

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №3  
**Вынужденное движение и показатели качества**

Студенты: Загайнов А.А.  
Поток: Лин САУ Р23 бак 1.1.2  
Вариант: 11  
Преподаватели: Перегудин. А.А., Пашенко А.В.

Санкт-Петербург  
2026

## Содержание

<b>Задание 1. Вынужденное движение</b>	<b>3</b>
Моделирование . . . . .	4
Графики для $a_1 = 3.2, a_0 = 171.56$ . . . . .	4
Графики для $a_1 = 0, a_0 = 169$ . . . . .	5
Графики для $a_1 = -3.2, a_0 = 171.56$ . . . . .	7
<b>Задание 2. Качество переходных процессов</b>	<b>8</b>
Моделирование . . . . .	9
Первый набор: $\lambda_{1,2,3} = \{-3, -3, -3\}$ . . . . .	9
Второй набор: $\lambda_{1,2,3} = \{-3, -3, -1\}$ . . . . .	10
Третий набор: $\lambda_{1,2,3} = \{-3, -3, -6\}$ . . . . .	11
Четвертый набор: $\lambda_{1,2,3} = \{-3 + 3j, -3 - 3j, -6\}$ . . . . .	12
Пятый набор: $\lambda_{1,2,3} = \{-3 + 6j, -3 - 6j, -6\}$ . . . . .	13
Шестой набор: $\lambda_{1,2,3} = \{-3 + 9j, -3 - 9j, -6\}$ . . . . .	14
Сводная таблица результатов и оценок . . . . .	14
Выводы . . . . .	14

## Задание 1. Вынужденное движение

В рамках этого задания будем работать с системой второго порядка:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = a_0u$$

Сразу же создадим структурную схему системы в matlab:

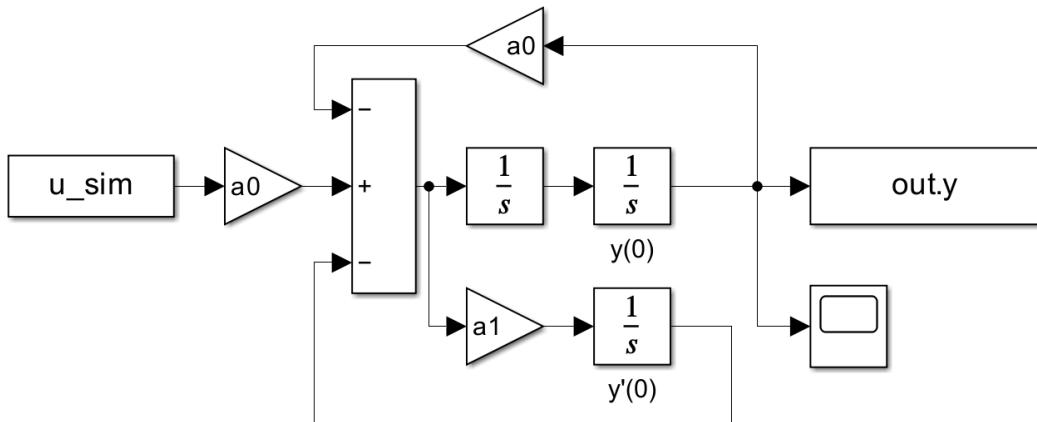


Рисунок 1: Структурная схема

Теперь вооружусь наборами коэффициентов из предыдущей лабораторной работы - их будем брать за основу:

- $a_1 = 3.2 \quad a_0 = 171.56$

- $a_1 = 0 \quad a_0 = 169$

- $a_1 = -3.2 \quad a_0 = 171.56$

Главная цель задания заключается с моделировании вынужденного движения системы с разными наборами начальных условий и типами входного сигнала.

Начальные условия:

$$y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0; \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0; \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0;$$

Входные воздействия из таблицы для варианта 11:

$$u(t) = 2; \quad u(t) = 0.7t; \quad u(t) = \sin(5t);$$

## Моделирование

Выполним моделирование трех графиков для каждого из трех наборов коэффициентов. Каждый график будет показывать поведение системы с определенным входным воздействием при разных начальных условиях.

**Графики для  $a_1 = 3.2, a_0 = 171.56$**

:

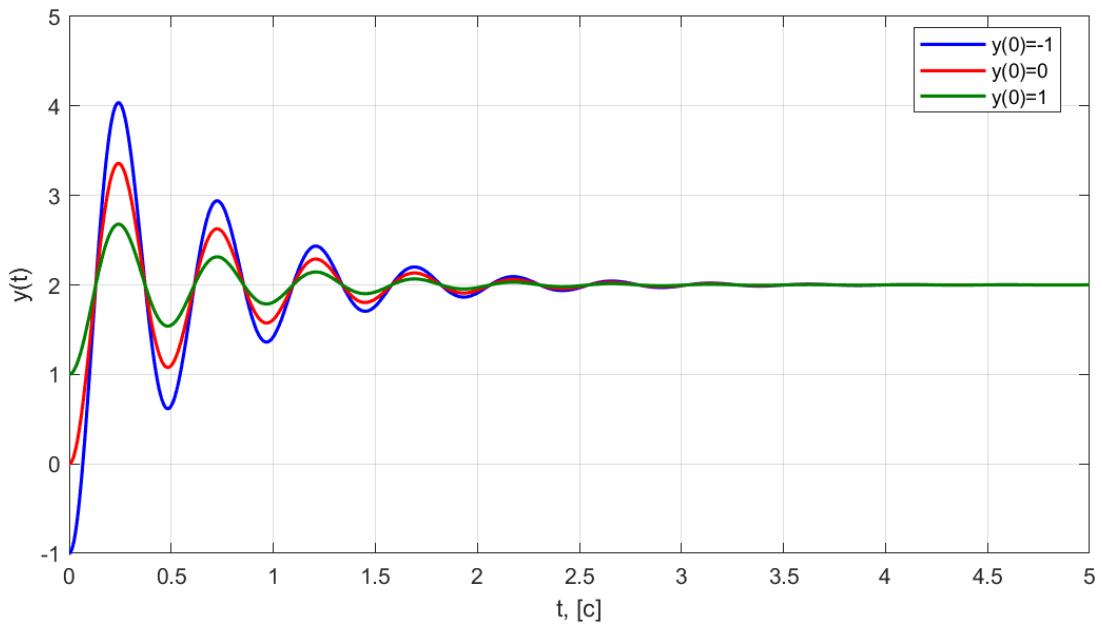


Рисунок 2: График выходного сигнала при  $u(t) = 2$

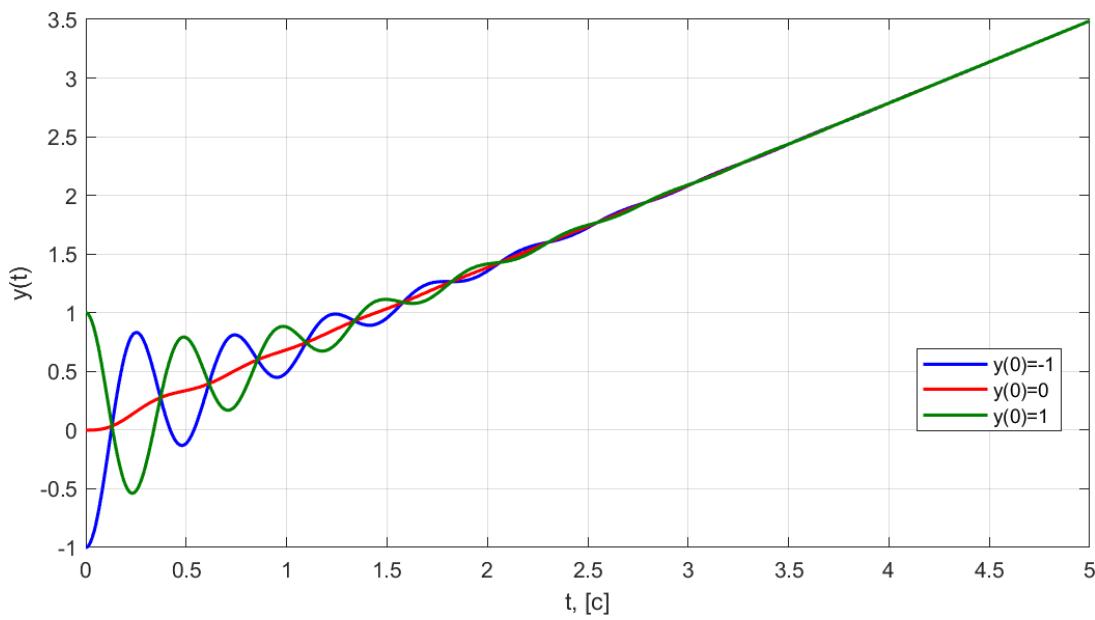
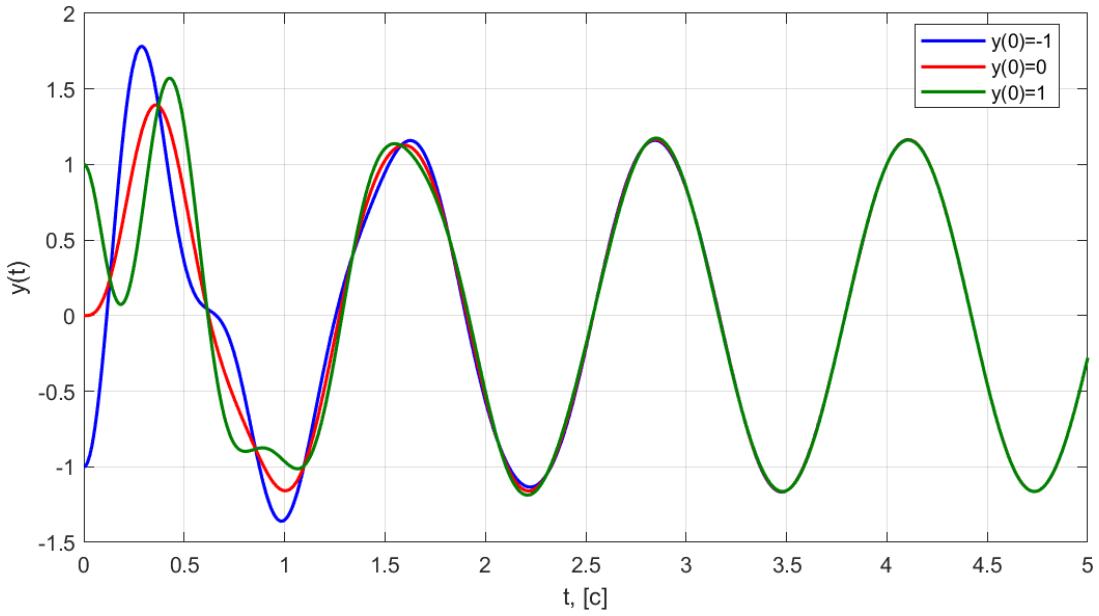


