ИТМО

Линейные системы автоматического управления

Частотные характеристики и типовые динамические звенья

Связь преобразования Лапласа с частотой

$$s = c + j\omega$$

экспоненты гармоники

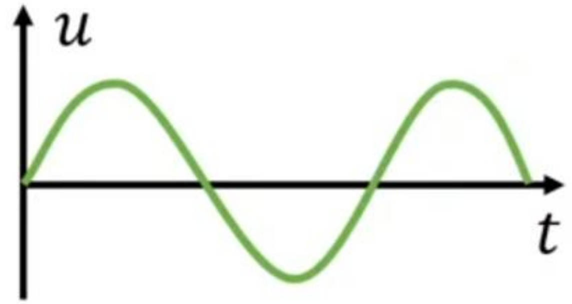
Связь преобразования Лапласа с частотой

$$s = c + j\omega$$

экспоненты гармоники

Гармонический сигнал

$$u(t) = \sin(\omega t) \sim e^{j\omega}$$



Частотные характеристики

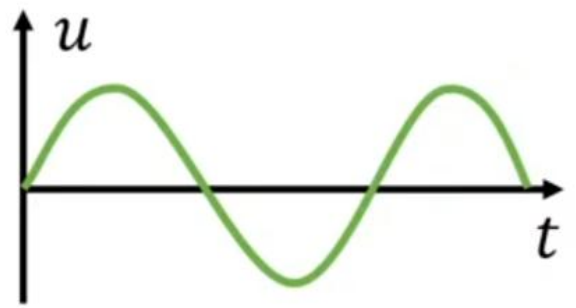
Связь преобразования Лапласа с частотой

$$s = c + j\omega$$

экспоненты гармоники

Гармонический сигнал

$$u(t) = \sin(\omega t) \sim e^{j\omega}$$



Частотные характеристики

С лекции: Дифференциально-интегральный оператор

$$u(t) = e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{\frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 5p + 7}} \rightarrow \frac{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3}{(j\omega)^3 + 5(j\omega) + 7} \cdot e^{j\omega t}$$

Комплексное число, зависящее от ω

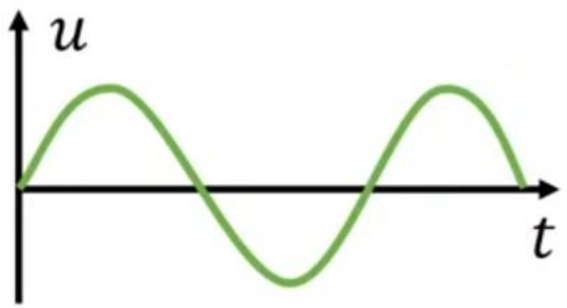
Связь преобразования Лапласа с частотой

$$s = c + j\omega$$

экспоненты гармоники

Гармонический сигнал

$$u(t) = \sin(\omega t) \sim e^{j\omega}$$



Частотные характеристики

С лекции: Дифференциально-интегральный оператор

$$W(j\omega)$$

$$u(t) = e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{\frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 5p + 7}} \rightarrow \boxed{\frac{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3}{(j\omega)^3 + 5(j\omega) + 7}} \cdot e^{j\omega t}$$

Частотная передаточная функция

Связь преобразования Лапласа с частотой

$$s = \cancel{c} + j\omega$$

экспоненты гармоники

Напрямую:

$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$\boxed{\frac{s^2+2s+3}{s^3+5s+7}} \rightarrow \frac{(j\omega)^2+2(j\omega)+3}{(j\omega)^3+5(j\omega)+7}$$

Частотная передаточная функция

Преобразование Лапласа:

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Преобразование Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Связь преобразования Лапласа с частотой

$$s = \cancel{c} + j\omega$$

экспоненты гармоники

Вспоминаем «Частотные методы»

Напрямую:

$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$\boxed{\frac{s^2+2s+3}{s^3+5s+7}} \rightarrow \frac{(j\omega)^2+2(j\omega)+3}{(j\omega)^3+5(j\omega)+7}$$

Частотная передаточная функция

Преобразование Лапласа:

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Преобразование Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$U(\omega)$ – вещественная часть ЧПФ
$V(\omega)$ – мнимая часть ЧПФ

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$A(\omega)$ – амплитуда (модуль) ЧПФ
$\varphi(\omega)$ – фаза (аргумент) ЧПФ

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Если $|\arg W(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$

Если $|\arg W(j\omega)| \leq \pi$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

$$\boxed{\begin{gathered} A(-\omega) = A(\omega), \text{ четная} \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega), \text{ нечетная} \end{gathered}}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$$W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1-\omega^2) + 2j\omega}$$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1-\omega^2) + 2j\omega} \cdot \frac{(1-\omega^2) - 2j\omega}{(1-\omega^2) - 2j\omega}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

$$W(j\omega) = \frac{(1-\omega^2) - 2j\omega}{(1-\omega^2)^2 - (2j\omega)^2}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

$$W(j\omega) = \frac{(1-\omega^2) - j2\omega}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

$$W(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} + j\frac{-2\omega}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

$$U(\omega) = \frac{1 - \omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (-2\omega)^2}}{(\omega^2+1)^2}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1-2\omega^2+\omega^4+4\omega^2}}{(\omega^2+1)^2}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) =?$

$V(\omega) =?$

$A(\omega) =?$

$\varphi(\omega) =?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1+2\omega^2+\omega^4}}{(\omega^2+1)^2}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{(\omega^2+1)^2}}{(\omega^2+1)^2}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$U(\omega) = ?$

$V(\omega) = ?$

$A(\omega) = ?$

$\varphi(\omega) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

Если $|\arg W(j\omega)| \le \frac{\pi}{2}$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{-2\omega}{1-\omega^2}$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}u(t),$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(1\cdot t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(1\cdot t+30°)}$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = A(1)e^{j\varphi(1)}\sin(1\cdot t + 30°)$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{\mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2},0\right)}\sin(t + 30°)$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{i}{4}e^{-i\left(t+30°+\mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2},0\right)\right)} - \frac{i}{4}e^{i\left(t+30°+\mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2},0\right)\right)}$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin\left(t + 30° + \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right)$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

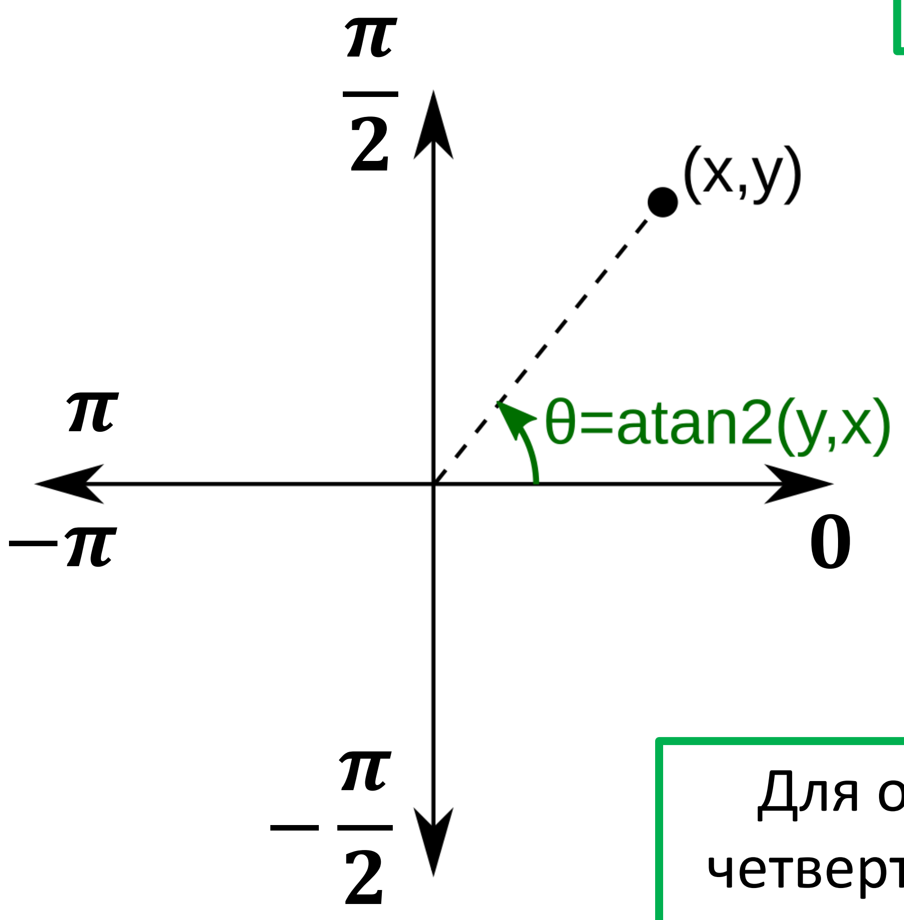
$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin\left(t + 30° + \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right)$$

Можно вывести в число, значит не ленимся и выводим

«Атаны и арктангенсы»

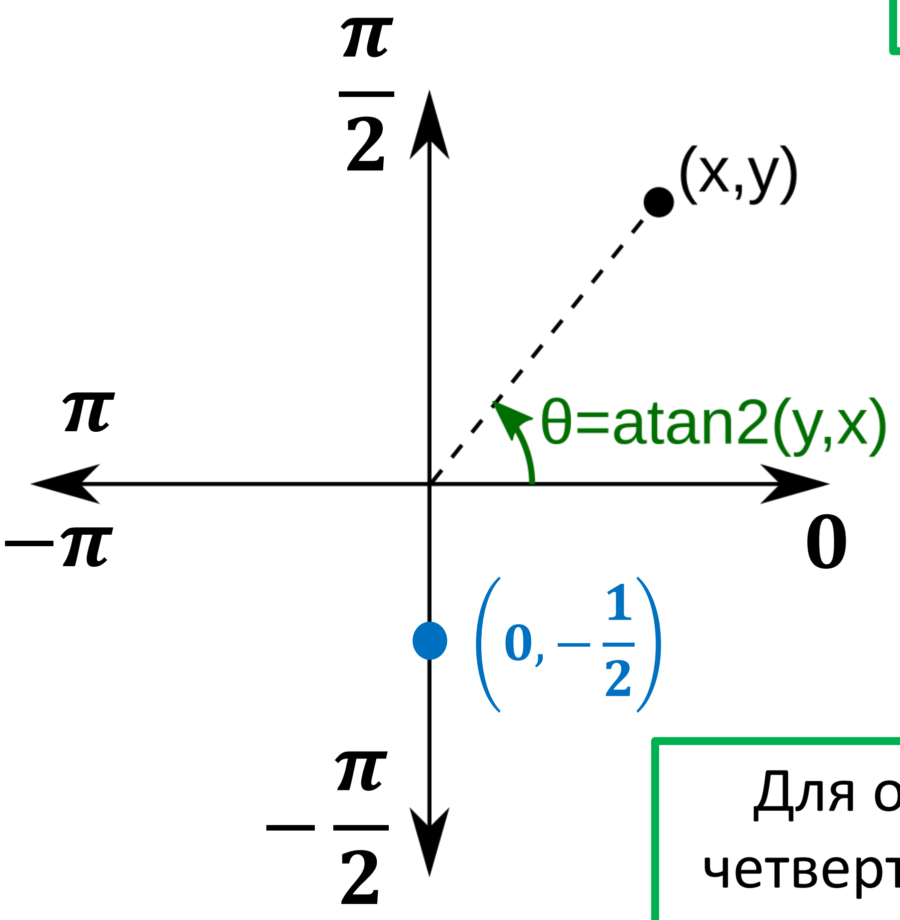


$0 < a < +\infty$

$\mathrm{atan2}(\cdot,\cdot)$	$\mathrm{arctg}(\cdot)$	θ
$(0, a)$ $(a, +\infty)$	0	$0;\ 0°$
$(a, a\sqrt{3})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6};\ 30°$
(a, a)	1	$\frac{\pi}{4};\ 45°$
$(a\sqrt{3}, a)$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3};\ 60°$
$(a, 0)$ $(+\infty, a)$	$+\infty$	$\frac{\pi}{2};\ 90°$

Для остальных – четвертей исходя из четности-нечетности

«Атаны и арктангенсы»



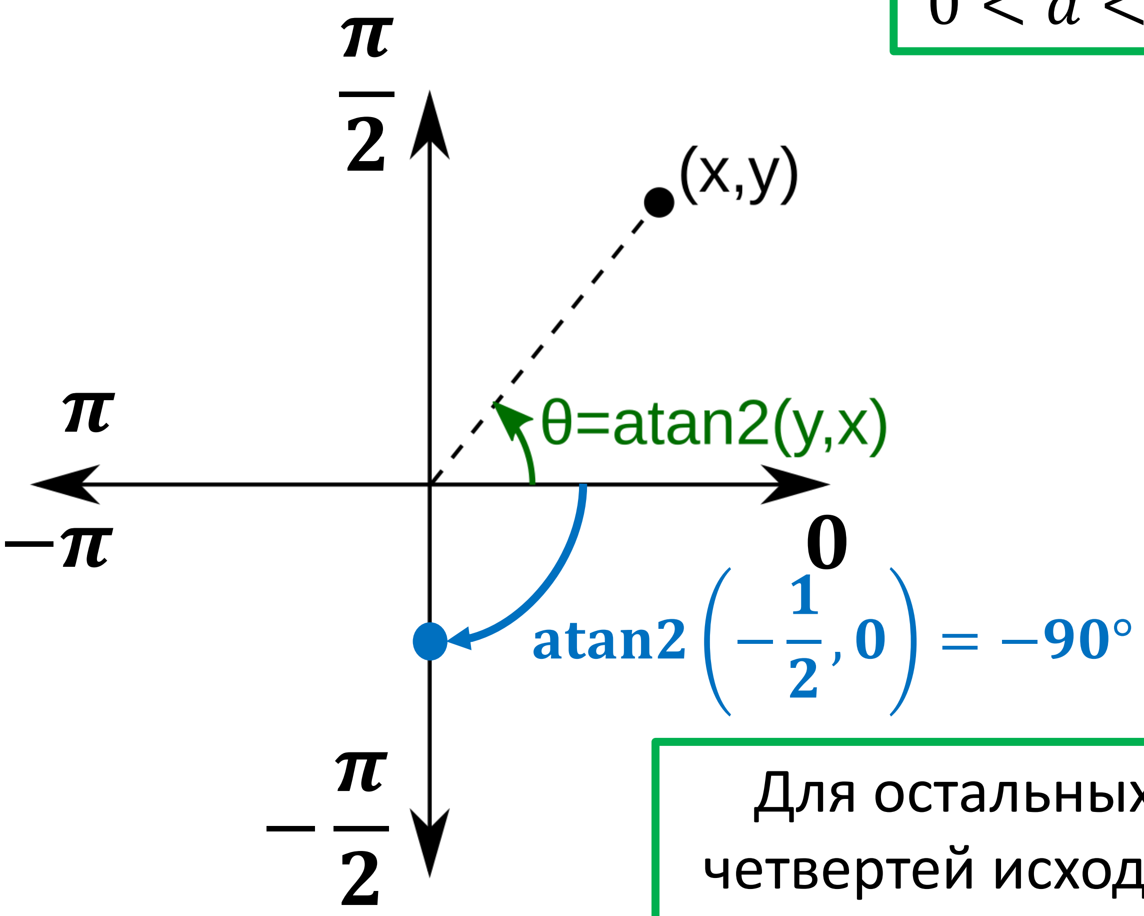
$0 < a < +\infty$

Для остальных – четвертей исходя из четности-нечетности

atan2(·,·)	arctg(·)	θ
$(0, a)$ $(a, +\infty)$	0	$0; 0°$
$(a, a\sqrt{3})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}; 30°$
(a, a)	1	$\frac{\pi}{4}; 45°$
$(a\sqrt{3}, a)$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}; 60°$
$(a, 0)$ $(+\infty, a)$	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}; 90°$

«Атаны и арктангенсы»

$0 < a < +\infty$



Для остальных – четвертей исходя из четности-нечетности

$\mathrm{atan2}(\cdot,\cdot)$	$\mathrm{arctg}(\cdot)$	θ
$(0, a)$ $(a, +\infty)$	0	$0;\ 0°$
$(a, a\sqrt{3})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6};\ 30°$
(a, a)	1	$\frac{\pi}{4};\ 45°$
$(a\sqrt{3}, a)$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3};\ 60°$
$(a, 0)$ $(+\infty, a)$	$+\infty$	$\frac{\pi}{2};\ 90°$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow\quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(t + 30° - 90°)$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) =?$

$$U(\omega) = \frac{1 - \omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2 + 1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \frac{i}{2}e^{-i(t+30°)} - \frac{i}{2}e^{i(t+30°)}$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(t - 60°)$$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°),$

$y(t) = ?$

$$U(\omega) = \frac{1 - \omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}$$
$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2 + 1)^2}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \sin(t + 30°)$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Раз понимаем, то можно и напрямую…

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) =?$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}$$

$$V(\omega) = \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$$

$$u(t) = \sin(t + 30°)$$

$$\Downarrow \quad A(1) = \frac{1}{2}, \varphi(1) = \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(t - 60°)$$

Раз понимаем, то можно и напрямую…

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Если $|\arg W(j\omega)| > \pi$?

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Если $|\arg W(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$

Если $|\arg W(j\omega)| \leq \pi$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$

Формы представления ЧПФ

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Если $|\arg W(j\omega)| > \pi$?

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\ldots W_n(j\omega)$$

Разложение в последовательное соединение

$|\arg W_i(j\omega)| \le \frac{\pi}{2}$ (или π, но лучше $\frac{\pi}{2}$)

$$\arg W(j\omega) = \sum \arg W_i(j\omega)$$

Если $|\arg W(j\omega)| \le \frac{\pi}{2}$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$

Если $|\arg W(j\omega)| \le \pi$,

то $\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\big(V(\omega), U(\omega)\big)$

Частотные характеристики: АЧХ и ФЧХ

$U(\omega)$:
Вещественная частотная характеристика

$A(\omega)$:
Амплитудная частотная характеристика

$V(\omega)$:
Мнимая частотная характеристика

$\varphi(\omega)$:
Фазовая частотная характеристика

$$\boxed{W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}}$$

Частотные характеристики: АЧХ и ФЧХ

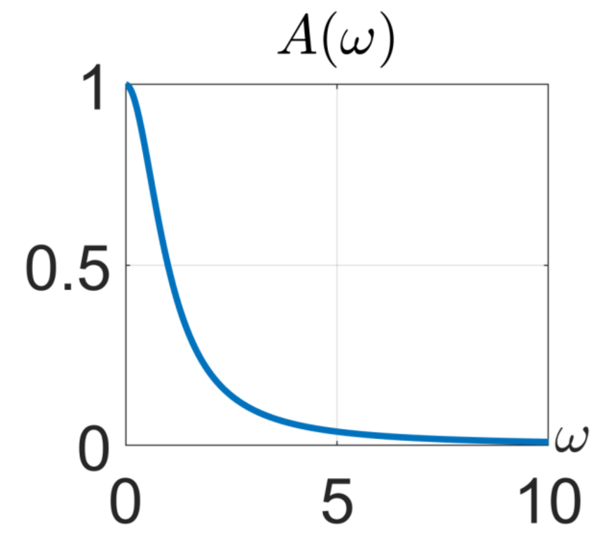
$U(\omega)$:
Вещественная частотная характеристика

«Экзотика»

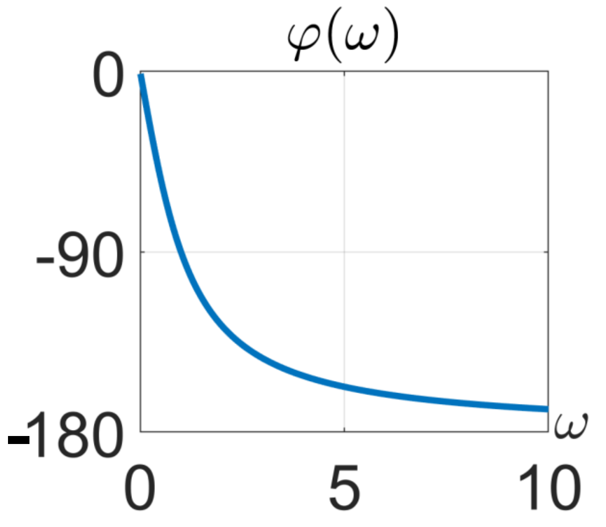
$V(\omega)$:
Мнимая частотная характеристика

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$A(\omega)$:
Амплитудная частотная характеристика

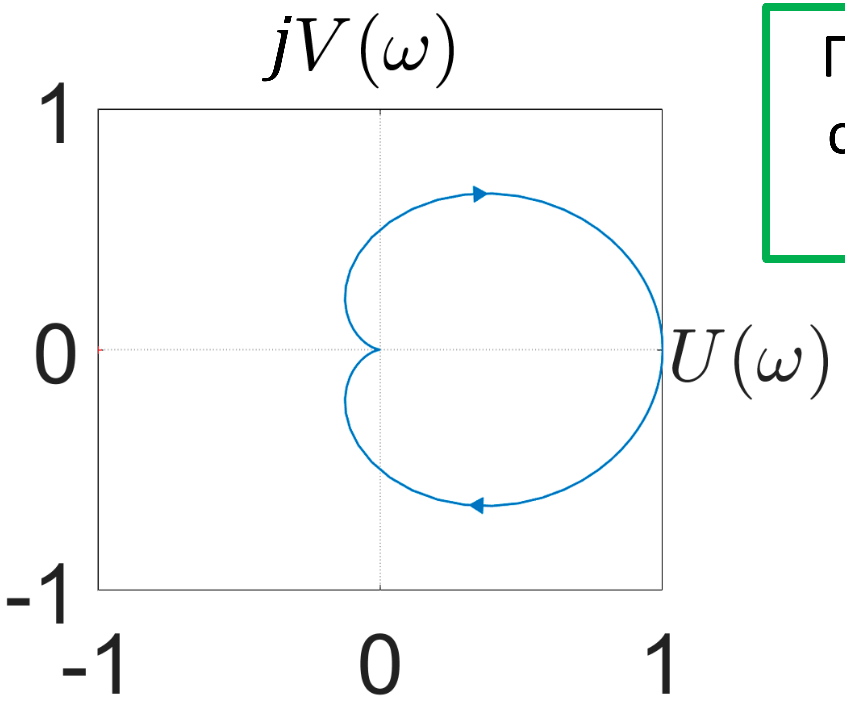


$\varphi(\omega)$:
Фазовая частотная характеристика



Частотные характеристики: АЧХ и ФЧХ

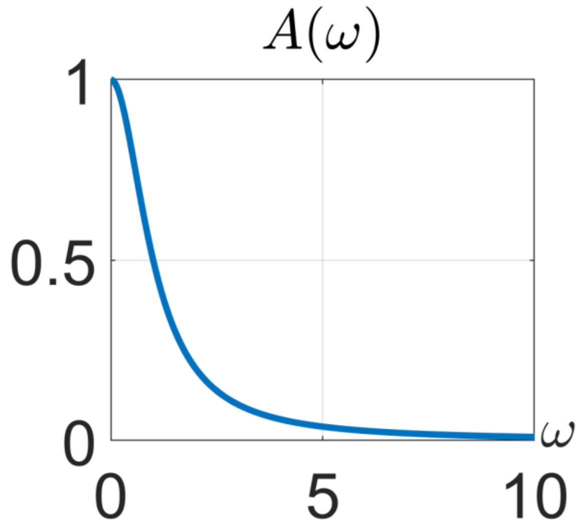
$V(U)$:
Амплитудно-фазовая частотная характеристика



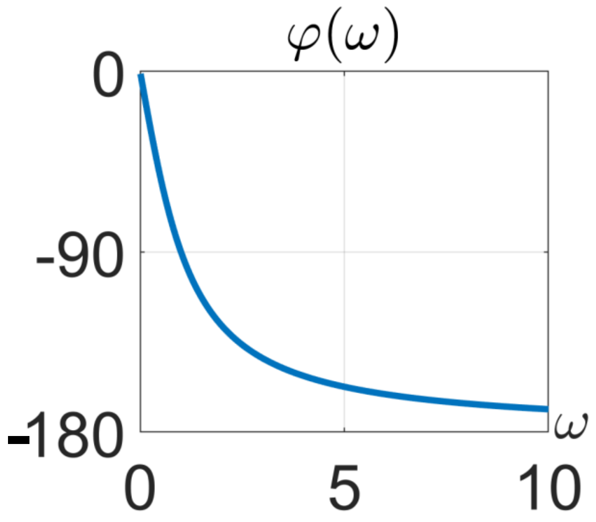
Про нее вся следующая лекция!

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$A(\omega)$:
Амплитудная частотная характеристика

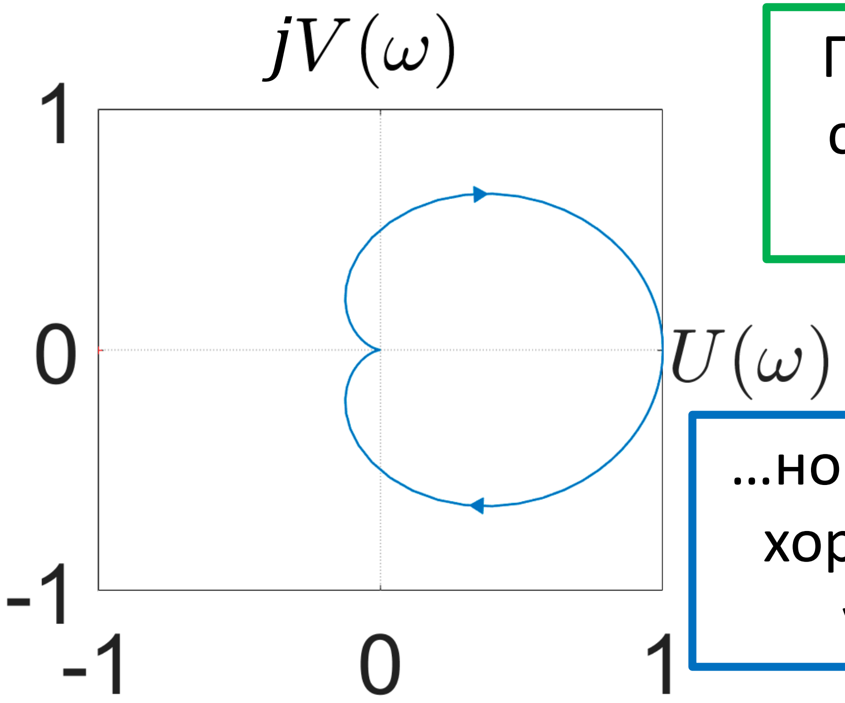


$\varphi(\omega)$:
Фазовая частотная характеристика



Частотные характеристики: АФЧХ

$V(U)$:
Амплитудно-фазовая
частотная характеристика

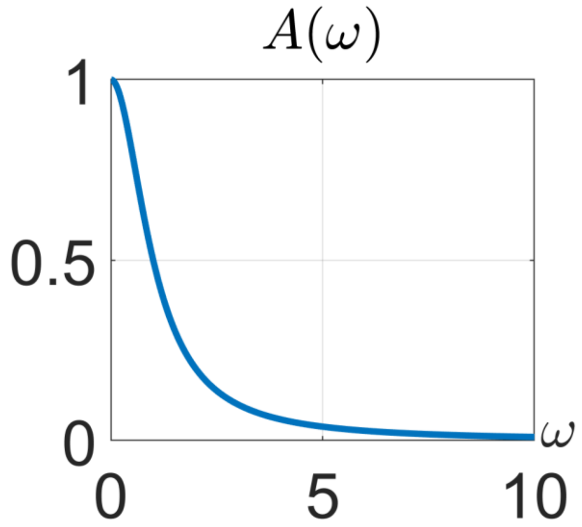


Про нее вся
следующая
лекция!

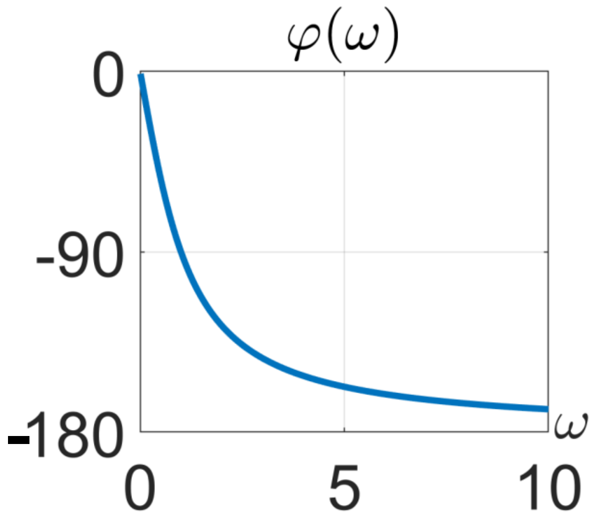
…но давайте что-то
хорошее скажем
уже сейчас

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$A(\omega)$:
Амплитудная
частотная
характеристика

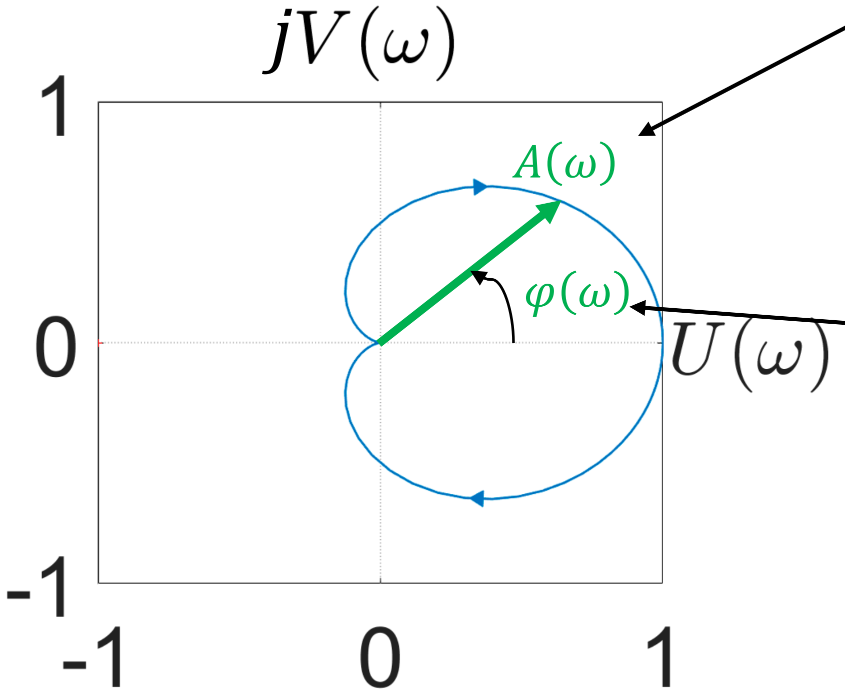


$\varphi(\omega)$:
Фазовая
частотная
характеристика



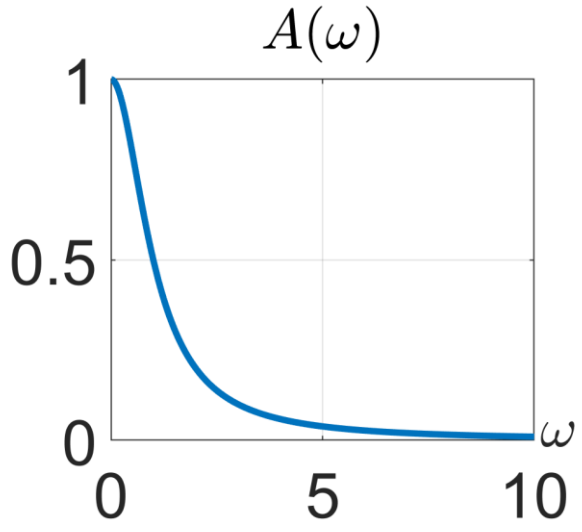
Частотные характеристики: АФЧХ

$V(U)$:
Амплитудно-фазовая частотная характеристика

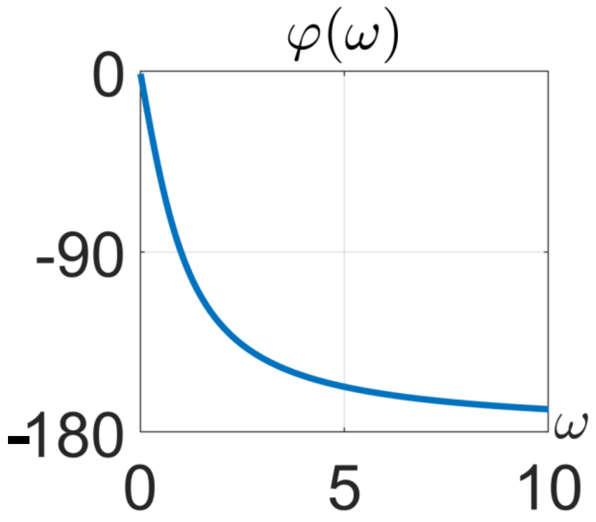


$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$A(\omega)$:
Амплитудная частотная характеристика

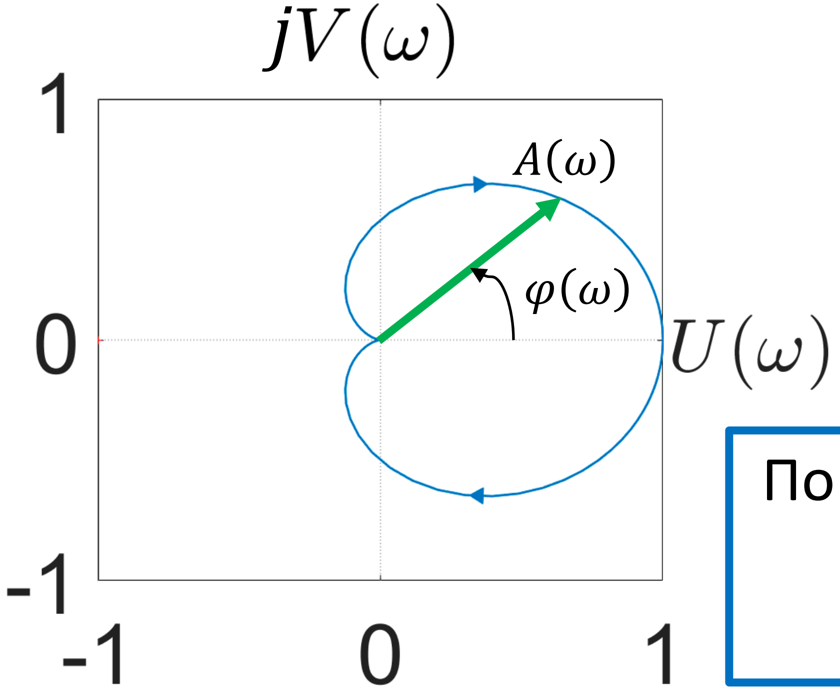


$\varphi(\omega)$:
Фазовая частотная характеристика



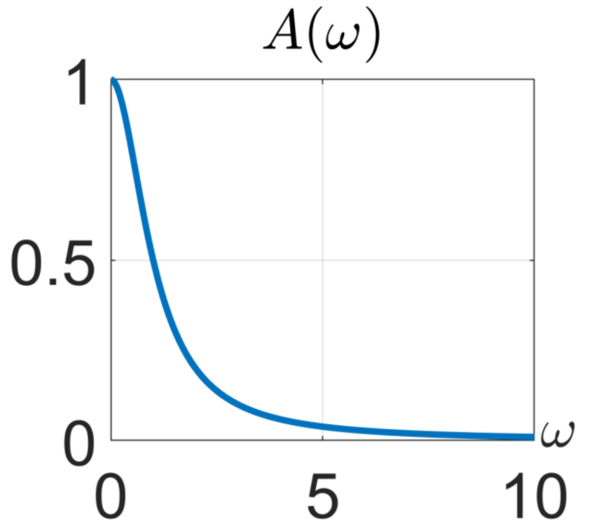
Частотные характеристики: АФЧХ

$V(U)$:
Амплитудно-фазовая частотная характеристика

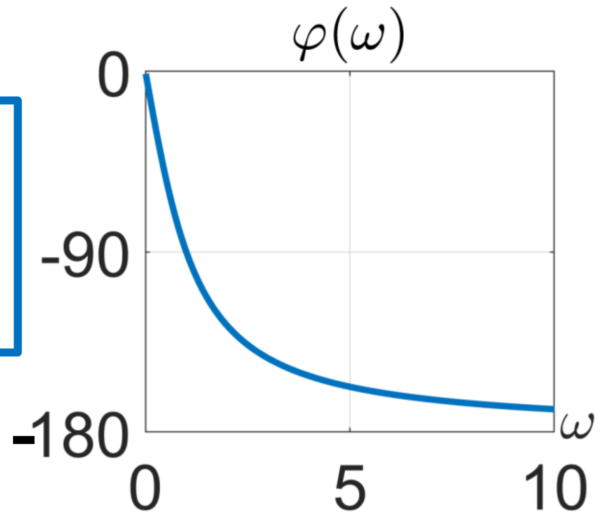


$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$A(\omega)$:
Амплитудная частотная характеристика



$\varphi(\omega)$:
Фазовая



По сути полярные координаты, можно сопоставить одновременное изменение фазы и амплитуды

Показатели качества систем управления

Показатели качества

1. Корневые (косвенные)
2. Динамические (прямые)
3. Точностные
4. Частотные
5. …

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_{\text{р}}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_{\text{р}}\colon A\left(\omega_{\text{р}}\right) = \max\{A(\omega)\}$

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

Вообще можно быть несколько, если рассматривать максимумы в отдельных «пиках»

Частотные показатели качества

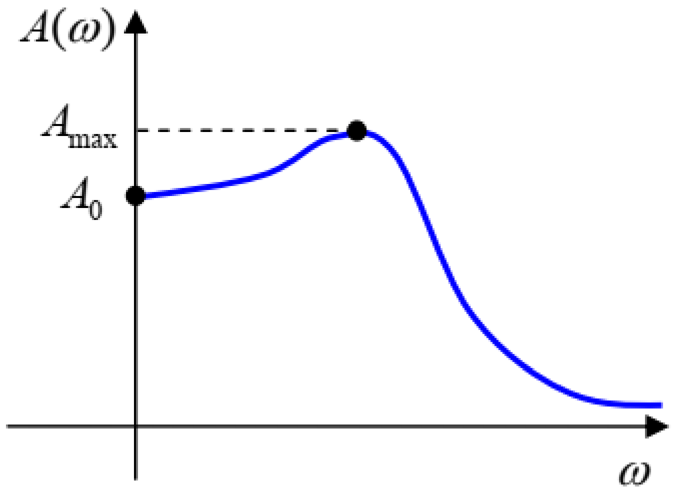
1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

Тоже имеет смысл только для колебательных систем



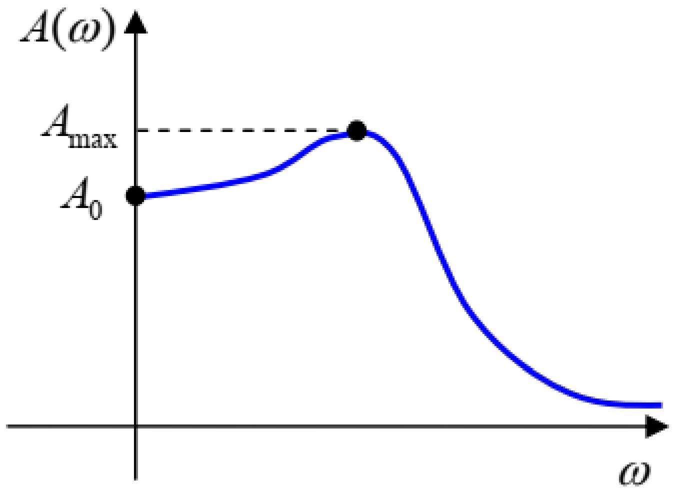
Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$



Тоже имеет смысл только для колебательных систем

И не путаем термины:
у нас была «корневая»
степень колебательности,
а это «частотный»
показатель колебательности
Разные вещи!

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_{\text{р}}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_{\text{р}}: A(\omega_{\text{р}}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_{\text{р}})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_{\text{р}})}{A(0)}$$

3. **Частота среза** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

Имеет смысл для фильтров, вспоминаем «Частотные методы»

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

3. **Частота среза** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_\text{р})}{\sqrt{2}}$.

Записано в общем виде,
но осмысленно раскрывает себя
тоже только для фильтров

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}\colon A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

Вот тут проблема, поскольку существует и другое определение, *противоречащее этому…*

3. **Частота среза** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_\text{р})}{\sqrt{2}}$.

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_{\text{р}}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_{\text{р}}\colon A(\omega_{\text{р}}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_{\text{р}})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_{\text{р}})}{A(0)}$$

Уже не только для фильтров, а для любых систем. Но к фильтрации теперь отношения не имеет.

3. **Частота среза** – частота, при которой $A(\omega_{\text{ср}}) = 1$, а $L(\omega_{\text{ср}}) = 0$.

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_{\text{р}})}{\sqrt{2}}$.

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_{\text{р}}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_{\text{р}}: A(\omega_{\text{р}}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_{\text{р}})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_{\text{р}})}{A(0)}$$

Остается только аккуратно говорить о двух частотах среза, уточняя, о которой речь

3а. **Частота среза (*фильтрация*)** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

3б. **Частота среза (*частотные характеристики*)** – частота, при которой $A(\omega_{\text{ср}}) = 1$, а $L(\omega_{cp}) = 0$.

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_{\text{р}})}{\sqrt{2}}$.

Частотные показатели качества

1. Частота $\omega_\text{р}$ при которой АЧХ *колебательной системы* достигает максимального значения, называется **резонансной частотой**.

$\omega_\text{р}: A(\omega_\text{р}) = \max\{A(\omega)\}$

2. **Показателем колебательности** M называется отношение максимального значения $A(\omega_\text{р})$ к начальному значению $A(0)$.

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{A(\omega_\text{р})}{A(0)}$$

Остается только аккуратно говорить о двух частотах среза, уточняя, о которой речь

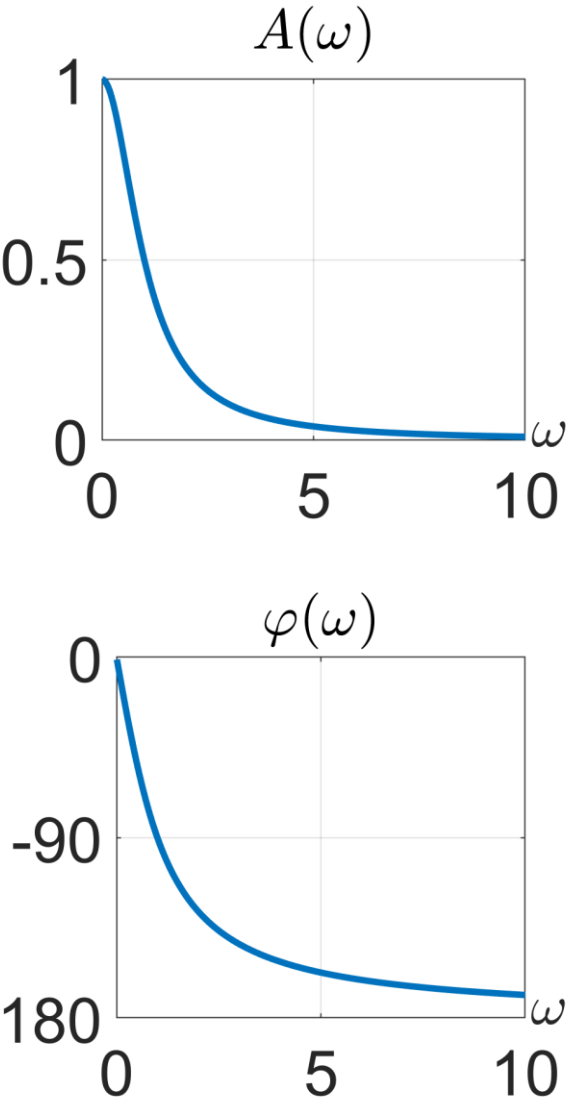
3а. **Частота среза (*фильтрация*)** – частота, на которой ослабление фильтра равно $1/\sqrt{2}$ (-3 ДБ в логарифмическом масштабе).

