Técnicas de Simulación en Computadoras en LaTeX

Nelson Castro

April 21, 2019

Parte I

Dos palmeras se encuentran conectadas a través de una soga hecha de vibrano. Mr. Kwai quiere utilizar esta soga como tendedero, pero para ello necesita conocer la capacidad de absorción (α) de energía de la soga en cada uno de sus puntos.

Mr.Kwai sabe que dicho problema físico es controlado por la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)$$

Haciendo pruebas, Mr. Kwai sabe que al inicio de la soga la capacidad de absorción es igual a 8, y sabe también que al final de la soga la tasa de cambio de la capacidad de absorción es igual a -2.

Usted debe ayudarle a Mr. Kwai a resolver este problema modelando la soga en una dimensión y aplicando el Método de los Elementos Finitos, utilizando:

- 4 elementos de igual longitud.
- Fundiones de forma lineales.
- El método de Galerkin.

No es necesario calcular la inversa de la matriz de coeficientes final, sólo deje indicado el sistema final.

Asuma que el inicio de la soga se encuentra en la posición $x = 0$ y que la soga tiene una longitud de 2 metros.

Recuerde que las N_i a utilizar son: $N_1 = \dfrac{x_2 - x}{l}$ y $N_2 = \dfrac{x - x_1}{l}$

Solución

Mallado

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right) = -Q$$

$$\text{donde } \alpha = [N_i \;\; N_{i+1}]\begin{bmatrix}\alpha_i \\ \alpha_{i+1}\end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\alpha} \approx \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}, \qquad \mathbf{N}_{(x)}$$

$$\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d(\mathbf{N}\boldsymbol{\alpha})}{dx}\right) \approx -Q$$

Residuos pasamos de la aproximación a igualación

$$\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d(\mathbf{N})}{dx}\boldsymbol{\alpha}\right) + Q = \xi, \qquad \xi \rightarrow \text{resto o residuo}$$

Método de los residuos ponderados $\int_\Omega \xi_i w_i d\Omega = 0$

$$\int_\Omega \mathbf{W} \cdot \left[\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d(\mathbf{N})}{dx}\boldsymbol{\alpha}\right) + Q\right] d\Omega = 0$$

$$\text{donde } N_i = \frac{x_{i+1} - x}{le} \quad y \quad N_{i+1} = \frac{x - x_i}{le}$$

$$\text{donde } \frac{d(\mathbf{N})}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx}[N_i \;\; N_{i+1}] \Rightarrow \left[\frac{dN_i}{dx} \;\; \frac{dN_{i+1}}{dx}\right] \Rightarrow \left[\left(-\frac{1}{le}\right)\left(\frac{1}{le}\right)\right]$$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix}W_i \\ W_{i+1}\end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{le} \;\; \frac{1}{le}\right]\right)\begin{bmatrix}\alpha_i \\ \alpha_{i+1}\end{bmatrix} + Q\right] d\Omega = 0$$

Método de Galerkin $\Rightarrow W_i = N_i$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{N}^t \cdot \left[\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d(\mathbf{N})}{dx}\boldsymbol{\alpha}\right) + Q\right] dx = 0 \qquad \textbf{Strong form}$$

Utilizando integración por partes $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{N}^t \cdot \left[\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(\frac{d(\mathbf{N})}{dx}\boldsymbol{\alpha}\right) + Q\right] dx = 0$$