Taller 2

Jimenez Nelson, Velandia Joan

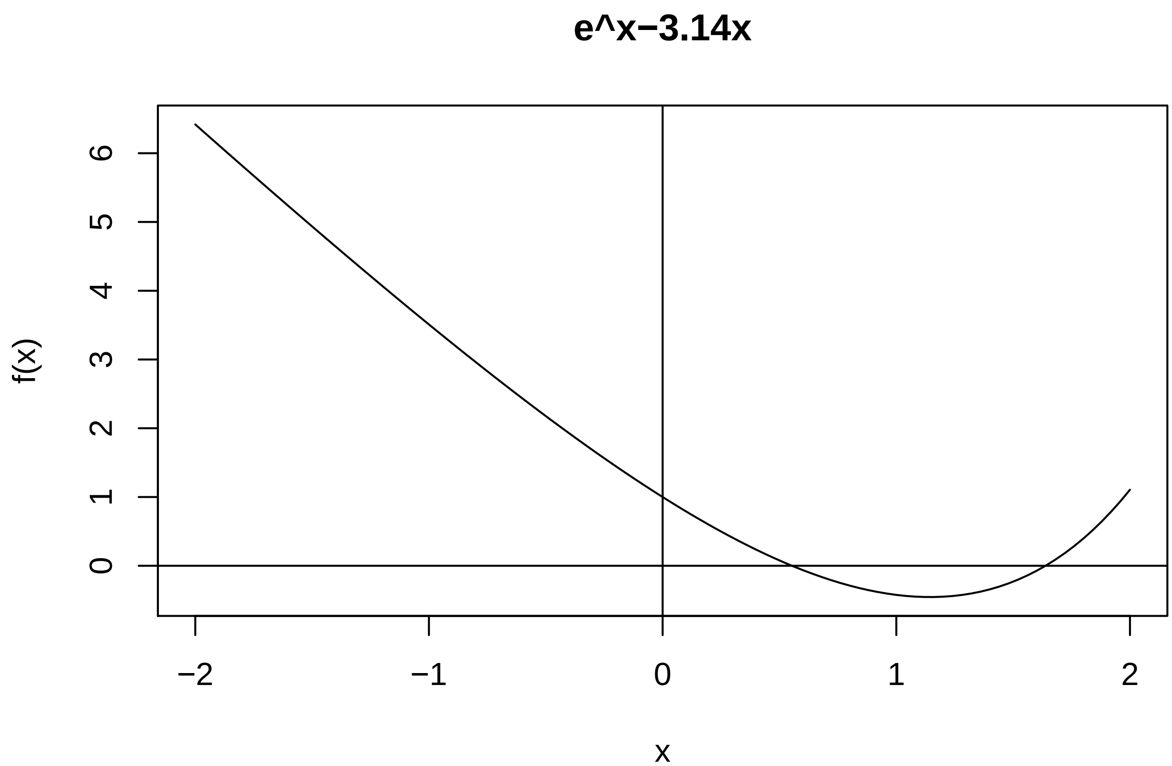
4 de agosto de 2019

Método de bisección

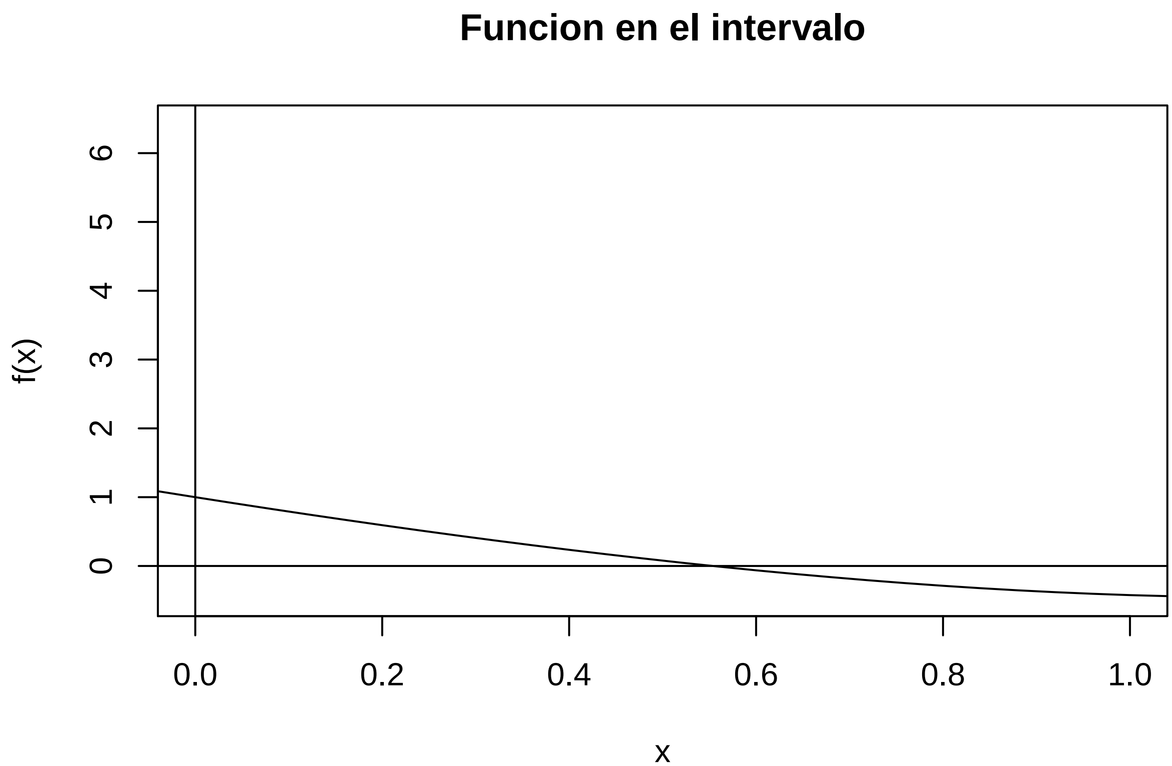
Una funcion f continua en un intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ tiene signo contrario a $f(b)$, entonces existe por lo menos un punto r en $[a, b]$tal que $f(r) = 0$.

Para la función $f(x) = e^x - pi * x$

Se muestra la gráfica a continuación;



Se muestra la gráfica en el intervalo 1 donde se encontro una raiz:

