

3. Representación en el dominio frecuencial

Conocimientos previos:

- Digitalización de señales.
- Unidades de frecuencia.
- Representación de señales en el plano complejo.

Competencias:

Meta ABET	Resultados de Aprendizaje
Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de Ingeniería aplicando principios de Ingeniería, ciencias y matemáticas	Hace uso de criterios de ingeniería para crear y aplicar sistemas de digitalización de señales.
	Aplica técnicas de procesamiento de señales a diferentes tipos de señal de tiempo discreto identificando sus propiedades.
	Aplica y desarrolla algoritmos de filtrado de señales con el fin de eliminar o disminuir el ruido y extraer la información útil.
Habilidad para comunicarse efectivamente ante un rango de audiencias	Aplica diferentes estrategias de comunicación (escrita, oral, gráfica, etc.) para dar a entender conceptos, métodos y aplicaciones.
Capacidad de desarrollar y llevar a cabo la experimentación adecuada, analizar e interpretar datos y usar el juicio de ingeniería para sacar conclusiones.	Realiza pruebas y experimentos con datos reales y/o simulados usando herramientas de ingeniería.

Recursos:

https://github.com/nelsonfvt/CyM_PDS

Clases grabadas:

<https://youtu.be/2GPH624IxY0>

<https://youtu.be/cKzBnchIVSk>

<https://youtu.be/CU0sTPZb4Jk>

<https://youtu.be/iQnFqITpFmQ>

Metodología:

Los temas de esta asignatura se manejan mediante la estrategia de aula invertida. Esta técnica se basa en que el estudiante resuelve una actividad propuesta consultando información sugerida por el docente y/o obtenida a partir de la búsqueda propia. Se espera que con la investigación y desarrollo de la actividad previa se generen curiosidad, preguntas, dudas, etc. sobre el tema. Previo al espacio de la clase se aplicará un test de entrada (Aula virtual) y luego mediante una actividad colectiva y con el apoyo del docente se resolverán las dudas y reforzarán los conceptos

para que posterior a la clase los estudiantes desarrollen un producto que demuestre el aprendizaje logrado sobre del tema.

El presente documento corresponde a una guía para adelantar el trabajo previo al espacio de la clase. Para desarrollarlo, use los recursos sugeridos y/o haga su propia búsqueda de información.

ASPECTOS TEÓRICOS:

En procesamiento digital de señales otra herramienta de mucha utilidad para analizar las propiedades de las señales y comprender el comportamiento de los sistemas es el análisis frecuencial. La base del mencionado análisis son los conceptos derivados de las series y la transformada de Fourier. En asignaturas previas Ud ya abordó estas herramientas aplicadas a señales y sistemas de tiempo continuo. Antes de empezar el tema aplicado a las señales y sistemas de tiempo discreto se le recomienda que revise cual es la diferencia entre la serie y la transformada de Fourier, en qué casos se aplica una o la otra, sus ecuaciones y el significado de las mismas. Puede ser de utilidad que revise además la fórmula de Euler (relación entre las funciones seno y coseno con la exponencial compleja).

Serie y transformada de Fourier

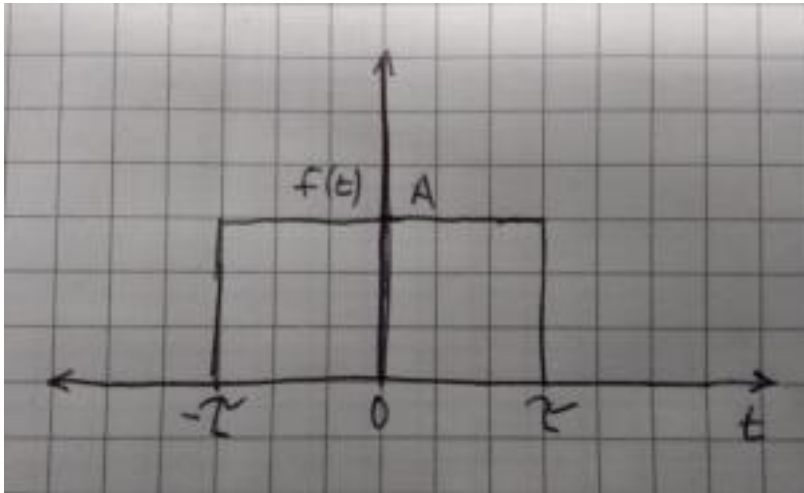
Una función senoidal es un caso particular de la señal exponencial compleja (tratada en el tema anterior). Si además se considera la ecuación de Euler, se puede ver que la transformada Z y las ecuaciones de Fourier están íntimamente relacionadas. Consulte fuentes de información y explique cómo es que la serie y la transformada de Fourier son casos particulares de la transformada Z .

