

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1
Формы представления линейных динамических систем

Студенты: Загайнов А.А.
Поток: Лин САУ Р23 бак 1.1.2
Вариант: 11
Преподаватели: Перегудин. А.А., Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Одноканальная система в форме вход-выход	3
Задание 2. Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход	5
1. Каноническая управляемая форма	5
2. Каноническая наблюдаемая форма	6
3. Каноническая диагональная форма	6
Задание 3. Многоканальная система в форме вход-выход	9
Задание 4. Многоканальная система в форме вход-состояние-выход	11
Вывод	13

Задание 1. Одноканальная система в форме вход-выход

Для задания вооружимся коэффициентами $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0$ для моего варианта:

$$a_2 = 6, \quad a_1 = 11, \quad a_0 = 6$$

$$b_2 = 8, \quad b_1 = 1, \quad b_0 = 5$$

На основе них соберем простую линейную ДУ третьего порядка:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 8\ddot{u} + \dot{u} + 5u$$

Нашей главной целью будет составить структурную схему одноканальной линейной динамической системы на основе этого ДУ. Для этого воспользуемся некоторыми преобразованиями, которые помогут упростить задачу.

Получим форму с заменой производных на оператор производной p и поделим на p наивысшей степени:

$$p^3y + 6p^2y + 11py + 6y = 8p^2u + pu + 5u$$

$$y = \frac{1}{p}(8u + \frac{1}{p}u + \frac{1}{p^2}5u - 6y - \frac{1}{p}11py - \frac{1}{p^2}6y)$$

В таком виде работать намного проще - соберем наконец схему:

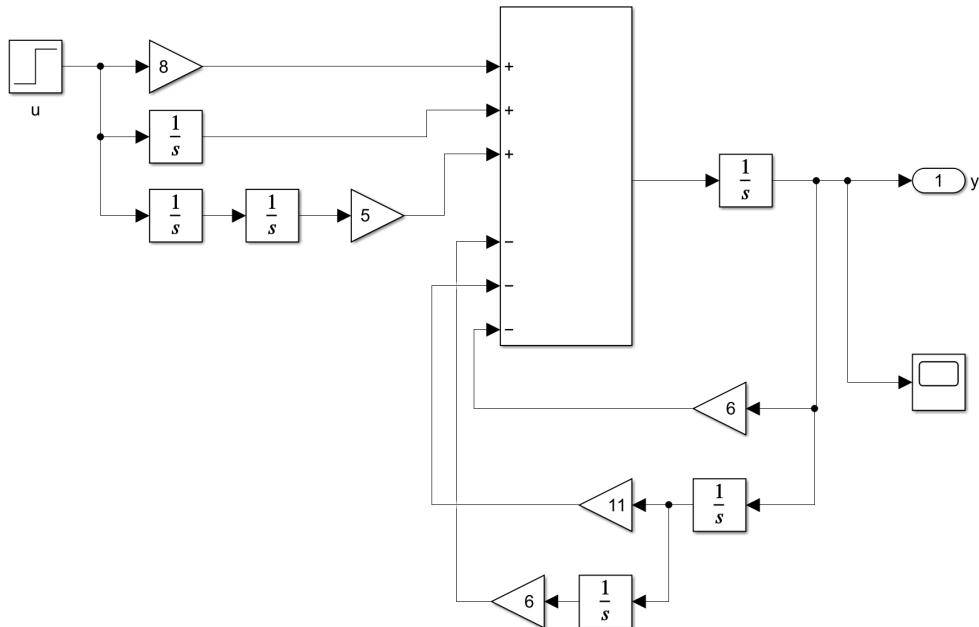


Рис. 1: Схема системы

Протестируем полученную систему и посмотрим на графики входных и выходных сигналов при $u(t) = 1$ и нулевых начальных условиях.

