2. Representación de señales y sistemas mediante la transformada Z

Conocimientos previos:

- Números complejos.
- Plano complejo.
- Transformada Z.
- Identidad de Euler

Competencias:

Meta ABET	Resultados de Aprendizaje
Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de Ingeniería aplicando principios de Ingeniería, ciencias y matemáticas	Hace uso de criterios de ingeniería para crear y aplicar sistemas de digitalización de señales.
	Aplica técnicas de procesamiento de señales a diferentes tipos de señal de tiempo discreto identificando sus propiedades.
	Aplica y desarrolla algoritmos de filtrado de señales con el fin de eliminar o disminuir el ruido y extraer la información útil.
Habilidad para comunicarse efectivamente ante un rango de audiencias	Aplica diferentes estrategias de comunicación (escrita, oral, gráfica, etc.) para dar a entender conceptos, métodos y aplicaciones.
Capacidad de desarrollar y llevar a cabo la experimentación adecuada, analizar e interpretar datos y usar el juicio de ingeniería para sacar conclusiones.	Realiza pruebas y experimentos con datos reales y/o simulados usando herramientas de ingeniería.

Recursos:
https://github.com/nelsonfvt/CyM_PDS

Clases grabadas:
https://youtu.be/cKzBnchlVSk
https://youtu.be/PMYJ9z4KkKU
https://youtu.be/gm2D554G0-o
https://youtu.be/sCnFAonnnZ8

Metodología:

Los temas de esta asignatura se manejan mediante la estrategia de aula invertida. Esta técnica se basa en que el estudiante resuelve una actividad propuesta consultando información sugerida por el docente y/o obtenida a partir de la búsqueda propia. Se espera que con la investigación y desarrollo de la actividad previa se generen curiosidad, preguntas, dudas, etc. sobre el tema. Previo al espacio de la clase se aplicará un test de entrada (Aula virtual) y luego mediante una actividad colectiva y con el apoyo del docente se resolverán las dudas y reforzarán los conceptos para que posterior a la clase los estudiantes desarrollen un producto que demuestre el aprendizaje logrado sobre del tema.

El presente documento corresponde a una guía para adelantar el trabajo previo al espacio de la clase. Para desarrollarlo, use los recursos sugeridos y/o haga su propia búsqueda de información.

ASPECTOS TEÓRICOS:

Señales básicas y exponencial compleja:

En la literatura se describen diferentes tipos de señales básicas. En este punto de su formación Ud ha interactuado con varias de ellas. Es así como debe estar familiarizado con señales como:

- Señal impulso
- Señal escalón
- Señal rampa
- Señal sinusoidal

De todas las señales mencionadas existe la versión de tiempo continuo, que a la fecha es la más familiar para Ud. Investigue cómo se caracterizan las mencionadas señales, pero en tiempo discreto. Advierta que estas señales de tiempo discreto están referenciadas en muestras y no en segundos. ¿Cómo se corresponde lo visto sobre el proceso de muestreo (tarea anterior) con estas señales?

Otra señal de interés significativo en esta asignatura es la función exponencial, qué está representada por la siguiente expresión:

$$x(n) = A^n u(n)$$

El escalón unitario ($u(n)$) indica que solamente se considerarán valores de la señal a partir de la muestra $n = 0$ en adelante. Lo anterior se denomina usualmente como señal causal (investigue el significado de esto). La base A en la función exponencial de forma general se considera como un número complejo. Es así como dependiendo del valor de la base (A) esta función puede exhibir diferentes comportamientos. El mencionado comportamiento de la señal exponencial puede ser creciente, decreciente, oscilatorio o un valor constante. La importancia de esta función radica en la posibilidad de ser usada como base para componer o construir otro tipo de funciones.

La idea de que una señal arbitraria se puede representar como la combinación lineal de un tipo o familia de señales simples, se usa con frecuencia en matemáticas para poder analizar propiedades específicas de una señal. En particular la transformada Z usa como función base la exponencial compleja. Cada uno de los posibles valores de la base (A) representa un punto dentro de un plano de variable compleja. A dicho plano se le denomina el plano Z. En ese orden de ideas cada punto del plano Z corresponde con una forma especial de la función exponencial compleja. De esa forma un conjunto de puntos dentro de ese plano Z se pueden asociar a una forma de onda con diferentes propiedades. En la parte práctica encontrará un ejemplo que le permitirá entender más fácilmente el concepto mencionado.

