

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2  
**Свободное движение, устойчивость**

Студенты: Загайнов А.А.  
Поток: Лин САУ Р23 бак 1.1.2  
Вариант: 11  
Преподаватели: Перегудин. А.А., Пашенко А.В.

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

Задание 1. Свободное движение . . . . .	3
Вариант 1. . . . .	4
Вариант 2. . . . .	4
Вариант 3. . . . .	5
Вариант 4. . . . .	6
Вариант 5. . . . .	7
Вариант 6. . . . .	7
Задание 2. Область устойчивости . . . . .	9
Область устойчивости с постоянным $T_2$ . . . . .	9
Область устойчивости с постоянным $T_1$ . . . . .	9
Моделирование при разных устойчивостях . . . . .	10
Задание 3. Автономный генератор . . . . .	12
Моделирование . . . . .	14
Выводы . . . . .	14

### Задание 1. Свободное движение

В задании рассматриваем систему 2-го порядка вида:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = a_0u$$

В соответствии с нашим 11 вариантом, для этой системы мы имеем шесть вариантов наборов начальных условий и корней характеристического уравнения. Для каждого варианта надо будет найти его коэффициенты  $a_0, a_1$  и найти аналитическое выражение для свободной составляющей системы. В этом задании будем руководствоваться несколькими общими методами, которые упростят задачу.

**Нахождение коэффициентов  $a_0, a_1$ :** Так как нам уже известны корни уравнения, а найти надо его коэффициенты, то воспользуемся теоремой Виета для нахождения:

$$a_0 = \lambda_1 \lambda_2$$

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

**Свободная составляющая системы:** Со свободной составляющей системы сложнее, но и для этого мы имеем общие формулы. В случае, если корни вещественные и  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то выглядеть это будет вот так:

$$y_{free} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(0) = c_1 + c_2$$

$$\dot{y}(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{\dot{y}(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$c_1 = y(0) - \frac{\dot{y}(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = y(0) - c_2$$

Если же комплексно сопряженные, то так:

$$y_{free} = \left( \frac{c + dj}{2} \right) e^{\lambda_1 t} + \left( \frac{c - dj}{2} \right) e^{\lambda_2 t}$$

$$y(0) = \left( \frac{c + dj}{2} \right) + \left( \frac{c - dj}{2} \right) = c$$

$$\dot{y}(0) = \left( \frac{\lambda_1(c + dj)}{2} \right) + \left( \frac{\lambda_2(c - dj)}{2} \right)$$

$$d = -j \frac{2\dot{y}(0) - y(0)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Теперь рассмотрим каждый вариант по порядку.

**Вариант 1.**

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -3, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты  $a_0, a_1$ :

$$a_1 = 7, \quad a_0 = 12$$

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 12u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C_1 = \frac{1 * (-3) - 0}{-3 - (-4)} = -3, \quad C_2 = \frac{0 - 1 * (-4)}{-3 - (-4)} = 4$$

$$y_{free}(t) = -3e^{-4t} + 4e^{-3t}$$

Займемся моделированием. Составим модель свободного движения для этой системы, а затем сравним результат с аналитическим решением:

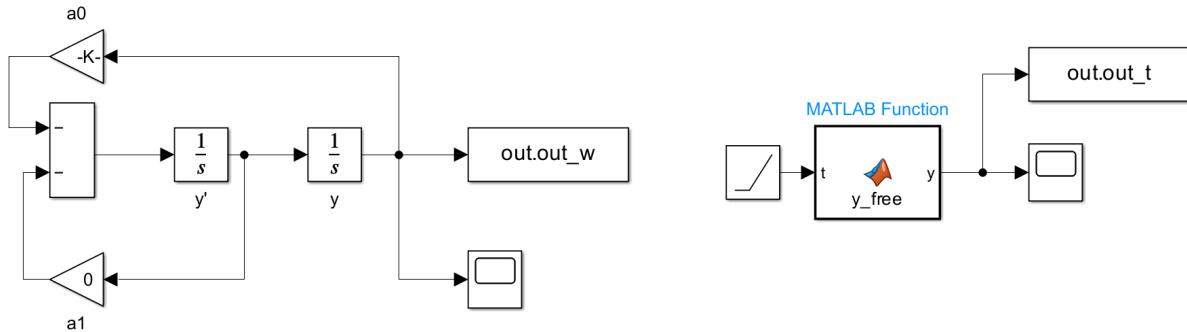


Рисунок 1: Схемы для эксперимента и аналитических данных

Запустим и посмотрим:

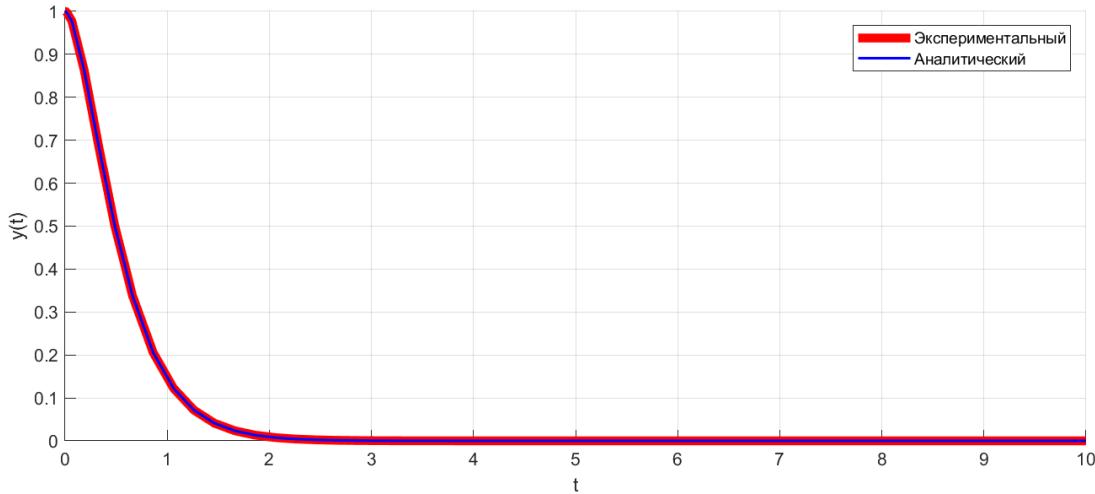


Рисунок 2: Графики экспериментальных и аналитических данных

По корневому критерию мы точно можем предсказать, что наша система устойчива - оба корня меньше нуля. По графикам можем подтвердить, что система устойчива и довольно уверенно сходится к нулю. Результаты в точности совпали, как и наши прогнозы!

**Вариант 2.**

$$\lambda_1 = -1.6 + j13, \quad \lambda_2 = -1.6 - j13, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты  $a_0, a_1$ :

$$a_1 = 3.2, \quad a_0 = (-1.6 + j13)(-1.6 - j13) = 171.56$$

$$\ddot{y} + 3.2\dot{y} + 171.56y = 171.56u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C = 1$$

$$d = -j \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1.6 + j13) - 1.6 - j13}{-1.6 + j13 - (-1.6 - j13)} = \frac{1.6}{13}$$

$$y_{free}(t) = \frac{1 + j \frac{1.6}{32}}{2} e^{(-1.6+j13)t} + \frac{1 - j \frac{1.6}{32}}{2} e^{(-1.6-j13)t}$$

Проведем моделирование работы системы:

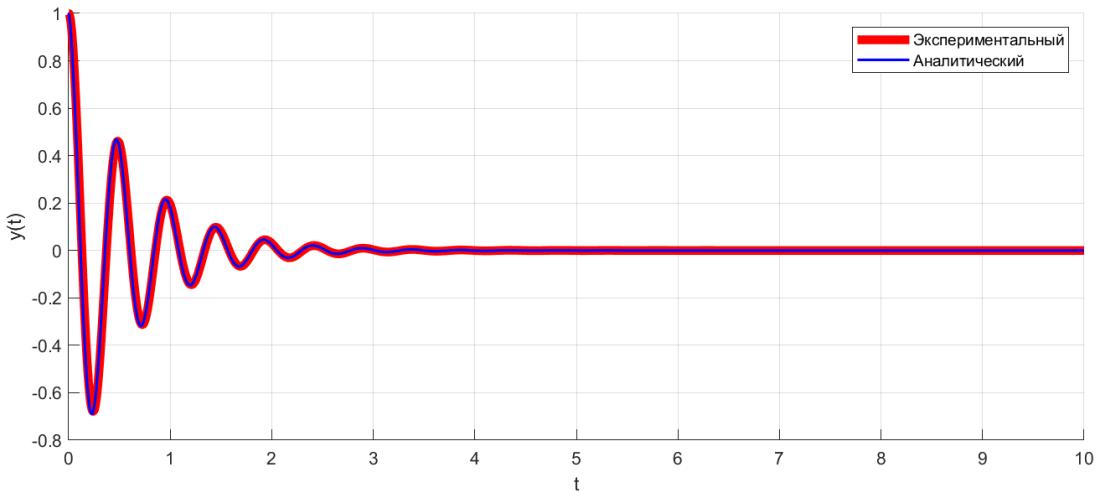


Рисунок 3: Графики экспериментальных и аналитических данных

Корневой критерий предсказывает тип устойчивости - устойчивый фокус. Экспериментальные данные подтверждают устойчивость системы. Результаты совпадают с аналитическими!

