

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

Типовые динамические звенья

Студенты: Загайнов А.А.

Поток: Лин САУ R23 бак 1.1.2

Вариант: 11

Преподаватели: Перегудин. А.А., Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2026

Содержание

1	Общее задание. Исследование типовых динамических звеньев.	3
1.1	Объект 1. Двигатель постоянного тока (ДПТ)	3
1.1.1	Вывод дифференциального уравнения	3
1.1.2	Передаточная функция и стандартизированная форма	3
1.1.3	Временные и частотные характеристики	4
1.1.4	Моделирование	4
1.1.5	Вывод по первому объекту	5
1.2	Объект 2. ДПТ 2.0 (с учетом индуктивности L)	5
1.2.1	Математическая модель	5
1.2.2	Получение передаточной функции	6
1.2.3	Стандартизированная форма и тип звена	6
1.2.4	Временные и частотные характеристики	6
1.2.5	Моделирование	7
1.2.6	Вывод по второму объекту	8
1.3	Объект 3. Конденсируй-умножай	8
1.3.1	Математическая модель	8
1.3.2	Получение передаточной функции	9
1.3.3	Стандартизированная форма и тип звена	9
1.3.4	Временные и частотные характеристики	9
1.3.5	Моделирование	10
1.3.6	Вывод по третьему объекту	11
1.4	Объект 4. Пружинка	11
1.4.1	Математическая модель	11
1.4.2	Получение передаточной функции	12
1.4.3	Стандартизированная форма и тип звена	12
1.4.4	Временные и частотные характеристики	12
1.4.5	Моделирование	13
1.4.6	Вывод по четвертому объекту	14
1.5	Объект 5. Что ты такое?	15
1.5.1	Математическая модель	15
1.5.2	Получение передаточной функции	15
1.5.3	Стандартизированная форма и тип звена	15
1.5.4	Временные и частотные характеристики	16
1.5.5	Моделирование	16
1.5.6	Вывод по пятому объекту	17
1.6	Общие выводы по заданию	17

1 Общее задание. Исследование типовых динамических звеньев.

В рамках данной лабораторной работы будем подробно исследовать модели реальных объектов. Для каждого будет задачей:

- подобрать соответствующее типовое динамическое звено;
- получить передаточную функцию $W(s)$ в стандартизированной форме (через K и T);
- записать аналитические выражения: переходная $h(t)$ и весовая $g(t)$ характеристики;
- записать частотные характеристики: АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ;
- промоделировать звено и построить графики всех характеристик;
- сравнить результаты моделирования с теоретическими.

1.1 Объект 1. Двигатель постоянного тока (ДПТ)

Для базовой упрощённой модели двигателя постоянного тока используем систему уравнений:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= M, \\ M &= k_m I, \\ I &= \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \\ \varepsilon_i &= -k_e \omega. \end{aligned}$$

и тогда в соответствии с вариантом 11:

$$\begin{aligned} k_m &= 0.3435 \text{ Н} \cdot \text{м/А}, \\ k_e &= 0.3435 \text{ В} \cdot \text{с}, \\ J &= 0.0021 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ R &= 4.5920 \Omega, \\ L &= 1.0575 \text{ Гн}. \end{aligned}$$

Входом системы считаем $U(t)$, выходом — $\omega(t)$.

1.1.1 Вывод дифференциального уравнения

Для получения необходимого нам ДУ постараемся выразить ток через вход и выход:

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R} = \frac{U - k_e \omega}{R}$$

Подставляя в уравнение движения $J\dot{\omega} = M = k_m I$, получаем

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_m \frac{U - k_e \omega}{R} \\ RJ\dot{\omega} + k_m k_e \omega &= k_m U \end{aligned}$$

Как видим — объект описывается линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

1.1.2 Передаточная функция и стандартизированная форма

Переходя к операторной форме при нулевых начальных условиях ($\dot{\omega} \rightarrow s\Omega(s)$):

$$(RJ s + k_m k_e) \Omega(s) = k_m U(s)$$

Отсюда передаточная функция по каналу $U \rightarrow \omega$:

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k_m}{RJ s + k_m k_e}$$

Разделим числитель и знаменатель на $k_m k_e$ и приведём к типовой форме аperiodического звена 1-го порядка:

$$W(s) = \frac{1/k_e}{\left(\frac{RJ}{k_m k_e}\right)s + 1} = \frac{K}{Ts + 1} \quad K = \frac{1}{k_e}, \quad T = \frac{RJ}{k_m k_e}$$

Подсчитаем теперь значения исходя из данных для нашего варианта:

$$K = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3435} \approx 2.9112,$$

$$T = \frac{RJ}{k_m k_e} = \frac{4.5920 \cdot 0.0021}{0.3435 \cdot 0.3435} = \frac{0.0096432}{0.11799225} \approx 0.0817 \text{ с}$$

наша итоговая передаточная функция:

$$W(s) = \frac{2.9112}{0.0817s + 1}$$

1.1.3 Временные и частотные характеристики

Теперь наконец мы перешли к нахождению всех интересующих нас характеристик. Переходная характеристика:

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T}) = 2.9112(1 - e^{-t/0.0817})$$

Весовая характеристика:

$$\frac{1}{T} \approx 12.24, \quad \frac{K}{T} = \frac{2.9112}{0.0817} \approx 35.63, \quad g(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \approx 35.63 e^{-t/0.0817}$$

Комплексная частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\arctan(\omega T)$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ:

$$L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega), \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

1.1.4 Моделирование

Ниже приведены графики характеристик, полученные при моделировании, для сравнения с теоретическими зависимостями.