3б. **Частота среза (*частотные характеристики*)** – частота, при которой $A(\omega_\text{ср}) = 1$, а $L(\omega_{cp}) = 0$.

4. **Полосой пропускания** называют интервал частот, при которых выполняется соотношение $A(\omega) > \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ или $A(\omega) > \frac{A(\omega_\text{р})}{\sqrt{2}}$.

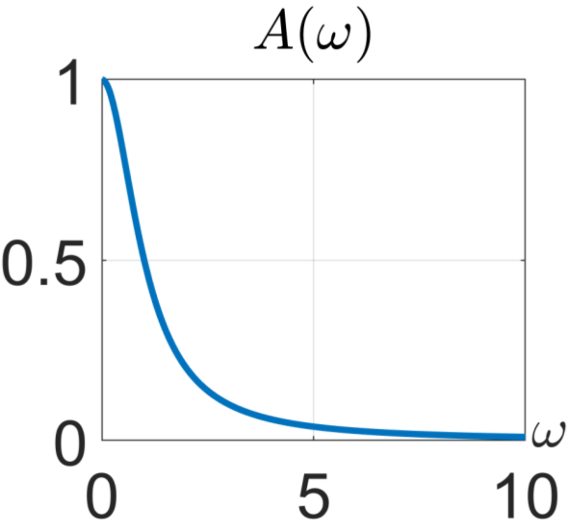
И это не все, еще пара на следующей практике (и лекции!)

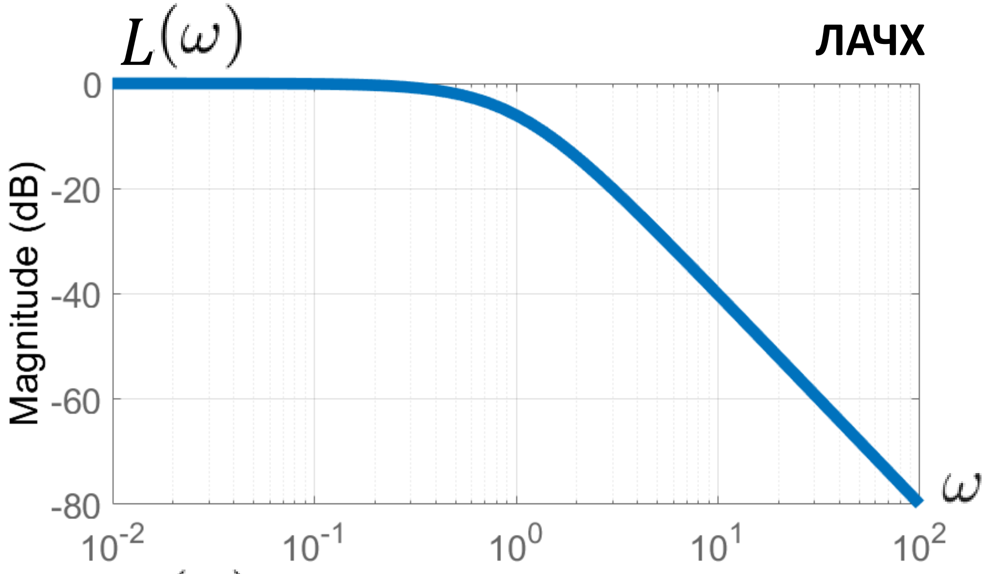
Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

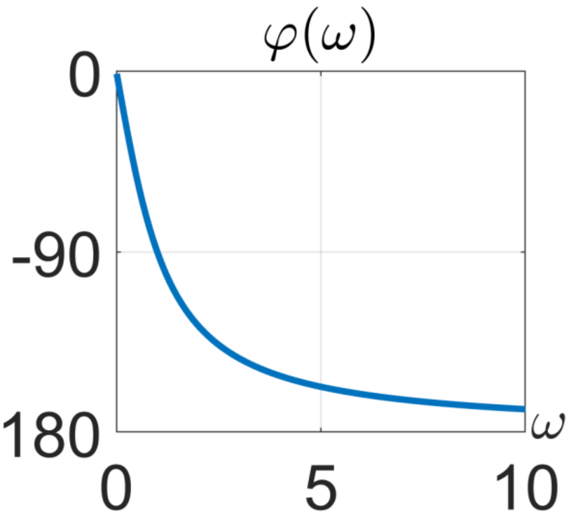


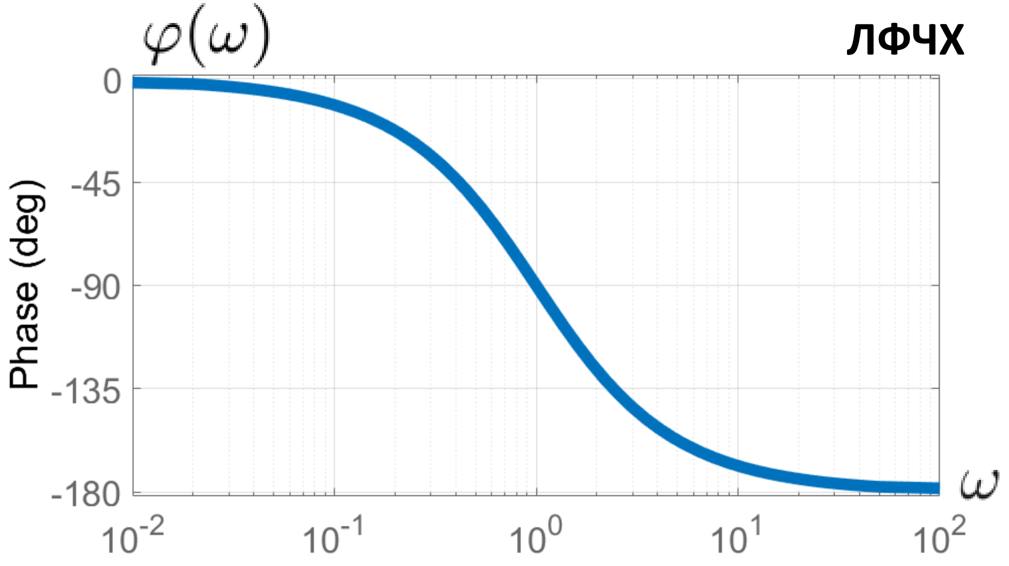
$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



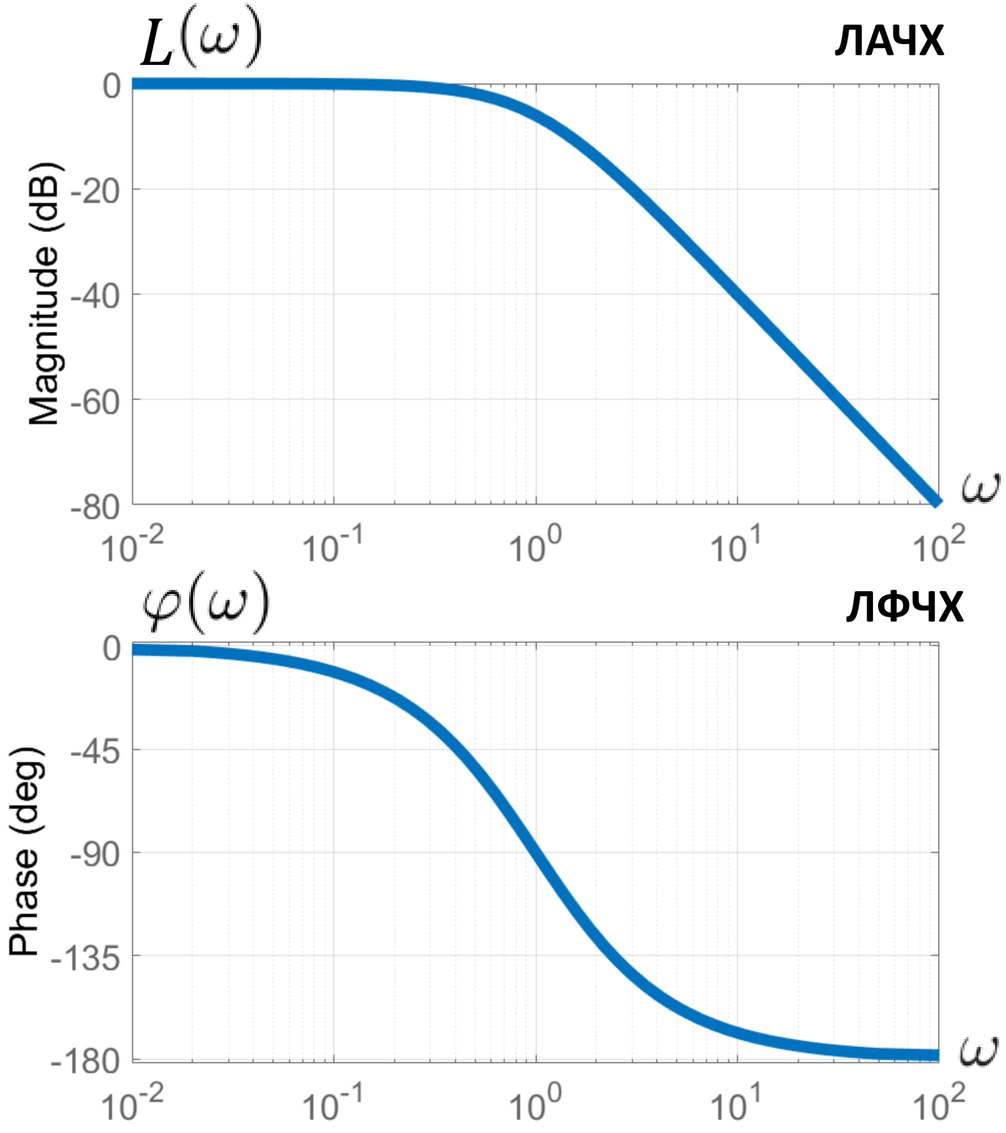






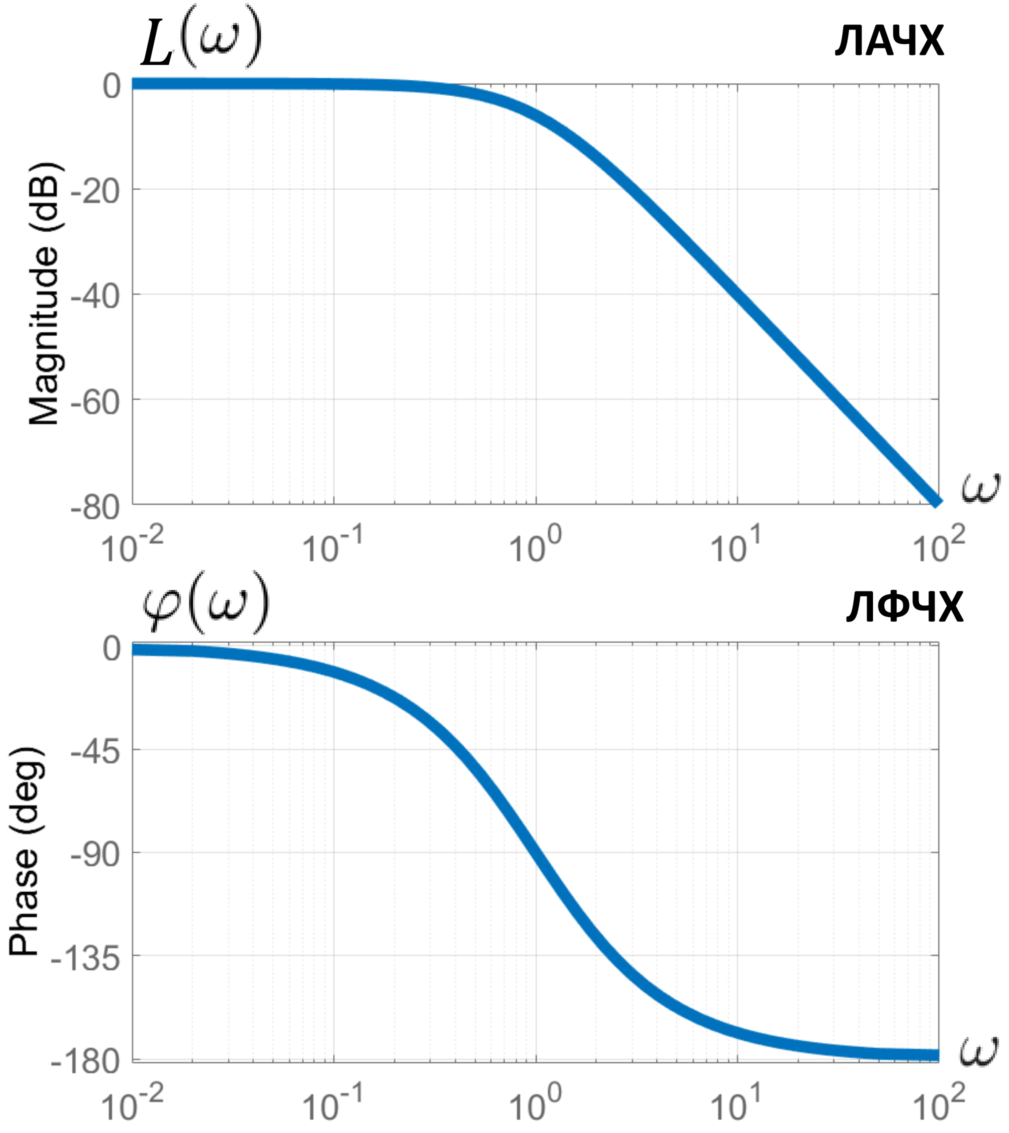
$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

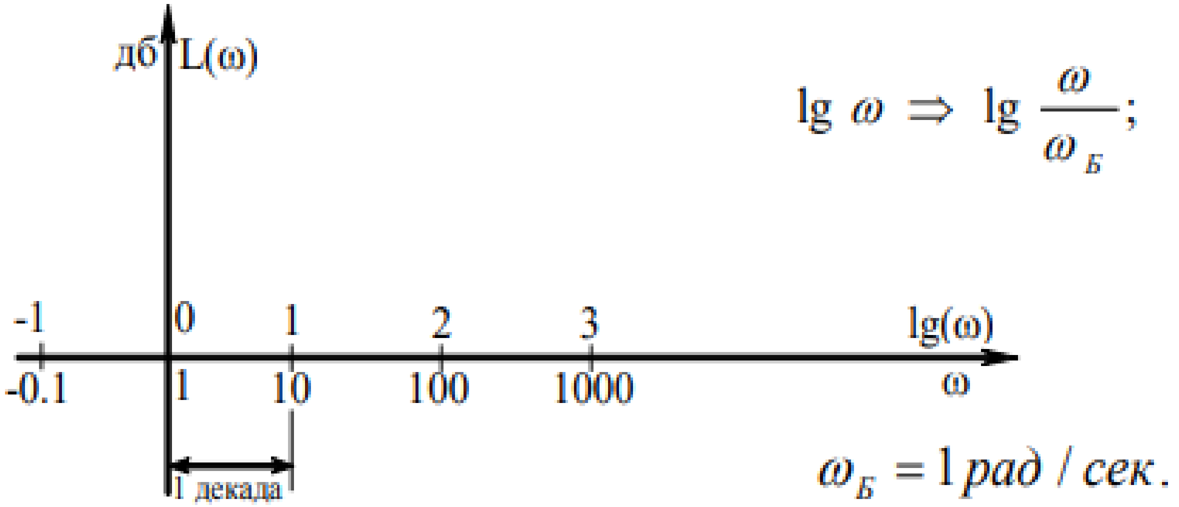
Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

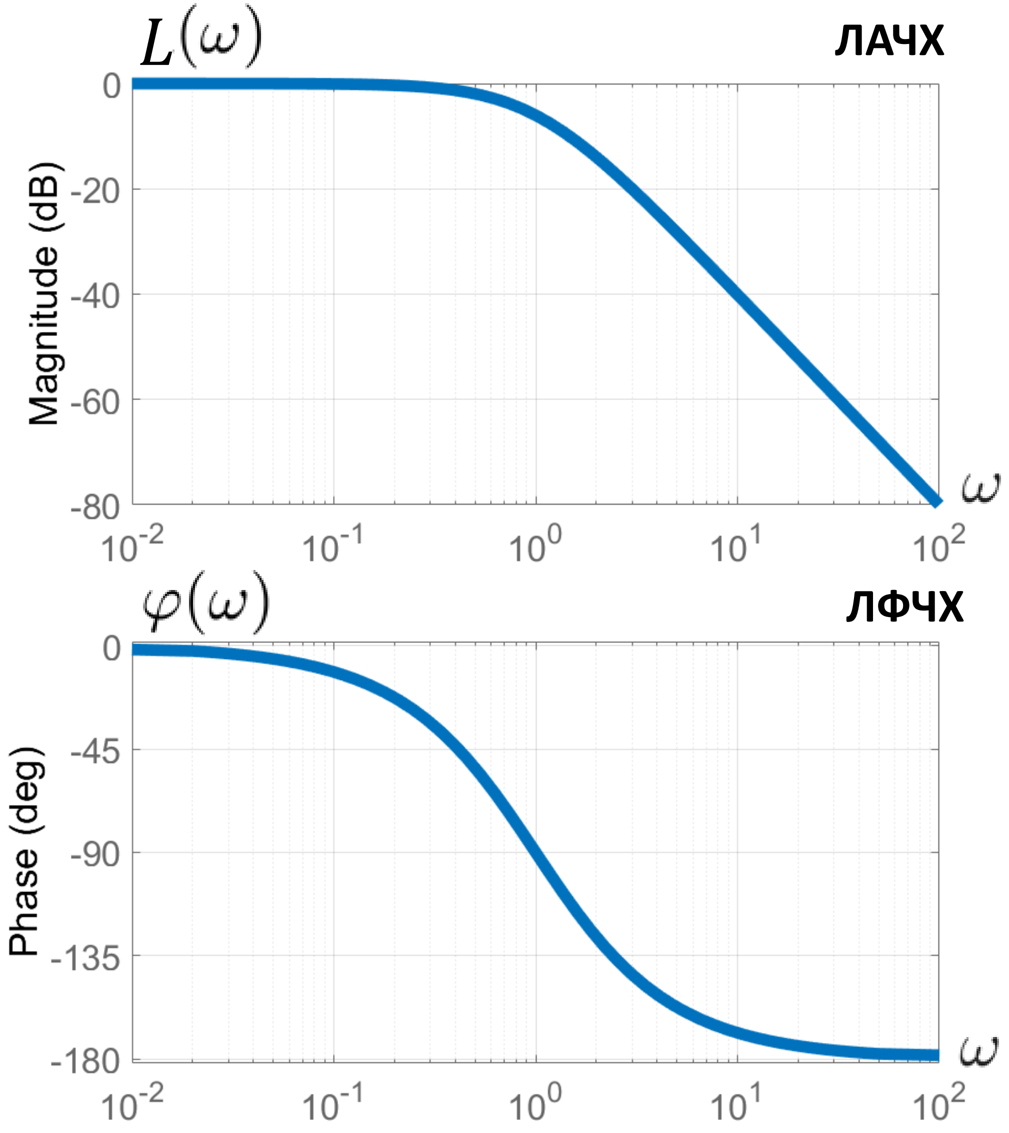
Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ





$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



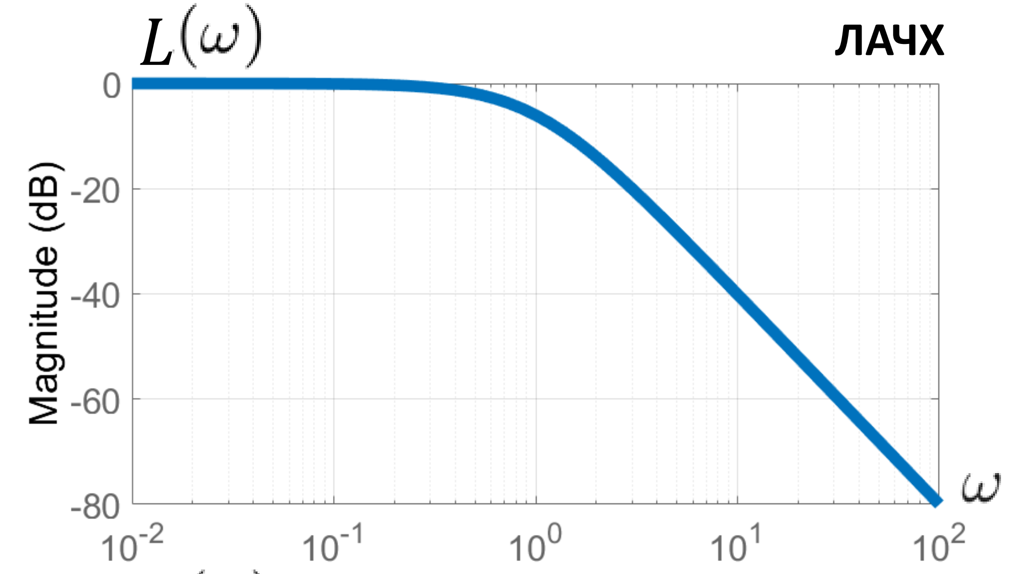
$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

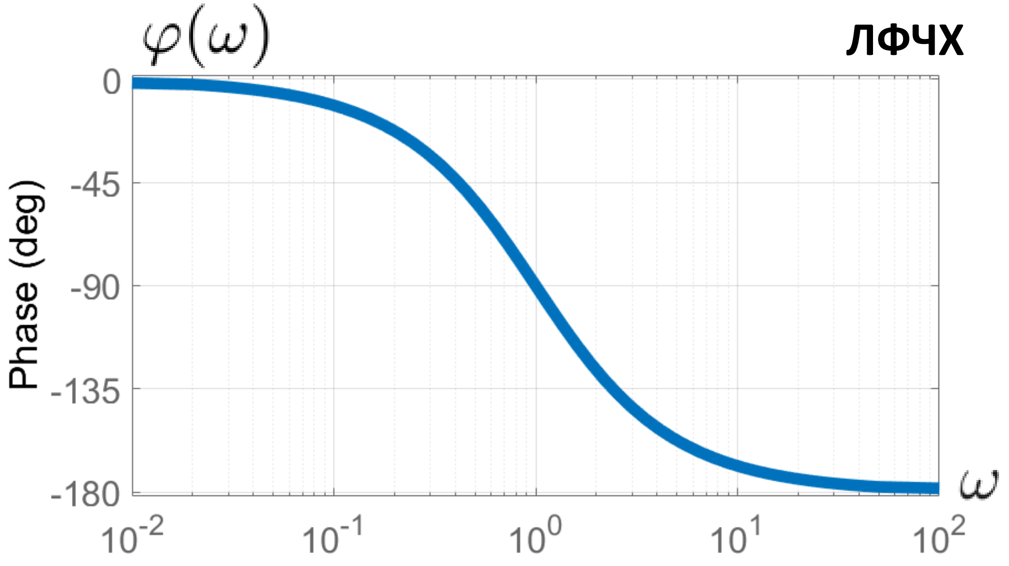
$$\Downarrow$$

$$\lg\big(W(j\omega)\big) = \lg\big(A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\big)$$

$$\boxed{W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ





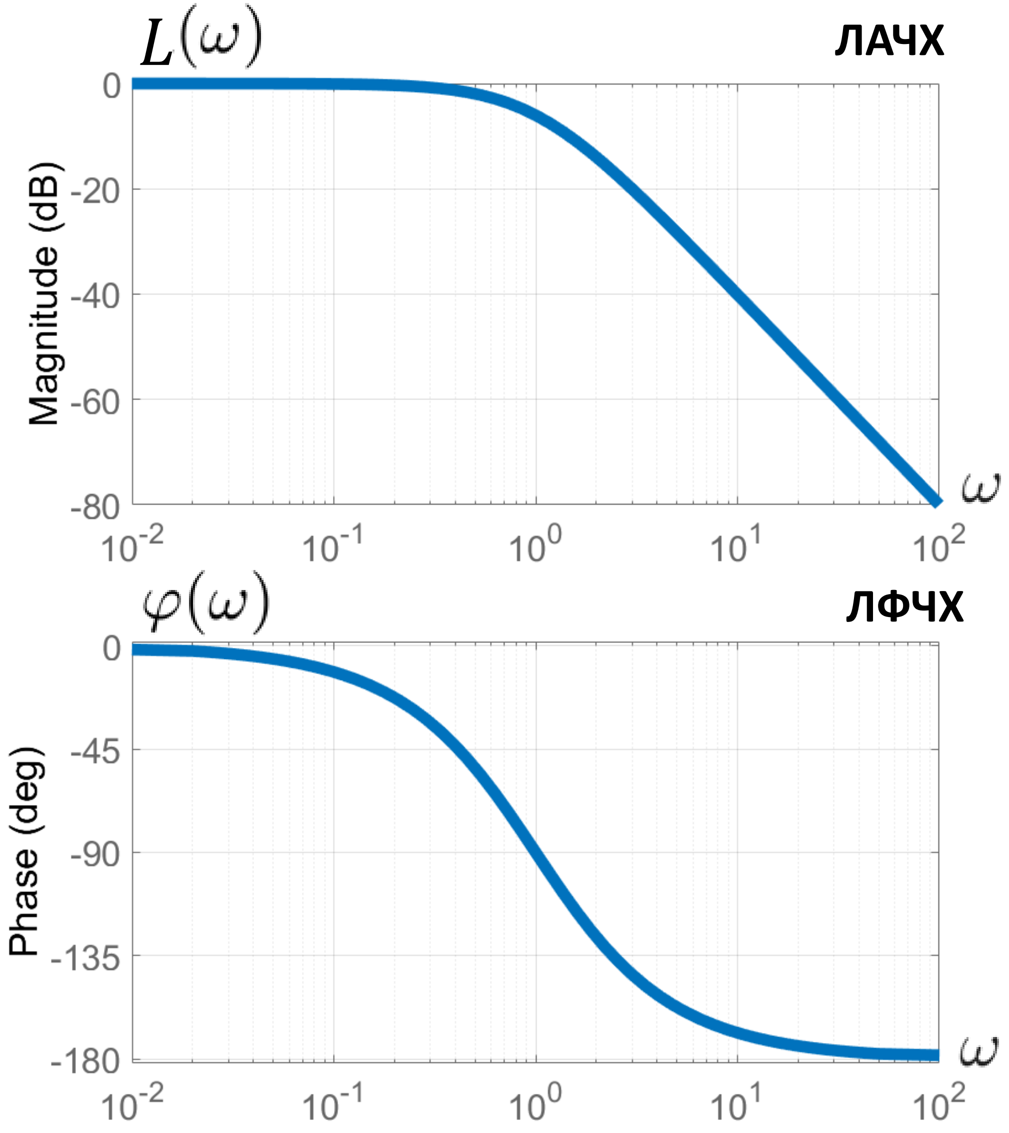
$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\Downarrow$$

$$\lg\big(W(j\omega)\big) = \lg\big(A(\omega)\big) + \lg\big(e^{j\varphi(\omega)}\big)$$

$$\boxed{W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

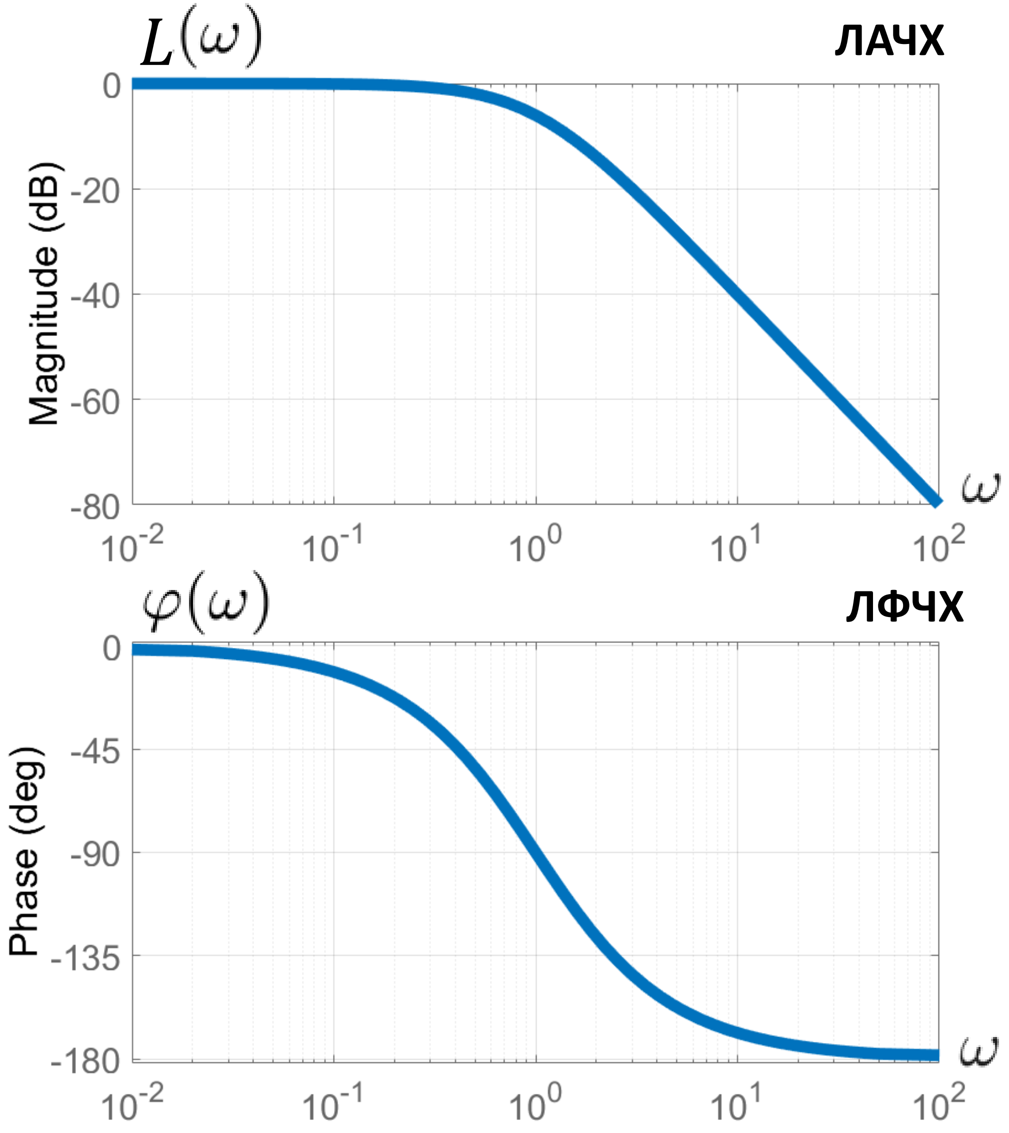
$$\Downarrow$$

$$\lg\big(W(j\omega)\big) = \lg\big(A(\omega)\big) + j\lg(e)\,\varphi(\omega)$$

Независимость амплитуды от фазы!

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

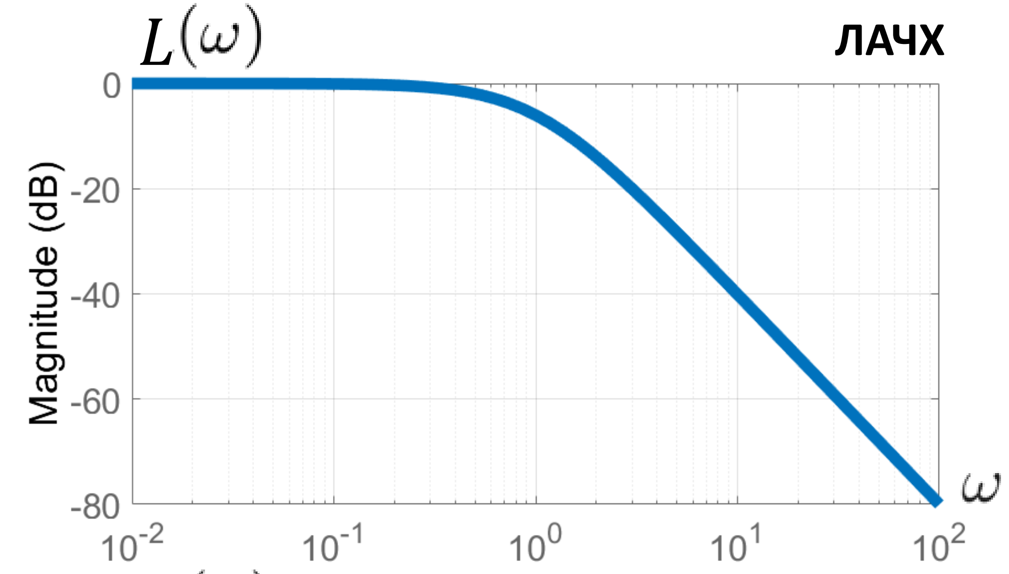


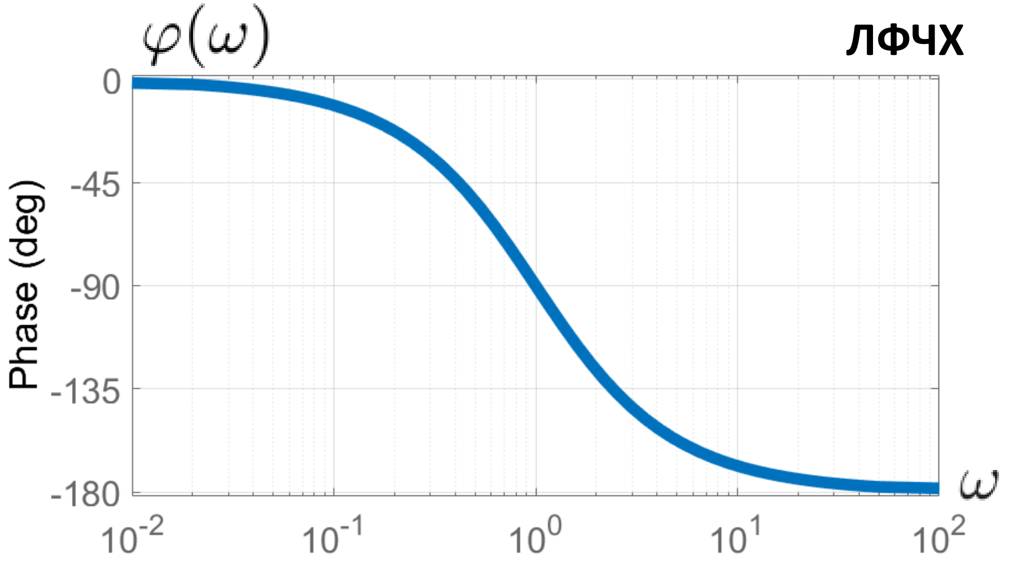
$$L(\omega) = 20\lg\big(A(\omega)\big)$$

Строго говоря под логарифмом необходима безразмерная величина

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



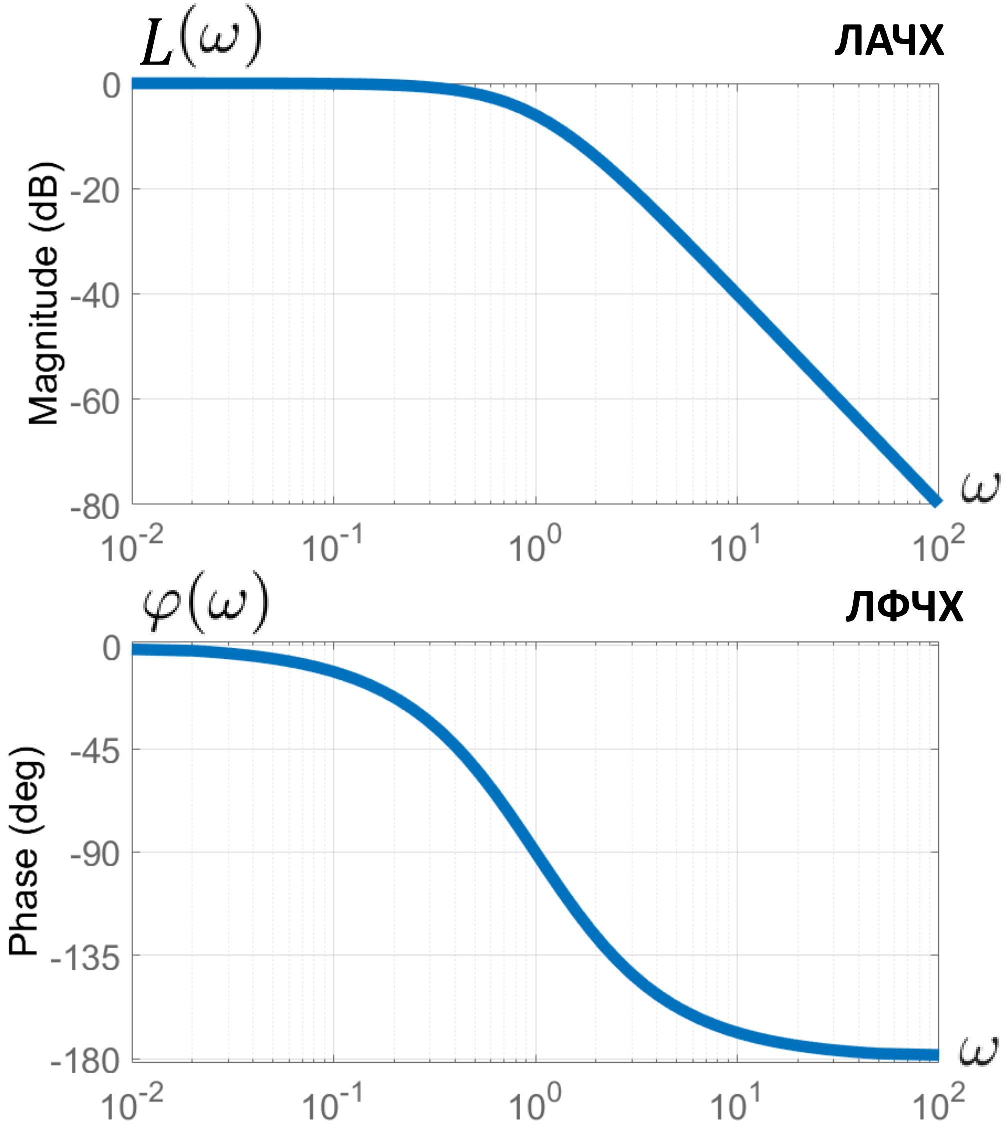


$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{A(\omega)}{A_б}\right)$$

$A_б = 1$, размерность та же, что и $A(\omega)$, $L(\omega)$ – относительная величина

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

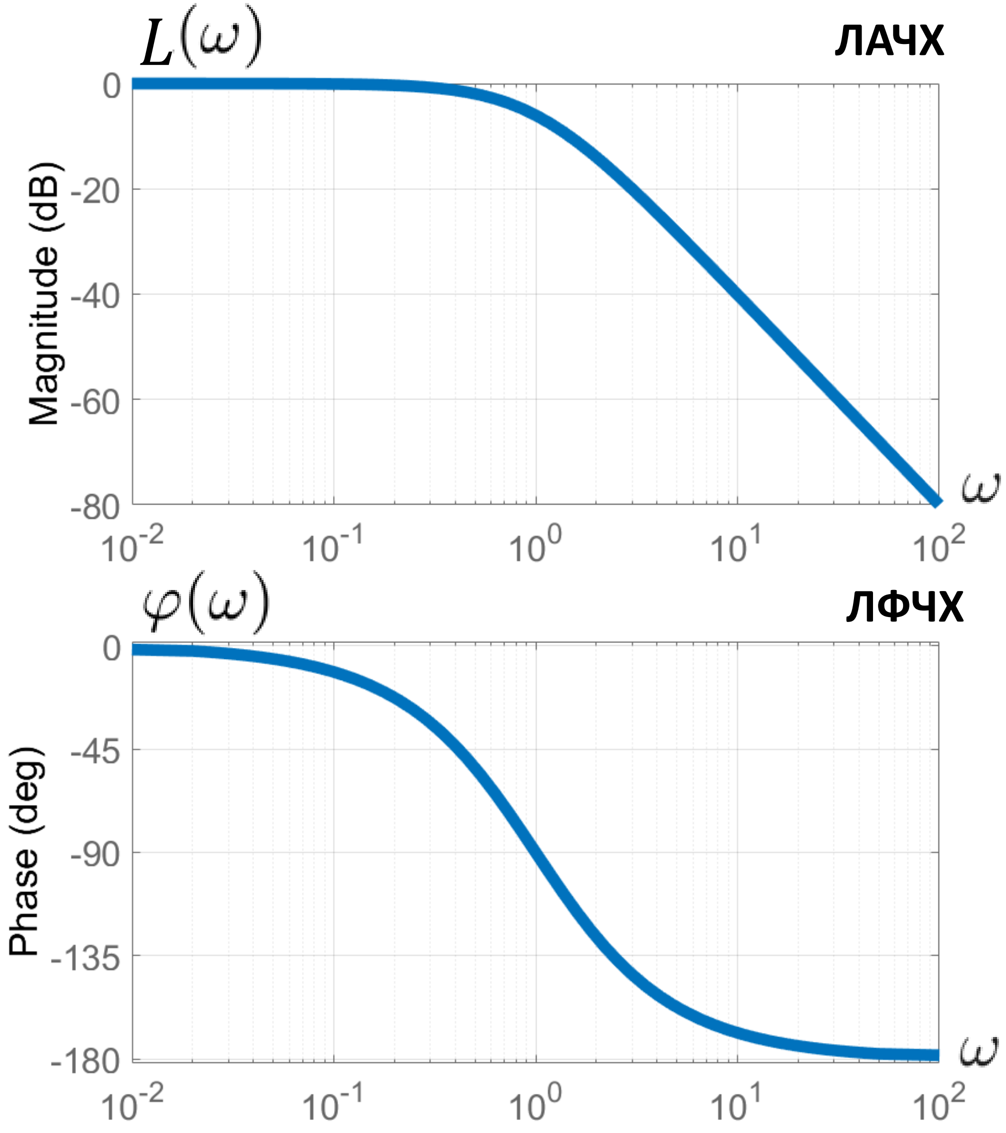


$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{A(\omega)}{A_б}\right)$$

Почему 20?

