

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Студент: Загайнов А. А.

Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.2

Преподаватели: Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург

2025

Содержание

0.1 Основные формулы	3
Задание №1. Вещественное.	3
1.1 Прямоугольная функция	3
1.2 Треугольная функция	5
1.3 Кардинальный синус	8
1.4 Функция Гаусса	11
1.5 Двустороннее затухание	13
Задание №2. Комплексное.	16
Задание №3. Музыкальное.	22
Вывод	22

0.1 Основные формулы

Унитарное преобразование Фурье к угловой скорости ω :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{обратное ему преобразование})$$

Равенство Парсеваля:

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Задание №1. Вещественное.

В заданиях ниже нам потребуется произвольный набор точек для изменения функций, зададим его прямо сейчас:

$$(a, b) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

1.1 Прямоугольная функция

Начинаем с прямоугольной функции, которая задана в общем виде:

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

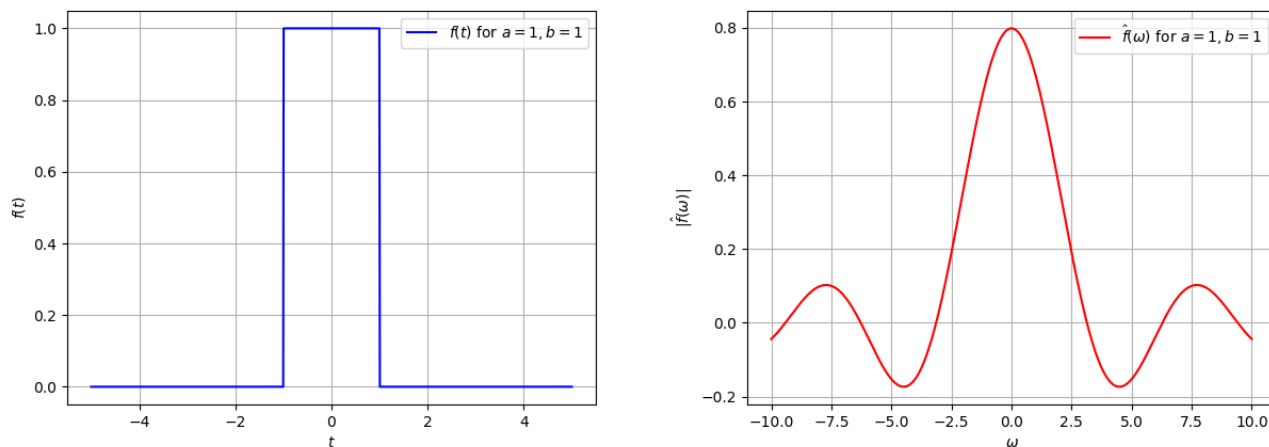
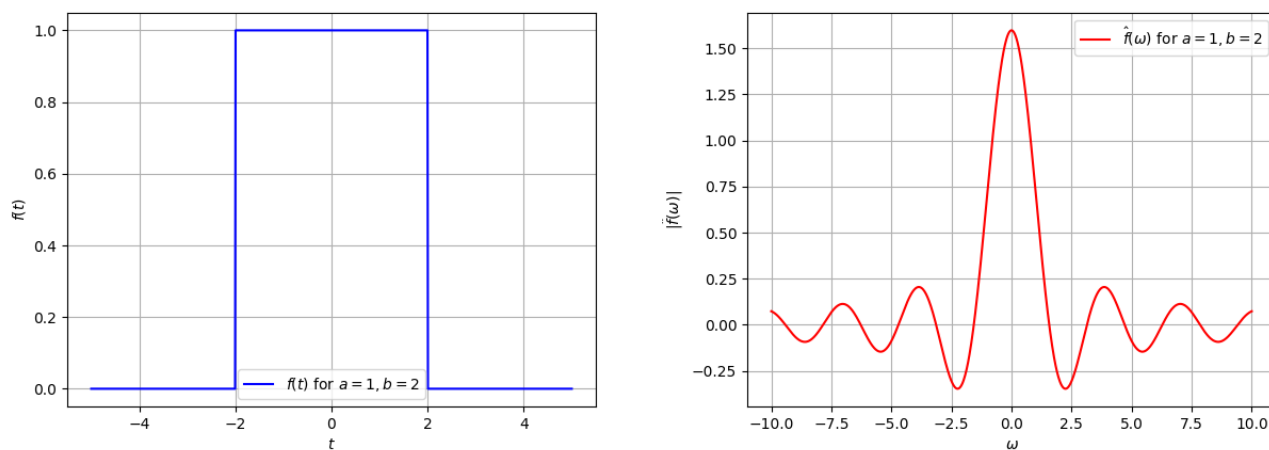
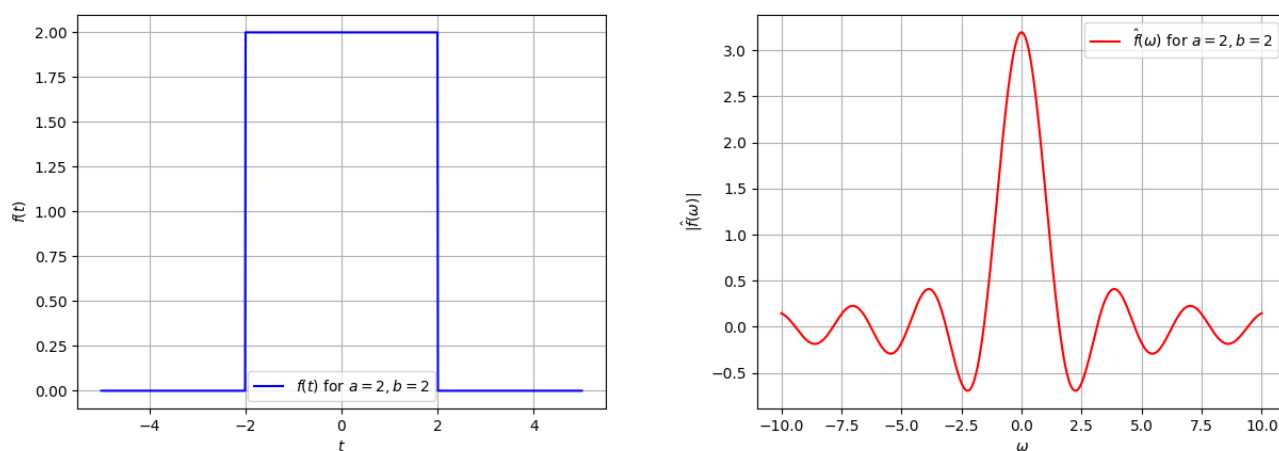
Аналитически выведем выражение Фурье-образа для этой функции:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{a e^{i\omega t}}{-\sqrt{2\pi} i \omega} \Big|_{-b}^b = \frac{a (e^{i\omega b} - e^{-i\omega b})}{\omega i \sqrt{2\pi}} = \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = 2 \sin \omega b \Big/ = \frac{2a \sin \omega b}{\omega \sqrt{2\pi}} = \\ &= \Big/ \text{sinc формула} \Big/ = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc } \omega b \end{aligned}$$

Для соответствующего набора значений (a, b) выразим образы:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc } \omega \quad (1, 1) \quad \sqrt{\frac{8}{\pi}} \text{sinc } 2\omega \quad (2, 1) \quad \sqrt{\frac{32}{\pi}} \text{sinc } 2\omega \quad (2, 2)$$

Построим графики:

Рис. 1: Графики прямоугольной функции и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$ Рис. 2: Графики прямоугольной функции и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 2$ Рис. 3: Графики прямоугольной функции и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

