Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1

РЯДЫ ФУРЬЕ

Студент: Загайнов А.А
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.2

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание №1.

Подготовка. Выбираем числа

Для наших будущих функций нам нужно подобрать какие нибудь приятные числа

$$a = 4 \quad b = 1 \quad t_0 = 2 \quad t_1 = 4 \quad t_2 = 8$$

Начинаем. Квадратная волна

На основе подобраных чисел зададим функцию:

$$f(t) = \begin{cases} 4, & t \in [2, 4), \\ 1, & t \in [4, 8). \end{cases}$$

Попробуем визуализировать периодически данную функцию на числовой прямой:

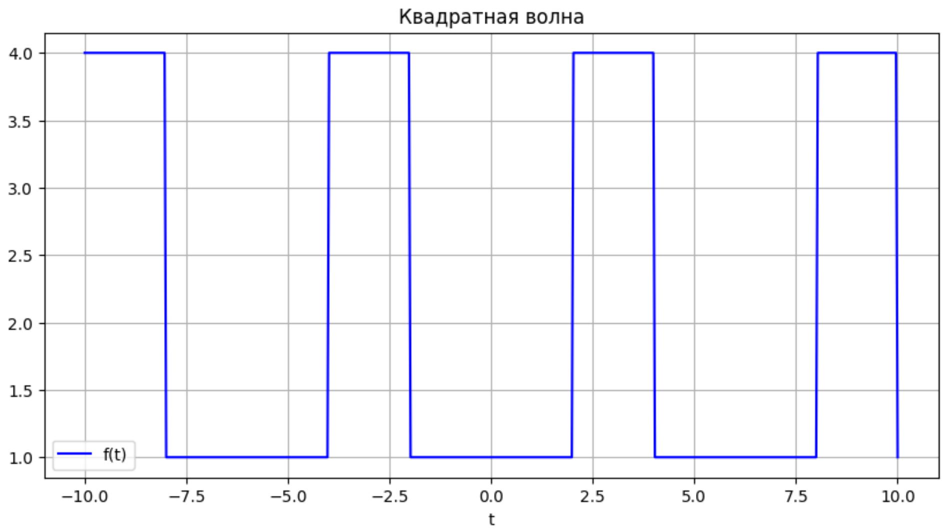

Рис. 1: График функции $f(t)$

Не останавливаемся на графике, продолжаем. Разберемся теперь частичными суммами ряда Фурье F_n и G_n

$$F_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))$$

$$G_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t}$$

Где ω_n мы подразумеваем равной $\frac{2\pi n}{T}$, а $T = 5$
Коэффициенты высчитываем по этим формулам:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(\omega_n x)\, dx \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(\omega_n x)\, dx \quad (b_0 = 0)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-i\omega_n t}dt$$

Ручные вычисления

Для нашей функции посчитаем частичные суммы для $N = 2$. Для упрощения расчетов, будем делить интервал кусочно-непрерывной функции на две части

Начнем считать коэффициенты:

$$a_0 = \frac{2}{6}\left(\int_2^4 4\,dt + \int_4^8 1\,dt\right) = \frac{1}{3}\,(16 - 8 + 8 - 4) = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

$$a_1 = \frac{2}{6}\left(\int_2^4 4\cos\frac{2\pi t}{6}\,dt + \int_4^8 1\cos\frac{2\pi t}{6}\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{12\sin\frac{\pi t}{3}}{\pi}\bigg|_2^4 + \frac{3\sin\frac{\pi t}{3}}{\pi}\bigg|_4^8\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{12}{\pi}(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}) + \frac{3}{\pi}(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3})\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{12\sqrt{3}}{\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$$

$$a_2 = \frac{2}{6}\left(\int_2^4 4\cos\frac{4\pi t}{6}\,dt + \int_4^8 1\cos\frac{4\pi t}{6}\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{6\sin\frac{2\pi t}{3}}{\pi}\bigg|_2^4 + \frac{3\sin\frac{2\pi t}{3}}{2\pi}\bigg|_4^8\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\pi}(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}) + \frac{3}{2\pi}(\sin\frac{16\pi}{3} - \sin\frac{8\pi}{3})\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{12\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}$$

Теперь найдём a_3 , при котором $\omega_3 = {}^{2\cdot\cancel{3}\pi}/_{\cancel{6}} = \pi$:

$$a_3 = \frac{2}{6}\left(\int_2^4 4\cos\pi t, dt + \int_4^8 \cos\pi t\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(4\frac{\sin\pi t}{\pi}\bigg|_2^4 + \frac{\sin\pi t}{\pi}\bigg|_4^8\right) = \boxed{0} \quad \text{т.к. } \forall\, t, k \in \mathbb{Z}\colon\ \sin 2k\pi t = 0$$

Становится понятно, что все коэффициенты a_n при $n \,\vdots\, 3$ равны нулю. Теперь найдём коэффициенты b_n:

$$b_1 = \frac{2}{6}\left(\int_2^4 4\sin\frac{2\pi t}{6}\,dt + \int_4^8 \sin\frac{2\pi t}{6}\,dt\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{12\cos\frac{\pi t}{3}}{\pi}\bigg|_2^4 + \frac{3\cos\frac{\pi t}{3}}{\pi}\bigg|_4^8\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{12}{\pi}(\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}) + \frac{3}{2\pi}(\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3})\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{12}{\pi}(-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) + \frac{3}{2\pi}(-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})\right) = \boxed{0}$$

$$b_2 = \frac{1}{3}\left(\int_2^4 4\sin\frac{2\pi t}{3}\,dt + \int_4^8 \sin\frac{2\pi t}{3}\,dt\right) = \boxed{0} \quad \text{т.к. косинусы вновь взаимно уничтожат друг друга.}$$

Получается, что все коэффициенты b_n равны нулю. Это и логично, ведь функция четная и она полностью раскладывается по косинусам. Дальшеc_n:

$$c_0 = \frac{1}{6}\left(\int_2^4 4\,dt + \int_4^8 1\,dt\right) = \frac{a_0}{2} = \boxed{2}$$

Для коэффициентов c_n будет использоваться свойство $\mathrm{e}^{2ki\pi} = 1\ \forall k \in \mathbb{Z}$, связанное с кратностью $\cos 2k\pi t = 1$ и $\sin 2k\pi t = 0$.

$$c_1 = \frac{1}{6}\left(\int_2^4 4\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi i t}{3}}\,dt + \int_4^8 \mathrm{e}^{-\frac{\pi i t}{3}}\,dt\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{12}{\pi i}e^{-\frac{\pi i t}{3}}\bigg|_2^4 - \frac{3}{\pi i}e^{-\frac{\pi i t}{3}}\bigg|_4^8\right) = \frac{2i}{\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{4\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) + \frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{8\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{4\pi i}{3}}\right) =$$

$$= \frac{2i}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) + \frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{2i}{\pi} - \frac{i}{2\pi}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{i}{2\pi} - \frac{2i}{\pi}\right) = \frac{3i}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \frac{3i}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} =$$

$$= \boxed{\frac{3i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)}$$

$$c_2 = \frac{1}{6}\left(\int_2^4 4\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi it}{3}}\,dt + \int_4^8 \mathrm{e}^{-\frac{2\pi it}{3}}\,dt\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{6}{\pi i}e^{-\frac{2\pi it}{3}}\bigg|_2^4 - \frac{3}{2\pi i}e^{-2\frac{\pi it}{3}}\bigg|_4^8\right) = \frac{i}{\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{8\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{4\pi i}{3}}\right) + \frac{i}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{16\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{8\pi i}{3}}\right) =$$

$$\frac{i}{\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + \frac{i}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{i}{4\pi} - \frac{i}{\pi}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{i}{\pi} - \frac{i}{4\pi}\right) = -\frac{3i}{4\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} + \frac{3i}{4\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} = \boxed{\frac{3i}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}$$

Хоть мы и знаем, заглядывая наперёд, что $c_3 = c_{-3} = 0$, давайте всё же проверим себя, вычислив c_3:

$$c_3 = \frac{1}{6}\left(\int_2^4 4\,\mathrm{e}^{-\pi it}\,dt + \int_4^8 \mathrm{e}^{-\pi it}\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{\pi i}e^{-\pi it}\bigg|_2^4 - \frac{1}{\pi i}e^{-\pi it}\bigg|_4^8\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4i}{\pi}(e^{-4\pi i} - e^{-2\pi i}) + \frac{i}{\pi}(e^{-8\pi i} - e^{-4\pi i})\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4i}{\pi}(1-1) + \frac{i}{\pi}(1-1)\right) = \boxed{0}$$