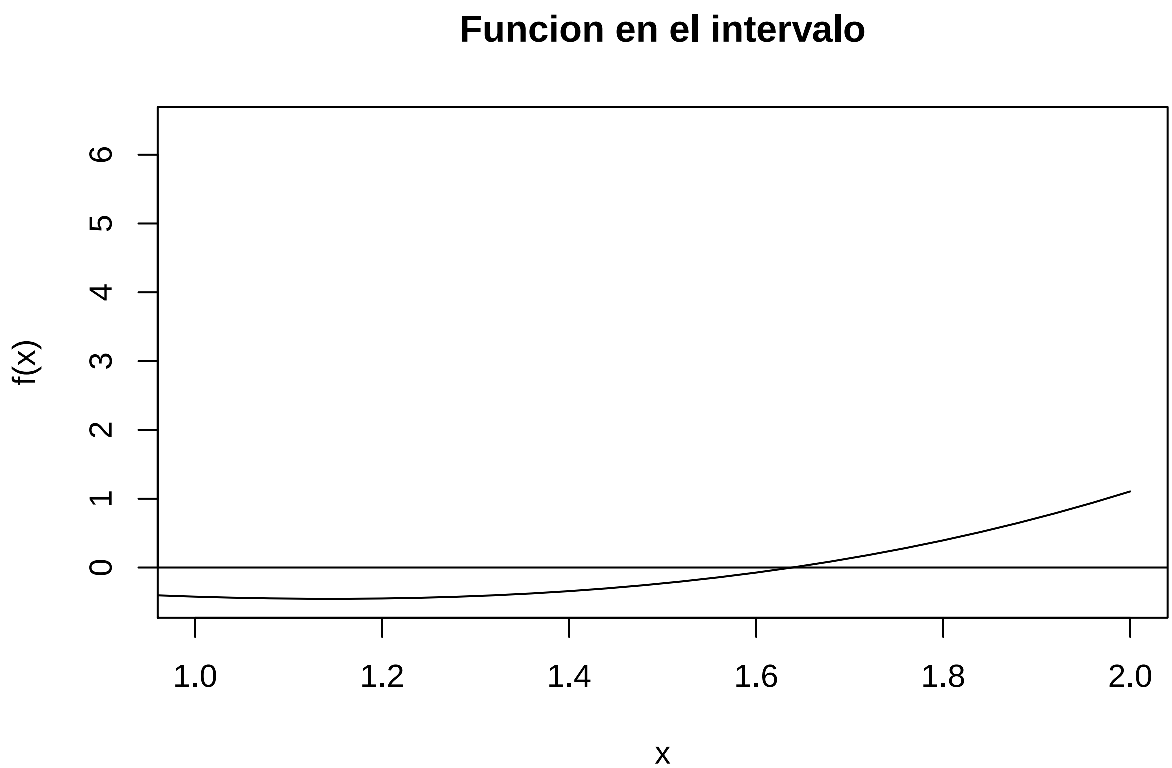


Se muestra la tabla de iteraciones, resultado y errores, para la primera raiz encontrada

```
##   Iteracion          a            b            Raiz          Error
##  1.0000000      0.5000000    1.0000000    0.5000000     0.2500000
##  2.0000000      0.5000000    0.7500000    0.7500000     0.1250000
##  3.0000000      0.5000000    0.6250000    0.6250000     0.0625000
##  4.0000000      0.5000000    0.5625000    0.5625000     0.0312500
##  5.0000000      0.5312500    0.5625000    0.5312500     0.0156250
##  6.0000000      0.5468750    0.5625000    0.5468750     0.0078125
##  7.0000000      0.5468750    0.5546875    0.5546875     0.0039062
##  8.0000000      0.5507812    0.5546875    0.5507812     0.0019531
##  9.0000000      0.5527344    0.5546875    0.5527344     0.0009766
##  10.0000000     0.5537109    0.5546875    0.5537109     0.0004883
##  11.0000000     0.5537109    0.5541992    0.5541992     0.0002441
##  12.0000000     0.5537109    0.5539551    0.5539551     0.0001221
##  13.0000000     0.5537109    0.5538330    0.5538330     0.0000610
##  14.0000000     0.5537720    0.5538330    0.5537720     0.0000305
##  15.0000000     0.5538025    0.5538330    0.5538025     0.0000153
##  16.0000000     0.5538177    0.5538330    0.5538177     0.0000076
##  17.0000000     0.5538254    0.5538330    0.5538254     0.0000038
##  18.0000000     0.5538254    0.5538292    0.5538292     0.0000019
##  19.0000000     0.5538254    0.5538273    0.5538273     0.0000010
##  20.0000000     0.5538263    0.5538273    0.5538263     0.0000005
##  21.0000000     0.5538268    0.5538273    0.5538268     0.0000002
##  22.0000000     0.5538268    0.5538270    0.5538270     0.0000001
##  23.0000000     0.5538269    0.5538270    0.5538269     0.0000001
##  24.0000000     0.5538270    0.5538270    0.5538270     0.0000000
```

```
##  25.0000000     0.5538270      0.5538270      0.5538270      0.0000000
##  26.0000000     0.5538270      0.5538270      0.5538270      0.0000000
## Cero de function (x)  signif(exp(1), 8)^x - signif(pi, 8) * x en el intervalo [ 0 , 1 ]
##  es aprox. 0.553827 con error <= 7.450581e-09
```

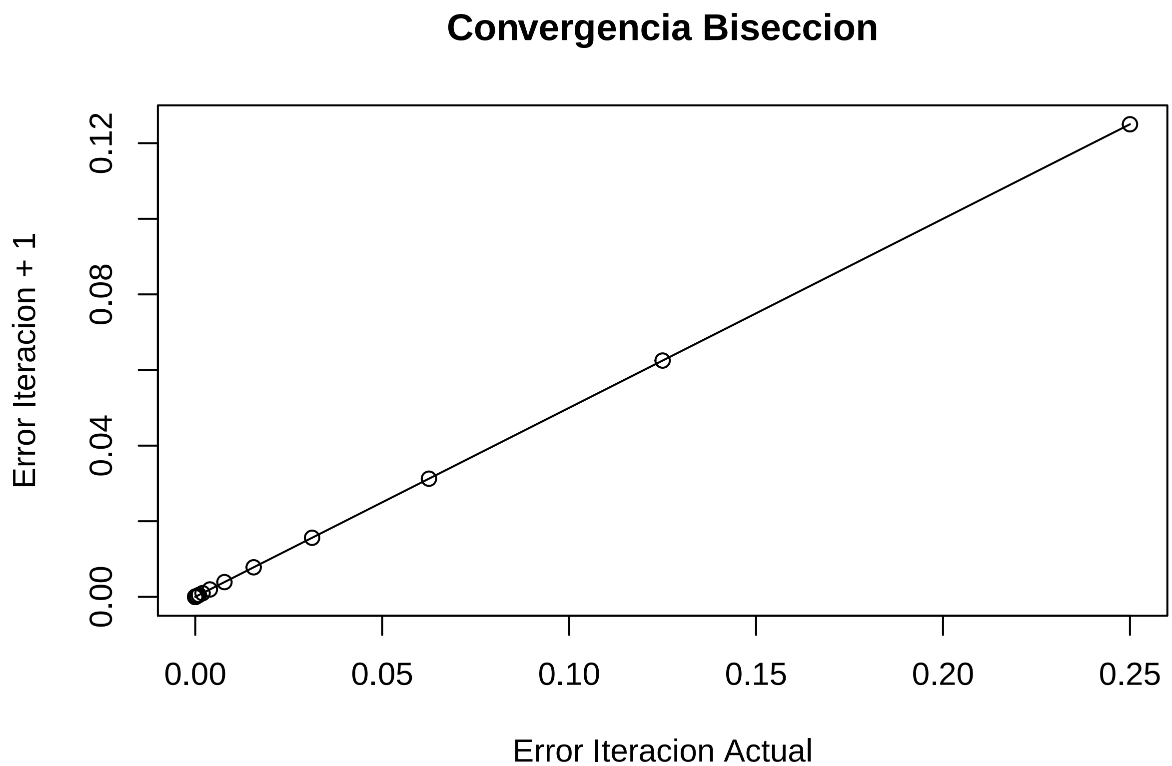
Se muestra la gráfica en el intervalo 2 donde se encontro otra raiz:



Se muestra la tabla de iteraciones, resultado y errores, y convergencia para la primera raiz

```
##   Iteracion         a             b             Raiz          Error
##  1.0000000      1.5000000      2.0000000      1.5000000      0.2500000
##  2.0000000      1.5000000      1.7500000      1.7500000      0.1250000
##  3.0000000      1.6250000      1.7500000      1.6250000      0.0625000
##  4.0000000      1.6250000      1.6875000      1.6875000      0.0312500
##  5.0000000      1.6250000      1.6562500      1.6562500      0.0156250
##  6.0000000      1.6250000      1.6406250      1.6406250      0.0078125
##  7.0000000      1.6328125      1.6406250      1.6328125      0.0039062
##  8.0000000      1.6367188      1.6406250      1.6367188      0.0019531
##  9.0000000      1.6367188      1.6386719      1.6386719      0.0009766
##  10.0000000     1.6376953      1.6386719      1.6376953      0.0004883
##  11.0000000     1.6381836      1.6386719      1.6381836      0.0002441
##  12.0000000     1.6384277      1.6386719      1.6384277      0.0001221
##  13.0000000     1.6384277      1.6385498      1.6385498      0.0000610
##  14.0000000     1.6384888      1.6385498      1.6384888      0.0000305
##  15.0000000     1.6385193      1.6385498      1.6385193      0.0000153
##  16.0000000     1.6385193      1.6385345      1.6385345      0.0000076
##  17.0000000     1.6385269      1.6385345      1.6385269      0.0000038
##  18.0000000     1.6385269      1.6385307      1.6385307      0.0000019
```

```
## 19.0000000     1.6385269      1.6385288      1.6385288      0.0000010
## 20.0000000     1.6385279      1.6385288      1.6385279      0.0000005
## 21.0000000     1.6385283      1.6385288      1.6385283      0.0000002
## 22.0000000     1.6385283      1.6385286      1.6385286      0.0000001
## 23.0000000     1.6385285      1.6385286      1.6385285      0.0000001
## 24.0000000     1.6385285      1.6385285      1.6385285      0.0000000
## 25.0000000     1.6385285      1.6385285      1.6385285      0.0000000
## 26.0000000     1.6385285      1.6385285      1.6385285      0.0000000
## Cero de function (x)  signif(exp(1), 8)^x - signif(pi, 8) * x en el intervalo [ 1 , 2 ]
##  es aprox. 1.638529 con error <= 7.450581e-09
```



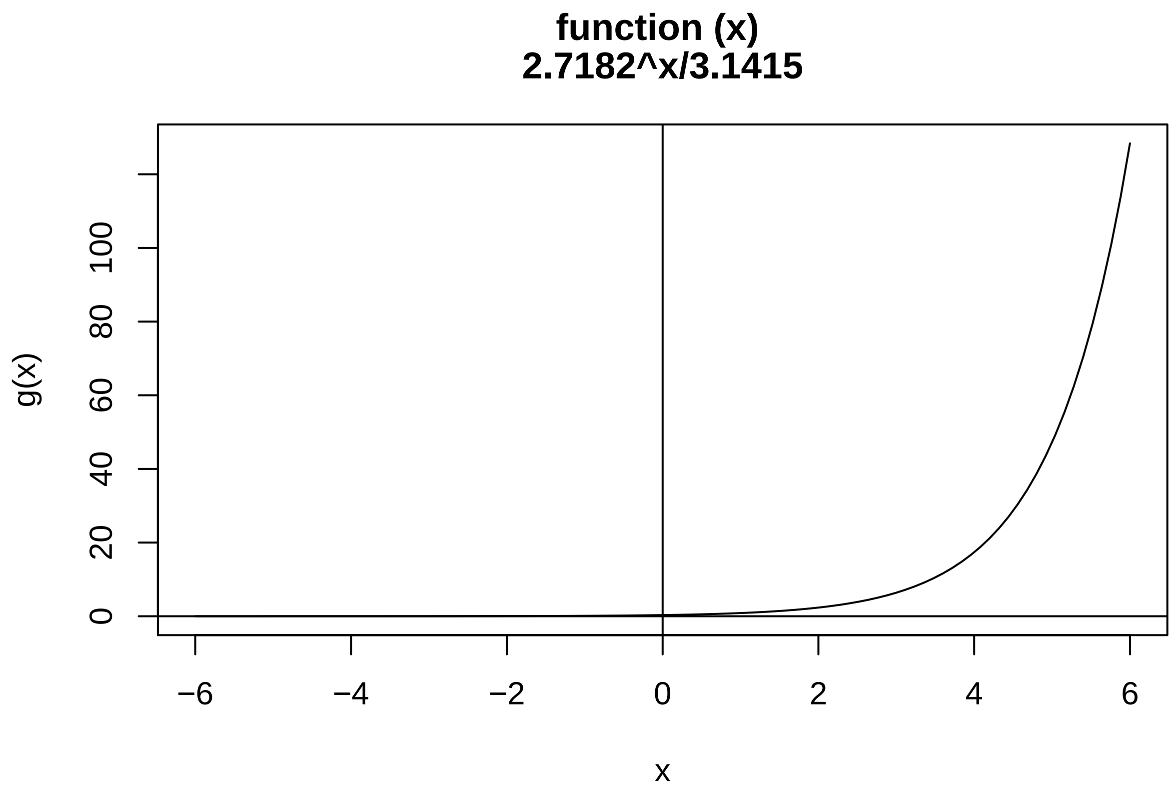
NOTA: La grafica de convergencia y propagacion de error en los metodos de este taller son similares en el sentido de su curvatura(orden), por ello solo se mostrara una vez al hallar la segunda raíz.

