# Construções com régua e compasso

Nelson Alexandre Vieira Ramalho

Universidade Federal do Amazonas - 2020

28 de setembro de 2020

# Operações fundamentais

As operações que podem ser feitas com esses instrumentos são chamadas de construções fundamentais; elas são:

(1) Dados 2 pontos, podemos traçar uma linha através deles, estendendo-o indefinidamente em cada direção.

(2) Dados 2 pontos, podemos traçar o segmento de linha conectando-os.

(3) Dado um ponto e um segmento, podemos traçar um círculo com centro no ponto e de raio igual ao comprimento do segmento.

Para trabalharmos com estes instrumentos, vamos definir um conjunto inicial, e a partir desse conjunto podemos obter novos pontos construtíveis. Tal conjunto deve conter pelo menos dois pontos distintos. Sendo $P_0 = \{(0,0),(1,0)\}$ o conjunto inicial para prosseguirmos com as construções.

### Definição

*Seja $P \subset \mathbb{R}^2$, contendo pelo menos dois pontos distintos, dizemos que uma reta é construtível em $P$ se dois pontos de $P$ pertencem a reta. E uma circunferência é construtível em $P$ se o centro e um ponto da circunferência estão em $P$.*

Tendo isso em vista, podemos obter novos pontos a partir das operações elementares:

(I) Interseção de duas retas construídas.

(II) Interseção de uma reta construída e uma circunferência construída.

(III) Interseção de duas circunferências construídas.

Para trabalharmos com estes instrumentos, vamos definir um conjunto inicial, e a partir desse conjunto podemos obter novos pontos construtíveis. Tal conjunto deve conter pelo menos dois pontos distintos. Sendo $P_0 = \{(0,0),(1,0)\}$ o conjunto inicial para prosseguirmos com as construções.

Definição: Um ponto é construtível se é possível determina-lo a partir de um sequencia finita das operações elementares.

Exemplo: Se $P = P_0 = \{(0,0),(0,1)\}$, então, como na figura abaixo, os pontos $A_1$, $A_2$, $A_3$ e $A_4$ são construtíveis em $P$, onde $A_1 = (-1,0)$, $A_2 = (2,0)$, $A_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $A_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Lema 1: Dados um segmento de tamanho 1 (unitário), $a$ e $b$, é possível construir os segmentos de tamanhos:

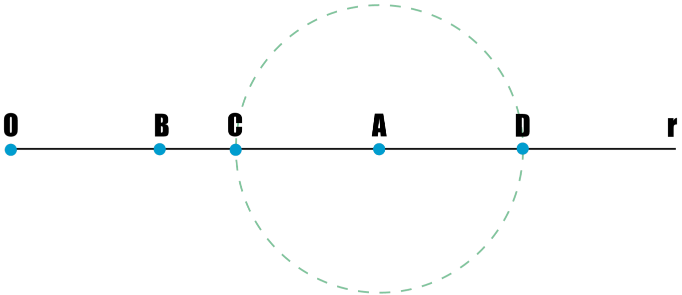
1) $a+b$ e $a-b$, quando $a>b$.

2) $a \cdot b$.

3) $\dfrac{a}{b}$, quando $b \neq 0$.

## Demonstração

*1) Sejam $O$, $A$ e $B$ pontos na reta $r$, tal que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$ .Traçando uma circunferência com centro em $A$ e de raio $b$, obteremos dois ponto de interseção da circunferência com a reta $r$, chamaremos de ponto $C$ o ponto à esquerda de $A$ e chamaremos de ponto $D$ o ponto à direita de $A$. O segmento $\overline{OD}$ tem tamanho $a + b$ e o segmento $\overline{OC}$ tem tamanho $a - b$.*

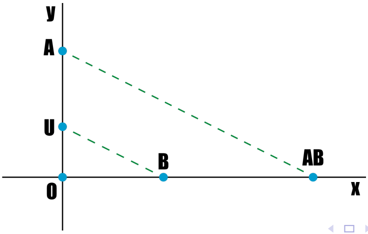


## Demonstração

*2) Sejam O, U, A e B pontos no plano, como na figura abaixo, tal que,* $\overline{OU} = 1$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. *Traçando o segmento* $\overline{UB}$, *obtemos um triângulo UOB. A partir de A, traçamos uma segmento paralelo ao segmento* $\overline{UB}$, *a interseção desse novo segmento com o eixo x, chamaremos de ponto* $\overline{AB}$. *Pela semelhança de triângulos:*

$$\frac{a}{1} = \frac{\overline{OAB}}{b}$$

*organizando, temos:* $\overline{OAB} = a \cdot b$

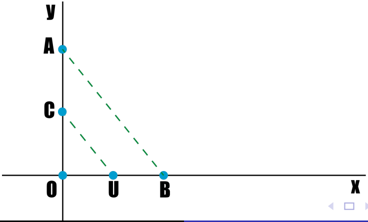


## Demonstração

*3) Sejam O, U, A e B pontos no plano, como na figura abaixo, tal que,* $\overline{OU} = 1$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. *Traçando o segmento* $\overline{AB}$, *obtemos um triângulo* $AOB$. *A partir o ponto U, traçamos um segmento paralelo ao segmento AB, a interseção desse novo segmento com o eixo* $y$, *chamaremos de ponto* $C$. *Pela semelhança de triângulos:*

$$\frac{1}{b} = \frac{\overline{OC}}{a}$$

*organizando, temos:* $\overline{OC} = \dfrac{a}{b}$



# Referências

Adilson Gonçalves.
*Introdução à Álgebra*.
IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

Charles Robert Hadlock.
Field theory and its classical problems.
Cambridge University Press, 2000.