Программа

Вот и програма, что позволит сейчас посчитать нам коэффициенты, а в будущем невероятно упростит жизнь n.

```python
from typing import Callable

import numpy as np

class FourierSeries:
    def __init__(self, func, period, num_points=2000):
        self.func = func
        self.period = period
        self.num_points = num_points

    def dot_product(self, f, g):
        t = np.linspace(0, self.period, self.num_points, endpoint=False)
        f_vals = f(t)
        g_vals = g(t)
        return np.trapz(f_vals * g_vals, t)

    def real_coefficients(self, N):
        t = np.linspace(0, self.period, self.num_points, endpoint=False)
        f_vals = self.func(t)
        dt = self.period / self.num_points
        a0 = (2.0 / self.period) * np.trapz(f_vals, t)
        a_n = np.zeros(N)
        b_n = np.zeros(N)

        for n in range(1, N + 1):
            omega_n = 2 * np.pi * n / self.period
            cos_n = np.cos(omega_n * t)
            sin_n = np.sin(omega_n * t)
            a_n[n - 1] = (2.0 / self.period) * np.trapz(f_vals * cos_n, t)
            b_n[n - 1] = (2.0 / self.period) * np.trapz(f_vals * sin_n, t)

        return a0, a_n, b_n

    def complex_coefficients(self, N):
        t = np.linspace(0, self.period, self.num_points, endpoint=False)
        f_vals = self.func(t)
        dt = self.period / self.num_points
        c_full = np.zeros(2 * N + 1, dtype=complex)
        c_mid = N
```

```
        c_full[c_mid] = (2.0 / self.period) * np.trapz(f_vals, t) / 2.0

        for n in range(1, N + 1):
            omega_n = 2.0 * np.pi * n / self.period
            exp_n = np.exp(-1j * omega_n * t)
            c_full[c_mid + n] = (1 / self.period) * np.trapz(f_vals * exp_n, t)
            c_full[c_mid - n] = np.conjugate(c_full[c_mid + n])

        return c_full

    def parseval_check(self, N: int) -> tuple[float, float]:
        t = np.linspace(0, self.period, self.num_points, endpoint=False)
        dt = self.period / self.num_points
        f_vals = self.func(t)

        energy_original = np.trapz(f_vals**2, dx=dt)
        a0, a_n, b_n = self.real_coefficients(N)
        energy_real = (a0**2) / 2
        for n in range(1, N + 1):
            energy_real += abs(a_n[n-1]**2) + b_n[n-1]**2
        c_full = self.complex_coefficients(N)
        energy_complex = np.sum(np.abs(c_full)**2) * self.period

        return np.abs(energy_original - energy_real), np.abs(energy_original - energy_complex)
```

Листинг 1: Вычисление коэффициентов Фурье для кусочной функции

Итак, программа выведет нам первые шесть коэффициентов Фурье для функции $f(t)$, среди которых есть и необходимые по заданию a_3, b_3 и c_3 — хотя они всё равно равны нулю, чего тут смотреть :)

```
a_0 = 4.000
--------------------
a_n = [-1.654087 0.826893 -0.000400]
--------------------
b_n = [0.000000 0.000000 0.000000]
--------------------
c_n = [-0.00020+0.00000j 0.41345+0.00000j -0.82704+0.00000j 1.99980+0.00000j -0.82704-0.00000j
    0.41345-0.00000j -0.00020-0.00000j]
--------------------
```

Листинг 2: Вывод программы

Графики

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков F_n и G_n рядов Фурье для функции $f(t)$:

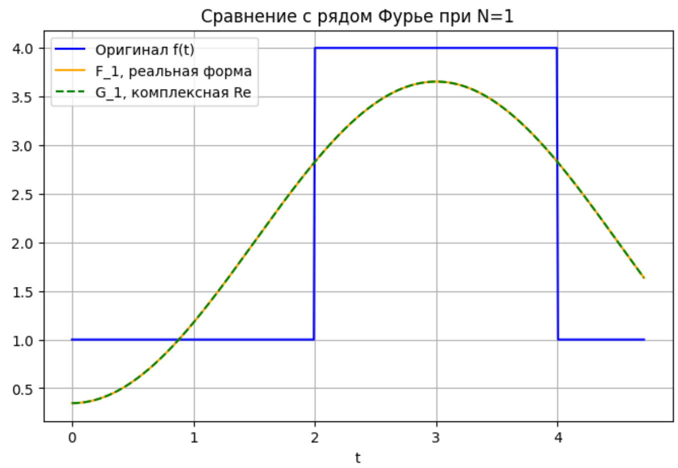

Рис. 2: $n = 1$

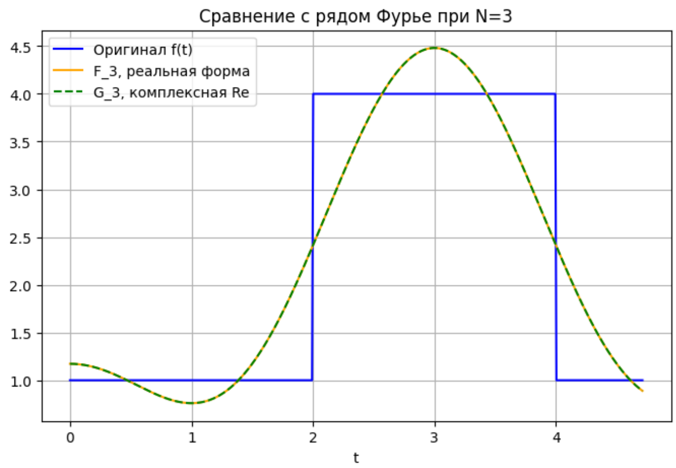

Рис. 3: $n = 3$

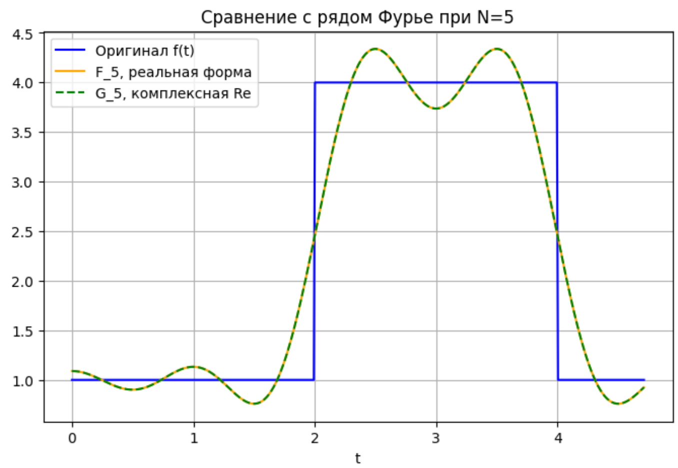

Рис. 4: $n = 5$

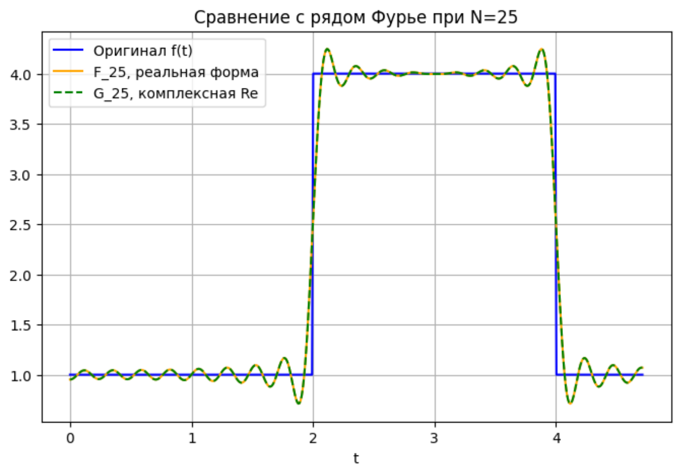

Рис. 5: $n = 25$

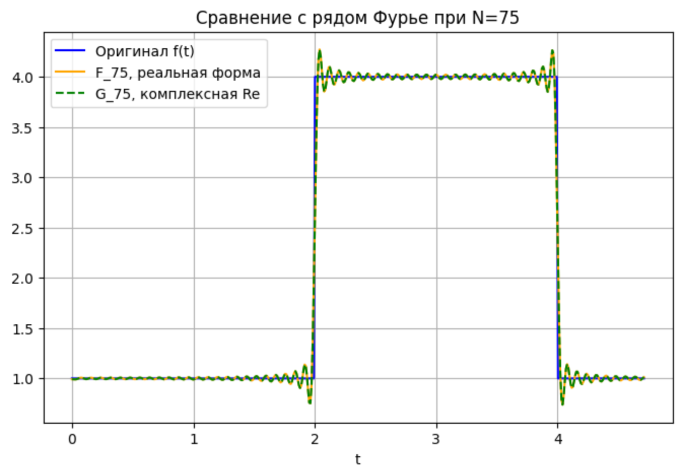

Рис. 6: $n = 75$

Как мы видим, ряды Фурье $F_n(t)$ и $G_n(t)$ совпадают и хорошо апроксимируют функцию $f(t)$ и если бы не эффект Гиббса, которого не избежать тут, делали бы это почти идеально