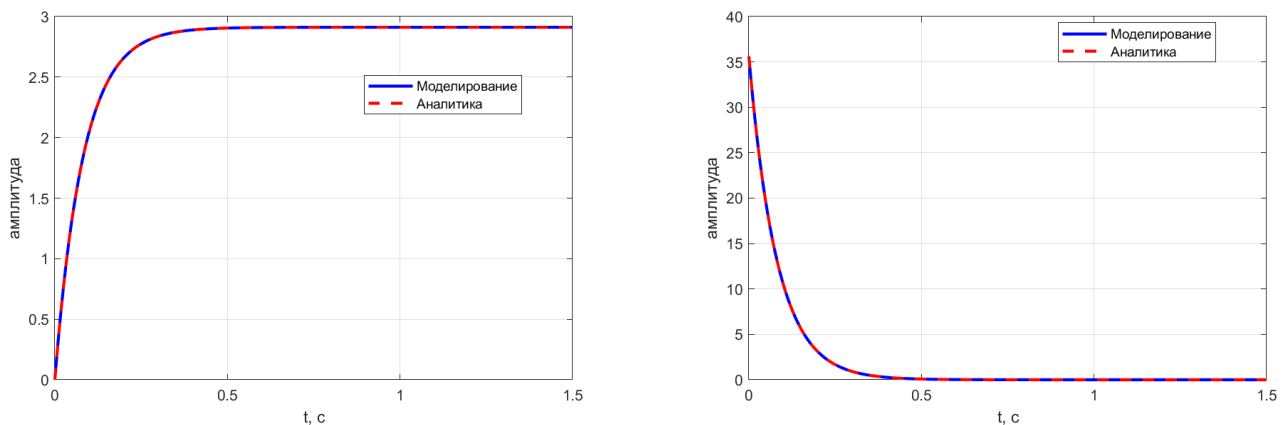
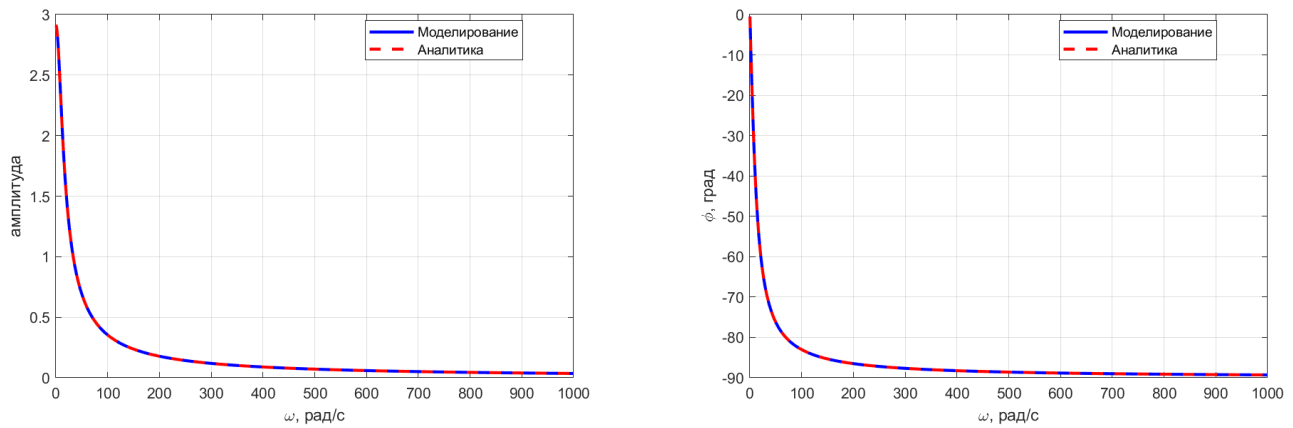
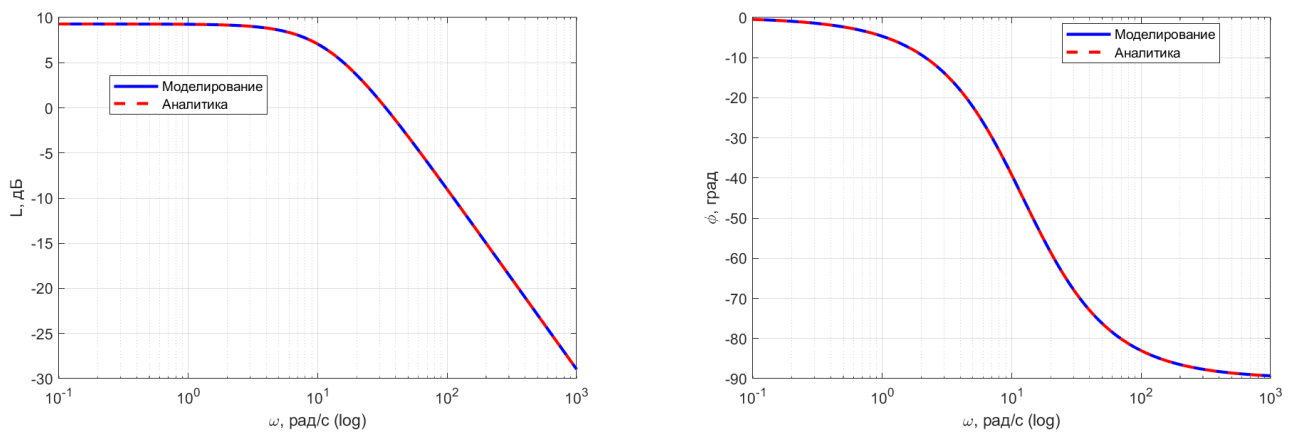


Рисунок 1: Слева: переходная характеристика $h(t)$. Справа: весовая характеристика $g(t)$.

Рисунок 2: Слева: АЧХ $A(\omega)$. Справа: ФЧХ $\varphi(\omega)$.Рисунок 3: Слева: ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$. Справа: ЛФЧХ $\varphi(\omega)$.

1.1.5 Вывод по первому объекту

Модель ДПТ без индуктивности в сути своей представляет из себя апериодическое звено первого порядка, что подтверждают и наши аналитические расчеты временных и частотных характеристик, ведь они как раз соответствуют теоретическим для данного звена. Результаты моделирования также подтвердили наши вычисления – аналитическое решение полностью совпало с моделированием на всех графиках характеристик.

1.2 Объект 2. ДПТ 2.0 (с учетом индуктивности L)

Теперь рассмотрим ту же модель ДПТ, но уже с учетом индуктивности обмоток, то есть система становится второго порядка.

1.2.1 Математическая модель

Связи те же, но добавляем работу с L :

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_m I, \\ LI + RI &= U - k_e \omega. \end{aligned}$$

Параметры остаются неизменными

1.2.2 Получение передаточной функции

Для удобства перейдем в операторную форму ($\dot{\omega} \rightarrow s\Omega(s)$, $\dot{I} \rightarrow sI(s)$):

$$\begin{aligned} Js\Omega(s) &= k_m I(s) \\ (Ls + R)I(s) &= U(s) - k_e \Omega(s) \end{aligned}$$

выражаем ток:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{Js}{k_m} \Omega(s) \\ (Ls + R) \frac{Js}{k_m} \Omega(s) &= U(s) - k_e \Omega(s) \end{aligned}$$

переносим всё с $\Omega(s)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{JL}{k_m} s^2 + \frac{JR}{k_m} s + k_e \right) \Omega(s) &= U(s) \\ W(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} &= \frac{k_m}{JL s^2 + JR s + k_m k_e} \end{aligned}$$

1.2.3 Стандартизированная форма и тип звена

Сейчас сделаем форму стандартизированной для дальнейшей работы:

$$W(s) = \frac{1/k_e}{\left(\frac{JL}{k_m k_e} \right) s^2 + \left(\frac{JR}{k_m k_e} \right) s + 1}$$

