

# Estimação e Identificação de Sistemas: Atividades 1, 2 e 3

Nelson Carlos de Sousa Campos

Setembro de 2015

# 1 Introdução

Inferir modelos e estudar suas propriedades a partir de observações é uma ferramenta muito importante para cientistas e engenheiros. Os modelos (hipóteses, leis da natureza, paradigmas, etc.) podem ser mais ou menos formais, mas eles têm características básicas que tentam relacionar as observações com algum padrão. Identificação de sistemas trata do problema de construir modelos matemáticos de sistemas dinâmicos baseado em dados observados a partir do sistema.

## 1.1 Sistemas Dinâmicos

Em termos gerais, um *sistema* é um objeto onde as diversas variáveis interagem e produzem sinais observáveis. Os sinais observados são os objetos de interesse e são usualmente chamados de *saídas*. O sistema também é afetado por estímulos externos. Sinais externos que podem ser manipulados pelo observador são denominados entradas. Outros estímulos que não podem ser controlados são chamados de *perturbações*. Existem dois tipos de perturbações: as mensuráveis e as que não são mensuráveis.

A noção de sistema é um termo muito abrangente e não é nenhuma surpresa que este conceito é de fundamental importância na ciência moderna. Muitos problemas em vários campos são solucionados em uma estrutura orientada a sistemas. Ao invés de tentar uma definição formal para o conceito de sistema, este será ilustrado em uma sequência de alguns exemplos. A Figura 1.1 ilustra o diagrama de blocos de um sistema.

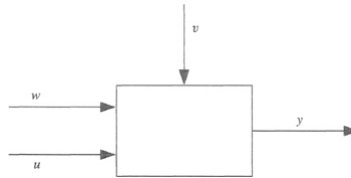


Figura 1.1: Um sistema com saída  $y$ , entrada  $u$ , perturbação mensurável  $v$  e perturbação não-mensurável  $w$

### Exemplo 1.1 Uma Casa com Aquecedor Solar

Considere uma casa com aquecedor solar conforme ilustrado na Figura 1.2. O sistema opera de tal forma que o sol aquece o ar no painel solar. O ar é então bombeado para um dispositivo de armazenamento de calor, que é uma caixa cheia com seixos. A energia armazenada pode ser transferida para a casa depois. É interessante relacionar como a radiação solar e a velocidade da bomba afetam a temperatura no aquecedor. Este sistema está simbolicamente ilustrado na Figura 1.3. A Figura 1.4 mostra a observação dos dados coletados durante um período de 50 horas. As variáveis foram amostradas a cada 10 minutos.

### Exemplo 1.2 Uma Aeronave Militar

Para o desenvolvimento de uma aeronave, uma quantidade substancial de trabalho é alocada para a construção de um modelo matemático do seu comportamento dinâmico. Isto é necessário, tanto para os simuladores, para a síntese de um piloto automático, e para a análise das suas propriedades. Introspecção física substancial é utilizada, bem como experimentos em túnel de vento, no

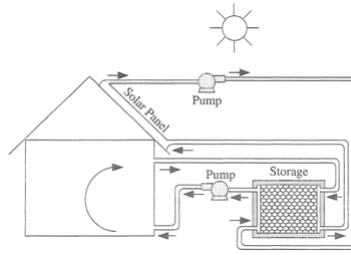


Figura 1.2: Uma Casa com Aquecedor Solar

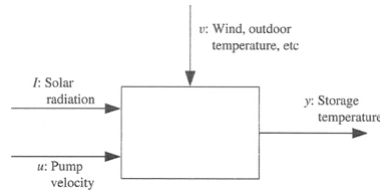


Figura 1.3: Modelo do sistema de aquecimento solar:  $u$ : entrada;  $l$ : perturbação medida;  $y$ : saída;  $v$ : perturbação não-mensurada

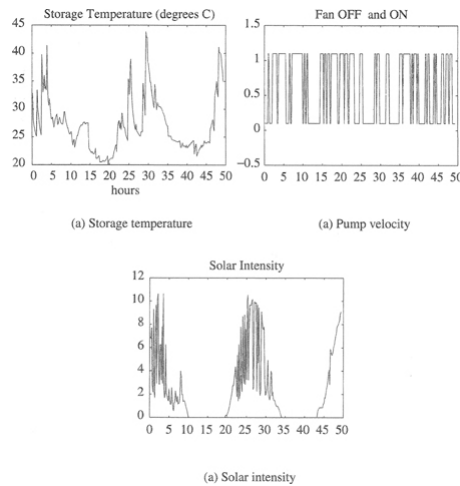


Figura 1.4: Temperatura armazenada  $y$ , velocidade da boma  $u$  e radiação solar  $l$  durante o período de 50 horas. Período de amostragem: 10 minutos.

decurso deste trabalho, e uma fonte de informação mais importante vem dos vôos de teste.

A Figura 1.5 mostra o avião sueco Gripen JAS-, desenvolvido pela SAAB AB, da Suécia, e a Figura 1.6 mostra alguns resultados de vôos de teste. Tais dados podem ser utilizados para construir um modelo do canal de campo, isto é, como a taxa de campo é afetada pelos três sinais de controle: elevador, canard e aba de vanguarda. O elevador neste caso corresponde a combinações aileron na parte traseira das asas, enquanto a sua ação separada é conseguido a partir dos ailerons no bordo de ataque (a parte dianteira das asas). Os canards são

um conjunto separado de lemes na frente das asas.



Figura 1.5: Uma aeronave sueca JAS-Gripen

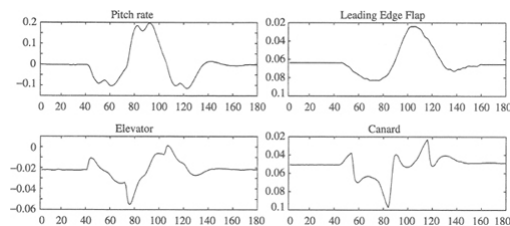


Figura 1.6: Resultados dos testes de vôo do JAS-Gripen.