La serie y la transformada de Fourier son herramientas matemáticas de aplicación muy amplia en ingeniería. Particularmente en este curso su aplicación se dirige al análisis frecuencial, el cual se puede resumir diciendo que una señal se puede construir a partir de la combinación lineal (suma ponderada) de varias señales sinusoidales con diferentes amplitudes y frecuencias. En otras palabras, la serie y transformada de Fourier son métodos que permiten encontrar los armónicos (señales sinusoidales) y sus correspondientes amplitudes (coeficientes) presentes en una señal.

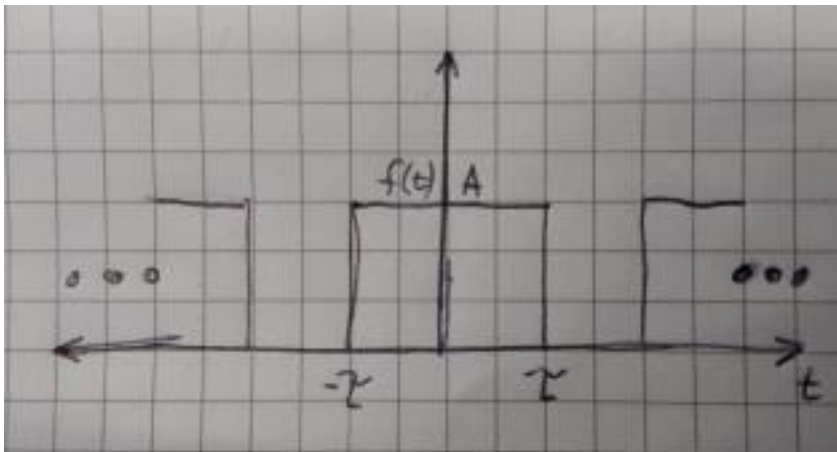
A partir de sus conocimientos previos y del repaso del tema se espera que tenga claridad en que el uso de la serie de Fourier está dirigido a señales periódicas, mientras que la transformada de Fourier se orienta al análisis de señales aperiódicas. ¿Entiende la razón de tal afirmación?; de no ser así revise nuevamente la teoría de estas herramientas para que pueda responder afirmativamente a la anterior pregunta. La aplicación de estas herramientas (serie y transformada de Fourier) en tiempo discreto está mediada por el proceso de muestreo. Es decir que a las ecuaciones que ya conoce para el caso de tiempo continuo, se les debe aplicar la operación de muestreo. ¿Cómo explica Ud la aplicación del proceso de muestreo a las ecuaciones de Fourier? Investigue.

Para reforzar los conceptos mencionados, investigue en textos y realice los siguientes ejercicios: Haga gráficos a mano de los espectros de frecuencia de las señales representadas en las siguientes figuras:

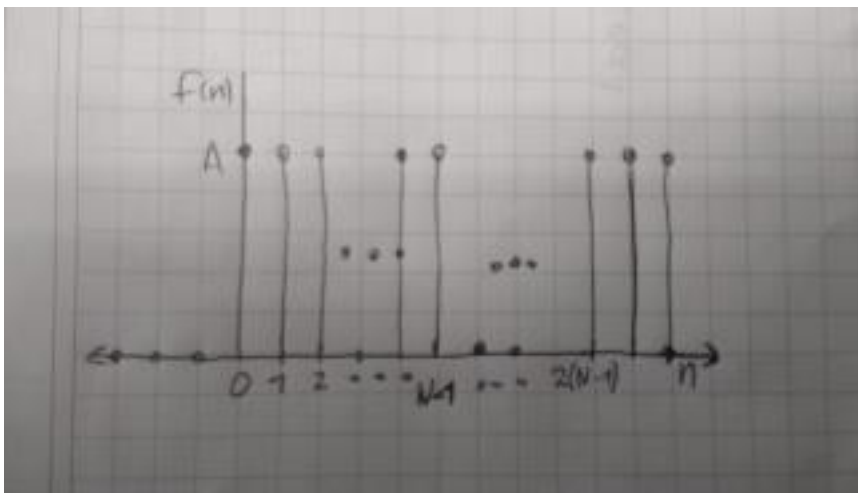
- Pulso cuadrado continuo de amplitud A y duración 2τ