Método de punto fijo

Consiste ene re-escribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $g(x) = x$. Esta ecuacion satisface la misma raiz, un punto fijo de la r de la ecuación $g(x) = x$ es equivalente a una raiz real de la ecuación $f(x) = 0$: $r = g(r) \leftrightarrow f(r) = 0$

Vamos a usar la misma funcion f del método anterior

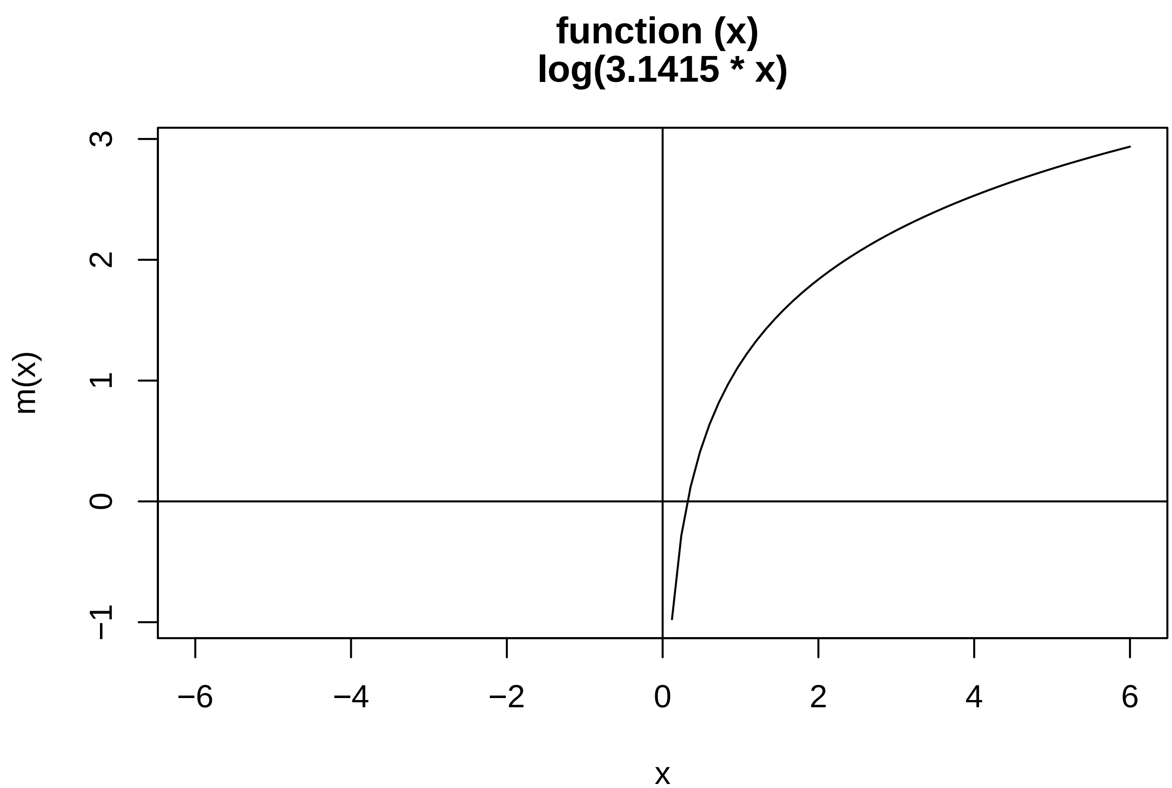
Hallando la primera raiz con la función g como $e^x/\pi x$ y tomando como valor incial a 0 obtenemos:




```
##
##   Iteracion      Resultado       Error
##   1.0000000      0.3183193      1.0000000
##   2.0000000      0.4376260      0.2726225
##   3.0000000      0.4930781      0.1124612
##   4.0000000      0.5211918      0.0539412
##   5.0000000      0.5360519      0.0277214
##   6.0000000      0.5440769      0.0147498
##   7.0000000      0.5484606      0.0079927
##   8.0000000      0.5508701      0.0043739
##   9.0000000      0.5521989      0.0024065
##   10.0000000     0.5529332      0.0013279
##   11.0000000     0.5533393      0.0007340
##   12.0000000     0.5535641      0.0004060
##   13.0000000     0.5536885      0.0002247
##   14.0000000     0.5537574      0.0001244
##   15.0000000     0.5537956      0.0000689
##   16.0000000     0.5538167      0.0000382
##   17.0000000     0.5538284      0.0000211
##   18.0000000     0.5538349      0.0000117
##   19.0000000     0.5538385      0.0000065
##   20.0000000     0.5538405      0.0000036
##   21.0000000     0.5538416      0.0000020
##   22.0000000     0.5538422      0.0000011
##   23.0000000     0.5538425      0.0000006
##   24.0000000     0.5538427      0.0000003
```

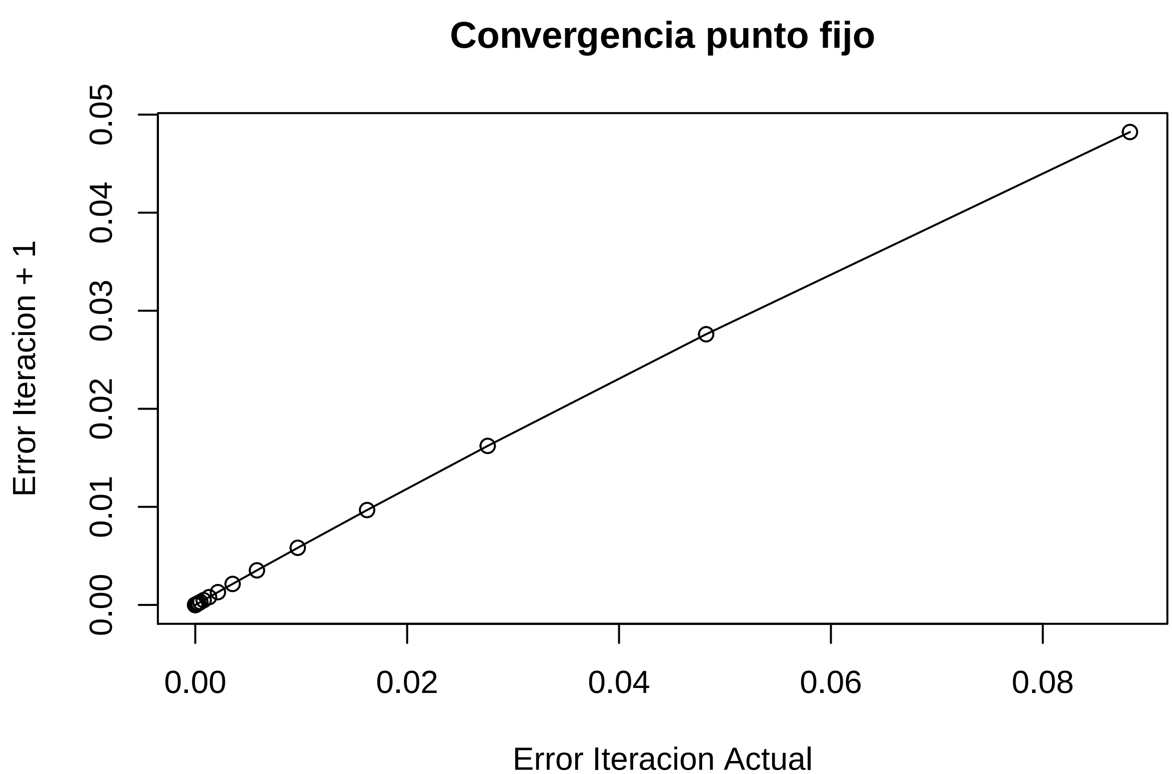
```
##  25.0000000      0.5538428       0.0000002
##  26.0000000      0.5538429       0.0000001
##  27.0000000      0.5538429       0.0000001
##  28.0000000      0.5538429       0.0000000
##  29.0000000      0.5538429       0.0000000
## Cero de  function (x)  2.7182^x/3.1415 es aproximadamente  0.5538429 con valor incicial x_0 =  0
## y con error menor que  1e-08
```