сравним с типовой формой для звена второго порядка:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

Выходит именно так как и ожидалось. Теперь выделим наши параметры:

$$K = \frac{1}{k_e}, \quad T = \sqrt{\frac{JL}{k_m k_e}}, \quad \xi = \frac{JR}{2\sqrt{JL k_m k_e}}$$

Подсчитаем значения:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3435} \approx 2.9112, \\ T &= \sqrt{\frac{JL}{k_m k_e}} = \sqrt{\frac{0.0021 \cdot 1.0575}{0.3435 \cdot 0.3435}} = \sqrt{\frac{0.00222075}{0.11799225}} \approx 0.1372 \text{ с} \\ \xi &= \frac{JR}{2\sqrt{JL k_m k_e}} = \frac{4.5920 \cdot 0.0021}{2\sqrt{(0.0021 \cdot 1.0575)(0.3435 \cdot 0.3435)}} \approx 0.2977 \end{aligned}$$

Так как $0 < \xi < 1$ значит получаем колебательное звено 2-го порядка с затухающими колебаниями. Наша итоговая передаточная функция с учетом вычислений:

$$W(s) = \frac{2.9112}{(0.1372)^2 s^2 + 2 \cdot 0.2977 \cdot 0.1372 s + 1}$$

1.2.4 Временные и частотные характеристики

Для колебательного звена удобно будет использовать

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$$

Переходная характеристика:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K(T^2 s + 2\xi T)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - K \cdot \frac{s + \frac{2\xi}{T}}{\left(s + \frac{\xi}{T}\right)^2 + \frac{1-\xi^2}{T^2}} \right\} \\
&= K - K e^{-\frac{\xi}{T}t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) - K \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) \\
&= K \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) \right) \right] \\
h(t) &= K \left[1 - e^{-\xi t/T} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right] 3
\end{aligned}$$

Весовая характеристика:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K/T^2}{s^2 + \frac{2\xi}{T}s + \frac{1}{T^2}} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K/T^2}{\left(s + \frac{\xi}{T}\right)^2 + \frac{1-\xi^2}{T^2}} \right\} = \frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) \\
g(t) &= \frac{K\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi t/T} \sin(\omega_d t)
\end{aligned}$$

АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - (\omega T)^2)^2 + (2\xi \omega T)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi \omega T}{1 - (\omega T)^2}\right)$$

Здесь из-за малого $\xi \approx 0.3$ на АЧХ можем ожидать выраженный резонансный пик.

1.2.5 Моделирование

Проведем моделирование:

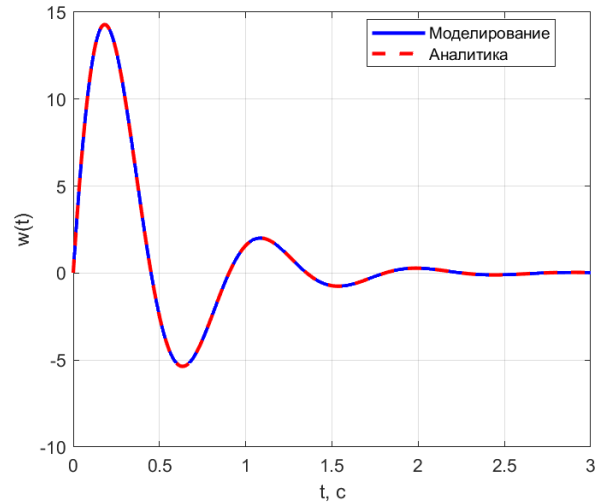
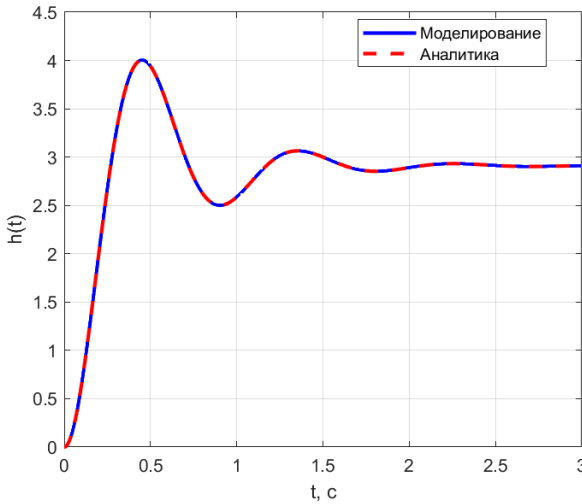
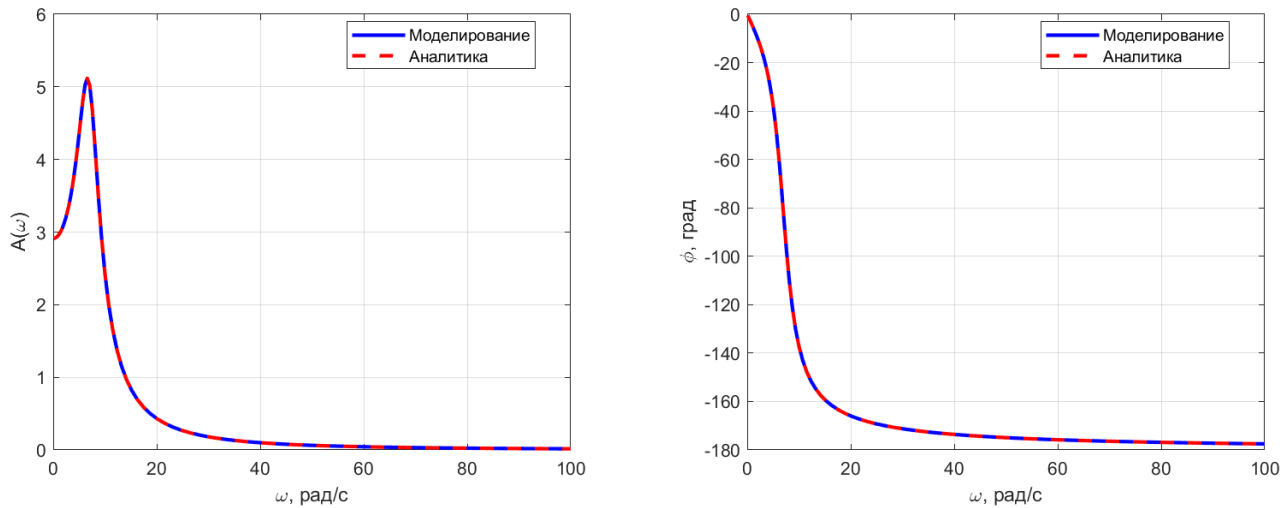
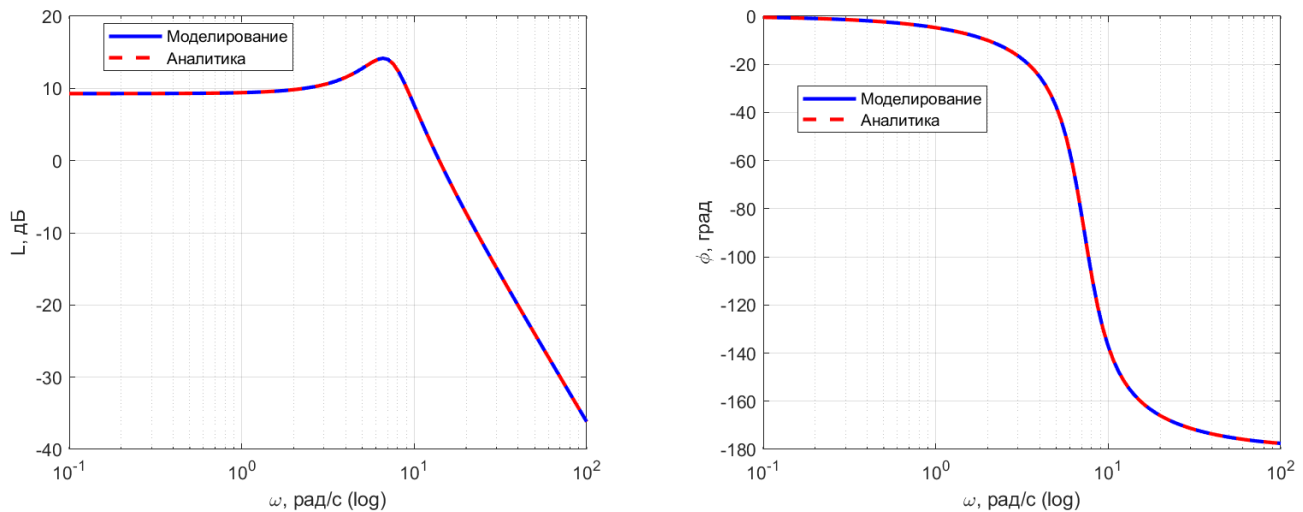