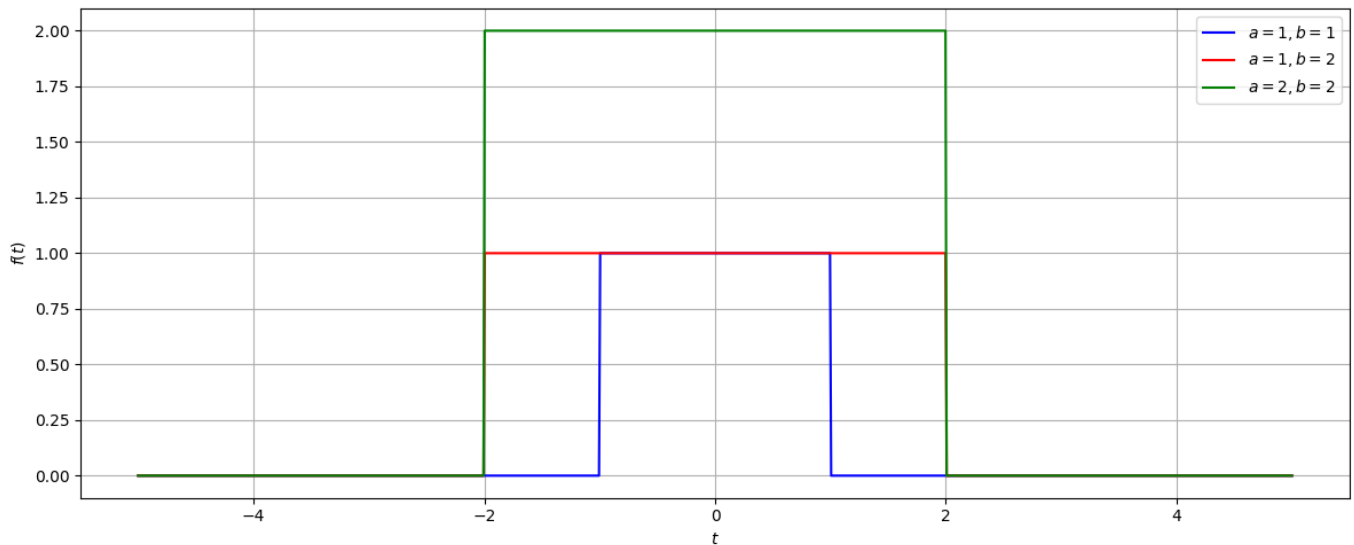


Рис. 4: Сравнительный график для функции

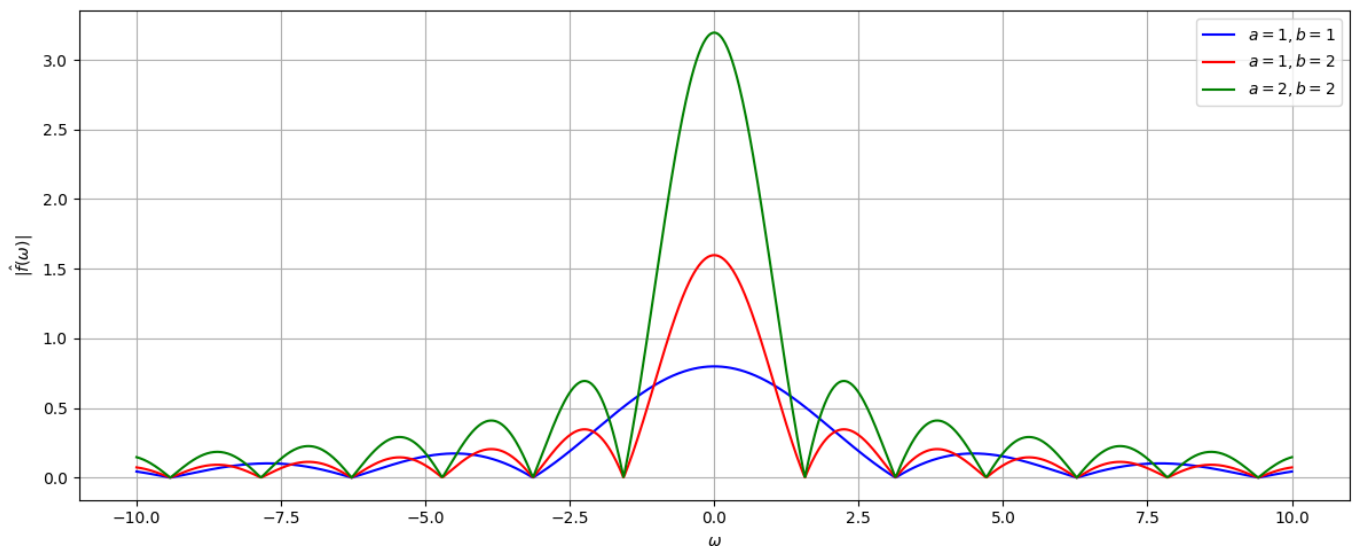


Рис. 5: Сравнительный график для Фурье-образов

Проверим выполнение равенства Парсеваля. Используем для этого программу с предыдущей лабораторной работы

```

1 (a, b) = (1, 1); ||f||**2 - ||F||**2 = 0.066377550021963
2 (a, b) = (1, 2); ||f||**2 - ||F||**2 = 0.064801734489782
3 (a, b) = (2, 2); ||f||**2 - ||F||**2 = 0.259206937959126

```

Листинг 1: Значения ошибки Парсеваля для различных коэффициентов

Отклонение по равенству Парсеваля небольшое, но довольно ощутимое. Если рассуждать о том, как именно коэффициент a и b влияют на Фурье-образ, то лучшим решением будет взглянуть на полученную нами формулу. Коэффициент a влияет только на амплитуду функции, а вот b затрагивает как амплитуду, так и частоту колебаний. Это прямое следствие из свойства масштабирования Фурье-образа. Чем уже функция, тем наоборот шире растянут Фурье-образ в частотной оси.

1.2 Треугольная функция

Теперь переходим к треугольной функции, работаем с ней:

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Для начала выведем выражение для вычисления Фурье-образа в общем виде:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \left(a - \left| \frac{at}{b} \right| \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^b \left(a - \frac{at}{b} \right) e^{-i\omega t} dt + \int_{-b}^0 \left(a + \frac{at}{b} \right) e^{-i\omega t} dt \right] = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^b \left(1 - \frac{t}{b} \right) e^{-i\omega t} dt + \int_{-b}^0 \left(1 + \frac{t}{b} \right) e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(i\omega(t+b)+1)e^{-i\omega t}}{b\omega^2} \Big|_{-b}^0 - \frac{(i\omega(t-b)+1)e^{-i\omega t}}{b\omega^2} \Big|_0^b \right) = \\ &= \frac{-a}{\omega^2 b \sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega b} + e^{i\omega b} - 2) = \frac{2}{\omega^2 b \sqrt{2\pi}} (2 - \cos \omega b) = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega b}{2}}{\omega^2 b \sqrt{2\pi}} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^2 \frac{\omega b}{2} \end{aligned}$$

Для наших наборов коэффициентов будут соответствующие формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^2 \frac{\omega}{2} \quad (1, 1) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}^2 \omega \quad (2, 1) \quad \sqrt{\frac{8}{\pi}} \text{sinc}^2 \omega \quad (2, 2)$$

И теперь построим графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b) , которые мы задали перед выполнением задания.

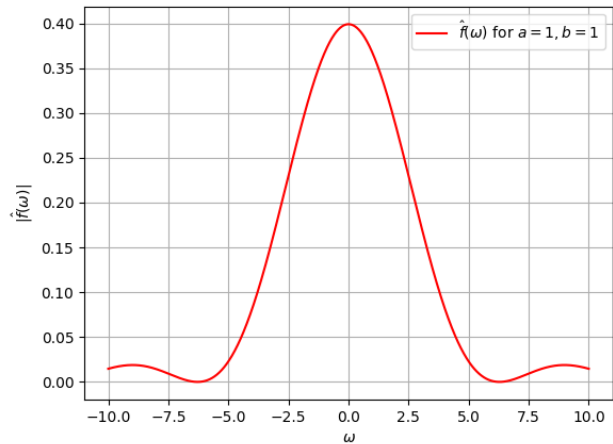
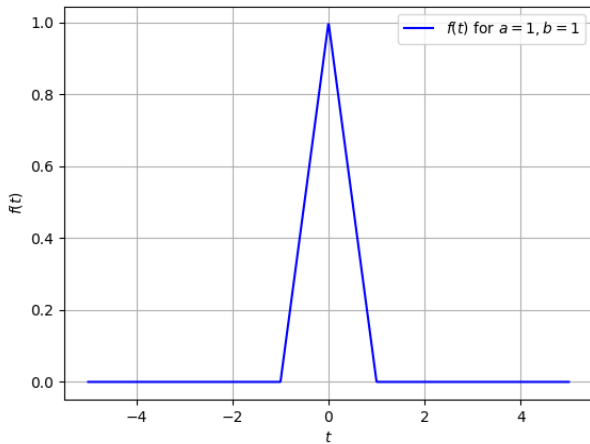
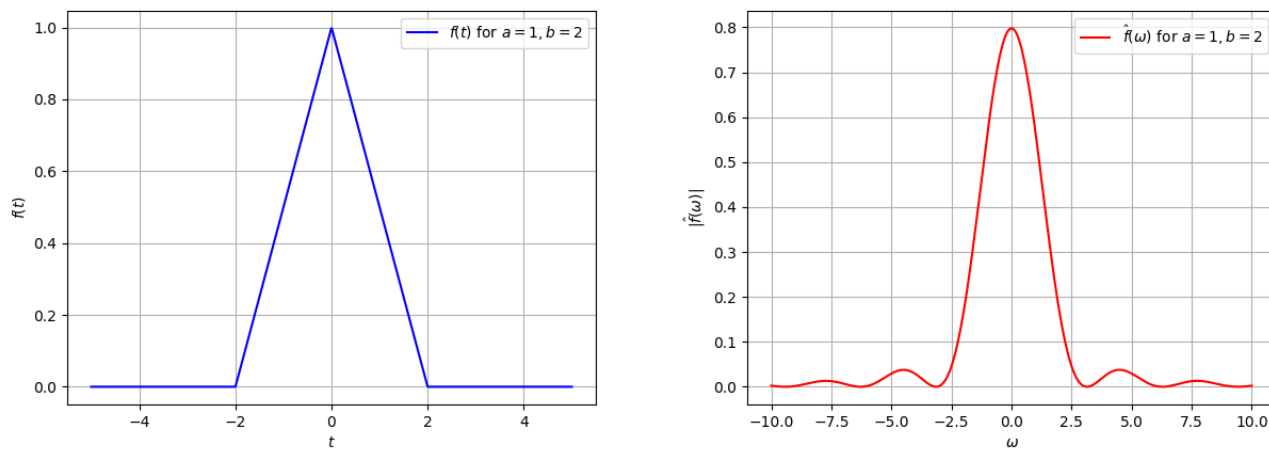
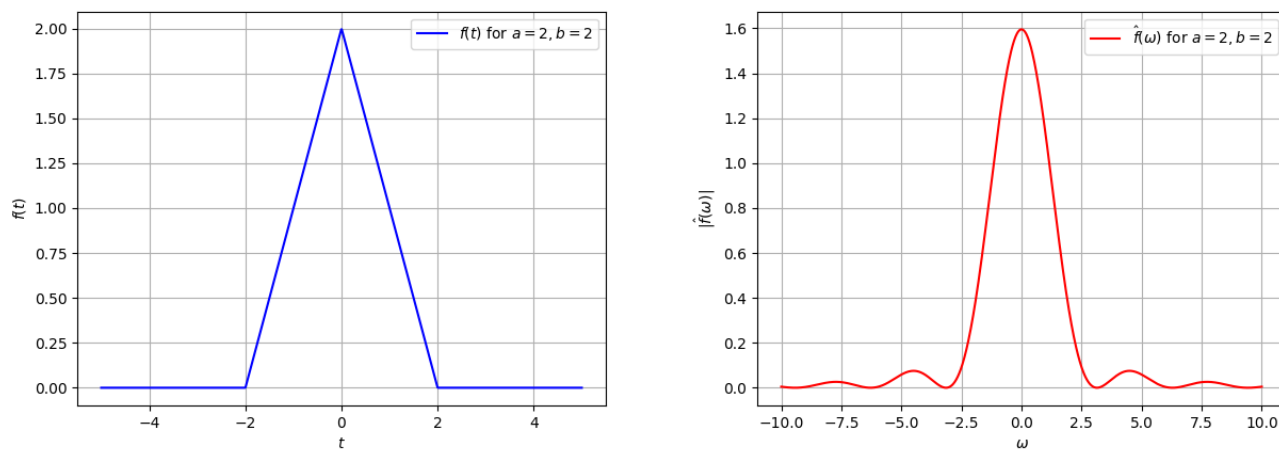


Рис. 6: Графики треугольной функции и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

Рис. 7: Графики треугольной функции и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 2$ Рис. 8: Графики треугольной функции и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