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{A(\omega)}{A_б}\right)$$

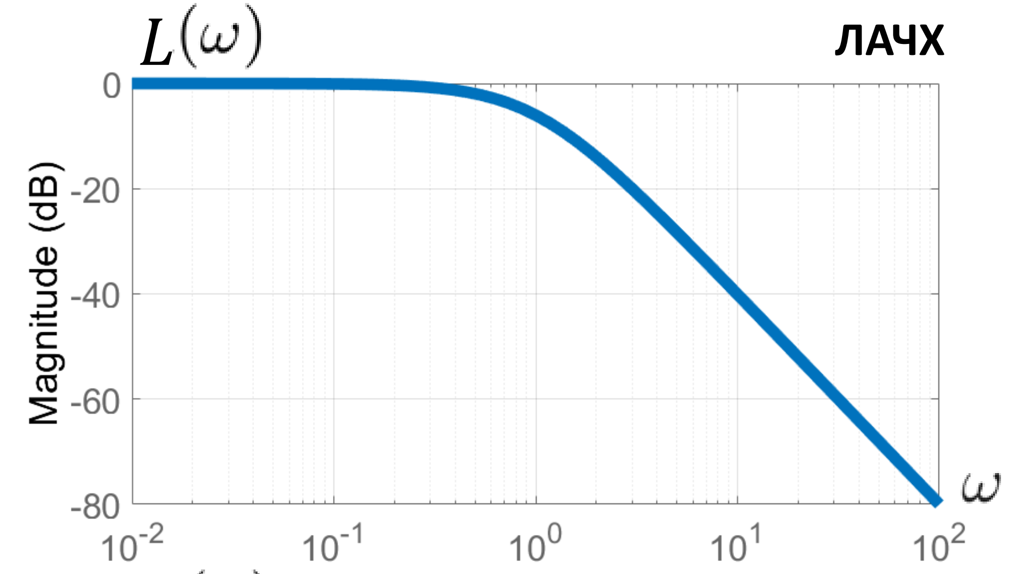
От электротехники:

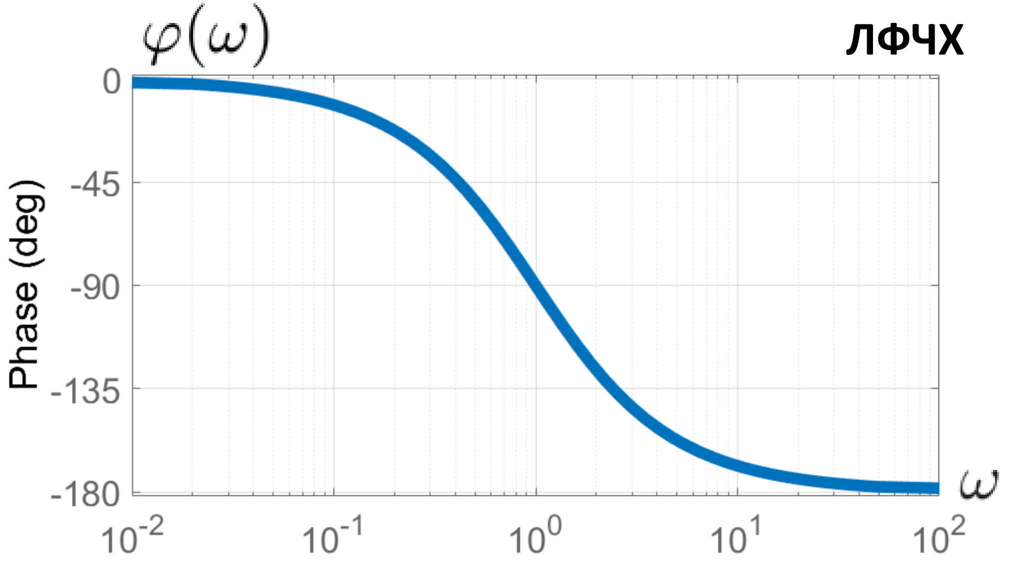
$P(\omega)$ – мощность,
$P(\omega) \sim I^2 R$ или $\sim U^2/R$

$$\lg(P(\omega)) \sim \lg(A^2(\omega)) = 2\lg(A(\omega))$$

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ





$$L(\omega) = 20 \lg\left(\frac{A(\omega)}{A_б}\right)$$

От электротехники:

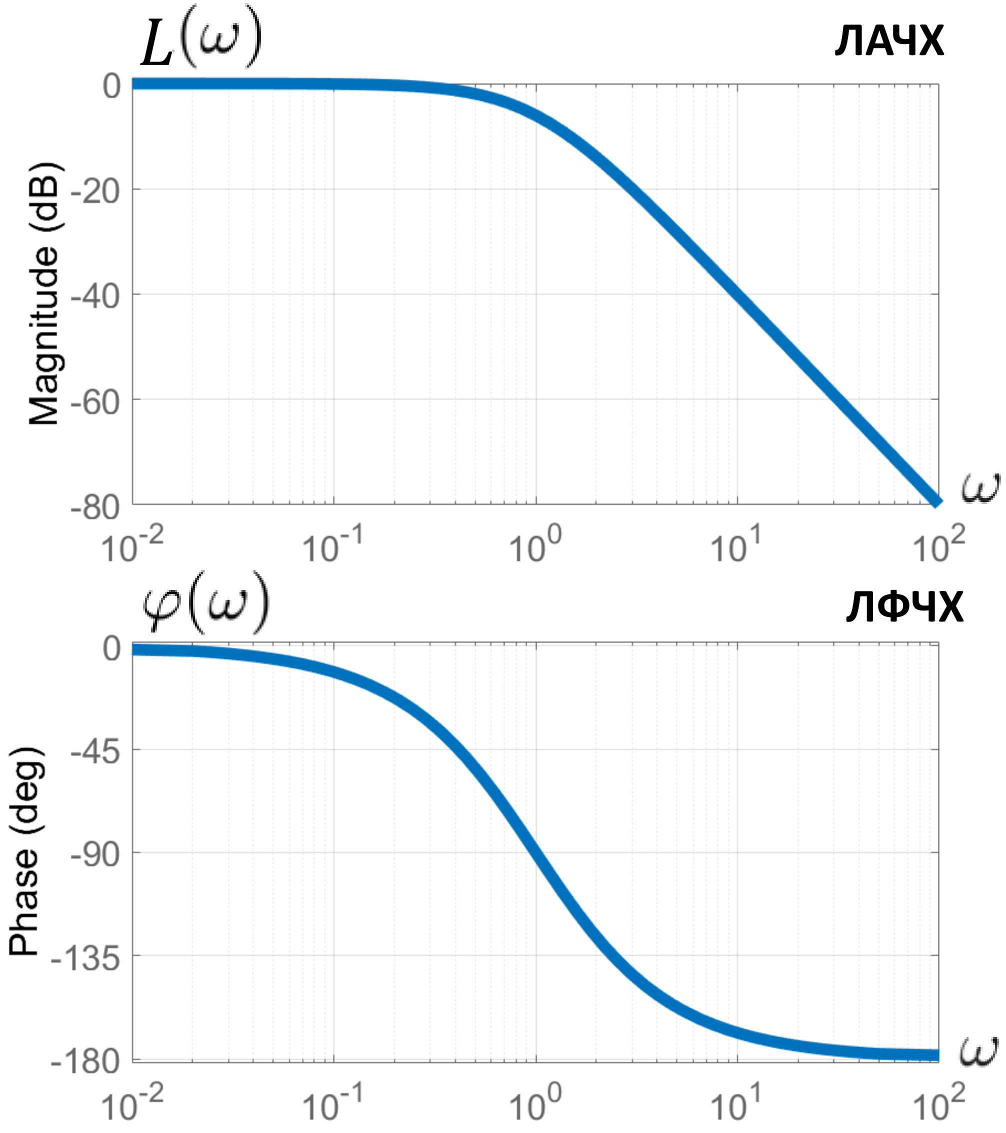
$P(\omega)$ – мощность,
$P(\omega) \sim I^2 R$ или $\sim U^2/R$

$$10 \lg(P(\omega)) \sim 10 \lg(A^2(\omega)) = 20 \lg(A(\omega))$$

Как правило малая величина, берут x10 (***Деци***бел)

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

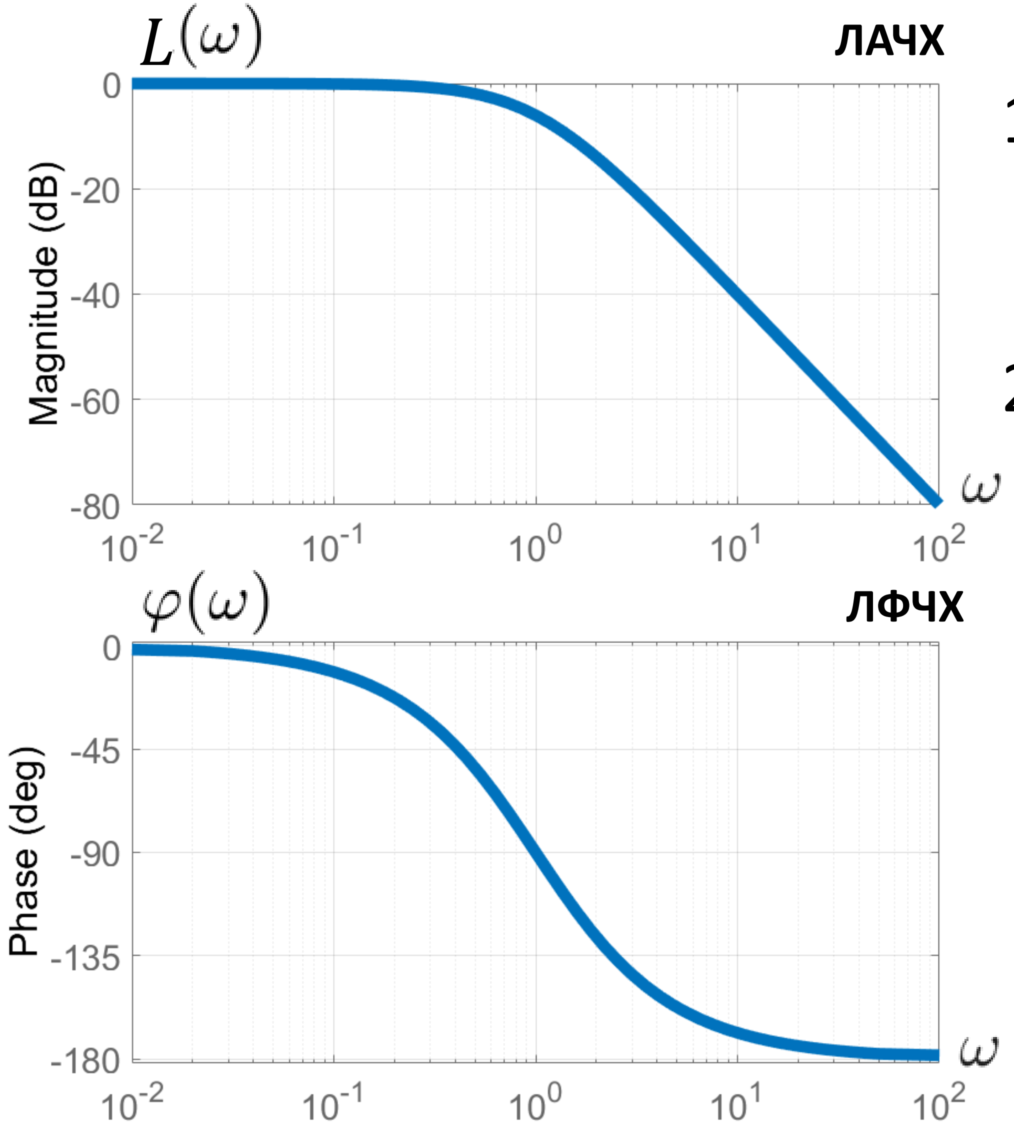
Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



1. Больший охват из-за логарифмического масштаба

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

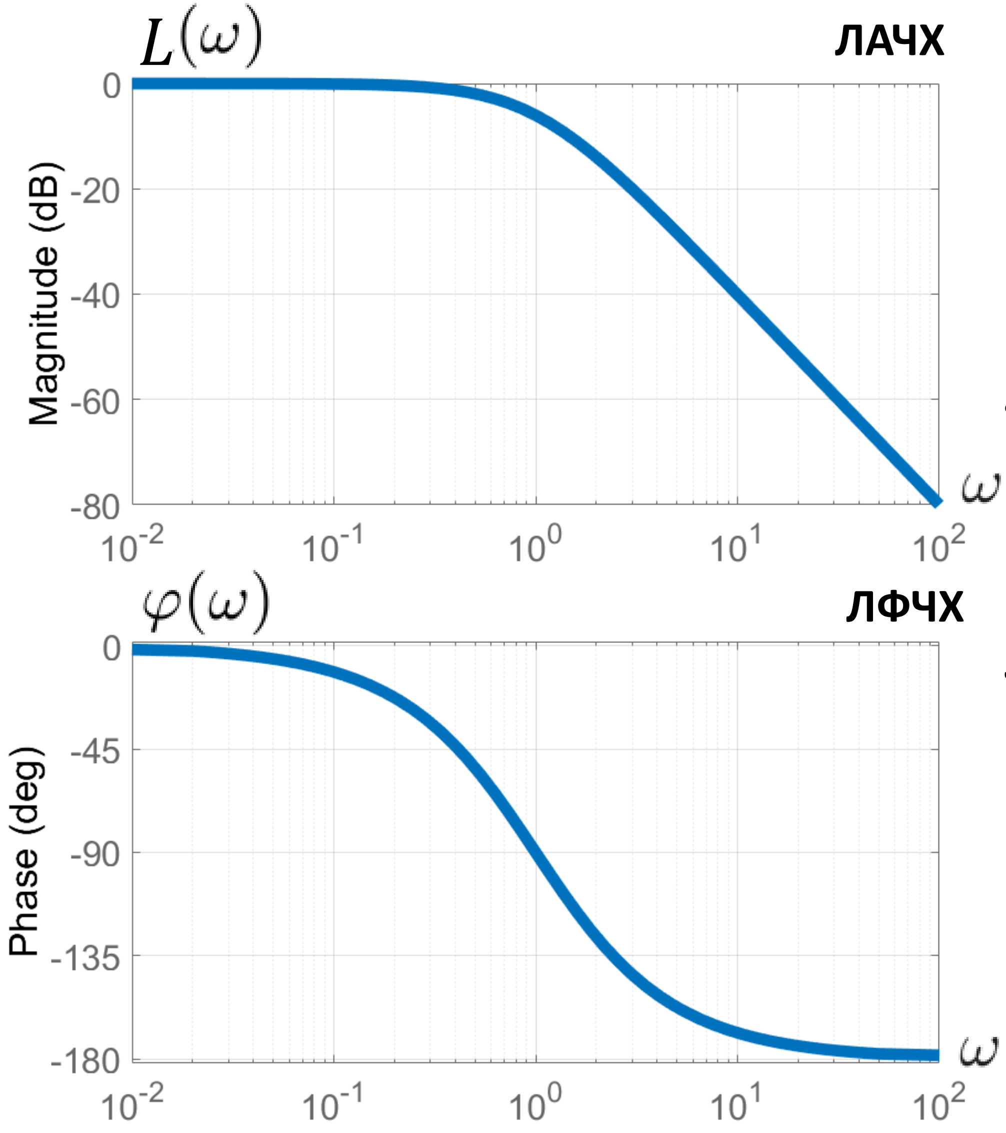
Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



1. Больший охват из-за логарифмического масштаба
2. Удобно для последовательного соединения звеньев

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



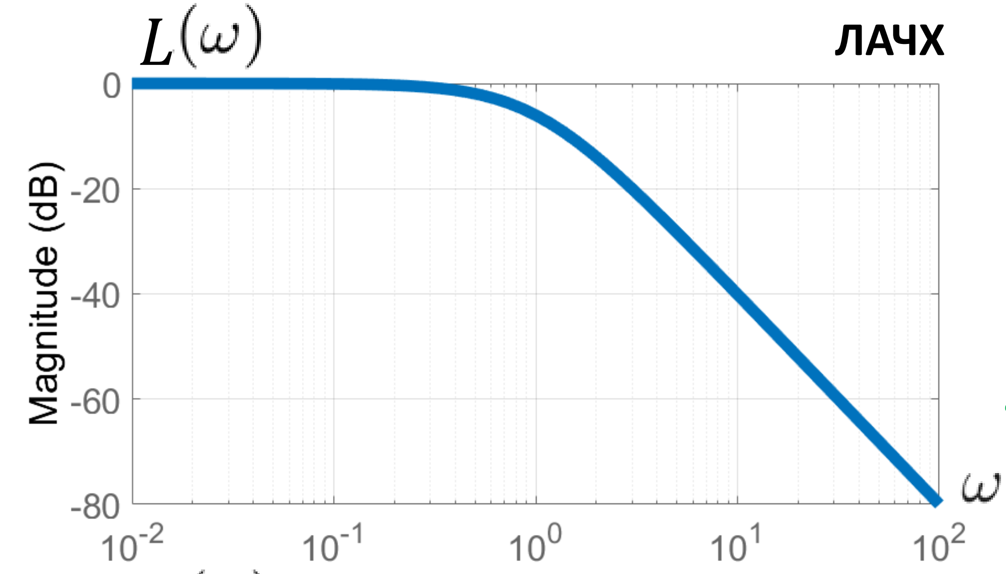
1. Больший охват из-за логарифмического масштаба

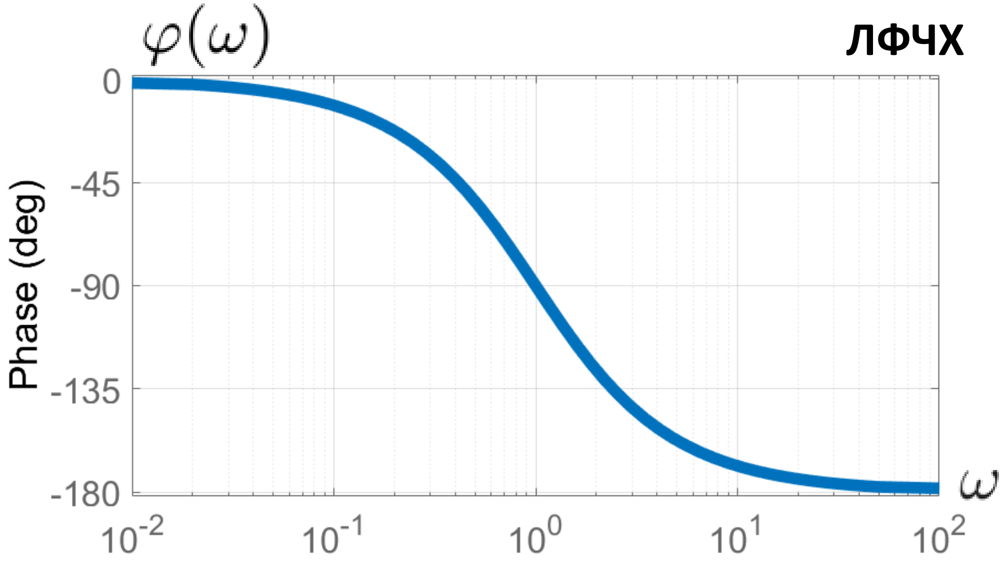
2. Удобно для последовательного соединения звеньев

3. Легко построить амплитудную характеристику приближенно, «на коленке» (*асимптотическая ЛАЧХ*)

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ





1. Больший охват из-за логарифмического масштаба

2. Удобно для последовательного соединения звеньев

3. Легко построить амплитудную характеристику приближенно, «на коленке» (*асимптотическая ЛАЧХ*)

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\to \boxed{W_1(j\omega)} \to \boxed{W_2(j\omega)} \to \ \dots \ \to \boxed{W_n(j\omega)} \to$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\rightarrow \boxed{W_1(j\omega)} \rightarrow \boxed{W_2(j\omega)} \rightarrow \; \dots \; \rightarrow \boxed{W_n(j\omega)} \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \dots A_n(\omega)e^{j\varphi_n(\omega)}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\to \boxed{W_1(j\omega)} \to \boxed{W_2(j\omega)} \to \dots \to \boxed{W_n(j\omega)} \to$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \big(A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \dots A_n(\omega)\big)e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\dots+\varphi_n(\omega))}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \dots A_n(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega) \end{cases}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\rightarrow \boxed{W_1(j\omega)} \rightarrow \boxed{W_2(j\omega)} \rightarrow \ldots \rightarrow \boxed{W_n(j\omega)} \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \ldots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \left(A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \ldots A_n(\omega)\right)e^{j\left(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_n(\omega)\right)}$$

$$\begin{cases} A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \ldots A_n(\omega) \\ L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_n(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega) \end{cases}$$

$$\boxed{\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\to \boxed{W_1(j\omega)} \to \boxed{W_2(j\omega)} \to \ \dots \ \to \boxed{W_n(j\omega)} \to$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

Пример:

$$W_1(s) = \frac{100}{s + 100},$$

$$W_2(s) = \frac{s}{s + 10},$$

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{100s}{s^2 + 110s + 1000}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\rightarrow \boxed{W_1(j\omega)} \rightarrow \boxed{W_2(j\omega)} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{W_n(j\omega)} \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

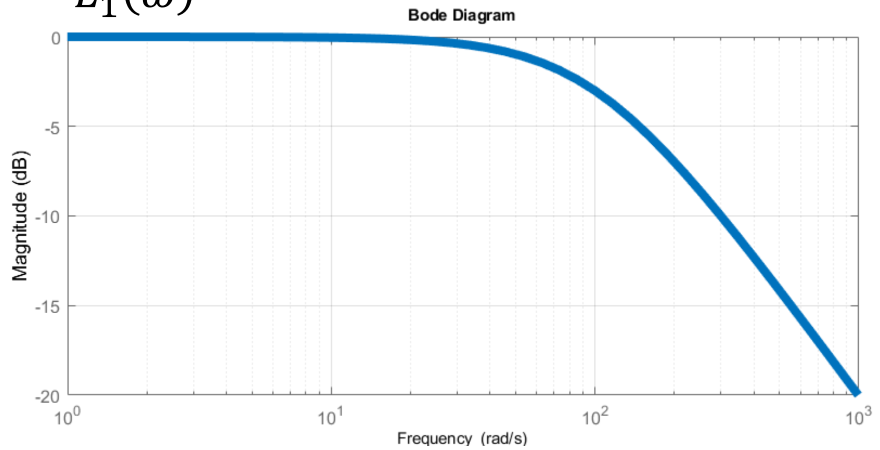
Пример:

$$W_1(s) = \frac{100}{s + 100},$$

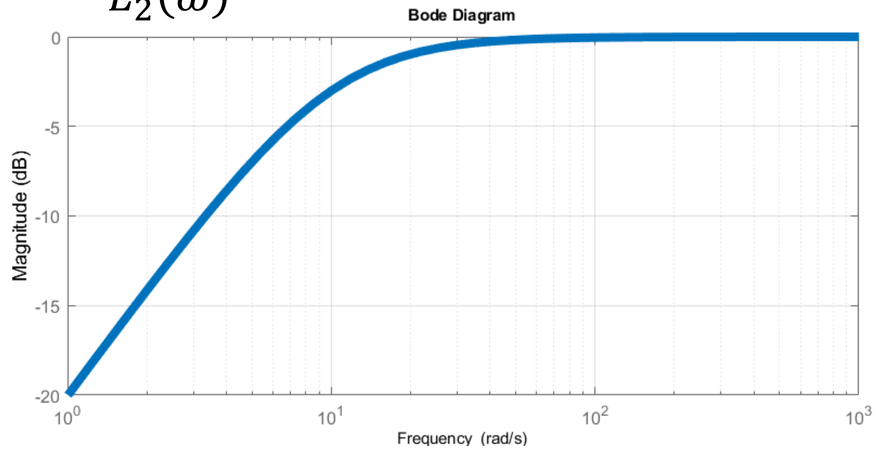
$$W_2(s) = \frac{s}{s + 10},$$

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{100s}{s^2 + 110s + 1000}$$

$L_1(\omega)$



$L_2(\omega)$



Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\rightarrow \boxed{W_1(j\omega)} \rightarrow \boxed{W_2(j\omega)} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{W_n(j\omega)} \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

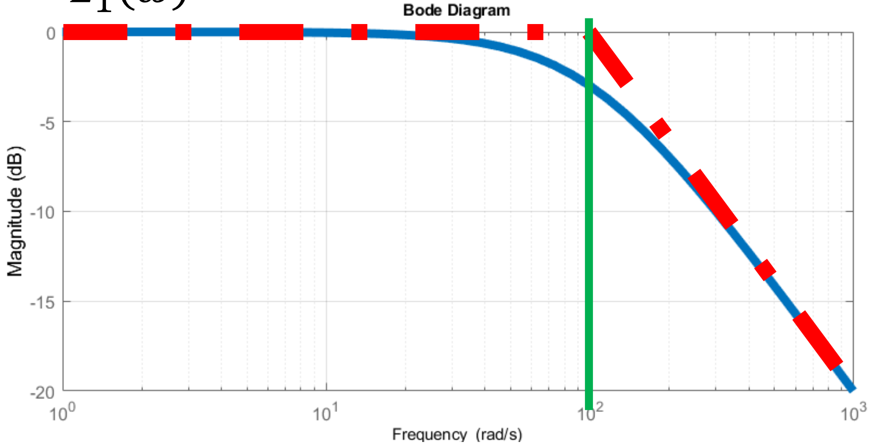
Пример:

$$W_1(s) = \frac{100}{s + 100},$$

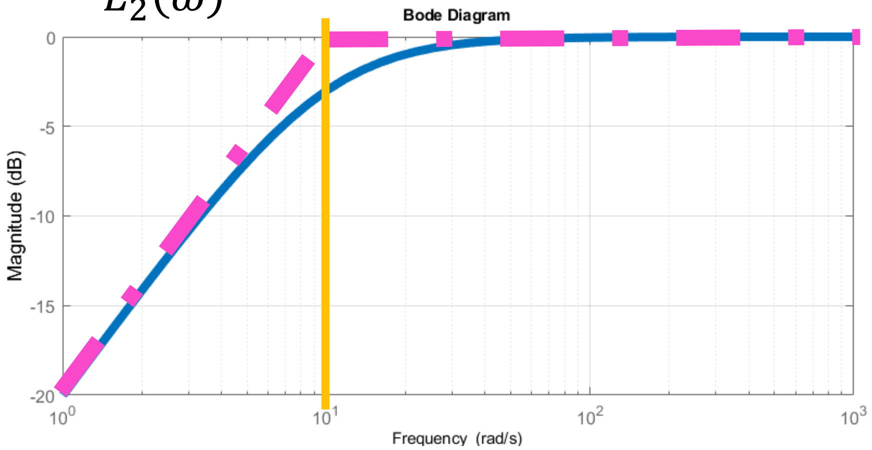
$$W_2(s) = \frac{s}{s + 10},$$

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) = \frac{100s}{s^2 + 110s + 1000}$$

$L_1(\omega)$



$L_2(\omega)$



Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\rightarrow W_1(j\omega) \rightarrow W_2(j\omega) \rightarrow \dots \rightarrow W_n(j\omega) \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)\cdot W_2(j\omega)\dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

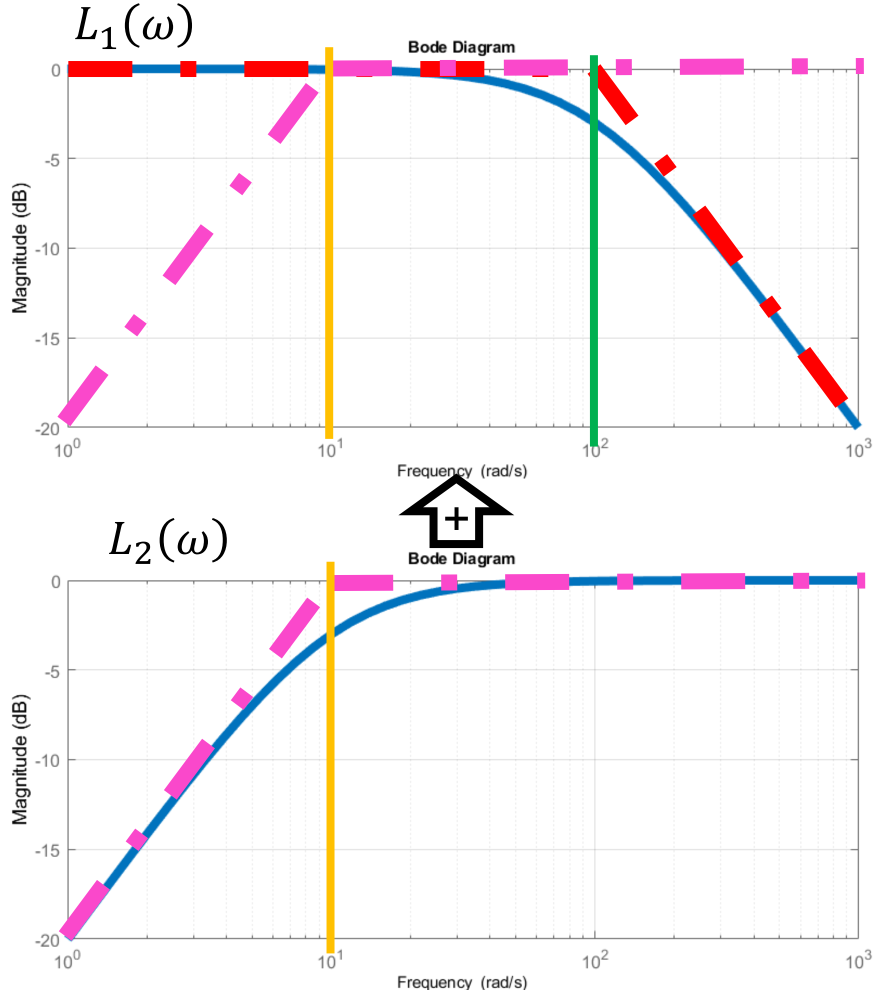
$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

Пример:

$$W_1(s) = \frac{100}{s+100},$$

$$W_2(s) = \frac{s}{s+10},$$

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{100s}{s^2+110s+1000}$$



Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

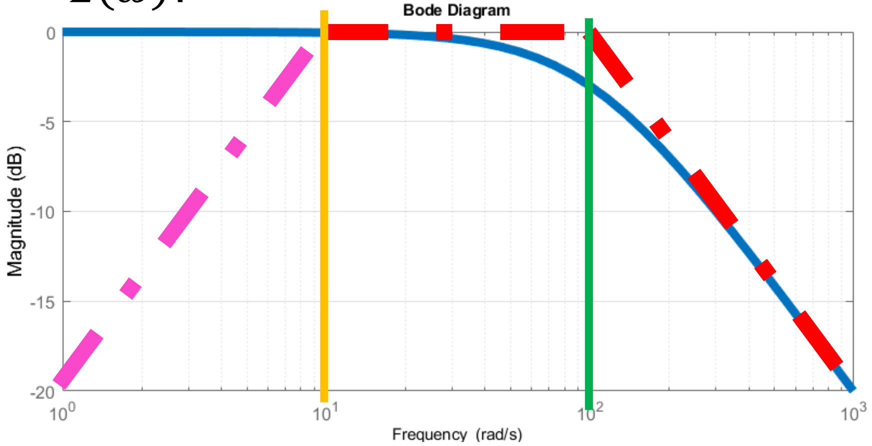
$$\rightarrow \boxed{W_1(j\omega)} \rightarrow \boxed{W_2(j\omega)} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{W_n(j\omega)} \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

$L(\omega)$?



Пример:

$$W_1(s) = \frac{100}{s+100},$$

$$W_2(s) = \frac{s}{s+10},$$

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{100s}{s^2 + 110s + 1000}$$

Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\rightarrow \boxed{W_1(j\omega)} \rightarrow \boxed{W_2(j\omega)} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{W_n(j\omega)} \rightarrow$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

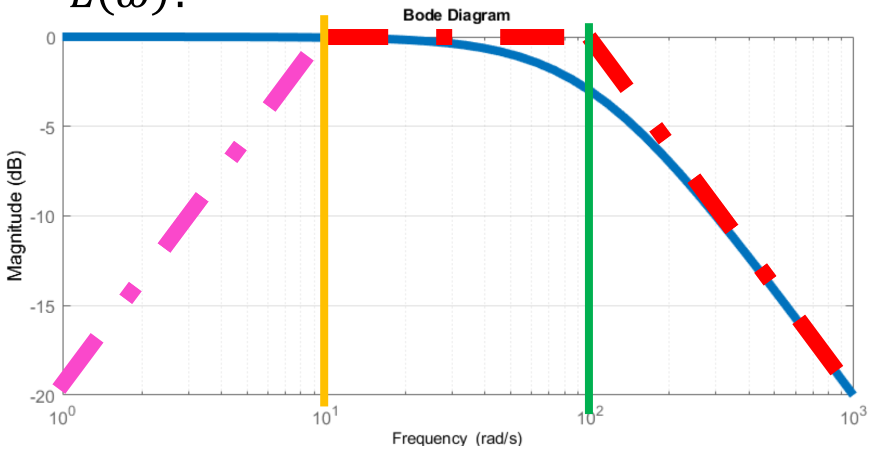
Пример:

$$W_1(s) = \frac{100}{s+100},$$

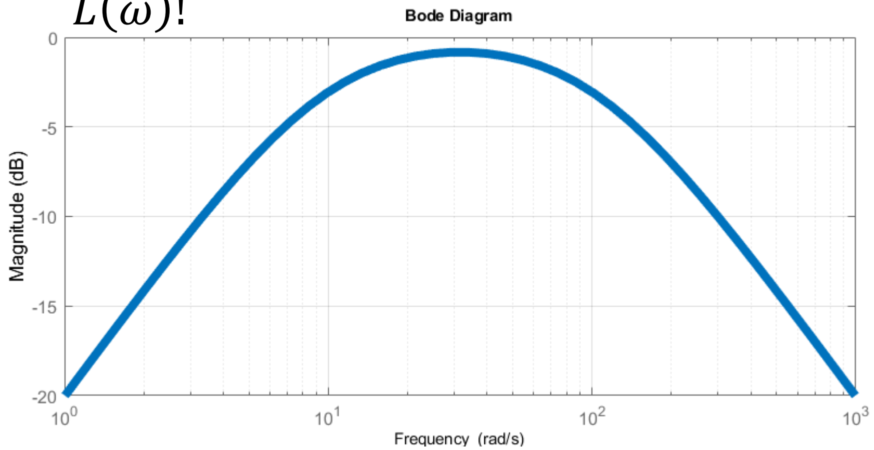
$$W_2(s) = \frac{s}{s+10},$$

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{100s}{s^2 + 110s + 1000}$$

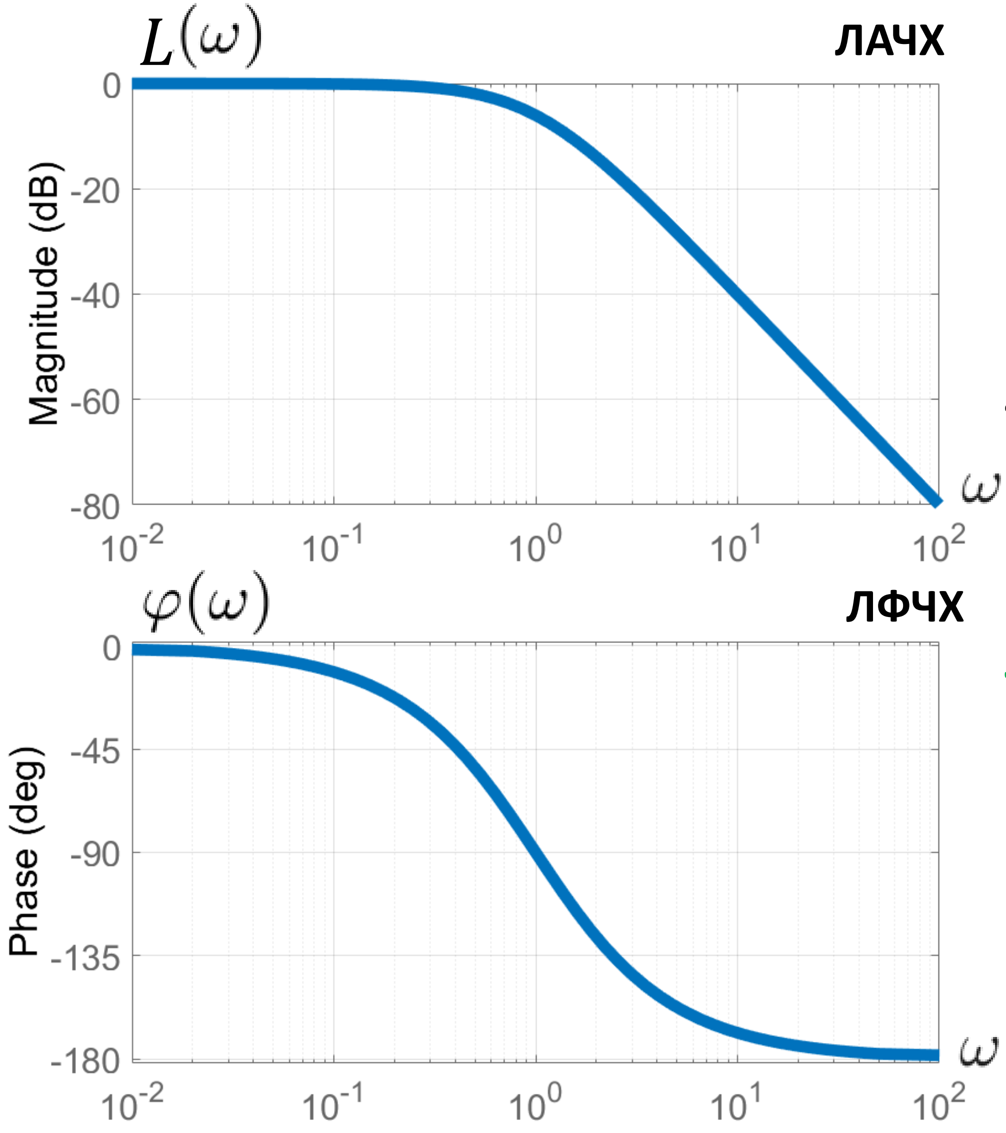
$L(\omega)?$



$L(\omega)!$



Частотные характеристики: ЛАЧХ и ЛФЧХ



1. Больший охват из-за логарифмического масштаба

2. Удобно для последовательного соединения звеньев

3. Легко построить амплитудную характеристику приближенно, «на коленке» (*асимптотическая ЛАЧХ*)

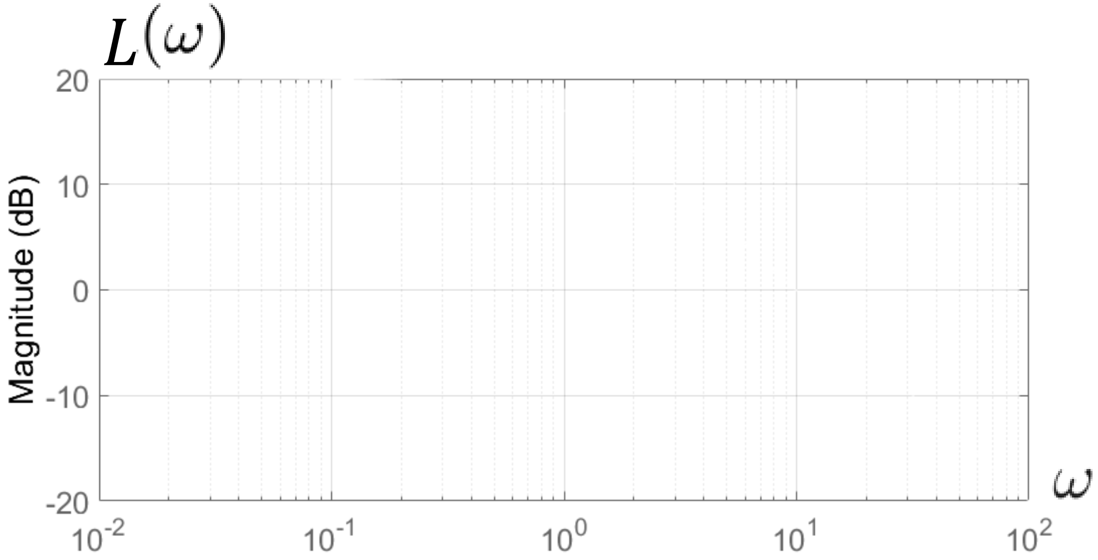
$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

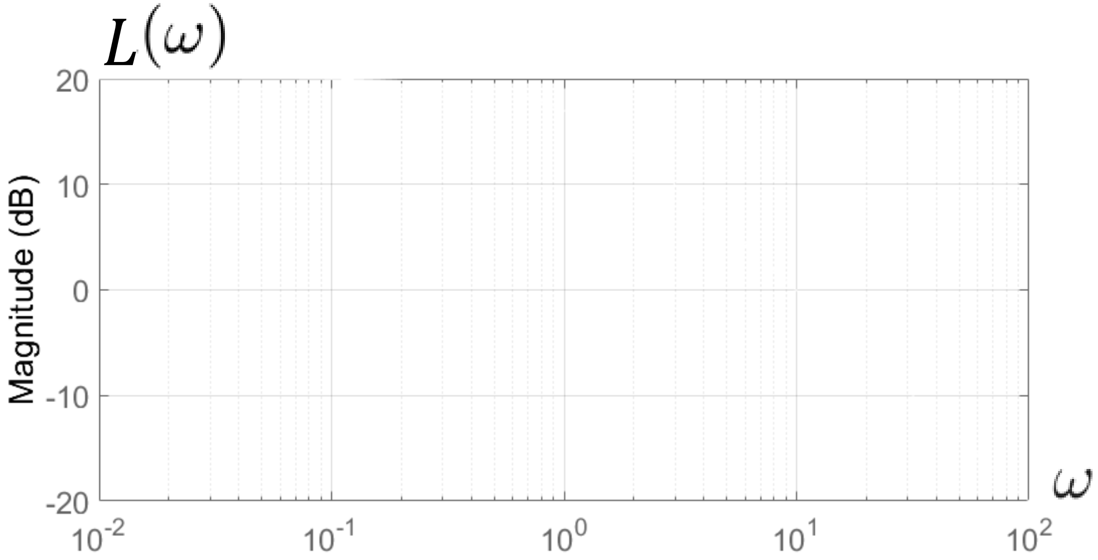
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left|\frac{10}{j\omega + 1}\right| = \frac{10}{|j\omega + 1|} = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