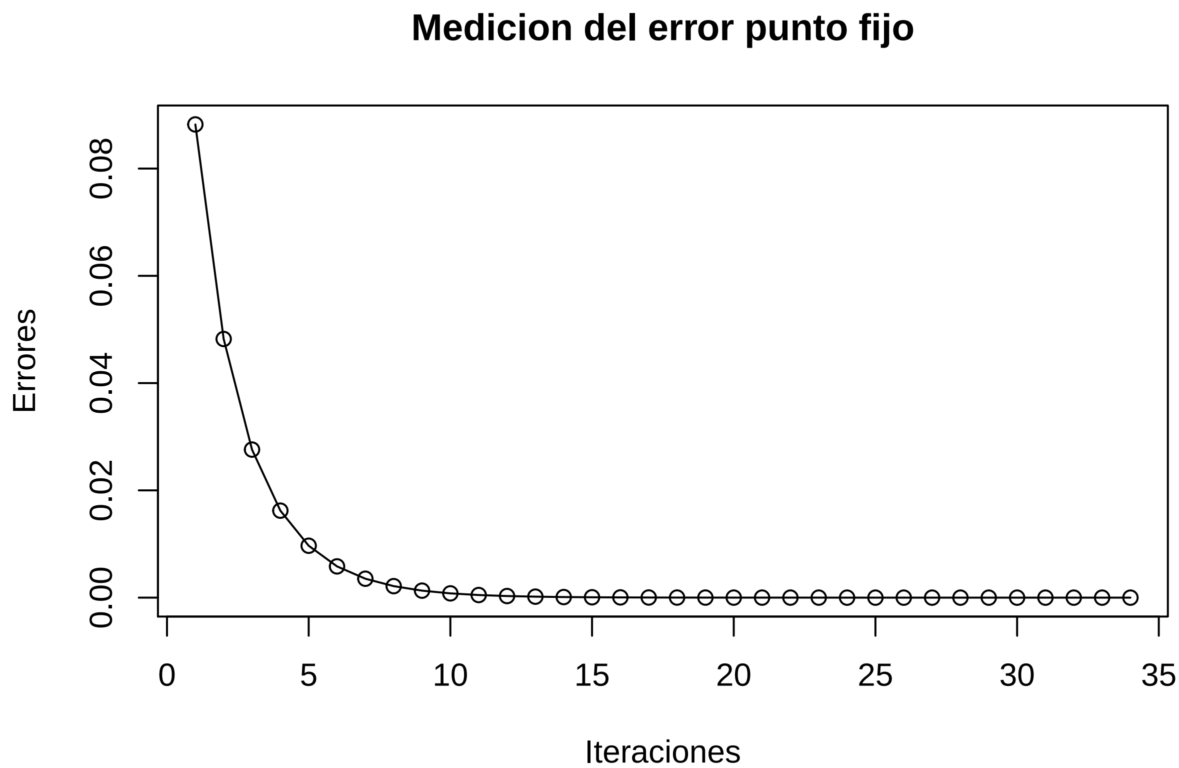
Hallando la segunda raiz con función g como $ln(\pi x)$ y tomando como valor incial a 2 obtenemos:




```
##
##  Iteracion       Resultado         Error
##  1.0000000       1.8378476       0.0882295
##  2.0000000       1.7532955       0.0482247
##  3.0000000       1.7061975       0.0276040
##  4.0000000       1.6789676       0.0162182
##  5.0000000       1.6628795       0.0096749
##  6.0000000       1.6532511       0.0058239
##  7.0000000       1.6474441       0.0035249
##  8.0000000       1.6439255       0.0021404
##  9.0000000       1.6417873       0.0013023
##  10.0000000      1.6404859       0.0007933
##  11.0000000      1.6396929       0.0004836
##  12.0000000      1.6392093       0.0002950
##  13.0000000      1.6389144       0.0001800
##  14.0000000      1.6387345       0.0001098
##  15.0000000      1.6386247       0.0000670
```

```
## 16.0000000      1.6385577       0.0000409
## 17.0000000      1.6385168       0.0000250
## 18.0000000      1.6384918       0.0000152
## 19.0000000      1.6384766       0.0000093
## 20.0000000      1.6384673       0.0000057
## 21.0000000      1.6384616       0.0000035
## 22.0000000      1.6384582       0.0000021
## 23.0000000      1.6384560       0.0000013
## 24.0000000      1.6384548       0.0000008
## 25.0000000      1.6384540       0.0000005
## 26.0000000      1.6384535       0.0000003
## 27.0000000      1.6384532       0.0000002
## 28.0000000      1.6384530       0.0000001
## 29.0000000      1.6384529       0.0000001
## 30.0000000      1.6384528       0.0000000
## 31.0000000      1.6384528       0.0000000
## 32.0000000      1.6384528       0.0000000
## 33.0000000      1.6384528       0.0000000
## 34.0000000      1.6384527       0.0000000
## Cero de  function (x)  log(3.1415 * x) es aproximadamente  1.638453 con valor incicial x_0 =  2
## y con error menor que  1e-08
```





Método de Newton

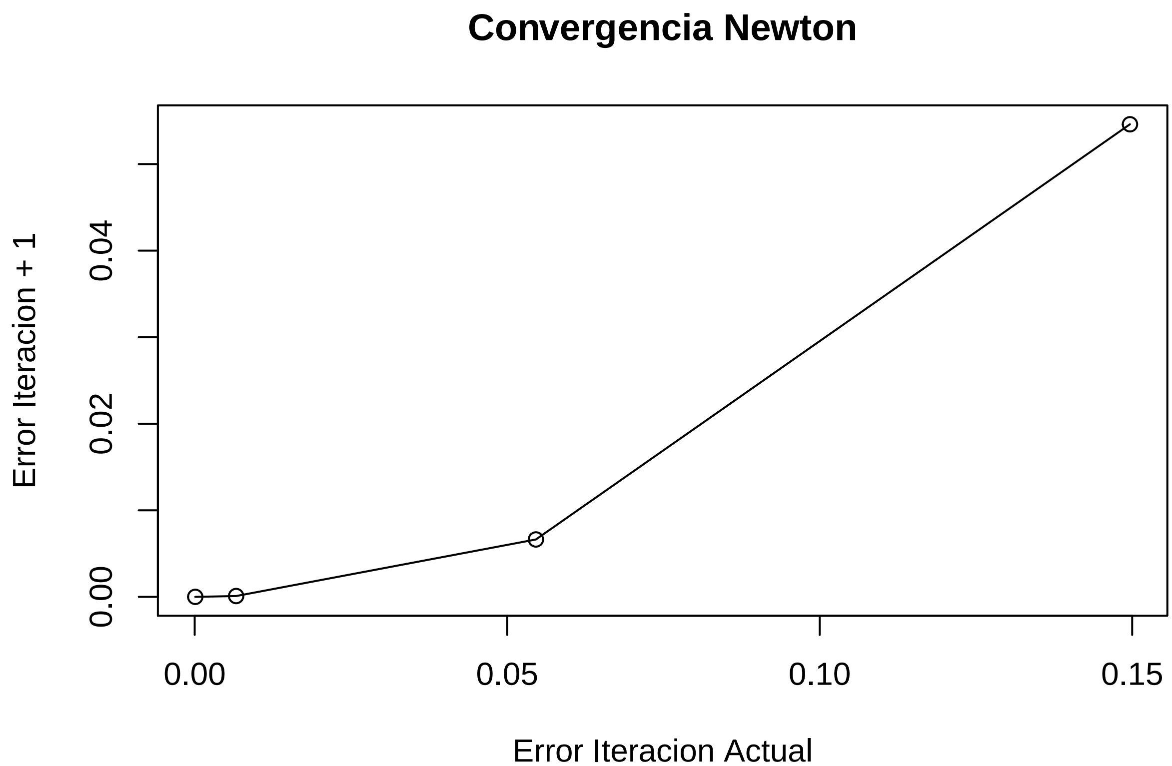
Es una formula eficiente para encontrar r. Es un caso especial del metodo deñ punto fijo eligiendo la función g de tal manera que la convergencia sea de segundo orden

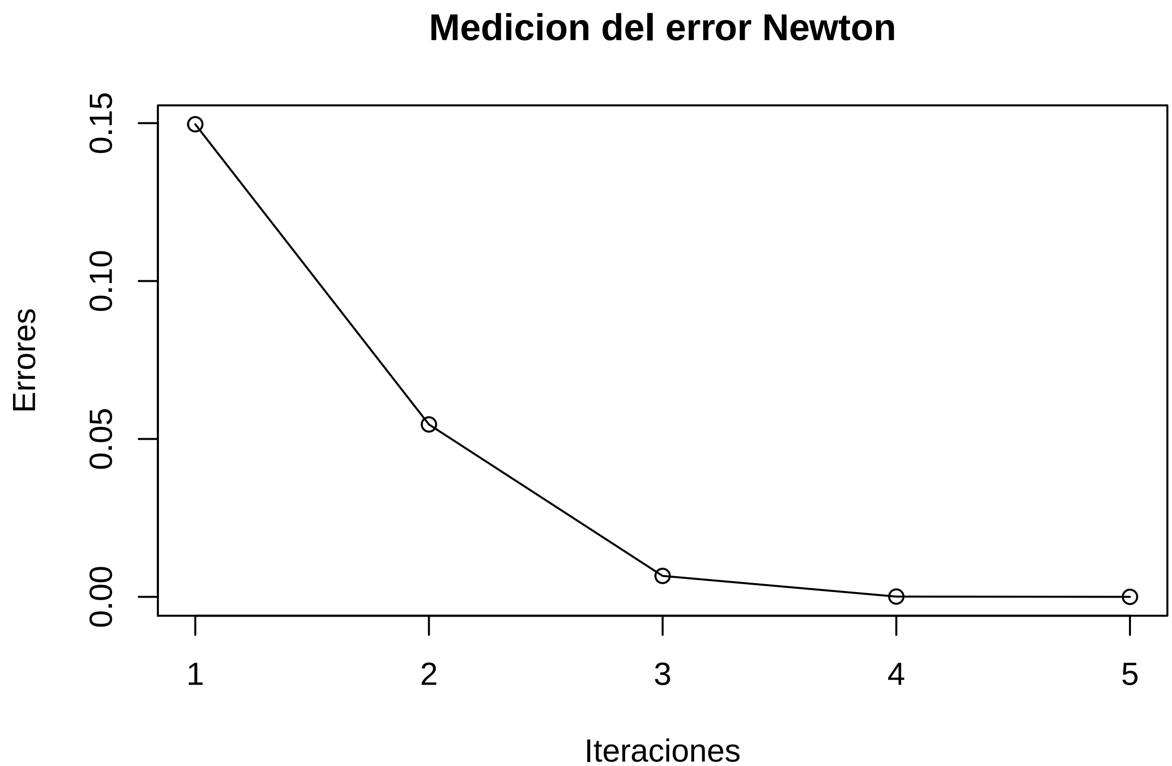
Hallamos la primera raiz con un valor incial de 0

```
##
##  Iteracion         Cero        f(cero)          Error
##  1.0000000      0.0000000      1.0000000      1.0000000
##  2.0000000      0.4669558      0.1281668      0.1507338
##  3.0000000      0.5498345      0.0056325      0.0072199
##  4.0000000      0.5538331      0.0000139      0.0000179
## Raiz de  2.7182^x-3.1415*x es aproximadamente  0.553843 con valor incicial x_0 =  0
## y con error menor que  6.07817e-11
```