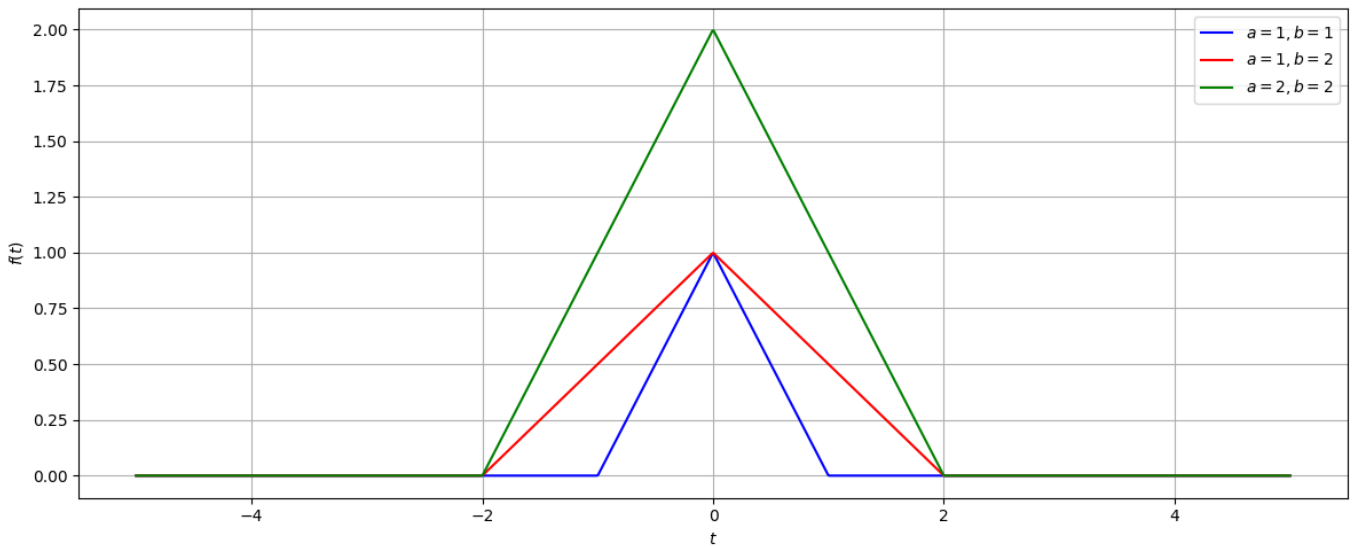


Рис. 9: Сравнительный график для функции

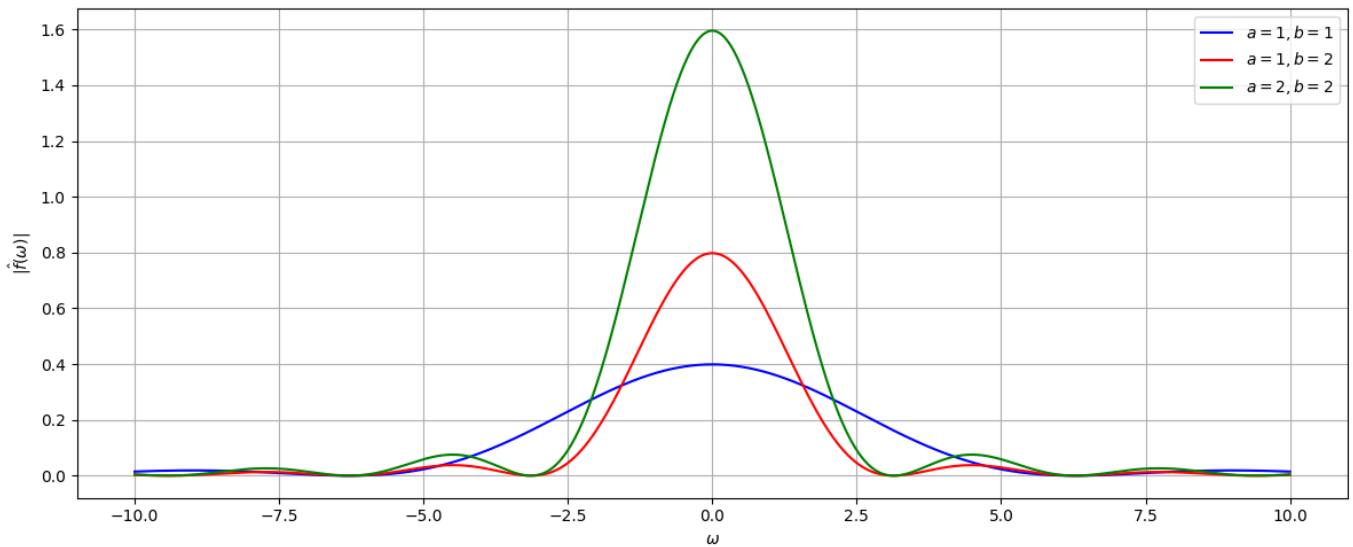


Рис. 10: Сравнительный график для Фурье-образов

Проверим выполнение равенства Парсеваля. Используем для этого программу с предыдущей лабораторной работы

```

1 (a, b) = (1, 1); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000559811899439
2 (a, b) = (1, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000180926759802
3 (a, b) = (2, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000723707039208

```

Листинг 2: Значения ошибки Парсеваля для различных коэффициентов

Точность приближения в этот раз на пару порядков выше чем при работе с прямоугольной функцией, что не может не радовать.

Как и в случае с прямоугольной функцией, a аргумент в Фурье-образе отвечает за его амплитуду, в то время как b и за амплитуду, и за частоту колебаний функции. Так что свойства те же самые. Как и везде далее, потому отмечать это не буду.

1.3 Кардинальный синус

Приступаем к функциям посложнее, теперь уже кардинальный синус:

$$f(t) = a \operatorname{sinc} bt$$

По сути Фурье-образом кардинального синуса является прямоугольная функция, что мы могли заметить еще при нахождении Фурье-образа самой прямоугольной функции.

А именно Фурье-образ равен:

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{если } b^2/\omega^2 \leq 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{|b|} & \text{иначе} \end{cases}$$

И теперь построим графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b) , которые мы задали перед выполнением задания.

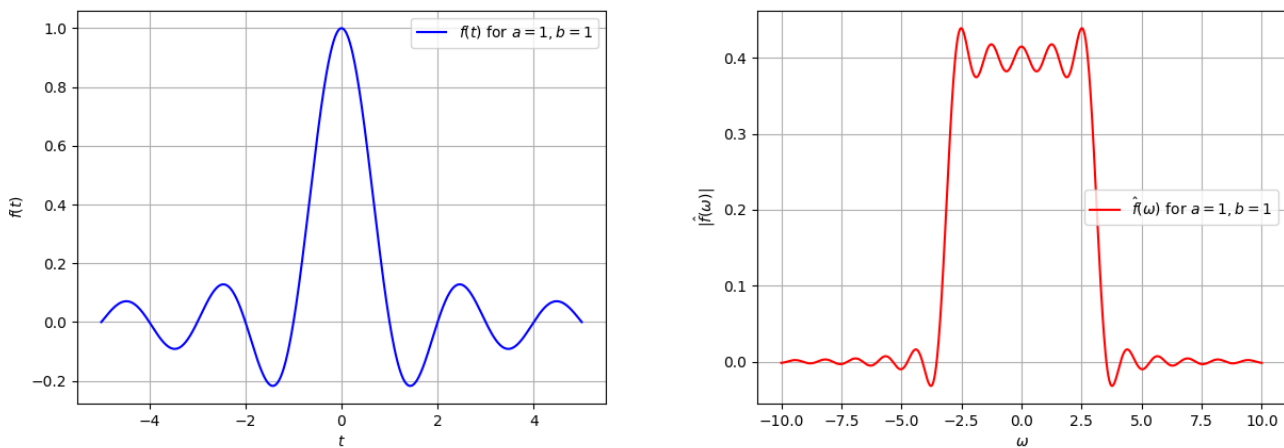


Рис. 11: Графики кардинального синуса и его Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

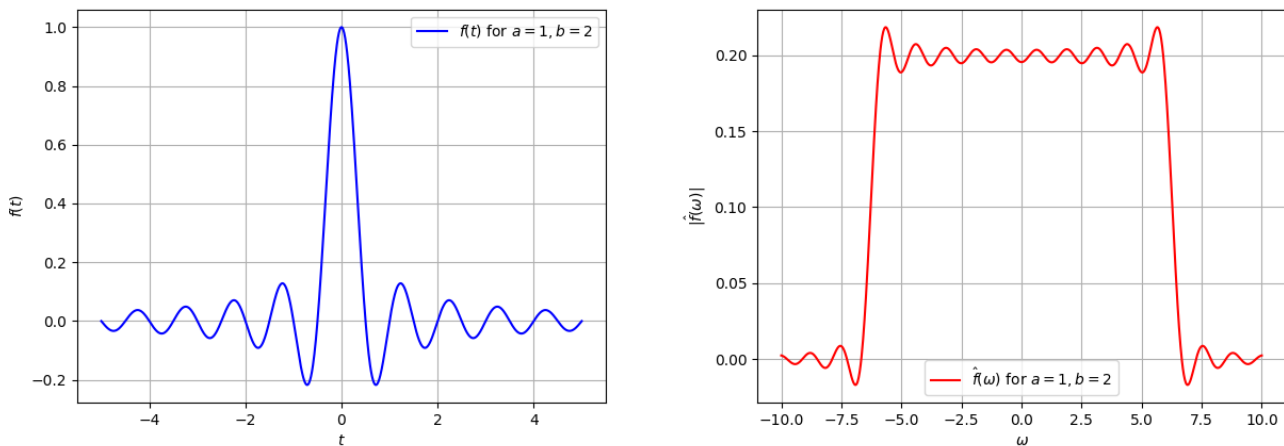


Рис. 12: Графики кардинального синуса и его Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 2$

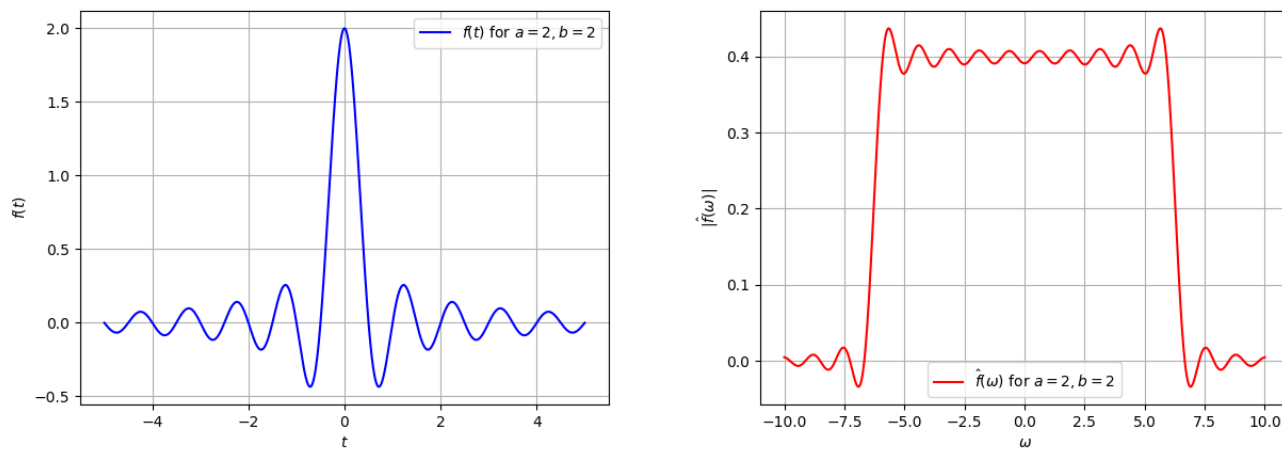
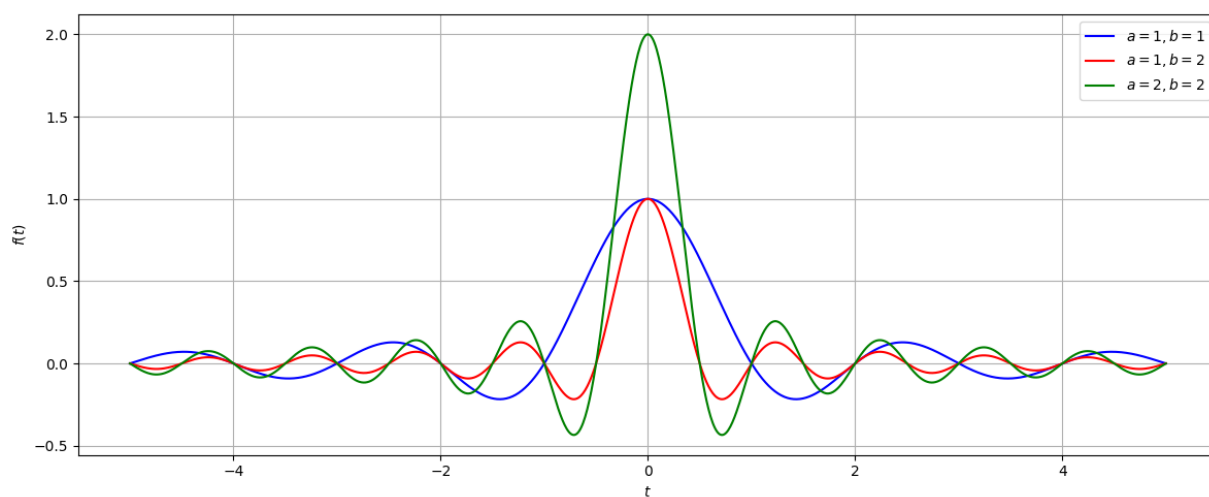
Рис. 13: Графики кардинального синуса и его Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$ 