Рисунок 4: Слева: переходная характеристика $h(t)$. Справа: весовая характеристика $g(t)$.

Рисунок 5: Слева: АЧХ $A(\omega)$. Справа: ФЧХ $\varphi(\omega)$.Рисунок 6: Слева: ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$. Справа: ЛФЧХ $\varphi(\omega)$.

1.2.6 Вывод по второму объекту

Учет индуктивности L увеличил порядок нашей модели до второго. Глядя на $\xi \approx 0.2977$ можем определить что звено стало колебательным. Именно это мы и видим на графиках. Как теоретические расчеты, так и моделирование нам показывают график затухающего колебательного процесса. Так же мы видим и довольно заметный резонансный пик.

1.3 Объект 3. Конденсируй-умножай

Рассмотрим электрическую цепь с конденсатором. Согласно заданию, входом системы является ток $I(t)$, а выходом — напряжение $U(t)$.

1.3.1 Математическая модель

Исходное дифференциальное уравнение, связывающее ток и напряжение на обкладках конденсатора:

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

Для нашего варианта:

$$C = 359 \text{ мкФ} = 359 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0.000359 \text{ Ф}$$

1.3.2 Получение передаточной функции

Перейдем к операторной форме при нулевых начальных условиях:

$$I(s) = CsU(s)$$

Тогда передаточная функция (выход $U(s)$, вход $I(s)$) равна:

$$W(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

1.3.3 Стандартизированная форма и тип звена

Приведем $W(s)$ к каноническому виду идеального интегрирующего звена:

$$W(s) = \frac{K}{s}, \quad K = \frac{1}{C}$$

Подставим значение емкости:

$$K = \frac{1}{359 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{359} \approx 2785.5153$$

Итого получаем:

$$W(s) = \frac{2785.5153}{s}$$

1.3.4 Временные и частотные характеристики

Переходная характеристика:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^2} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} &= t \\ h(t) &= Kt \\ h(t) &= 2785.5153 t \end{aligned}$$

Весовая характеристика:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} \right\} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} &= 1(t) \\ g(t) &= K 1(t) \quad g(t) = 2785.5153 \quad (t > 0) \end{aligned}$$

АЧХ и ФЧХ:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= W(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{j\omega} \\ W(j\omega) &= -j \frac{K}{\omega} \\ A(\omega) &= |W(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \quad \varphi(\omega) = \arg \left(-j \frac{K}{\omega} \right) = -\frac{\pi}{2} \\ A(\omega) &= \frac{2785.5153}{\omega} \end{aligned}$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{K}{\omega} \right) = 20 \log_{10} K - 20 \log_{10} \omega$$

ЛФЧХ:

$$L_{\varphi}(\omega) = \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

1.3.5 Моделирование

Проведем моделирование:

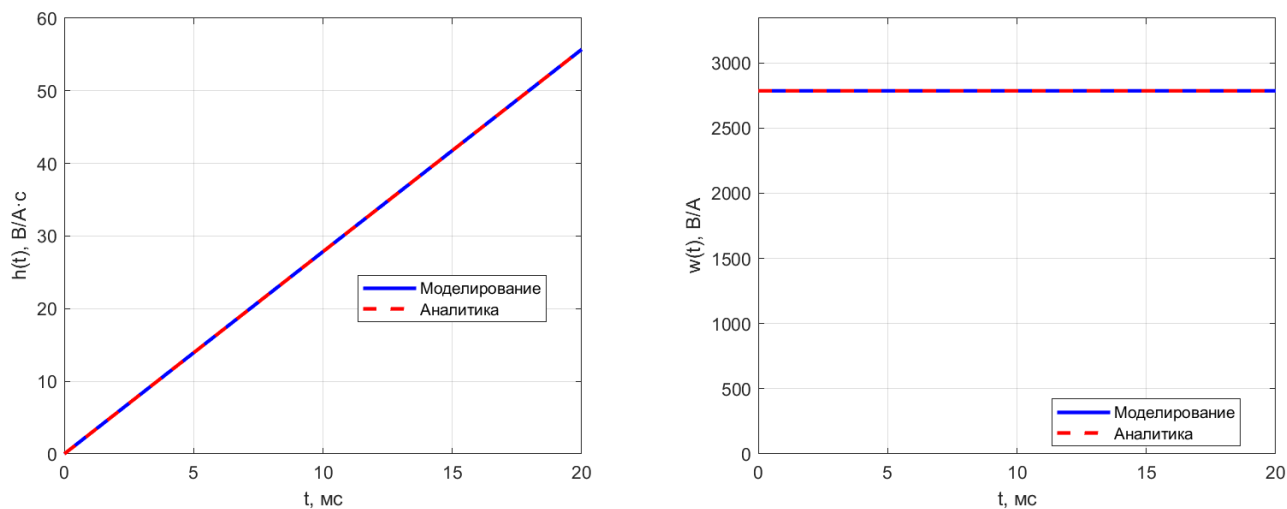


Рисунок 7: Слева: переходная характеристика $h(t)$. Справа: весовая характеристика $g(t)$.