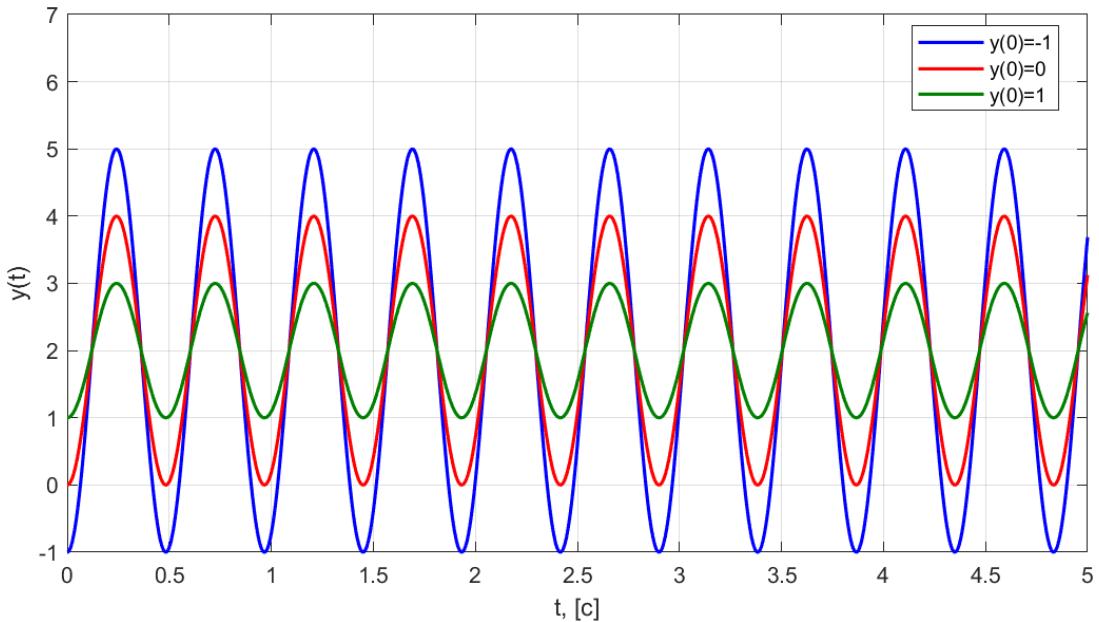
Рисунок 3: График выходного сигнала при  $u(t) = 0.7t$

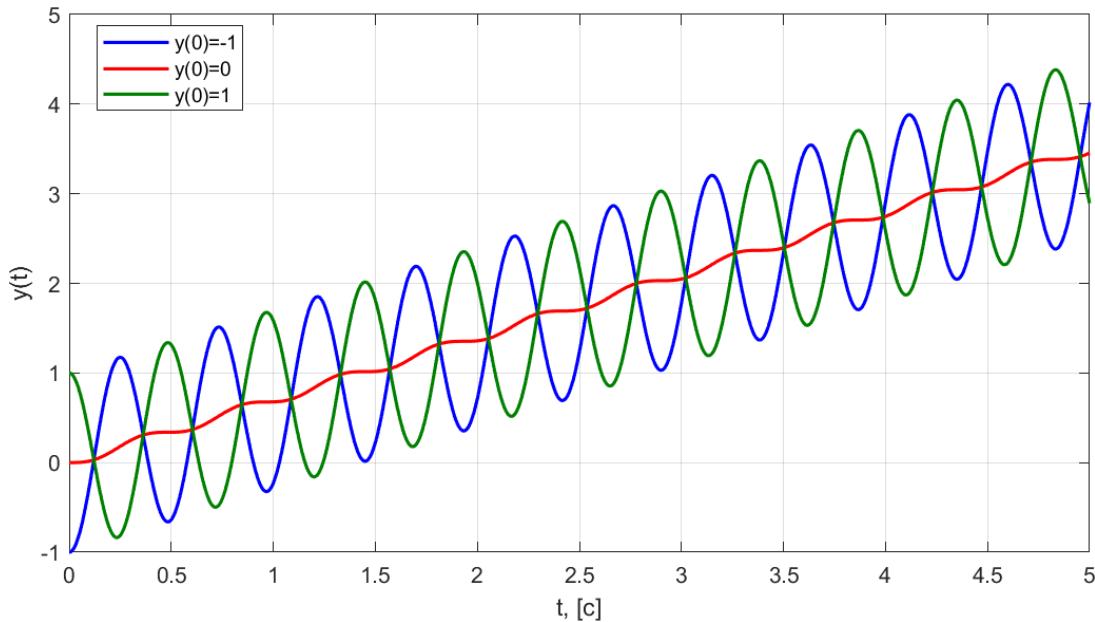
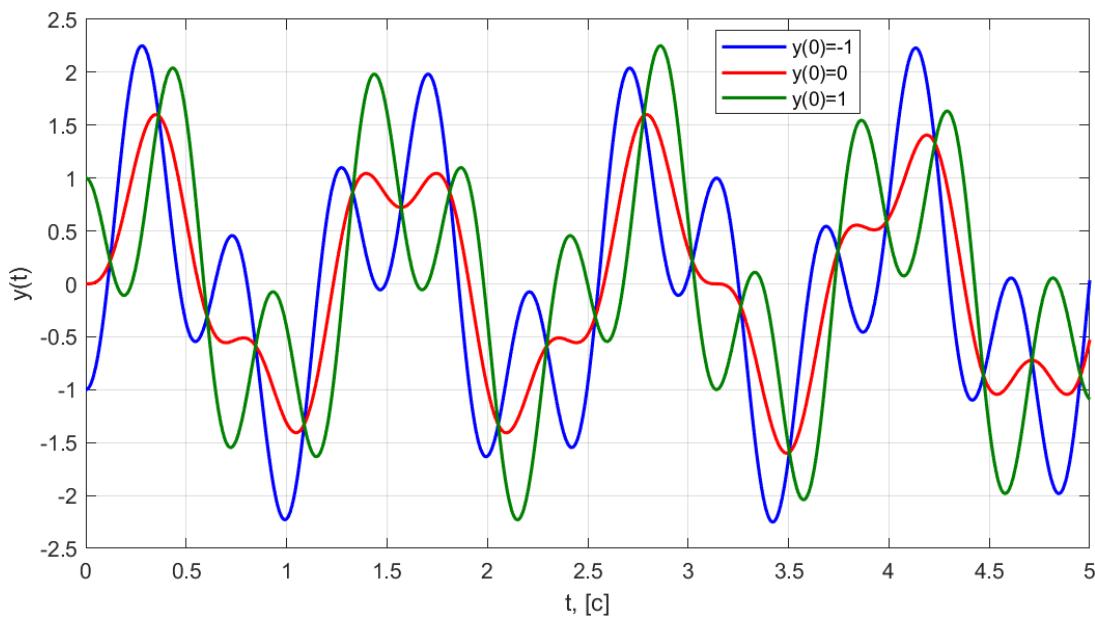
Рисунок 4: График выходного сигнала при  $u(t) = \sin(5t)$ 

**Анализ при  $a_1 = 3.2$ ,  $a_0 = 171.56$**

Данные коэффициенты соответствуют асимптотически устойчивой системе. По графикам можно заметить, что вне зависимости от входного воздействия и начальных условий выход системы со временем сходится к установившемуся режиму, определяемому входом  $u(t)$  (влияние начальных условий затухает).