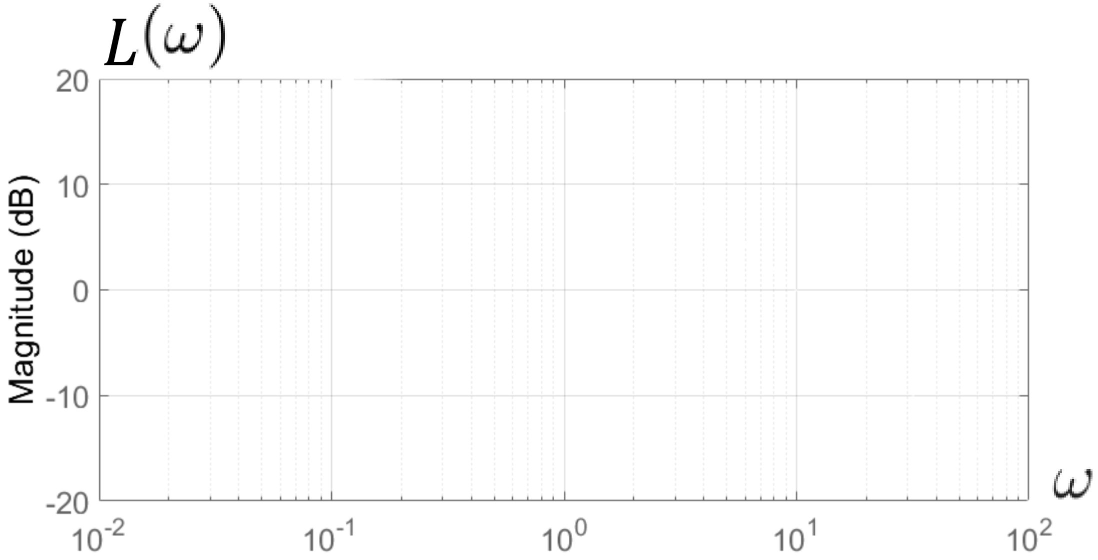
$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}\right)$$

Считаем, что уже без размерности для простоты записи



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

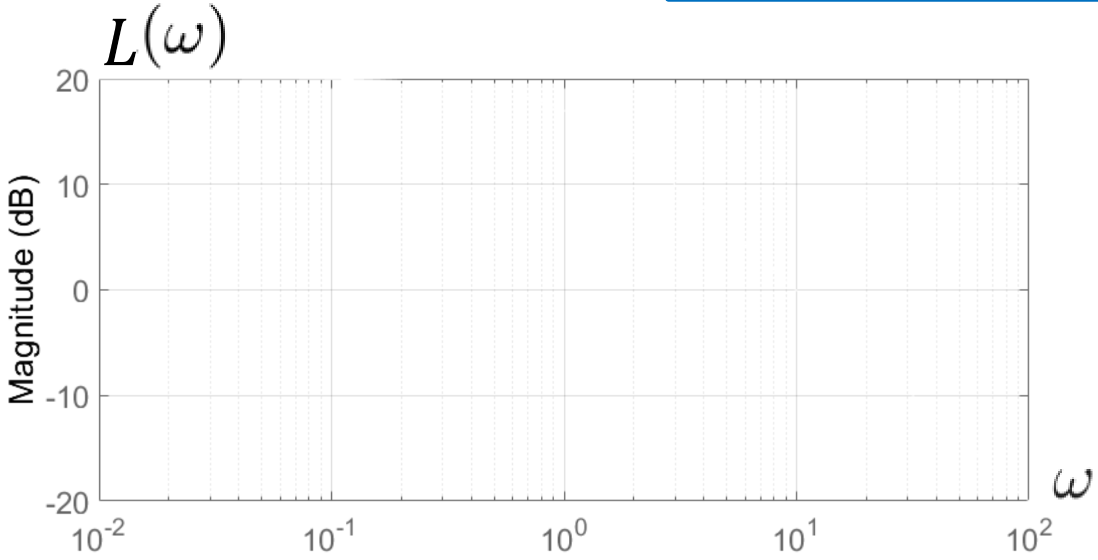
$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20\lg(10) - 20\lg\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)$$

Вспоминаем свойства логарифмов



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

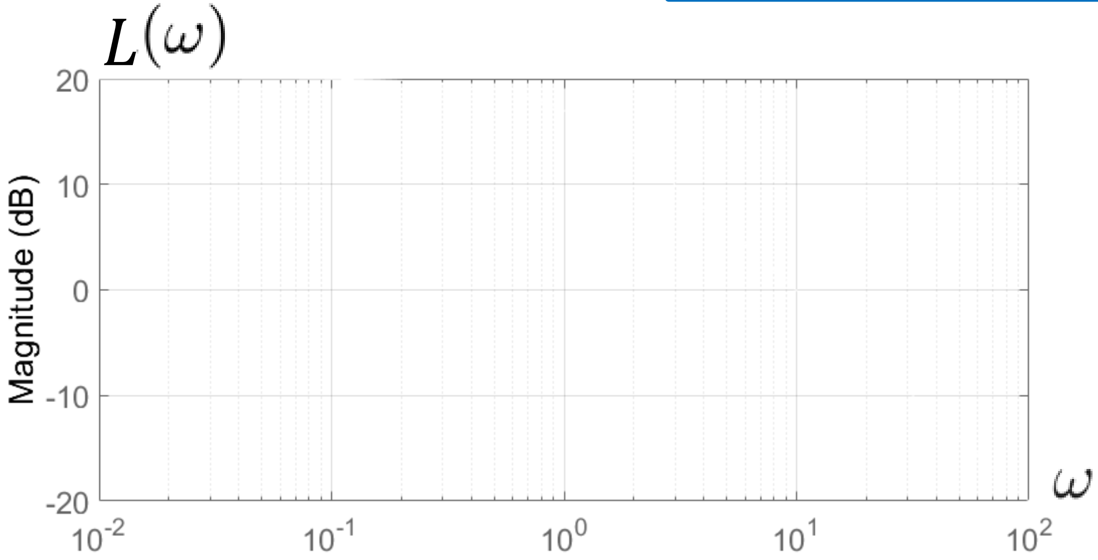
$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 \cdot 1 - 20\lg\left((\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Вспоминаем свойства логарифмов

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

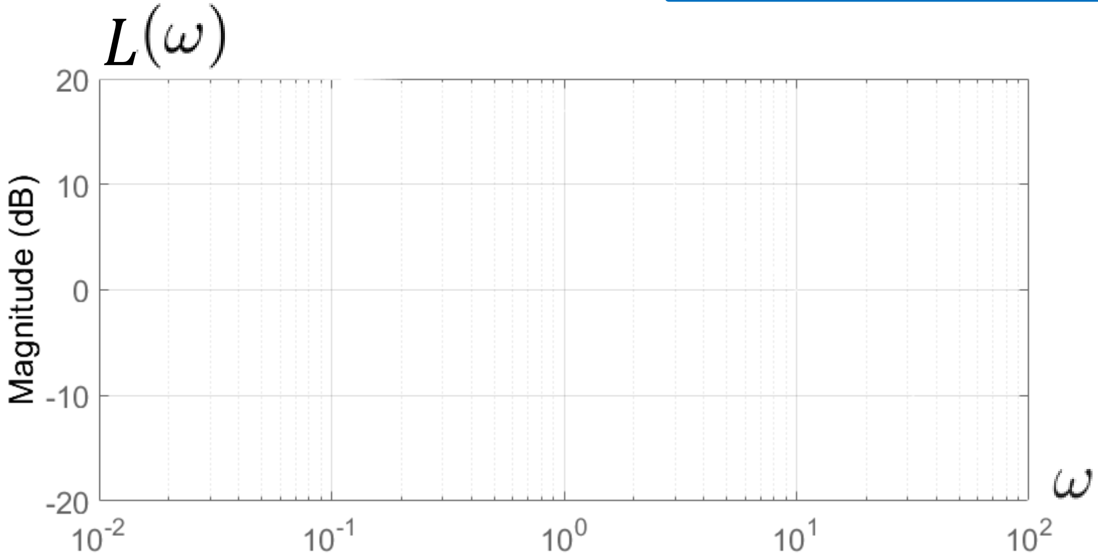
$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lg(\omega^2+1)$$

Вспоминаем свойства логарифмов



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

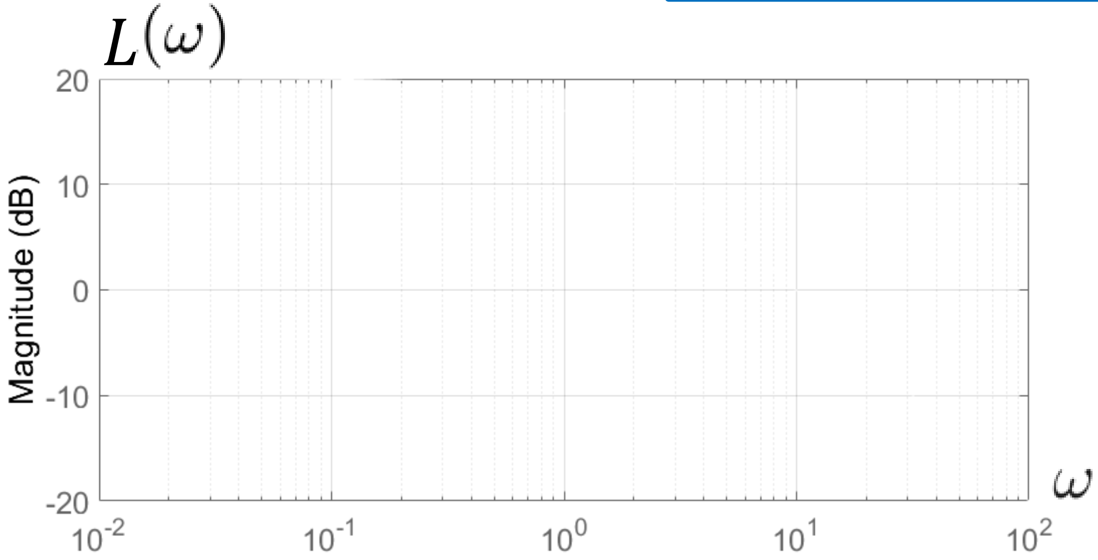
$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$

Вспоминаем свойства логарифмов



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

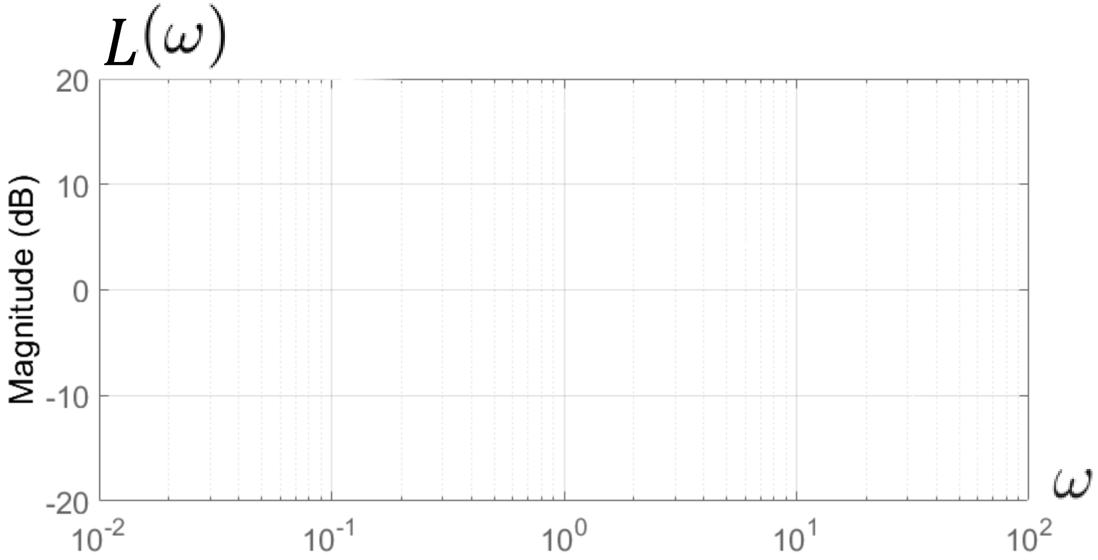
$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$

Существует две области частот…



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

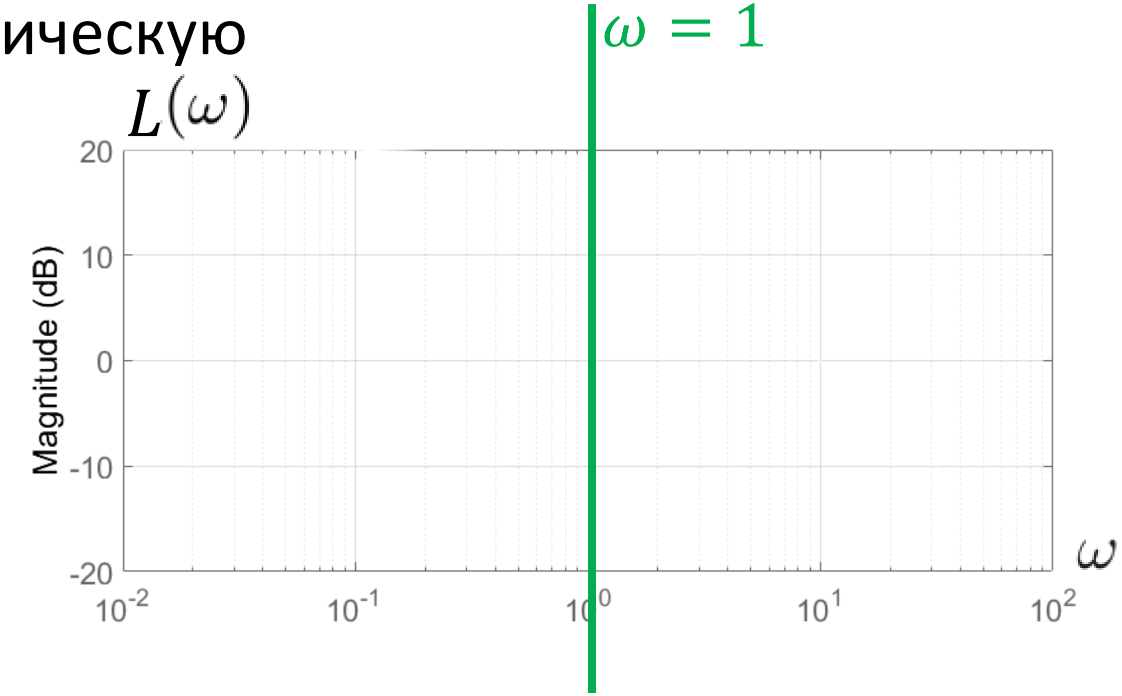
Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$

1. $\omega < 1 \ (\omega^2 \ll 1)$
   $\lg(\omega^2 + 1) \approx \lg(1) = 0$

2. $\omega > 1 \ (\omega^2 \gg 1)$
   $\lg(\omega^2 + 1) \approx \lg(\omega^2) = 2\lg(\omega)$



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

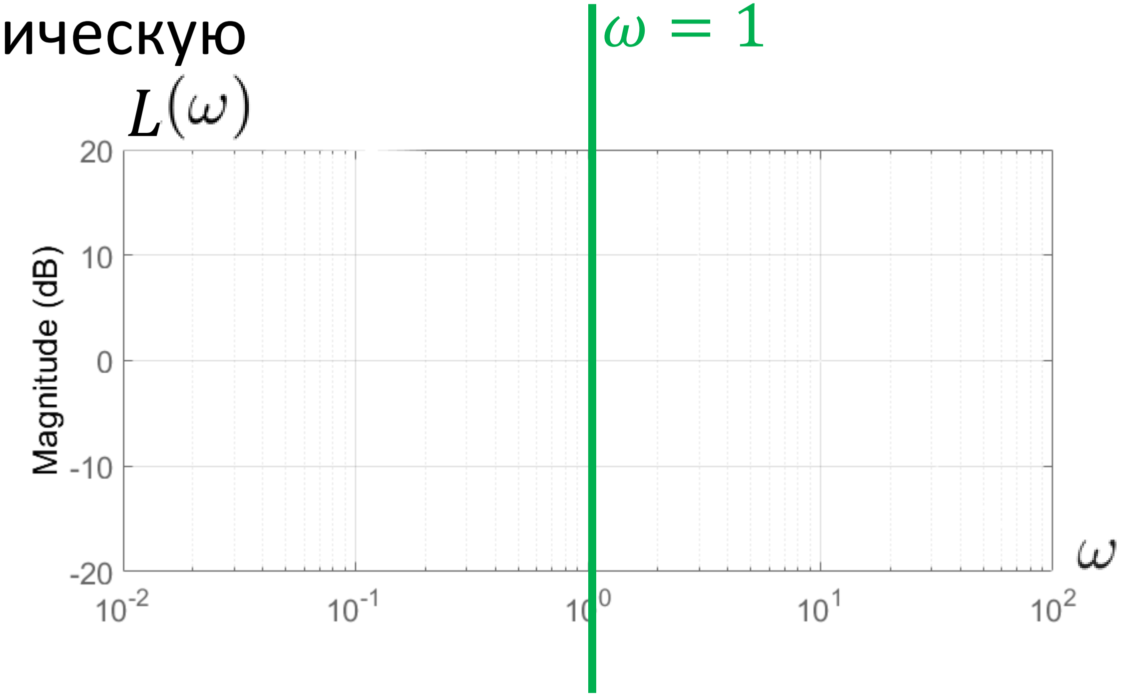
$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega+1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2+1)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

1. $\omega < 1 \ (\omega^2 \ll 1)$
   $L(\omega) \approx 20$

2. $\omega > 1 \ (\omega^2 \gg 1)$
   $L(\omega) \approx 20 - 20\lg(\omega)$



Асимптотическая ЛАЧХ

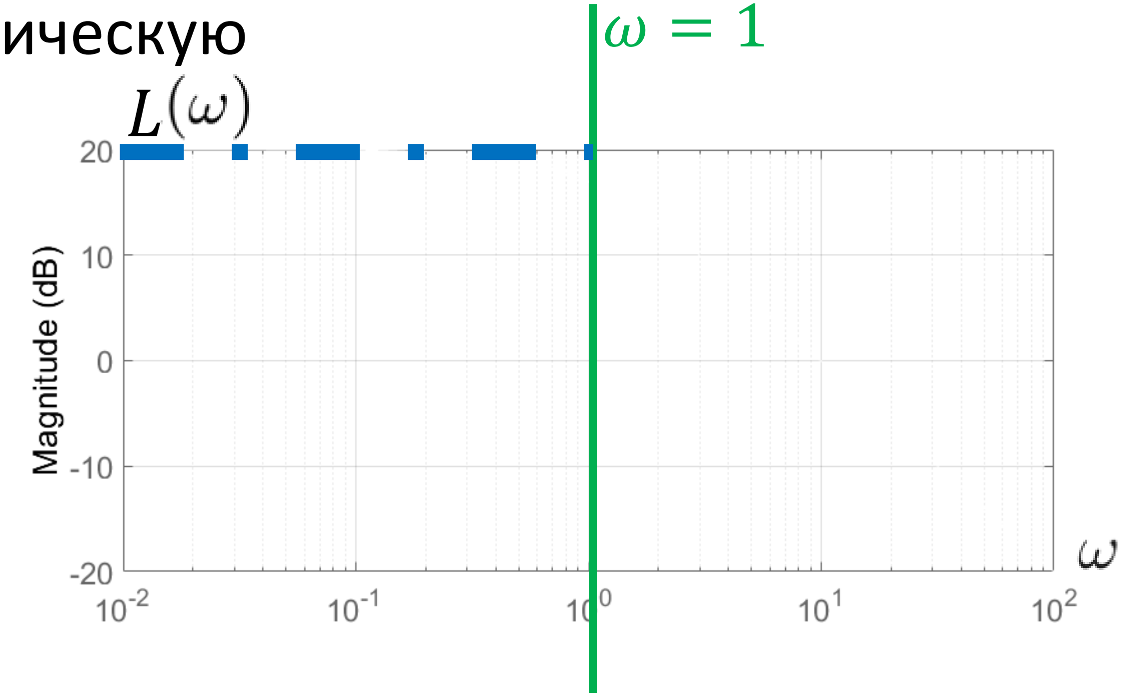
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



1. $\omega < 1 \ (\omega^2 \ll 1)$

   $L(\omega) \approx 20 = \text{const}$

2. $\omega > 1 \ (\omega^2 \gg 1)$

   $L(\omega) \approx 20 - 20\lg(\omega)$

Нулевой наклон

Асимптотическая ЛАЧХ

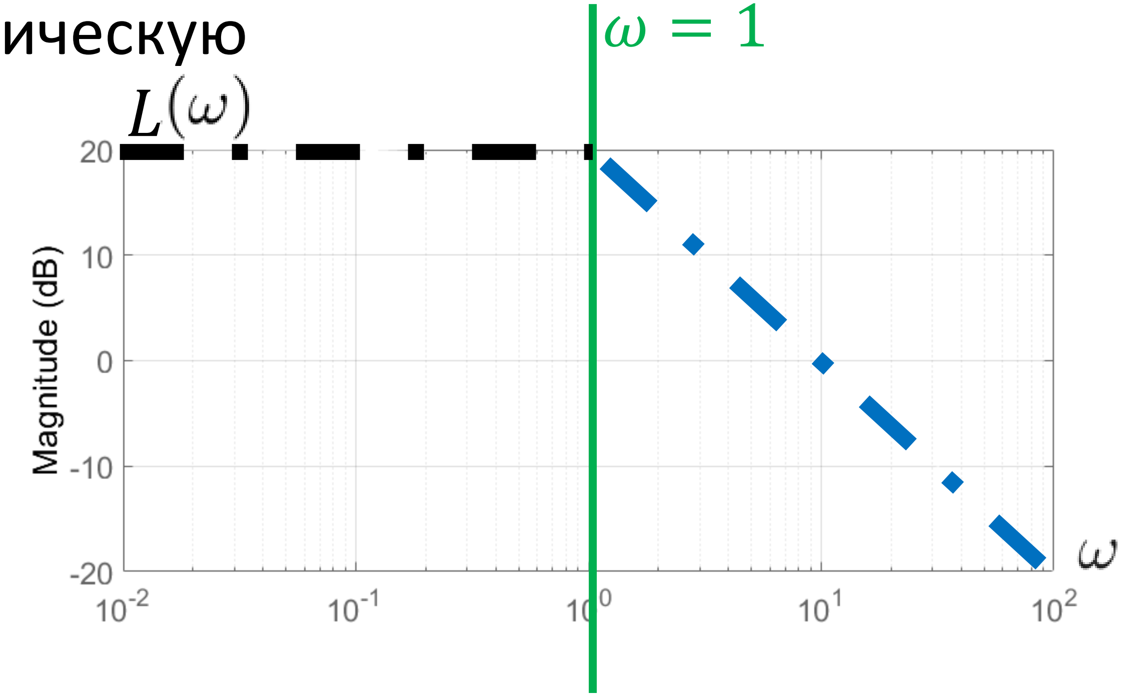
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



1. $\omega < 1 \ (\omega^2 \ll 1)$

   $L(\omega) \approx 20$

2. $\omega > 1 \ (\omega^2 \gg 1)$

   $L(\omega) \approx 20 - 20\lg(\omega)$

Наклон -20 дБ на декаду или просто -1

Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

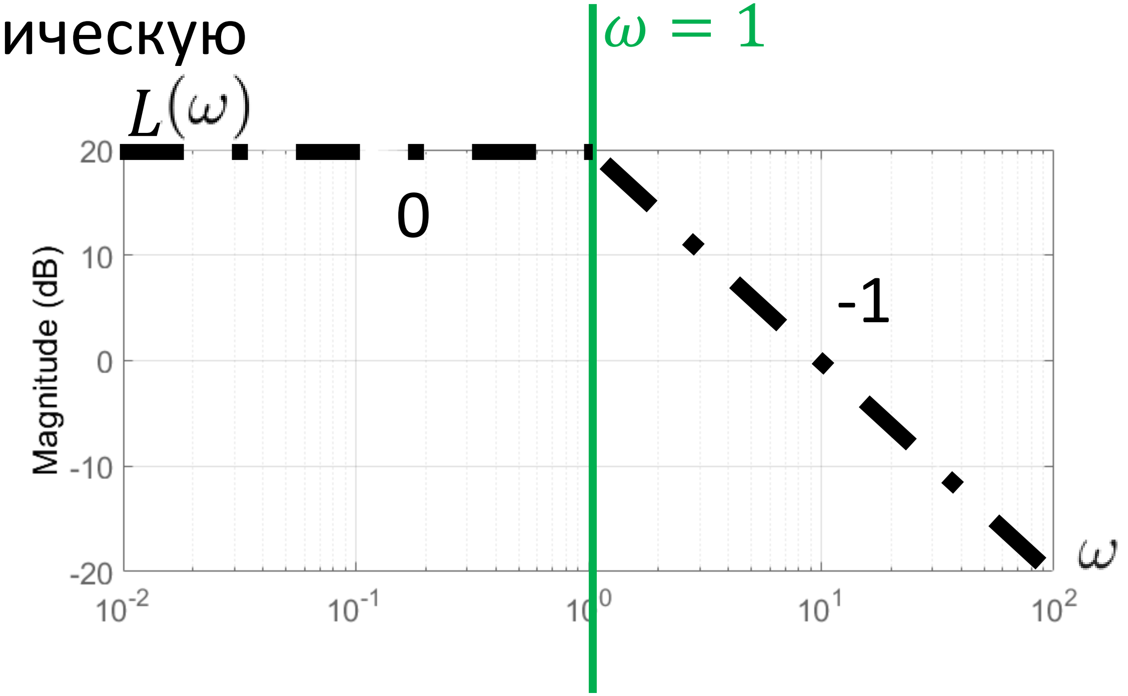
Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$

1. $\omega < 1\ (\omega^2 \ll 1)$
   $L(\omega) \approx 20$

2. $\omega > 1\ (\omega^2 \gg 1)$
   $L(\omega) \approx 20 - 20\lg(\omega)$



Асимптотическая ЛАЧХ

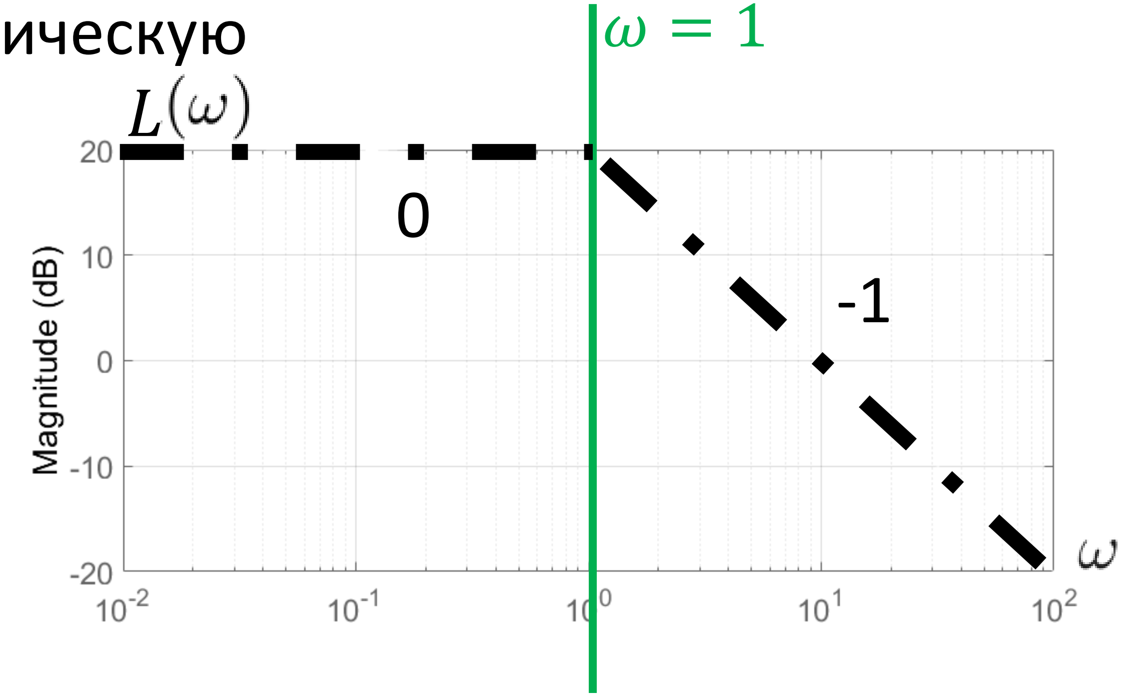
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1}, A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$



1. $\omega < 1\ (\omega^2 \ll 1)$
   $L(\omega) \approx 20$

2. $\omega > 1\ (\omega^2 \gg 1)$
   $L(\omega) \approx 20 - 20\lg(\omega)$

Сравним с настоящей

Асимптотическая ЛАЧХ

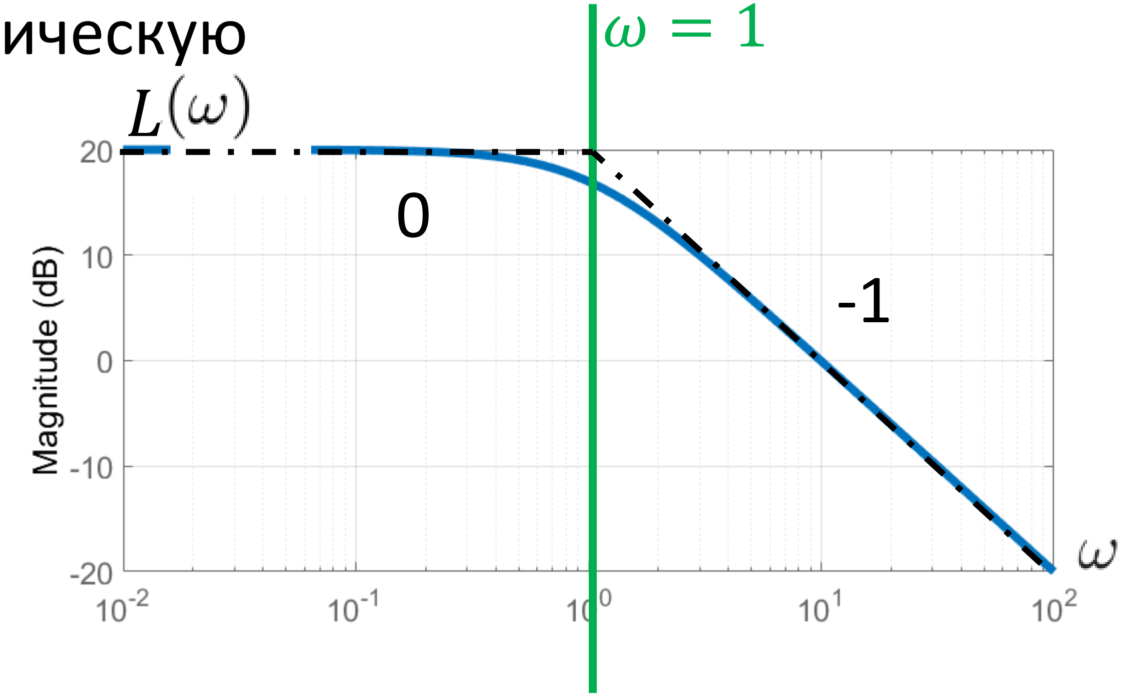
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s+1}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ

$$W(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1},\ A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}\right) = 20 - 10\lg(\omega^2 + 1)$$



1. $\omega < 1\ (\omega^2 \ll 1)$

   $L(\omega) \approx 20$

2. $\omega > 1\ (\omega^2 \gg 1)$

   $L(\omega) \approx 20 - 20\lg(\omega)$

Максимальная ошибка при $\omega = 1$ и составляет $-10\lg(2) \approx -3$ дБ, при этом быстро убывает

Асимптотическая ЛАЧХ

Порядок действий:

1. Найти ***частоты сопряжения*** $\omega_{\text{сопр}}$ на основании конструкций вида $\lg\left((T\omega)^2 + 1^2\right)$ или $\lg\left(\omega^2 + \omega_{\text{сопр}}^2\right)$ в записи ЛАЧХ, откуда $\omega_{\text{сопр}} = \frac{1}{T}$

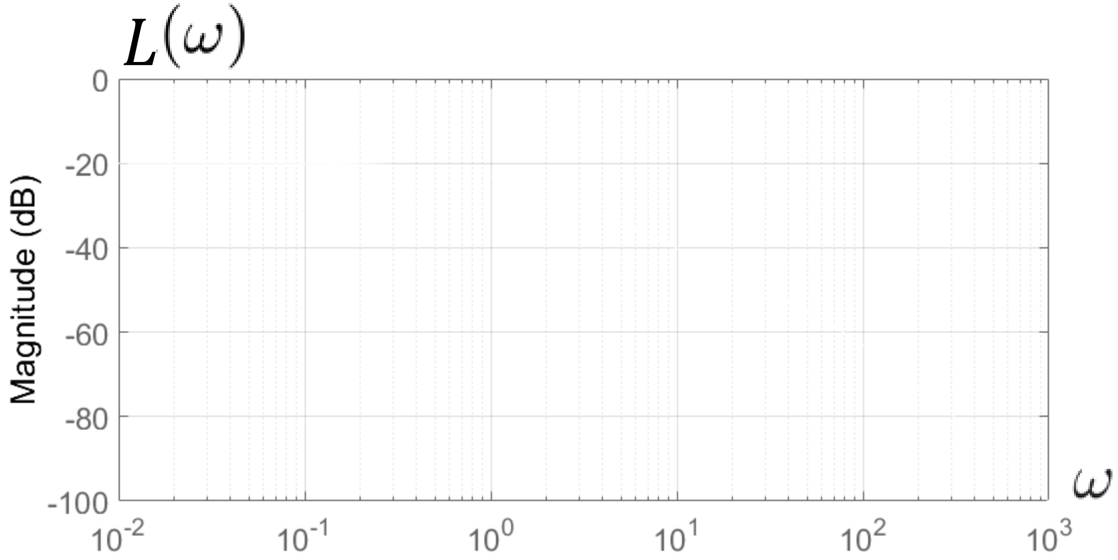
2. Выделить области частот, на определенные найденными $\omega_{\text{сопр}}$ и рассмотреть ЛАЧХ в каждой из областей:
   a) Если $\omega < \omega_{\text{сопр}}$ $(T\omega < 1)$, то $\omega^2 \ll \omega_{\text{сопр}}^2$ $\left((T\omega)^2 \ll 1\right)$, а значит $\lg\left((T\omega)^2 + 1^2\right) \approx 2\lg(1) = 0$ или $\lg\left(\omega^2 + \omega_{\text{сопр}}^2\right) \approx 2\lg\left(\omega_{\text{сопр}}\right)$
   b) Иначе если $\omega > \omega_{\text{сопр}}$ $(T\omega > 1)$, то $\omega \gg \omega_{\text{сопр}}$ $\left((T\omega)^2 \gg 1\right)$, а значит $\lg\left((T\omega)^2 + 1^2\right) \approx \lg\left((T\omega)^2\right) = 2\lg(T\omega) = 2\lg(T) + 2\lg(\omega)$ или $\lg\left(\omega^2 + \omega_{\text{сопр}}^2\right) \approx \lg\left(\omega^2\right) = 2\lg(\omega)$

Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

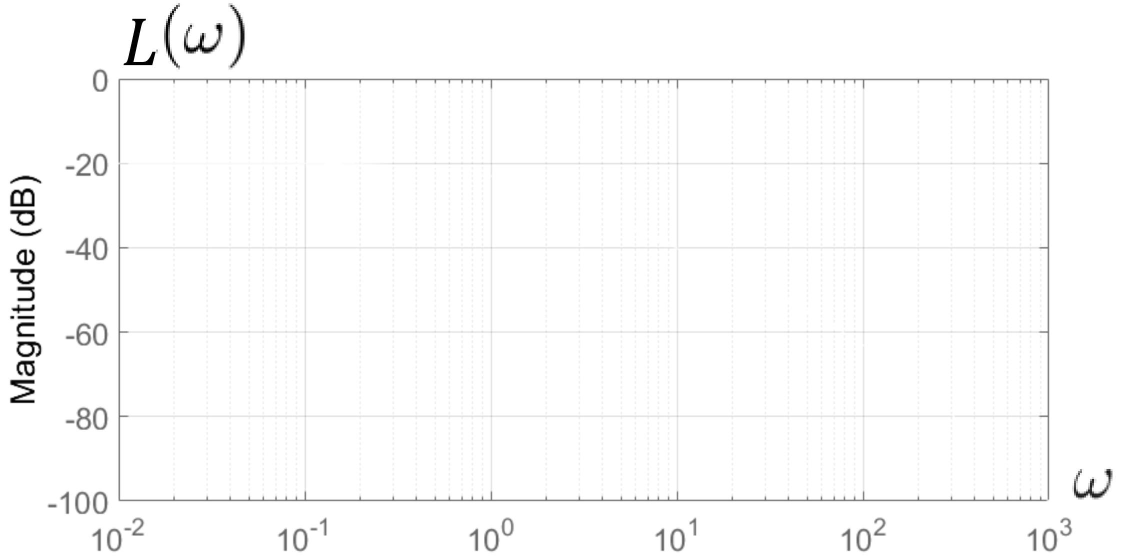
$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$W(s) = \frac{10}{(s+1)(s+100)} = W_1(s) \cdot W_2(s) =$$

$$= \frac{10}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s+100)}$$

Чем биться в лоб, считая ЧПФ, можно «схитрить»

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

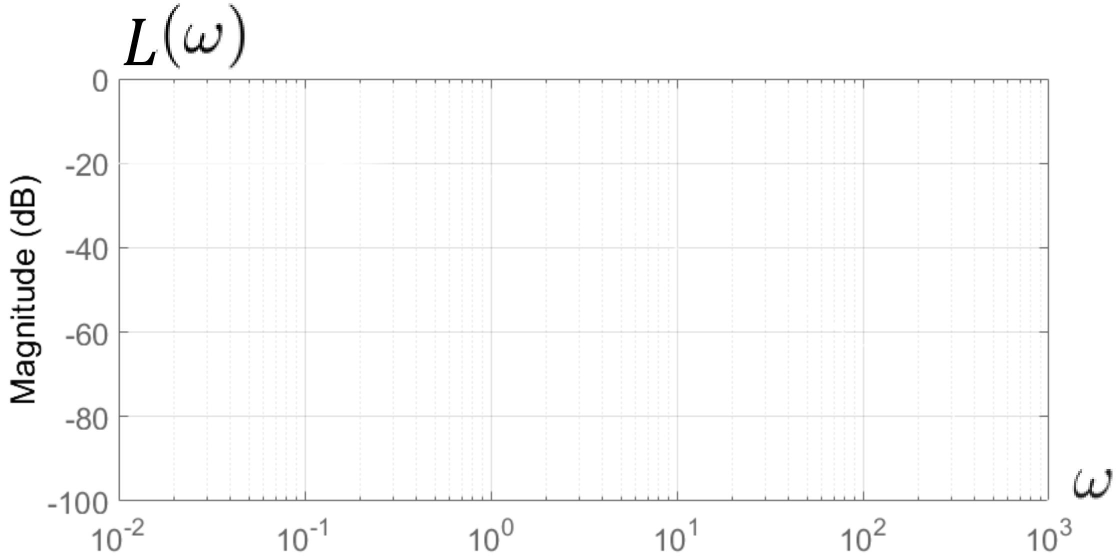
$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$W(j\omega) = \frac{10}{(j\omega + 1)(j\omega + 100)} = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) =$$

$$= \frac{10}{(j\omega + 1)} \cdot \frac{1}{(j\omega + 100)}$$

Чем биться в лоб, считая ЧПФ, можно «схитрить»

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

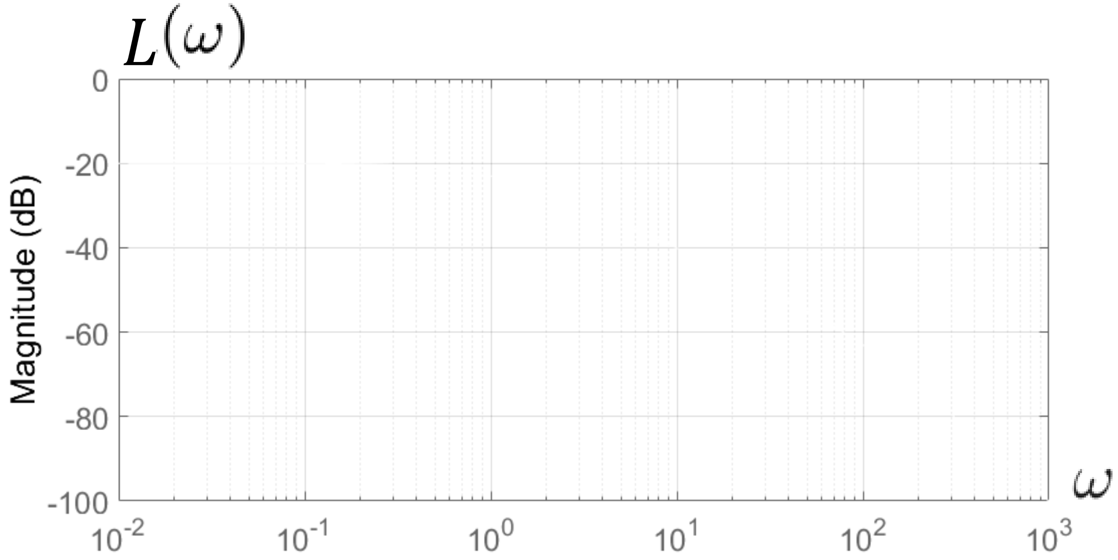
Пример:

$$W(s)=\frac{10}{s^2+101s+100}$$

$$A(\omega)=\left|\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+100)}\right|=A_1(j\omega)\cdot A_2(j\omega)=$$
$$=\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega^2+100^2}}$$

Чем биться в лоб, считая ЧПФ, можно «схитрить»

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

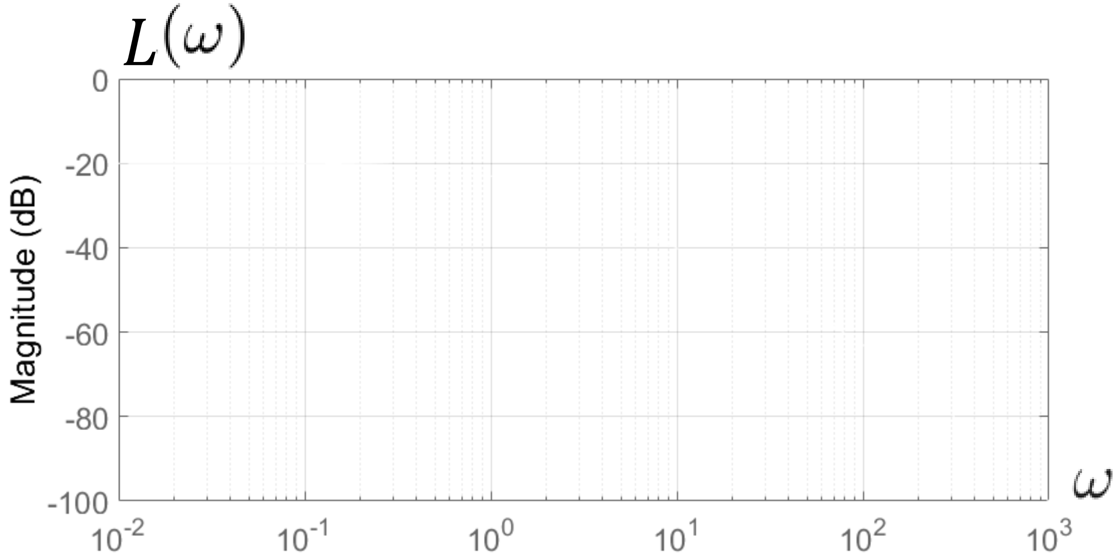
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left|\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+100)}\right| = L_1(j\omega) + L_2(j\omega) =$$

$$= 20\lg\left(\frac{10}{\sqrt{\omega^2+1}}\right) + 20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+100^2}}\right)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