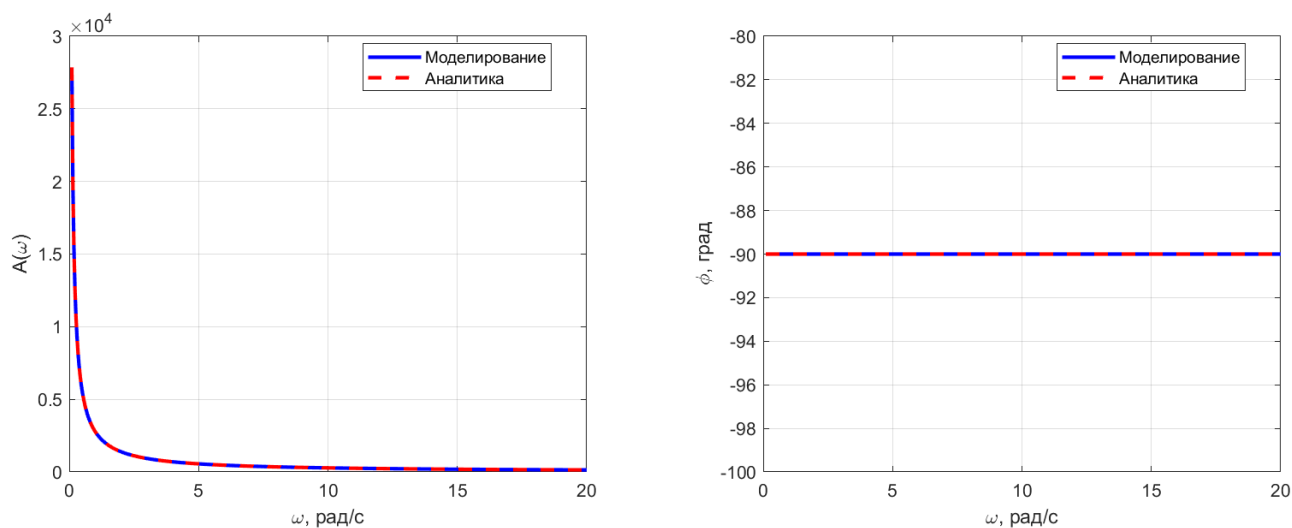


Рисунок 8: Слева: АЧХ $A(\omega)$. Справа: ФЧХ $\varphi(\omega)$.

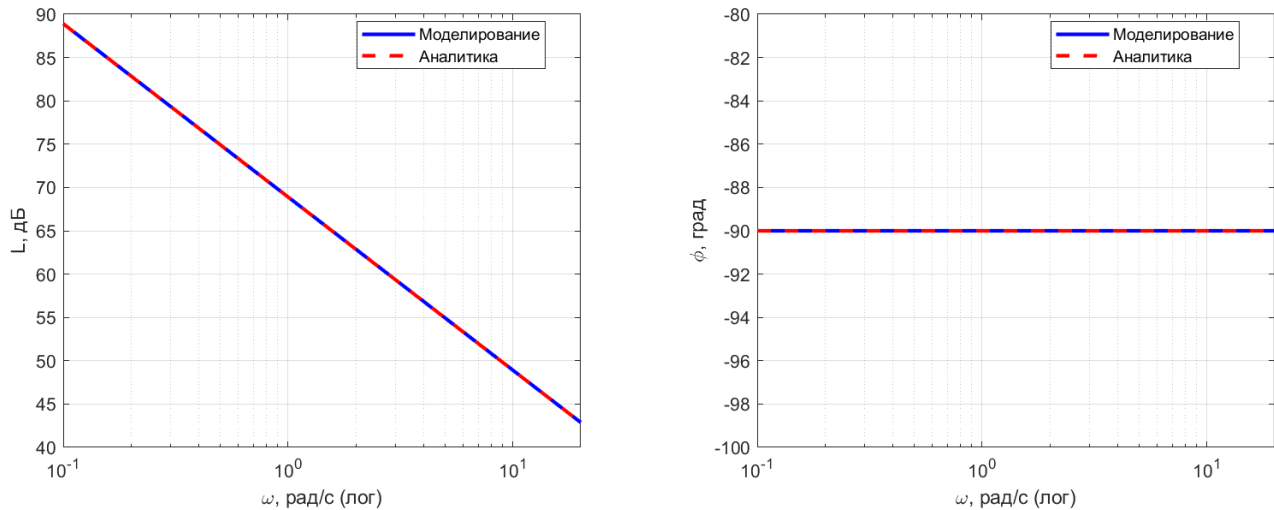


Рисунок 9: Слева: ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$. Справа: ЛФЧХ $\varphi(\omega)$.

1.3.6 Вывод по третьему объекту

Полученная передаточная функция имеет вид $W(s) = K/s$, следовательно, конденсатор в данной постановке описывается идеальным интегрирующим звеном. Это подтверждается тем, что $h(t)$ представляет собой линейно возрастающую функцию, а фазовый сдвиг постоянен и равен -90° на всех частотах.

1.4 Объект 4. Пружинка

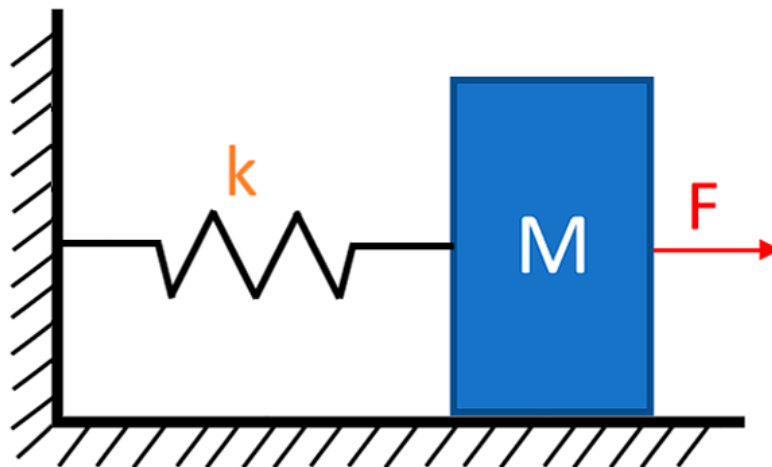


Рисунок 10: Схема пружинного маятника

Рассмотрим механическую систему с пружиной без учета вязкого трения. В качестве входного воздействия будем рассматривать силу $F(t)$, а выходной величиной — перемещение $x(t)$.