### Exemplo 1.3 Fala

O som da voz humana é gerado pela vibração das cordas vocais. Na ausência de voz, os sons são gerados pelo fluxo de ar a partir da garganta, e moldados pela forma do trato vocal. O resultado deste sistema é uma vibração sonora (ou seja, a pressão do ar), mas os estímulos externos não são mensuráveis. A Figura 1.7 ilustra a formação do trato vocal. A Figura 1.8 representa um sistema de fala e os dados deste sistema são apresentados na Figura 1.9.

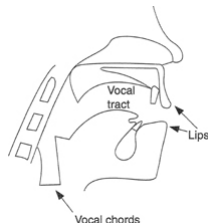


Figura 1.7: Geração de fala: o trato vocal

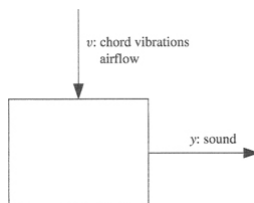


Figura 1.8: O sistema de fala:  $y$ : saída;  $v$ : perturbação não-mensurável

Os sistemas em todos estes exemplos são dinâmicos, o que significa que o valor de saída atual depende não apenas dos estímulos externos atuais, mas

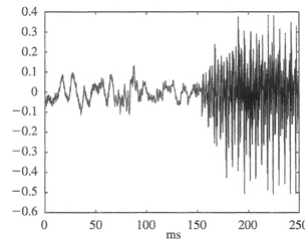


Figura 1.9: Sinal de voz amostrado em uma frequência de 8KHz

também nos seus valores anteriores. Saídas de sistemas dinâmicos cujos estímulos externos não são observados (como no Exemplo 1.3) são frequentemente chamados de *séries temporais*. Este termo é especialmente comum em aplicações econômicas. Claramente, a lista de exemplos de sistemas dinâmicos pode ser muito longa, abrangendo vários campos da ciência.

## 1.2 Modelos

Na interação com um sistema, é necessário saber como suas variáveis se relacionam entre si. Com uma ampla definição, será definido tal relacionamento assumido entre os sinais observados um modelo do sistema. Claramente, os modelos podem vir em várias formas e ser tratados com diferentes graus de formalismo matemático. O uso pretendido irá determinar o grau de sofisticação que é necessário para fazer o modelo significativo.

Para determinados sistemas, é adequado descrever suas propriedades usando tabelas e/ou gráficos numéricos. Chamar-se-á tais descrições de modelos gráficos. Sistemas lineares, por exemplo, podem ser descritos de forma única pelas suas respostas ao impulso ou degrau ou por suas funções de frequência. A representação gráfica destes modelos é amplamente utilizada para vários fins de concepção. As características não-lineares de, por exemplo, uma válvula também são bem adaptadas para ser descritas por um modelo gráfico.

Para aplicações mais avançadas, pode ser necessário o uso de modelos que descrevem as relações entre as variáveis do sistema em termos de expressões matemáticas como equações de diferença ou equações diferenciais. Modelos matemáticos podem ser ainda caracterizados por um conjunto de características (tempo discreto ou contínuo no tempo, determinístico ou estocástico, linear ou não-linear, etc.). A utilização de modelos matemáticos é inerente a todos os campos da engenharia e física. Na verdade, uma grande parte da área de engenharia trata de como fazer bons projetos com base em modelos matemáticos. Eles também são fundamentais para a simulação e previsão (predição), que é amplamente utilizado em todos os campos, incluindo as áreas não técnicas, como economia, ecologia e biologia.

O modelo utilizado numa simulação de um sistema em computador um programa. Para sistemas complexos, este programa pode ser construído por muitas sub-rotinas interligadas e tabelas de pesquisa, e pode não ser viável para resumo analiticamente como um modelo matemático.

### 1.3 Um Problema Arquétipo - Modelos ARX e o Método dos Mínimos Quadrados

Sem perda de generalidade, pode-se definir um sistema cujas entrada e saída no instante  $t$  são  $u(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente. Uma maneira simples de expressar a relação entre a entrada e a saída é dada pela *equação linear de diferenças*:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) \quad (1.1)$$

Esta representação do sistema está em tempo discreto, pois os dados observados são sempre coletadas por amostragem. É, portanto, mais fácil de se relacionar dados observados em modelos de tempo discreto.

Em (1.1) assume-se o intervalo de amostragem a ser uma unidade de tempo. Isto não é essencial, mas torna a notação mais fácil.

Uma maneira de reescrever (1.1) de maneira útil para se observar o valor da saída como uma combinação linear dos valores passados é:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) \quad (1.2)$$

Para uma notação mais compacta, definem-se os vetores:

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m]^T \quad (1.3)$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-m)]^T \quad (1.4)$$

Agora (1.2) pode ser reescrito como:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta \quad (1.5)$$

Para enfatizar que o cálculo de  $y(t)$  a partir dos valores passados (veja a expressão (1.2)) de fato depende dos parâmetros em  $\theta$ , será definida esta relação por:

$$y(\hat{t}|\theta) = \varphi(\hat{t})^T \theta \quad (1.6)$$

Agora suponha que dado um sistema onde não são conhecidos os valores em  $\theta$ , mas que foram gravadas as entradas e saídas durante o intervalo  $1 \leq t \leq N$ :

$$Z^N = \{u(1), \dots, u(N), y(1), \dots, y(N)\} \quad (1.7)$$

O Método dos Mínimos Quadrados procura pelo elemento do conjunto  $Z^N$  que minimiza a diferença entre  $y(t)$  e  $y(\hat{t}|\theta)$ :

$$\min_{\theta} = V_N(\theta, Z^N) = \min \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - y(\hat{t}|\theta))^2 \right) \quad (1.8)$$

A partir da equação (1.9), encontra-se o menor valor de  $\theta$  que satisfaz (1.8):

$$\theta_N = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \quad (1.9)$$

Uma vez que os vetores  $\varphi(t)$  são definidos, a solução da equação (1.9) pode ser facilmente encontrada por solução numérica com o Matlab.