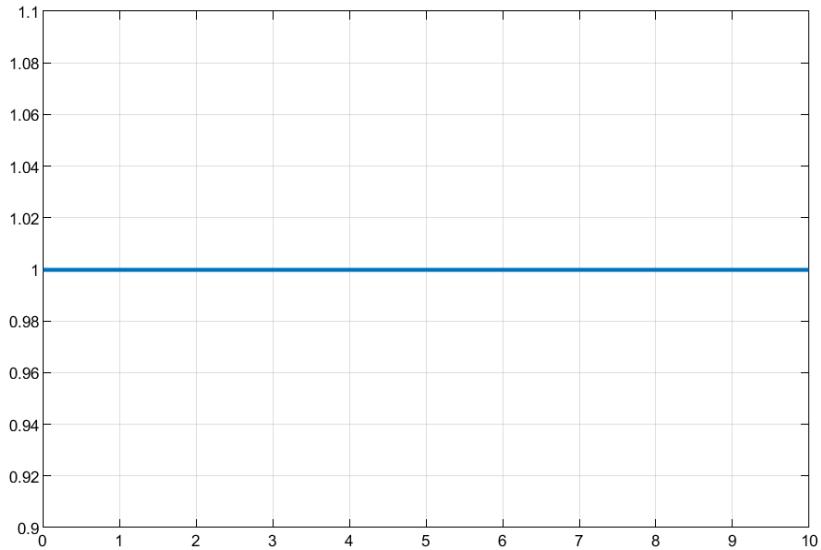


Рис. 2: График $u(t)$

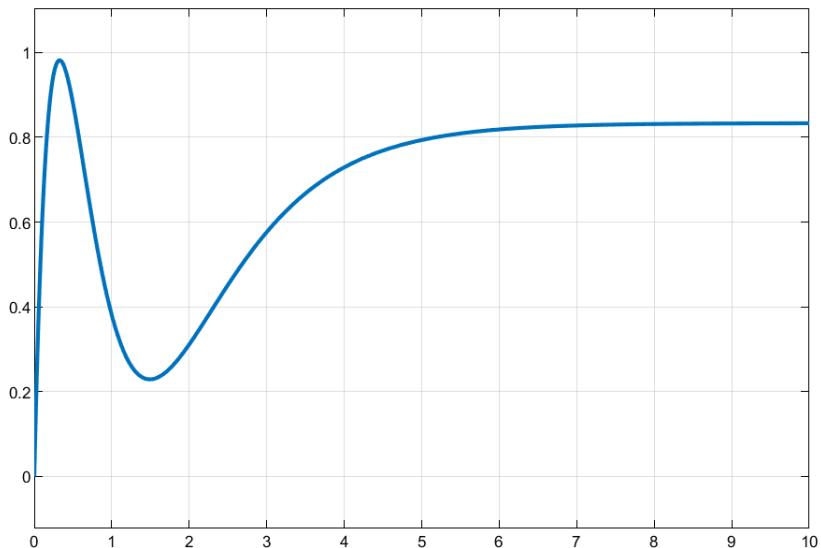


Рис. 3: График $y(t)$

Вывод:

В рамках первого задания я разработал схему для самого простого случая одноканальной линейной динамической системы и протестировал ее.

Задание 2. Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход

Перейдем к более комплексным задачам - для начала выведем передаточную функцию системы из первого задания. Задача простая и не требует дополнительных математических выкладок:

$$W(p) = \frac{8p^2 + p + 5}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

Теперь же возьмемся за преобразование нашей В-В формы в В-С-В форму. Построим сразу три формы - каноническую управляемую, каноническую наблюдаемую и каноническую диагональную.

1. Каноническая управляемая форма

При построении сразу же воспользуемся шаблонами из лекции, и на основе параметров нашей системы получим:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$y = [5 \ 1 \ 8] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Перезапишем из матричной формы в систему уравнений для большего удобства адаптации системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 21 \end{cases} \quad (3)$$

$$y = 5x_1 + x_2 + 8x_3 \quad (4)$$

Наконец, получим саму схему:

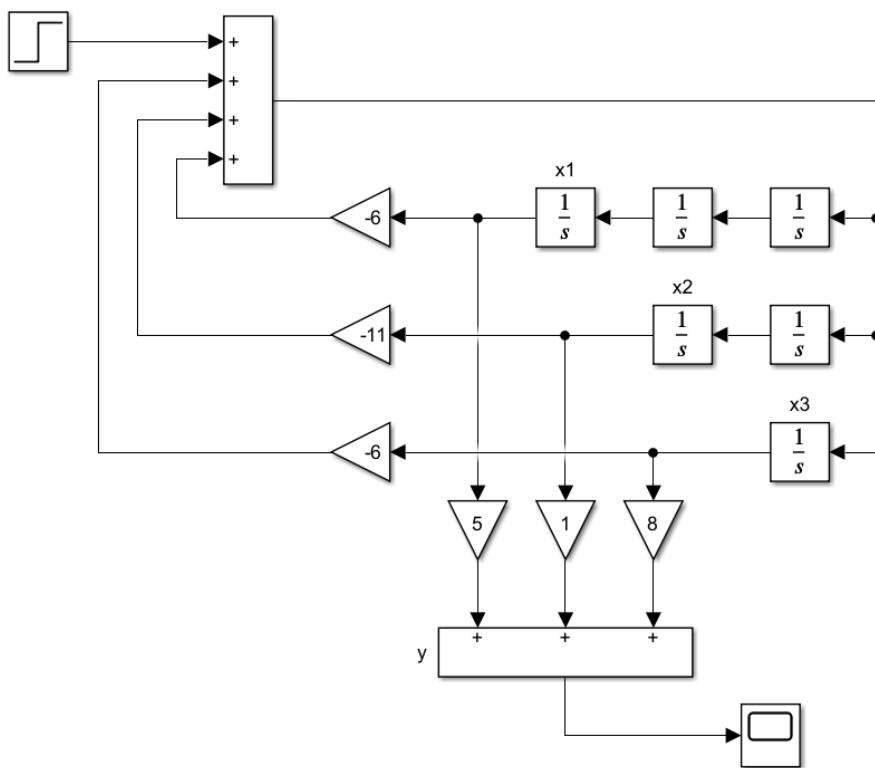


Рис. 4: Схема канонической управляемой формы

2. Каноническая наблюдаемая форма

Повторим этот же процесс, но с канонической управляемой формой. Для начала подставим в шаблон коэффициенты:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Перепишем в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_3 + 5u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 11x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - 6x_3 + 8u \end{cases} \quad (5)$$

$$y = x_3 \quad (6)$$

Получим схему:

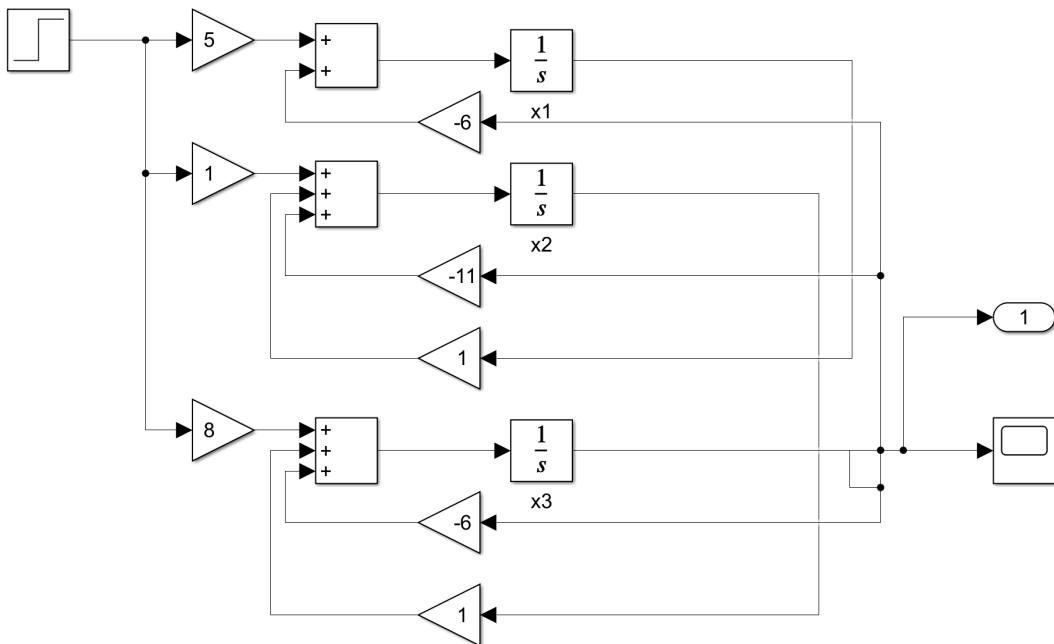


Рис. 5: Схема канонической наблюдаемой формы

3. Каноническая диагональная форма

Примемся за самую неприятную в составлении форму. Первым делом необходимо провести некоторые математические преобразования - передаточную функцию разобьем на три составляющие методом неопределенных коэффициентов(математические выкладки этого метода не добавляю по причине неважности для процесса):