Hallamos la segunda raiz con un valor incial de 2

```
##
##  Iteracion         Cero        f(cero)          Error
##  1.0000000      2.0000000      1.1056112      0.1496462
##  2.0000000      1.7396656      0.2299808      0.0545987
##  3.0000000      1.6495996      0.0224197      0.0066317
##  4.0000000      1.6387319      0.0003062      0.0000931
##  5.0000000      1.6385793      0.0000001      0.0000000
```


Convergencia Newton
Error Iteracion + 1
0.00
0.02
0.04
0.00
0.05
0.10
0.15
Error Iteracion Actual




```
## Raiz de  2.7182^x-3.1415*x es aproximadamente  1.638579 con valor incicial x_0 =  2
## y con error menor que  -1.771095e-15
```

Método de la secante

Es una derivacion de Newton donde se cambia la derivada $f'(x_k)$ por una aproximacion.

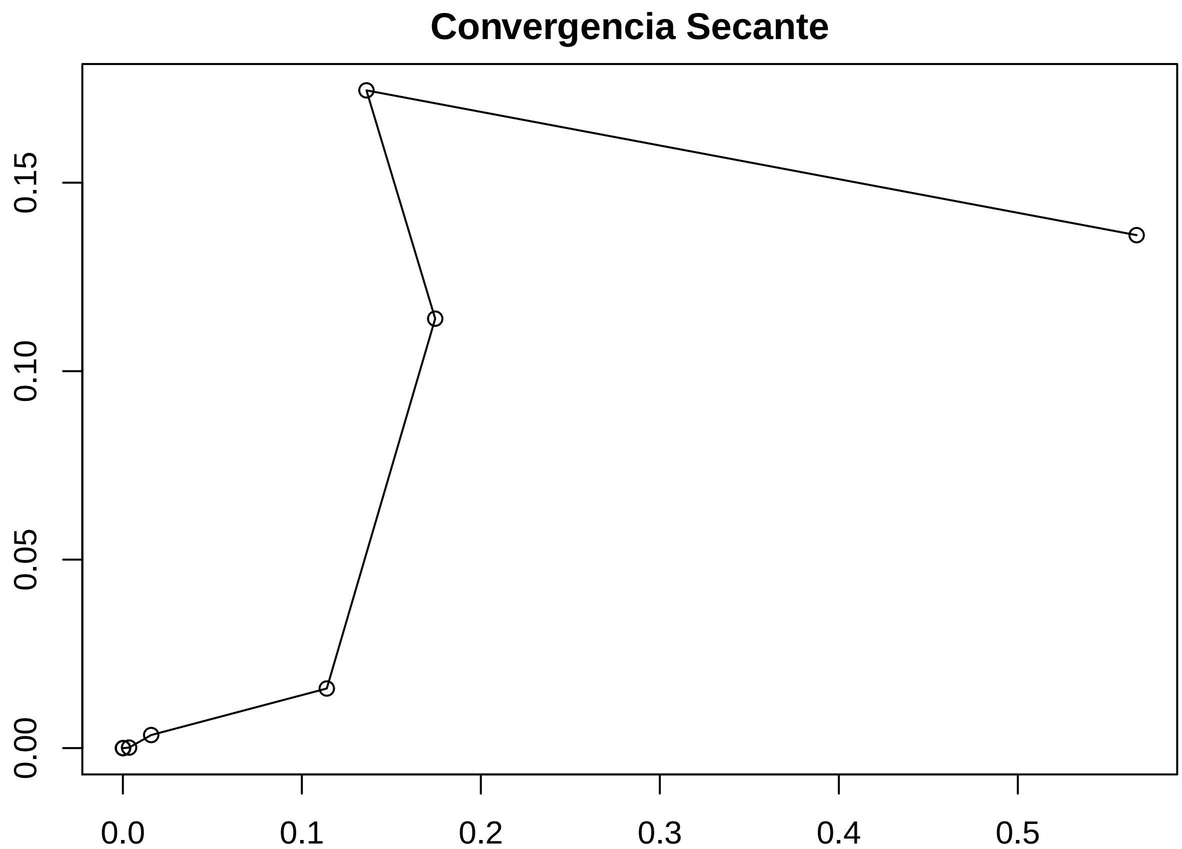
Usamos el intervalo $[0, 1]$ para hallar la primera raiz.

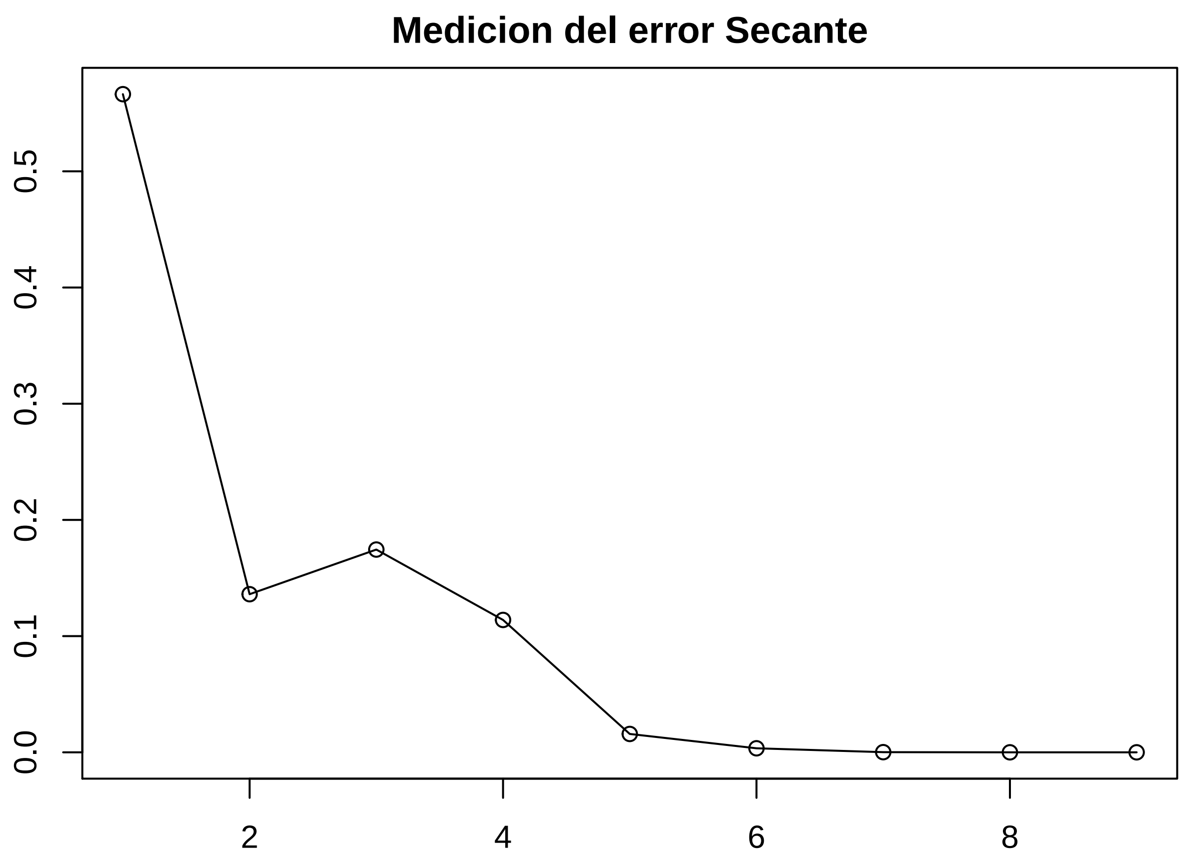
```
##
##  Iteracion         Cero        f(cero)           Error
##  1.0000000      1.0000000      0.7025872      0.2974128
##  2.0000000      0.7025872      0.4643490      0.3390870
##  3.0000000      0.4643490      0.5626182      0.2116280
##  4.0000000      0.5626182      0.5542803      0.0148197
##  5.0000000      0.5542803      0.5538245      0.0008224
##  6.0000000      0.5538245      0.5538270      0.0000045
##  7.0000000      0.5538270      0.5538270      0.0000000
## Raiz de  function (x)  signif(exp(1), 8)^x - signif(pi, 8) * x es aproximadamente  0.553827
## en el intervalo [ 0 , 1 ] y con error menor que  1.268321e-09
```

Usamos el intervalo $[1, 2]$ para hallar la primera raiz.

```
##
##  Iteracion         Cero        f(cero)           Error
##  1.0000000      2.0000000      1.2768219      0.3615891
##  2.0000000      1.2768219      1.4779407      0.1575152
##  3.0000000      1.4779407      1.7903559      0.2113855
```

```
##  4.0000000       1.7903559       1.6072480       0.1022746
##  5.0000000       1.6072480       1.6330709       0.0160665
##  6.0000000       1.6330709       1.6387555       0.0034809
##  7.0000000       1.6387555       1.6385269       0.0001395
##  8.0000000       1.6385269       1.6385285       0.0000010
##  9.0000000       1.6385285       1.6385285       0.0000000
## Raiz de  function (x)  signif(exp(1), 8)^x - signif(pi, 8) * x es aproximadamente  1.638529
## en el intervalo [ 1 , 2 ] y con error menor que  2.837987e-10
```