#### Exemplo 1.4 Equação de Diferença de Primeira Ordem

Considere o modelos simples  $y(t) + ay(t-1) = bu(t-1)$ . Aplicando as equações (1.3), (1.4) e (1.9) no modelo do sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{b}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\sum y(t-1)u(t-1) \\ -\sum y(t-1)u(t-1) & \sum u^2(t-1) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\sum y(t)y(t-1) \\ \sum y(t)u(t-1) \end{bmatrix}$$

Todos os somatórios vão de  $t=1$  até  $t=N$ . Uma convenção típica é considerar os valores fora deste intervalo como sendo zero. Neste caso, considerou-se  $y(0)=0$ .

#### Exemplo 1.4 Equação de Diferença de Primeira Ordem

Considere um processo onde um aquecedor está imerso em um líquido resfriado. É possível medir:

- $v(t)$ : A tensão aplicada no aquecedor
- $r(t)$ : A temperatura do líquido
- $y(t)$ : A temperatura da bobina de aquecimento

Suponha um modelo que relaciona  $y(t)$  com  $r(t)$  e  $v(t)$ . Alguns conceitos básicos de física revelam o seguinte:

- Uma mudança na temperatura da bobina do aquecedor em um grau é proporcional à potência elétrica do aquecedor menos a perda de calor no líquido
- A potência elétrica é proporcional à  $v^2(t)$
- A perda por aquecimento é proporcional à  $y(t)-r(t)$

Sendo assim, o modelo tem a forma

$$y(t) = y(t-1) + \alpha v^2(t-1) - \beta(y(t-1) - r(t-1))$$

cujos parâmetros são:

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \text{ e } \varphi(t) = [-y(t-1) \quad v^2(t-1) \quad r(t-1)]^T$$

Os modelos com a estrutura da equação (1.6) que são lineares em  $\theta$  são chamados de regressores lineares. O vetor  $\varphi(t)$  é chamado de *vetor de regressão* e os seus componentes são os *regressores*. Tais modelos são comumente denominados de ARX.

Um modelo construído a partir dos valores observados pode diferir do modelo teórico do sistema, uma vez que as perturbações estão presentes nas medições. Partindo desta premissa, a equação (1.6) pode ser reescrita da forma:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta_0 + e(t) \quad (1.10)$$

onde  $e(t)$  é definido como um ruído branco com média nula e variância  $\lambda$ .

Sendo assim, o erro da estimativa devido as perturbações é dado por:

$$\hat{\theta}_N = R(N)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)e(t) \quad (1.11)$$

onde  $R(N) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T$

Uma vez que  $e(t)$  tem média nula, pode-se mostrar que seu valor esperado é zero. A partir deste resultado, a covariância de  $\hat{\theta}_N$  é:

$$P_N = E\hat{\theta}_N\hat{\theta}_N^T = \lambda R(N)^{-1} \quad (1.12)$$

O resultado de (1.12) pode ser entendido intuitivamente pelo fato que um ruído branco só se correlaciona consigo próprio, pois  $Ee(t)e(s) = \lambda\delta(t-s)$ .

O cálculo da matriz de covariância do estimador  $\hat{\theta}_N$  é computado a partir das propriedades de  $R(N)$ , que depende das entradas do sistema, e também do nível de ruído  $\lambda$ .

Definindo  $\bar{R} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} R(N)$ , calcula-se a matriz de covariância do estimador  $\hat{\theta}_N$  como:

$$P_N = \frac{\lambda \bar{R}^{-1}}{N} \quad (1.13)$$

A partir de (1.13) chega-se as seguintes conclusões sobre  $P_N$ :

- decai a uma taxa de  $1/N$ ;
- é proporcional a relação ruído/sinal;
- depende apenas das propriedades da variância/covariância;
- é possível manipular a entrada  $u$  de modo a minimizar  $\bar{R}^{-1}$ .

#### 1.4 O Processo de Identificação de Sistemas

Basicamente, a construção de um modelo é composta pela seguinte lista:

1. Um conjunto de dados  $Z^N$ , conforme (1.8)
2. Um conjunto de candidatos a modelos conforme (1.2), (1.3) e (1.4)
3. Uma regra de determinação dos modelos, como por exemplo o Método dos Mínimos Quadrados.

A Figura 1.10 ilustra o procedimento de identificação de sistemas.



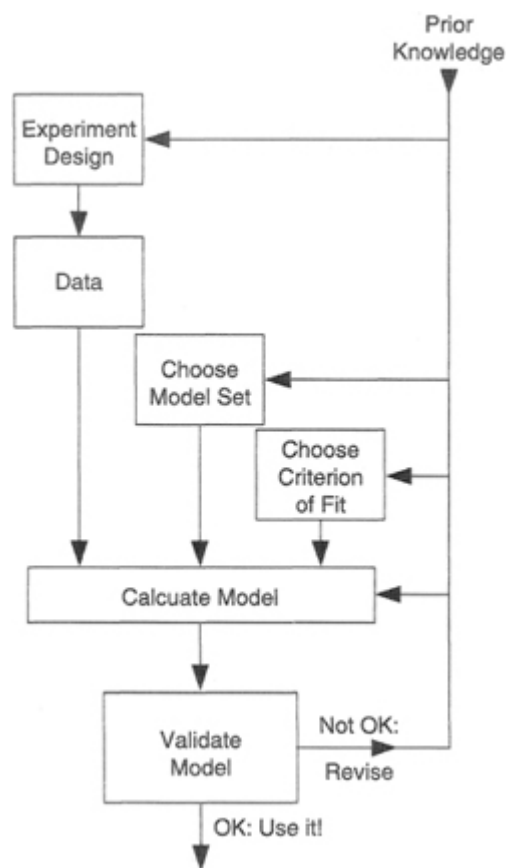


Figura 1.10: Procedimento para identificação de sistemas

## 2 Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Nesta seção serão apresentados os exemplos resolvidos do capítulo 2 do livro texto.

### Exemplo 2.1 Periodograma de uma Senóide

Suponha que  $u(t) = A \cos \omega_0 t$ ,  
onde  $\omega_0 = 2\pi/N_0$ , para alguma inteiro  $N_0 > 1$ .  
Considere o intervalo  $t = 1, 2, \dots, N$ , onde  $N$  é um múltiplo de  $N_0$  :  $N = sN_0$ .