Чтобы убедиться в том, что при $n = 50$ ряд Фурье действительно хорошо приближается к функции $f(t)$, проверим равенство Парсеваля

```
Ошибка по Парсевалю (тригонометрическая форма): 0.073526
Ошибка по Парсевалю (комплексная форма): 0.073526
```

Листинг 3: Равенство Парсеваля при $n = 75$

Низкий уровень ошибки по Парсеваля подтверждает нашу позицию хорошей аппроксимации функции!

Продолжаем. Четная функция

Возьму в качестве подопытного четную функцию $f(t) = \sin^6(t)\cos(t)$. Начнем с графика:

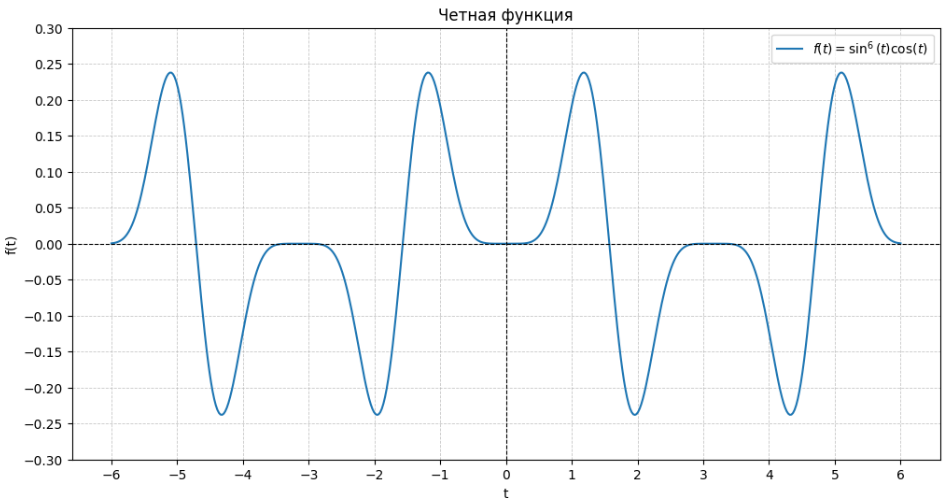

Рис. 7: График функции $f(t)$

Теперь на очереди вычисление коэффициентов. С четной вещественной функцией легко, ее коэффициенты $b_n = 0$ а $c_n = \overline{c_{-n}}$ Формулы будем использовать следующие:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^6(t)\cos(t)\cos(nt)dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^6(t)\cos(t)e^{-int}dt$$

Программные расчеты

Воспользуемся старым кодом и расчитаем коэффициенты при N=3

```python
def even_function(t):
    return np.sin(t)**8 * np.cos(t)
```

Листинг 4: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $\sin^6(t)\cos(t)$

Получаем первые коэффициенты a_3, b_3 и c_3 и уже начинаем радоваться:

```
a_0 = -0.000
--------------------
a_n = [0.054688  -0.000000  -0.109375]
--------------------
b_n = [0.000000  0.000000  0.000000]
--------------------
c_n = [-0.05469+0.00000j  0.00000-0.00000j  0.02734-0.00000j  -0.00000+0.00000j  0.02734+0.00000j
    0.00000+0.00000j  -0.05469-0.00000j]
```

Листинг 5: Вывод программы

Радуемся, ведь действительно коэффициенты b_n оказались равными нулю.

Графики

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(x)$:

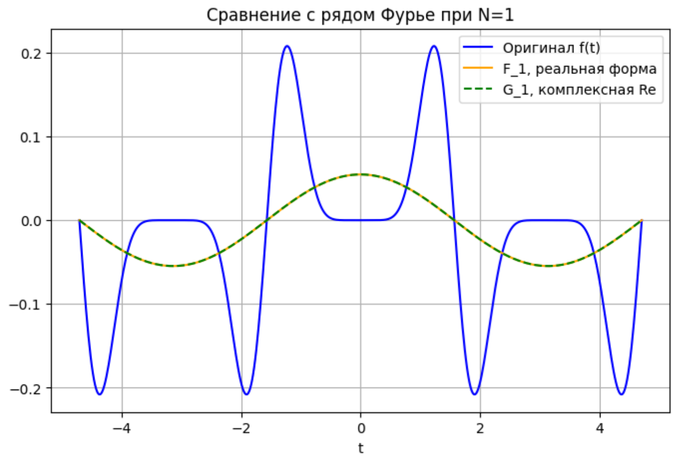

Рис. 8: $n = 1$

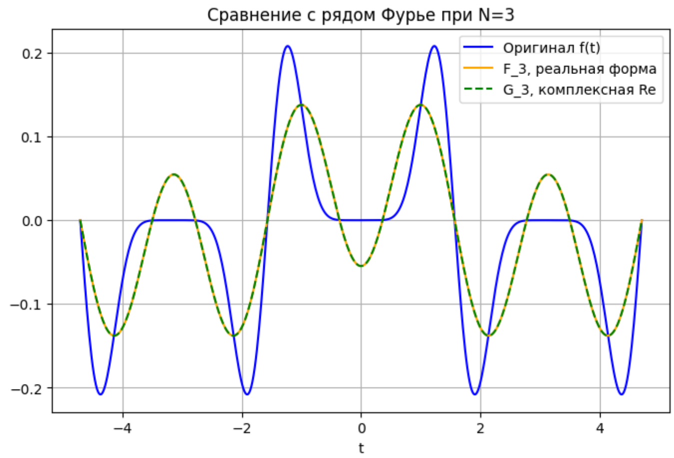

Рис. 9: $n = 3$

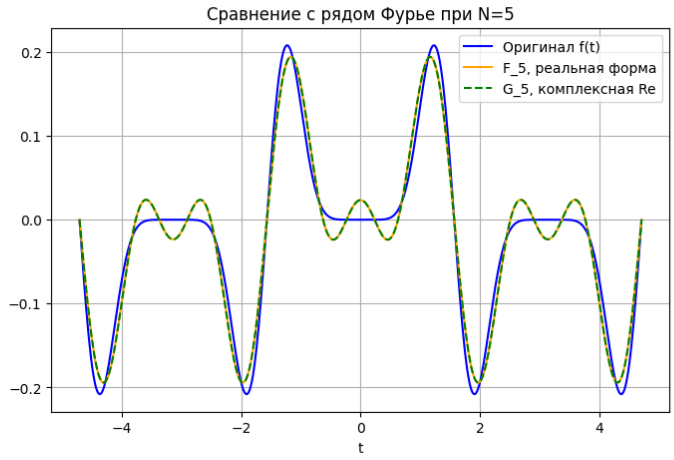

Рис. 10: $n = 5$

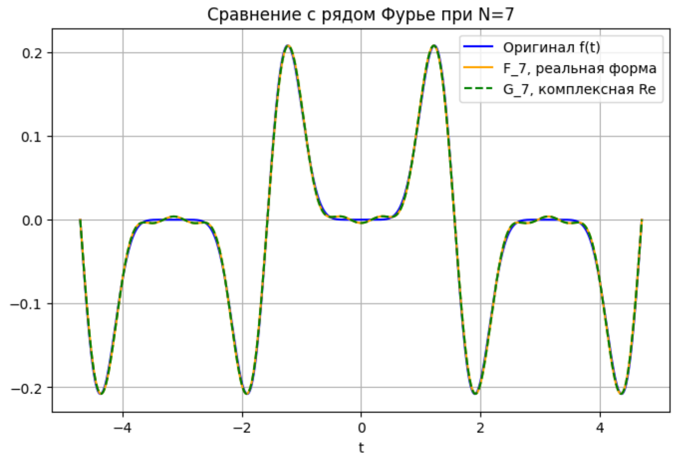

Рис. 11: $n = 7$

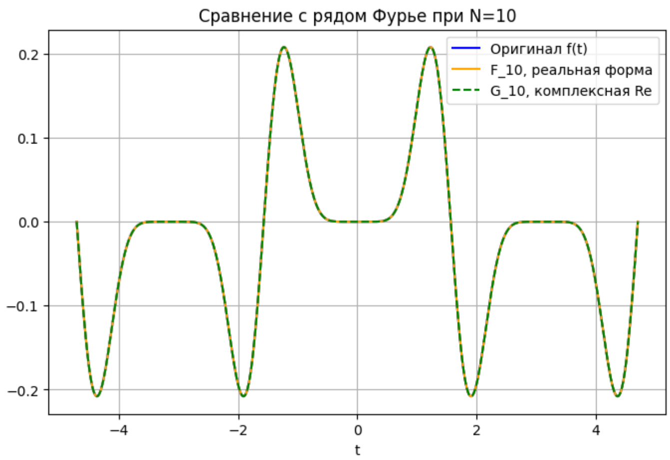

Рис. 12: $n = 10$

Опять убедимся, что графики рядов Фурье $F_n(t)$ и $G_n(t)$ совпадают. Функция $f(t)$ проста, потому уже $n = 7$ было достаточно, чтобы довольно точно описать график функции, а $n = 10$ описывает функцию почти идеально Наконец, давайте проверим как выполняется равенство Парсеваля для $n = 10$, чтобы подкрепить слова о точности на практике:

```
Parseval check Fn: 0.001323
Parseval check Gn: 0.000001
```

Листинг 6: Равенство Парасеваля при $n = 10$

Мы видим, что равенство Парсеваля для косплексного разложения выполняется так хорошо, ошибка почти равна нулю. Для вещественного же ситуация не хуже и тоже показывает прекрасный результат Интереса ради проверим выполнение равенства для комплексного разложения при $N = 7$

```
Parseval check Gn: 0.00005
```

Листинг 7: Равенство Парасеваля при $n = 7$

Видим, что все таки наши вычисления реалистичны, и при $N = 7$ определенная погрешность все же наблюдается, ее мы можем видеть и на графике

Не сбавляем темп. Нечетная функция

В качестве нечетной функции я возьму $f(t) = 8\sin(t)\cos^3(t)$. Начнем с графика:

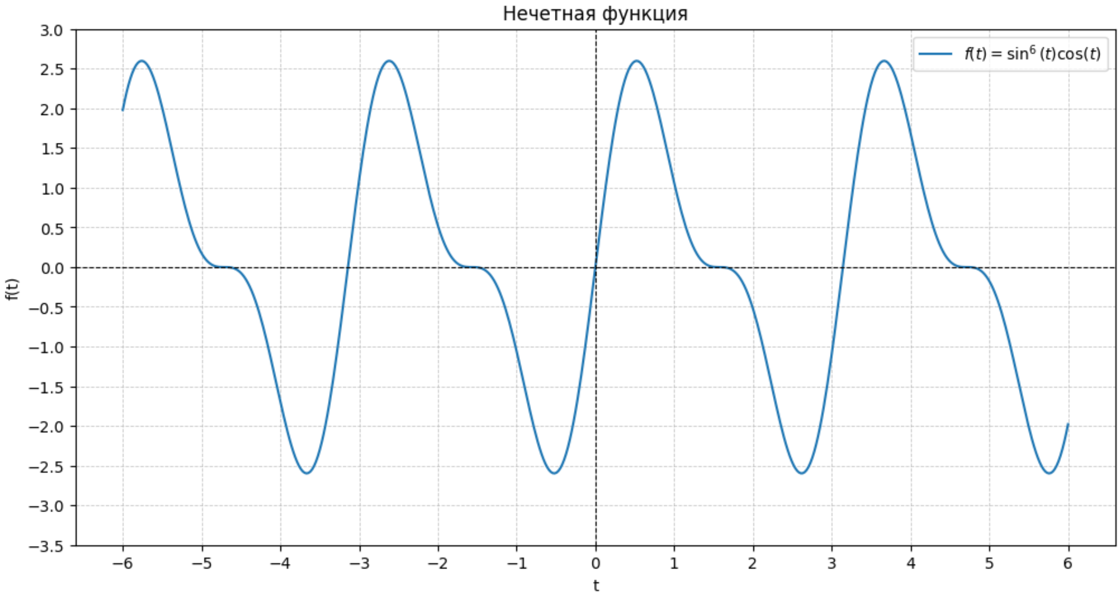

Рис. 13: График функции $f(t)$

Период функции $f(x)$ равен $T = \pi \Rightarrow \omega_n = 2n$. Пора опять подсчитать все нужные нам коэффициенты, перед этим стоит отметить, что мы имеем дело с нечетной функцией - потому коэффициенты a_n будут равны нулю. Таким образом нам понадобится две формулы

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(8\sin(x)\cos^3(x))\sin(2nx)dx \qquad c_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(8\sin(x)\cos^3(x))e^{-2int}dx$$

Программные расчеты

Считаем коэффициенты

```python
def odd_function(t):
  return 8*np.sin(t) * np.cos(t)**3
```

Листинг 8: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f()$

Получим первые 5 коэффициентов для разложения F_n и 6 для G_n:

```
a_0 = 0.000
--------------------
a_n = [0.000013  0.000013  0.000013  0.000013  0.000013]
--------------------
b_n = [-0.000000  2.000000  -0.000000  1.000000  -0.000000]
--------------------
c_n = [0.00001-0.00000j  0.00001+1.00000j  0.00001-0.00000j  0.00001+0.00000j  0.00001+0.00000j
    0.00001-1.00000j  0.00001+0.00000j]
```

Листинг 9: Вывод программы

Со скидкой на погрешность вычислений, коэффициенты a_n и правда оказались равны нулю. Как и c_n в придачу

Графики

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(x)$:

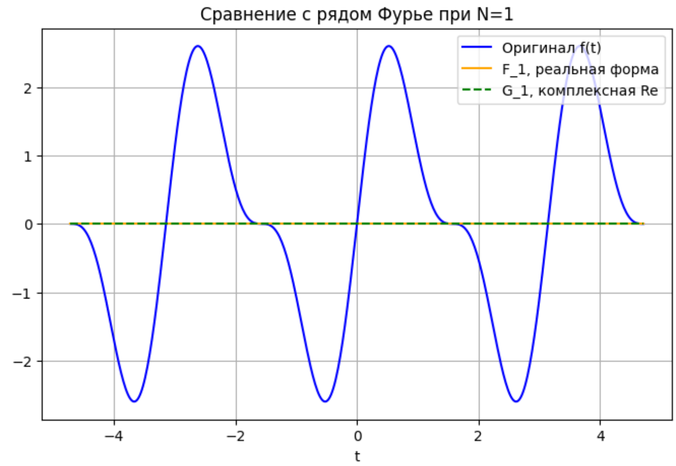

Рис. 14: $n = 1$

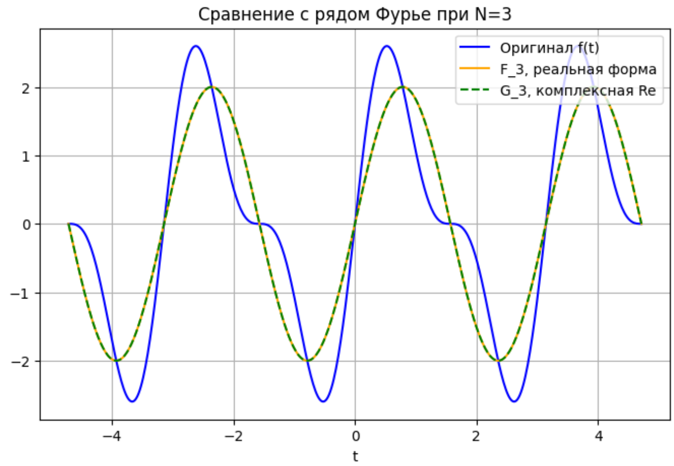

Рис. 15: $n = 3$

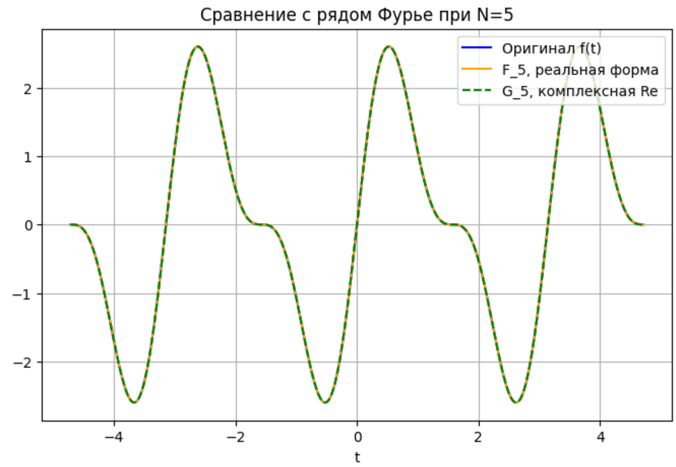

Рис. 16: $n = 5$

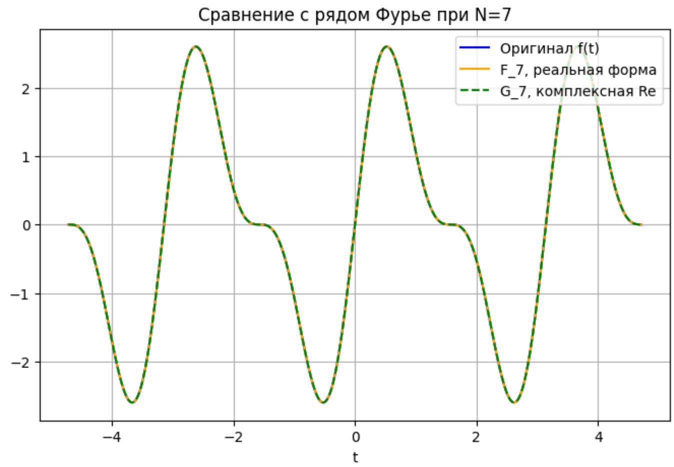

Рис. 17: $n = 7$

Нечетная функция вышла достаточно простой, и графики рядов Фурье прекрасно ложатся на оригинальную функцию. Достаточно $n = 5$ для хорошего приближения, потому выбирать какие то большие числа далее не имеет смысла. Чтобы убедиться в том, что при $n = 7$ ряд Фурье аппроксимирует функцию $f(x)$ очень точно, проверим равенство Парсеваля

```
Parseval check Fn: 0.00000103
Parseval check Gn: 0.00000098
```

Листинг 10: Равенство Парасеваля при $n = 7$

Результаты проверки точности равенства Парсеваля еще раз подкрепили наш результат, оба ряда Фурье прекрасно аппроксимируют функцию, разве что вычислительные изьяны при вычислении равенства Парсеваля для вещественного ряда немного портят картину

(Не)нечетная и (не)четная функция

В этом пункте мы обратимся к какой нибудь менее привычной периодической функции:

$$f(t) = 2\sin(\frac{t}{3}) + 2\cos^5(4t) + 1$$

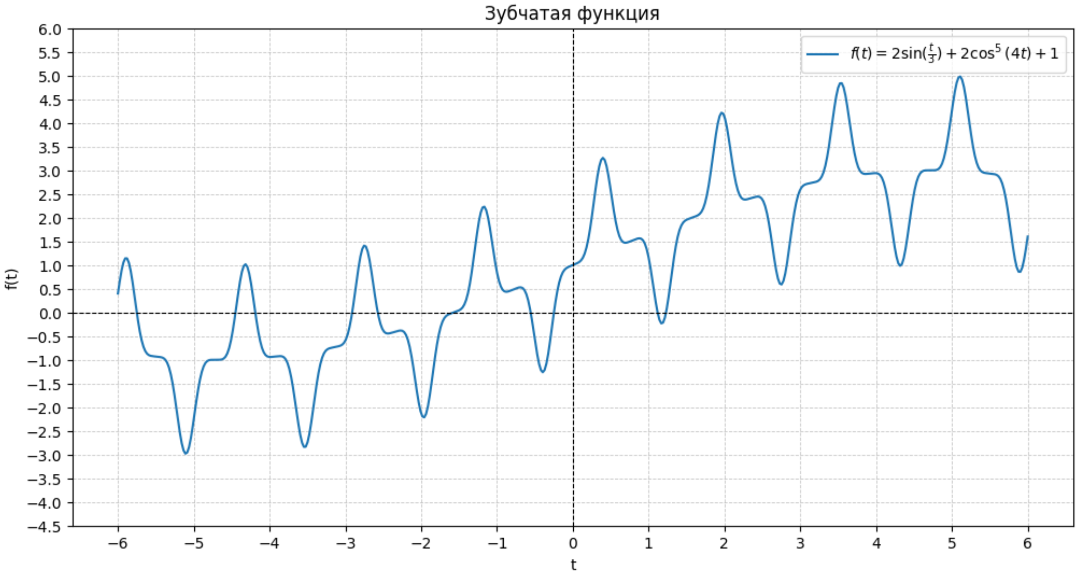

Рис. 18: График функции $f(t)$

Период функции $f(t)$ равен $T = 6\pi \;\Rightarrow\; \omega_n = \frac{n}{3}$. Найдём коэффициенты Фурье для функции с помощью уже написанной программы, но перед этим взглянем на то, как вычисляются коэффициенты a_n, b_n и c_n в общем виде:

$$a_n = \frac{1}{3\pi}\int\limits_0^{6\pi}(2\sin(\frac{t}{3}) + 2\cos^5(4t) + 1)\cos(\frac{nx}{3})dx \qquad b_n = \frac{1}{3\pi}\int\limits_0^{6\pi}(2\sin(\frac{t}{3}) + 2\cos^5(4t) + 1)\sin(\frac{nx}{3})dx$$

$$c_n = \frac{1}{6\pi}\int\limits_0^{6\pi}(2\sin(\frac{t}{3}) + 2\cos^5(4t) + 1)e^{\frac{-int}{3}}dx$$

Считаем

Вводим характеристики функции нашей программе

```
def my_function(t):
    return 2*np.sin(t/3)+2*np.sin(4*t)**5 + 1
```

Листинг 11: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(x)$

Программа вновь выводит нам первые 5 коэффициента Фурье:

```
a_0 = 4.862
--------------------
a_n = [-0.360831   -0.084584   -0.038543   -0.022766   -0.015522]
--------------------
b_n = [-0.620240   -0.283531   -0.186059   1.111223   -0.110734]
--------------------
c_n = [-0.01927-0.09303j   -0.04229-0.14177j   -0.18042-0.31012j   2.43103+0.00000j   -0.18042+0.31012j
      -0.04229+0.14177j   -0.01927+0.09303j]
```

Листинг 12: Вывод программы

Графики

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(x)$:

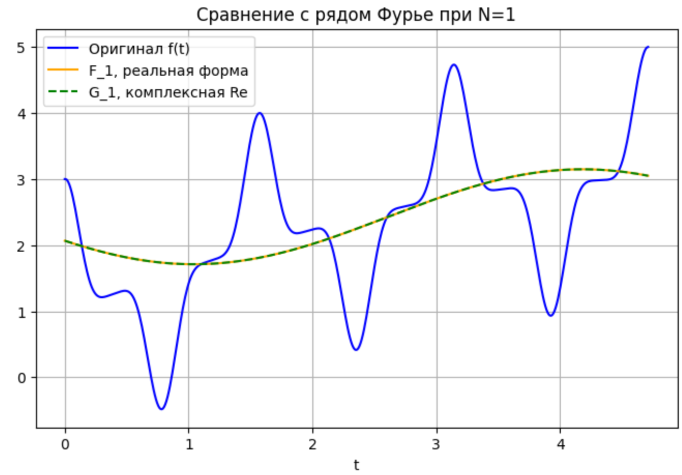

Рис. 19: $n = 1$

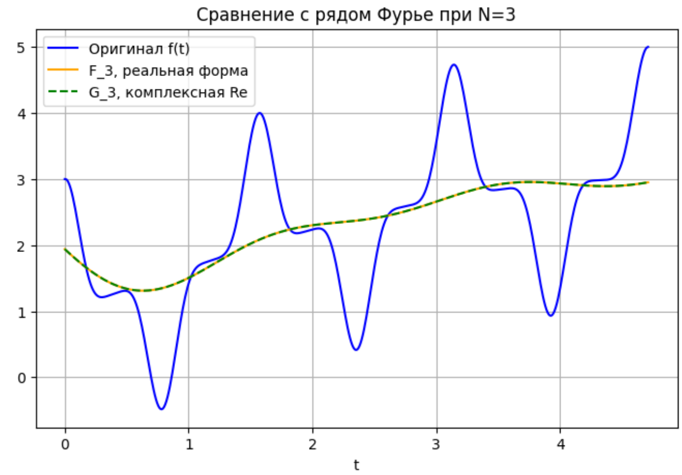

Рис. 20: $n = 3$

Рис. 21: $n = 5$

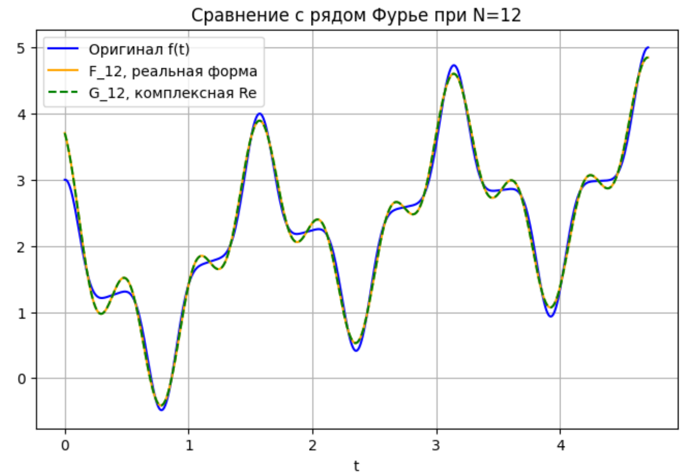

Рис. 22: $n = 12$

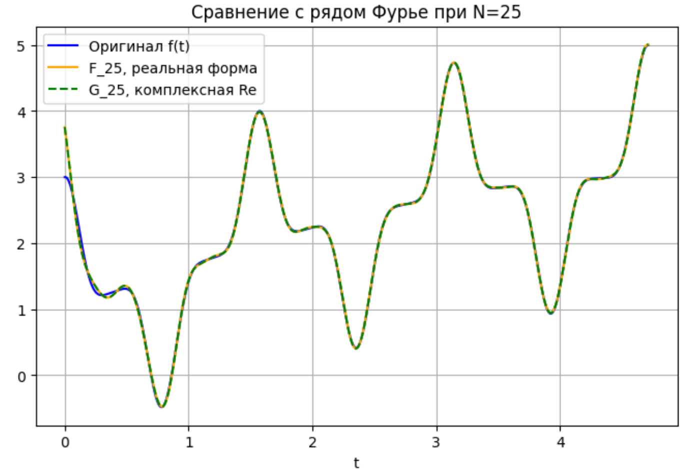

Рис. 23: $n = 25$

Аппроксимировать эту функцию было тяжелее всего, но все же даже ее ряд фурье $n > 20$ "переваривает"спокойно. Чтобы убедиться в том, что при $n = 25$ ряд Фурье аппроксимирует функцию $f(x)$ достаточно точно, проверим равенство Парсеваля

```
Parseval check Fn: 0.0971634136
Parseval check Gn: 0.0813071454
```

Листинг 13: Равенство Парасеваля при $n = 25$

Результат не так радужен как обычно, даже это уже серьезный результат для уверенности - рано или поздно ошибка равенства доберется до нуля.

Задание №2. Комплексная функция

Перед выполнением задания упомянем основные функции, что после пригодятся нам по заданию Формулы Эйлера:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Наше преобразование:

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = a\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) + b\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) - \frac{ib}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{a - ib}{2}\, e^{i\omega t} + \frac{a + ib}{2}\, e^{-i\omega t} = c\, e^{i\omega t} + \bar{c}\, e^{-i\omega t}$$

Раскалдывать будем ряд в $[-\infty, \infty]$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\omega_n t}, \text{ где } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Зададим $R = 4$ и $T = 8 \;\Rightarrow\; \omega = {}^{\pi n}/_{4}$. И получим по заданию следующую комплекснозначную параметрическую функцию:

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} 4, & t \in [-1, 1), \\ -4t + 8, & t \in [1, 3), \\ -4, & t \in [3, 5), \\ 4t - 24, & t \in [5, 7), \end{cases} \qquad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} 4t, & t \in [-1, 1), \\ 4, & t \in [1, 3), \\ -4t + 16, & t \in [3, 5), \\ -4, & t \in [5, 7). \end{cases}$$

График функции $f(t)$ обозначим на комплексной плоскости:

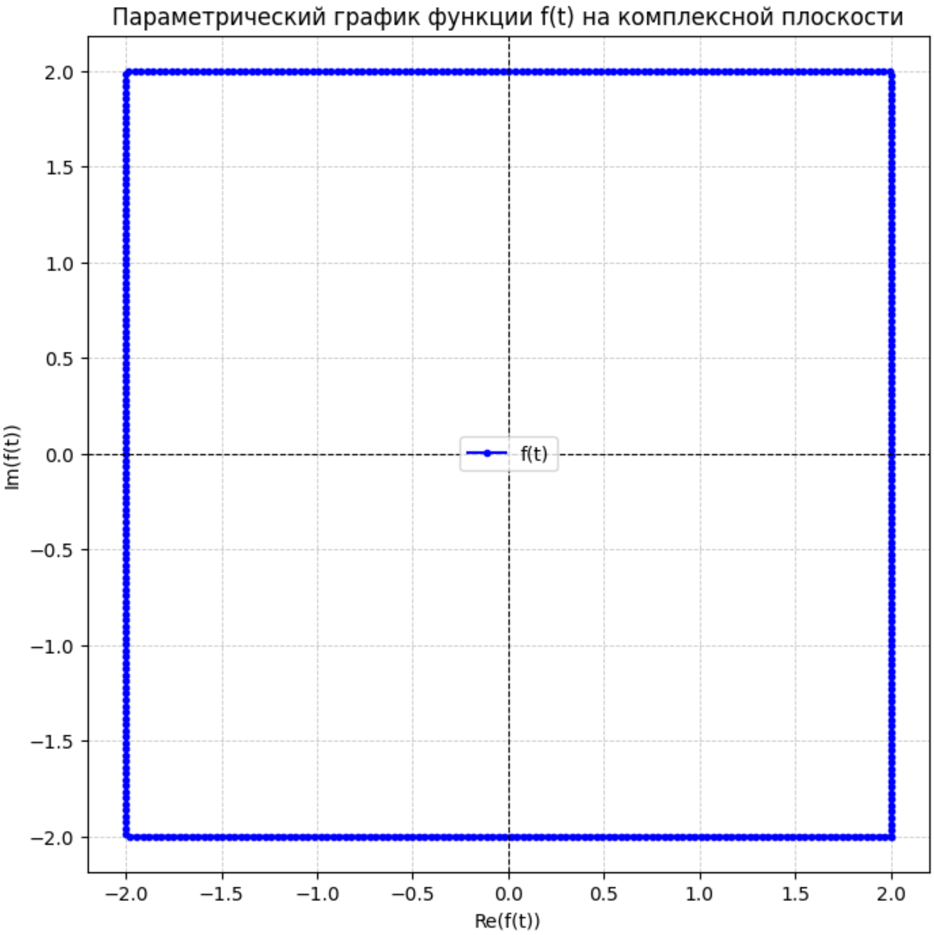

Рис. 24: График функции $f(t)$

Результат это ни что иное как просто квадратик) Продолжаем работу

Ручной счет

Теперь найдём коэффициенты Фурье c_n для этой функции, которые в общем виде вычисляются так:

$$c_n = \frac{1}{8}\int_{-1}^{7} f(t)e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{1}(4+4ti)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt + \int_{1}^{3}(-4t+8+4i)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{3}^{5}(-4+16i-4ti)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt + \int_{5}^{7}(4t-24-4i)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt\right)$$