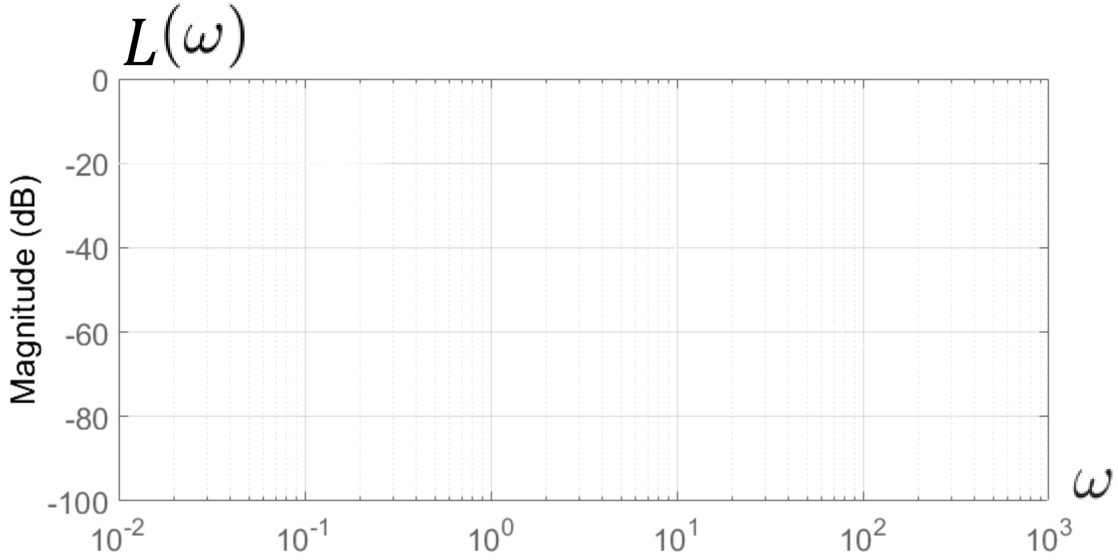
Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{\omega^2+100^2} =$$
$$= 20 \qquad - 10\lg(\omega^2+1) - 10\lg(\omega^2+100^2)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{\omega^2+100^2} =$$
$$= 20 \qquad - 10\lg(\omega^2+1) - 10\lg(\omega^2+100^2)$$

1. $\omega < 1$

$L(\omega) \approx 20 - 10\lg(1) - 10\lg(100^2)$

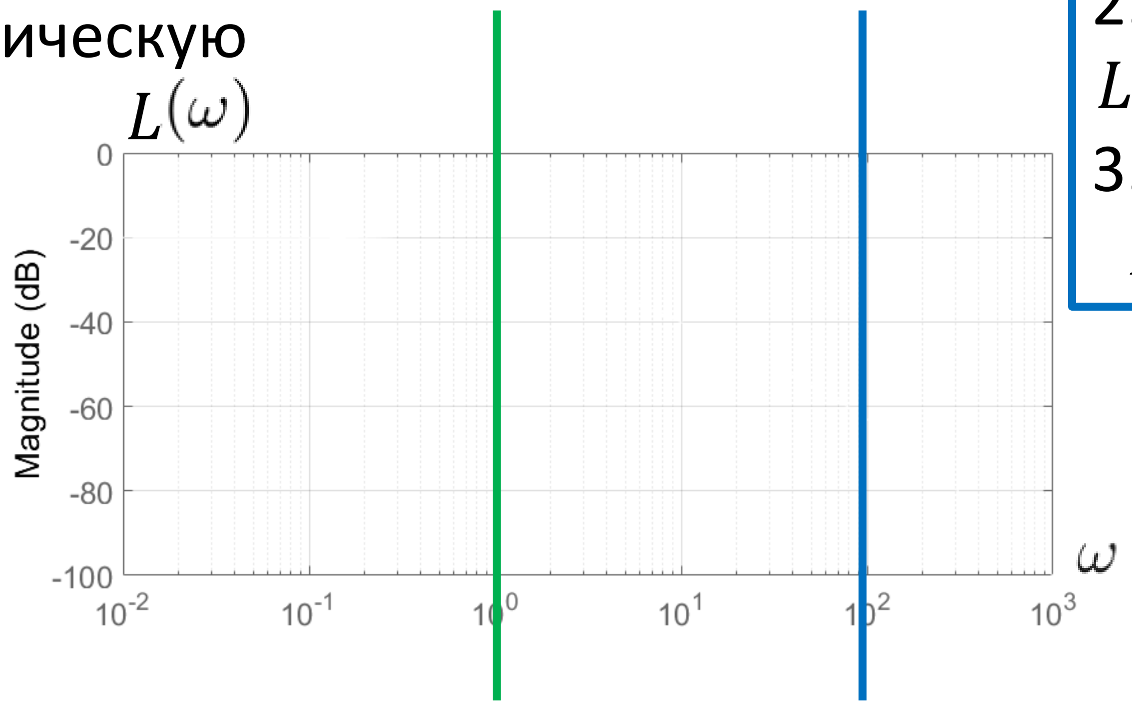
2. $1 < \omega < 100$

$L(\omega) \approx 20 - 10\lg(\omega^2) - 10\lg(100^2)$

3. $100 < \omega$

$L(\omega) \approx 20 - 10\lg(\omega^2) - 10\lg(\omega^2)$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



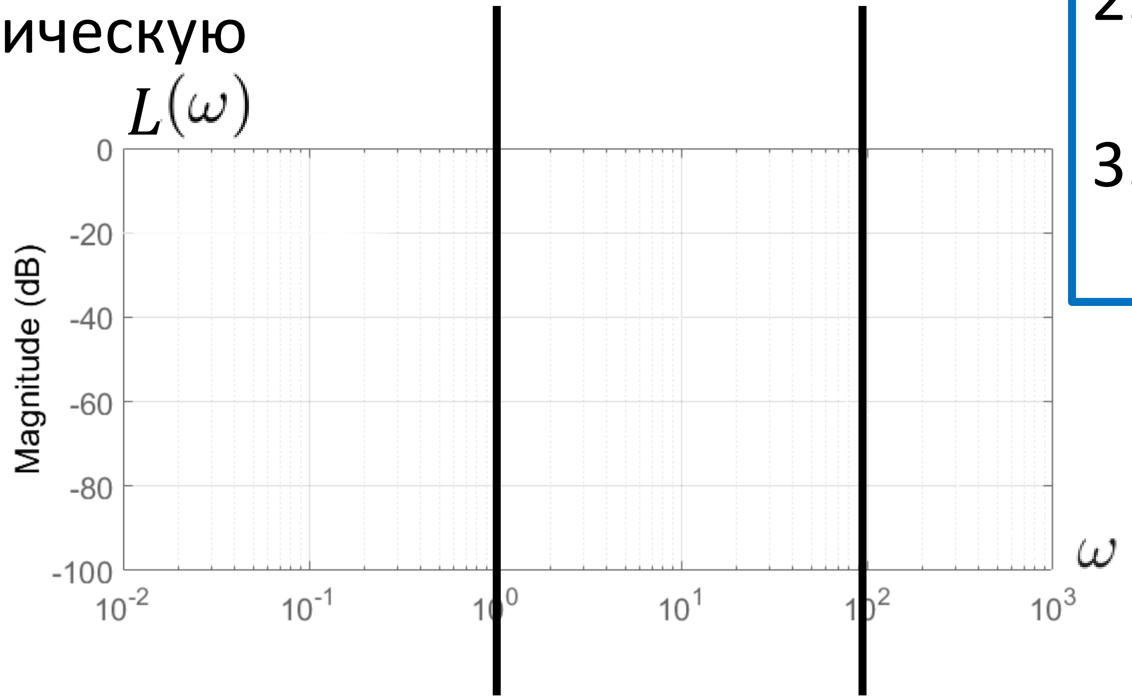
Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{\omega^2+100^2} =$$
$$= 20 - 10\lg(\omega^2+1) - 10\lg(\omega^2+100^2)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



1. $\omega < 1$
   $$L(\omega) \approx -20$$
2. $1 < \omega < 100$
   $$L(\omega) \approx -20 - 20\lg(\omega)$$
3. $100 < \omega$
   $$L(\omega) \approx 20 - 40\lg(\omega)$$

Асимптотическая ЛАЧХ

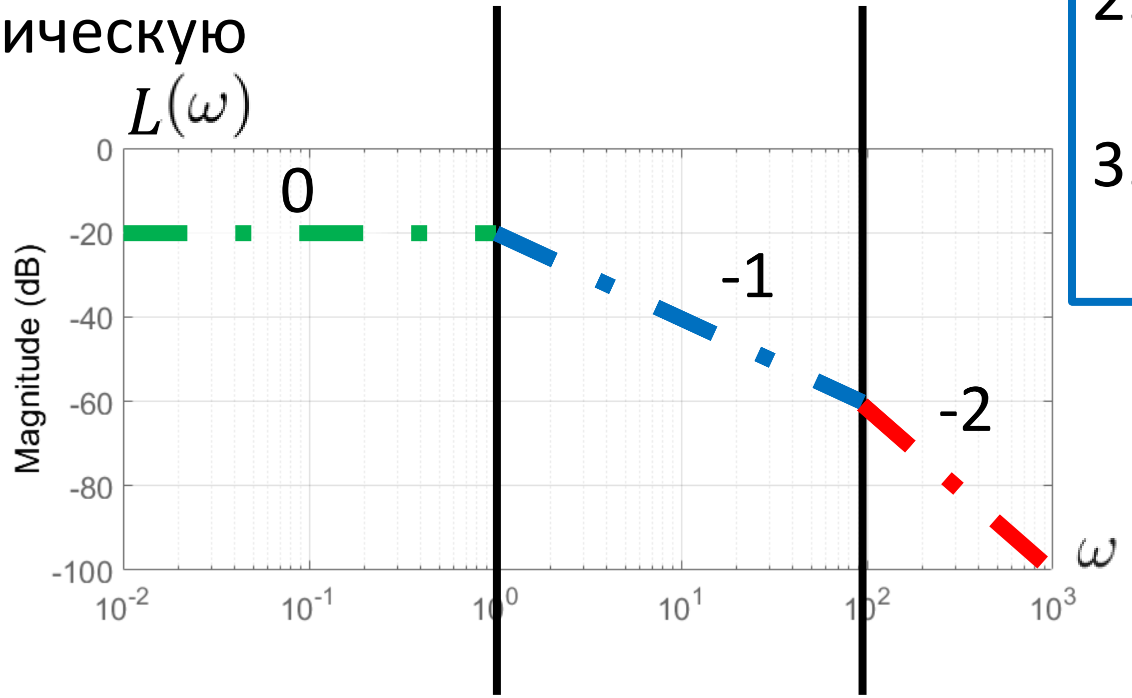
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{\omega^2+100^2} =$$
$$= 20 \quad - 10\lg(\omega^2+1) - 10\lg(\omega^2+100^2)$$

1. $\omega < 1$
   $L(\omega) \approx -20$
2. $1 < \omega < 100$
   $L(\omega) \approx -20 - 20\lg(\omega)$
3. $100 < \omega$
   $L(\omega) \approx 20 - 40\lg(\omega)$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



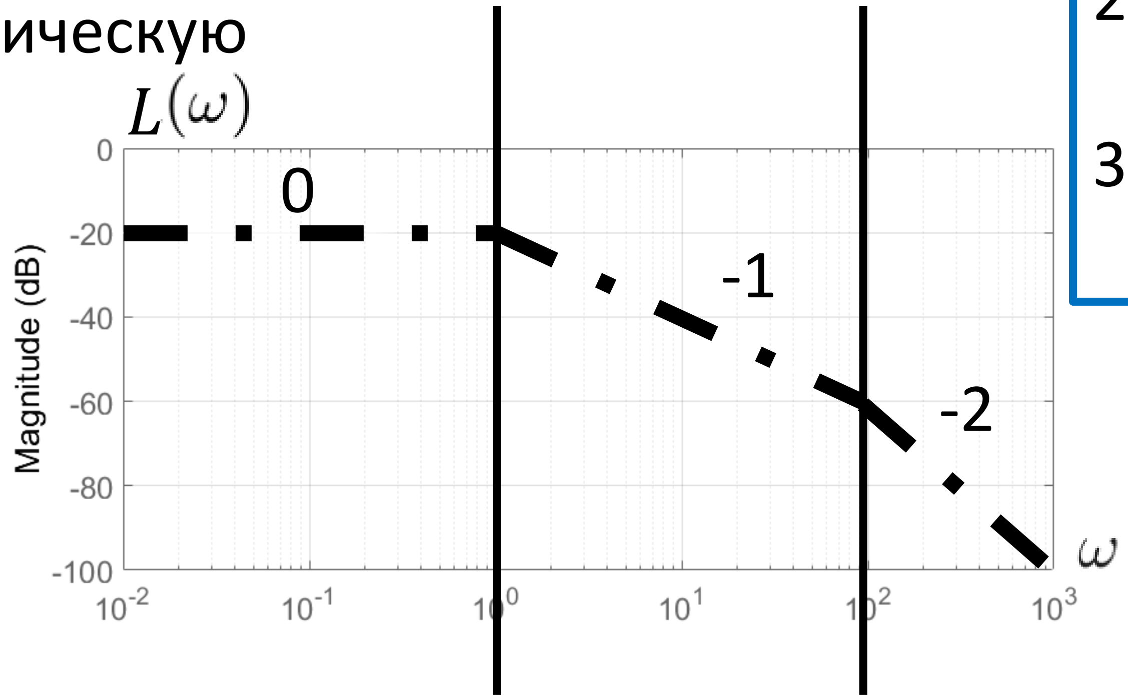
Асимптотическая ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{\omega^2+100^2} =$$
$$= 20 \qquad - 10\lg(\omega^2+1) - 10\lg(\omega^2+100^2)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



1. $\omega < 1$

$$L(\omega) \approx -20$$

2. $1 < \omega < 100$

$$L(\omega) \approx -20 - 20\lg(\omega)$$

3. $100 < \omega$

$$L(\omega) \approx 20 - 40\lg(\omega)$$

Сравним с настоящей

Асимптотическая ЛАЧХ

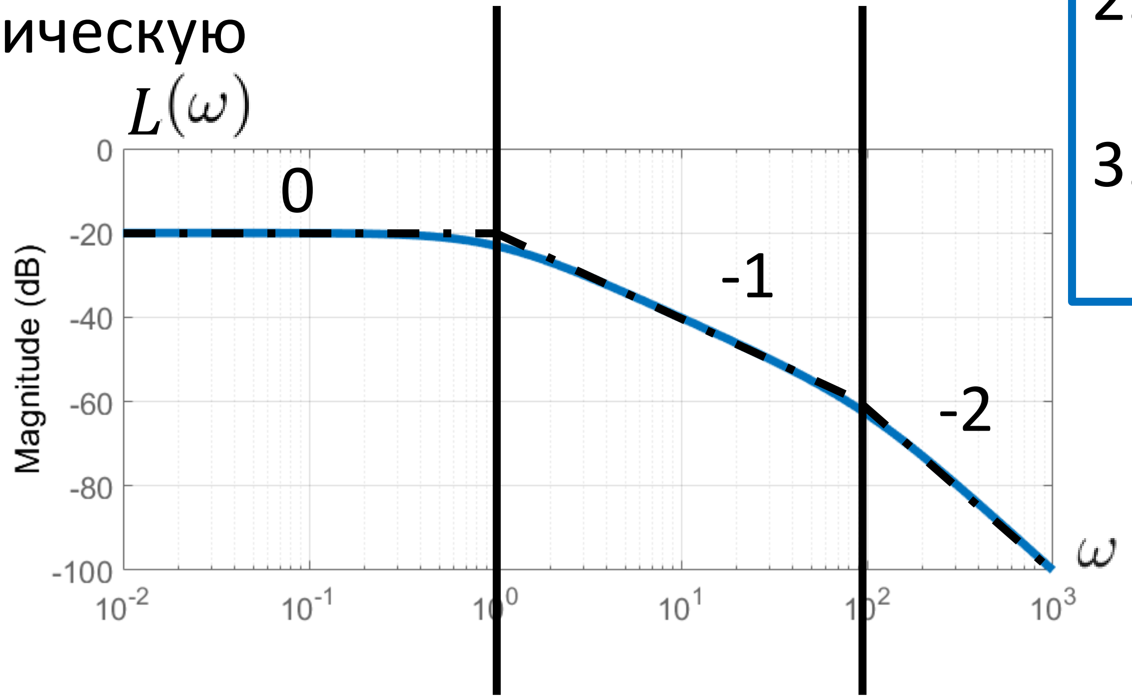
Пример:

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 101s + 100}$$

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\sqrt{\omega^2+100^2} =$$
$$= 20 \quad - 10\lg(\omega^2+1) - 10\lg(\omega^2+100^2)$$

1. $\omega < 1$
   $$L(\omega) \approx -20$$
2. $1 < \omega < 100$
   $$L(\omega) \approx -20 - 20\lg(\omega)$$
3. $100 < \omega$
   $$L(\omega) \approx 20 - 40\lg(\omega)$$

Построить асимптотическую ЛАЧХ



Максимальные ошибки в ***частотах сопряжения*** $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 100$

Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
4.8 ЛАФЧХ сложных звеньев

Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Пример:

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
4.8 ЛАФЧХ сложных звеньев

Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Пример:

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} =$$

$$= K \frac{(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Стандартная запись через постоянные времени

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
4.8 ЛАФЧХ сложных звеньев

Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Пример:

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} =$$

$$= K \frac{(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Частоты сопряжения (частоты, разделяющие области частот) равны

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}, \omega_{c2} = \frac{1}{T_2} \text{ и } \omega_{c2} = \frac{1}{T_3}$$

(число областей частот = число постоянных времени)

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
4.8 ЛАФЧХ сложных звеньев

Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Пример:

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} =$$

$$= K \frac{(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Частоты сопряжения (частоты, разделяющие области частот) равны

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}, \omega_{c2} = \frac{1}{T_2} \text{ и } \omega_{c2} = \frac{1}{T_3}$$

(число областей частот = число постоянных времени)

Пусть $T_1 > T_2 > T_3$

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
4.8 ЛАФЧХ сложных звеньев

Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Пример:

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} =$$

$$= K \frac{(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

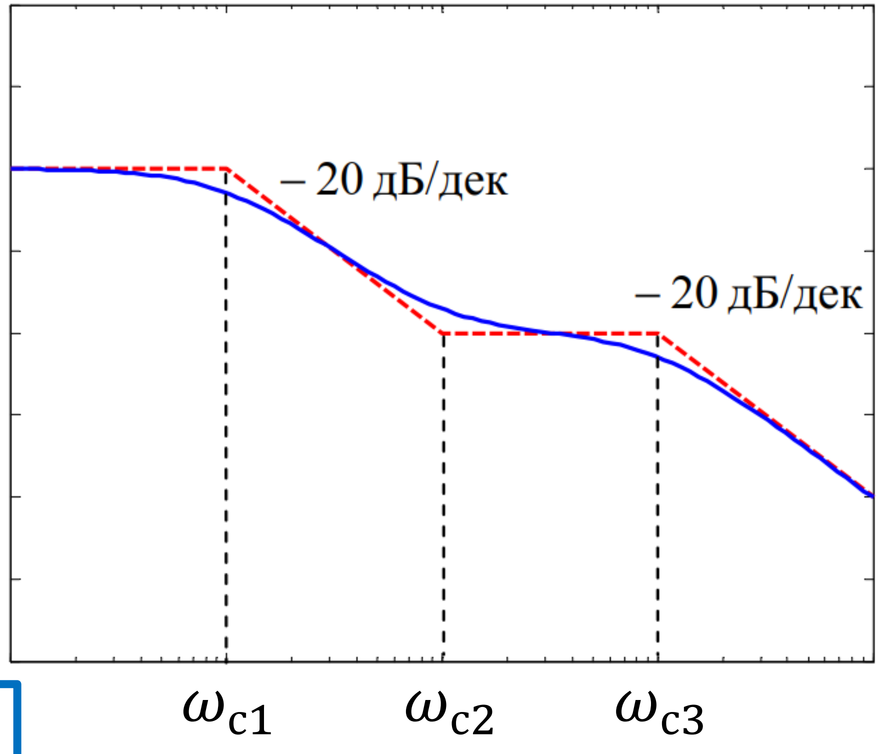
Частоты сопряжения (частоты, разделяющие области частот) равны

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}, \omega_{c2} = \frac{1}{T_2} \text{ и } \omega_{c2} = \frac{1}{T_3}$$

(число областей частот = число постоянных времени)

Пусть $T_1 > T_2 > T_3$

Если постоянная времени в числителе, то переход через соотв. ей частоту повышает наклон на 1, если в знаменателе – понижает наклон на 1



Асимптотическая ЛАЧХ

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединени... ...естны все характеристики.

«Чистые» s^m в числителе дадут положительный наклон m на всей ЛАЧХ, а «чистые» s^n в знаменателе – отрицательный наклон n на всей ЛАЧХ

Пример:

$$W(s) = K\frac{s^m(T_2 s + 1)}{s^n(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Если постоянная времени в числителе, то переход через соотв. ей частоту повышает наклон на 1, если в знаменателе – понижает наклон на 1

Частоты сопряжения (частоты, разделяющие области частот) равны $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}, \omega_{c2} = \frac{1}{T_2}$ и $\omega_{c2} = \frac{1}{T_3}$ (число областей частот = число постоянных времени)

Пусть $T_1 > T_2 > T_3$

Поляков К. Ю. «Теория автоматического управления для “чайников”» ***4.8 ЛАФЧХ сложных звеньев***

Минимально-фазовость

*<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является **минимально-фазовой**) <…>*

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является ***минимально-фазовой****)* <…>

В чем польза устойчивых (*т.е. не правых*) полюсов уже знаем – это влияет на **устойчивость** системы. Что же нам дают «устойчивые» (*не правые*) нули?

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является ***минимально-фазовой****)* <…>

Минимально-фазовое звено:

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ для всех «нулей» и «полюсов»
- Однозначная зависимость между амплитудно-частотными характеристиками

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является ***минимально-фазовой****) <…>*

Минимально-фазовое звено:

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ для всех «нулей» и «полюсов»
- Однозначная зависимость между амплитудно-частотными характеристиками

В чем выражается однозначность?

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является ***минимально-фазовой****) <…>*

Минимально-фазовое звено:

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ для всех «нулей» и «полюсов»
- Однозначная зависимость между амплитудно-частотными характеристиками
  - Изменение фазы минимальное из возможных:
    Полюс дает изменение фазы до $-\frac{\pi}{2}$
    Ноль дает изменение фазы до $+\frac{\pi}{2}$
  - Рост амплитуды соответствует положительной фазе, падение – отрицательной

Отсюда название:
«минимально-фазовые»

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является ***минимально-фазовой****) <…>*

Минимально-фазовое звено:

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ для всех «нулей» и «полюсов»
- Однозначная зависимость между амплитудно-частотными характеристиками
  - Изменение фазы минимальное из возможных:
    Полюс дает изменение фазы до $-\frac{\pi}{2}$
    Ноль дает изменение фазы до $+\frac{\pi}{2}$
  - Рост амплитуды соответствует положительной фазе, падение – отрицательной

Наглядно видно на следующем примере…

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

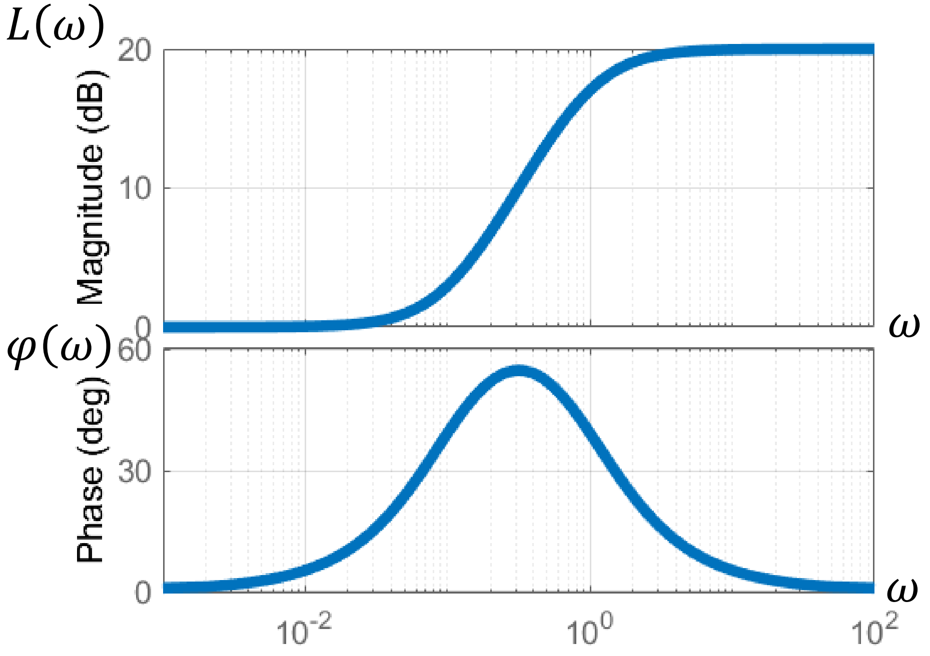
*<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является **минимально-фазовой**) <…>*

<…>

- Рост амплитуды соответствует положительной фазе, падение – отрицательной

Пример:

$$W(s) = \frac{10s + 1}{s + 1}$$



Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

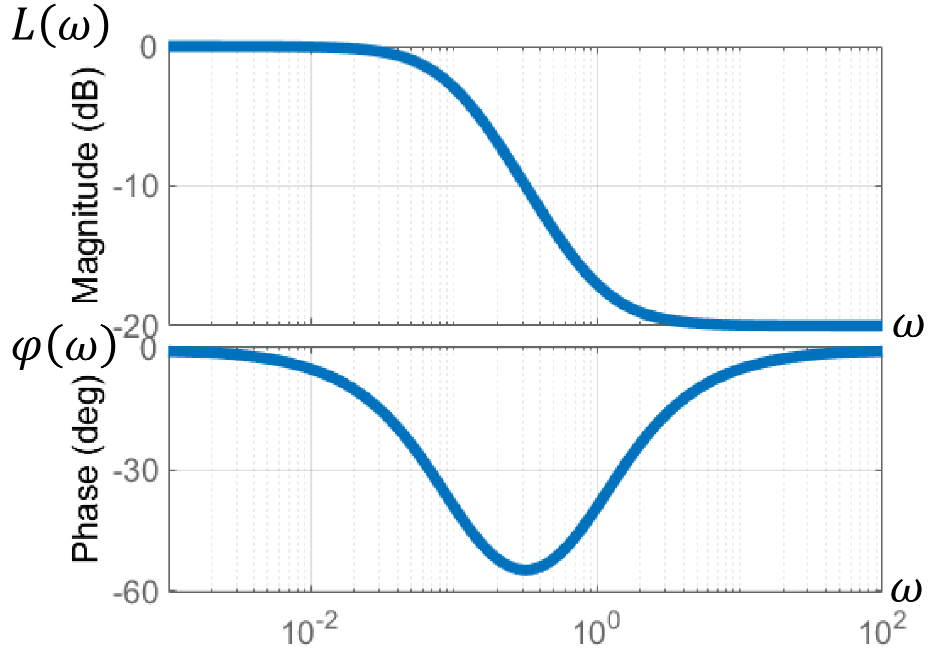
*<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является **минимально-фазовой**) <…>*

<…>

- Рост амплитуды соответствует положительной фазе, падение – отрицательной

Пример:

$$W(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$



Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

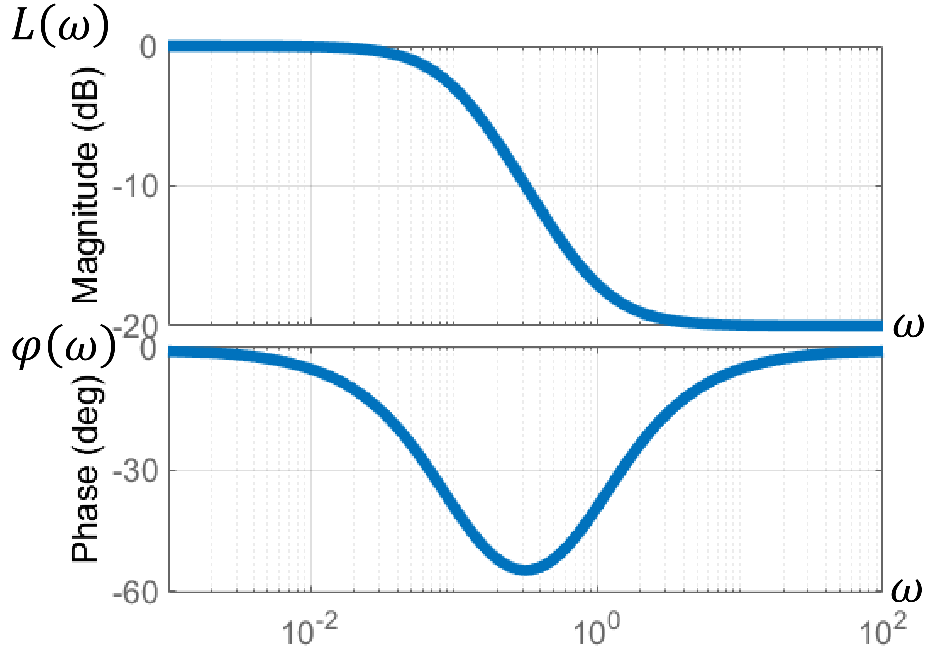
*<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является **минимально-фазовой**) <…>*

<…>

- Рост амплитуды соответствует положительной фазе, падение – отрицательной

Пример:

$$W(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$



Когда фаза вышла на 0 – нет ни роста, ни падения!

Поляков К. Ю. «Теория автоматического управления для “чайников”»

Минимально-фазовость

*<…> передаточная функция объекта <…> не имеет неустойчивых (с положительной вещественной частью) нулей и полюсов (то есть, является **минимально-фазовой**) <…>*

Минимально-фазовое звено:

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ для всех «нулей» и «полюсов»
- Однозначная зависимость между амплитудно-частотными характеристиками
  - Изменение фазы минимальное из возможных:
    Полюс дает изменение фазы до $-\frac{\pi}{2}$
    Ноль дает изменение фазы до $+\frac{\pi}{2}$
  - Рост амплитуды соответствует положительной фазе, падение – отрицательной

Но если в системе присутствует *колебательность*, то данная зависимость *немного* нарушается в точке резонанса

Далее увидим на примерах типовых звеньев

Поляков К. Ю. «Теория автоматического управления для “чайников”»

Первая практика: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Больше математическое, формулировка отталкивается от полюсов и нулей

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Инженерно-конструкторское, существуют таблицы типовых звеньев, для которых посчитаны характеристики и из которых удобно как из конструктора синтезировать системы

Первая практика: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Больше математическое, формулировка отталкивается от полюсов и нулей

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Инженерно-конструкторское, существуют таблицы типовых звеньев, для которых посчитаны характеристики и из которых удобно как из конструктора синтезировать системы

⇦ Минимально-фазовые!

Первая практика: элементарные и типовые звенья

Элементарные звенья – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Больше математическое, формулировка отталкивается от полюсов и нулей

Типовые динамические звенья – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Инженерно-конструкторское, существуют таблицы типовых звеньев, для которых посчитаны характеристики и из которых удобно как из конструктора синтезировать системы

Минимально-фазовые!

Какие есть?

Типовые звенья

Звено	Д/У	ПФ
Идеальное усилительное	$ay(t) = bu(t)$	K
Реальное усилительное	$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$	$\frac{K}{Ts+1}$
Идеальное дифференцирующее	$ay(t) = b\dot{u}(t)$	Ks
Реальное дифференцирующее	$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b\dot{u}(t)$	$\frac{Ks}{Ts+1}$
Идеальное интегрирующее	$a\dot{y}(t) = bu(t)$	$\frac{K}{s}$
Форсирующее	$ay(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$	$K(Ts+1)$
Реальное форсирующее	$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$	$\frac{K(T_2 s+1)}{T_1 s+1}$
Изодромное	$a\dot{y}(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$	$\frac{K(Ts+1)}{s}$
Реальное интегрирующее	$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{s(Ts+1)}$
Апериодическое 2-го порядка	$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$
Колебательное		$\frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$
Консервативное	$a_2\ddot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{T^2 s^2 + 1}$

Типовые звенья

	Звено	Д/У	ПФ
1-го порядка	Идеальное усилительное	$ay(t) = bu(t)$	K
	Реальное усилительное	$a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = bu(t)$	$\frac{K}{Ts+1}$
	Идеальное дифференцирующее	$ay(t) = b\dot{u}(t)$	Ks
	Реальное дифференцирующее	$a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b\dot{u}(t)$	$\frac{Ks}{Ts+1}$
	Идеальное интегрирующее	$a\dot{y}(t) = bu(t)$	$\frac{K}{s}$
	Форсирующее	$ay(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$	$K(Ts+1)$
	Реальное форсирующее	$a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$	$\frac{K(T_2s+1)}{T_1s+1}$
	Изодромное	$a\dot{y}(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$	$\frac{K(Ts+1)}{s}$
2-го порядка	Реальное интегрирующее	$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0u(t)$	$\frac{K}{s(Ts+1)}$
	Апериодическое 2-го порядка	$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$	$\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
	Колебательное		$\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$
	Консервативное	$a_2\ddot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$	$\frac{K}{T^2s^2+1}$

Типовые звенья

Зачем нужны?

Типовые звенья

Зачем нужны?

Анализ:
Разбиваем передаточные функции сложных систем на последовательно соединенные «табличные компоненты»

Синтез:
Классические методы последовательной коррекции

Типовые звенья

Зачем нужны?

Анализ:
Разбиваем передаточные функции сложных систем на последовательно соединенные «табличные компоненты»

Синтез:
Классические методы последовательной коррекции

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\dots W_n(j\omega)$$

Разложение в последовательное соединение

$$|\arg W_i(j\omega)| \le \frac{\pi}{2} \quad \text{(или } \pi\text{, но лучше } \frac{\pi}{2}\text{)}$$

$$\arg W(j\omega) = \sum \arg W_i(j\omega)$$

Типовые звенья

Зачем нужны?

Анализ:
Разбиваем передаточные функции сложных систем на последовательно соединенные «табличные компоненты»

Синтез:
Классические методы последовательной коррекции

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\ldots W_n(j\omega)$$

Разложение в последовательное соединение типовых звеньев

$$|W(j\omega)| = \prod |W_i(j\omega)|$$

$$\arg W(j\omega) = \sum \arg W_i(j\omega)$$

Типовые звенья

Зачем нужны?

Анализ:

Разбиваем передаточные функции сложных систем на последовательно соединенные «табличные компоненты»

Синтез:

Классические методы последовательной коррекции

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\dots W_n(j\omega)$$

Разложение в последовательное соединение типовых звеньев

$$|W(j\omega)| = \prod |W_i(j\omega)|$$

$$\arg W(j\omega) = \sum \arg W_i(j\omega)$$

При ручном расчете АЧХ и ФЧХ сложных систем велика вероятность упереться в «нюансы», а для типовых звеньев всё уже посчитано!

Типовые звенья

Зачем нужны?

Анализ:
Разбиваем передаточные функции сложных систем на последовательно соединенные «табличные компоненты»

Синтез:
Классические методы последовательной коррекции

На протяжении многих лет самым популярным инженерным методом синтеза регуляторов был метод, основанный на использовании <…> ЛАФЧХ <…>

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
7.4 Коррекция ЛАФЧХ

Типовые звенья

Зачем нужны?

Анализ:
Разбиваем передаточные функции сложных систем на последовательно соединенные «табличные компоненты»

Синтез:
Классические методы последовательной коррекции

На протяжении многих лет самым популярным инженерным методом синтеза регуляторов был метод, основанный на использовании <…> ЛАФЧХ <…>

1. Определяем желаемую ЛАФЧХ прямого канала
2. Определяем, чего не хватает, т.к. какой должна быть ЛАФЧХ регулятора
3. Собираем регулятор как конструктор из типовых элементов!