Escrevendo

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] = u(t)/A$$

aplicando-se a equação (2.1)

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u(t) e^{-i\omega_0 t} \quad (2.1)$$

e usando o fato de que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{i2\pi rk/N} = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ 0, & \text{se } 1 \leq r < N \end{cases} \quad (2.2)$$

Obtem-se o periodograma de  $u(t)$ , que tem dois picos no intervalo de  $[-\pi, \pi]$ :

$$|U_N(\omega)|^2 = \begin{cases} N \cdot \frac{A^2}{4}, & \text{se } \omega = \omega_0 = \pm \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi s}{N} \\ 0, & \text{se } \omega = \frac{2\pi k}{N}, \quad k \neq s \end{cases} \quad (2.3)$$

### Exemplo 2.2 Periodograma de um Sinal Periódico

Suponha que  $u(t) = u(t + N_0)$ , considerando o sinal num intervalo  $[1, N]$ ,  $N = sN_0$ . De acordo com a equação (2.3), pode-se escrever  $u(t)$  conforme a equação (2.4):

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} U_N(2\pi k/N) e^{i2\pi kt/N} \quad (2.4)$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{r=-N_0/2+1}^{N_0/2} A_r e^{2\pi i t r / N_0} \quad (2.5)$$

com

$$A_r = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{t=1}^N u(t) e^{-2\pi i t r / N_0} \quad (2.6)$$

Aplicando a equação (2.4) na equação (2.1), é obtida a equação (2.7):

$$U_N(\omega) = \frac{A_r \sqrt{s}}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{r=-N_0/2+1}^{N_0/2} e^{2\pi i r t / N_0} e^{-i\omega t} \quad (2.7)$$

O periodograma é então obtido aplicando-se a equação (2.2) na equação (2.7):

$$|U_N(\omega)|^2 = \begin{cases} s |A_r|^2, & \text{se } \omega = \frac{2\pi r}{N_0}, \quad r = 0, \pm 1 \pm \dots \pm \frac{N_0}{2} \\ 0, & \text{se } \omega = \frac{2\pi k}{N}, \quad k \neq r.s \end{cases} \quad (2.8)$$

### Exemplo 2.3 Sinais Periódicos

Considere um sinal determinístico e periódico, com período  $M$ , ou seja,  $s(t) = s(t+M)$ . Sendo assim, tem-se  $E s(t) = s(t)$  e  $E s(t)s(r) = s(t)s(r)$  e:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N s(t)s(t-\tau) = \frac{M}{N} \sum_{l=0}^{K-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M s(t+lM)s(t-\tau+lM) \right\} + \frac{1}{N} \sum_{t=KM+1}^N s(t)s(t-\tau)$$

onde  $K$  é o máximo número de períodos completos, ou seja,  $N - MK < M$ . Devido à periodicidade, a soma dos termos entre as chaves não depende de  $l$ . Como há pelo menos  $M-1$  termos na última soma, isto significa que o limite quando  $N \rightarrow \infty$  existe com

$$\overline{E} s(t)s(t-\tau) = R_s(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M s(t)s(t-\tau)$$

Um sinal periódico e determinístico é quasi-estacionário.

Então  $R_s(\tau + kM) = R_s(\tau)$ .

Pela definição de espectro, tem-se:

$$\phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{i\omega\tau} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{M-1} R_s(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega lM} = \phi_s^p(\omega) \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilM\omega} = \phi_s^p(\omega) F(\omega, M)$$

$$\text{onde } \phi_s^p(\omega) = \sum_{\tau=0}^{M-1} R_s(\tau) e^{i\omega\tau}, \quad F(\omega, M) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilM\omega}$$

A função  $F$  não está bem definida, no sentido usual, mas utilizando a função delta de Dirac, e aplicando a equação (2.2), define-se  $F$  como:

$$F(\omega, M) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=1}^M \delta(\omega - 2\pi k/M), \quad 0 \leq \omega < 2\pi \quad (2.9)$$

O que implica em reescrever:

$$\phi_s(\omega) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \phi_s^p(2\pi k/M) \delta(\omega - 2\pi k/M), \quad 0 \leq \omega < 2\pi \quad (2.10)$$

$\phi_s^p(2\pi k/M)$  é o  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier do sinal periódico  $R_s(\tau)$ . O espectro é periódico com período  $2\pi$  e a equação (2.10) pode ter diferentes representações.

### Exemplo 2.4 Espectro de uma Senóide

Considere o sinal do Exemplo 2.1, agora estendido para o intervalo  $[1, \infty)$ . Assim:

$$\frac{1}{N} E u(k)u(k-\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A^2 \cos(\omega_0 k) \cos(\omega_0(k-\tau)) \quad (2.11)$$

Usando o fato de que  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ , e por consequência da equação (2.2), vem que:  $\overline{E} u(t)(t-\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) = R_u(\tau)$

O espectro é então:

$$\phi_u(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-i\omega\tau} = \frac{A^2}{4} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) 2\pi \quad (2.12)$$

### Exemplo 2.5 Processo Estocástico Estacionário

Seja  $v(t)$  um processo estocástico estacionário, com função de covariância  $R_v(\tau) = E v(t)v(t-\tau)$ . A função de covariância de  $v(t)$  é dada por  $R_v(\tau) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-\tau)$

onde  $h(r)=0$ , se  $r < 0$ .

O espectro de  $v(t)$  é dado por

$$\phi_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \lambda e^{i\tau\omega} \sum_{k=\max(0,\tau)}^{\infty} h(k)h(k-\tau) = \lambda \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\max(0,\tau)}^{\infty} h(k)e^{-ik\omega} h(k-\tau)e^{i(k-\tau)\omega} = [k-\tau=s] = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} h(s)e^{is\omega} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-k\omega} = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$

Este exemplo ilustra um importante resultado:

Dado  $v(t) = H(q)e(t)$ , onde  $e(t)$  é um ruído branco com  $N(0, \lambda)$ , então o espectro de  $v(t)$  é:

$$\phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$

### Exemplo 2.6 Espectro de um Sinal Composto por Sinal Determinístico e um Sinal Estocástico

Seja  $s(t) = u(t) + v(t)$ , onde  $u(t)$  é um sinal determinístico com espectro  $\phi_u(\omega)$  e  $v(t)$  é um processo estocástico estacionário com média zero e espectro  $\phi_v(\omega)$ . Então

$$\overline{E}s(t)s(t-\tau) = \overline{E}u(t)u(t-\tau) + \overline{E}u(t)v(t-\tau) + \overline{E}v(t)u(t-\tau) + \overline{E}v(t)v(t-\tau) = R_u(\tau) + R_v(\tau)$$

pois  $\overline{E}v(t)u(t-\tau) = 0$ . Logo,

$$\phi_s(\omega) = \phi_u(\omega) + \phi_v(\omega) \quad (2.13)$$

### Exemplo 2.7 Processos ARMA

Se um processo estacionário  $v(t)$  tem espectro racional  $\phi_v(\omega)$ , então pode-se representar

$$v(t) = R(q)e(t) \quad (2.14)$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco com variância  $\lambda$ .  $R(q)$  é uma função racional

$$R(q) = \frac{C(q)}{A(q)} = \frac{1+c_1q^{-1}+\dots+c_{n_c}q^{-n_c}}{1+a_1q^{-1}+\dots+a_{n_a}q^{-n_a}}$$

Assim,  $v(t)$  pode ser escrita como

$$v(t) + a_1v(t-1) + \dots + a_{n_a}v(t-n_a) = e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c) \quad (2.15)$$

Esta representação é conhecida como modelo *ARMA* (*Autoregressive-Moving-Average Model*). Se  $n_c = 0$ , tem-se um *modelo auto-regressivo (AR)*. Se  $n_a = 0$ , tem-se então um *modelo de média móvel (MA)*.

A fatorização do espectro é um conceito muito importante, pois fornece informação das propriedades da perturbação a partir do seu espectro.

#### Problema 2.E1

Um processo estocástico estacionário tem o espectro

$$\phi_v(\omega) = \frac{1.25 + \cos\omega}{1.64 + 1.6\cos\omega}$$

Descreva  $v(t)$  como um processo ARMA.

#### Solução:

Como  $v(t)=R(q)e(t)$  é um processo estocástico estacionário, então

$$\phi_v(\omega) = \lambda |R(e^{i\omega})|^2$$

$$\text{onde } R(q) = \frac{1+c_1q^{-1}}{1+a_1q^{-1}}$$

$$\text{Fazendo } q^{-1} = e^{i\omega},$$

$$R(e^{i\omega}) = \frac{1+c_1e^{i\omega}}{1+a_1e^{i\omega}}$$

$$|R(e^{i\omega})|^2 = \frac{\frac{1+c_1^2}{2c_1} + \cos\omega}{\frac{1+a_1^2}{2c_1} + \frac{a_1}{c_1}\cos\omega}$$

A partir de  $|R(e^{i\omega})|^2$  obtém-se a variância de  $e(t)$  como sendo  $\lambda = 1$ . Comparando as expressões de  $\phi_v(\omega)$  e resolvendo o sistema de equações nas incógnitas

$a_1$  e  $c_1$ , são obtidos dois possíveis processos ARMA que contém o espectro da questão 2E.1:

Processo ARMA 1:  $v(t) + 1.25v(t-1) = e(t) + 0.78125e(t-1)$

Processo ARMA 2:  $v(t) + 0.8v(t-1) = e(t) + 0.5e(t-1)$

**Problema 2E.7**

Considere um sistema dado por  $y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$  onde  $u(t)$  e  $e(t)$  são ruídos brancos independentes com variâncias  $\mu$  e  $\lambda$  respectivamente.

Åstrom propôs em 1970 um algoritmo para calcular a covariância de um processo  $R_s(\tau)$  com a seguinte fórmula:

$$R_s(0) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^n \frac{(c_k^y)^2}{a_0^k}$$

Sendo assim, uma maneira simples de se computar a matriz de covariância de  $y(t)$  é multiplicar  $y(t)$  por  $e(t)$ ,  $e(t-1)$ ,  $u(t)$ ,  $u(t-1)$ ,  $y(t)$  e  $y(t-1)$  respectivamente e aplicar o valor esperado nos produtos. Logo, são obtidas as seguintes expressões:

$$R_{ye}(0) = Ey(t)e(t) = E[-ay(t-1)e(t) + bu(t-1)e(t) + e^2(t) + ce(t-1)e(t)]$$

como  $e(t)$  e  $u(t)$  são ruídos brancos e só se correlacionam com eles mesmos no mesmo instante, e como  $var(e(t)) = Ee^2(t) = \lambda$ , vem que:

$$R_{ye}(0) = \lambda$$

Procedendo de maneira similar no cálculo de  $R_{ye}(1)$ , obtém-se:

$$R_{ye}(1) = Ey(t)e(t-1) = \lambda(c-a)$$

Utilizando os argumentos anteriores e acrescentando o fato de que  $var(u(t)) = Eu^2(t) = \mu$ , tem-se:

$$R_{yu}(0) = Ey(t)u(t) = 0$$

e

$$R_{yu}(1) = Ey(t)u(t-1) = b\mu$$

Agora, para o cômputo de  $R_y(0)$ , acrescenta-se o fato de que  $Ey(s)u(s) = 0$  e  $Ey(s)e(s) = \lambda$ , ou seja,  $y(t)$  é filtrado por  $e(t)$  no instante  $t$ , mas isto não acontece com  $u(t)$ , pois  $y(t)$  não tem componentes de  $u(t)$  no instante  $t$ , mas apenas em  $t-1$ . Sendo assim, o resultado fica:

$$R_y(0) = Ey(t)y(t) = \frac{b^2\mu + \lambda + c^2\lambda - 2ac\lambda}{1-a^2}$$

E por último, aplicando o resultado de  $R_y(0)$  e o fato de que  $Ey(t-1)e(t) = 0$  calcula-se facilmente o valor de  $R_y(1)$  como sendo:

$$R_y(1) = Ey(t)y(t-1) = -aR_y(0) + Ey(t-1)e(t) + c\lambda = \frac{\lambda(c-a+ac-ac^2)-ab^2\mu}{1-a^2}$$

### 3 Simulação e Predição

Nesta seção serão apresentados os exemplos resolvidos do capítulo 3 do livro texto.

