FILE

已知 $\left\{\begin{array}{l} 5 \oplus 2 = 5 + 4 = 9 \\ 7 \oplus 4 = 7 + 6 + 5 + 4 = 22 \\ 10 \oplus 10 = 10 + 9 + 8 + \cdots + 2 + 1 = 55 \end{array}\right\}$ 以下公理

證求「⊕」定義，延伸到求「⊗」定義。

若 $5 \oplus 2 = 5 + 4 = 9$ ‖ 設 $m \oplus n$ = 由m開始數起，累加到第n項的和，而n+1比n的值少1。

則 $5 \oplus 2 = \underset{\text{第一項}}{5} + \underset{\text{第2項}}{4} = 9$ ∴成立

若 $7 \oplus 4 = 7 + 6 + 5 + 4 = 22$ $(7 \oplus 4 = 22) \Rightarrow 7 \oplus 4 = 7 + 6 + 5 + 4$

則 $7 \oplus 4 = 7 + 6 + 5 + 4 = 22$ ∴成立

項 → (I) (II) (III) (IV)

∴ $m \oplus n \Rightarrow \overbrace{m + \cdots}^{n\text{項}}$ 成立

∴ $m \oplus n \rightarrow$「由m開始數起，累加到第n項的和。」(加法) —— 【1】

從【1】延伸的定理假設 $m \otimes n$ 是，「由m開始數起，累乘到第n項的積。」(乘法) 而n+1的值比n少1。 (假設)

則設 $5 \otimes 3 \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$

$9 \otimes 4 \Rightarrow 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

$11 \otimes 7 \Rightarrow 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1663200$

∴ $m \otimes n = \overbrace{m \times \cdots}^{n\text{項}}$ 成立 —— 【2】

從【1】定理假設 $m \ominus n$「為m數起，累減到第n項的差。」(假設) 而n+1的值比n少1。

則 $m \ominus n = \overbrace{m - \cdots}^{n\text{項}}$

則 $23 \ominus 6 \Rightarrow 23 - 22 - 21 - 20 - 19 - 18 = -77$

$19 \ominus 2 \Rightarrow 19 - 18 = 1$ —— 【I】

$57 \ominus 4 \Rightarrow 57 - 56 - 55 - 54 = -108$

∴ $m \ominus n = \overbrace{m \times \cdots}^{n\text{項}}$ 成立。—— 【3】

由【I】，設 $m \ominus n$ 必會 ≤ 1，因為由第m項開始的第~~2~~項相減必會 = 1，再進行減法必會 ≤ 1。

證明 ⇒ $15 \ominus 2 \Rightarrow 15 - 14 = 1 \Rightarrow m \ominus \cancel{2} = 1$

∴因此 $m \ominus n \leq 1$ 成立。—— 【3a】

To be continued...

EDB 163

29/5/2020 FILE

從【2】定理假設 $m \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} n$ 為……
「為m數起，累除到第n項的商數。
且 $n+1$ 的值比 n 少 1。」

☆若 $53 \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} 3$

$$53 \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} 3 = 53 \div 52 \div 51$$
$$= 0.01998$$
$$\approx 0.02$$

☆若 $104 \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} 4$

$$104 \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} 4 = 104 \div 103 \div 102 \div 101$$
$$\approx 0.000098$$

$\therefore m \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} n = m \overbrace{\div \cdots}^{n項}$ 成立。 ——【4】

藉定理【4】延伸證明 $m \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} n$ 是 $m \otimes n$ (【2】) 的逆運算。

$$104 \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} 4 \approx 0.000098$$

設 $\underset{第(I)項}{0.000098} \times \underset{(II)項}{101} \times \underset{(III)項}{102} \times \underset{(IV)項}{103} \approx 104$

(最易被無視的一項
亦是最重要一項)

$$103.9999965 \approx 104$$

$\therefore$ 因此證明 $m \mathbin{\bigcirc\kern-0.75em\div} n$ 是 $m \otimes n$ 的逆運算。

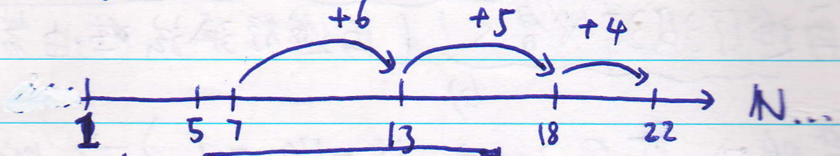
不過，在逆運算過程中，$n+1$ 的值要比 n 的值多 1，因此有少許不同要留意。

To be continued...