Рис. 14: Сравнительный график для функции

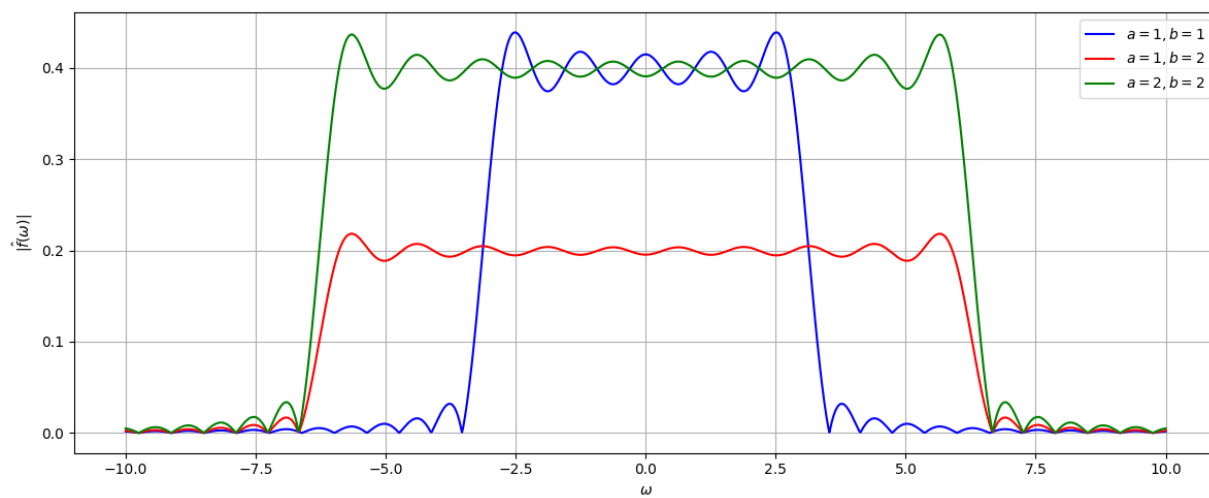


Рис. 15: Сравнительный график для Фурье-образов

И теперь уже на графиках мы вновь можем убедиться в том, что функция кардинального синуса и прямоугольная функция являются биекциями при переходе от функции к Фурье-образу и обратно. Проверим выполнение равенства Парсеваля. Используем для этого программу с предыдущей лабораторной работы:

```
1 (a, b) = (1, 1); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000009825386418
2 (a, b) = (1, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000015801729959
3 (a, b) = (2, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000063206919838
```

Листинг 3: Значения ошибки Парсеваля для различных коэффициентов

И опять радостная весть - отклонение стало еще меньше в сравнении с предыдущим случаем треугольной функции (не говоря уже о прямоугольной функции). Ошибка почти равна нулю если не считать вычислительные погрешности. Если рассуждать о влиянии a и b на вид исходной функции и Фурье-образа: параметр a прямо пропорционально влияет на амплитуду обеих функций, а параметр b прямо пропорционально влияет на частоту исходной функции и на ширину приподнятой части Фурье-образа, а также обратно пропорционально влияет на амплитуду Фурье-образа. Что и видно на графиках.

1.4 Функция Гаусса

А теперь мы будем строить Фурье-образ для функции Гаусса:

$$f(t) = a e^{-bt^2}$$

Подыскиваем в таблице формулу Фурье-образа для нее:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a e^{-\omega^2/4b}}{\sqrt{2b}}$$

Для наборов формулы будут выглядеть так:

$$\frac{e^{-\omega^2/4}}{\sqrt{2}} \quad (1, 1) \quad \frac{e^{-\omega^2/8}}{2} \quad (1, 2) \quad e^{-\omega^2/8} \quad (2, 2)$$

Пришло время строить графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b) , которые мы задали перед выполнением задания.

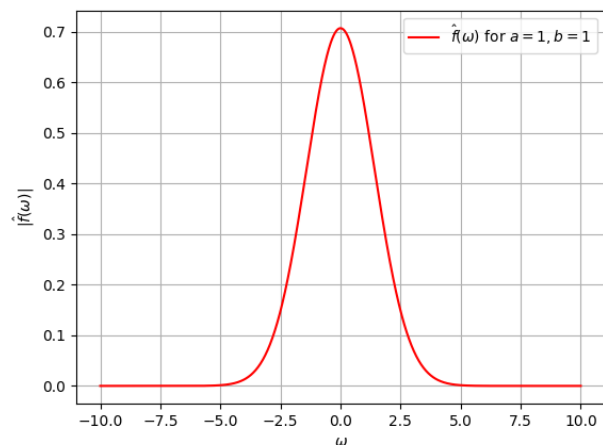
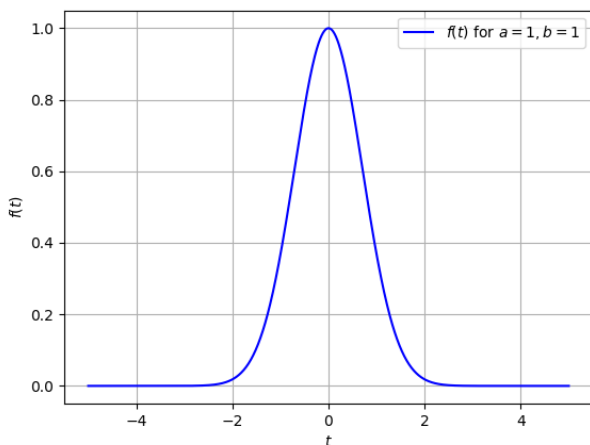
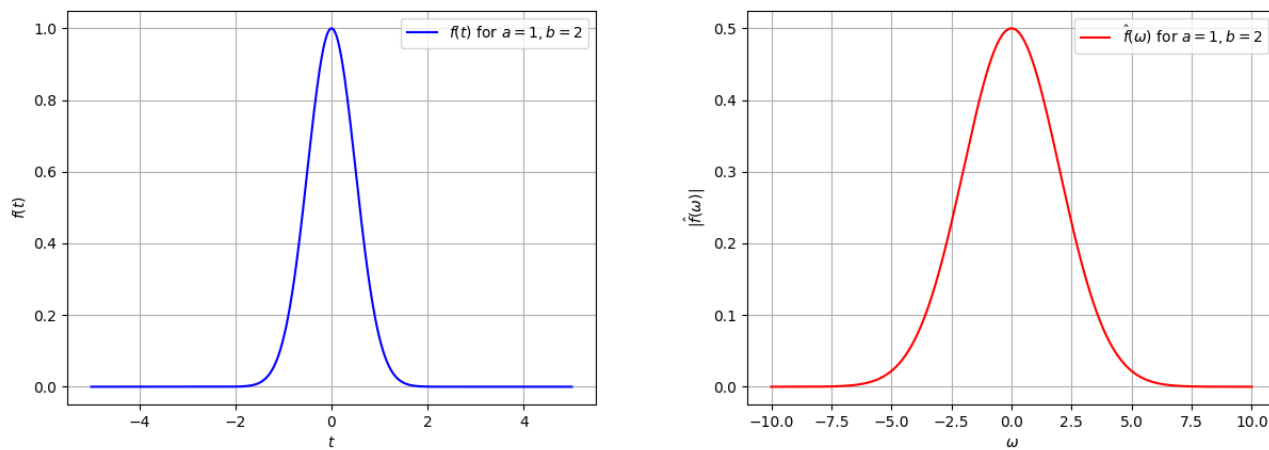
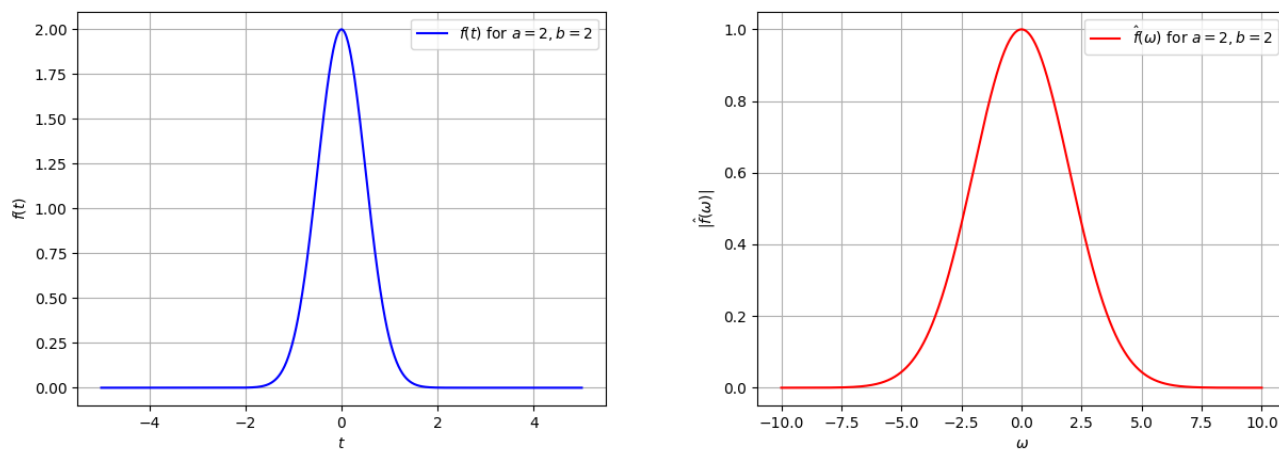