#### Exemplo 3.1 Um Processo de Média Móvel

Suponha que

$$v(t) = e(t) + ce(t-1) \quad (3.1)$$

onde  $H(z) = 1 + cz^{-1}$

De acordo com a equação (2.15), fazendo  $n_a = 0$ , tem-se um modelo de média móvel de primeira ordem MA(1). Logo, center  $H(z) = 1 + cz^{-1} = \frac{z+c}{z}$  que tem um pólo em  $z = 0$  e um zero em  $z = -c$ , que está contido em um círculo de raio unitário se  $|c| < 1$ . Sendo assim, o filtro inverso é determinado como

$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1+cz^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-c)^k z^{-k}$   
e  $e(t)$  é recuperado a partir da equação (3.1) como sendo

$$e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-c)^k v(t-k)$$

#### Exemplo 3.2 Um Processo de Média Móvel

Considere o processo da equação (3.1) e suponha que os valores de  $v(s)$  são conhecidos para  $s \leq t-1$ . Sendo assim, a equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$v(t) = e(t) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k) \quad (3.2)$$

Seja  $\hat{v}(t|t-1)$  o preditor de um passo de  $v(t)$  definido pela equação (3.3):

$$\hat{v}(t|t-1) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k) \quad (3.3)$$

Uma maneira mais conveniente de escrever a equação (3.3) é mostrada na equação (3.4):

$$\hat{v}(t|t-1) = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \right] e(t) = [H(q) - 1]e(t) = [1 - H^{-1}(q)]v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\tilde{h}(k)v(t-k) \quad (3.4)$$

Aplicando  $H(q)$  em ambos os lados da equação (3.4), é obtida uma expressão alternativa:

$$H(q)\hat{v}(t|t-1) = [H(q) - 1]v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)v(t-k) \quad (3.5)$$

Aplicando a equação (3.5) em (3.1), obtém-se a expressão do preditor de um passo do processo  $v(t)$ :

$$\hat{v}(t|t-1) + c\hat{v}(t-1|t-2) = cv(t-1) \quad (3.6)$$

De outra maneira, aplicando (3.4) em (3.1) obtém-se:

$$\hat{v}(t|t-1) = - \sum_{k=1}^{\infty} (-c)^k v(t-k) \quad (3.7)$$

### Exemplo 3.3 - Um Processo Autorregressivo

Considere um processo:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e(t-k), |a| < 1$$

Então:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

que resulta:

$$H^{-1}(z) = 1 - az^{-1}$$

e de acordo com a equação (3.4), é obtido o preditor de um passo do processo:

$$\hat{v}(t|t-1) = av(t-1) \quad (3.8)$$

### 3.1 Resolução dos Problemas 3E.1 a 3E.4

Nesta subseção serão resolvidos os problemas 3E.1 a 3E.4 do Livro System Identification: Theory for User, de Lennart Ljung.

#### Solução do Problema 3E.1

Sendo  $H(q) = 1 - 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}$ , então :

$$H^{-1}(q) = \frac{1}{0.3q^{-2} - 1.1q^{-1} + 1} = \frac{10}{3q^{-2} - 11q^{-1} + 10} = \frac{1}{(q^{-1}-2)(3q^{-1}-5)}$$

Usando a decomposição em frações parciais, vem que:

$$H^{-1}(q) = 10 \frac{1}{(q^{-1}-2)} + 10 \frac{-3}{(3q^{-1}-5)}$$

Sabendo que  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ , para  $|a| < 1$ ,

$$H^{-1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-5) \left(\frac{1}{2}\right)^k + 6 \left(\frac{3}{5}\right)^k \right] q^{-k}$$

#### Solução do Problema 3E.2

caso 1:  $H(q) = \frac{1}{1-aq^{-1}}$ ,  $|a| < 1$

O preditor de k-passos é dado por

$$y(t|t-k) = [1 - W_k(q)]y(t) = [1 - \bar{H}_k(q)H^{-1}(q)]y(t)$$

$$\text{onde } \bar{H}_k(q) = \sum_{l=0}^{k-1} h(l)q^{-l} = \frac{1-(aq^{-1})^k}{1-aq^{-1}}$$

e

$$H^{-1}(q) = 1 - aq^{-1}$$

Logo,

$$\hat{y}(t|t-k) = a^k y(t-k)$$

O erro de predição é dado por:  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t-k)$

Pode-se mostrar por indução que

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{k-1} a^n e(t-n)$$

Portanto, a variância do erro de predição será:

$$\text{var}(\varepsilon(t)) = \text{var}(e(t)) \sum_{n=0}^{k-1} a^{2n} = \text{var}(e(t)) \frac{a^{2k}-1}{a^2-1}$$

caso 2:  $H(q) = (1 + cq^{-1})$ ,  $|c| < 1$  De modo similar, o preditor de k-passos é dado por

$$y(t|t-k) = [1 - W_k(q)]y(t) = [1 - \bar{H}_k(q)H^{-1}(q)]y(t)$$

$$\text{onde } W_k(q) = \begin{cases} \hat{H}_k(q) & , k = 1 \\ 1 & , \text{se } k \leq 2 \end{cases}$$

e

$$H^{-1}(q) = 1 - aq^{-1}$$

Portanto,

$y(t|t-k) = 0$ , se  $k \leq 2$  Como  $k = 3$ , o erro de predição fica:  $\varepsilon(t) = y(t)$ , cuja variância é

$$\text{var}(\varepsilon(t)) = \text{var}(e(t))(1 + c^2)$$

### **Solução do Problema 3E.3**

Sendo  $y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$ , com  $G(q) = \frac{bq^{-1}}{1-aq^{-1}}$

e  $\hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t)$ ,

tem-se os três casos:

caso 1:  $H(q) = 1$ ,  $H^{-1}(q) = 1$

$$\hat{y}(t|t-1) = bq^{-1} \frac{1}{1-aq^{-1}} = b \sum_{k=0}^{\infty} a^{k-1} u(t-k)$$

caso 2:  $H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k q^{-k} = \frac{1}{1-aq^{-1}}$

$$H^{-1}(q) = (1 - aq^{-1})$$

$$\hat{y}(t|t-1) = bu(t-1) + ay(t-1)$$

caso 3:  $H(q) = 0$ , logo a função inversa de  $H(q)$  é indefinida. Por outro lado,

$$y(t) = G(q)u(t) = b \sum_{k=0}^{\infty} a^{k-1} u(t-k) = \hat{y}(t|t-1)$$

Logo, o preditor é o próprio  $y(t)$  e, conseqüentemente, pode-se utilizar as fórmulas de predição dos casos 1 e 2 no caso 3.