$$W(p) = \frac{8p^2 + p + 5}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{6}{p+1} - \frac{35}{p+2} + \frac{37}{p+3}$$

Получившаяся запись имеет все необходимые для нас значения, для получения диагональной формы по шаблону с лекции:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -35 \\ 37 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Переведем в вид системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 6u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 35u \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + 37u \end{cases} \quad (7)$$

$$y = x_1 + x_2 + x_3 \quad (8)$$

Получим схему:

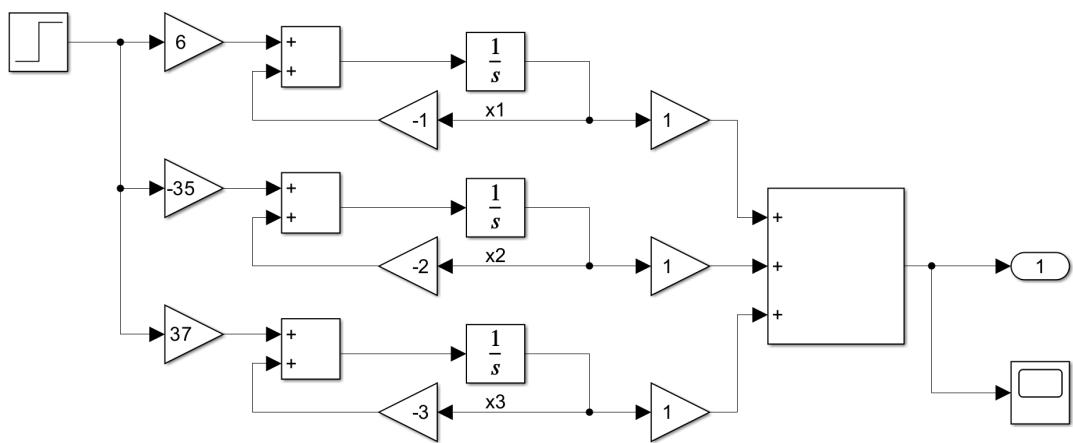
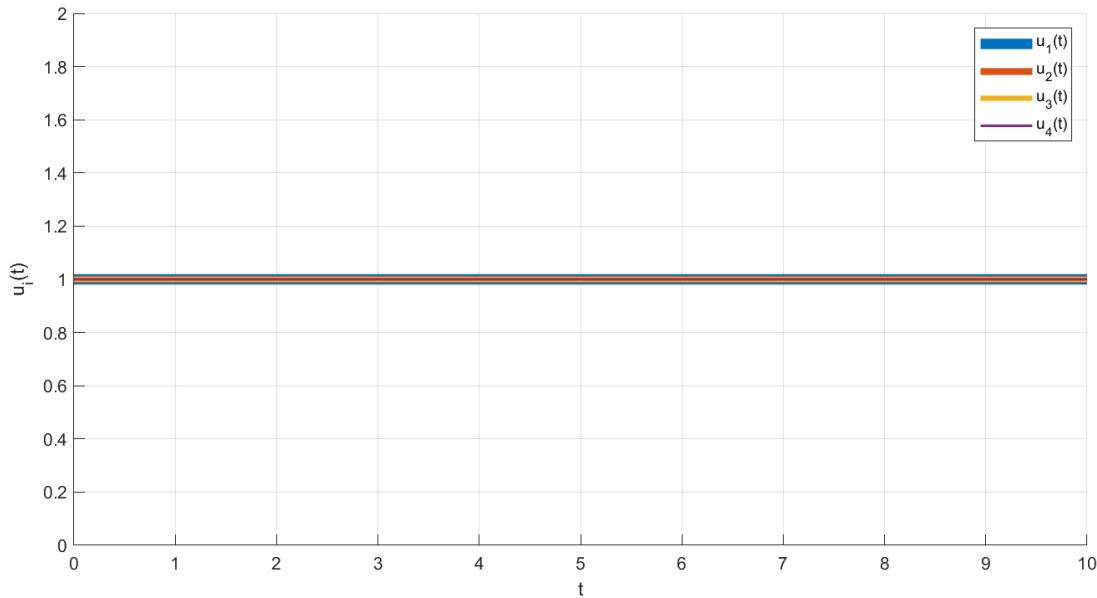
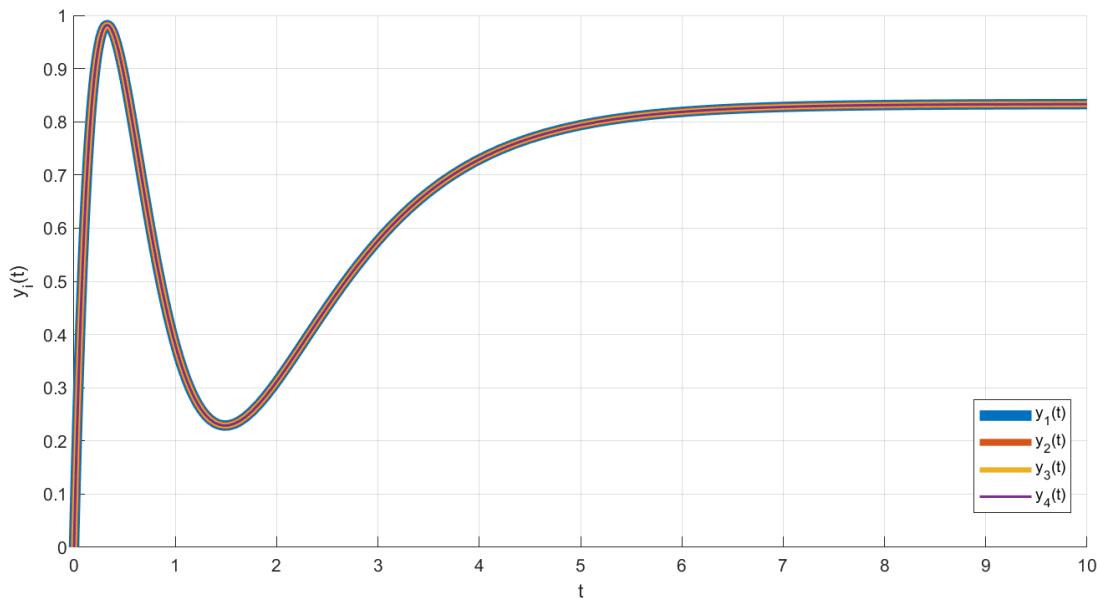


