumentos são chamadas de construções fundamentais; elas são:

- (1) Dados 2 pontos, podemos traçar uma linha através deles, estendendo-o indefinidamente em cada direção.
- (2) Dados 2 pontos, podemos traçar o segmento de linha conectando-os.
- (3) Dado um ponto e um segmento, podemos traçar um círculo com centro no ponto e de raio igual ao comprimento do segmento.

Para trabalharmos com estes instrumentos, vamos definir um conjunto inicial, e a partir desse conjunto podemos obter novos pontos construtíveis. Tal conjunto deve conter pelo menos dois pontos distintos. Sendo $P_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ o conjunto inicial para prosseguirmos com as construções.

Definição

Seja $P \subset \mathbb{R}^2$, contendo pelo menos dois pontos distintos, dizemos que uma reta é construtível em P se dois pontos de P pertencem a reta. E uma circunferência é construtível em P se o centro e um ponto da circunferência estão em P .

Tendo isso em vista, podemos obter novos pontos a partir das operações elementares:

(I) Interseção de duas retas construídas.

(II) Interseção de uma reta construída e uma circunferência construída.

(III) Interseção de duas circunferências construídas.

Definição: Um ponto é construtível se é possível determiná-lo a partir de uma sequência finita das operações elementares.

Exemplo: Se $P = P_0 = \{(0, 0), (0, 1)\}$, então, como na figura abaixo, os pontos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são construtíveis em P , onde $A_1 = (-1, 0)$, $A_2 = (2, 0)$, $A_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $A_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Lema 1: Dados um segmento de tamanho 1 (unitário), a e b , é possível construir os segmentos de tamanhos:

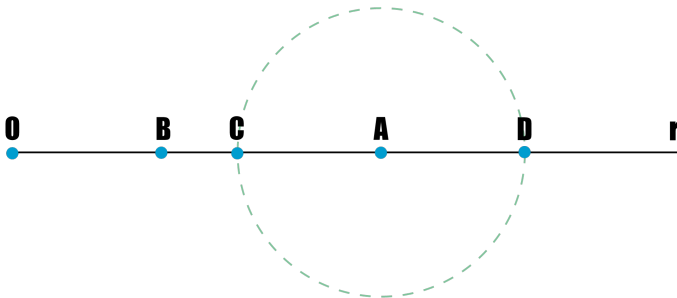
1) $a + b$ e $a - b$, quando $a > b$.

2) $a \cdot b$.

3) $\frac{a}{b}$, quando $b \neq 0$.

Demonstração

1) Sejam O , A e B pontos na reta r , tal que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. Traçando uma circunferência com centro em A e de raio b , obteremos dois pontos de interseção da circunferência com a reta r , chamaremos de ponto C o ponto à esquerda de A e chamaremos de ponto D o ponto à direita de A . O segmento \overline{OD} tem tamanho $a + b$ e o segmento \overline{OC} tem tamanho $a - b$.

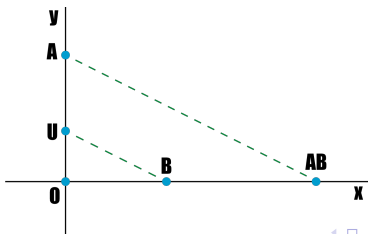


Demonstração

2) Sejam O , U , A e B pontos no plano, como na figura abaixo, tal que, $\overline{OU} = 1$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Traçando o segmento \overline{UB} , obtemos um triângulo UOB . A partir de A , traçamos uma segmento paralelo ao segmento \overline{UB} , a interseção desse novo segmento com o eixo x , chamaremos de ponto \overline{AB} . Pela semelhança de triângulos:

$$\frac{a}{1} = \frac{\overline{OAB}}{b}$$

organizando, temos: $\overline{OAB} = a \cdot b$

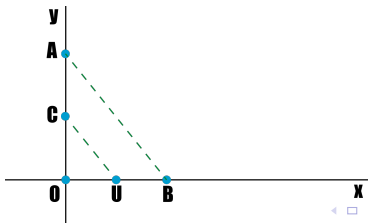


Demonstração

3) Sejam O , U , A e B pontos no plano, como na figura abaixo, tal que, $\overline{OU} = 1$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Traçando o segmento \overline{AB} , obtemos um triângulo AOB . A partir o ponto U , traçamos um segmento paralelo ao segmento AB , a interseção desse novo segmento com o eixo y , chamaremos de ponto C . Pela semelhança de triângulos:

$$\frac{1}{b} = \frac{\overline{OC}}{a}$$

organizando, temos: $\overline{OC} = \frac{a}{b}$



O corpo dos números construtíveis

Lema 2: Sejam os segmentos de tamanhos 1 e a , então o segmento \sqrt{a} pode ser construído.

Números da forma $a + b\sqrt{k}$

Referências



Adilson Gonçalves.

Introdução à Álgebra.

IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

Charles Robert Hadlock.

Field theory and its classical problems.

Cambridge University Press, 2000.