### **Solução do Problema 3E.4**

O valor mais provável de  $v(t)$  é  $v(t) = H(q)$ , com probabilidade de 0.5, pois a probabilidade de  $e(t)$  ser igual 1 é 50%, pois a fdp de  $e(t)$  é máxima neste intervalo. A probabilidade de  $P(\hat{v}(t|t-1) - 1/4 \leq v(t) \leq \hat{v}(t|t-1) + 1/4) = P(\hat{v}(t|t-1) - 1/4 \leq \hat{v}(t|t-1) + e(t) \leq \hat{v}(t|t-1) + 1/4) = P(-1/4 \leq e(t) \leq 1/4) = 0.5$ .

Logo a probabilidade de  $v(t)$  estar neste intervalo conhecendo apenas as propriedades do preditor é de 50%.



## 4 Modelos de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Nesta seção serão apresentados os exemplos resolvidos do capítulo 4 do livro texto.

### Exemplo 4.1 Servo Motor DC

Neste exemplo será mostrado um processo físico e algumas de suas propriedades dinâmicas. Considere o motor de corrente contínua representada na Figura 4.1 com seu diagrama de blocos na Figura 4.2. A entrada para este sistema é assumida como sendo a tensão aplicada,  $u$ , e a saída do ângulo do eixo do motor,  $\eta$ . A relação entre a tensão aplicada e a corrente resultante no circuito do rotor é dada pela relação da equação (4.1).

$$u(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + s(t) \quad (4.1)$$

onde  $s(t) = k_v \frac{d}{dt} \eta$

A corrente  $i$  se relaciona com o torque de giro pela expressão  $T_a(t) = k_a \cdot i(t)$

O torque no eixo é afetado pelo torque  $T_l(t)$ . De acordo com a lei de Newton:

$$J \frac{d^2}{dt^2} \eta(t) = T_a(t) - T_l(t) - f \frac{d}{dt} \eta(t) \quad (4.2)$$

onde  $J$  é o momento de inércia do rotor com a carga e  $f$  é o atrito viscoso. Assumindo que a indutância de armadura pode ser desprezada,  $L_a \approx 0$ , a dinâmica do sistema tem uma representação em espaço de estados de acordo com a equação (4.3):

$$\frac{d}{dt} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\tau} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma'}{\tau} \end{bmatrix} T_l(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \frac{d}{dt} \eta(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

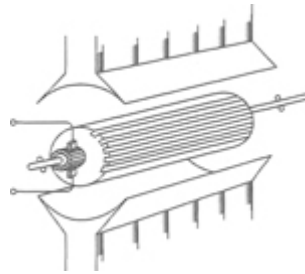


Figura 4.1: O motor DC

$$\text{com } x(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \frac{d}{dt} \eta(t) \end{bmatrix} \quad \tau = \frac{J R_a}{f R_a + k_a k_v}, \quad \beta = \frac{k_a}{f R_a + k_a k_v}, \quad \gamma' = -\frac{R_a}{f R_a + k_a k_v}$$

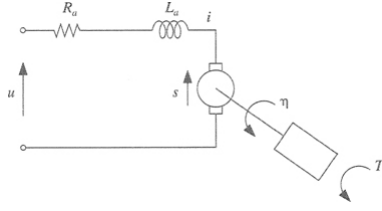


Figura 4.2: Diagrama de Blocos do motor DC

Assumindo agora que o torque  $T_l$  é nulo, para determinara a dinâmica do motor, pode-se aplicar uma entrada constante por partes e amostrar a saída com um período de amostragem  $T$ . A equação de estados do sistema é descrita pela equação (4.4):

$$x(t + T) = A_T(\theta)x(t) + B_T(\theta)u(t) \quad (4.4)$$

$$\text{onde } \theta = \begin{bmatrix} \tau \\ \beta \end{bmatrix}, A_T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \\ 0 & e^{-\frac{T}{\tau}} \end{bmatrix} \text{ e } B_T(\theta) = \begin{bmatrix} \beta(\tau e^{-\frac{T}{\tau}} - \tau + T) \\ \beta(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \end{bmatrix}$$

Pode-se assumir que  $y(t)$ , a medida atual do ângulo  $\eta(t)$ , são feitas com um erro de medição  $v(t)$ :

$$y(t) = \eta(t) + v(t) \quad (4.5)$$

Este erro é devido principalmente às limitações de acurácia e pode ser modelado como uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média nula e variância conhecida. Dito isto, o modelo do sistema pode ser descrito como  $y(t) = G_T(q, \theta)u(t) + v(t)$  como  $v(t)$  sendo um ruído branco. O preditor natural do sistema é dado por:

$$\hat{y}(t|\theta) = G_T(q, \theta)u(t) = [10][qI - A_T(\theta)]^{-1}B_T(\theta)u(t) \quad (4.6)$$

Este preditor é parametrizado em  $\beta$  e  $\tau$ . Se fossem utilizados os conceitos físicos, seria obtido um sistema de segunda ordem ARX ou OE contendo quatro parâmetros ajustáveis. Embora o preditor da equação (4.6) contenha apenas dois parâmetros, ele é descrito por uma função bem mais complexa do que seria se fosse representado pelos modelos ARX ou OE correspondentes.

#### Exemplo 4.2 Parametrizações em Formas Companheiras

Dado  $\theta^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ a_1 \ b_2 \ b_3 \ k_1 \ k_2 \ k_3]$  e

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$K(\theta) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

$$C(\theta) = [1 \ 0 \ 0]$$

Estas matrizes estão na *forma companheira*, ou na forma canônica de observador. É fácil verificar que:

$$C(\theta)[qI - A(\theta)]^{-1}B(\theta) = \frac{b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+b_3q^{-3}}{1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}}$$

e

$$C(\theta)[qI - A(\theta)]^{-1}K(\theta) = \frac{k_1q^{-1}+k_2q^{-2}+k_3q^{-3}}{1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}}$$

e, portanto,

$$1 + C(\theta)[qI - A(\theta)]^{-1}K(\theta) = \frac{1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+c_3q^{-3}}{1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}}$$

com  $c_i \triangleq a_i + k_i$ , com  $i = 1, 2, 3$

Esta é a representação de um modelo ARMAX, descrito por  $A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$

e

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, H(q, \theta) = \frac{C(q)}{A(q)}$$

com  $n_a = n_b = n_c = 3$ .