Рис. 16: Графики функции Гаусса и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

Рис. 17: Графики функции Гаусса и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 2$ Рис. 18: Графики функции Гаусса и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

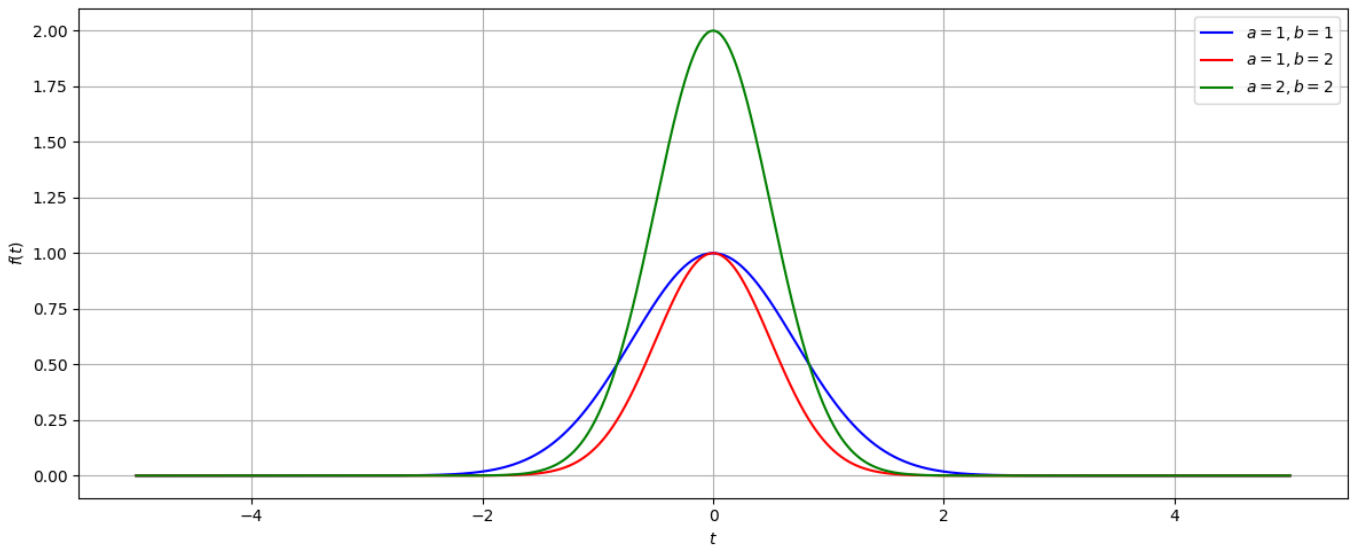


Рис. 19: Сравнительный график для функции

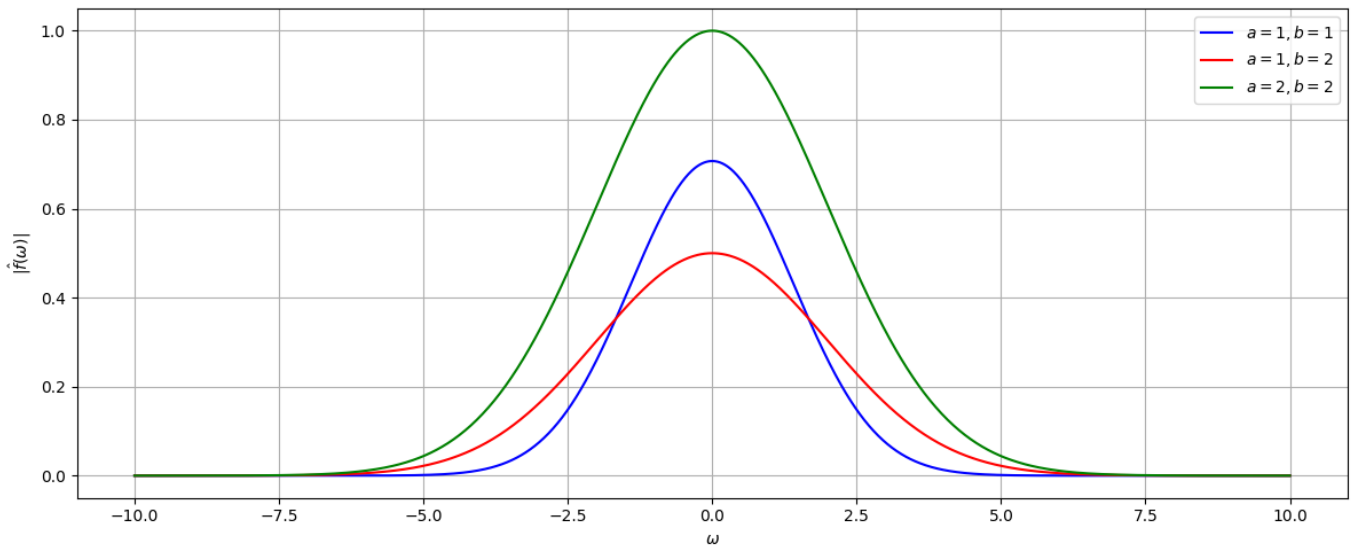


Рис. 20: Сравнительный график для Фурье-образов

Проверим выполнение равенства Парсеваля. Используем для этого программу с предыдущей лабораторной работы

```

1 (a, b) = (1, 1); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.0000000000000000
2 (a, b) = (1, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000000000001362
3 (a, b) = (2, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000000000005450

```

Листинг 4: Значения ошибки Парсеваля для различных коэффициентов

Мы получили прекрасное приближение! Отклонение по равенству парсеваля почти что равно нулю. Можно даже сказать равно, если не брать в расчет самый малейшие неточности приближения и вычислительные погрешности. В основной функции b обратно пропорционально влияет на её ширину, а a влияет прямо пропорционально на амплитуду. Для Фурье-образа с увеличением a растёт амплитуда, а изменение b прямо пропорционально изменяет её ширину и обратно пропорционально изменяет её амплитуду. Мы можем наблюдать это на графиках.

1.5 Двустороннее затухание

И наконец последняя функция двустороннего затухания:

$$f(t) = a e^{-b|t|}$$

Для нее будем выводить выражение в общем виде

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t| - i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-t(b+i\omega)} dt + \int_{-\infty}^0 e^{t(b-i\omega)} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{t(b-i\omega)}}{b-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-t(b+i\omega)}}{b+i\omega} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{b-i\omega} - \frac{e^{-\infty(b-i\omega)}}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} - \frac{e^{-\infty(b+i\omega)}}{b+i\omega} \right] = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{ab}{(b^2 + \omega^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

Выведем формулы для наших конкретных наборов коэффициентов:

$$\frac{1}{(1 + \omega^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (1, 1) \quad \frac{2}{(4 + \omega^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (1, 2) \quad \frac{4}{(4 + \omega^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2, 2)$$

Теперь построим к ним графики:

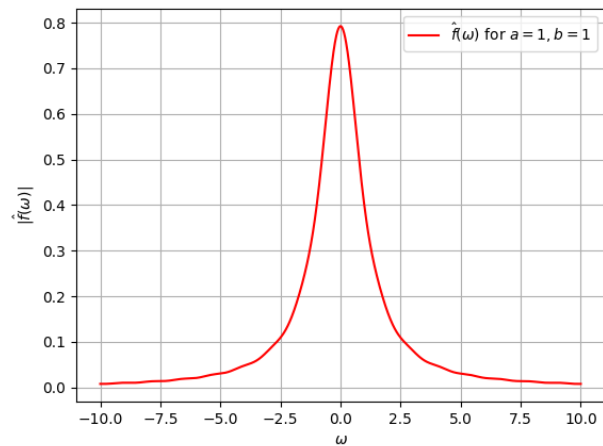
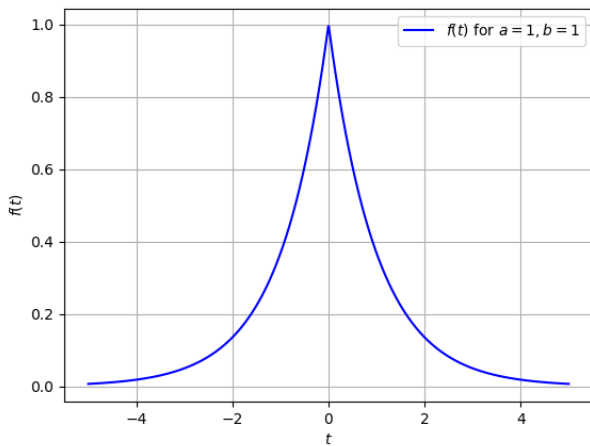
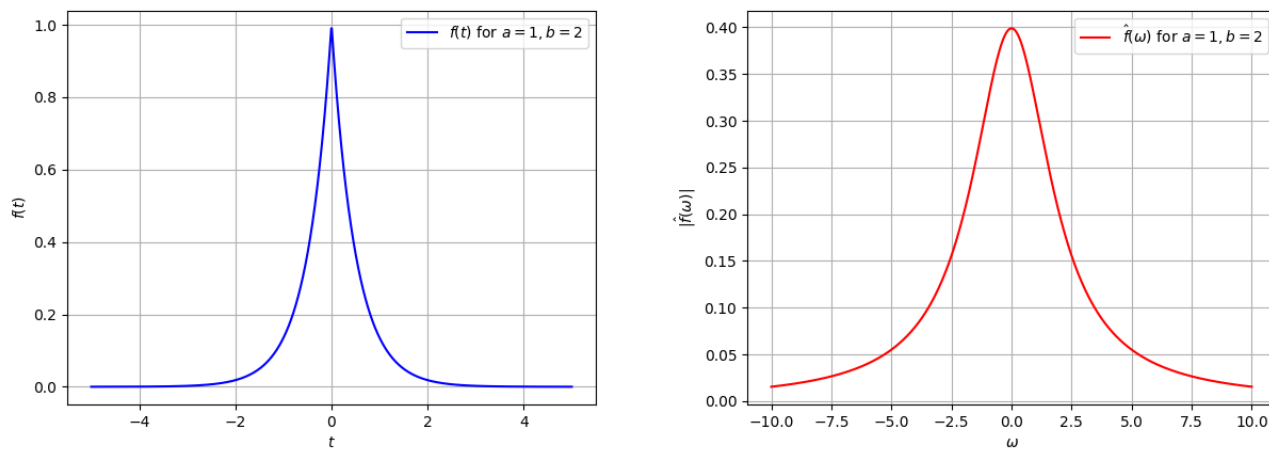
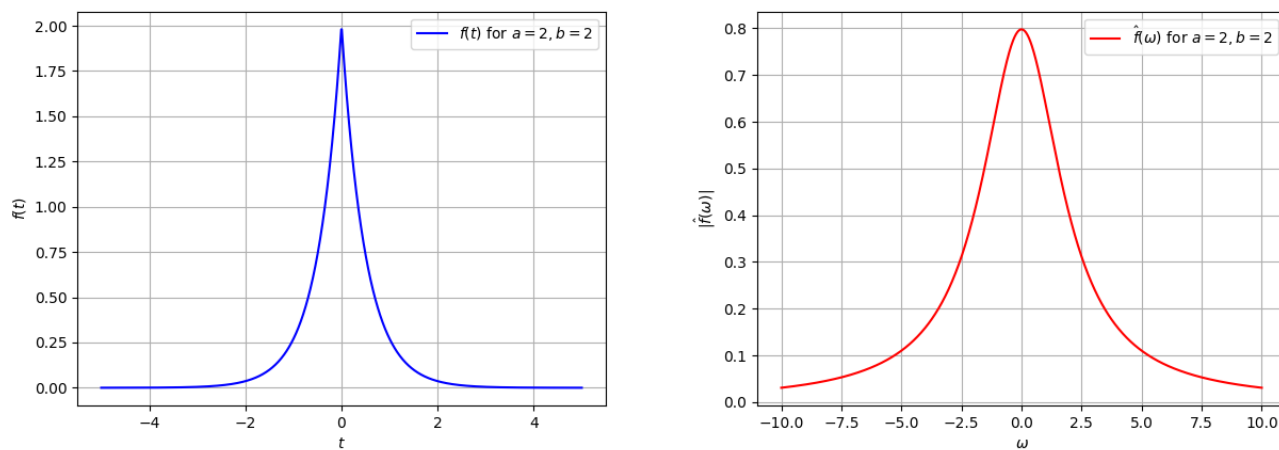