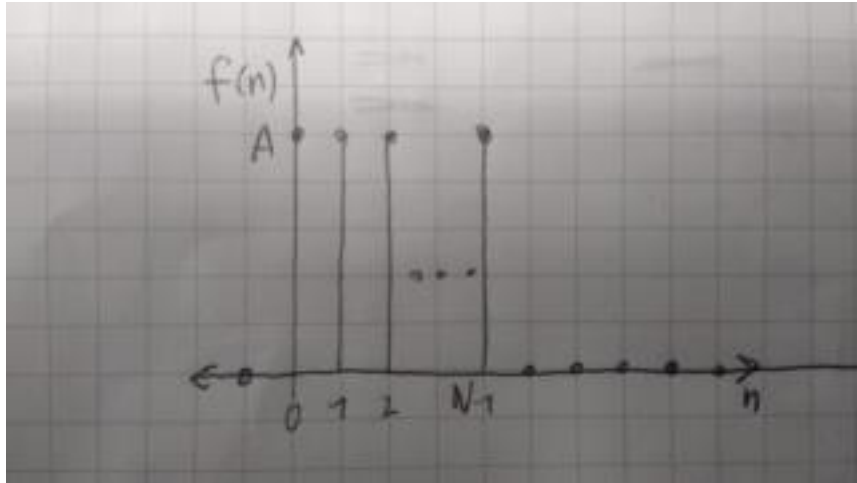
- Pulso cuadrado continuo periódico de amplitud A y duración 2τ



- Pulso cuadrado discreto periódico de amplitud A y duración N muestras



- Pulso cuadrado discreto aperiódico de amplitud A y duración N muestras



El desarrollo del ejercicio propuesto le permite observar que:

1. Si se tiene una señal periódica de tiempo continuo; su representación en el dominio de la frecuencia tiene forma aperiódica y discreta.
2. Si se tiene una señal aperiódica de tiempo continuo; su representación en el dominio de la frecuencia tiene forma aperiódica y continua.
3. Si se tiene una señal periódica de tiempo discreto; su representación en el dominio de la frecuencia tiene forma periódica y discreta.
4. Si se tiene una señal aperiódica de tiempo discreto; su representación en el dominio de la frecuencia tiene forma periódica y continua.

Es importante que entienda las razones de lo anterior, porque de dicho entendimiento se desprende la forma como se realiza el análisis frecuencial de cualquier señal. De no tener claro cual o cuales son las razones para los cuatro puntos anteriores, se le sugiere revisar la teoría que está disponible en cualquier libro de texto de procesamiento de señales.

Análisis frecuencial:

La aplicación del análisis frecuencial de las señales y sistemas de tiempo discreto que se tratará en el curso se orienta al diseño de filtros digitales. Esto consiste en tomar una señal de tiempo discreto y aplicarle la serie o la transformada de Fourier según el caso. El resultado del anterior procedimiento entrega lo que se conoce como espectro de frecuencia, el cual es una representación de las amplitudes de los armónicos (señales seno y/o coseno) y sus frecuencias que componen la señal. Es importante aclarar que la mencionada representación se puede graficar de dos formas principales:

- Partes real e imaginaria.
- Magnitud y fase.

Cada forma de graficación ofrece información diferente pero complementaria. De forma general lo que estas gráficas muestran corresponde a la distribución de potencia o energía de la señal en cada banda de frecuencia. Investigue cómo se realiza la interpretación de la mencionada distribución con respecto a la frecuencia.

El diseño de un filtro digital empieza por identificar los armónicos, las amplitudes y la correspondiente frecuencia de dichos armónicos que se pueden encontrar en la señal a filtrar. Luego según la aplicación se determina que armónicos se deben rechazar y cuáles deben pasar.

Posteriormente, dada la o las bandas de frecuencia a rechazar y a pasar se escoge el tipo de filtro a realizar (e.g. pasa-bajas, pasa-altas, pasa-bandas, etc.) y así mismo las frecuencias de corte. Analice el procedimiento descrito y entienda la razón de cada paso, del entendimiento de cada paso dependerá el éxito de las siguientes actividades y de la realización de las prácticas de laboratorio.

DFT y FFT:

Para realizar un uso computacional de las herramientas de análisis frecuencial las ecuaciones de la serie y la transformada de Fourier ofrecen dificultades para su implementación dentro de un programa de computador ¿Cuáles pueden ser dichas dificultades? Por lo tanto, se ha desarrollado un algoritmo computacional que es capaz de representar el espectro de frecuencia de una señal muestreada de duración finita. Este algoritmo computacional se conoce como la transformada discreta de Fourier (DFT), que no se debe confundir con la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT). La DFT se obtiene de tomar la DTFT y realizar un proceso de muestreo en el dominio de la frecuencia. El resultado de aplicar la DFT a una señal de tiempo discreto entrega una representación que es discreta y de duración finita; tiene una considerable semejanza con la serie de Fourier de tiempo discreto, pero no son iguales. ¿Cuál es la mencionada diferencia y que la genera?