Sistemas LTI y la transformada Z:

Una de las herramientas más utilizadas para representar y analizar sistemas de tiempo discreto es la transformada Z que permite encontrar la solución de las ecuaciones en diferencias. Esto último es análogo a la transformada de Laplace que se usa para resolver ecuaciones diferenciales. En este punto se le sugiere repasar conceptos que previamente Ud estudió en otras asignaturas:

- Solución de ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace.
- Ecuaciones en diferencias.
- Transformada Z aplicada a ecuaciones en diferencias.

Es importante que entienda que el manejo de las ecuaciones diferenciales constituye la herramienta matemática idónea para representar y modelar sistemas en la medida que estas a diferencia de las ecuaciones algebraicas tienen como variables funciones y no cantidades específicas. De la misma forma que las ecuaciones diferenciales relacionan funciones continuas, las ecuaciones en diferencias permiten relacionar secuencias de muestras.

En el contexto de este curso se entenderá a un sistema como una operación o transformación que se aplica a una señal, donde esta primera se llama señal de entrada ($x(n)$), a partir de la cual se obtiene una segunda señal o señal de salida ($y(n)$). En ingeniería es habitual considerar a muchos procesos como sistemas y es de vital importancia tener herramientas que permitan representar y modelar los mencionados procesos. De lo anterior se puede entender que la representación de sistemas de tiempo discreto es una pieza clave del procesamiento digital de señales.

Al abordar el análisis de sistemas de tiempo discreto, una primera pregunta puede ser ¿Cómo un sistema descrito por ecuaciones diferenciales se puede convertir en un sistema de tiempo discreto? Para ello existen varios métodos que permiten hacer una aproximación de cómo una ecuación diferencial se transformaría en una ecuación en diferencias mediante el muestreo. El más sencillo se denomina aproximación de derivadas, el cual parte del concepto base de la derivada expresada como una diferencia finita hacia atrás:

$$\frac{df(t)}{dt} \simeq \frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

Donde Δt se relaciona con el periodo de muestreo Ts. Siguiendo esta básica relación es posible transformar cualquier ecuación diferencial de un sistema LTI a una expresión correspondiente en ecuación en diferencias. Es así como mediante la expresión

$$\frac{df(t)}{dt} \simeq \frac{f(t)-f(t-Ts)}{Ts} \Rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{Ts}$$

Se puede tener una equivalencia entre las variables complejas S y z. El proceso consiste en reemplazar una variable (S) por su equivalente en función de la otra (z). Consulte fuentes de información que complementen lo ya mencionado y también sobre otros métodos que permitan la discretización de sistemas LTI tales como:

- 'Zoh' (zero-order hold) retención de orden cero.
- Invarianza impulsional.
- Transformada bilineal (Método de Tustin).

Función de transferencia:
Mediante la aplicación de la transformada Z a la ecuación en diferencias de un sistema se puede obtener la función de transferencia. La función de transferencia de un sistema es una forma de representación de sistemas que permite relacionar la entrada entendida como una función en el dominio temporal y la salida (también una función del tiempo) como la transformación que un sistema realiza sobre la mencionada entrada. Esta función de transferencia se expresa en el dominio de la variable compleja correspondiente:

- S para sistemas LTI de tiempo continuo.
- z para sistemas LTI de tiempo discreto.

En este paso Ud debe repasar los conceptos vistos en asignaturas previas que traten sobre el uso de la transformada de Laplace y la transformada Z para obtener funciones de transferencia, además de los respectivos procedimientos y propiedades necesarios para su aplicación.

A partir de la función de transferencia de un sistema es posible analizar o estudiar diferentes propiedades del sistema. Entre las propiedades que se pueden estudiar se encuentran:

- Número y ubicación de los polos y ceros.
- La estabilidad del sistema.
- Respuesta al impulso y respuesta al escalón.
- Respuesta en frecuencia.

- Ganancia del sistema.

Las propiedades mencionadas son importantes en la ingeniería de control que es un eje fundamental de la formación del ingeniero en mecatrónica.

Si bien el significado de las propiedades antes mencionadas es el mismo tanto para sistemas de tiempo continuo como para sistemas de tiempo discreto, la forma de trabajar con la función de transferencia para desarrollarlas es diferente. Por ejemplo, la distribución de los polos y ceros sobre el plano complejo es diferente para el plano S y para el plano z. Investigue cómo se usa y cómo se interpreta el resultado para cada propiedad a partir de la función de transferencia, dependiendo si se trata de sistemas de tiempo continuo o de tiempo discreto. ¿Cuáles son las diferencias?