Рис. 21: Графики двустороннего затухания и его Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

Рис. 22: Графики двустороннего затухания и его Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 2$ Рис. 23: Графики двустороннего затухания и его Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

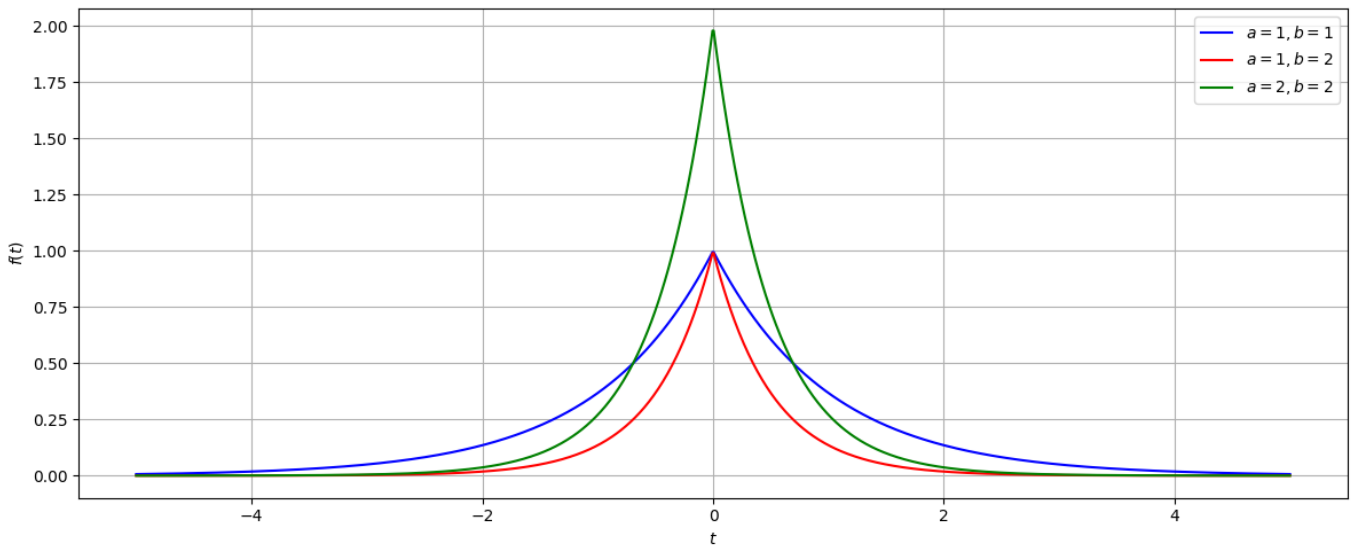


Рис. 24: Сравнительный график для функции

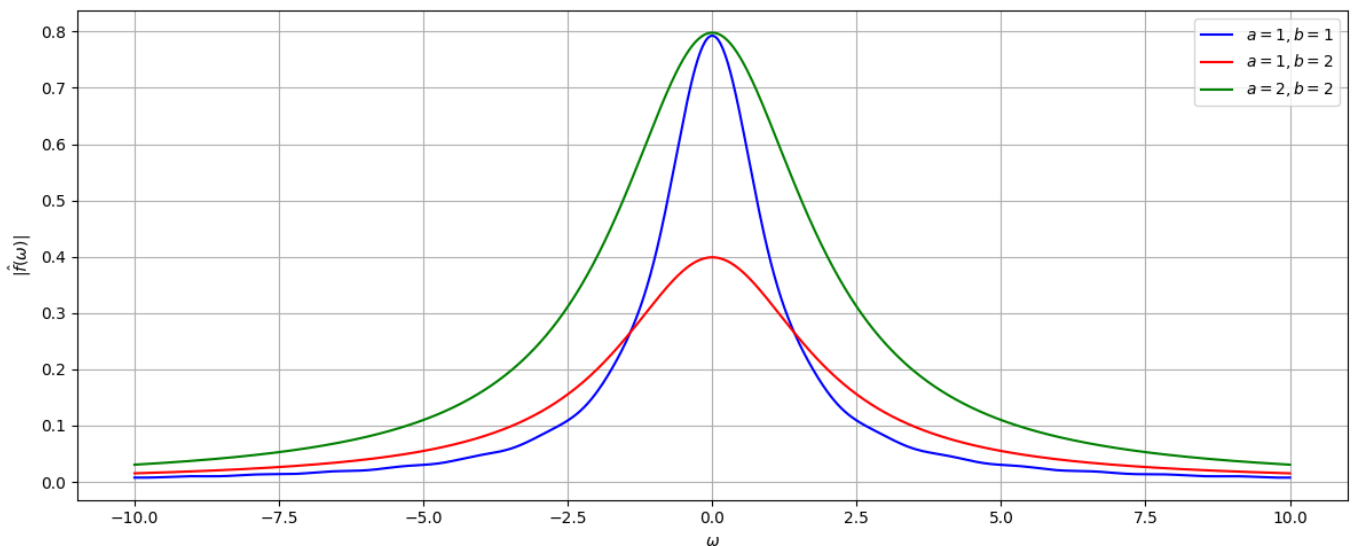


Рис. 25: Сравнительный график для Фурье-образов

Проверим выполнение равенства Парсеваля. Используем для этого программу с предыдущей лабораторной

```

1 (a, b) = (1, 1); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.000424245200725
2 (a, b) = (1, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.001615361989289
работы (a, b) = (2, 2); ||f||^2 - ||F||^2 = 0.006461447957154

```

Листинг 5: Значения ошибки Парсеваля для различных коэффициентов

Видно, что мы имеем дело с довольно точным приближением к равенству Парсеваля, а значит что мы справились хорошо. В обычной функции b влияет на широту основания треугольника, а a — на длину его высоты. И по формуле Фурье-образа, с изменением a будет меняться амплитуда кардинального синуса, а изменение b приводит к изменению не только амплитуды, но и частоты. Подтверждаем это по графикам.

Задание №2. Комплексное.

Для задания вооружимся функцией двустороннего затухания из первого задания с параметрами $a = 2, b = 2$, а для сдвига будем использовать коэффициенты из набора $c = \{-3, -1, 1, 4\}$. Определим все получившиеся

функции:

$$f(t) = 2e^{-2|t|}$$

Определим функцию $g(t) = f(t + c)$. Тогда с учётом набора c она приобретает такой вид:

$$g(t) = 2e^{-2|t-3|} \text{ для } c = -3 \quad g(t) = 2e^{-2|t-1|} \text{ для } c = -1$$

$$g(t) = 2e^{-2|t+1|} \text{ для } c = 1 \quad g(t) = 2e^{-2|t+4|} \text{ для } c = 4$$

Но преобразовывать функцию к Фурье-образу мы будем в общем виде $f(t + c)$ и только затем уже подставлять конкретные значения c :

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|t+c|} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|u|} e^{-i\omega(u-c)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega c} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|u|} e^{-i\omega u} du \\ &= 2e^{i\omega c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-2u} e^{-i\omega u} du + \int_{-\infty}^0 e^{2u} e^{-i\omega u} du \right) = 2e^{i\omega c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-u(2+i\omega)} du + \int_0^{\infty} e^{-u(2-i\omega)} du \right) \\ &= 2e^{i\omega c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2+i\omega} + \frac{1}{2-i\omega} \right) = 2e^{i\omega c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2-i\omega+2+i\omega}{(2+i\omega)(2-i\omega)} \right) = 2e^{i\omega c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4}{4+\omega^2} \cdot \hat{g}(\omega) = \frac{8e^{i\omega c}}{\sqrt{2\pi}(4+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Сравнивая с Фурье-образом треугольной функции без сдвигов при тех же коэффициентах выясняем, что разница между $\hat{f}(\omega)$ и $\hat{g}(\omega)$ в множителе $e^{i\omega c}$, который нам сейчас и будет интересен. Рассмотрим графики функции $g(t)$ с разными сдвигами:

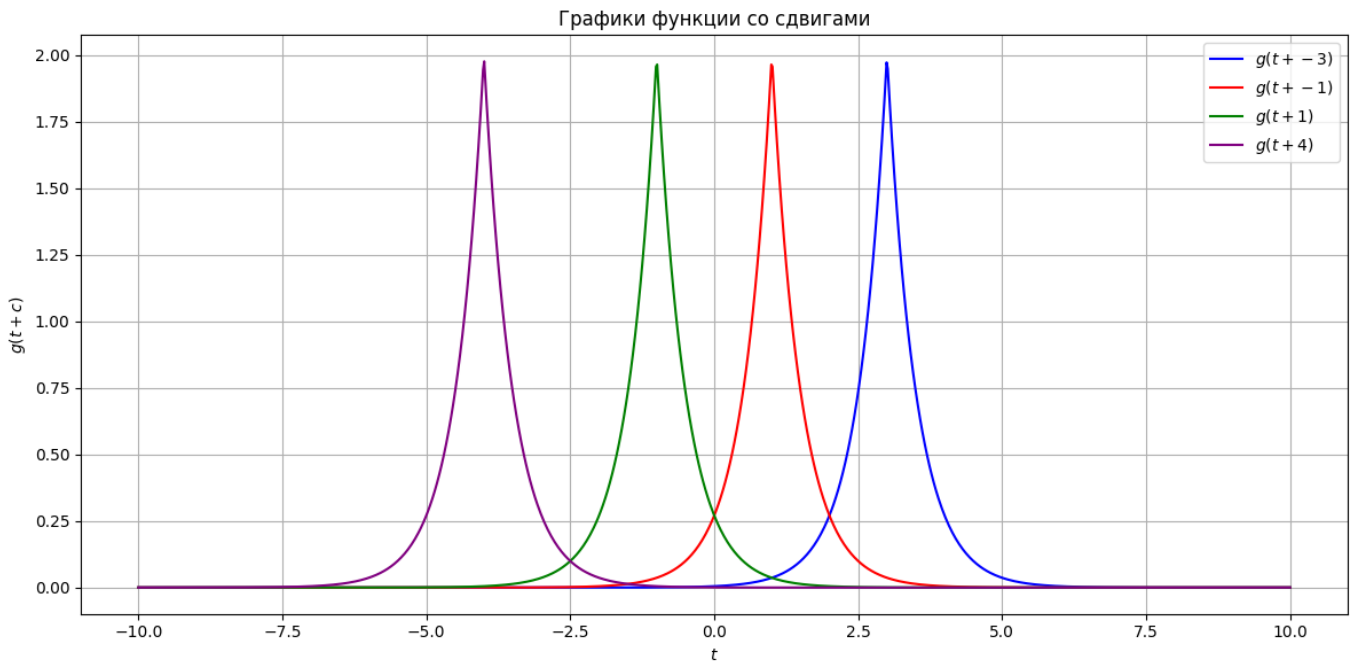
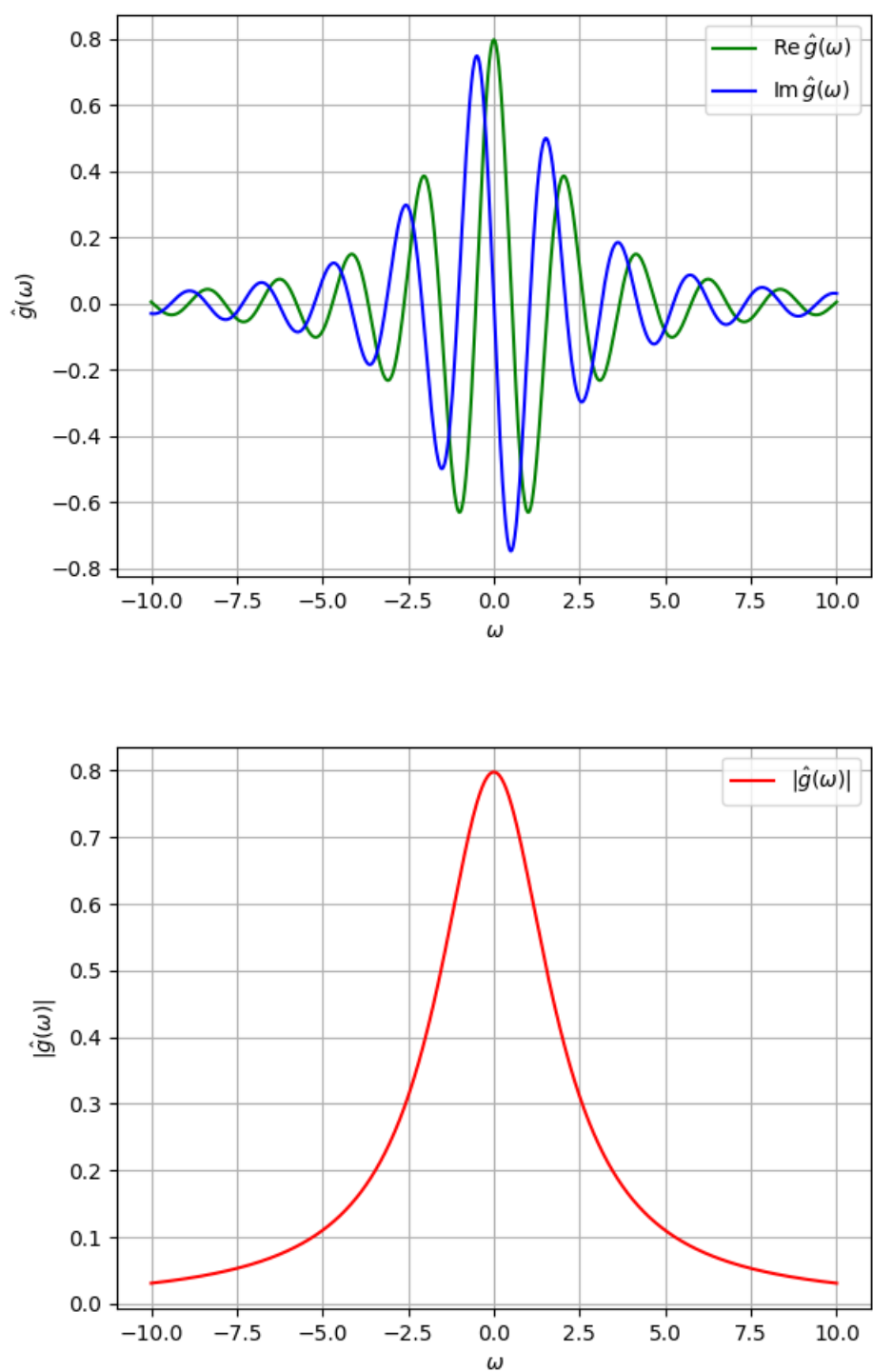
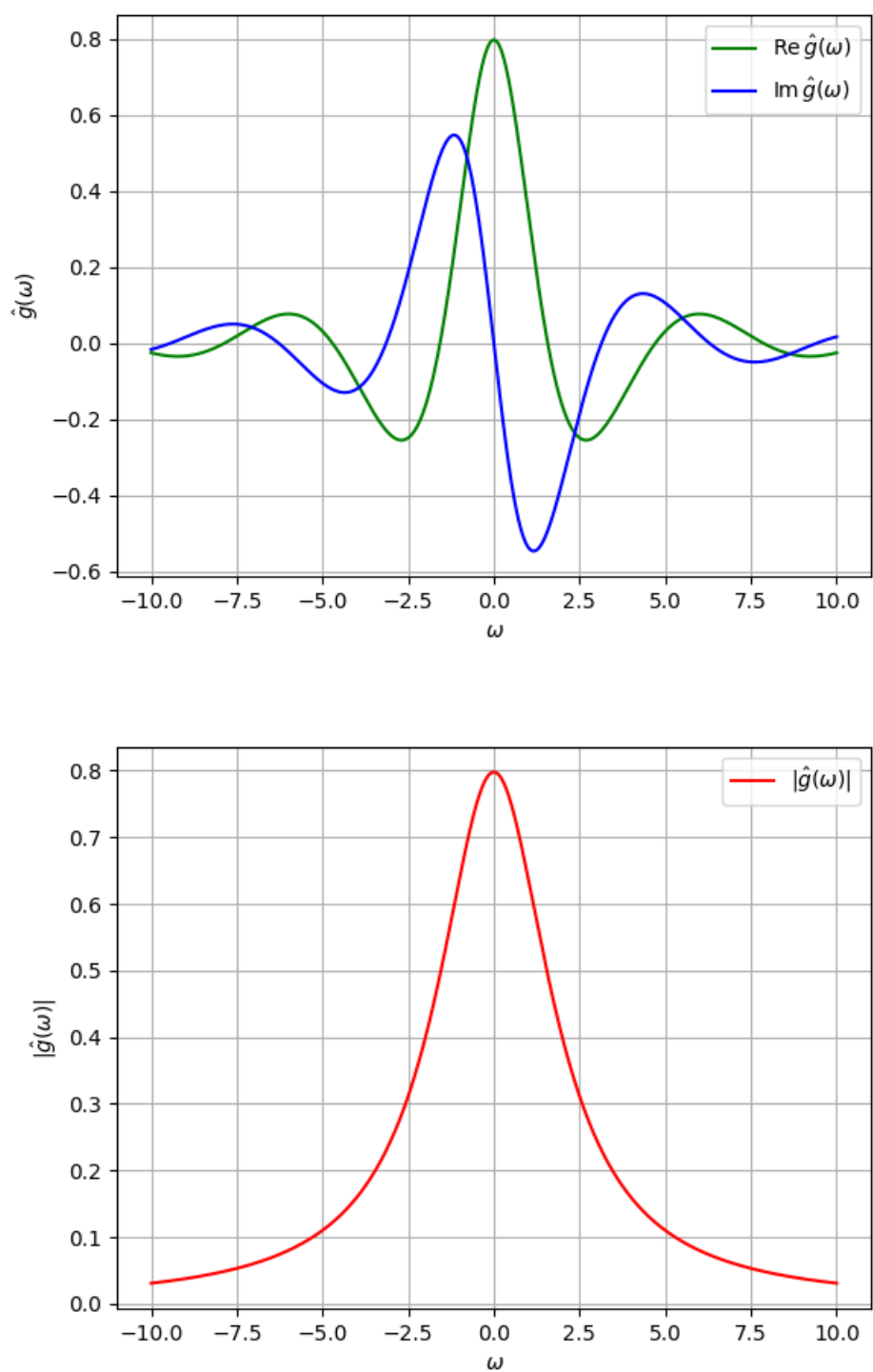
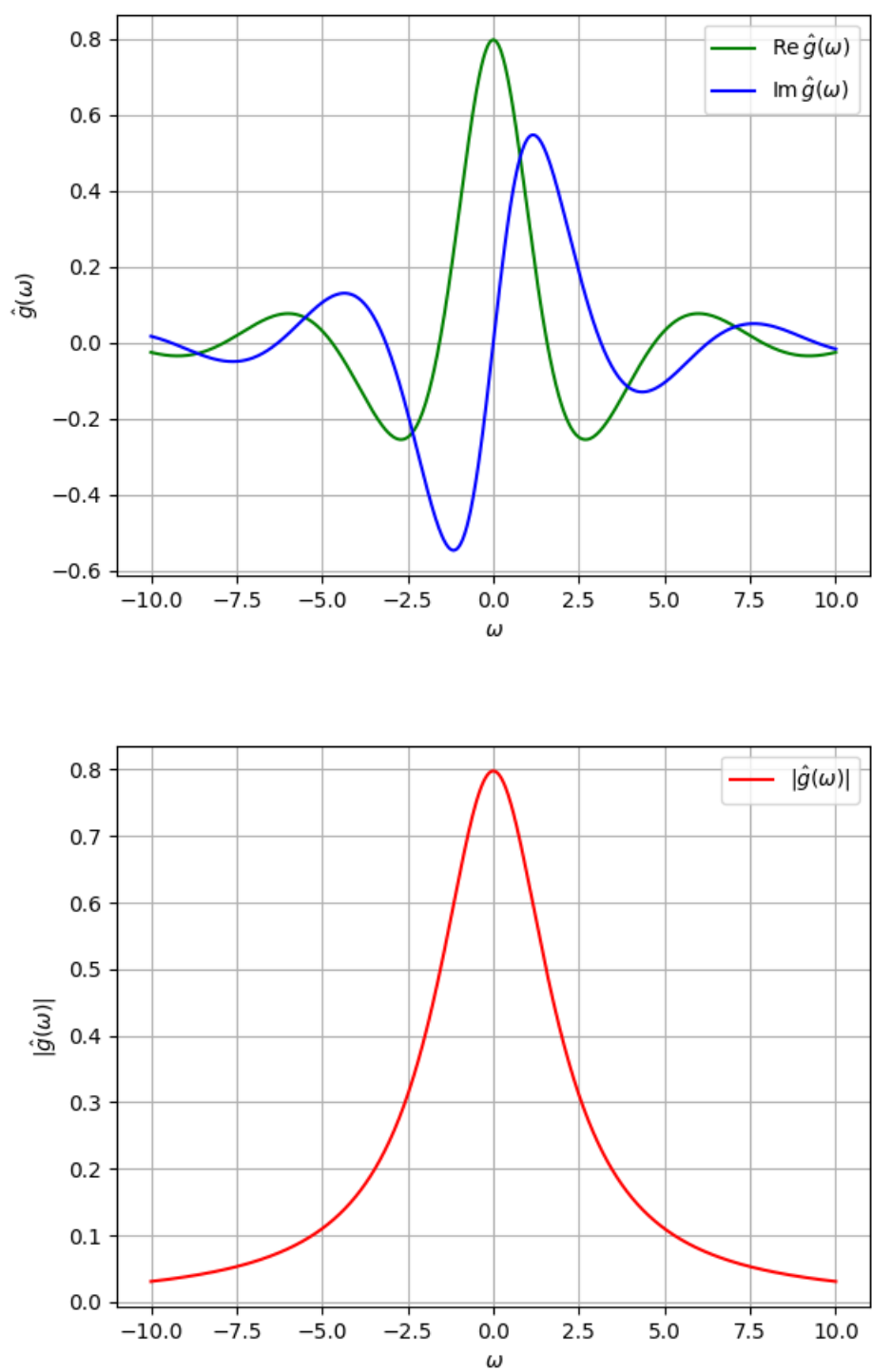