Поляков К. Ю.
«Теория автоматического управления для “чайников”»
7.4 Коррекция ЛАФЧХ

Типовые звенья

Идеальное усилительное звено / Пропорциональное звено / Безынерционное звено

$$ay(t) = bu(t)$$

Строго говоря даже не *динамическое* звено

Типовые звенья

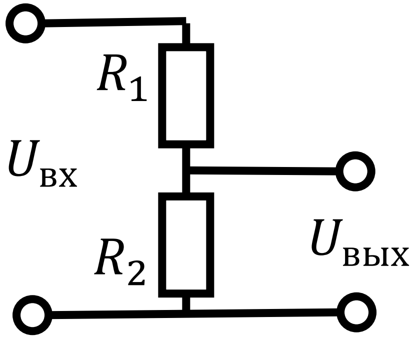
Идеальное усилительное звено / Пропорциональное звено / Безынерционное звено

$$ay(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{a} = K$$

Примеры

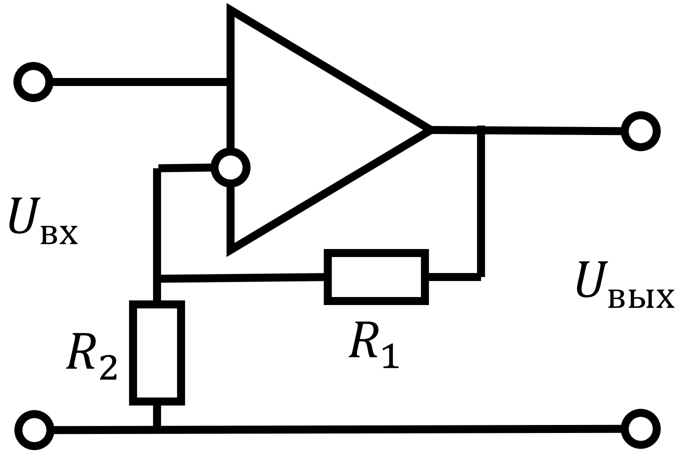
Делитель напряжения



$$\frac{U_{вх}}{R_1 + R_2} = \frac{U_{вых}}{R_2}$$

$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K(< 1)$$

Усилитель на ОУ



$$U_{вх} = U_{вых}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = K(> 1)$$

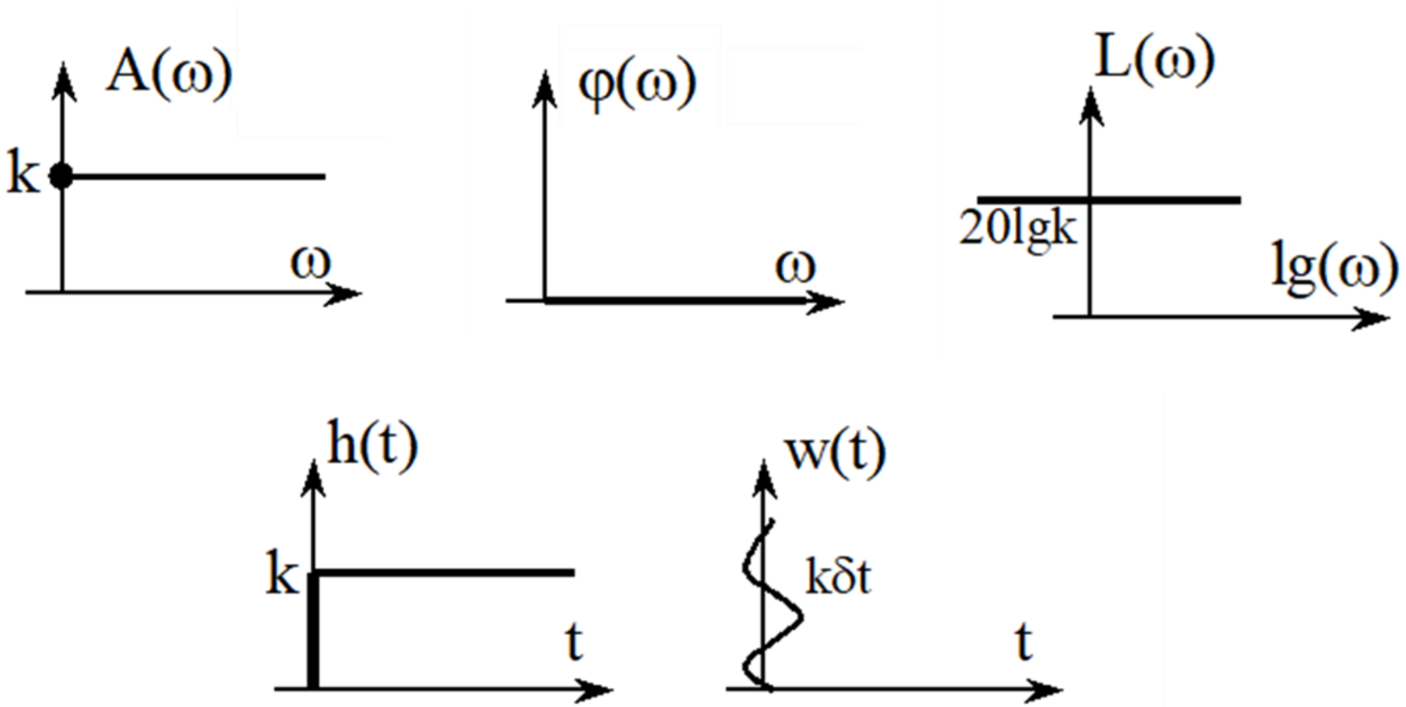
Типовые звенья

Идеальное усилительное звено / Пропорциональное звено / Безынерционное звено

$$ay(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{a} = K$$

$$A(\omega) = K$$
$$\varphi(\omega) = 0$$
$$L(\omega) = 20\lg K$$
$$w(t) = K \cdot \delta(t)$$
$$h(t) = K \cdot 1(t)$$



Типовые звенья

Реальное усилительное звено / Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1}$$

Типовые звенья

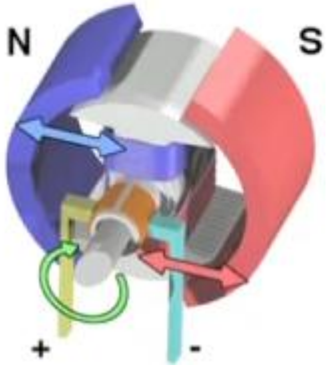
Реальное усилительное звено / Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1}$$

Примеры

ДПТ (без учета индуктивности)



$$\frac{\omega}{U} = \frac{1}{k_\varepsilon}\frac{1}{\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m}s+1}$$

$$T = \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m}, K = k_\varepsilon^{-1}$$

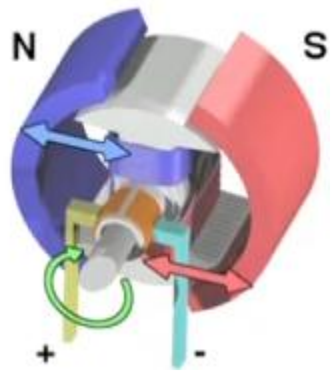
Реальное усилительное звено / Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1}$$

Примеры

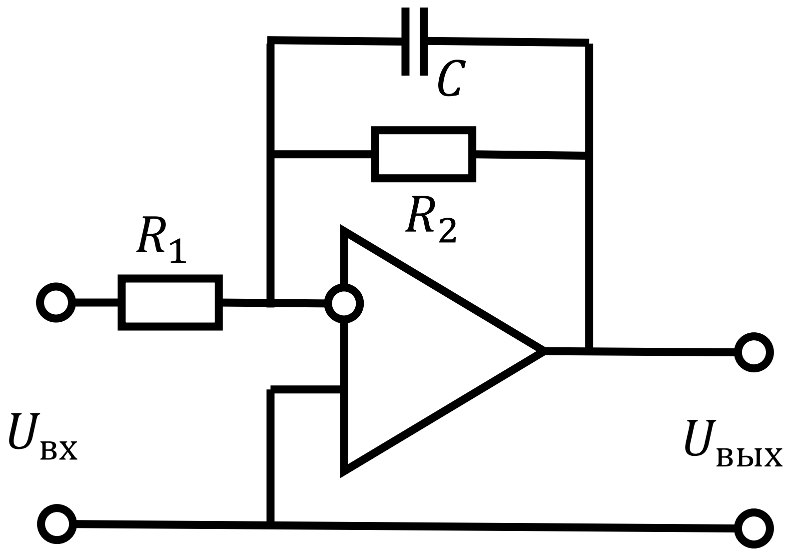
ДПТ (без учета индуктивности)



$$\frac{\omega}{U} = \frac{1}{k_\varepsilon}\frac{1}{\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m}s+1}$$

$$T = \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m}, K = k_\varepsilon^{-1}$$

Реализация на ОУ



$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + CR_2 s}$$

$$T = CR_2, K = -\frac{R_2}{R_1}$$

Типовые звенья

Реальное усилительное звено / Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1}$$

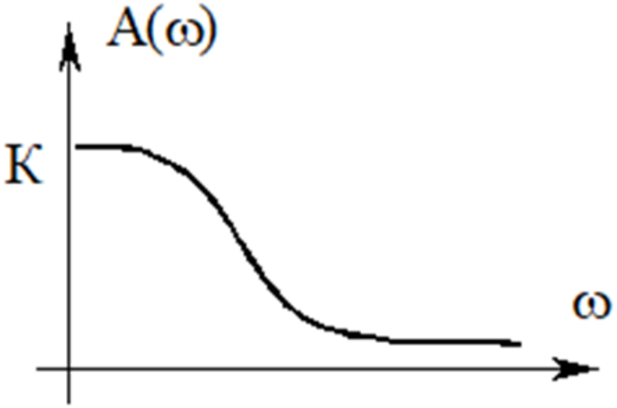
$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

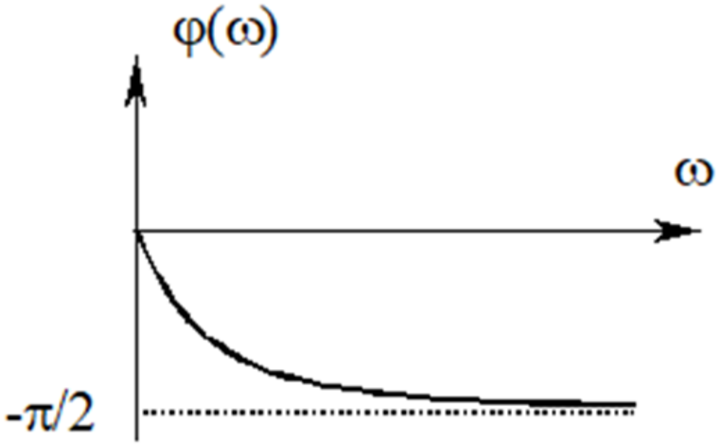
$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

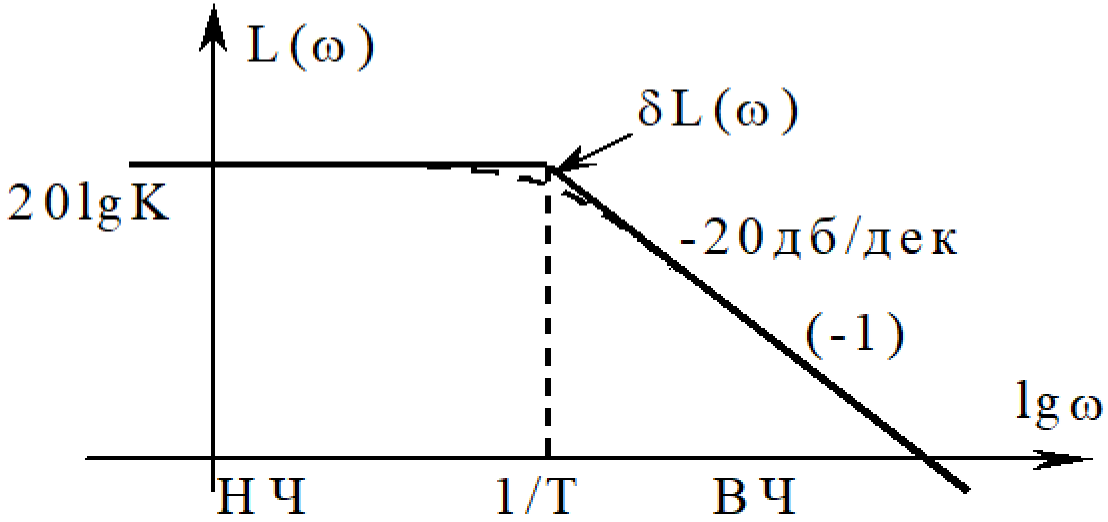
$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(\omega^2 T^2 + 1)$$

$$w(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(\omega) \to 0 \text{ при } \omega \to 0 \\ \varphi(\omega) \to -\frac{\pi}{2} \text{ при } \omega \to \infty\end{gathered}}$$







Типовые звенья

Реальное усилительное звено / Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

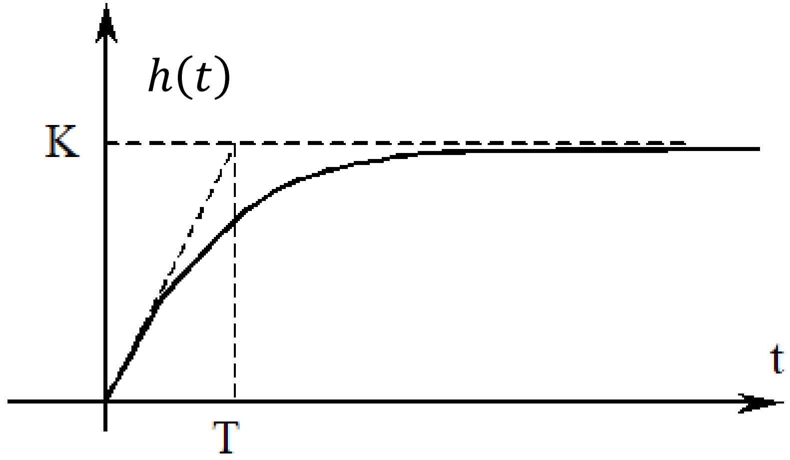
$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1}$$

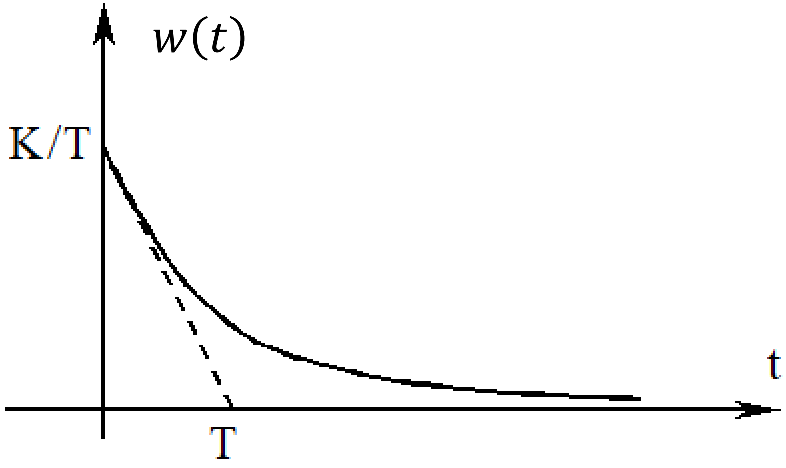
$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(\omega^2 T^2 + 1)$$

$$w(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$





Типовые звенья

Идеальное дифференцирующее звено

$$ay(t) = b\dot{u}(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{a}s = Ks$$

Типовые звенья

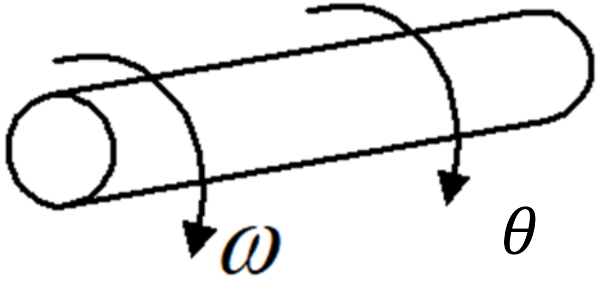
Идеальное дифференцирующее звено

$$ay(t) = b\dot{u}(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{a}s = Ks$$

Примеры

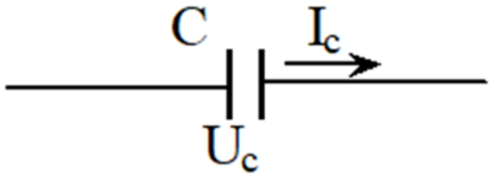
Вал



$$u = \theta, y = \omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

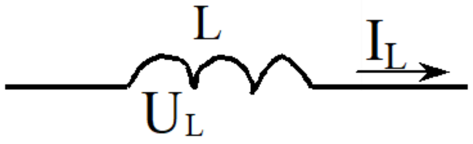
Конденсатор



$$u = U_c, y = I_c$$

$$I_c = C\frac{dU_c}{dt}$$

Катушка



$$u = I_L, y = U_L$$

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

Типовые звенья

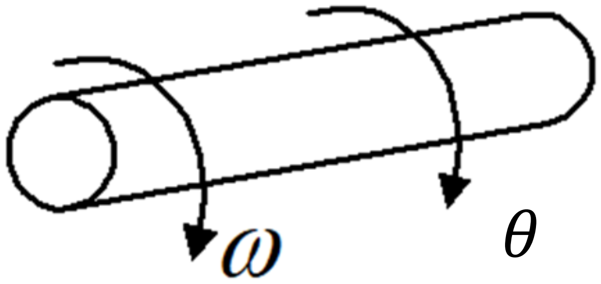
Идеальное дифференцирующее звено

$$ay(t) = b\dot{u}(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{a}s = Ks$$

Примеры

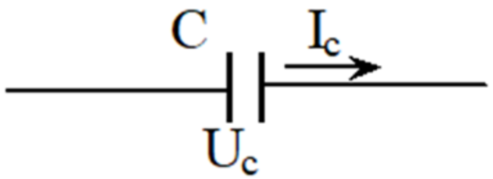
Вал



$$u = \theta, y = \omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

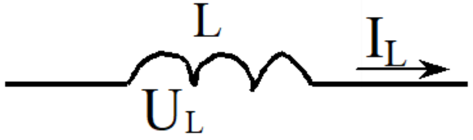
Конденсатор



$$u = U_c, y = I_c$$

$$I_c = C\frac{dU_c}{dt}$$

Катушка



$$u = I_L, y = U_L$$

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

В чем подвох?
А как же «условие физической реализуемости»?

Типовые звенья

В природе честное дифференцирование встречается

Идеальное дифферен

$$ay(t) = b\dot{u}(t)$$

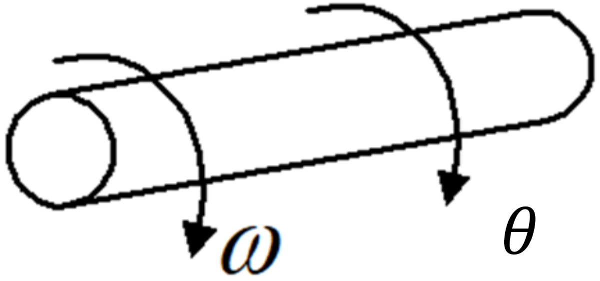
$$W(s) = \frac{b}{a}s = Ks$$

Только использовать его либо нереально

Либо можно только с оговорками (катушка и конденсатор – системы нелинейные, т.к. есть предел заряда/насыщения)

Примеры

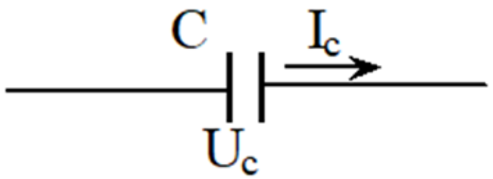
Вал



$$u = \theta, y = \omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

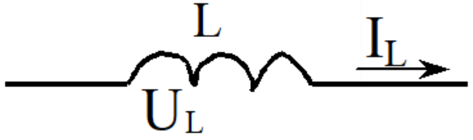
Конденсатор



$$u = U_c, y = I_c$$

$$I_c = C\frac{dU_c}{dt}$$

Катушка



$$u = I_L, y = U_L$$

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

Типовые звенья

Идеальное дифференцирующее звено

$$ay(t) = b\dot{u}(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{a}s = Ks$$

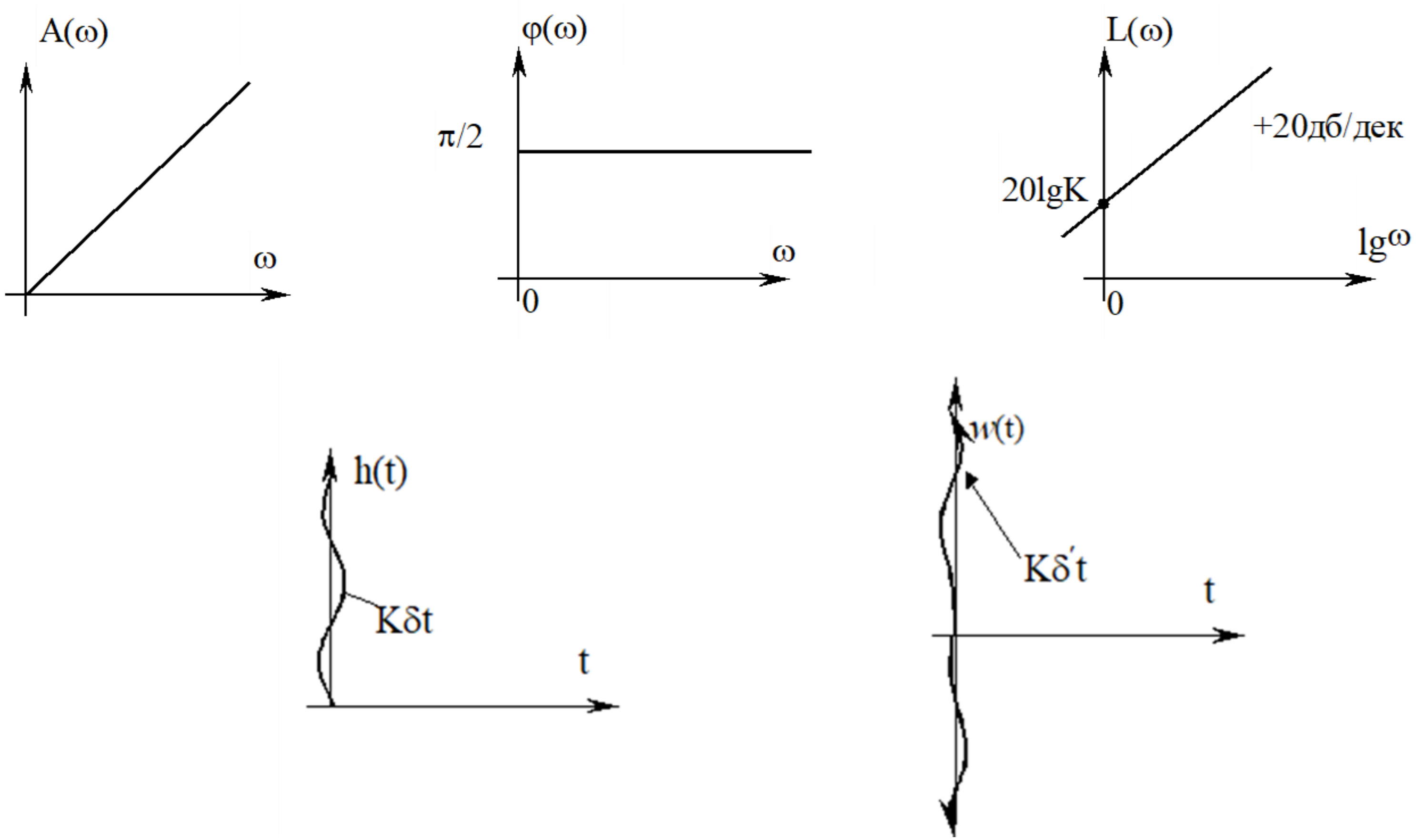
$$A(\omega) = K\omega$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20\lg(K\omega)$$

$$w(t) = K\frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$h(t) = K\delta(t)$$



Типовые звенья

Реальное дифференцирующее звено / Дифференцирующее звено с замедлением / Инерционное дифференцирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b\dot{u}(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}s}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{Ks}{Ts + 1}$$

Типовые звенья

Реальное дифференцирующее звено / Дифференцирующее звено с замедлением / Инерционное дифференцирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b\dot{u}(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}s}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{Ks}{Ts + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{\omega K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

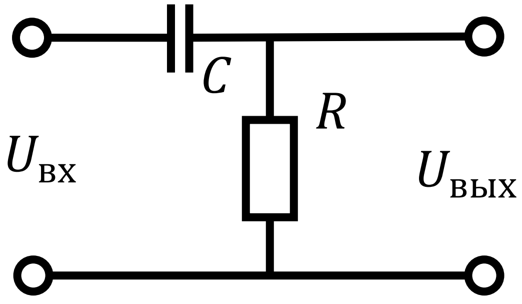
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg \omega K - 10\lg(\omega^2 T^2 + 1)$$

$$w(t) = -\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad h(t) = K\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Примеры

RC – цепочка

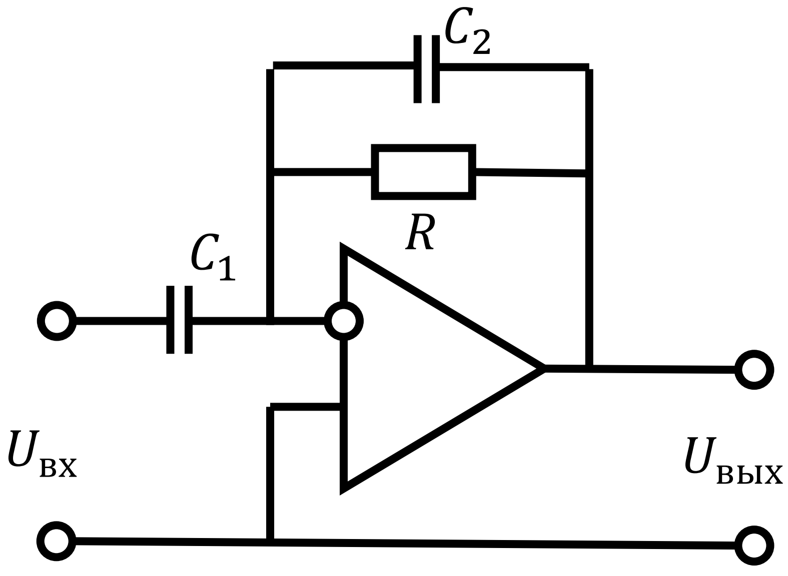


$$u = U_{вых}, y = U_{вх}$$

$$W(s) = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

$$K = T = RC$$

Реализация на ОУ



$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} = -\frac{RC_1 s}{RC_2 s + 1}$$

$$T = RC_2, K = -RC_1$$

Типовые звенья

Реальное дифференцирующее звено / Дифференцирующее звено с замедлением / Инерционное дифференцирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b\dot{u}(t)$$

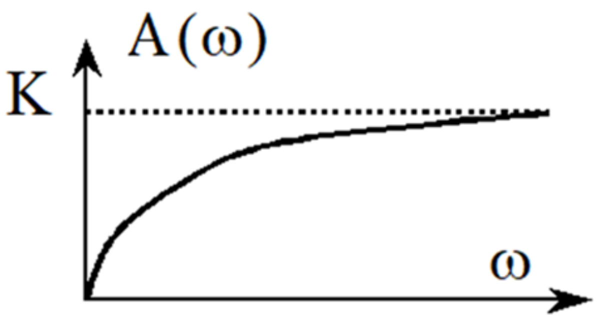
$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}s}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{Ks}{Ts + 1}$$

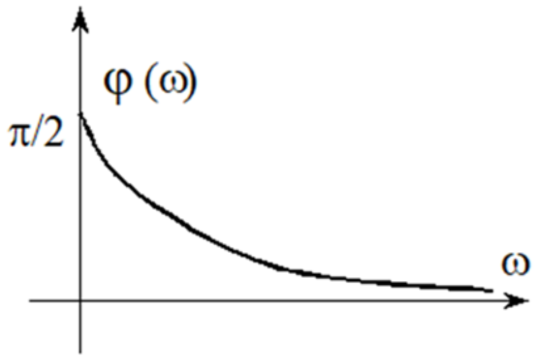
$$A(\omega) = \frac{\omega K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

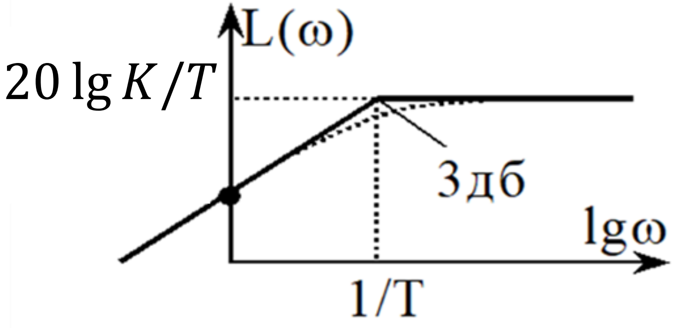
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg \omega K - 10\lg(\omega^2 T^2 + 1)$$

$$w(t) = -\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad h(t) = K\, e^{-\frac{t}{T}}$$







Типовые звенья

Реальное дифференцирующее звено / Дифференцирующее звено с замедлением / Инерционное дифференцирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b\dot{u}(t)$$

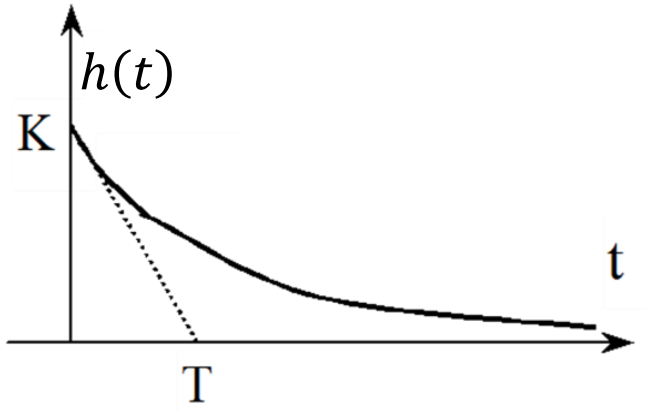
$$W(s) = \frac{\frac{b}{a_0}s}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{Ks}{Ts + 1}$$

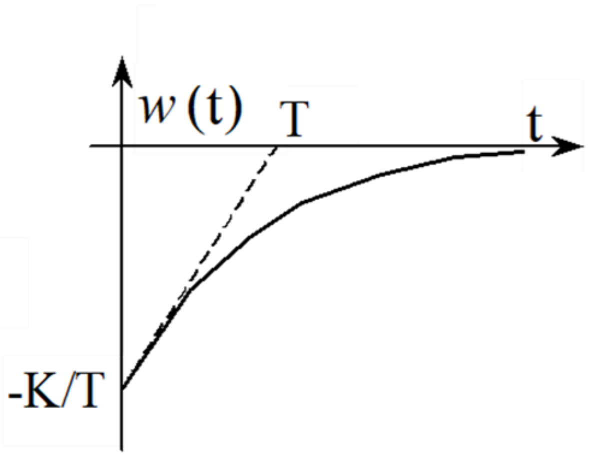
$$A(\omega) = \frac{\omega K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg \omega K - 10\lg(\omega^2 T^2 + 1)$$

$$w(t) = -\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad h(t) = K\,e^{-\frac{t}{T}}$$





Типовые звенья

Идеальное интегрирующее звено

$$a\dot{y}(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{as} = \frac{K}{s}$$

Типовые звенья

Идеальное интегрирующее звено

Все так же просто, как с дифференцирующим…

$$a\dot{y}(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{as} = \frac{K}{s}$$

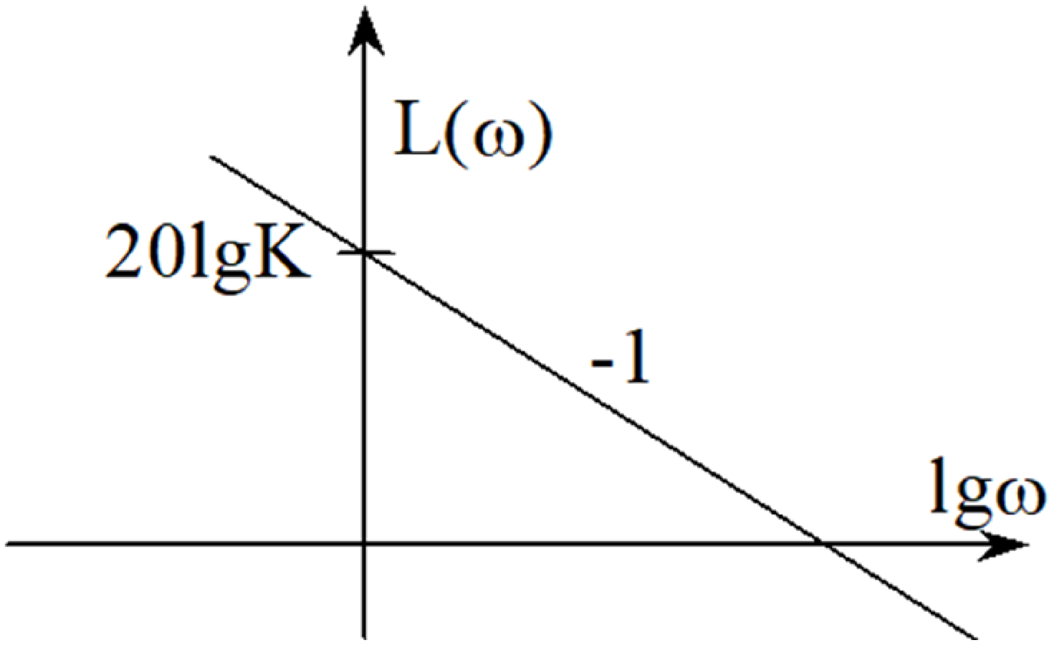
$$A(\omega) = \frac{K}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20\lg(K) - 20\lg(\omega)$$

$$w(t) = K$$

$$h(t) = Kt$$



Идеальное интегрирующее звено

$$a\dot{y}(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{b}{as} = \frac{K}{s}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

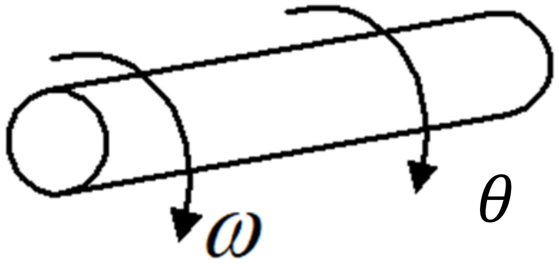
$$L(\omega) = 20\lg(K) - 20\lg(\omega)$$

$$w(t) = K$$

$$h(t) = Kt$$

Примеры

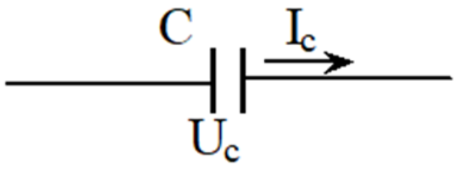
Вал



$$u = \theta, y = \omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

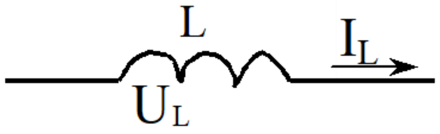
Конденсатор



$$u = U_c, y = I_c$$

$$I_c = C\frac{dU_c}{dt}$$

Катушка



$$u = I_L, y = U_L$$

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

Типовые звенья

Форсирующее звено / Пропорционально-дифференцирующее звено

$$ay(t) = b_1\dot{u}(t) + bu(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right) = K(Ts + 1)$$

Типовые звенья

Форсирующее звено / Пропорционально-дифференцирующее звено

$$ay(t) = b_1\dot{u}(t) + bu(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right) = K(Ts + 1)$$

ПД-регулятор!

K – коэффициент передачи.

T – постоянная дифференцирования.

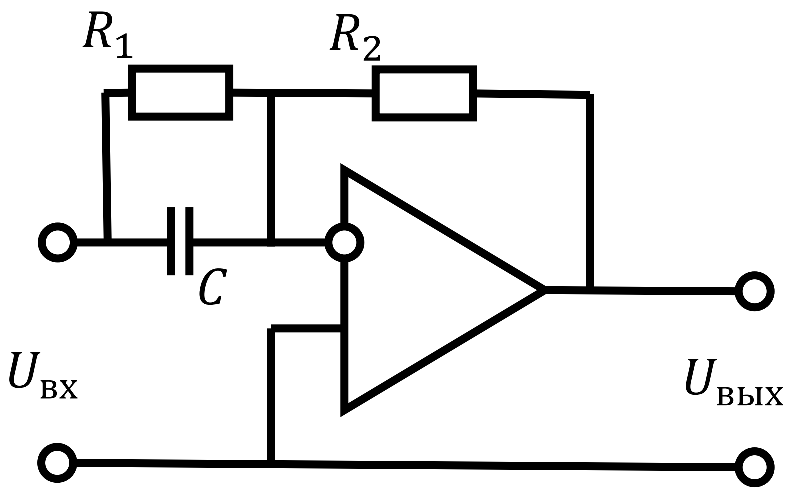
Типовые звенья

Форсирующее звено / Пропорционально-дифференцирующее звено

$$ay(t) = b_1\dot{u}(t) + bu(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right) = K(Ts + 1)$$

Реализация на ОУ



$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} =- -R_2Cs + \frac{R_2}{R_1}$$

$$T = -R_1C_2, K = -\frac{R_2}{R_1}$$

Но пока конденсатор не зарядился

Форсирующее звено / Пропорционально-дифференцирующее звено

$$ay(t) = b_1\dot{u}(t) + bu(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right) = K(Ts + 1)$$

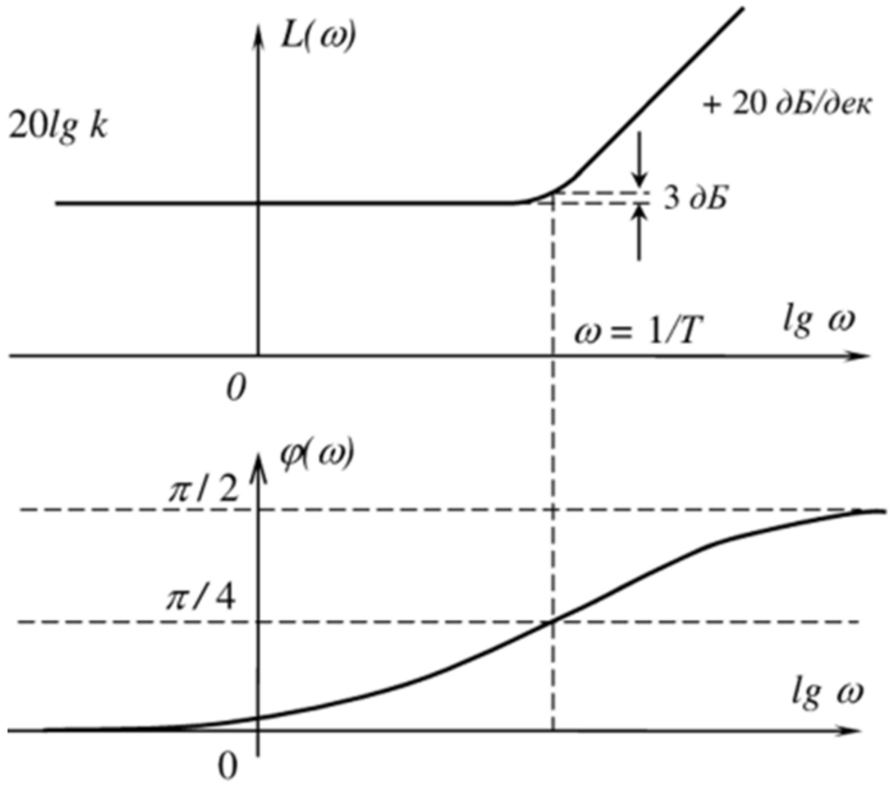
$$A(\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg(K) + 10\lg(\omega^2 T^2 + 1)$$

$$w(t) = K\left(T\frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)\right)$$

$$h(t) = K\big(T\delta(t) + 1(t)\big)$$



Реальное форсирующее звено / Инерционное форсирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1} \qquad \boxed{T_1 \neq T_2}$$

Типовые звенья

Реальное форсирующее звено / Инерционное форсирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1} \qquad \boxed{T_1 \neq T_2}$$

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega T_2) - \operatorname{arctg}(\omega T_1)$$

$$L(\omega) = 20\lg(K) + 10\lg(\omega^2 T_2^2 + 1) - 10\lg(\omega^2 T_1^2 + 1)$$

Типовые звенья

Реальное форсирующее звено / Инерционное форсирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1}$$

$\boxed{T_1 \neq T_2}$

Характеристики не однозначны, соотношение T_1 и T_2 определит один из 2-х вариантов

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega T_2) - \operatorname{arctg}(\omega T_1)$$

$$L(\omega) = 20\lg(K) + 10\lg(\omega^2 T_2^2 + 1) - 10\lg(\omega^2 T_1^2 + 1)$$

Реальное форсирующее звено / Инерционное форсирующее звено

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{\frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1}$$

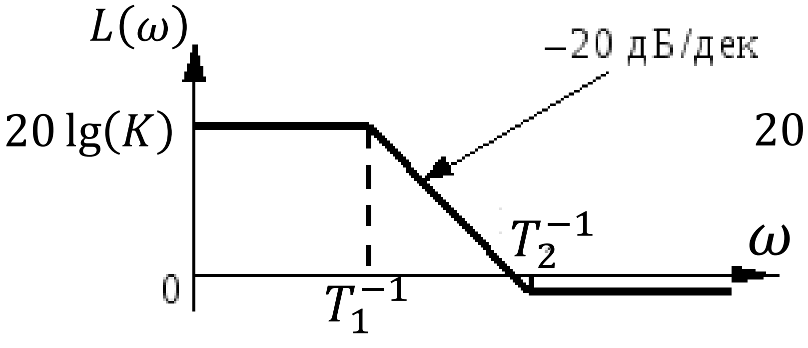
$\boxed{T_1 \neq T_2}$

Характеристики не однозначны, соотношение T_1 и T_2 определит один из 2-х вариантов

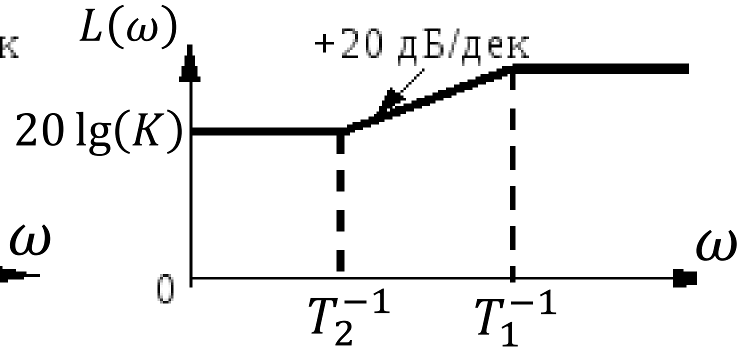
$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega T_2) - \mathrm{arctg}(\omega T_1)$$

$$L(\omega) = 20\lg(K) + 10\lg(\omega^2 T_2^2 + 1) - 10\lg(\omega^2 T_1^2 + 1)$$



$T_1 > T_2$



$T_1 < T_2$

Изодромное звено / Изодромное интегрирующее звено

$$a\dot{y}(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{s} = \frac{K(Ts+1)}{s}$$

Последовательное соединение **форсирующего** и **идеального интегрирующего**

$$\frac{K(Ts+1)}{s} = K(Ts+1)\cdot\frac{1}{s}$$

Характеристики выводятся из характеристик других звеньев

Изодромное звено / Изодромное интегрирующее звено

$$a\dot{y}(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{s} = \frac{K(Ts+1)}{s}$$

А если представить, что соединено параллельно?

$$\frac{K(Ts+1)}{s} = KT + \frac{K}{s}$$

На что похоже?

Характеристики выводятся из характеристик других звеньев

Типовые звенья

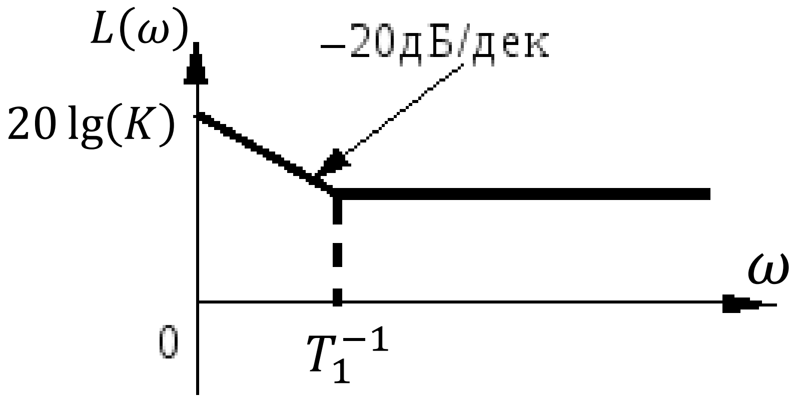
Изодромное звено / Изодромное интегрирующее звено

$$a\dot{y}(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a}\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{s} = \frac{K(Ts+1)}{s}$$

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega T) - \frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20\lg(K) + 10\lg(\omega^2 T^2 + 1) - 20\lg(\omega)$$



Типовые звенья

Реальное интегрирующее звено / Интегрирующее звено с замедлением / Инерционное интегрирующее звено

$$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{s\left(1 + \frac{a_1}{a_0}s\right)} = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Типовые звенья

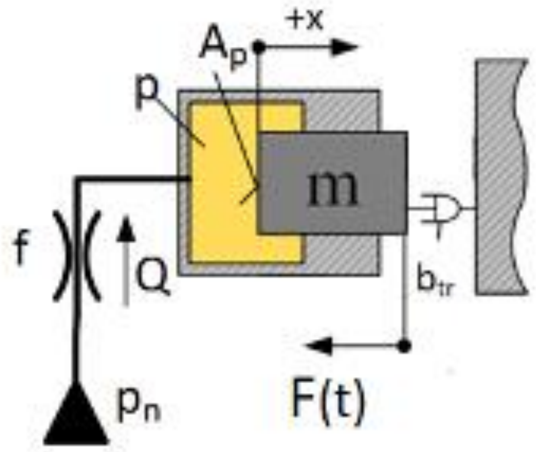
Реальное интегрирующее звено / Интегрирующее звено с замедлением / Инерционное интегрирующее звено

$$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{s\left(1 + \frac{a_1}{a_0}s\right)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

Примеры

Гидравлический демпфер



Формулы не простые, да еще и входное воздействие – отклонение внешней силы от равновесного состояния

Типовые звенья

Реальное интегрирующее звено / Интегрирующее звено с замедлением / Инерционное интегрирующее звено

$$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0u(t)$$

$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{s\left(1 + \frac{a_1}{a_0}s\right)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(\omega^2T^2+1) - 20\lg(\omega)$$

$$w(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad h(t) = Kt - KT\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Последовательное соединение реального усилительного и идеального интегрирующего

$$\frac{K}{s(Ts+1)} = \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

Характеристики выводятся из характеристик других звеньев.