Рис. 6: Схема канонической диагональной формы

Теперь важно понять, а верно ли мы провели построения всех трех форм. Для проверки соответствия подключим все три схемы к одному выводу графика и посмотрим на получившийся рисунок. Для дополнительной уверенности так же подключим к выводу систему, состояющую из блока передаточной функции(transform func).

Рис. 7: График $u(t)$ Рис. 8: График $y(t)$

Результаты полностью подтверждают, что наши схемы эквивалентны.

Вывод

Во втором задании я главным образом отработал преобразования представления динамических систем из формы Б-В в форму Б-С-В и успешно получил идентичные результаты для разных версий одной системы.

Задание 3. Многоканальная система в форме вход-выход

Для этого задания прежде всего нам потребуется вооружиться новыми параметрами, которыми я воспользуюсь для построения многоканальной системы вида:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t)$$

Подставив коэффициенты, необходимые нам матрицы A(p) и B(p) становятся такими:

$$A(p) = \begin{bmatrix} p+12 & p+2 \\ p+6 & p+2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Теперь получим передаточную функцию W(p) этой системы. Для этого потребуется провести следующие манипуляции. В общей записи передаточная функция выражается следующим образом:

$$W(p) = A^{-1}(p)B(p)$$

Вычислим A^{-1} (математические выкладки не привожу по причине не целесообразности):

$$A^{-1}(p) = \frac{1}{5p+6} \begin{bmatrix} p+2 & -p-2 \\ -p-6 & p+12 \end{bmatrix} \quad (11)$$

А затем и саму передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{1}{5p+6} \begin{bmatrix} p+2 & -p-2 \\ -p-6 & p+12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/6 \\ \frac{p+24}{3p+6} & \frac{p+36}{6p+12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Теперь же мы можем и построить структурную схему для данной многоканальной системы, ориентироваться мы будем на следующую матричную форму записи:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{p+24}{3p+6} & \frac{p+36}{6p+12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Её мы представим в виде системы:

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{6}u_2 \\ y_2 = \left(\frac{p+24}{3p+6}\right)u_1 + \left(\frac{p+36}{6p+12}\right)u_2 \end{cases} \quad (13)$$

Построим схему, где для каждой передаточной функции будет соответствовать transform func блок:

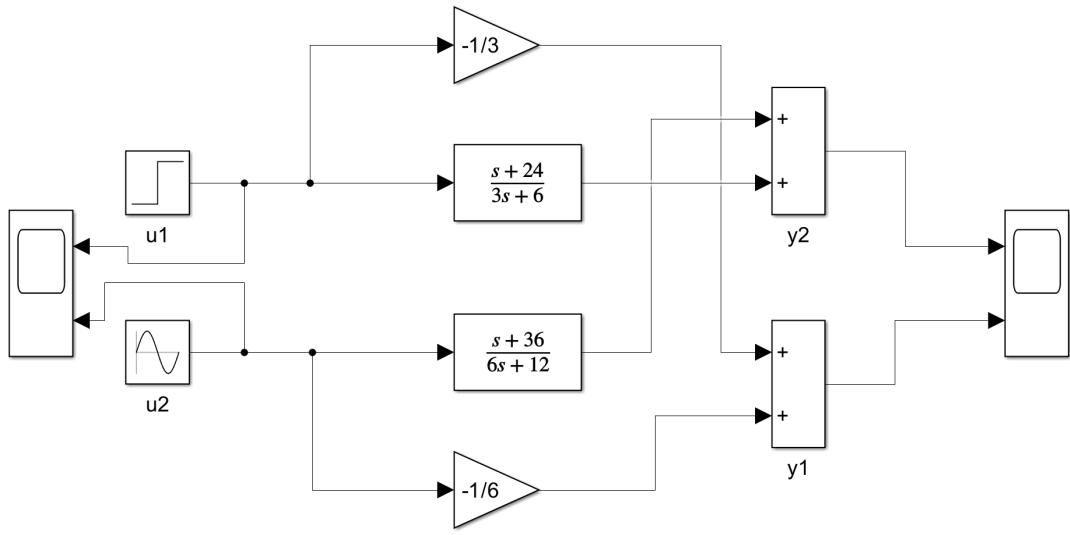


Рис. 9: Схема многоканальной системы В-В

Протестируем работу этой системы с сигналами $u_1(t) = 1$ $u_2(t) = \sin(t)$

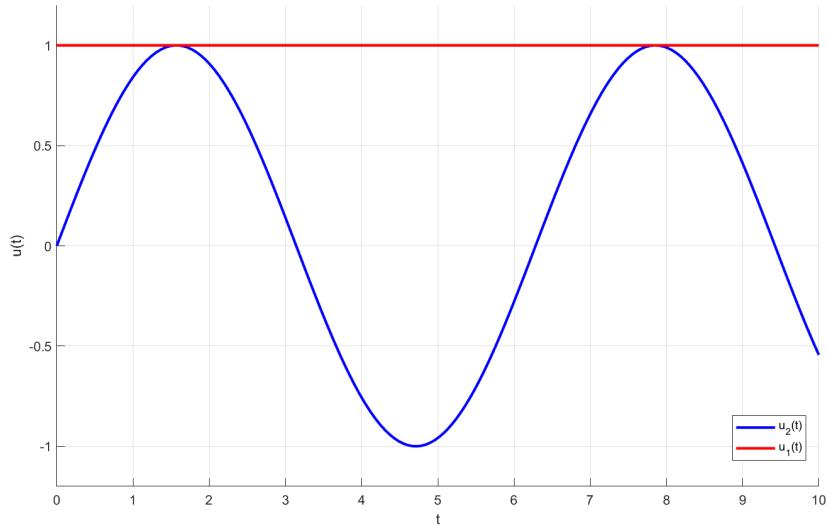
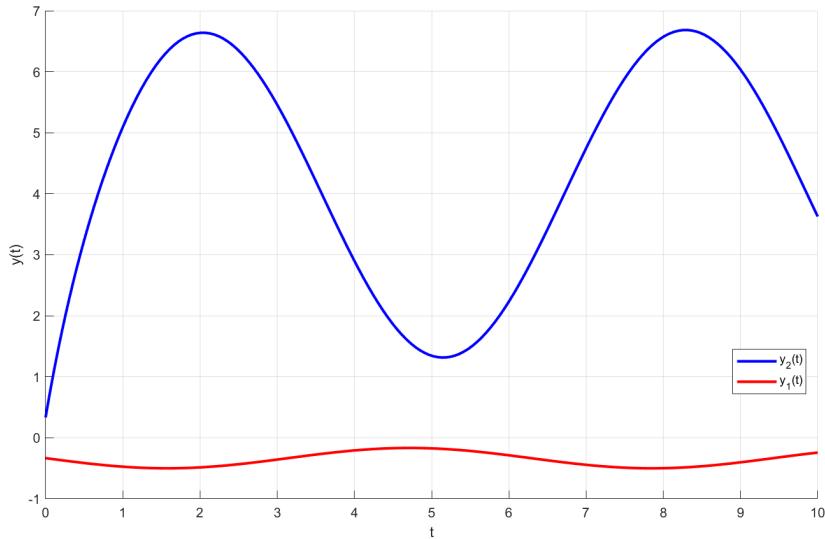


Рис. 10: Графики u(t)

Рис. 11: Графики $y(t)$

Можем заметить, насколько получающиеся выходы одной системы отличаются друг от друга.

Вывод:

В рамках третьего задания получилось отработать создание схем многоканальных систем, что на практике почти не отличается от моноканальных систем.

Задание 4. Многоканальная система в форме вход-состояние-выход

Для последнего задания нам вновь потребуется вооружиться новыми параметрами для работы со следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Вместе со вставленными параметрами система будет выглядеть так:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x$$

Перестроим это в виде системы для удобной адаптации в схему:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 + 2u_1 + u_2 \\ x_2 = x_1 - 7x_2 + 7u_1 + 6u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 9x_1 + 4x_2 \\ y_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

Реализуем схему, в этот раз из элементарных блоков:

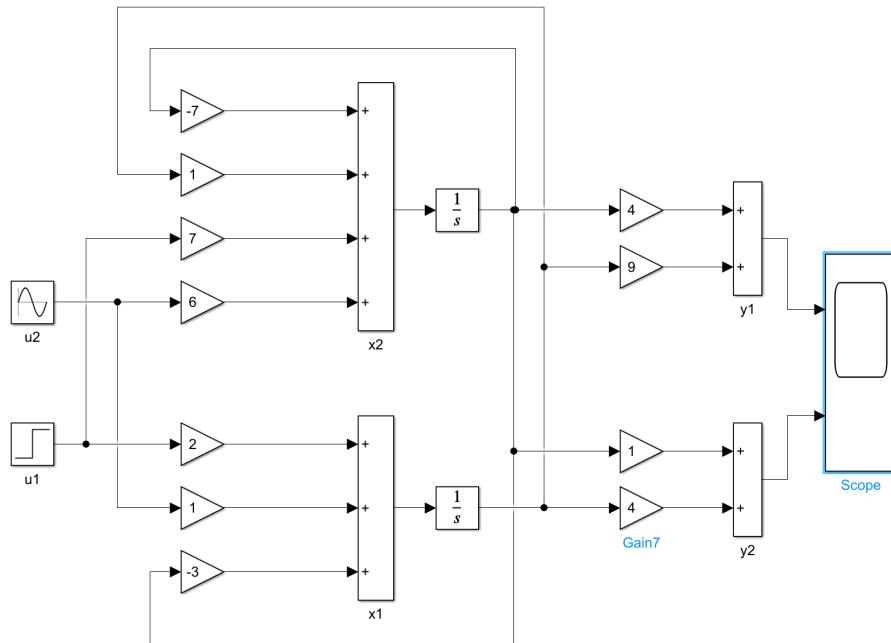
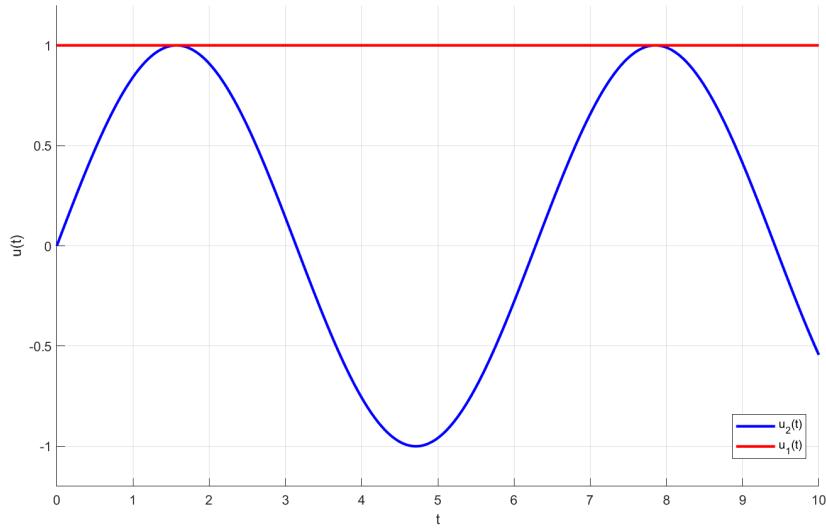
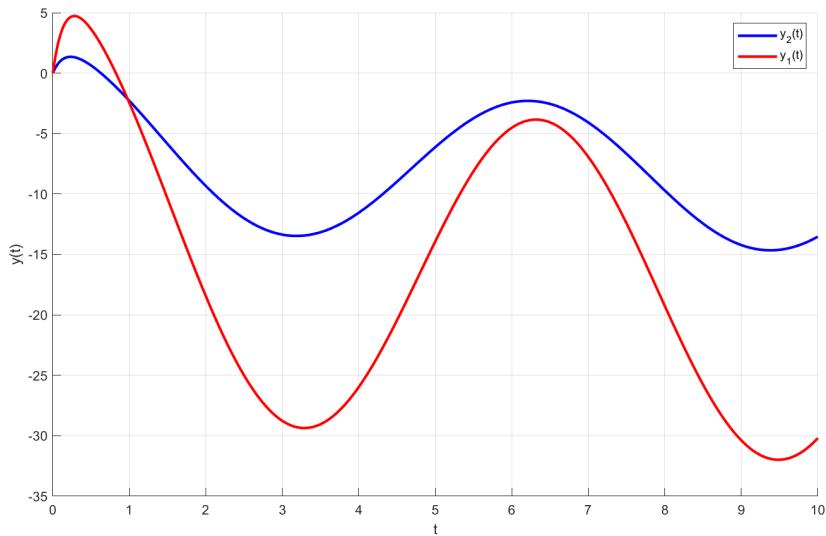


Рис. 12: Схема многоканальной системы В-С-В

Протестируем систему и посмотрим на сигналы входа и выхода:

Рис. 13: Графики $u(t)$

Рис. 14: Графики $y(t)$ **Вывод**

В качестве последнего задания я создал схему многоканальной системы вида В-С-В, что оказалось на практике не очень сложно.

Вывод

В ходе выполнения первой лабораторной работы, я познакомился с работой в Matlab Simulink, что оказалось довольно приятно(а казалось обратное). Что важнее, я изучил процесс моделирования динамических систем через разнообразные формы - теперь намного проще и интуитивнее воспринимаются диффуры как таковые и передаточные функции в частности.