## Taller de Derivación e Integración Numérica

### Análisis Numérico

1. **Derivación**

Teniendo en cuenta el teorema:

Supóngase que se tienen $\{x_0, \dots, x_n\}$ $n$+1 valores distintos en algún intervalo $I$ y que $f(x) \in C^{n+1}(I)$ entonces, existe $P(x)$ para algún $\xi(x) \in I$ talque:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{i=n}(x - x_i)$$

Caso 1 Hacia adelante:

Luego, para $f(x_0) \approx$ con $x_0 \in I$ y donde $x_1 = x_0 + h$ se tiene que la formula dados dos puntos está por:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f^{"}(\xi(x))$$

Para valores pequeños de $h$ el error está acotado por $\frac{|hM|}{2}$ con $M$ es una cota de $|f^{"}(x)|$

a. Teniendo en cuenta lo anterior, genere una tabla para evaluar el valor aproximado $f'(x) = xcox$de $\boldsymbol{f^{\acute{}}(1.8)} \approx$ para los siguientes valores de $h =$ $0.1, 0.01, 0.0011, 0.0001$.
b. Estime el valor aproximado de las cotas del error para el problema anterior
c. Cuál es el valor de $h$ que proporciona una aproximación con una precisión de $10^{-4}$
d. Supóngase que se tienen tres puntos dados por $x_0$; $x_1 = x_0 + h$; $x_2 = x_0 + 2h$ Encuentre la formula conocida de tres puntos para determinar una aproximación de $f'(x_0)$ Donde, $\xi_0$se encuentra entre $x_0$ y $x_0 + 2h$. Utilice está fórmula para encontrar $\approx$ $f^{\acute{}}(1.8)$
e. Realice una modificación de la fórmula de los tres puntos, tomando valores entre $(x_0 - h)$ y $(x_0 + h)$ y compare la magnitud del error con la fórmula de la parte e.
f. Utilice la fórmula para cinco puntos alrededor de $x_0$ y aplíquela y compárela con todas las formulas anteriores
g. Aplique la fórmula adecuada para aproximar $f^{"}(1.8)$ justifique su respuesta
h. Teniendo en cuenta que el error total $(h)$= error de redondeo + error de truncamiento dado por: $e(h) = \frac{\xi}{h} + \frac{h^2}{6}M$ como una función del tamaño del paso. Encuentre el tamaño óptimo del paso.
i. El siguiente código está dado para la aproximar $f'(1)$; $f(x) = xe^x$, realice una gráfica que muestre como varia la precisión en función de $h$

```
#Comportamiento del error en diferenciación numérica
from math import*
def f(x):return x*exp(x)
r=5.436563656918091            #Valor exacto con 16 decimales
h=0.1
for i in range(15):
    d=(f(1+h)-f(1))/h
    e=abs(r-d)
    print('%18.15f %18.15f %18.15f %18.15f'%(h,r,d,e))
    h=h/10
```

j. Aplicación: En un circuito con un voltaje $E(t)$ y una inductancia $L$ se tiene que: $E(T) = L\frac{di}{dt} + Ri$ donde $R$ es la resistencia e $i$ es la corriente. La siguiente tabla muestra la medida de la corriente para varios instantes de tiempo (segundos), con $R$=0.142 ohms y $L$=0.98 henries. Aproxime el voltaje para los valores de $t$

| $t$ | 1.00 | 1.01 | 1.02 | 1.03 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 3.10 | 3.12 | 3.14 | 3.18 | 3.24 |