Convolución de señales en tiempo discreto:
La convolución es una operación que se realiza entre dos señales y como resultado se obtiene una tercera señal. Para realizar una convolución entre dos señales se requiere que una de estas esté invertida sobre el eje “temporal” y posteriormente se desplaza una de las señales con respecto a la otra, en cada posición de desplazamiento se debe realizar la multiplicación una a una de las muestras y la posterior sumatoria de los productos. Revise en la literatura como es el procedimiento para calcular la convolución entre dos señales de tiempo discreto. Así mismo consulte sus propiedades más importantes.

Para calcular la respuesta de un sistema LTI ante cualquier señal se realiza la convolucion entre la respuesta al impulso del sistema y la señal de entrada. En la práctica no se realiza la convolución manualmente, para ello se recurre a métodos más elaborados como el uso de la transformada Z y la función de transferencia. Investigue cómo están relacionados estos conceptos y sus equivalencias. Es decir como mediante el uso de la transformada Z se puede llegar al mismo resultado que aplicando la convolución.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

Función exponencial:
En el repositorio de Github encontrará la carpeta correspondiente a esta tarea. En el código correspondiente a Ejemplo_exp encontrará un fragmento de código que representa una señal exponencial cuya base es un número real. Interactúe con el código para realizar los siguientes ejercicios.

A continuación considere cada una de las siguientes condiciones para el valor de la base (A) en la función exponencial.

- $0 < A < 1$
- $-1 < A < 0$
- $A > 1$
- $A < -1$
- $A = 1$
- $A = -1$
- $A = 0$

Para cada una de las condiciones observe las gráficas y establezca cómo se relaciona el valor de A con la forma de la señal.

Función exponencial compleja:
Considere ahora que la base de la función exponencial es un número complejo (z). Observe que cuando $|z| = 1$, esto describe un círculo de radio 1 en el plano complejo. Esto divide el plano complejo en dos

regiones una interna y otra externa al mencionado círculo unitario. Con base en lo anterior y usando el programa Ejemplo grafique la señal para cada una de las siguientes condiciones:

- $|z| < 1$ y $\frac{\pi}{2} > \angle z > 0$
- $|z| < 1$ y $\frac{\pi}{2} \leq \angle z < \pi$
- $|z| > 1$ y $\frac{\pi}{2} > \angle z > 0$
- $|z| > 1$ y $\frac{\pi}{2} \leq \angle z < \pi$
- $|z| = 1$

De acuerdo con lo visto en el comportamiento de la señal, realice un gráfico (a mano) sobre un plano que represente los valores de z (eje real, eje imaginario) y dibuje el comportamiento de la señal para cada cuadrante (dentro y fuera del círculo unitario).

Composición de señales:
Considere la siguiente expresión:
$x(n) = [3 * (0.2)^n - 2 * (-0.1)^n + 0.1 * (cos(\pi/3) + j * sin(\pi/3))^n + 0.1 * (cos(\pi/3) - j * sin(\pi/3))^n]u(n)$
Tomando como base lo aprendido con las herramientas de simulación, realice los siguientes ejercicios:
En el repositorio github encontrará componer_funcion en el cual se realiza el gráfico de la señal mencionada. Observe cómo la combinación de varias señales exponenciales complejas puede generar una señal con una forma particular.

Varíe los parámetros de la señal $x(n)$ (Amplitudes, frecuencias, etc.) y observe cómo cambia la forma de la función. Relacione la forma de la gráfica con la ubicación de los números complejos en el plano que la componen.

Ahora re-escriba la función en el programa e intente realizar lo siguiente mediante combinación de múltiples funciones exponenciales complejas:

- Intente obtener una sinusoidal con alguna frecuencia y amplitud especificada.
- Intente obtener una señal que represente la respuesta al escalón de un sistema de primer orden.
- Intente obtener una señal que represente la respuesta al escalón de un sistema de segundo orden.
- Intente obtener un tren de pulsos cuadrados con frecuencia y amplitud especificada con y sin nivel DC.

Después de realizar el ejercicio responda:

- ¿Cuántas señales exponenciales requirió para obtener cada una de las señales propuestas?
- ¿Qué características o condiciones tienen las funciones exponenciales que utilizó en cada caso?
- ¿Cuál fue, para Ud, la más difícil de obtener y por qué?