FILE 29/5/2000

$m \oplus n$ 的特性

① 若 $m \oplus n$ ， $n <= m$ (必須) ； Σ (sum) 總和必定 >0 ；
$\{\Sigma \mid \Sigma \in N\}$ 為總和的定義域。

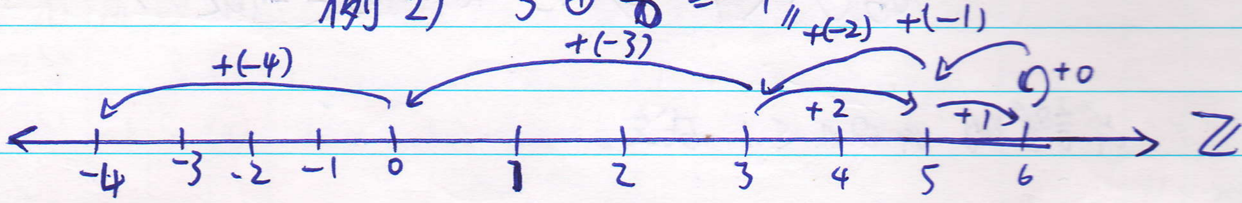


(例1) $\boxed{7 \oplus 4 = 22}$

---

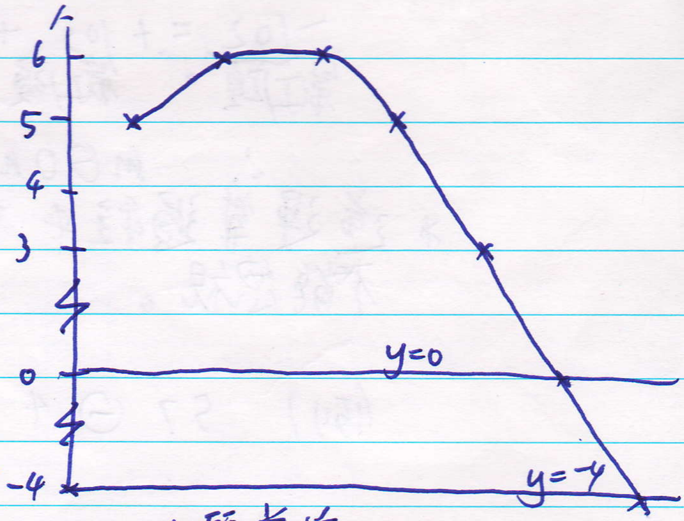
② 若 $m \oplus n$ ， $n > m$ ； 完成計算總和後，
由 $n = m+2$ 開始，$m \oplus n$ 的性質會因為第 $m+2$ (即 n) 的值為負數而轉化為 $m \ominus n$。而定義域就擴張到 $\mathbb{Z}$。

例2) $3 \oplus 8 = -4$ //



完整步驟

$$
\begin{aligned}
3 \oplus 8 &= 3 + 2 + 1 + 0 + \underbrace{-1 + -2 + -3 + -4}_{m \ominus n} \\
&= 5 + 1 + 0 + -1 + -2 + -3 + -4 \\
&= 6 + 0 + -1 + -2 + -3 + -4 \\
&= 6 + -1 + -2 + -3 + -4 \\
&= 5 + -2 + -3 + -4 \\
&= 3 + -3 + -4 \\
&= 0 + -4 \\
&= -4 \text{ //}
\end{aligned}
$$