**Графики для  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 169$**

Рисунок 5: График выходного сигнала при  $u(t) = 2$

Рисунок 6: График выходного сигнала при  $u(t) = 0.7t$ Рисунок 7: График выходного сигнала при  $u(t) = \sin(5t)$ **Анализ при  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 169$** 

Данные коэффициенты соответствуют системе на границе устойчивости. По графикам можно заметить, что вне зависимости от входного воздействия и начальных условий выход системы колеблется около графика входного сигнала, при этом вклад начальных условий не затухает, ведь коэффициент  $a_1$ , который и отвечает в нашей системе за демпфирование, равен нулю.

Графики для  $a_1 = -3.2$ ,  $a_0 = 171.56$

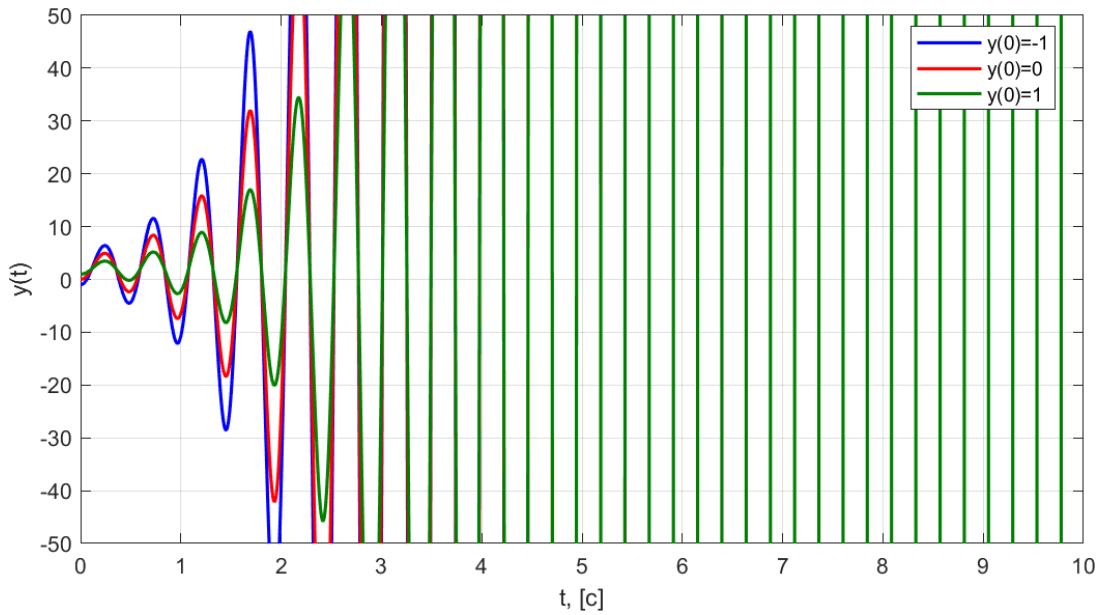


Рисунок 8: График выходного сигнала при  $u(t) = 2$

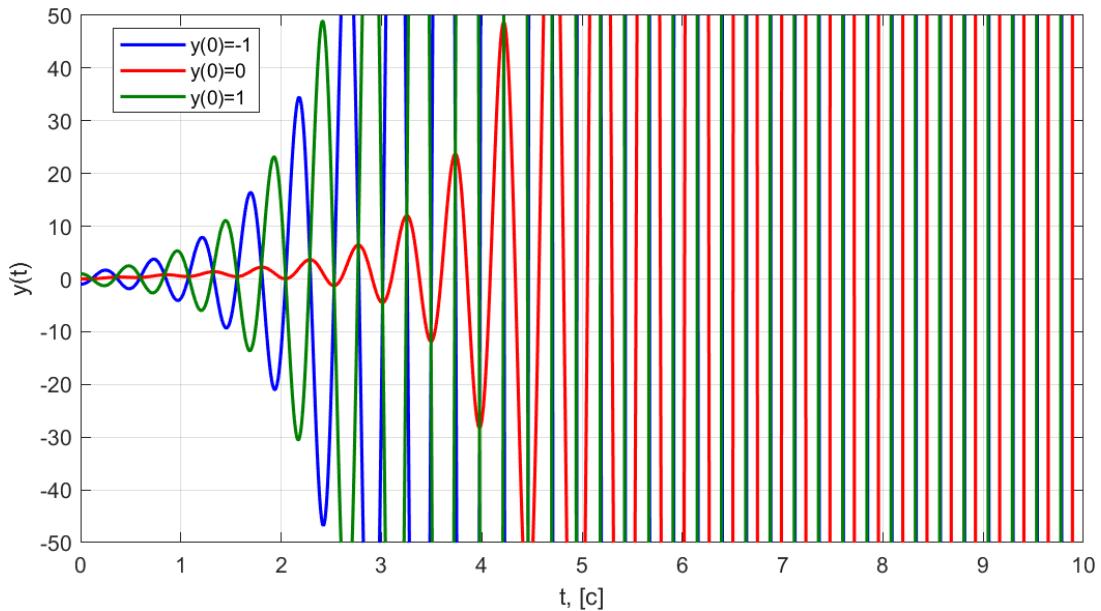
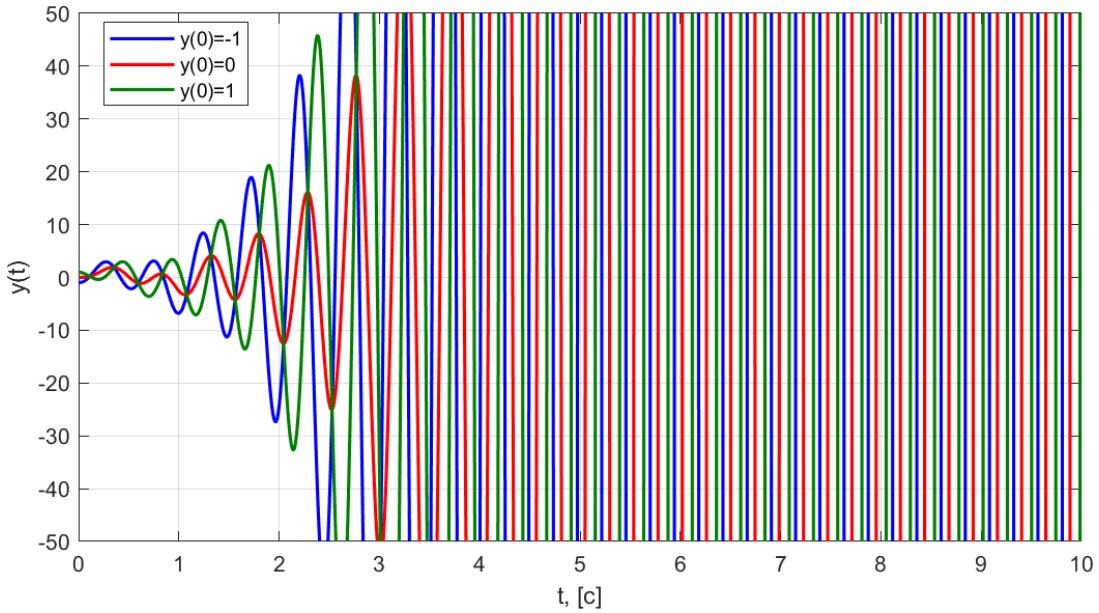