Discretización de sistemas de tiempo continuo
Considere el sistema trabajado en el tema anterior que obedece a un sistema LTI de segundo orden expresado mediante la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{dx}{dt} + kx$$

Se considera que y es la función respuesta del sistema y x es la función de la entrada al sistema. La función de transferencia del sistema de tiempo continuo viene dada por:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Donde $b_1 = a_1 = \frac{b}{m}$, $b_2 = a_2 = \frac{k}{m}$

Usando la aproximación por diferencias finitas se obtiene que la función de transferencia correspondiente sería:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(-b_1/Ts)z^{-1} + (b_1/Ts) + b_2}{(1/Ts)z^{-2} - [(2/Ts^2) - (a_1/Ts)]z^{-1} + [(1/Ts^2) + (a_1/Ts) + a_2]}$$

En el repositorio github encontrará el código fuente de Ejemplo_diffinitas. En él se aplicó el método de aproximación de derivada para discretizar el sistema. ¿Qué puede concluir del uso de este método?, en comparación con la discretización de la primera tarea, ¿Qué diferencias encuentra?

En el repositorio github encontrará el código fuente de Ejemplo_cd2. En este ejemplo se utilizan algunas funciones disponibles para la discretización de sistemas a partir de la función de transferencia. Investigue los métodos, explique sus diferencias desde el punto de vista teórico y desde el punto de vista práctico al correr el ejemplo. ¿Qué hace que los métodos utilizados en el ejemplo sean diferentes?, ¿Cómo relaciona el periodo de muestreo con los resultados obtenidos y con lo que investigó en la primera tarea?

Respuesta impulsional de un sistema de tiempo discreto

Considere los sistemas representados por las siguientes ecuaciones en diferencias:

Sistema 1:

$$y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + 0.25x(n-2)$$

Sistema 2:

$$y(n) = 0.5x(n) + 0.1x(n-1) - 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2)$$

- Realice el cálculo de los valores de la salida luego de aplicar un impulso unitario a cada sistema (utilice el archivo TF y AF.xls hoja Sis. Disc. disponible en el aula virtual y en github). Este resultado se conoce en la literatura como la respuesta impulsional del sistema ($h(n)$).
- Realice una tabla comparando las características que observa de las respuestas impulsionales del Sistema 1 y del Sistema 2.

Función de transferencia de los sistemas de tiempo discreto

Encuentre las funciones de transferencia de los sistemas 1 y 2 y configure los parámetros del archivo TF3D disponible en github, corra el ejemplo y responda lo siguiente:

- ¿Qué representa la función tridimensional que aparece en el ejemplo? Según el texto del ejemplo dice que es la ganancia del sistema. Explique la relación entre el concepto y la gráfica.
- ¿Qué significa que el valor de Z sea reemplazado por algún valor complejo en la función de transferencia de un sistema?
- Explique la relación entre la forma de la función tridimensional y la ubicación de los polos y los ceros.
- ¿Qué representan los polos del sistema? y ¿Qué representan los ceros del sistema?
- ¿Por qué los polos definen que un sistema sea estable o inestable?
- ¿Cómo afecta la ubicación de los ceros la respuesta del sistema?
- ¿Qué ocurre si el valor de Z es reemplazado por un valor cercano a uno de los polos de la función de transferencia?
- ¿Qué ocurre si el valor de Z es reemplazado por un valor cercano a uno de los ceros de la función de transferencia?

Convolución de señales

La convolución es una operación de común aplicación en el procesamiento de señales. En el código fuente Ejemplo_conv encontrará un sencillo ejercicio donde se plantean dos señales de tiempo discreto que luego son convolucionadas. Tomado como base el ejemplo mencionado realice lo siguiente:

- Realice varias corridas del programa variando los parámetros de las funciones buscando realizar la convolución entre señales con diferentes características.

- Modifique el código para incorporar adelantos y atrasos a las señales. Observe los resultados y analice las propiedades de la convolución.
- ¿Qué puede concluir sobre el número de muestras de la señal resultante en comparación con las señales originales?

AUTOEVALUACIÓN:

En este apartado debe realizar una autoevaluación del proceso desarrollado y de las habilidades adquiridas con las actividades propuestas. Para ello responda las siguientes preguntas otorgando el valor porcentual (0 - 100 %) a cada una de ellas.

1. ¿Desarrolló la totalidad de las actividades propuestas?
2. ¿La metodología le permitió construir saberes significativos que le aporten al desarrollo del tema planteado?
3. ¿Qué tanto fue su grado de dedicación durante el desarrollo de las actividades planteadas?
4. ¿Qué tanto fue su grado de interés en el tema propuesto?
5. Otorgue un valor porcentual a cada uno de los indicadores de las metas propuestas según su cumplimiento

RETROALIMENTACIÓN:

En esta sección se espera que, a partir de lo vivido durante el desarrollo de las actividades propuestas, Ud pueda dar algunas recomendaciones o sugerencias sobre el tema y el desarrollo de estas. Tenga en cuenta que sus aportes enriquecen el ejercicio docente, gracias.