Método de posición Falsa

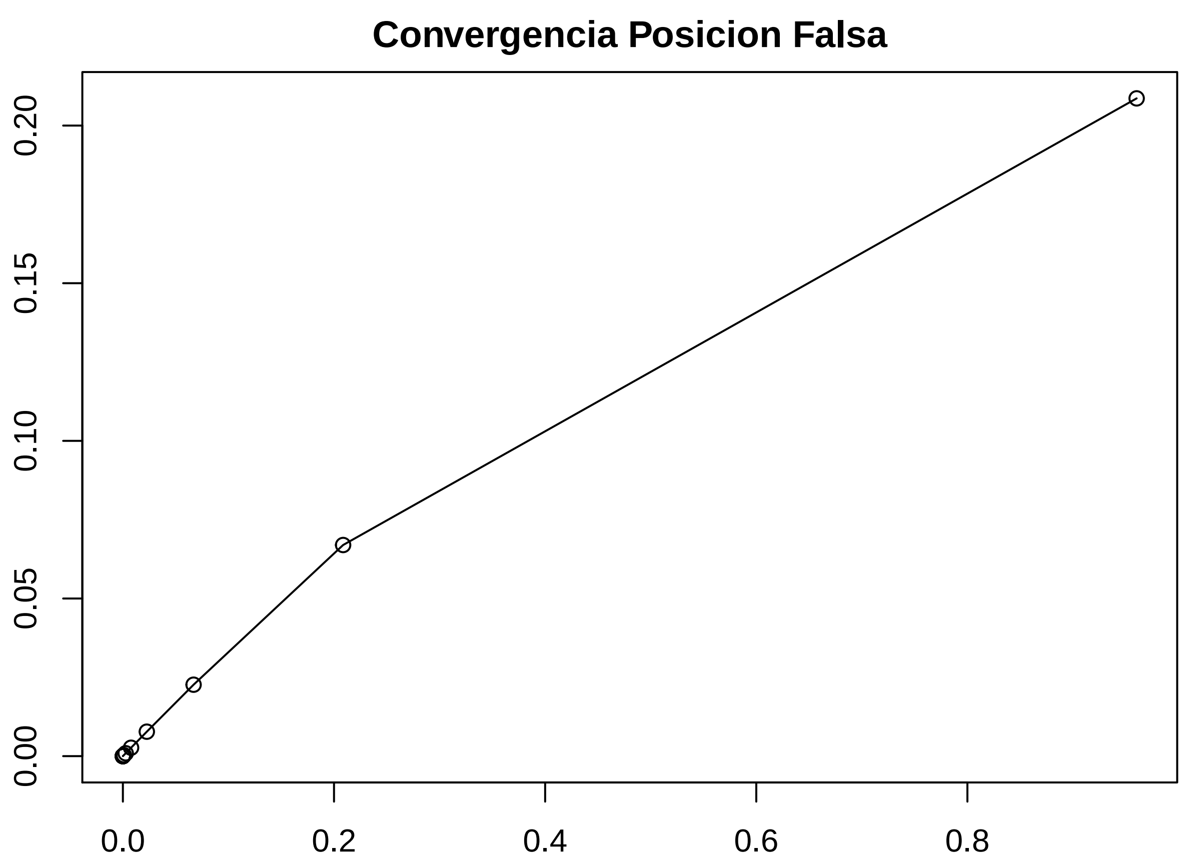
Calcula la recta secante que une los puntos extremos $(a_1, f(a_1))$ y $(b_1, f(b_1))$. Luego se determina el punto m en que esta recta corta el eje x y ester valor entra a jugar el papel que el método de bisección jugaba el punto medio.

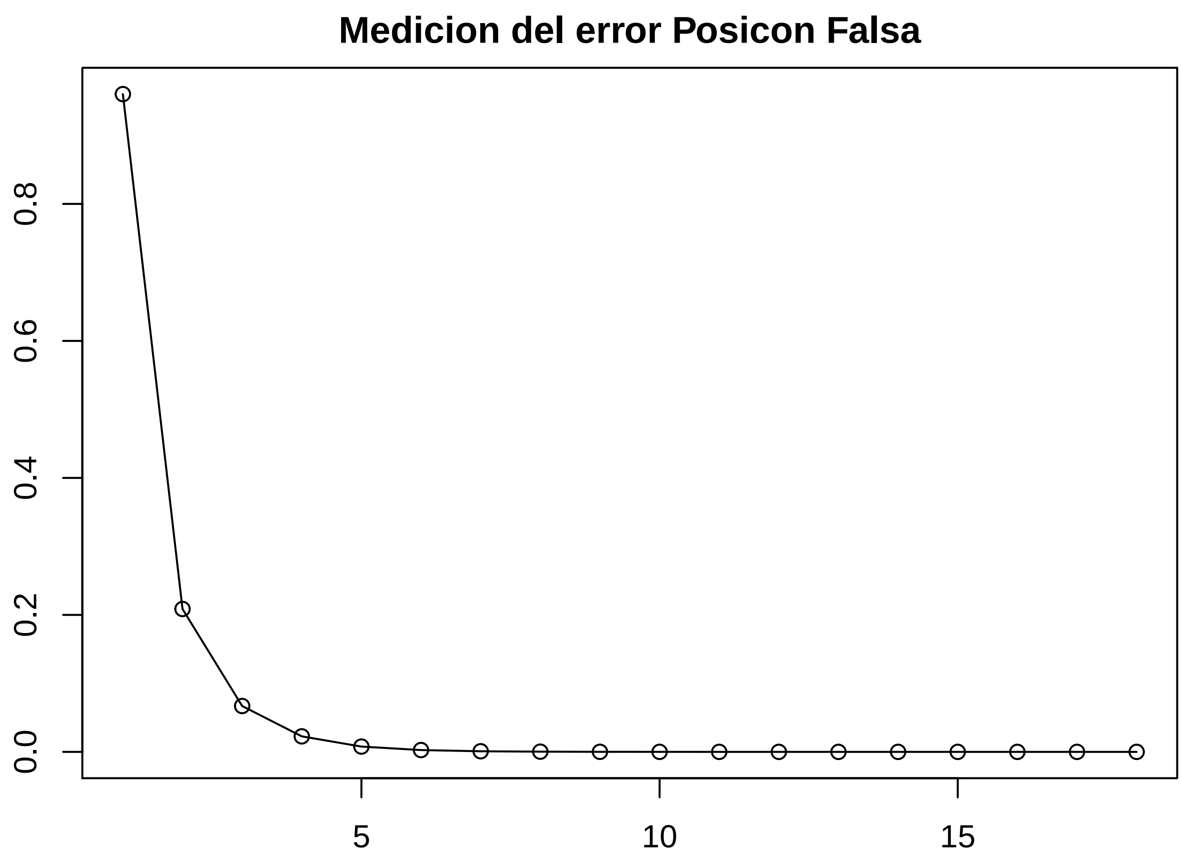
Usaremos el intervalo $[0, 1]$ para hallar la primera raiz

```
##
##  Iteracion         Cero          Error
##  1.0000000      0.7025872      0.1677084
##  2.0000000      0.5912673      0.0383767
##  3.0000000      0.5624449      0.0086647
##  4.0000000      0.5557674      0.0019428
##  5.0000000      0.5542617      0.0004348
##  6.0000000      0.5539243      0.0000973
##  7.0000000      0.5538488      0.0000218
##  8.0000000      0.5538319      0.0000049
##  9.0000000      0.5538281      0.0000011
##  10.0000000     0.5538273      0.0000002
##  11.0000000     0.5538271      0.0000001
##  12.0000000     0.5538270      0.0000000
##  13.0000000     0.5538270      0.0000000
##
## Raiz de  function (x)  ((exp(1)^x) - (pi * x)) es aproximadamente  0.553827
## en el intervalo [ 0 , 1 ] y con error menor que   0.0000000
```

Usaremos el intervalo $[1, 2]$ para hallar la primera raiz

```
##
##  Iteracion          Cero          Error
##  1.0000000       1.2768218       0.9603109
##  2.0000000       1.4779406       0.2086259
##  3.0000000       1.5770629       0.0669592
##  4.0000000       1.6165158       0.0226616
##  5.0000000       1.6308429       0.0077624
##  6.0000000       1.6358694       0.0026682
##  7.0000000       1.6376114       0.0009181
##  8.0000000       1.6382125       0.0003161
##  9.0000000       1.6384196       0.0001088
##  10.0000000      1.6384910       0.0000375
##  11.0000000      1.6385155       0.0000129
##  12.0000000      1.6385240       0.0000044
##  13.0000000      1.6385269       0.0000015
##  14.0000000      1.6385279       0.0000005
##  15.0000000      1.6385282       0.0000002
##  16.0000000      1.6385284       0.0000001
##  17.0000000      1.6385284       0.0000000
##  18.0000000      1.6385284       0.0000000
##
## Raiz de  function (x)  ((exp(1)^x) - (pi * x)) es aproximadamente  1.638528
## en el intervalo [ 1 , 2 ] y con error menor que   0.0000000
```





Método de Aitken

Es un método de aceleracion de la convergencia de una sucesión que converge linealmente. Dada una suscesión $x = (x_n)n \in \mathbb{N}$, se calcila la nueva sucesión $\hat{x} = (\hat{x}_n)n \in \mathbb{N}$ definida como

$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - (x_{n+2} - x_{n+1})^2 / x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

que se puede escribir como:

$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - (\Delta x_{n+1})^2 / \Delta^2 x_n$