Рисунок 9: График выходного сигнала при  $u(t) = 0.7t$

Рисунок 10: График выходного сигнала при  $u(t) = \sin(5t)$ **Анализ при  $a_1 = -3.2$ ,  $a_0 = 171.56$** 

Данные коэффициенты соответствуют неустойчивой системе. По графикам можно заметить, что вне зависимости от входного воздействия и начальных условий выход системы уходит в бесконечность. Но интересно, как из за, казалось бы небольшой разницы в начальных условиях, системы со временем будут все быстрее и быстрее удаляться друг от друга

## Задание 2. Качество переходных процессов

В этом задании мы работаем с системой 3-го порядка, заданной следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \quad R(\lambda_i) < 0,$$

Будем исследовать влияние расположения полюсов  $\lambda_i$  на качество переходного процесса  $y(t)$  при единичном скачке  $u(t) = 1(t)$ . Получим характеристики переходного процесса.

Рассмотрим 6 наборов (все полюса с отрицательной вещественной частью):

	Полюса $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$
1	$\{-3, -3, -3\}$
2	$\{-3, -3, -1\}$
3	$\{-3, -3, -6\}$
4	$\{-3 \pm 3j, -6\}$
5	$\{-3 \pm 6j, -6\}$
6	$\{-3 \pm 9j, -6\}$

Из характеристик мы будем вычислять перерегулирование  $\sigma$  в процентах и время переходного процесса  $t_{\text{пп}}$ . Формула для перерегулирования и степень колебательности:

$$\sigma = \frac{\max(y_{s.r.}) - y_\infty}{y_\infty} \%$$

$$\sigma_{\text{оп}} < e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100\%, \quad \mu = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \lambda = -\alpha \pm j\beta.$$

Формула для переходного процесса:

$$t \rightarrow |y_{s.r.}(t) - y_\infty| < \Delta_p$$

$$\Delta_p = \frac{5}{100} y_\infty$$

$$t < \frac{3}{\eta}$$

### Моделирование

Первый набор:  $\lambda_{1,2,3} = \{-3, -3, -3\}$

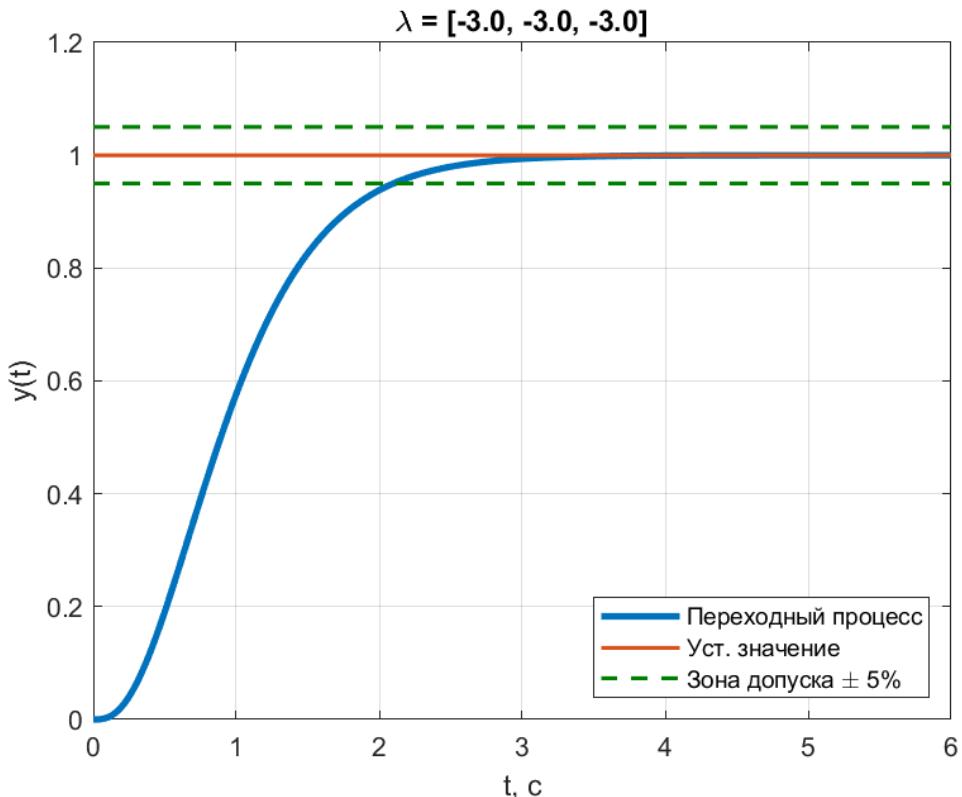


Рисунок 11: График сигнала при первом наборе

Перерегулирование системы нулевое -  $\sigma = 0\%$ .