1.4.1 Математическая модель

Для одномассовой модели с массой m и жесткостью пружины k (без демпфирования) уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$m = 16 \text{ кг}, \quad k = 105 \text{ Н/м}$$

1.4.2 Получение передаточной функции

Перейдем к операторной форме при нулевых начальных условиях:

$$(ms^2 + k) X(s) = F(s)$$

Тогда передаточная функция:

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

1.4.3 Стандартизированная форма и тип звена

Вынесем k в знаменателе:

$$W(s) = \frac{1/k}{\left(\frac{m}{k}\right)s^2 + 1}$$

Сравним с типовой формой звена второго порядка:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

Выделим параметры:

$$K = \frac{1}{k} \quad T = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \xi = 0$$

$$K = \frac{1}{105} \approx 0.0095238 \quad T = \sqrt{\frac{16}{105}} \approx 0.3904\text{с} \quad \xi = 0$$

$$\omega_d = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{105}{16}} \approx 2.5617 \text{ рад/с}$$

$$K = \frac{1}{105} \approx 0.0095238 \quad T = \sqrt{\frac{16}{105}} \approx 0.3904\text{с} \quad \xi = 0$$

1.4.4 Временные и частотные характеристики

Для звена второго порядка удобно ввести обозначение

$$\omega_d = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$$

$$\omega_d = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{105}{16}} \approx 2.5617 \text{ рад/с}$$

Переходная характеристика:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)} \right\}$$

Так как $\xi = 0$, получаем:

$$h(t) = K [1 - \cos(\omega_d t)]$$

$$h(t) \approx 0.0095238 [1 - \cos(2.5617 t)]$$

$$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)} = \frac{K}{s} - K \cdot \frac{T^2s + 2\xi T}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

$$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 = T^2 \left[\left(s + \frac{\xi}{T} \right)^2 + \frac{1 - \xi^2}{T^2} \right]$$

$$h(t) = K \left[1 - e^{-\xi t/T} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right]$$

Весовая характеристика:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \right\}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K/T^2}{\left(s + \frac{\xi}{T}\right)^2 + \frac{1-\xi^2}{T^2}} \right\} = \frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi t/T} \sin(\omega_d t)$$

Так как $\xi = 0$, имеем:

$$g(t) = \frac{K}{T} \sin(\omega_d t)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \approx 0.02439 \sin(2.5617 t)$$

АЧХ и ФЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 - (\omega T)^2 + j 2\xi \omega T}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - (\omega T)^2)^2 + (2\xi \omega T)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi \omega T}{1 - (\omega T)^2}\right)$$

$$A(\omega) = \frac{K}{|1 - (\omega T)^2|} = \frac{1}{|k - m\omega^2|} = \frac{1}{|105 - 16\omega^2|} \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega < \omega_0 \\ -\pi, & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m} \approx 2.5617$ рад/с.

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{|105 - 16\omega^2|} \right)$$

ЛФЧХ:

$$L_\varphi(\omega) = \varphi(\omega)$$

$$L_\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega < \omega_0 \\ -\pi, & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

1.4.5 Моделирование

Проведем моделирование:

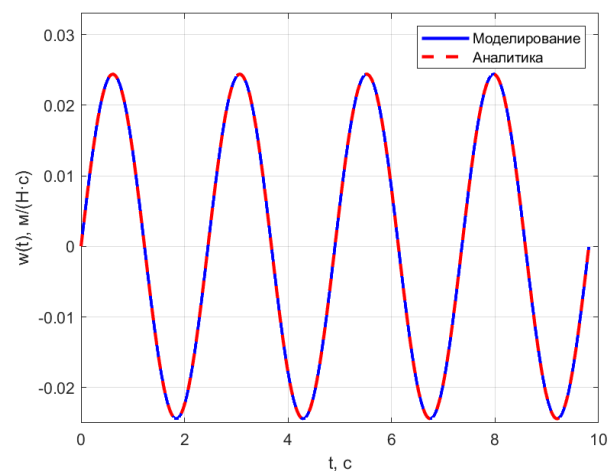
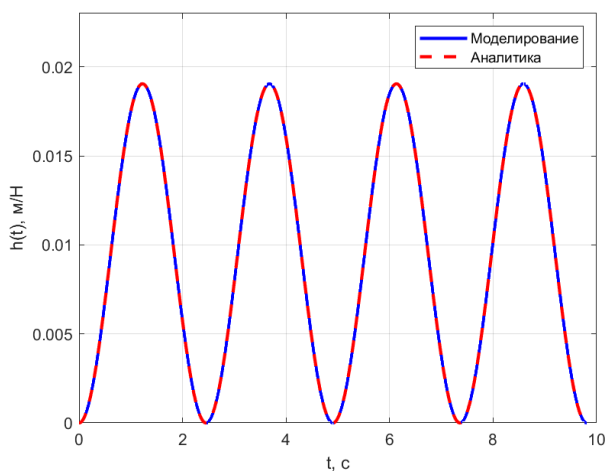
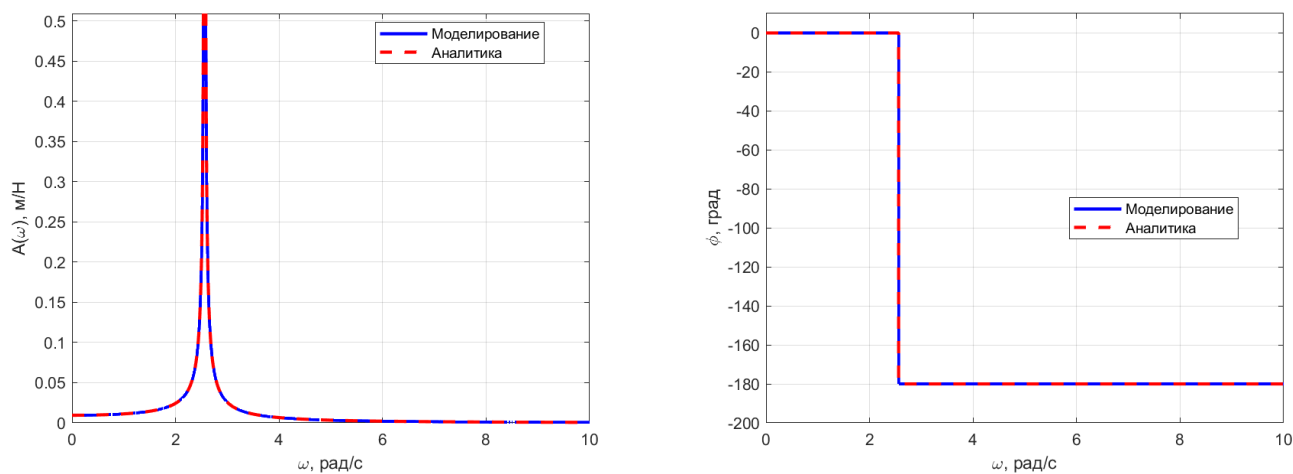
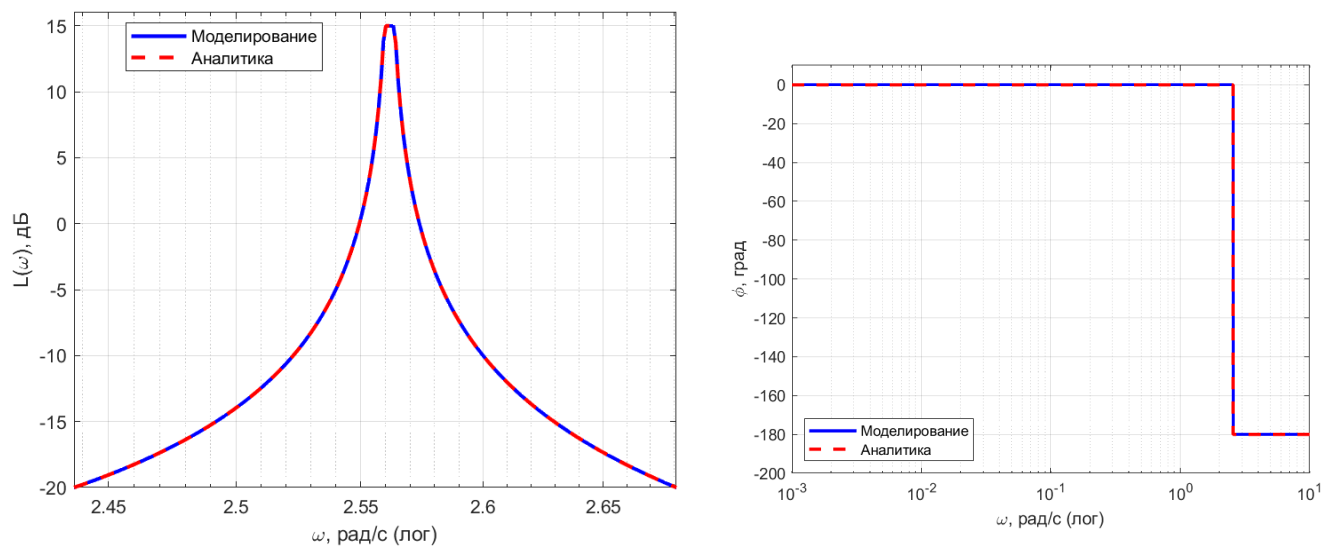


Рисунок 11: Слева: переходная характеристика $h(t)$. Справа: весовая характеристика $g(t)$.

Рисунок 12: Слева: АЧХ $A(\omega)$. Справа: ФЧХ $\varphi(\omega)$.Рисунок 13: Слева: ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$. Справа: ЛФЧХ $\varphi(\omega)$.

1.4.6 Вывод по четвертому объекту

Механическая система с пружиной и вязким трением описывается звеном второго порядка. Характер переходного процесса определяется коэффициентом затухания ξ : при $0 < \xi < 1$ наблюдаются затухающие колебания, а при $\xi \geq 1$ система становится аperiodической.

1.5 Объект 5. Что ты такое?

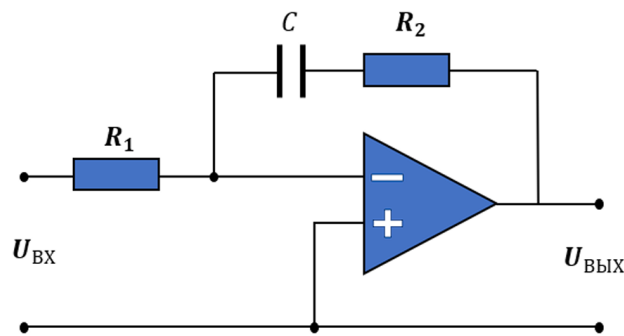


Рисунок 14: Электрическая схема объекта

Рассмотрим электрическую схему регулятора на основе операционного усилителя. Входом объекта является напряжение $U(t)$, а выходом — $U(t)$.

1.5.1 Математическая модель

$$R_1 = 665 \, \Omega, \quad R_2 = 12644 \, \Omega, \quad C = 359 \cdot 10^{-6} \, \text{Ф}$$

Запишем уравнения токов и напряжений для инвертирующего усилителя в операторной форме:

$$I(s) = \frac{U(s)}{R_1}$$

$$U(s) = -I(s) \left(R_2 + \frac{1}{Cs} \right)$$

1.5.2 Получение передаточной функции

Подставим выражение для тока $I(s)$ во второе уравнение:

$$U(s) = -\frac{U(s)}{R_1} \left(R_2 + \frac{1}{Cs} \right)$$

Выразим отношение выхода к входу

$$W(s) = \frac{U(s)}{U(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} = \frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs}$$

1.5.3 Стандартизированная форма и тип звена

Приведем выражение к тому как должен выглядеть ПИ регулятор

$$W(s) = \frac{1}{R_1C} \cdot \frac{R_2Cs + 1}{s} = \frac{K(Ts + 1)}{s}$$

Расчет коэффициентов:

$$K = \frac{1}{R_1C} = \frac{1}{665 \cdot 359 \cdot 10^{-6}} \approx 4.1887$$

$$T = R_2C = 12644 \cdot 359 \cdot 10^{-6} \approx 4.5392 \, \text{с}$$

Итоговая передаточная функция:

$$W(s) = \frac{4.1887(4.5392s + 1)}{s}$$

1.5.4 Временные и частотные характеристики

Переходная характеристика:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K(Ts + 1)}{s^2} \right\} = K(t + T)$$

$$h(t) = 4.1887(t + 4.5392)$$

Весовая характеристика:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K(Ts + 1)}{s} \right\} = KT\delta(t) + K$$

$$w(t) \approx 4.1887 \quad (\text{при } t > 0)$$

АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \left| \frac{K(j\omega T + 1)}{j\omega} \right| = K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(-1, T\omega) = -\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}$$