Реальное интегрирующее звено / Интегрирующее звено с замедлением / Инерционное интегрирующее звено

$$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0u(t)$$

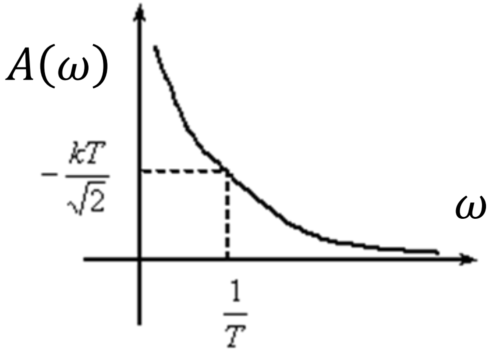
$$W(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{s\left(1+\frac{a_1}{a_0}s\right)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

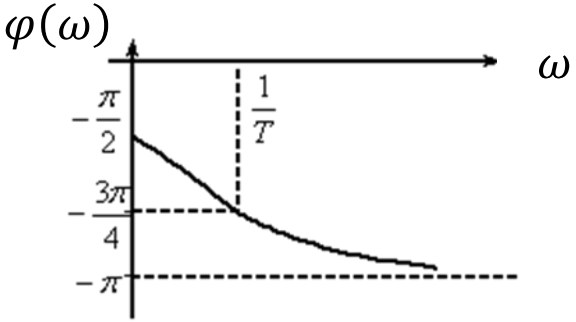
$$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

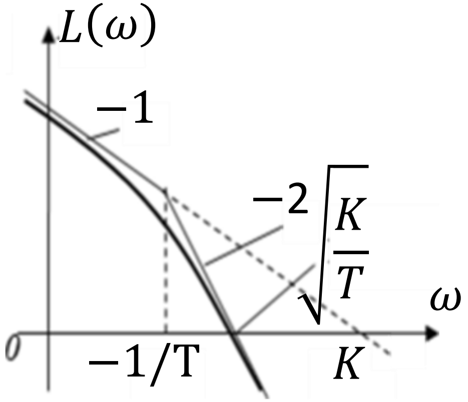
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega T)$$

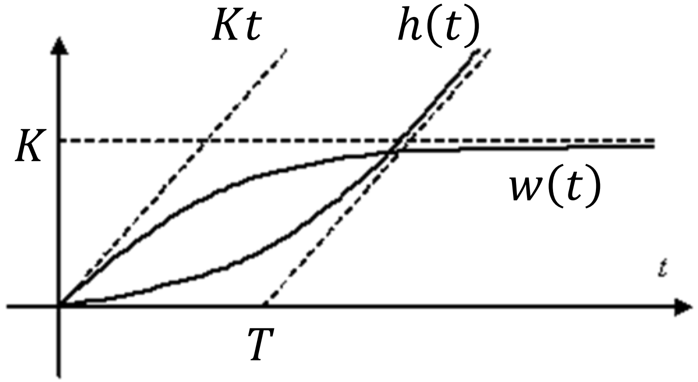
$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(\omega^2T^2+1) - 20\lg(\omega)$$

$$w(t) = K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad h(t) = Kt - KT\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$









Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}, T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}, \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

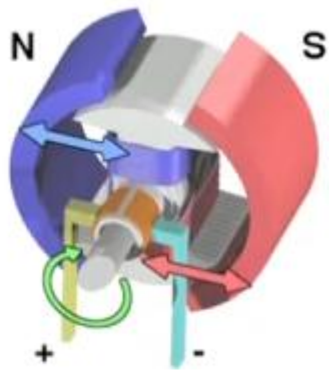
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}, T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}, \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

Примеры

ДПТ (с учетом индуктивности)



$$\frac{\omega}{U} = \frac{k_m}{JR} \frac{1}{\frac{L}{R}s^2 + s + \frac{k_m k_\varepsilon}{JR}}$$

$$K = k_\varepsilon^{-1}, T = \sqrt{\frac{LJ}{k_m k_\varepsilon}}, \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{J}{L k_m k_\varepsilon}}$$

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

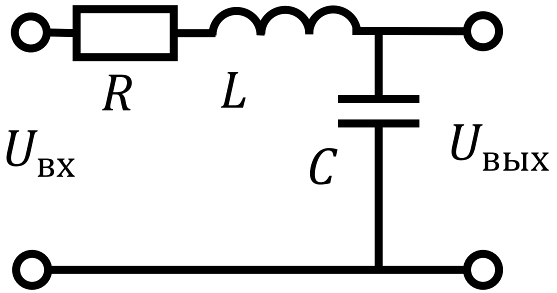
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}, T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}, \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

Примеры

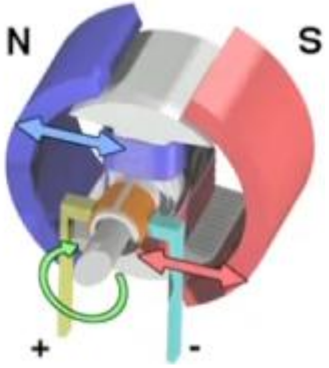
RLC – цепочка



$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{1}{CLs^2 + RCs + 1}$$

$$K = 1, T = \sqrt{CL}, \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

ДПТ (с учетом индуктивности)



$$\frac{\omega}{U} = \frac{k_m}{JR}\frac{1}{\frac{L}{R}s^2 + s + \frac{k_m k_\varepsilon}{JR}}$$

$$K = k_\varepsilon^{-1}, T = \sqrt{\frac{LJ}{k_m k_\varepsilon}}, \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{J}{L k_m k_\varepsilon}}$$

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

ξ – коэффициент затухания

$0 < \xi < 1$ – звено колебательное

$1 < \xi$ – звено апериодическое

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}, T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}, \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

ξ – коэффициент затухания

$0 < \xi < 1$ – звено колебательное

$1 < \xi$ – звено апериодическое

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}\right), \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left((1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2\right)$$

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

ξ – коэффициент затухания
$0 < \xi < 1$ – звено колебательное
$1 < \xi$ – звено апериодическое

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}\right), \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left((1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2\right)$$

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

ξ – коэффициент затухания

$0 < \xi < 1$ – звено колебательное

$1 < \xi$ – звено апериодическое

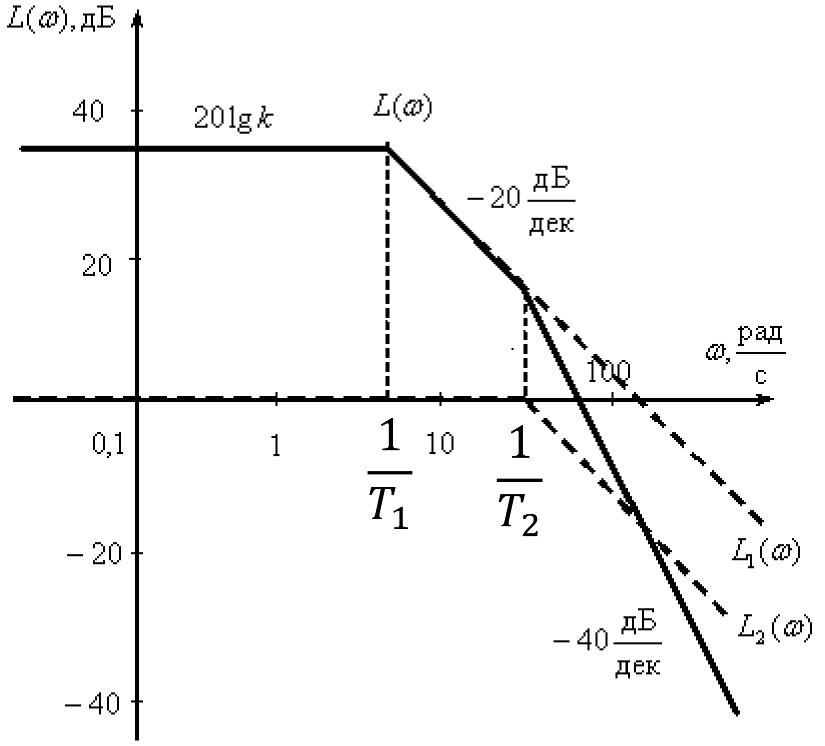
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}\sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T_1) - \operatorname{arctg}(\omega T_2)$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(\omega^2 T_1^2 + 1) - 10\lg(\omega^2 T_2^2 + 1)$$



Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

ξ – коэффициент затухания
$0 < \xi < 1$ – звено колебательное
$1 < \xi$ – звено апериодическое

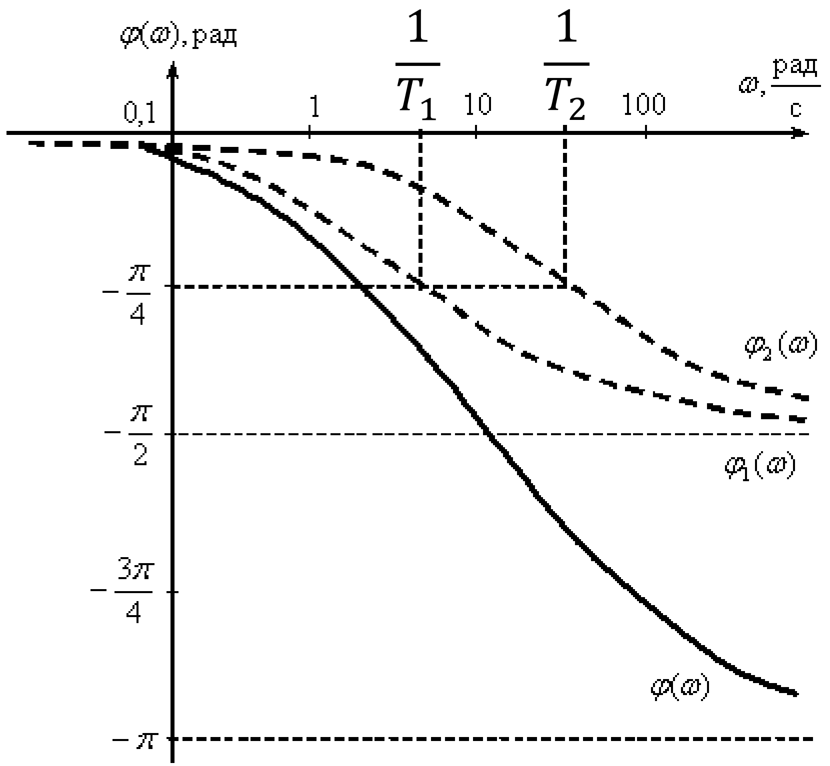
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}\sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T_1) - \operatorname{arctg}(\omega T_2)$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg(\omega^2 T_1^2 + 1) - 10\lg(\omega^2 T_2^2 + 1)$$



Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

ξ – коэффициент затухания

$0 < \xi < 1$ – звено колебательное

$1 < \xi$ – звено апериодическое

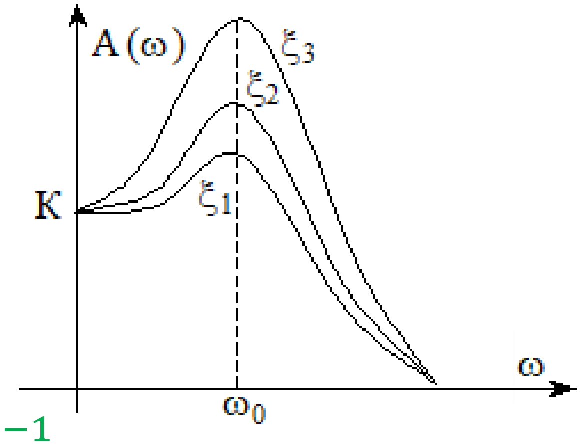
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

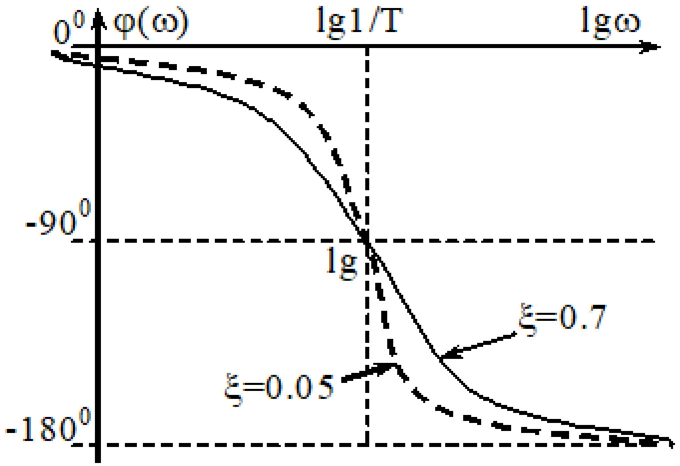
$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}\right), \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left((1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2\right)$$



$\xi_1 > \xi_2 > \xi_3$



$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \omega_0$ – частота собственных, недемпфированных колебаний (резонансная частота!)

Типовые звенья

Апериодическое звено второго порядка + Колебательное звено

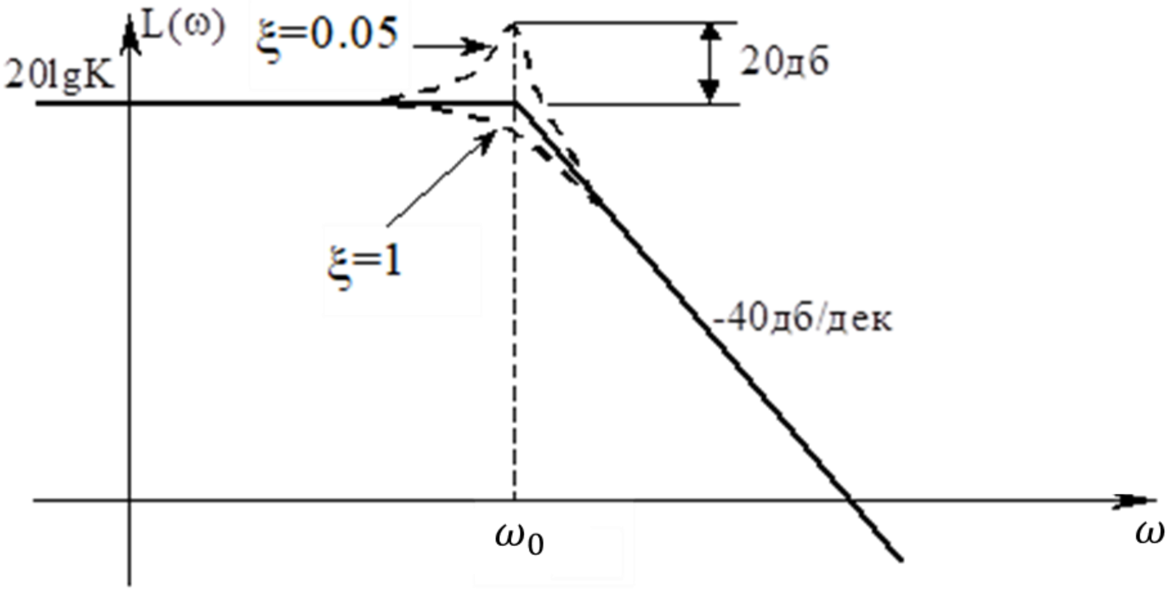
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

ξ – коэффициент затухания

$0 < \xi < 1$ – звено колебательное

$1 < \xi$ – звено апериодическое

Асимптотическими (без поправок) в районе частоты сопряжения пользоваться нельзя, большая ошибка



$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi - \mathrm{arctg}\left(\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}\right), \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left((1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2\right)$$

$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \omega_0$ – частота собственных, недемпфированных колебаний (резонансная частота!)

Консервативное звено

$\xi = 0$ – крайний случай,
звено теряет свойство диссипативности
(не рассеивает энергию)

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}\right), \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left((1-\omega^2T^2)^2 + 4\omega^2\xi^2T^2\right)$$

Примеры:
идеальные модели маятников

Консервативное звено

$\xi = 0$ – крайний случай,
звено теряет свойство диссипативности
(не рассеивает энергию)

$$a_2\ddot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi, \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg(1 - \omega^2 T^2)$$

Типовые звенья

Консервативное звено

$\xi = 0$ – крайний случай,
звено теряет свойство диссипативности
(не рассеивает энергию)

$$a_2\ddot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{|1 - \omega^2 T^2|}$$

В литературе модуль почему-то часто опускают

$$\varphi(\omega) = -a\pi, \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg(1 - \omega^2 T^2)$$

Типовые звенья

Консервативное звено

$\xi = 0$ – крайний случай,
звено теряет свойство диссипативности
(не рассеивает энергию)

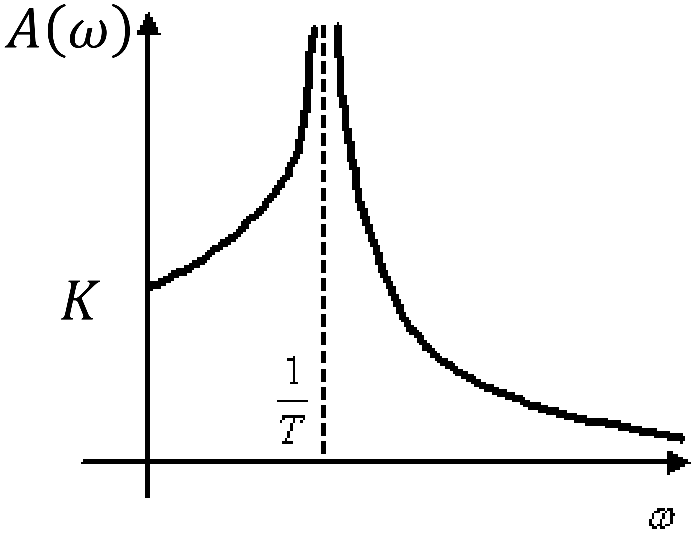
$$a_2\ddot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

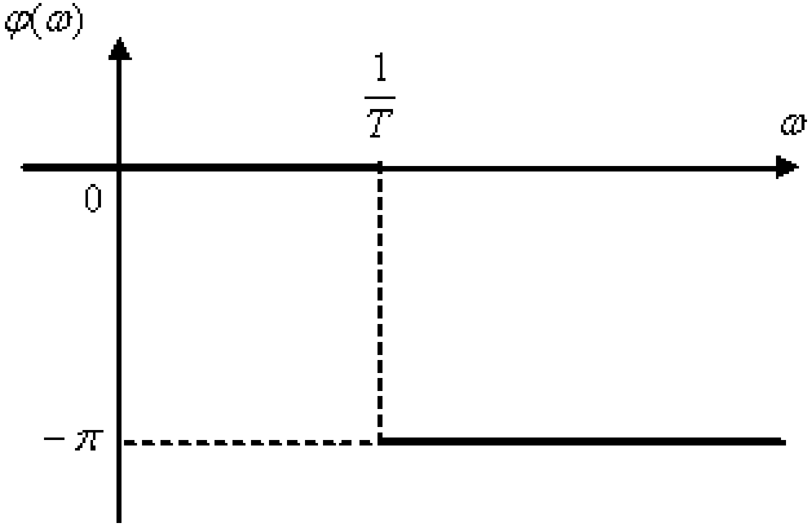
$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{1 - \omega^2 T^2}$$

$$\varphi(\omega) = -a\pi, \begin{cases} a = 0, \omega < T^{-1} \\ a = 1, \omega > T^{-1} \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg(1 - \omega^2 T^2)$$





Про резонанс было на лекции.
Полезно ли это?
«Иногда хорошо, иногда плохо»

Типовые звенья

1-го порядка

2-го порядка

Звено	Д/У	ПФ
Идеальное усилительное	$ay(t) = bu(t)$	K
Реальное усилительное	$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$	$\frac{K}{Ts+1}$
Идеальное дифференцирующее	$ay(t) = b\dot{u}(t)$	Ks
Реальное дифференцирующее	$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b\dot{u}(t)$	$\frac{Ks}{Ts+1}$
Идеально	$bu(t)$	$\frac{K}{s}$
Фор	$) + b_0 u(t)$	$K(Ts+1)$
Реально	$b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$	$\frac{K(T_2 s+1)}{T_1 s+1}$
Из	$) + b_0 u(t)$	$\frac{K(Ts+1)}{s}$
Реальное интегрирующее	$a_1\ddot{y}(t) + a_0\dot{y}(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{s(Ts+1)}$
Апериодическое 2-го порядка	$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$
Колебательное		$\frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$
Консервативное	$a_2\ddot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{T^2 s^2 + 1}$

Особое звено!

Звено чистого запаздывания:

$$e^{-s\tau}$$

Странная конструкция, которую тоже относят к типовым

Звено чистого запаздывания

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$$W(s) = e^{-s\tau}$$

Вспоминаем теорему о смещении

Звено чистого запаздывания

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$$W(s) = e^{-s\tau}$$

Вспоминаем теорему о смещении

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} F(s)$$

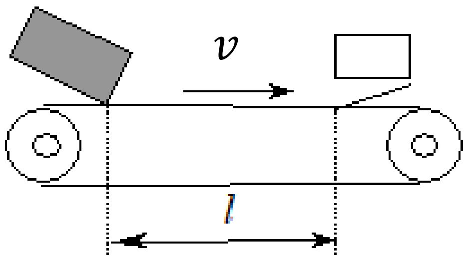
Звено чистого запаздывания

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$$W(s) = e^{-s\tau}$$

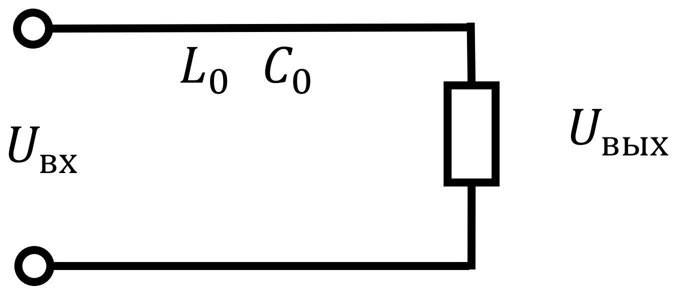
Примеры:

Конвейер



$$\tau = \frac{l}{v}$$

Длинные линии электропередач



$$\tau = \sqrt{L_0 C_0}$$

Тиристорные преобразователи

Типовые звенья

Звено чистого запаздывания

$$y(t) = u(t-\tau)$$

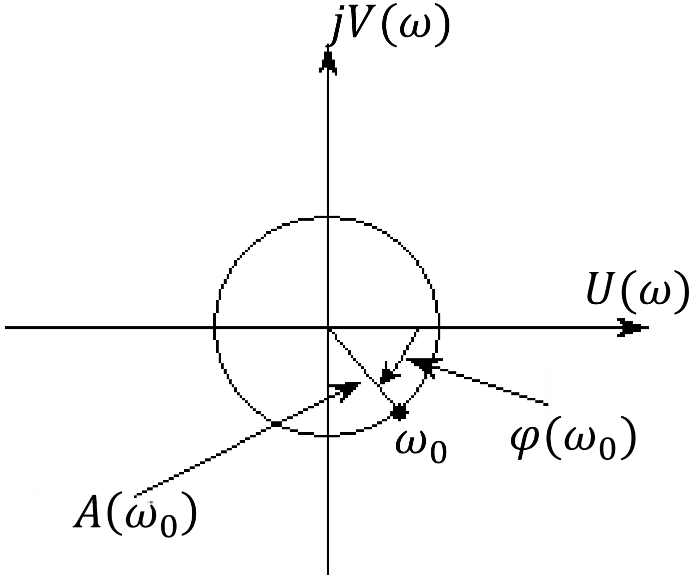
$$W(s) = e^{-s\tau}$$

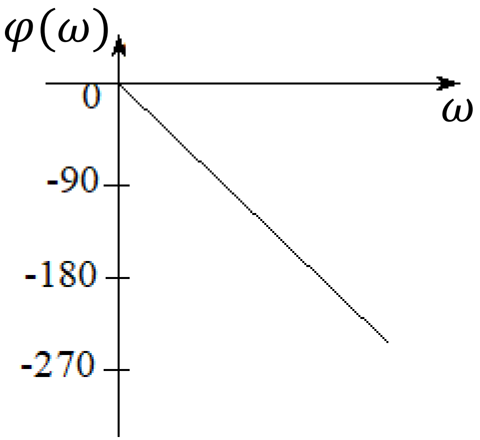
$$U(\omega) = \cos(\omega\tau) \quad V(\omega) = -\sin(\omega\tau)$$

$$A(\omega) = 1$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

$$L(\omega) = 0$$





Звено чистого запаздывания

$$y(t) = u(t-\tau)$$

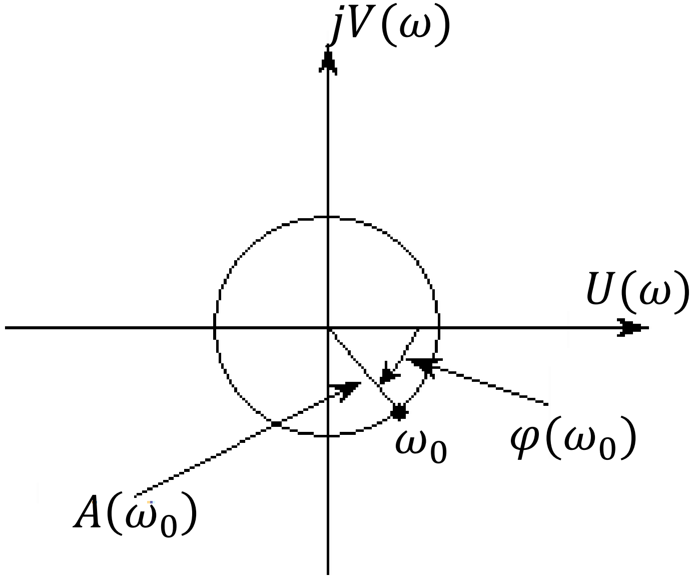
$$W(s) = e^{-s\tau}$$

$$U(\omega) = \cos(\omega\tau) \qquad V(\omega) = -\sin(\omega\tau)$$

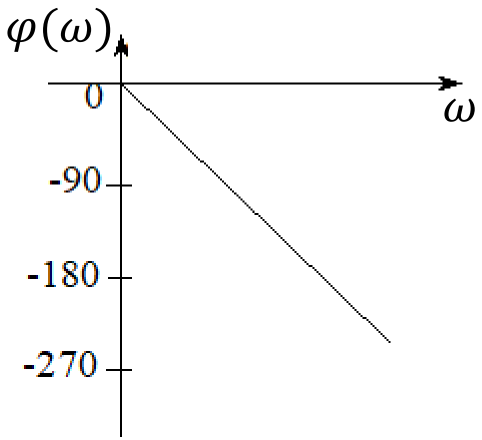
$$A(\omega) = 1$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

$$L(\omega) = 0$$



Это вам пригодится на следующем занятии



Задачки

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$$
$$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$$

$$y(t) = ?$$

Задачки

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(1 \cdot t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

Типовое звено?

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Типовое звено?

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$
$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$,

$u(t) = \sin(t + 30°)$,

$y(t) = ?$

Типовое звено?

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

Последовательное соединение 2х апериодических

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$,

$u(t) = \sin(t + 30°)$,

$y(t) = ?$

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$\boxed{\begin{cases} A(\omega) = A_1(\omega)\cdot A_2(\omega)\dots A_n(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega) \end{cases}}$$

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\big(W(j\omega)\big)$$

$$V(\omega) = \mathrm{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Задачки

Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

Алгебраическая форма:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \operatorname{Re}\big(W(j\omega)\big)$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}\big(W(j\omega)\big)$$

Показательная форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Пример:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$$

$$u(t) = \sin(t + 30°),$$

$$y(t) = ?$$

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{1}{\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega) = -2\operatorname{arctg}(\omega)$$

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

Пример:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$

$u(t) = \sin(t + 30°)\,,$

$y(t) = ?$

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$A(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(1) = -2\operatorname{arctg}(1) = -2\cdot 45° = -90°$$

$$y(t) = A(1)\sin\big(t + 30° + \varphi(1)\big)$$

Задачки

Апериодическое звено 1-го порядка

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2T^2+1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

Пример:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$$

$$u(t) = \sin(t + 30°),$$

$$y(t) = ?$$

$$W(\omega) = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$A(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(1) = -2\operatorname{arctg}(1) = -2\cdot 45° = -90°$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(t - 60°)$$

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Подумаем, из каких типовых звеньев мы можем это собрать

$$\begin{cases} A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \dots A_n(\omega) \\ L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega) \end{cases}$$

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$A(0) = 7,$

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$

$\varphi(0) = 0,$

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$

Не дифференцирование, т.к. было бы

$A(0) = 0,$

Не интегрирование, т.к. было бы

$A(0) = +\infty$

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$A(0) = 7,$

$\lim_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$

$\varphi(0) = 0,$

$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$

Возможно апериодика, т.к. с ростом частоты амплитуда падает

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Нет нулей и полюсов равных 0, т.к. они дают константный сдвиг фазы на $\pm 90°$ соответственно

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$A(0) = 7,$

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$

$\varphi(0) = 0,$

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$

Нет нулей и полюсов равных 0, т.к. они дают константный сдвиг фазы на $\pm 90°$ соответственно

…но это по сути уже было сказано, рассматривая амплитуду в нуле

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Т.к. минимально-фазовое, то полюсов **больше чем** нулей на 4 (каждый дает изменение фазы на $-90°$)

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Итого что-то вроде:

$$W(s) = \frac{\dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)},$$

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Итого что-то вроде:

$$W(s) = \frac{\dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)},$$

4 апериодических звена первого порядка, из условия полюса любые, так что пусть $8T_1 = 4T_2 = 2T_3 = T_4 = 8$

Задачки

Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$A(0) = 7,$

$\lim\limits_{\omega\to+\infty} A(\omega) = 0$

$\varphi(0) = 0,$

$\lim\limits_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega) = -360°$

Итого что-то вроде:

$$W(s) = \frac{\dots}{(s+1)(2s+1)(4s+1)(8s+1)},$$

Знаменатель также определяется из условий, нам достаточно просто постоянной $K = 7$

Задачки

Пример:

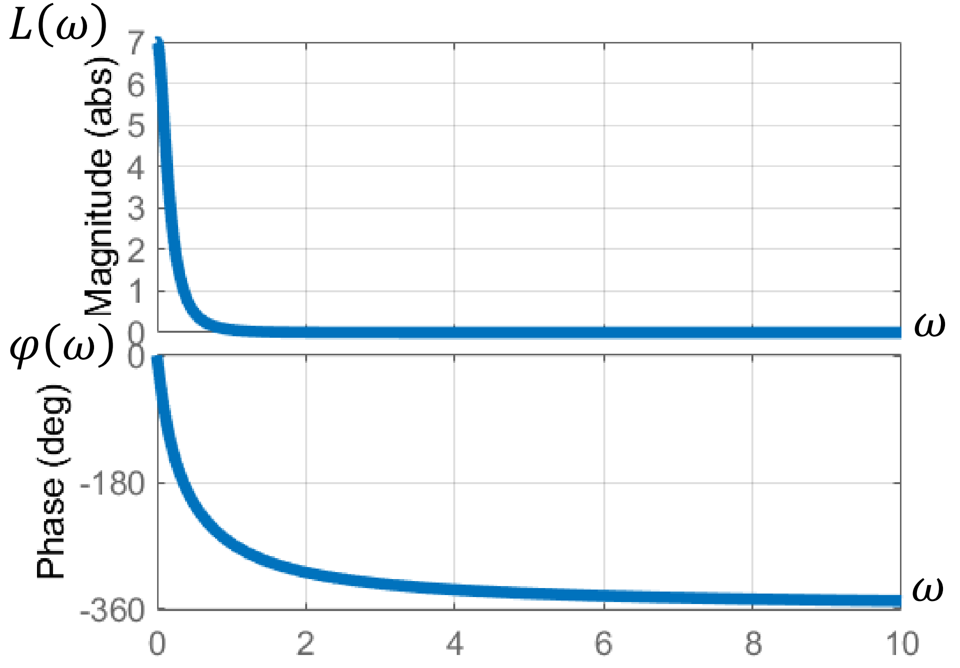
Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Итого что-то вроде:

$$W(s) = \frac{7}{(s+1)(2s+1)(4s+1)(8s+1)},$$

Проверка!



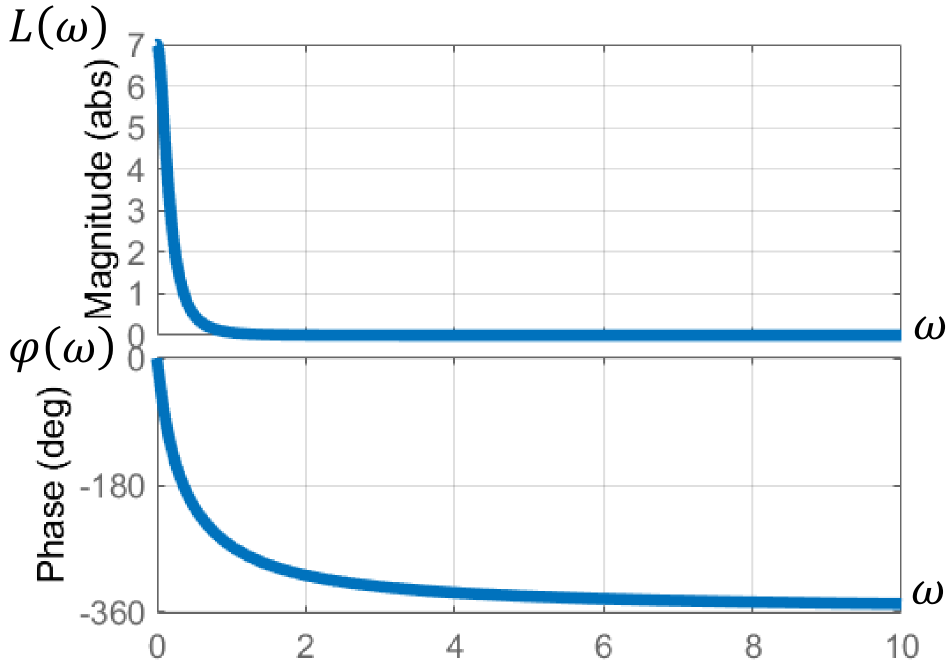
Пример:

Придумать ПФ минимально-фазовой системы такую, что:

$$A(0) = 7,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} A(\omega) = 0$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\lim_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega) = -360°$$

Итого что-то вроде:

$$W(s) = \frac{7}{(s+1)(2s+1)(4s+1)(8s+1)},$$

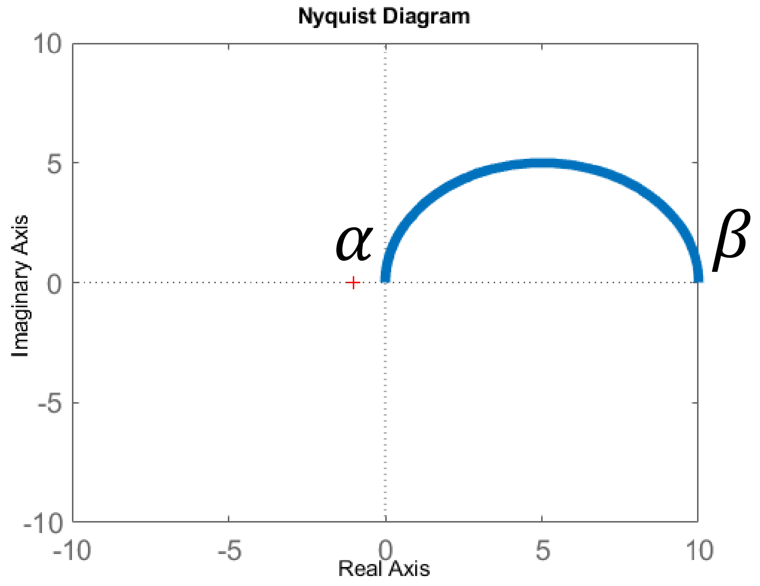


Строго говоря моделирование не доказывает, а лишь демонстрирует, и проверять нужно через математику, но сейчас нам этого достаточно

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ минимально-фазовой ПФ (только положительные частоты)

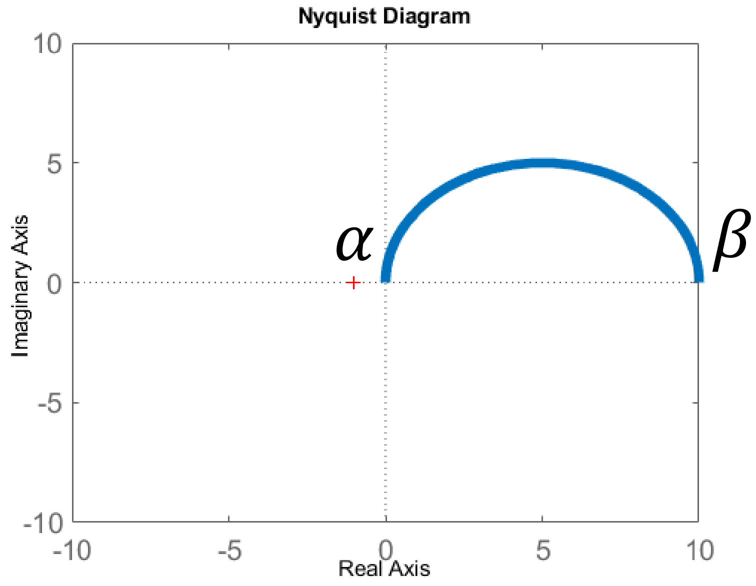


1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)
2. Построить приблизительные ЛАЧХ и ФЧХ
3. Определить соотношения между параметрами ПФ

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



0. Пусть звено не инверсное

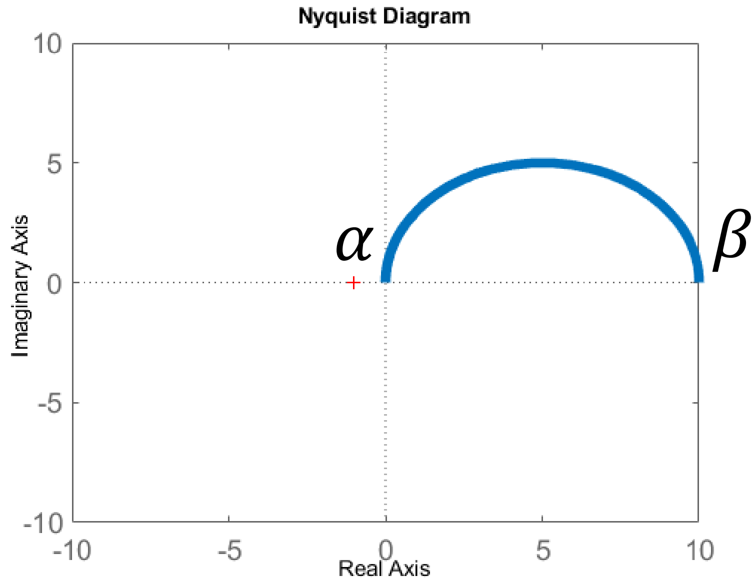
$$\left(W(s) = \frac{s^{\kappa}(b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0)}{s^{\rho}(a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0)}, \frac{b_0}{a_0} = K > 0\right)$$

В каком-то установившемся режиме, который будет определяться статическим коэффициентом усиления/добротностью, звено знак сигнала не инвертирует

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



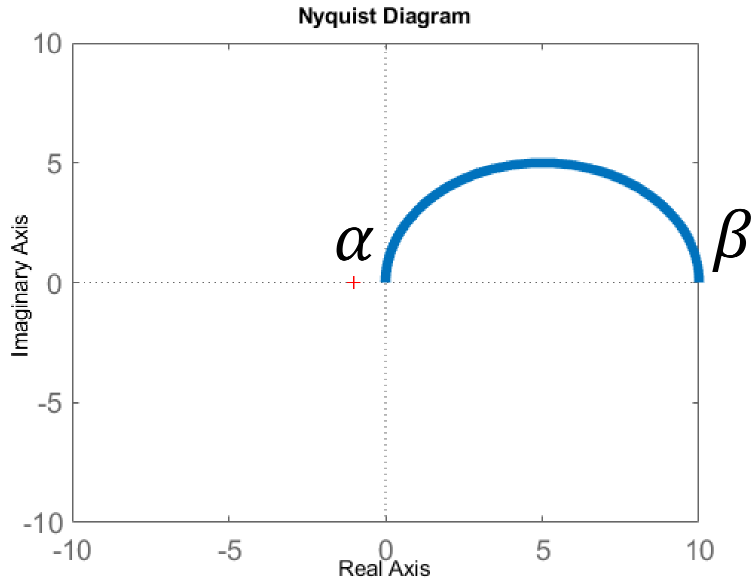
1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Пусть в точке α конец, в точке β начало

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Пусть в точке α конец, в точке β начало:

Для точки α:

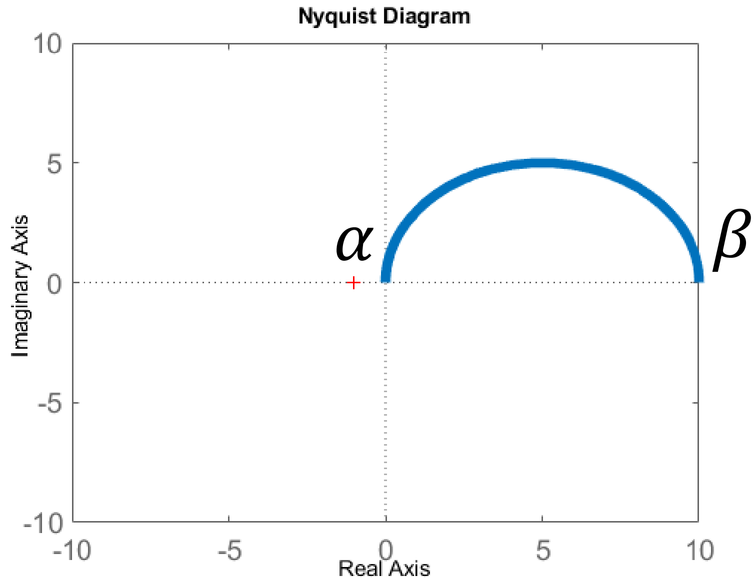
Амплитуда уменьшается → фаза отрицательная

$$A(\omega_\alpha) = 0$$

$$\varphi(\omega_\alpha) = -\frac{3\pi}{2}$$

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Пусть в точке α конец, в точке β начало:

Для точки α:

Амплитуда уменьшается → фаза отрицательная

$A(\omega_\alpha) = 0$

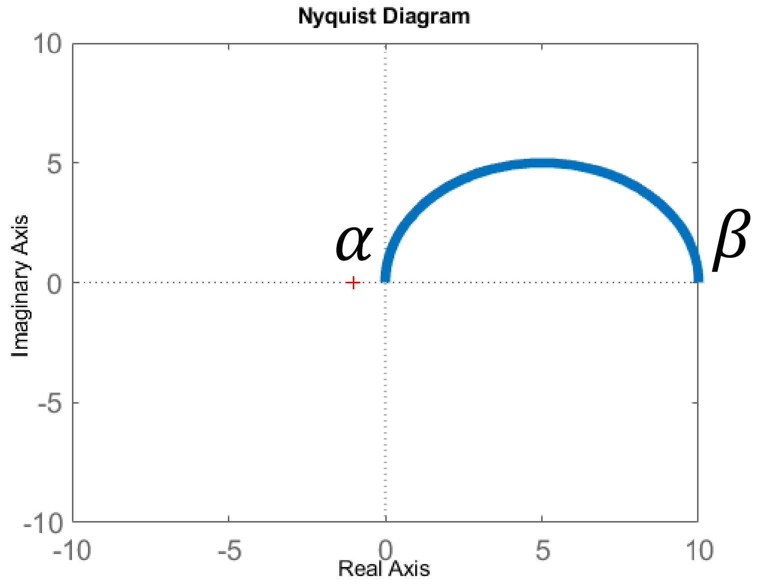
$\varphi(\omega_\alpha) = -\frac{3\pi}{2} = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ →Наклон ЛАХ -3

Да, можно в терминах *асимптотических ЛАХ* делать даже такие грубые оценки скорости изменения амплитуды по фазе

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Пусть в точке α конец, в точке β начало:

Для точки α:

Амплитуда уменьшается → фаза отрицательная

$$A(\omega_\alpha) = 0$$

$$\varphi(\omega_\alpha) = -\frac{3\pi}{2} = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$ →Наклон ЛАХ -3

Для точки β:

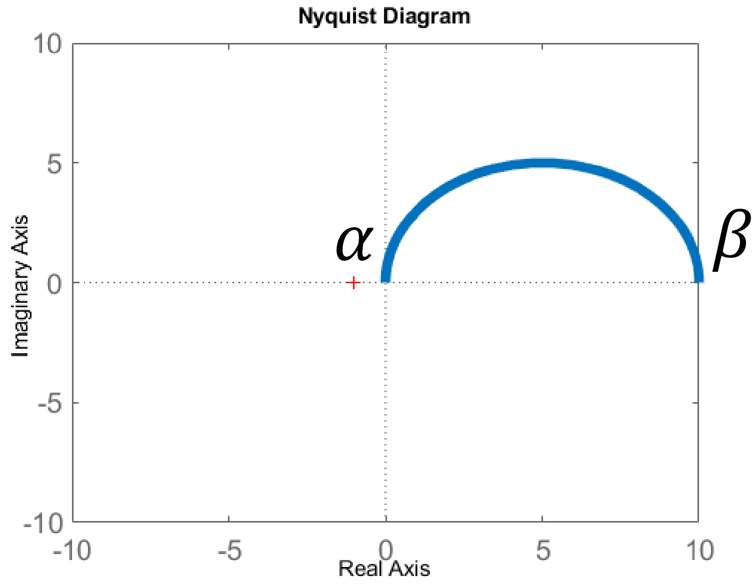
$$A(\omega_\beta) = 10$$

$$\varphi(\omega_\beta) = -2\pi = 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$ →Наклон ЛАХ -4

Задачки

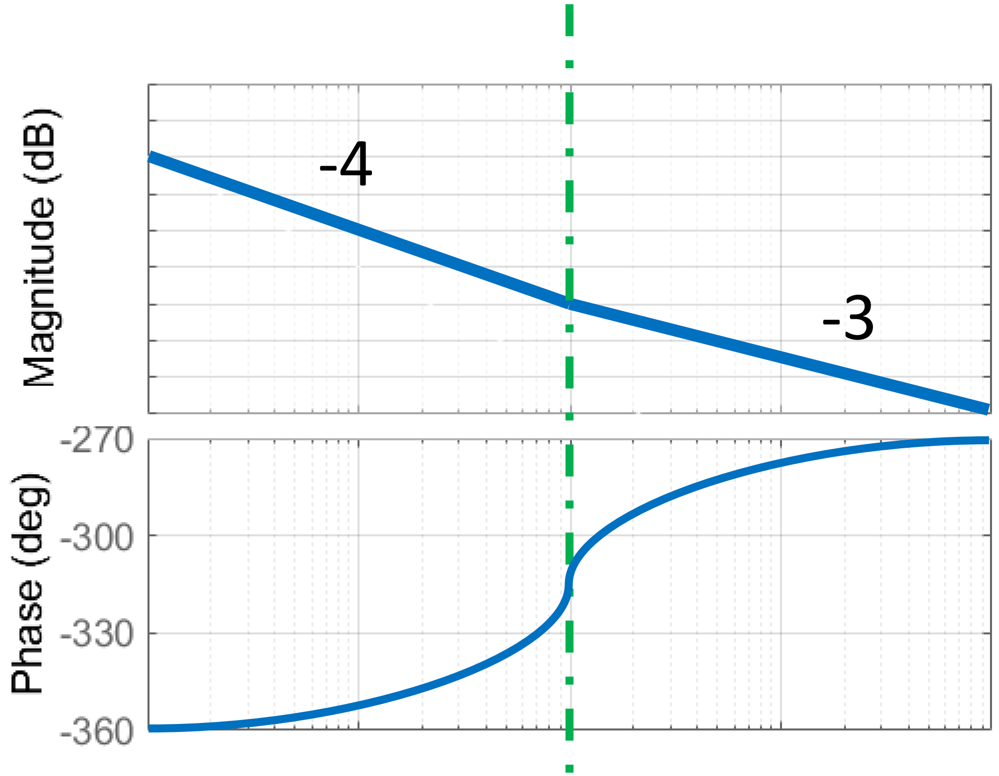
Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

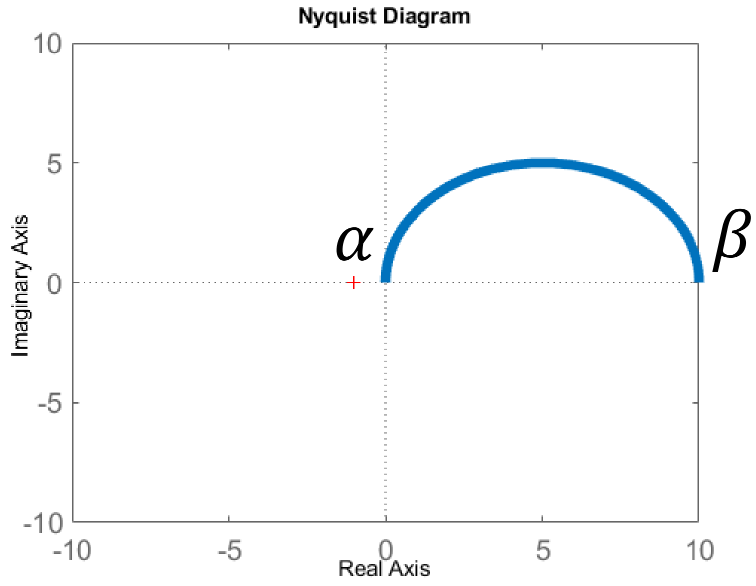
Приближительные ЛАФЧХ



Задачки

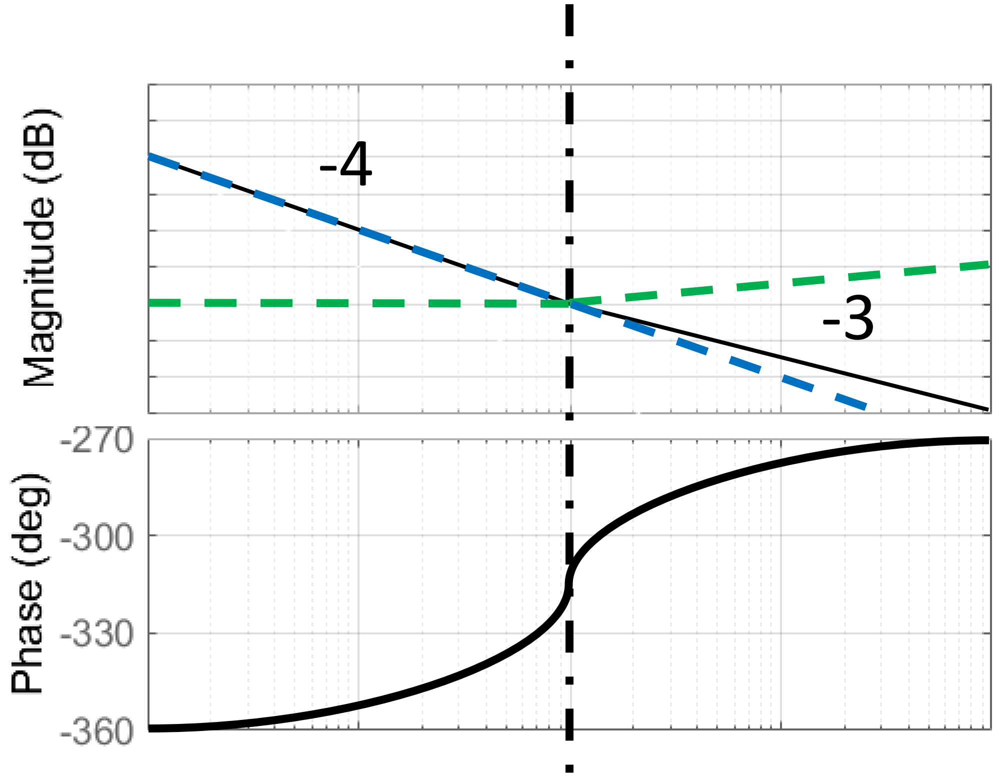
Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Приблизительные ЛАФЧХ



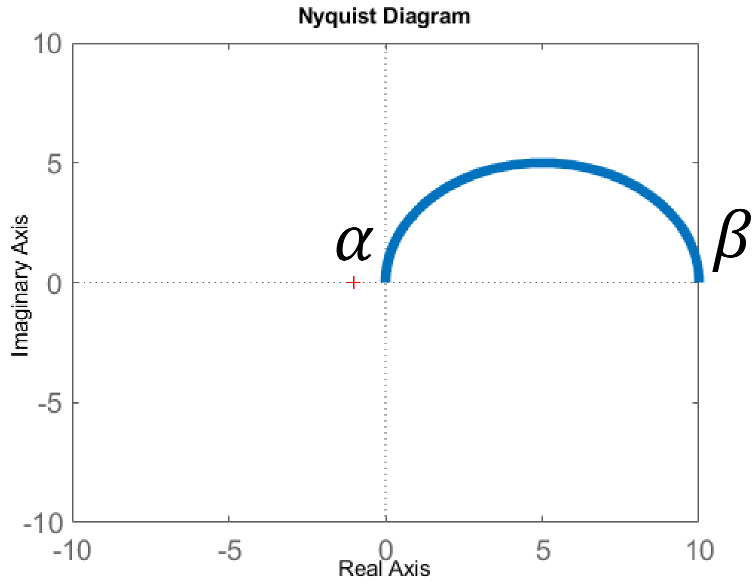
Судя по ЛАЧХ, ПФ:

$$W(s) = K \cdot \frac{1}{s^4} \cdot (Ts + 1)$$

Задачки

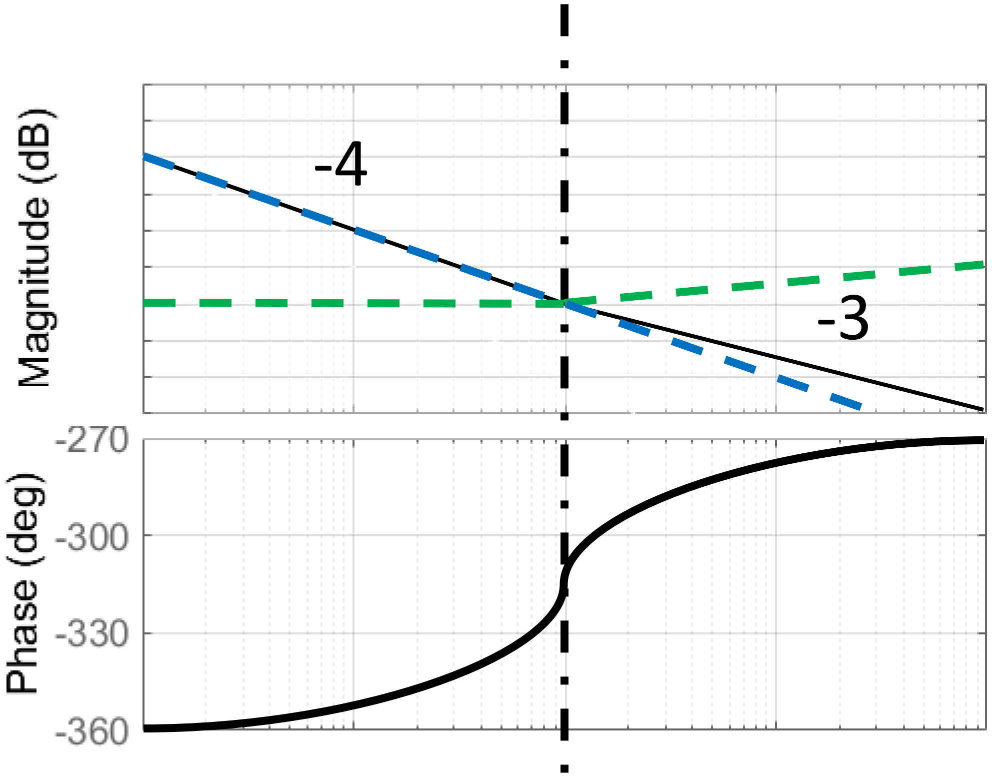
Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Приблизительные ЛАФЧХ



Судя по ЛАЧХ, ПФ:

$$W(s) = K \cdot \frac{1}{s^4} \cdot (Ts + 1)$$

Но!

$$W(j\omega) = \frac{K}{\omega^4} + j\frac{KT}{\omega^3}$$

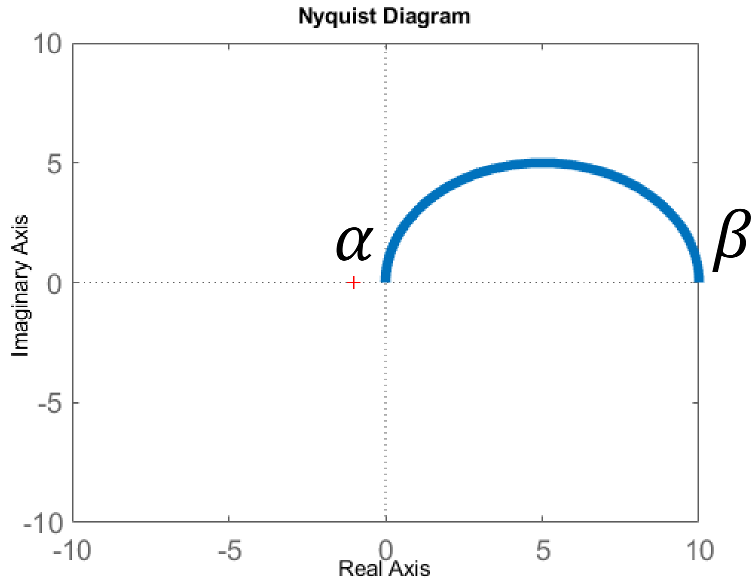
$$\lim_{\omega \to 0} \left(\frac{K}{\omega^4}\right) = +\infty,$$

а должно быть 10 по АФЧХ!

Задачки

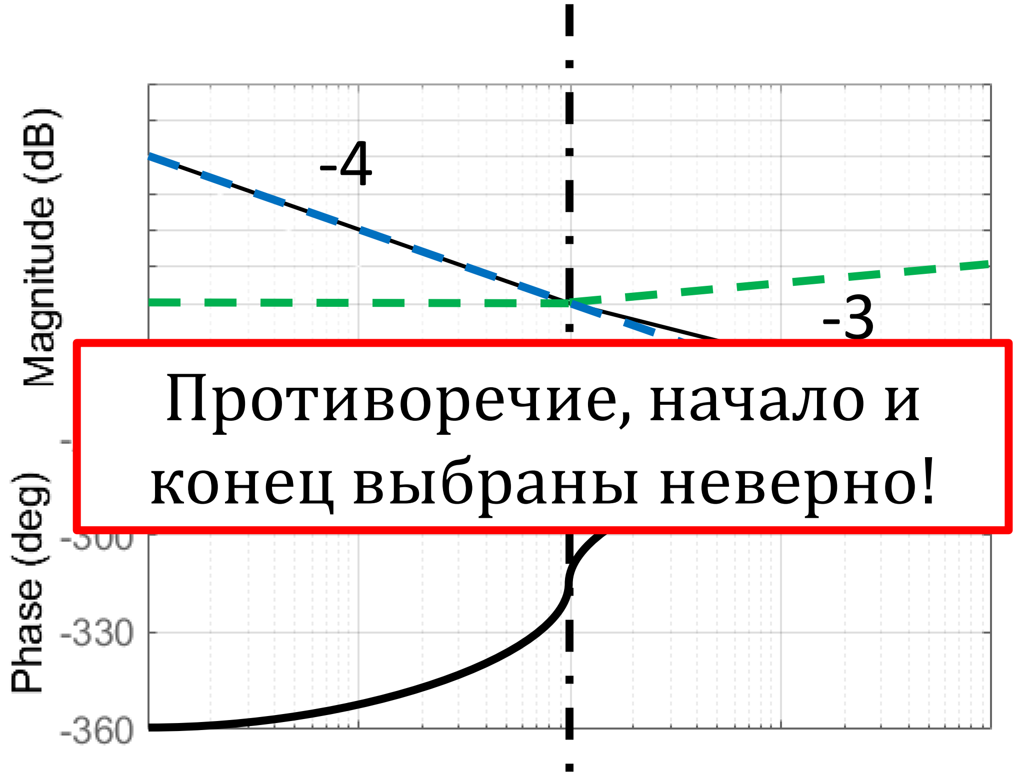
Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Приблизительные ЛАФЧХ



Противоречие, начало и конец выбраны неверно!

Судя по ЛАЧХ, ПФ:

$$W(s) = K \cdot \frac{1}{s^4} \cdot (Ts + 1)$$

Но!

$$W(j\omega) = \frac{K}{\omega^4} + j\frac{KT}{\omega^3}$$

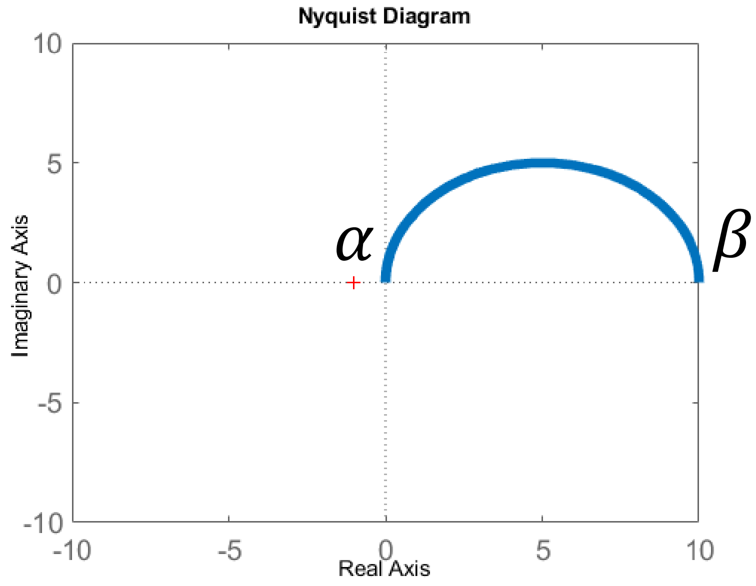
$$\lim_{\omega \to 0}\left(\frac{K}{\omega^4}\right) = +\infty,$$

а должно быть 10 по АФЧХ!

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Пусть в точке β конец, в точке α начало:

Для точки α:

Амплитуда увеличивается → фаза положительная

$A(\omega_\alpha) = 0$

$\varphi(\omega_\alpha) = \frac{\pi}{2}$ →Наклон ЛАХ +1

Для точки β:

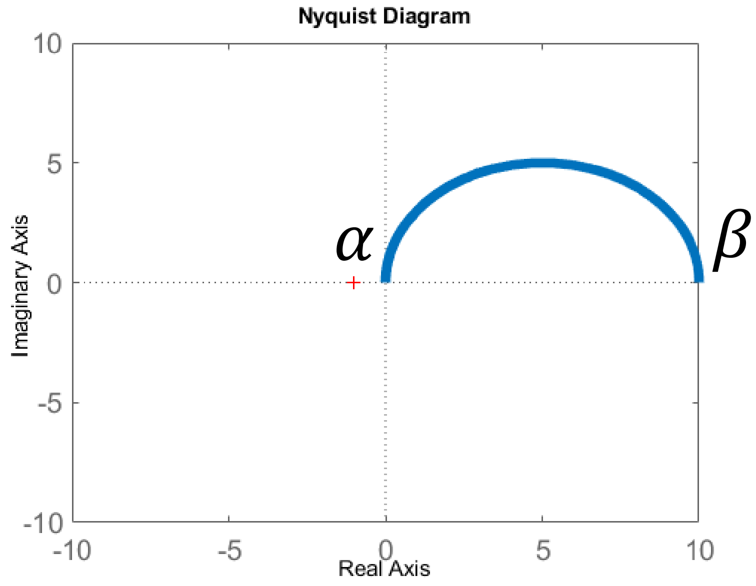
$A(\omega_\beta) = 10$

$\varphi(\omega_\beta) = 0$ →Наклон ЛАХ 0

Задачки

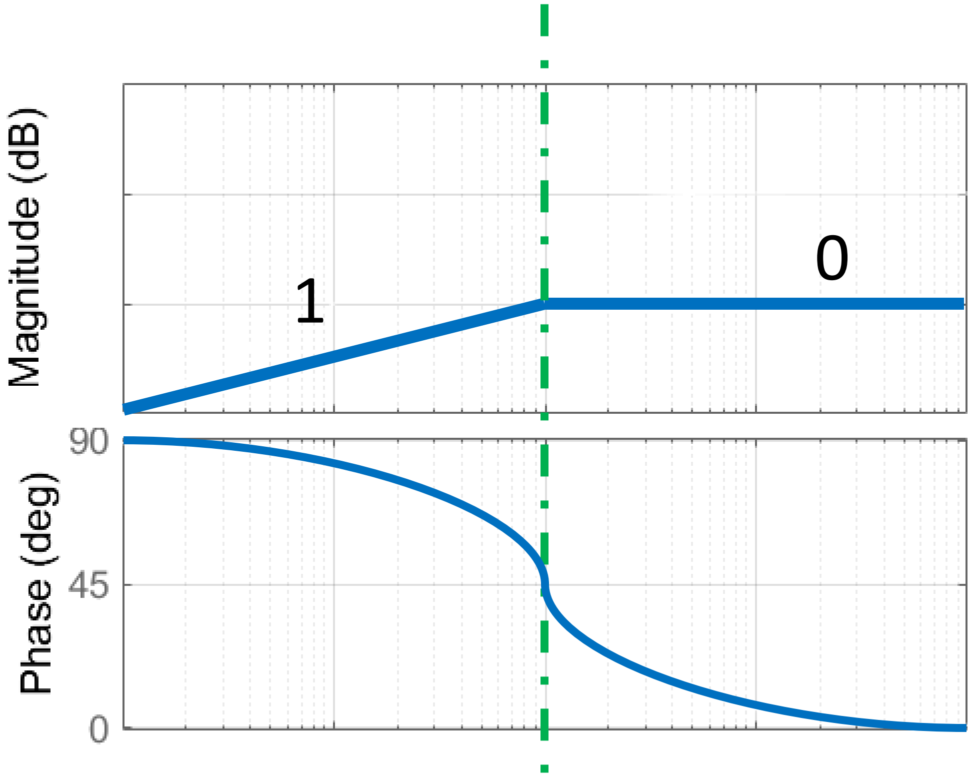
Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Приблизительные ЛАФЧХ



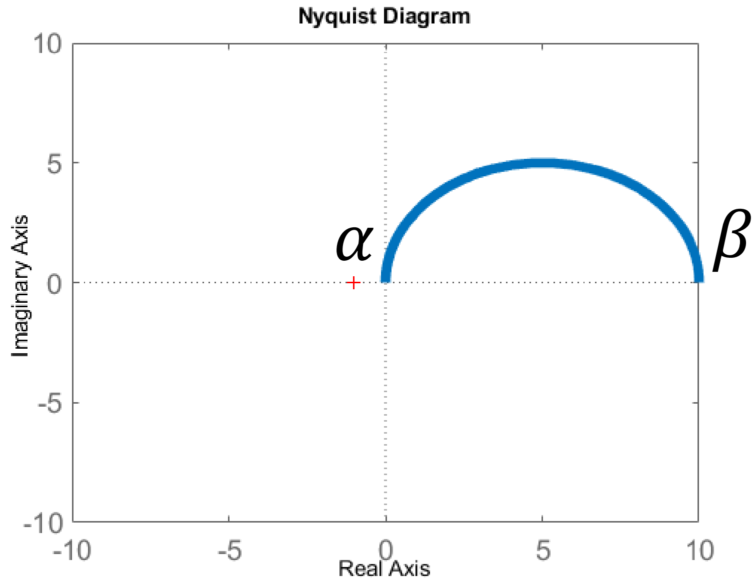
Судя по ЛАЧХ, ПФ:

$$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$$

Задачки

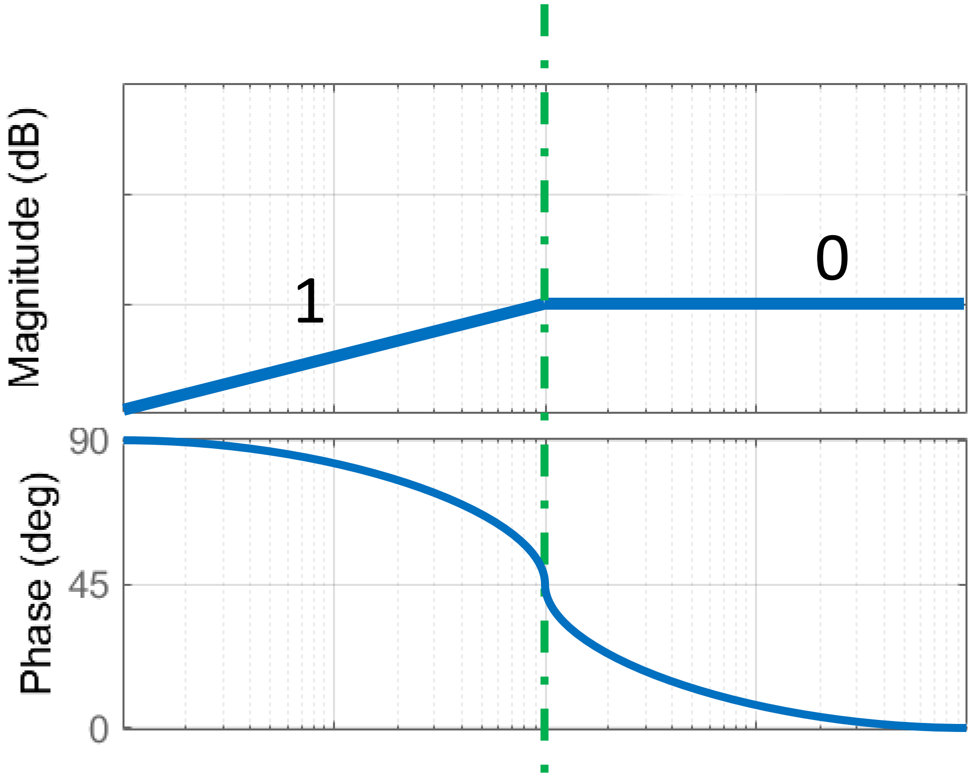
Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Приблизительные ЛАФЧХ



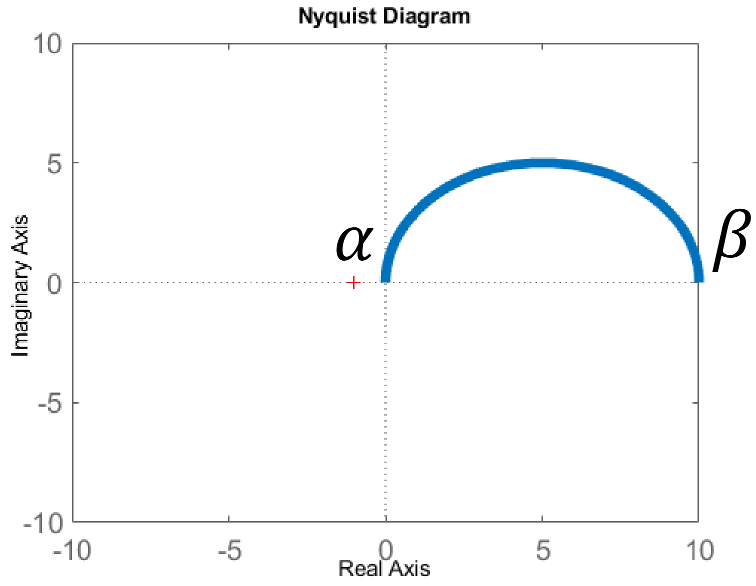
Судя по ЛАЧХ, ПФ:

$$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1} + $$
$$+j\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ

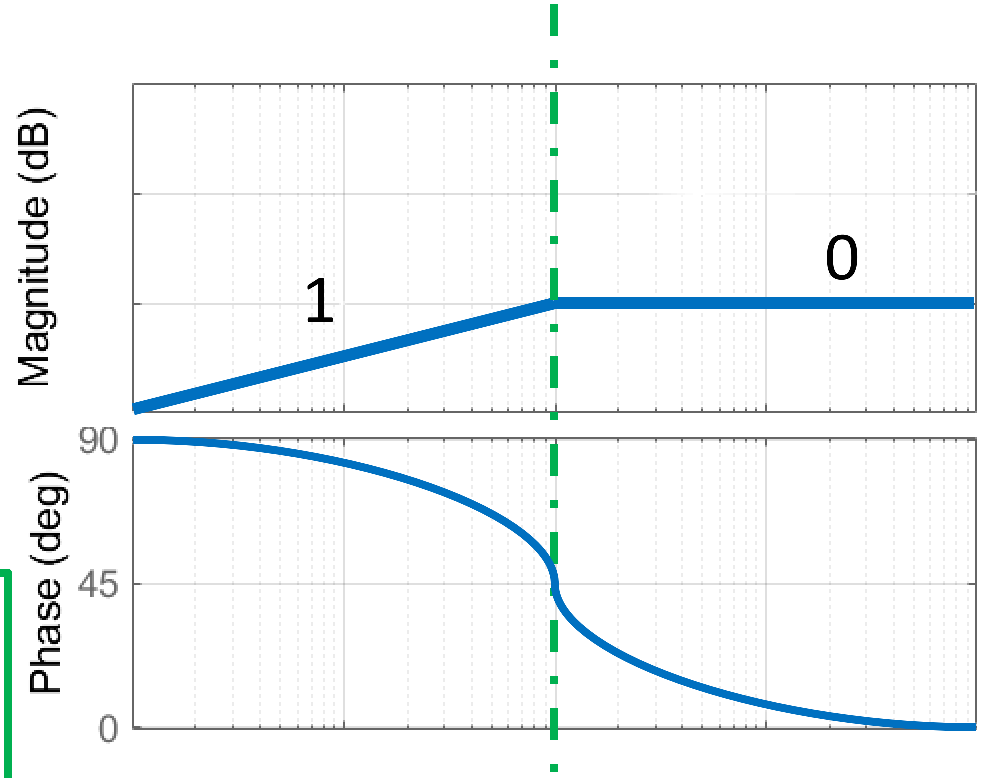


$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1}\right)=\frac{K}{T}=10,$$

откуда $K = 10T$

1. Определить начало ($\omega \to +0$) и конец ($\omega \to +\infty$)

Приблизительные ЛАФЧХ



Судя по ЛАЧХ, ПФ:

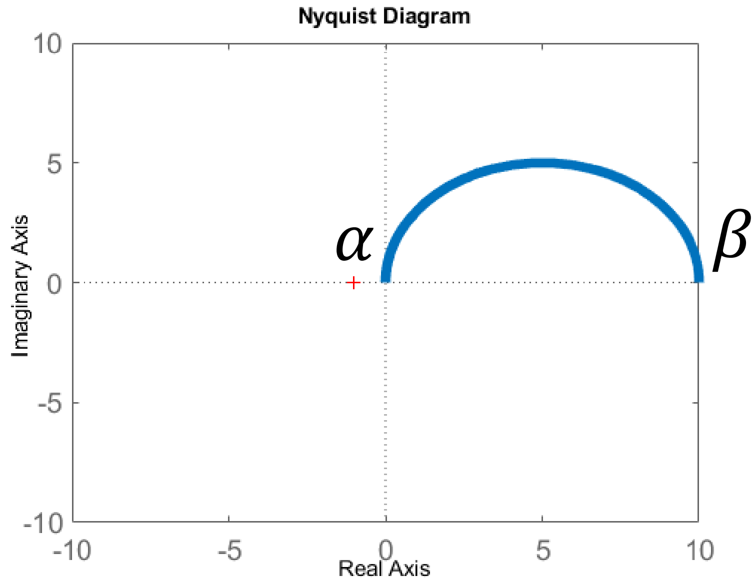
$$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1} + $$
$$+j\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1}\right)=\frac{K}{T}=10,$$

откуда $K=10T$

1. Определить начало $(\omega\to+0)$ и конец $(\omega\to+\infty)$

Приближительные ЛАФЧХ

Проверка остальных соотношений:

$$\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1}\right)=0$$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}\right)=0$$

$$\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}\right)=0$$

Выполняется!

Судя по ЛАЧХ, ПФ:

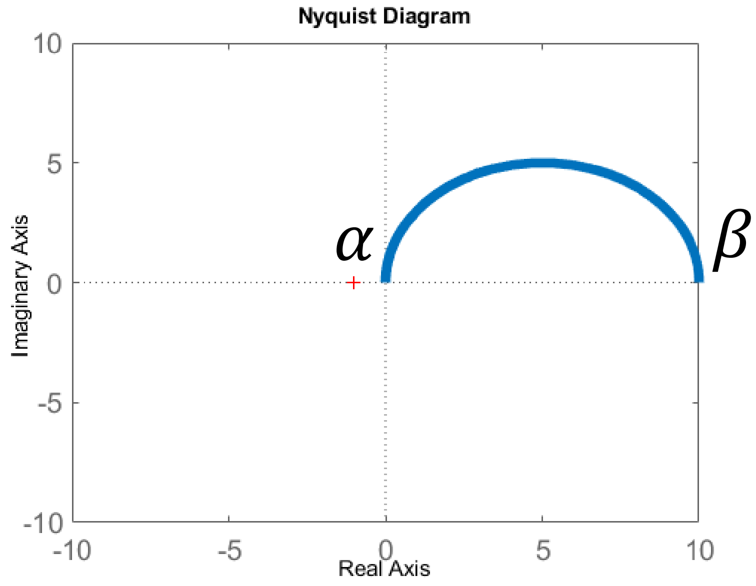
$$W(s)=\frac{Ks}{Ts+1}$$

$$W(j\omega)=\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1}+$$
$$+j\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ



0. Пусть звено не инверсное

$$(W(s)=\frac{s^{\kappa}(b_m p^m+\dots+b_1 p+b_0)}{s^{\rho}(a_n p^n+\dots+a_1 p+a_0)}, \frac{b_0}{a_0}=K>0)$$

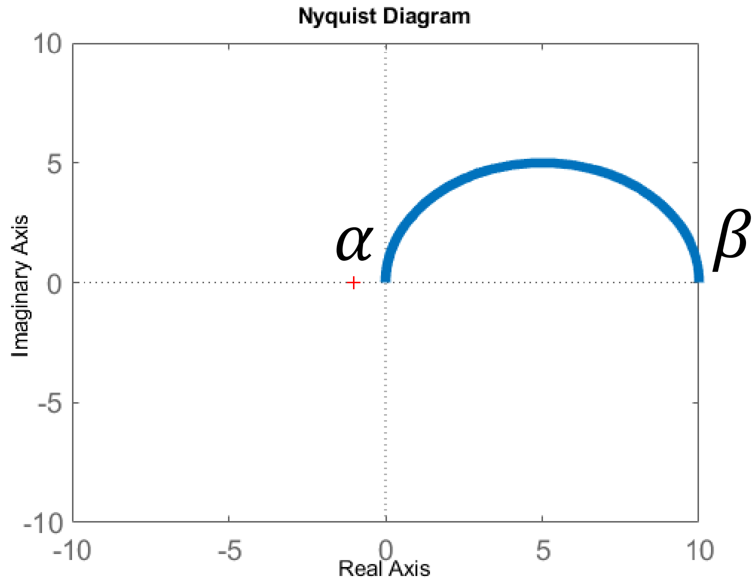
Зачем?

В каком-то установившемся режиме, который будет определяться статическим коэффициентом усиления/добротностью, звено знак сигнала не инвертирует

Задачки

Пример:

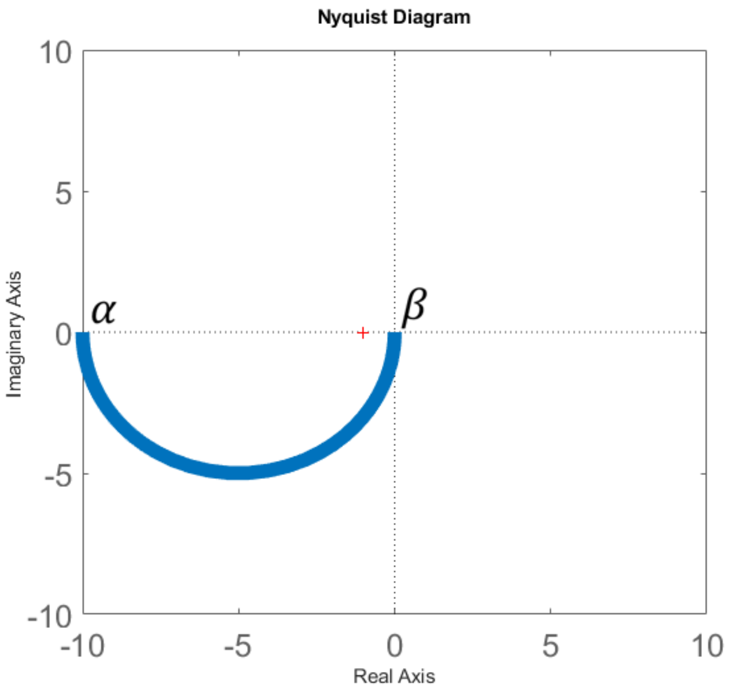
Задана АФЧХ м/ф ПФ



0. Пусть звено не инверсное

Системы слева и справа имеют одинаковую ПФ

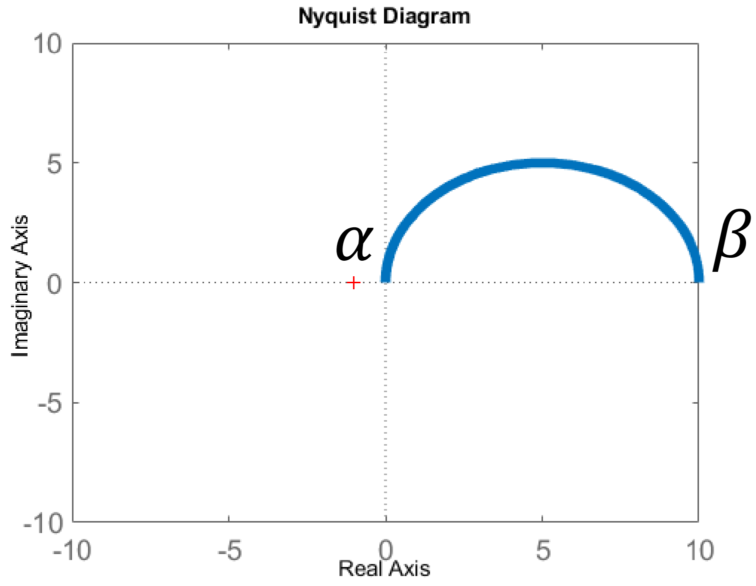
$$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$$



Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ

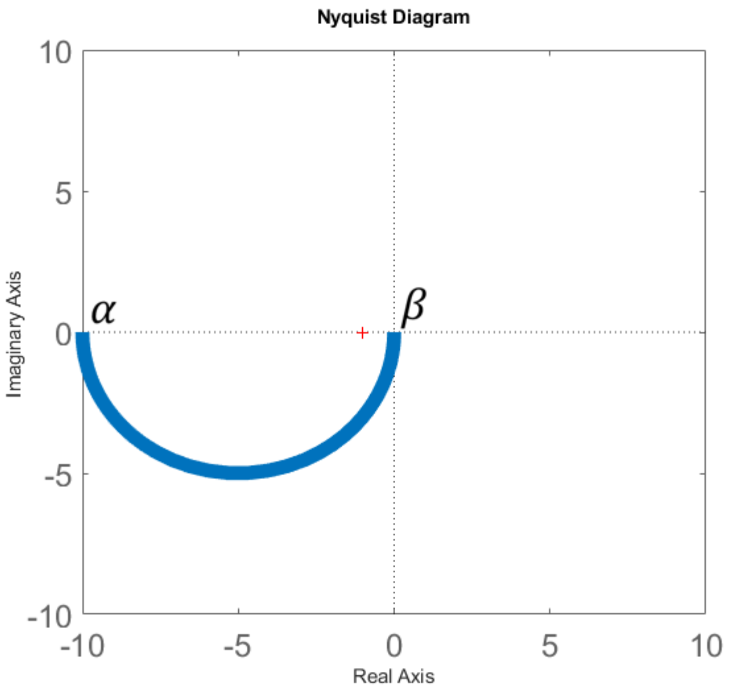


$K > 0$

0. Пусть звено не инверсное

Системы слева и справа имеют одинаковую ПФ

$$W(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$$

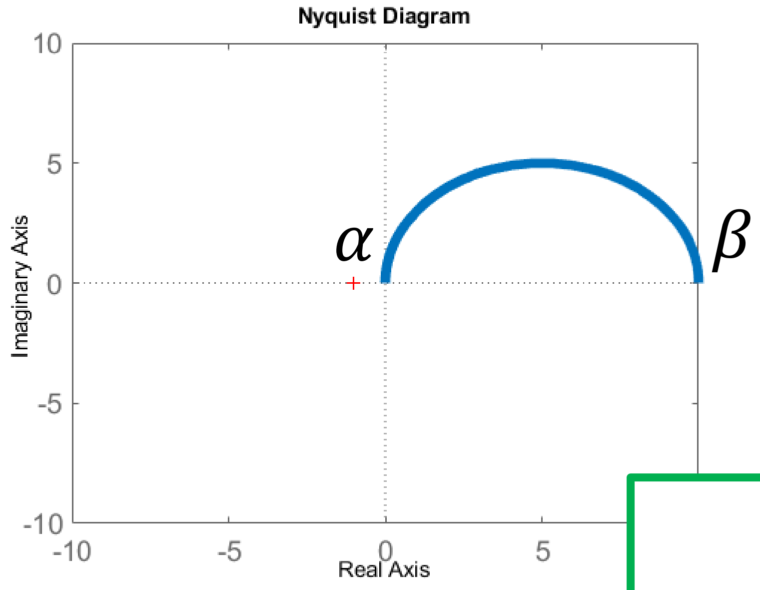


$K < 0$

Задачки

Пример:

Задана АФЧХ м/ф ПФ

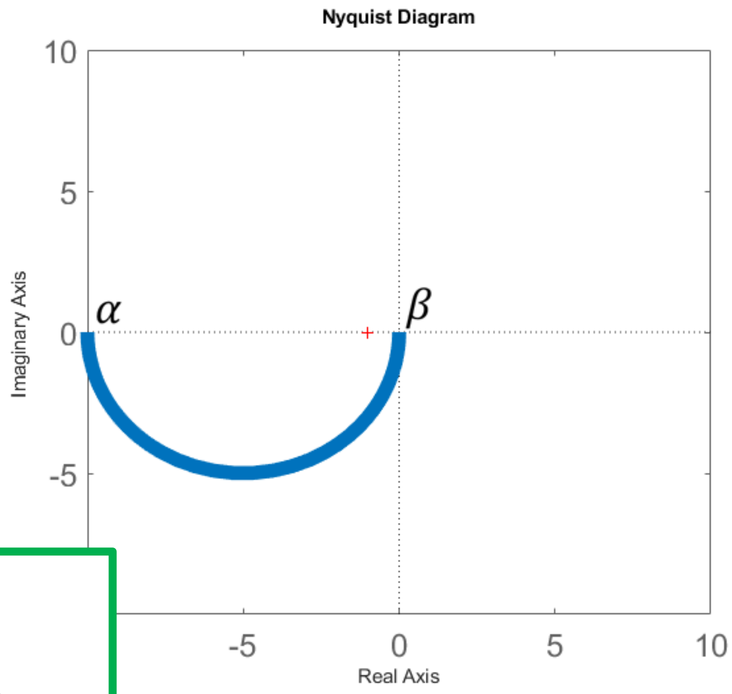


$K > 0$

0. Пусть звено не инверсное

Системы слева и справа имеют одинаковую ПФ

$$W(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$$



$K < 0$

Если $K < 0$, то проще всего отразить АФЧХ относительно центра и работать как с неинверсной, а потом учесть знак