Время переходного процесса составило  $t = 2.1$  с.

Степень колебательности - комплексной пары корней нет, поэтому:

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{0}{3} = 0$$

Оценка перерегулирования по формуле:  $\sigma_{\text{оп}} = 0\%$ .

Посмотрим на то, какую оценку по времени сверху мы можем получить по нашей формуле.

$$t = \frac{3}{3} = 1$$

Данный результат довольно далек от реального. Данное значение совсем не может быть адекватной верхней оценкой.

Второй набор:  $\lambda_{1,2,3} = \{-3, -3, -1\}$

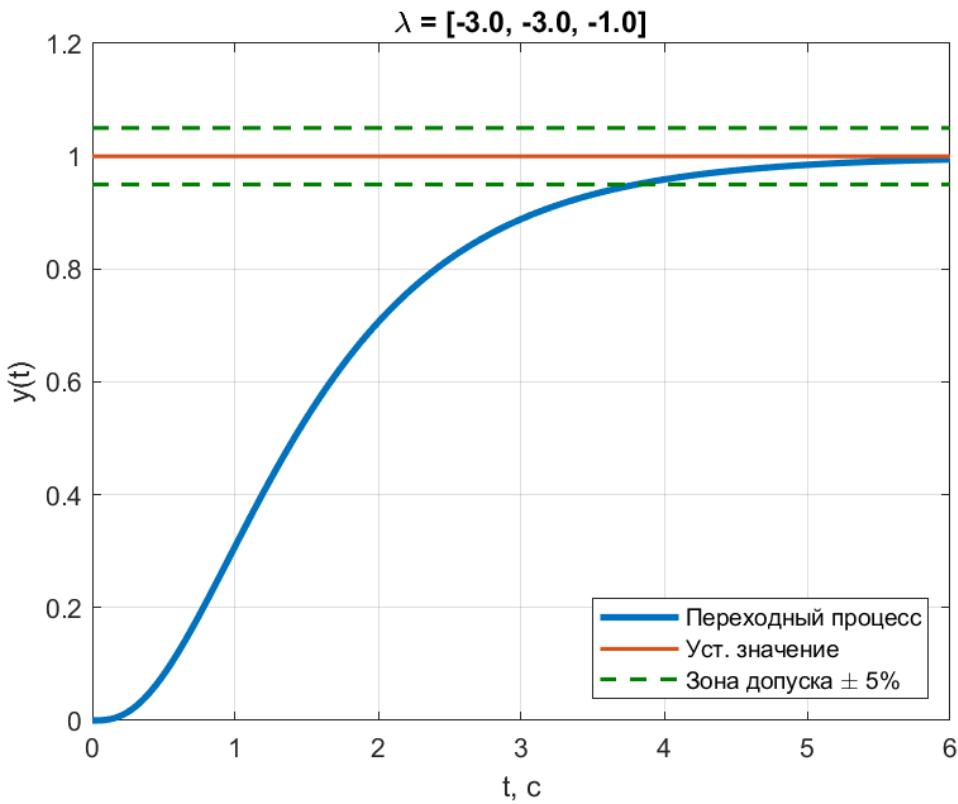


Рисунок 12: График сигнала при втором наборе

Перерегулирование системы нулевое:  $\sigma = 0\%$ .

Время переходного процесса составило  $t = 3.91$  с.

Степень колебательности - комплексной пары корней нет, поэтому  $\mu = 0$ .

Оценка перерегулирования по формуле -  $\sigma_{\text{оп}} = 0\%$ .

Взглянем на оценку времени:

$$t = \frac{3}{1} = 3$$

Данный результат уже несколько ближе к истине, видимо близость к нулю влияет. Но даже так, как верхняя оценка она совсем не подходит.

Третий набор:  $\lambda_{1,2,3} = \{-3, -3, -6\}$

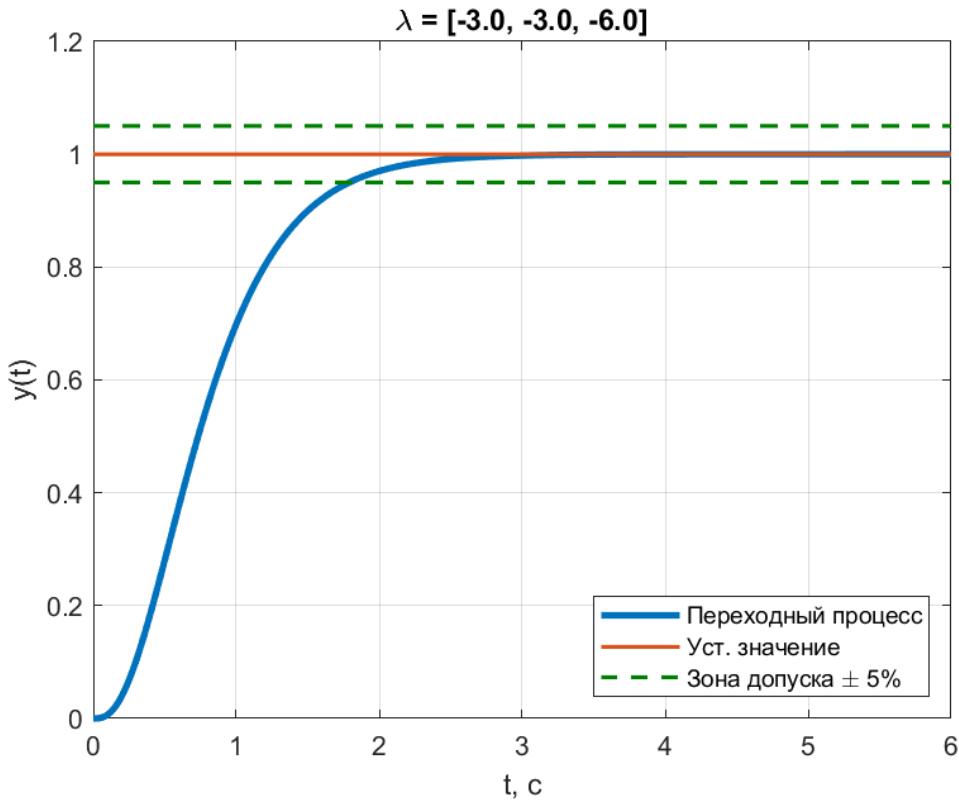


Рисунок 13: График сигнала при третьем наборе

Перерегулирование системы нулевое:  $\sigma = 0\%$ . Время переходного процесса составило  $t = 1.8$  с. Видим, что чем дальше корни от нуля, тем быстрее система сходится, особенно это заметно в сравнении с набором  $\{-3, -3, -1\}$ .