### Exemplo 4.3 Dinâmica de Aquecimento

Considere um sistema físico descrito na Figura 4.3. Ele é constituído por uma haste de metal isolada, que é aquecida em uma extremidade. A potência de aquecimento no instante  $t$  é a entrada  $u(t)$ , enquanto que a temperatura medida na outra extremidade é a saída  $y(t)$ . A saída é amostrada em  $t = 1, 2, \dots$

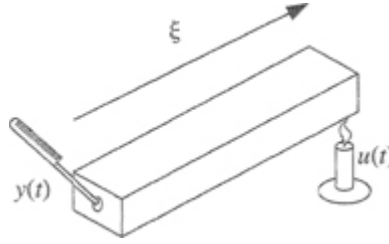


Figura 4.3: O sistema de aquecimento

Sob condições ideais, o sistema é descrito pela equação de difusão de calor. Se  $x(t, \xi)$  denota a temperatura no instante  $t$ , com  $\xi$  sendo o comprimento da haste, então:

$$\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 x(t, \xi)}{\partial \xi^2} \quad (4.7)$$

onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica. O aquecimento na outra extremidade é descrito por:

$$\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L} = K \cdot u(t)$$

onde  $K$  é o coeficiente de transferência de calor. A outra extremidade é isolada, então:

$$\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0$$

As medições são  $y(t) = x(t, 0) + v(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots$

onde  $v(t)$  é a medição do ruído. Os parâmetros desconhecidos são

$$\theta = \begin{bmatrix} k \\ K \end{bmatrix}$$

Aproximando

$$\frac{\partial^2 x(t, \xi)}{\partial \xi^2} = \frac{x(t, \xi + \Delta L) - 2x(t, \xi) + x(t, \xi - \Delta L)}{(\Delta L)^2}, \quad \xi = k \cdot \Delta L$$

transfere-se a equação (4.7) para o modelo de espaço de estados de ordem  $n = L/\Delta L$ , onde as variáveis de estado  $x(t, k.\Delta L)$  são representadas no intervalo  $k.\Delta L \leq \xi \leq (k+1).\Delta L$ . Por outro lado, aplicando Laplace em (4.7), são obtidas as relações no domínio da frequência:

$$sX(s, \xi) = kX''(s, \xi)$$

$$X(s, L) = K.U(s)$$

$$X'(s, 0) = 0$$

Resolvendo as equações acima, vem que:

$$X(s, \xi) = A(s)e^{-\xi\sqrt{\frac{s}{k}}} + B(s)e^{\xi\sqrt{\frac{s}{k}}}$$

$$\text{com } A(s) = B(s) = \frac{K.U(s)}{\sqrt{\frac{s}{k}}(e^{L\sqrt{\frac{s}{k}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{k}}})}$$

$$\text{Logo, } Y(s) = X(s, 0) + V(s) = G_c(s, \theta)U(s) + V(s)$$

$$\text{onde } G_c(s) = \frac{2K}{\sqrt{\frac{s}{k}}(e^{L\sqrt{\frac{s}{k}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{k}}})}$$

#### Exemplo 4.4 Sistema Instável

Suponha que  $G(q) = \frac{bq^{-1}}{1aq^{-1}}$ , com  $|a| > 1$  e  $H(q) = \frac{1}{1aq^{-1}}$

Isto significa que o modelo é descrito por

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t)$$

e a dinâmica do sistema de  $u$  para  $y$  é instável. As funções dos preditores são, portanto:

$$W_y(q) = -aq^{-1}, W_u(q) = bq^{-1}$$

que implica em  $\hat{y}(t|t-1) = -ay(t-1) + bu(t-1)$ , que claramente satisfazem as condições de  $y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$ .

#### Exemplo 4.5 Uma Estrutura ARX

Considere o modelo ARX

$$y(t) + ay(t-1) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + e(t)$$

O preditor do sistema é dado por

$$y(t|\theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t), \text{ o que implica em}$$

$$W(q, \theta) = \begin{bmatrix} b_1q^{-1} & b_2q^{-2} & b_3q^{-3} \end{bmatrix},$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T$$

e

$$\Psi(q, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & -q^{-1} \\ q^{-1} & 0 \\ q^{-2} & 0 \end{bmatrix}$$

O modelo parametrizado do sistema é dado por

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t), \theta \in D_M$$

ou ainda,  $y(t) = T(q, \theta)\chi(t)$

É imediato verificar que

$$\Psi(q, \theta) = \frac{1}{(H(q, \theta)^2)} T'(q, \theta) \begin{bmatrix} H(q, \theta) & 0 \\ -G(q, \theta) & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $T'(q, \theta)$  é uma matrix dx2

$$T'(q, \theta) = \frac{d}{d\theta} T(q, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta} G(q, \theta) & \frac{d}{d\theta} H(q, \theta) \end{bmatrix}$$

A diferenciabilidade de  $W$  é garantida pela diferenciabilidade de  $T$ .

#### Exemplo 4.6 Parametrizando $M_3^*$

Considere um conjunto de modelos  $M_n^*$  definido como:

$M_n^* = \{ \text{todos os modelos que } W_y(q) \text{ e } W_u(q) \text{ são polinômios de } q^{-1} \text{ de grau no máximo } n \}$

Fazendo  $n = 3$ , vem que:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3]^T, d = 6$$

$$D_M = R^6$$

e

$$W_y(q, \theta) = -a_1 q^{-1} - a_2 q^{-2} - a_3 q^{-3}$$

$$W_u(q, \theta) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + b_3 q^{-3}$$

Estes parâmetros obviamente constroem o  $M_3^*$ .