∴ 證明 $m \oplus n$ 轉化成 $m \ominus n$ 性質存在。

---

③ 與「Σ」相似，但由大到小；但不與 $m \ominus n$ 性質兼容。

$7 \oplus 4 = 22 = \sum_{n=4}^{7} n$ } 相似性

$3 \oplus 8 = 3 \oplus 3 + 0 + -1 \ominus 4 = -4 = \sum_{n=1}^{8} (4-n)$ } 不能兼容負

$m\ominus n$ 的性質

① ☆ $m\ominus n <= 1$，第m項開始的第2項相減後會是1，再進行減法後會<1（再進行減法 = 由第2項開始減第3項）

a) 證明 $\Rightarrow 15\ominus 2=1 \rightarrow 15-14=1$

$27\ominus 2=1 \rightarrow 27-26=1$

$105\ominus 2=1 \rightarrow 105-104=1$

$\Rightarrow m\ominus 2=1$

b) 證明 $15\ominus 3<1 \Rightarrow 15-14-13=-12$

$27\ominus 3<1 \Rightarrow 27-26-25=-24$

$105\ominus 3<1 \Rightarrow 105-104-103=-102$

$m\ominus 3<1$

∴證明 $m\ominus n\leq 1$ 成立。

② $m\ominus n$ 的可逆性質

$105\ominus 3<1 = -102$

$\underbrace{-102}_{第I項} + \underbrace{103}_{第II項} + \underbrace{104}_{(III)項} = 105$

$105 = 105$ ∴左=右。

∴ $m\ominus n$ 存在可逆性質，$m\ominus n$是

* 逆運算過程中首項作為基礎(底)數值，不能忽視。

(例) $57\ominus 4 = 57 - \underbrace{56-55-54}_{(第II-IV項)} = -108$

$57 = -108+56+55+54$

$57 = 57$ ∴左=右

③ 是「Σ」一定程度上的逆運算

	57	−56	−55	−54
m	57	57	57	57
n	1	2	3	4

$$=(-1)\left[\sum_{i=1}^{n}(m-(n)-1)\right]-1 = \underset{(57)}{m}\ominus\underset{(4)}{n}$$

$$=-1\times[(57-0)+(57-1)+(57-2)+(57-3)]$$

$$=-1\times(57+56+55+54)$$

$$=-108$$

29/8/2020

FILE

$m \otimes n$ 的特性

{累積 $\in \mathbb{Z}$ 正}

① 若 $m \otimes n$，$n \leq m$（必須）；累積 > 0（必定）

∵ $3 \otimes 3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

∵ $15 \otimes 4 = 15 \times 14 \times 13 \times 12$

$= 32760$

∵ $27 \otimes 7 = 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$

$= 4475671200$

---

② 若 $m \otimes n$，$n > m$；累積 $= 0$（必定）

∵ $3 \otimes 4 = 3 \times 2 \times 1 \times 0 = 0$

∵ $15 \otimes 16 = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times \underbrace{\cdots\cdots}_{\times 11 \cdots \times 2} \times 1 \times 0$

$= 0$

∵ $27 \otimes 28 = 27 \times 26 \times \overbrace{\cdots}^{25 \cdots 2} \times 1 \times 0$

$= 0$

~~③~~

$m \oslash n$ 的特性和特殊情況

① 若 $m \oslash n$; $n \le m$; 「商」的定義域皆是 $\mathbb{R}^+$。

$\because 3 \oslash 3 = 3 \div 2 \div 1 = 1.5$

$\because 15 \oslash 4 = 15 \div 14 \div 13 \div 12$

≈ 0.006868

特殊情況

② 若 $m \oslash n$; $n = m + 1$ ；「商」沒下定義，並沒有可行解。

$\because 3 \oslash 4 = 3 \div 2 \div 1 \div 0 =$ Undefined / Math-error / 沒有定義

$\because 15 \oslash 16 = 15 \div \underbrace{\cdots\cdots}_{\div 14 \ldots \div 3} \div 2 \div 1 \div 0$

$=$ Undefined / 沒有定義

* 這與「$m \otimes n$，若 $n > m$，「積」$= 0$」不同。因為「積」$= 0$ 的「0」為一個值，有定義的。

* 而 $m \oslash n$（即使是 $m \div 0$），是沒有定義的命題。它沒有一個值的定義。