Si bien la DFT es una herramienta muy útil para hacer el análisis computacional en el dominio frecuencial, tiene una limitación relacionada con el tiempo y el uso de recursos computacionales. Esta situación se trata de resolver con un algoritmo computacional optimizado conocido como la transformada rápida de Fourier (FFT). Esta última no obedece a una ecuación definida, más bien se refiere a una serie de funciones o fragmentos de software que valiéndose de algunas propiedades de la DFT realizan los cálculos de forma eficiente. Investigue en qué consiste la mejora en tiempo de la FFT con respecto a la DFT, cuáles son las propiedades de la DFT que se toman en consideración para las implementaciones de la FFT.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

Series de Fourier:

En el repositorio GitHub encontrará el archivo “Serie_Fourier.m” que muestra cómo se puede componer una señal periódica mediante la combinación de señales sinusoidales a diferentes frecuencias y su respectiva descomposición en el dominio frecuencial. Revise y entienda el código, notará que los armónicos tienen amplitud 1, ¿Qué tipo de señal se forma a medida que aumenta el número de armónicos?, ¿Cómo explica lo observado al correr el programa a medida que modifica el número de armónicos?

Siéntase en libertad de modificar el código para, por ejemplo, definir o modificar las amplitudes de los armónicos de forma tal que obtenga diferentes tipos de señales a partir de la combinación de los armónicos.

Análisis Frecuencial:

En la hoja de cálculo Hoja An_Freq disponible en GitHub, se tiene un ejemplo de señal periódica de tiempo discreto ($x(n)$) y el cálculo de la serie de Fourier de tiempo discreto. Se encuentran formulados los coeficientes C_k (real e imaginario y magnitud y fase) de la serie de Fourier de

tiempo discreto para la señal $x(n)$.

1. Observe los gráficos de la señal y de los coeficientes (real e imaginario, magnitud y fase) Explique la forma de los gráficos en relación con los componentes armónicos de la señal.
2. Varíe los valores de amplitud y cambie los tipos de función entre seno y coseno (**No modifique la frecuencia**), realice diferentes pruebas y analice los gráficos. Explique los cambios observados en los gráficos y relaciónelos con los parámetros de frecuencia y amplitud.

A partir de los resultados de modificar los parámetros de la función $x(n)$

- ¿Qué ocurre en la parte imaginaria cuando se modifica la amplitud de la función seno?
- ¿Qué ocurre en la parte real cuando se modifica la amplitud de la función coseno?
- ¿Cómo se explica la ubicación en la gráfica de los coeficientes C_k diferentes de cero?
- ¿Qué relación existe entre dicha ubicación de los respectivos coeficientes en la gráfica y la frecuencia de los armónicos?

Compare los valores y gráficos que obtuvo en la hoja de cálculo con los resultantes de aplicar la función FFT a la misma señal en Matlab vea el ejemplo An_freq en GitHub.

- ¿Qué diferencia existe entre los valores obtenidos en el ejemplo de excel y el de Matlab?
- ¿Por qué son diferentes?
- ¿En qué consiste tal diferencia? Explique la razón de la diferencia.

En el código fuente mydft disponible en GitHub encontrará la implementación de la DFT. Realice el cálculo de la DFT y la FFT (use la función FFT de Matlab) para una función de tiempo discreto de ejemplo. Compare el tiempo de ejecución entre la DFT y la FFT (use tic - toc en Matlab)

Responda:

- ¿Cuántas multiplicaciones y sumas son necesarias para calcular la DFT?
- Investigue, ¿Cuántas multiplicaciones y sumas son necesarias para calcular la FFT sobre la misma señal?
- Suponiendo que tiene un procesador que tarda un milisegundo en cada operación:
 - ¿Cuánto tiempo tardaría en realizarse la DFT?
 - ¿Cuánto tiempo tardaría en realizarse la FFT?

AUTOEVALUACIÓN:

En este apartado debe realizar una autoevaluación del proceso desarrollado y de las habilidades adquiridas con las actividades propuestas. Para ello responda las siguientes preguntas otorgando el valor porcentual (0 - 100 %) a cada una de ellas.

1. ¿Desarrolló la totalidad de las actividades propuestas?
2. ¿La metodología le permitió construir saberes significativos que le aporten al desarrollo del tema planteado?
3. ¿Qué tanto fue su grado de dedicación durante el desarrollo de las actividades planteadas?

4. ¿Qué tanto fue su grado de interés en el tema propuesto?
5. Otorgue un valor porcentual a cada uno de los indicadores de las metas propuestas según su cumplimiento

RETROALIMENTACIÓN:

En esta sección se espera que, a partir de lo vivido durante el desarrollo de las actividades propuestas, Ud pueda dar algunas recomendaciones o sugerencias sobre el tema y el desarrollo de estas. Tenga en cuenta que sus aportes enriquecen el ejercicio docente, gracias.