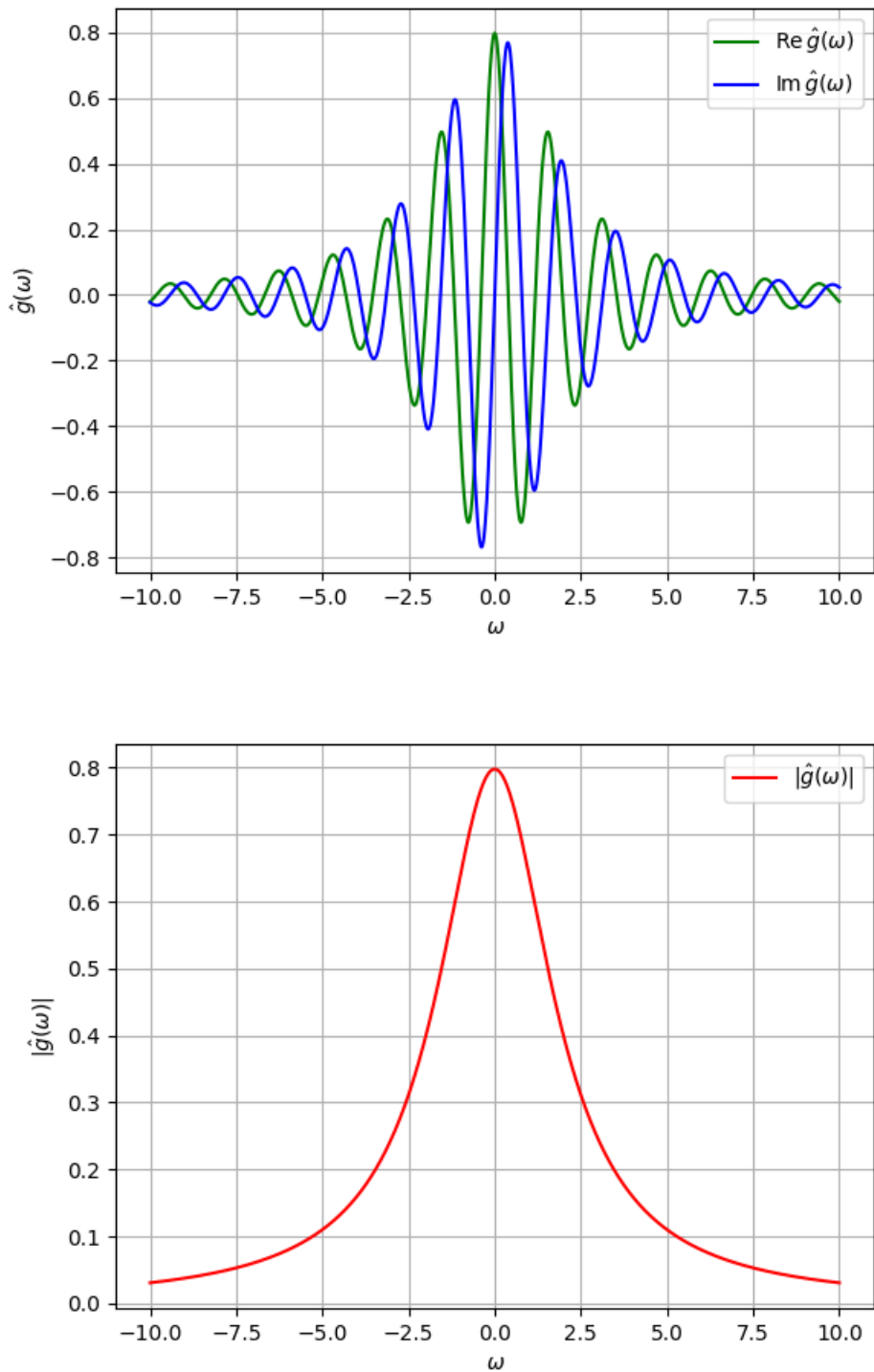
Рис. 26: Графики функции $g(t)$ со сдвигами

И теперь построим для каждого из сдвигов c графики с действительной и мнимой частями Фурье-образа и модулем Фурье-образа.

Рис. 27: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = -3$

Рис. 28: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = -1$

Рис. 29: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = 1$

Рис. 30: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = 4$

При рассмотрении результатов видно, что амплитудные значения действительной и мнимой компонент Фурье-образа сохраняют постоянство, в то время как увеличение параметра $|c|$ приводит к пропорциональному возрастанию частот $\text{Re } \hat{g}(\omega)$ и $\text{Im } \hat{g}(\omega)$. Полярность коэффициента c определяет локализацию мнимой части Фурье-образа: положительные значения ($c > 0$) смещают её вправо, отрицательные ($c < 0$) – влево от оси ординат. Действительная составляющая Фурье-образа демонстрирует симметричность относительно оси ординат.

Характерно, что модуль Фурье-образа демонстрирует инвариантность при различных сдвигах исходной

функции, структурно напоминая вещественный Фурье-образ несмещённой функции.

Задание №3. Музыкальное.

Для начала вспомним унитарное преобразование Фурье к частоте ν :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad (\text{обратное преобразование})$$

Я выбрал аккорд 28 за его драматичность подставить последнему заданию. Преобразовал его в массив амплитуд для обработки. Приступим к анализу:

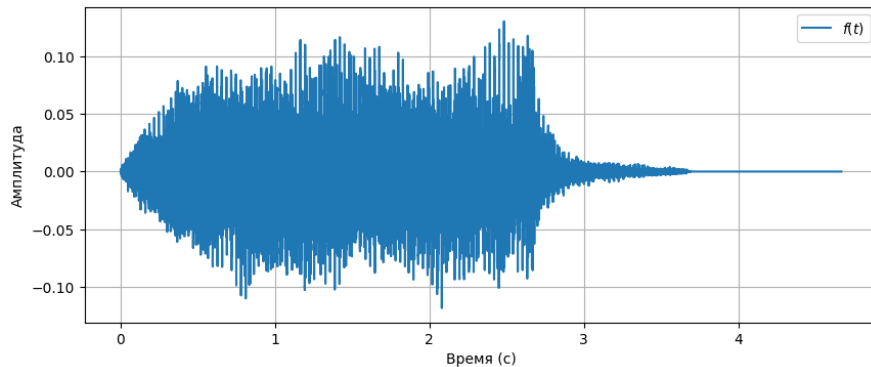


Рис. 31: График зависимости амплитуды от времени

Теперь применим преобразование Фурье и вычленим самые яркие частоты из графика его модуля:

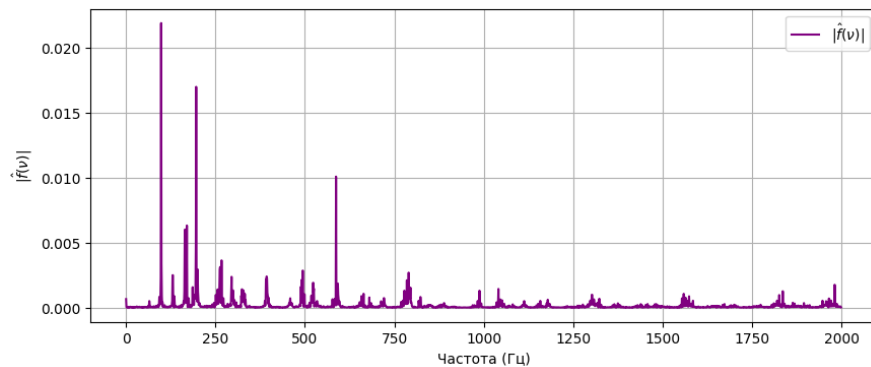


Рис. 32: Модуль Фурье-образа аудиосигнала

На графике особенно выделяются три ноты на частотах 98, 196 и 587 довольно низких, что мы и можем услышать сами. Сопоставив их с таблицей нот получим, что наш аккорд состоит из нот A#1, A#2 и F4.

Я попробовал повторить те же ноты на [виртуальной клавиатуре](#). Вышло не так как ожидалось, но как практика для не разбирающегося в музыке человека мне показалось полезным.

Вывод

В этой лабораторной работе я изучил взаимосвязь функции и ее параметров с Фурье-образом, а также дополнительно на практике опробовал воспроизвести аккорд по составляющим ее нотам при помощи преобразования Фурье.