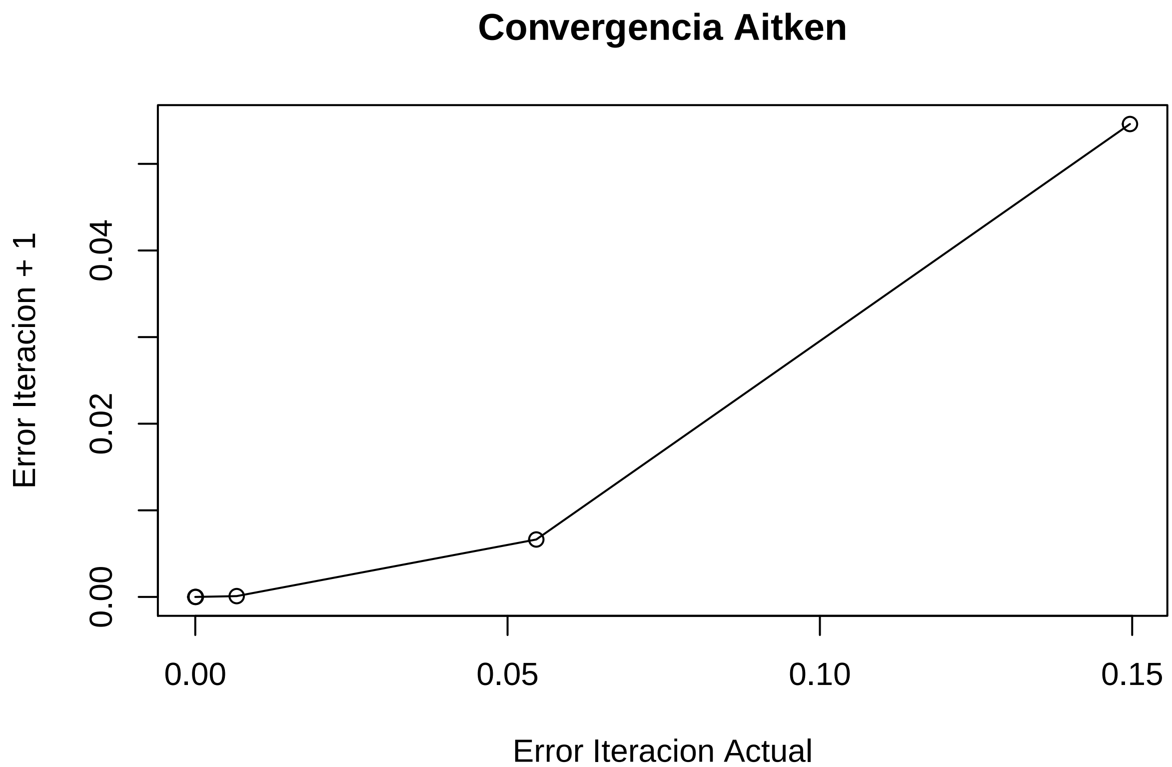
Hallaremos la primera raiz con una **multiplicidad** de 1 y un valor incial de 0

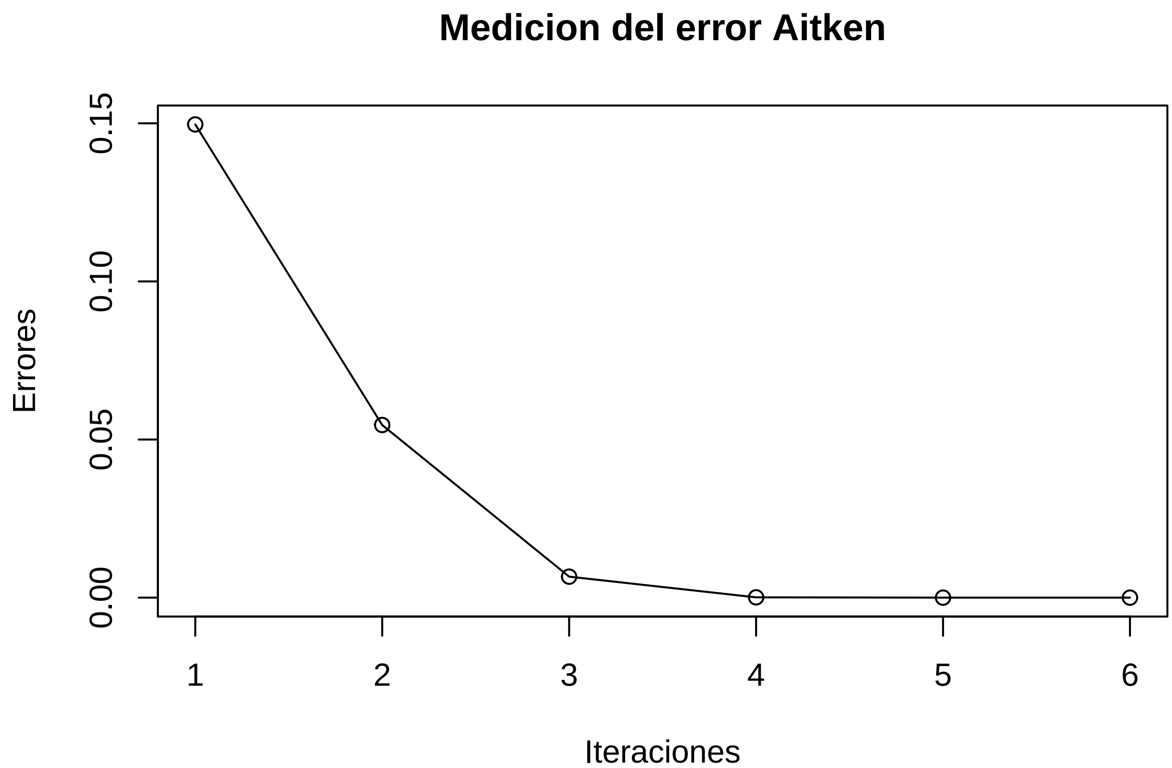
```
##
##  Iteracion          Cero          Error
##  1.0000000       0.4669558       0.4669558
##  2.0000000       0.5498345       0.0828786
##  3.0000000       0.5538331       0.0039986
##  4.0000000       0.5538430       0.0000099
##  5.0000000       0.5538430       0.0000000
##
## Raiz de  2.7182^x-3.1415*x es aproximadamente  0.553843  con un valor inicial 0 ,
## y una multiplicidad, 1 con error menor que   0.0000000
```

Hallaremos la primera raiz con una **multiplicidad** de 1 y un valor incial de 0

```
##
##  Iteracion          Cero          Error
##  1.0000000       1.7396656       0.2603344
```

```
## 2.0000000     1.6495996     0.0900660
## 3.0000000     1.6387319     0.0108676
## 4.0000000     1.6385793     0.0001526
## 5.0000000     1.6385793     0.0000000
## 6.0000000     1.6385793     0.0000000
```






```
##
## Raiz de  2.7182^x-3.1415*x es aproximadamente  1.638579  con un valor inicial 2 ,
## y una multiplicidad, 1 con error menor que   0.0000000
```

Metodo de Steffensen

El método de Steffensen tiene en cuenta la observación anterior y se construye combinando el método iterativo del punto fijo y el método de Aitken, de manera que solamente se considera una sucesión de la siguiente forma:

$x_0, x_1, \hat{x}_2 x_3 x_4 \hat{x}_5 x_6 x_7 \hat{x}_8$

o sea, cada dos iteraciones del punto fijo normal obtiene otro punto a partir de la fórmula:

$\hat{x}_n = x_n + \Delta x_n / 1 - \gamma_n$

Llegando a obtener una convergencia cuasicuadratica.

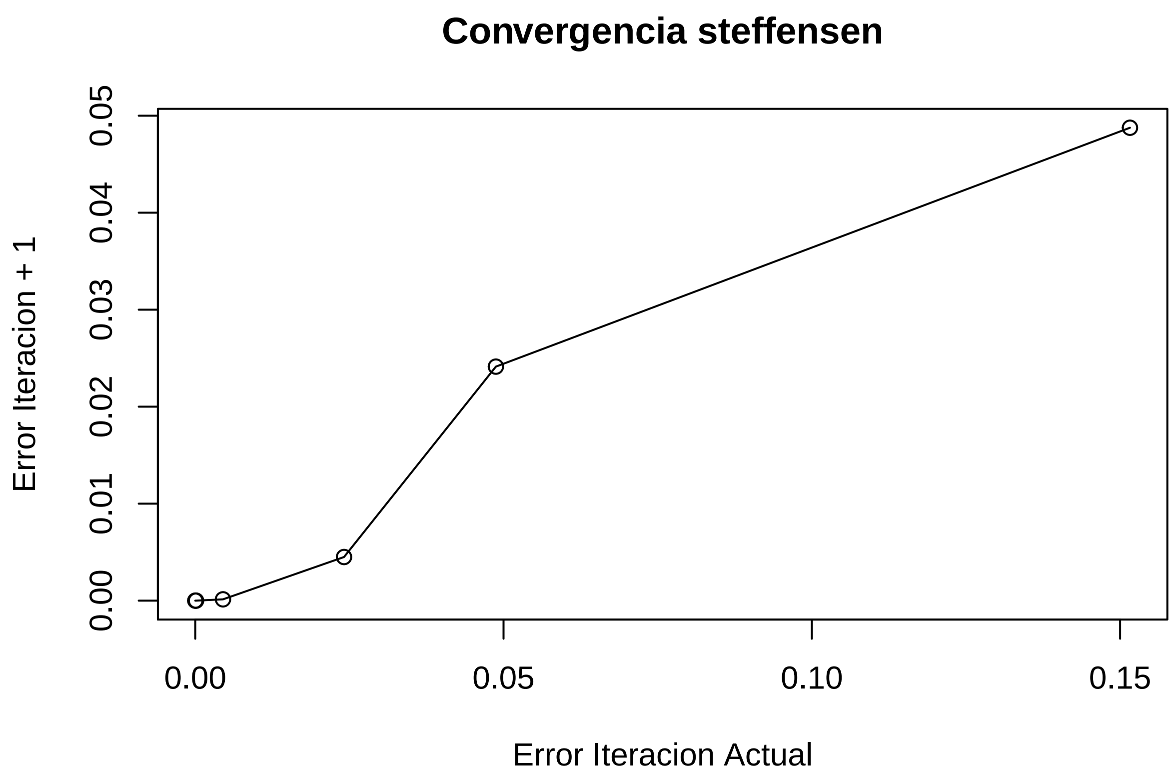
Se calcula la primer raíz con un valor inical de 0

```
##
##  Iteracion         Cero          Error
##  1.0000000      0.7025872      1.0000000
##  2.0000000      0.5579057      0.2593296
##  3.0000000      0.5538311      0.0073571
##  4.0000000      0.5538270      0.0000074
##  5.0000000      0.5538270      0.0000000
##
## Raiz de  function (x)  signif(exp(1), 8)^x - signif(pi, 8) * x es aproximadamente  0.553827
```

```
## con un valor inicial 0  y con error menor que   0.0000000
```