Степень колебательности - комплексной пары корней нет, поэтому  $\mu = 0$ .

Оценка перерегулирования по формуле -  $\sigma_{\text{оп}} = 0\%$ .

Взглянем на оценку времени:

$$t = \frac{3}{6} = 0.5$$

Данный результат вновь стал дальше от истины. Верхняя оценка совсем не подходит.

**Четвертый набор:**  $\lambda_{1,2,3} = \{-3 + 3j, -3 - 3j, -6\}$

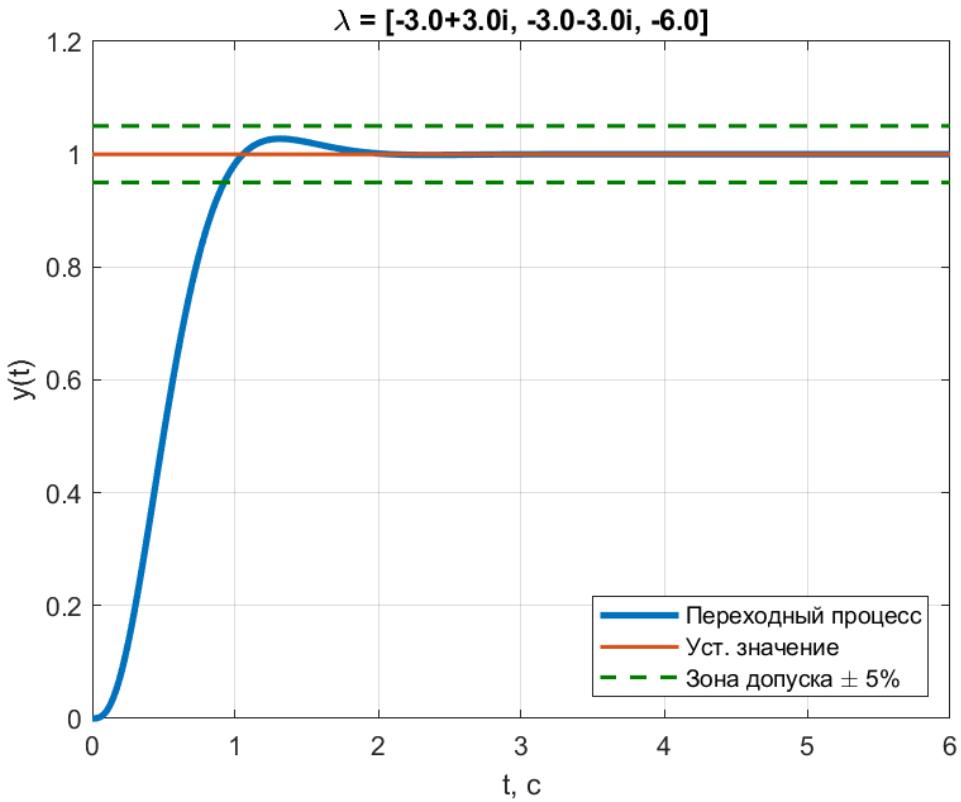


Рисунок 14: График сигнала при четвертом наборе

Перерегулирование системы наконец не нулевое:  $\sigma = 2.7\%$ .

Время переходного процесса составило  $t = 0.925$  с.

Степень колебательности -  $\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{3} = 1$ .

Взглянем на верхнюю оценку времени:

$$t = \frac{3}{3} = 1$$

Данный результат очень близок к истине. И при этом сама оценка правдива

Теперь посмотрим и на оценку перерегулирования:

$$\sigma < e^{-\frac{\pi}{1}} \cdot 100\% = 4.32\%$$

Ошибка примерно в два раза. Но как верхняя оценка перерегулирования подходит.