1.5.5 Моделирование

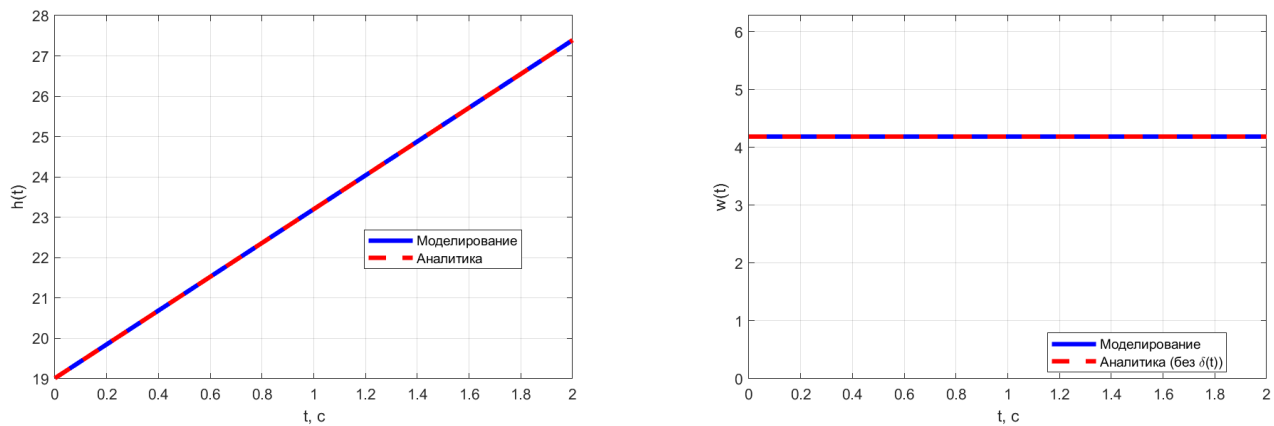


Рисунок 15: Слева: переходная характеристика $h(t)$. Справа: весовая характеристика $g(t)$.

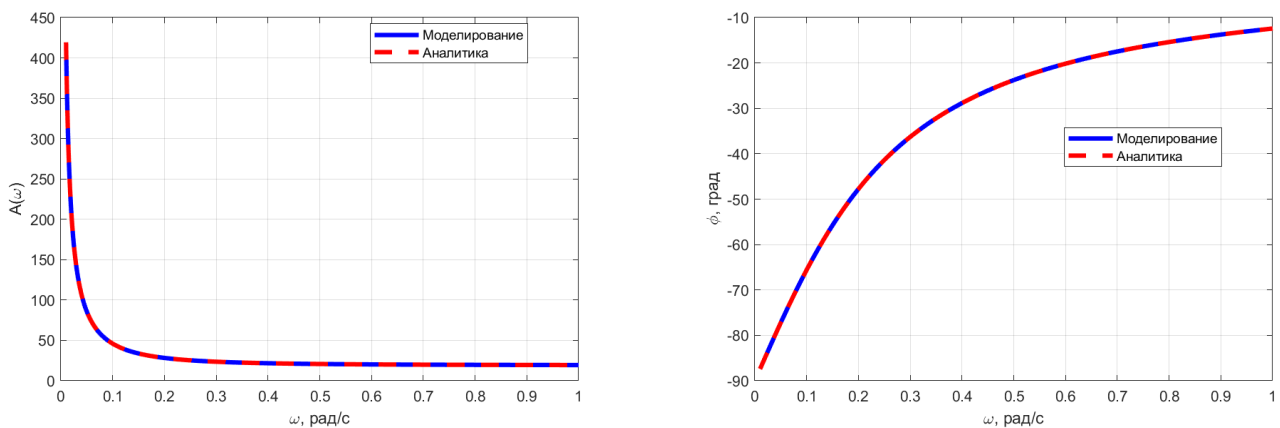


Рисунок 16: Слева: АЧХ $A(\omega)$. Справа: ФЧХ $\varphi(\omega)$.

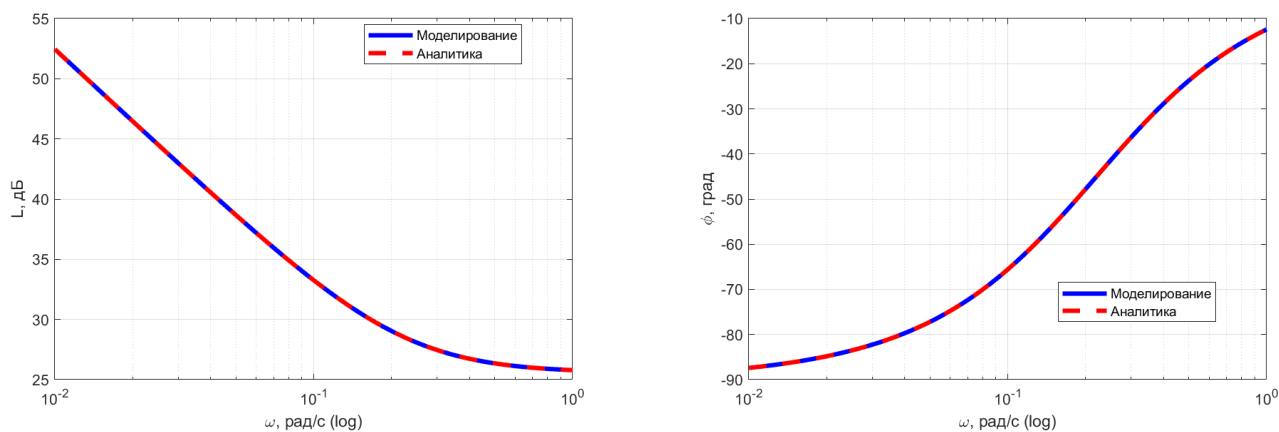


Рисунок 17: Слева: ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$. Справа: ЛФЧХ $\varphi(\omega)$.

1.5.6 Вывод по пятому объекту

Схема на операционном усилителе реализует ПИ-регулятор. Наличие конденсатора в цепи обратной связи обеспечивает свойства И регулятора, а резистор добавляет П составляющую своим быстродействием.

1.6 Общие выводы по заданию

В рамках лабораторной работы были рассмотрены несколько динамических объектов и для каждого из них было подобрано соответствующее типовое звено, наиболее точно отражающее его поведение. Для каждого звена мы посчитали его частотные и временные характеристики. Каждые из этих характеристик мы протестили на практике и получили приятные совпадающие результаты!