Se calcula la primer raíz con un valor inical de 1.5

```
##
##  Iteracion         Cero          Error
##  1.0000000       1.7680387       0.1516023
##  2.0000000       1.6858383       0.0487594
##  3.0000000       1.6461180       0.0241297
##  4.0000000       1.6387458       0.0044987
##  5.0000000       1.6385287       0.0001325
##  6.0000000       1.6385285       0.0000001
##  7.0000000       1.6385285       0.0000000
##
## Raiz de  function (x)  signif(exp(1), 8)^x - signif(pi, 8) * x es aproximadamente  1.638529
## con un valor inicial 1.5  y con error menor que   0.0000000
```



Método de Taylor

se aproximo $e^x - \pi x$ con un valor inicial de $x_0 = 0$ y el valor cercano = 0.1 con un grado 10 del polinomio de taylor. El resultado es:

```
## Resultado =  1 con un error relativo de 0 %
```

```
##
## Comprobación f(0) =  1
```

Método de investigación libre - Newton-downhill

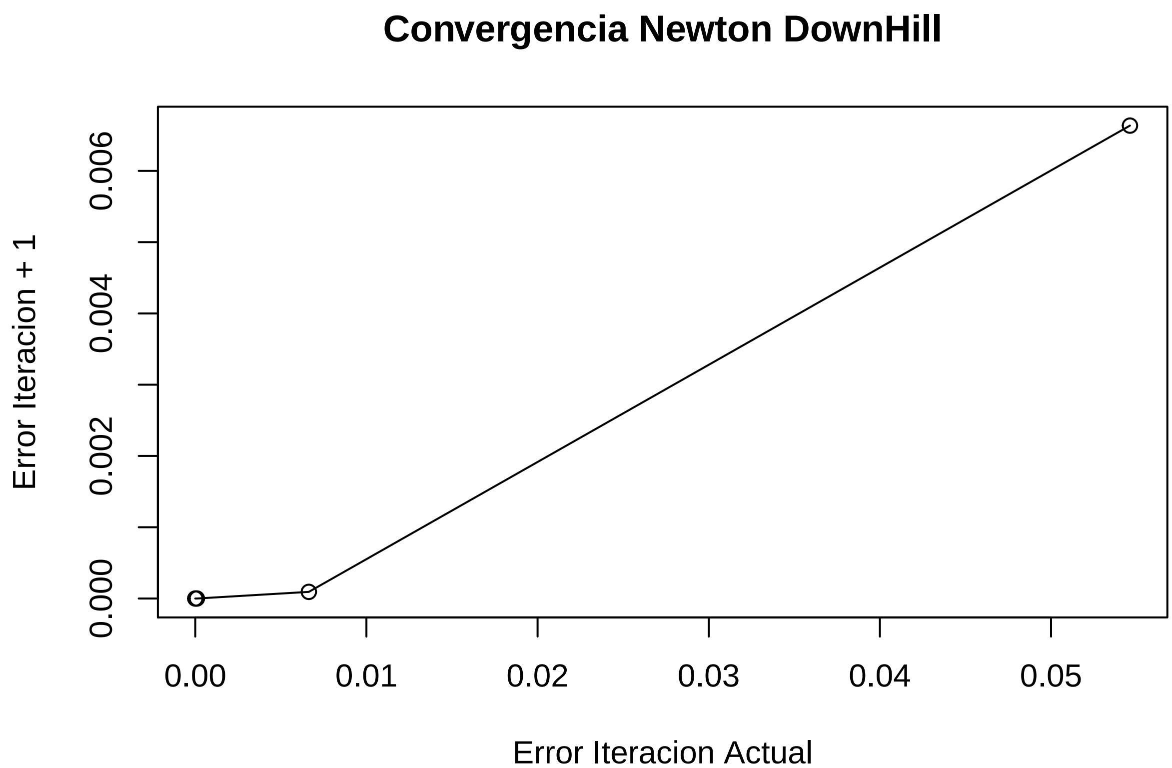
Esta basado en el metodo de down hill, una solución lineal aproximada es usada para un valor inical iterativo, con el fin de mejorar el metodo de Newton, la eficacia es comparada con metodos de flujo de energía ($power flow methods$)

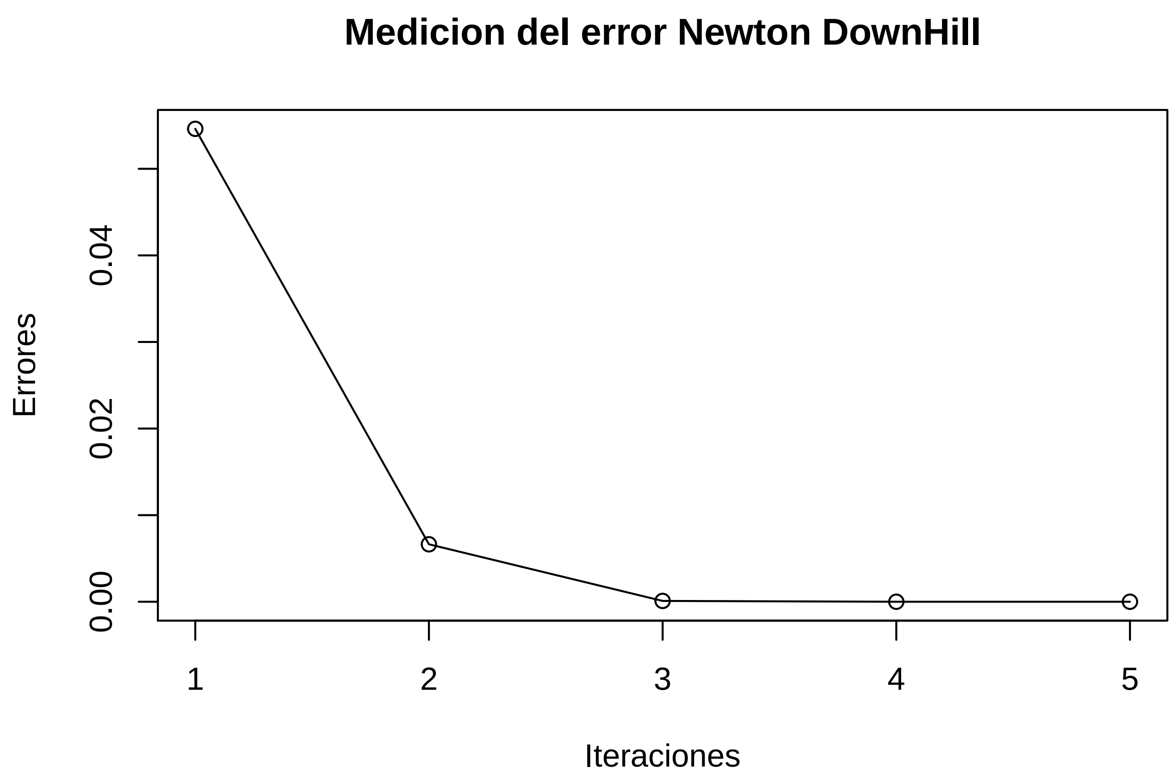
Hallando la primera raiz

```
##
##  Iteracion          Cero          Error
##  1.0000000      0.5521980      0.0945277
##  2.0000000      0.5538254      0.0029384
##  3.0000000      0.5538270      0.0000030
##  4.0000000      0.5538270      0.0000000
##
## Raiz de  function (x)  {     ((exp(1)^x) - (pi * x)) } es aproximadamente  0.553827
## con un valor inicial 1  y con error menor que   0.0000000
```

Hallando la segunda raiz

```
##
##  Iteracion          Cero          Error
##  1.0000000       1.6495540       0.0546122
##  2.0000000       1.6386812       0.0066351
##  3.0000000       1.6385284       0.0000932
##  4.0000000       1.6385284       0.0000000
##  5.0000000       1.6385284       0.0000000
```






```
##
## Raiz de  function (x)  {     ((exp(1)^x) - (pi * x)) } es aproximadamente  1.638528
## con un valor inicial 2  y con error menor que   0.0000000
```

Mejora de la formula cuadratica

Se cambia la formula cuadratica mediante la racionalización de su numerador. Así:

$$x_1 = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a} * (\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}) = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

Simplificando:

$$x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$x_2 = \frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

Conclusión

Se concluye que mientras el valor inicial x_0 este cerca de la raíz, los métodos convergen a la solución, teniendo en cuenta esto el método más eficiente con la función $e^x - \pi x$ es el de Newton. La razón de su eficicencia es debido a su convergencia cuadratica, realizando el calculo con menos iteraciones que los demás metodos, sin embargo, el método de Newton no converge en algunas funciones con multiplicidad impar, donde se deberá usar otro método como bisección.