**Пятый набор:**  $\lambda_{1,2,3} = \{-3 + 6j, -3 - 6j, -6\}$

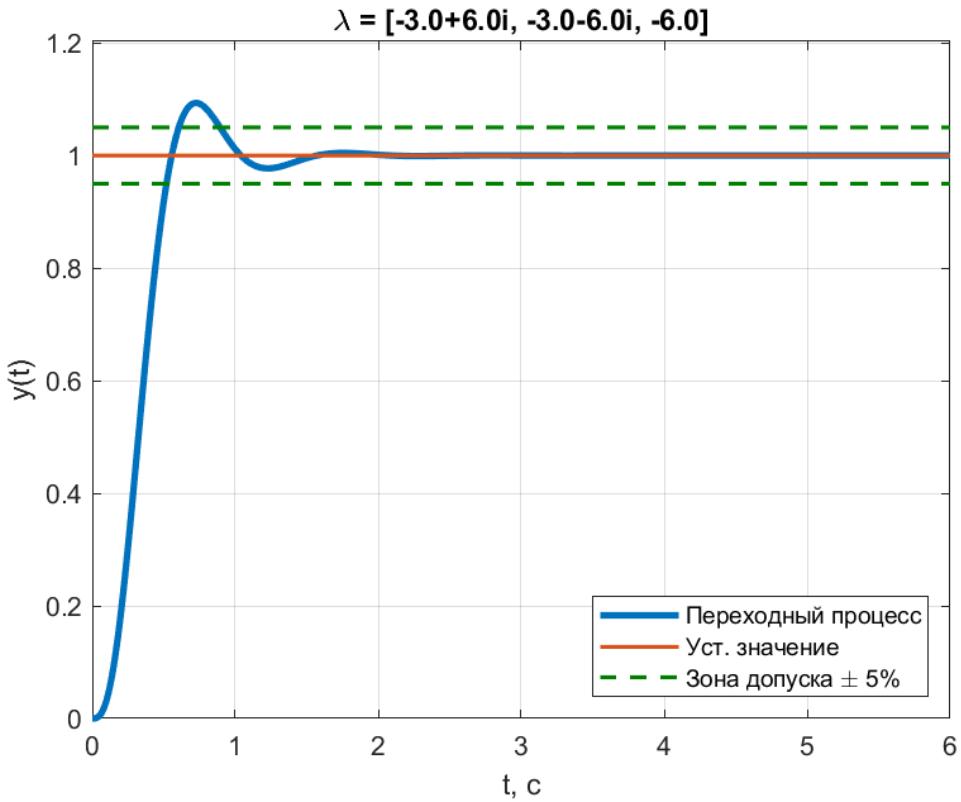


Рисунок 15: График сигнала при пятом наборе

Перерегулирование системы:  $\sigma = 9.3\%$ .

Время переходного процесса составило  $t = 0.89$  с.

Степень колебательности:  $\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{6}{3} = 2$ .

Взглянем на оценку времени:

$$t = \frac{3}{3} = 1$$

Данный результат так же близок к истине, хоть и несколько менее близок, чем предыдущий. Но так же верхняя оценка правдива. Посмотрим на оценку перерегулирования:

$$\sigma < e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot 100\% = 20.78\%$$

Оценка очень сильно отличается от истины. И при этом вновь примерно в два раза. Как верхняя оценка подходит.

**Шестой набор:**  $\lambda_{1,2,3} = \{-3 + 9j, -3 - 9j, -6\}$

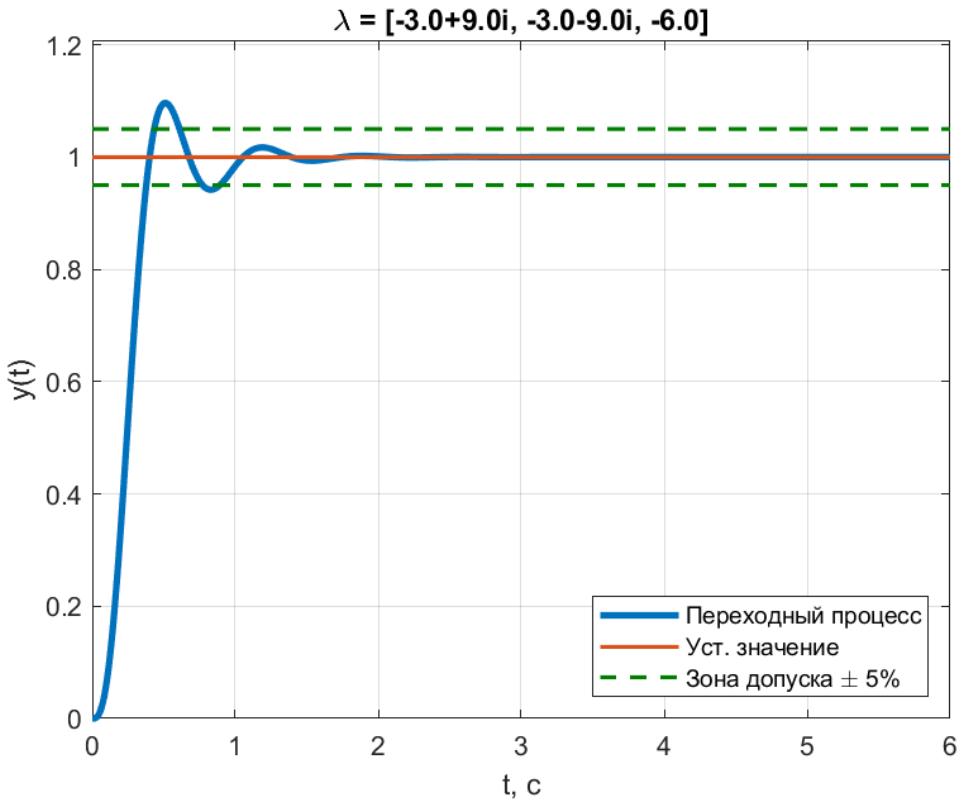


Рисунок 16: График сигнала при шестом наборе

Перерегулирование системы:  $\sigma = 9.6\%$ .

Время переходного процесса составило  $t = 0.885$  с.

Степень колебательности:  $\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{9}{3} = 3$ .

Взглянем на оценку времени:

$$t = \frac{3}{3} = 1$$

Вновь близкий результат. Оценка не врет. Теперь посмотрим на оценку перерегулирования:

$$\sigma < e^{-\frac{\pi}{3}} \cdot 100\% = 35.09\%$$

Видим, что верхняя оценка продолжила расти, но при этом реальная оценка почти не поменялась.

### Сводная таблица результатов и оценок

№	$\sigma$ (%)	$t$ (с)	$\mu$	$\sigma_{оп}$ (%)	$t_{оп}$ (с)
1	0	2.1	0	0	1
2	0	3.91	0	0	3
3	0	1.8	0	0	0.5
4	2.7	0.925	1	4.32	1
5	9.3	0.89	2	20.78	1
6	9.6	0.885	3	35.09	1

#### Выводы по заданию 2:

По результатам задания можем вывести пару закономерностей. Первое - чем больше вещественная часть корней, тем быстрее происходит переходный процесс. Второе - увеличение мнимой части корней так же сокращает время переходного процесса, но в то же время приводит перерегулированию.

## Выводы

В ходе лабораторной работы я занимался моделированием систем с входным воздействием при различных начальных условиях. В результате получил наглядный результат - как начальные данные в таких системах влияют на выходной сигнал.

Так же в работе я подробнее ознакомился с оценкой качества переходного процесса. Попрактиковался в вычислении верхних оценок, которые на практике дают не сильно много информации, к тому же порой бывают и неверными. В будущем для работы буду ознакомливаться с более мощными инструментами оценки.