Считаем c_0, c_1, c_2:

$$c_0 = \int_{-1}^{1}\frac{(4+4ti)}{8}\,dt + \int_{1}^{3}\frac{(-4t+8+4i)}{8}\,dt + \int_{3}^{5}\frac{(-4+16i-4ti)}{8}\,dt + \int_{5}^{8}\frac{(4t-24-4i)}{8}\,dt = \frac{1}{8}(6-4i-6+4i) = 0$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1}\frac{(4+4ti)}{8}\,e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt + \int_{1}^{3}\frac{(-4t+8+4i)}{8}\,e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt +$$

$$+\int\limits_{3}^{5}\frac{(-4+16i-4ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt+\int\limits_{5}^{8}\frac{(4t-24-4i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt\approx 5.459-0.2i$$

$$c_2=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(4+4ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt+\int\limits_{1}^{3}\frac{(-4t+8+4i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt+$$

$$+\int\limits_{3}^{5}\frac{(-4+16i-4ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt+\int\limits_{5}^{8}\frac{(4t-24-4i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}dt\approx 0.839+0.116i$$

Пункт для программы

Воспользуемся программой, которая вычисляет коэффициенты Фурье самостоятельно для любого n, чтобы найти требуемый в задании коэффициент c_3 для функции $f(t)$:

```

def f_complex(t, R=2.0, T=8.0):
    tau = (t + T / 8) % T
    res = np.zeros_like(tau, dtype=complex)

    mask1 = (0 <= tau) & (tau < T / 4)
    mask2 = (T / 4 <= tau) & (tau < T / 2)
    mask3 = (T / 2 <= tau) & (tau < 3 * T / 4)
    mask4 = (3 * T / 4 <= tau) & (tau < T)

    t_phys_1 = tau[mask1] - T / 8
    Re_val_1 = R
    Im_val_1 = (8 * R / T) * t_phys_1
    res[mask1] = Re_val_1 + 1j * Im_val_1

    t_phys_2 = tau[mask2] - T / 4 + T / 8
    Re_val_2 = 2 * R - (8 * R / T) * t_phys_2
    Im_val_2 = R
    res[mask2] = Re_val_2 + 1j * Im_val_2

    t_phys_3 = tau[mask3] - T / 2 + 3 * T / 8
    Re_val_3 = -4 * R - (8 * R / T) * t_phys_3
    Im_val_3 = 4 * R - (8 * R / T) * t_phys_3
    res[mask3] = Re_val_3 + 1j * Im_val_3
    t_phys_4 = tau[mask4] - 3 * T / 4 + 5 * T / 8
    Re_val_4 = -6 * R + (8 * R / T) * t_phys_4
    Im_val_4 = -R
    res[mask4] = Re_val_4 + 1j * Im_val_4
    return res
```

Листинг 14: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(t)$

Итак, программа выдаёт нам первые 4 коэфциента:

```
c_n = [-0.0-0.0j   5.45402 - 0.20294i  0.85934 + 0.11933i  -4.92350+0.38832j]
```

Листинг 15: Вывод программы

Графики

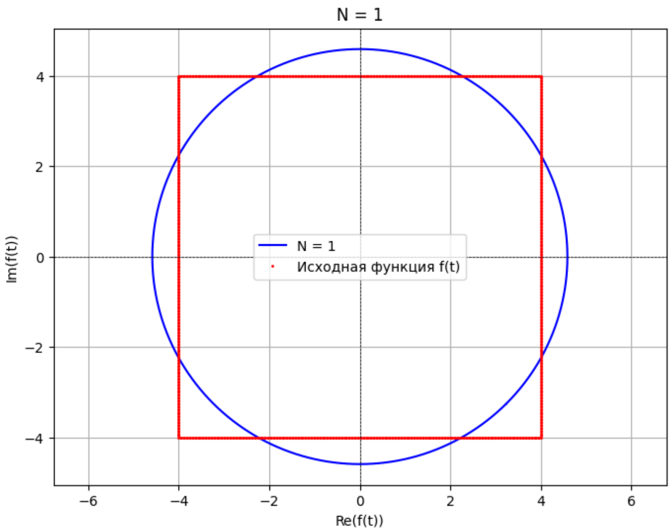

Рис. 25: $n = 1$

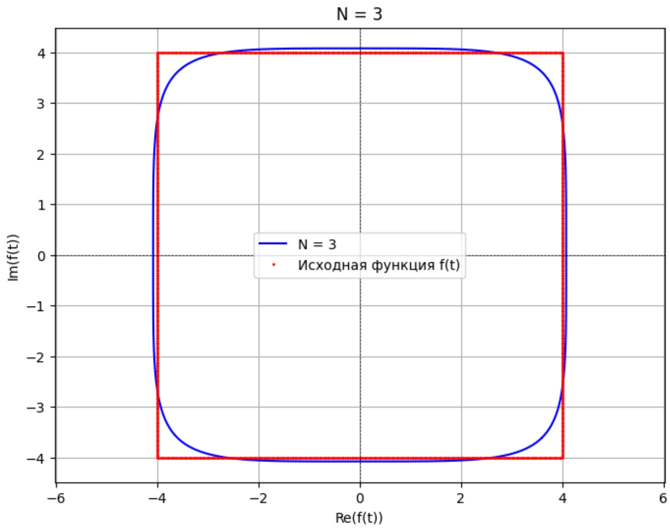

Рис. 26: $n = 3$

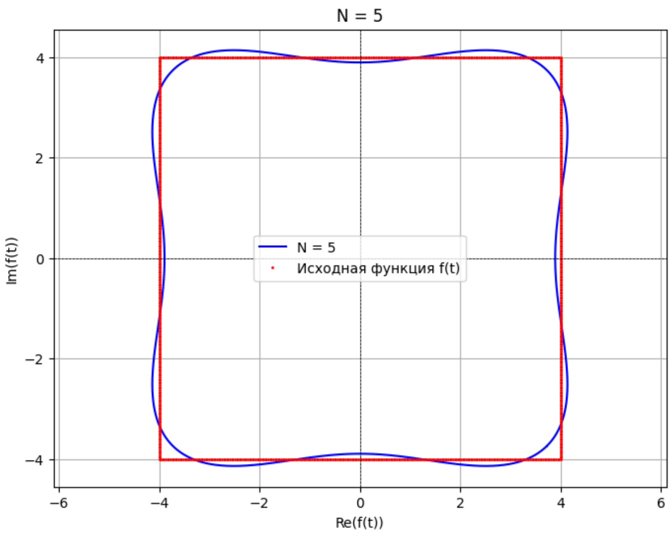

Рис. 27: $n = 5$

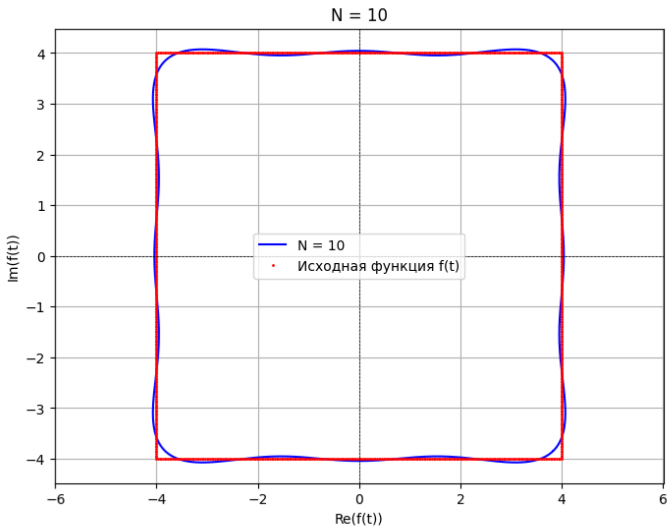

Рис. 28: $n = 10$

Начиная с первых значений, вокруг квадрата формируется круг, который становится с увеличением гармоник всё больше похож на квадрат. Теперь построим графики Re(t) и Im(t) и посмотрим как ряд Фурье будет их аппроксимировать:

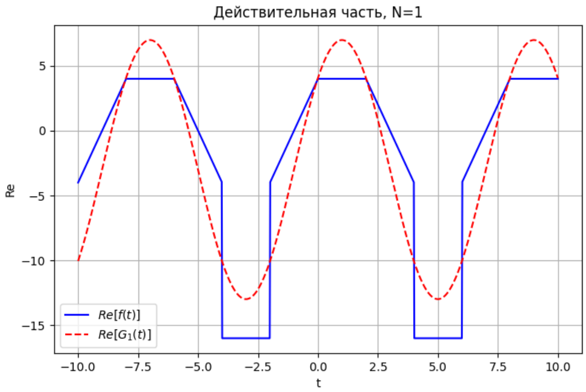

Рис. 29: $Re \quad n = 1$

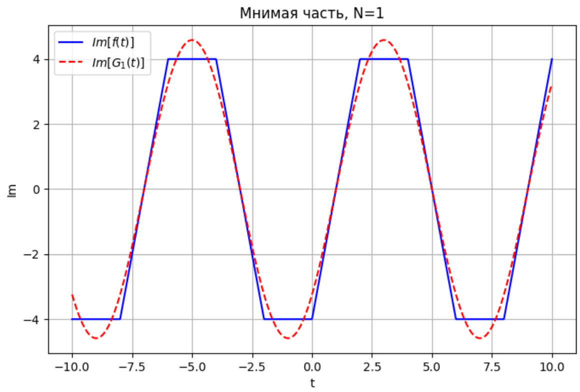

Рис. 30: $Im \quad n = 1$

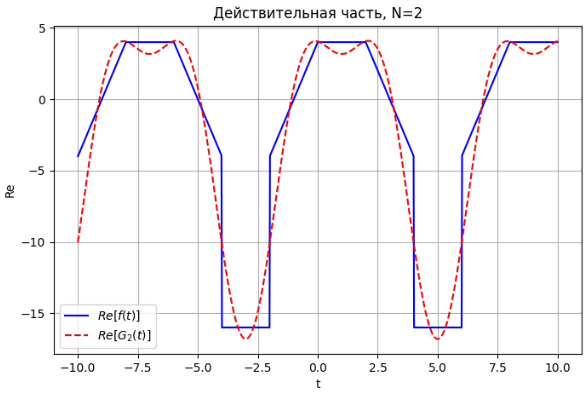

Рис. 31: $Re \quad n = 2$

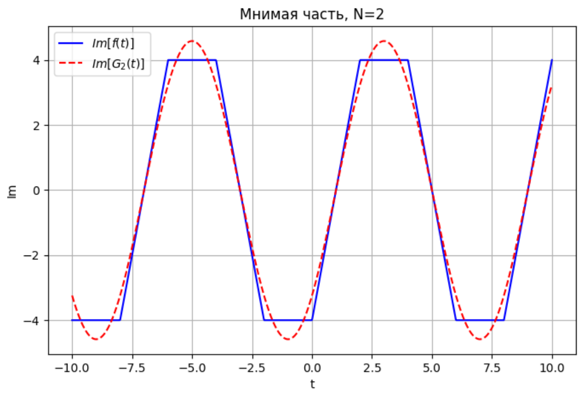

Рис. 32: $Im \quad n = 2$

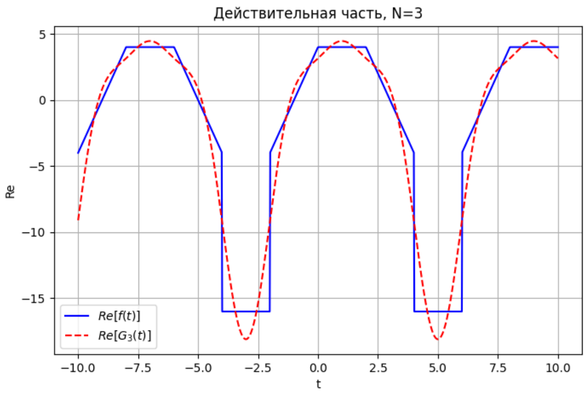

Рис. 33: $Re \quad n = 3$

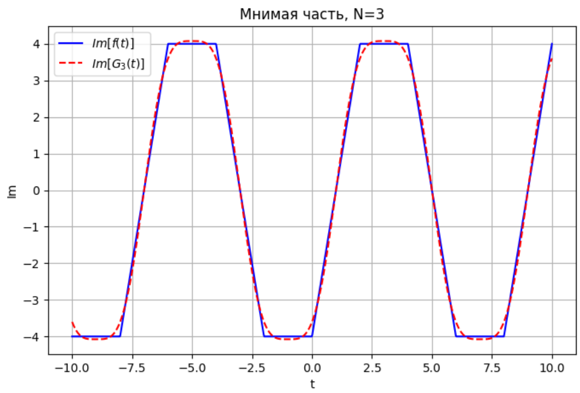

Рис. 34: $Im \quad n = 3$

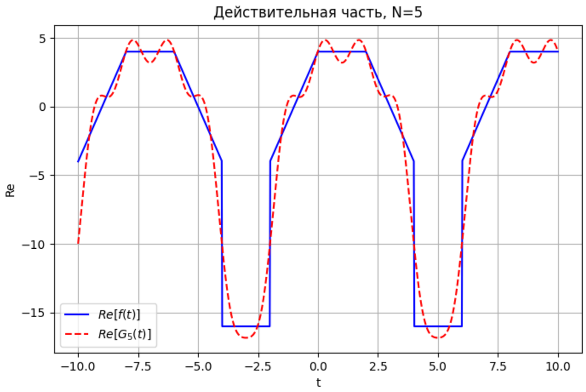

Рис. 35: $Re \quad n = 5$

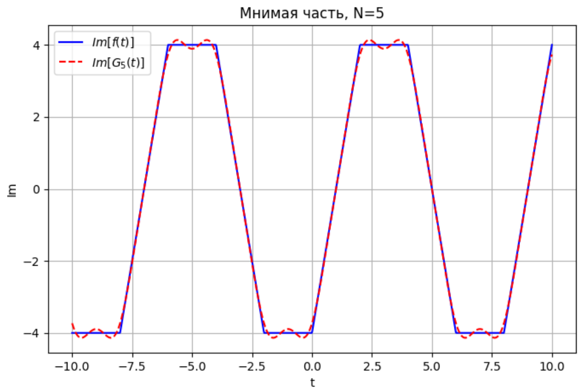

Рис. 36: $Im \quad n = 5$

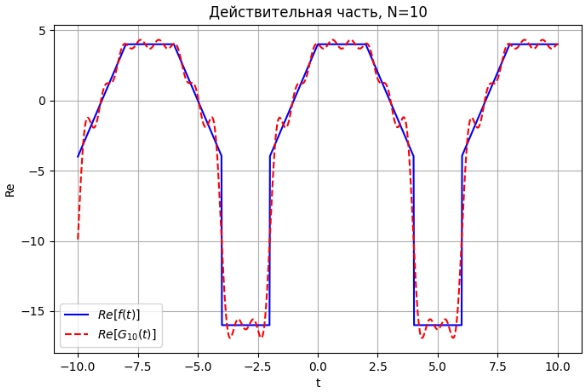

Рис. 37: $Re \quad n = 10$

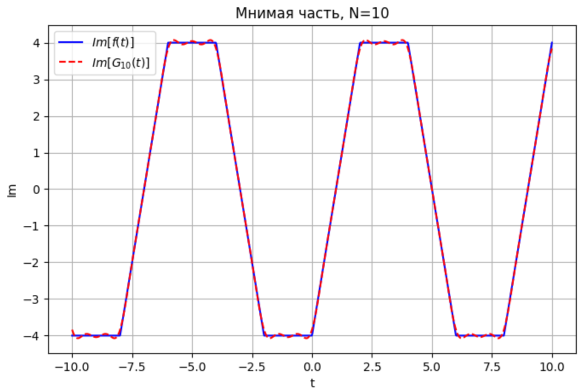

Рис. 38: $Im \quad n = 10$

Наглядно видно, что ряд сходится как в вещественной так и в мнимой части

Чтобы убедиться в том, что при $n = 10$ ряд Фурье очень точен к функции $f(t)$, проверим равенство Парсеваля

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.42457
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.42457
```

Листинг 16: Равенство Парасеваля при $n = 1$

```
Parseval check Fn: 0.0014644136
Parseval check Gn: 0.0014644154
```

Листинг 17: Равенство Парасеваля при $n = 10$

Результаты погрешности равенства Парсеваля наглядно подтверждают сходимость

Подводим выводы, подытоживаем итоги

В ходе лабораторной работы мы изучили методы вычисления коэффициентов Фурье для различных функций и выяснили, что ряд Фурье может быть представлен как в тригонометрической, так и в комплексной формах.

Было установлено, что структура ряда Фурье зависит от чётности функции: для чётных функций отсутствуют синусные слагаемые, для нечётных — косинусные, а в общем случае ряд содержит оба типа слагаемых.

Мы наглядно убедились, что с увеличением числа членов ряда Фурье точность аппроксимации исходной функции возрастает, что подтверждается как графически (улучшение совпадения графиков ряда и функции), так и аналитически через выполнение равенства Парсеваля, где ошибка аппроксимации стремится к нулю с ростом числа коэффициентов.