**Вариант 3.**

$$\lambda_1 = j13, \quad \lambda_2 = -j13, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты  $a_0, a_1$ :

$$a_1 = 0 \quad a_0 = 169$$

$$\ddot{y} + 169y = 169u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C = 1$$

$$d = -j \cdot \frac{2\dot{y}(0) - y(0)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = -j \cdot \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2j13} = -j \cdot 0 = 0$$

$$y_{free}(t) = \frac{1}{2} e^{j13t} + \frac{1}{2} e^{-j13t}$$

Проведем моделирование работы системы:

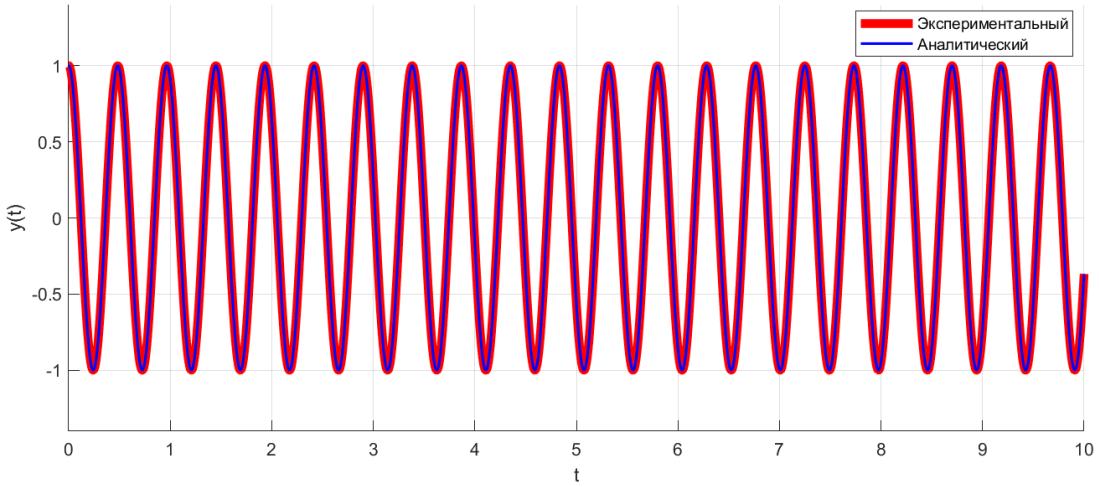


Рисунок 4: Графики экспериментальных и аналитических данных

Корневой критерий говорит о пограничной устойчивости, ведь наши корни содержат только комплексную часть. Эксперимент подтверждает предположение, система всегда будет находиться в пределах  $[-1, 1]$ . Оно и понятно, ведь уравнение свободного движения это косинус. Результаты опять совпали

#### Вариант 4.

$$\lambda_1 = 1.6 + j13, \quad \lambda_2 = 1.6 - j13, \quad y(0) = 0.05, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты  $a_0, a_1$ :

$$a_1 = -3.2 \quad a_0 = 171.56$$

$$\ddot{y} - 3.2\dot{y} + 171.56y = 171.56u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C = 0.05 \quad d = -\frac{0.08}{13}$$

$$y_{\text{free}}(t) = \left( \frac{0.05}{2} + \frac{0.04}{13}j \right) e^{(1.6+j13)t} + \left( \frac{0.05}{2} - \frac{0.04}{13}j \right) e^{(1.6-j13)t}$$

Проведем моделирование:

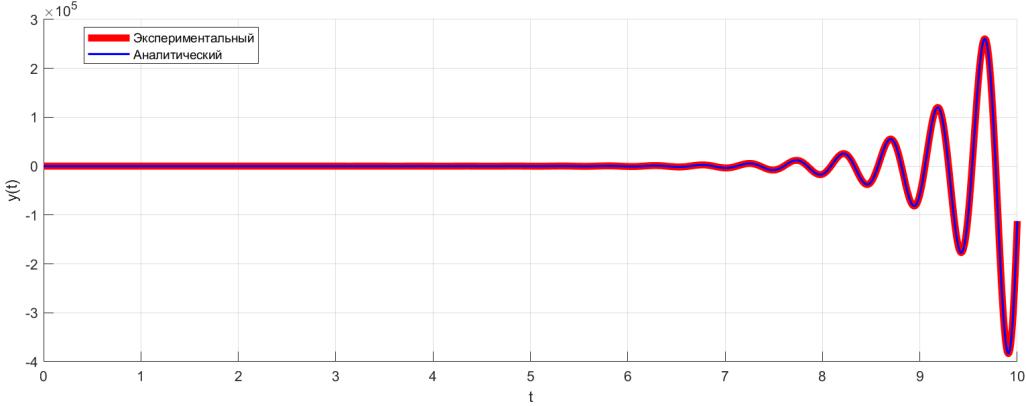


Рисунок 5: Графики экспериментальных и аналитических данных

Корневой критерий дает нам сразу понять, что система будет неустойчива, ведь  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ . Эксперимент так же подтверждает наше предположение. Результаты вновь совпали!

**Вариант 5.**

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3, \quad y(0) = 0.05, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты  $a_1, a_0$ :

$$a_1 = -7 \quad a_0 = 12$$

$$\ddot{y} - 7\dot{y} + 12y = 12u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C_1 = -0.95 \quad C_2 = 1$$

$$y_{free} = 0.95e^{4t} - e^{3t}$$

Проведем моделирование:

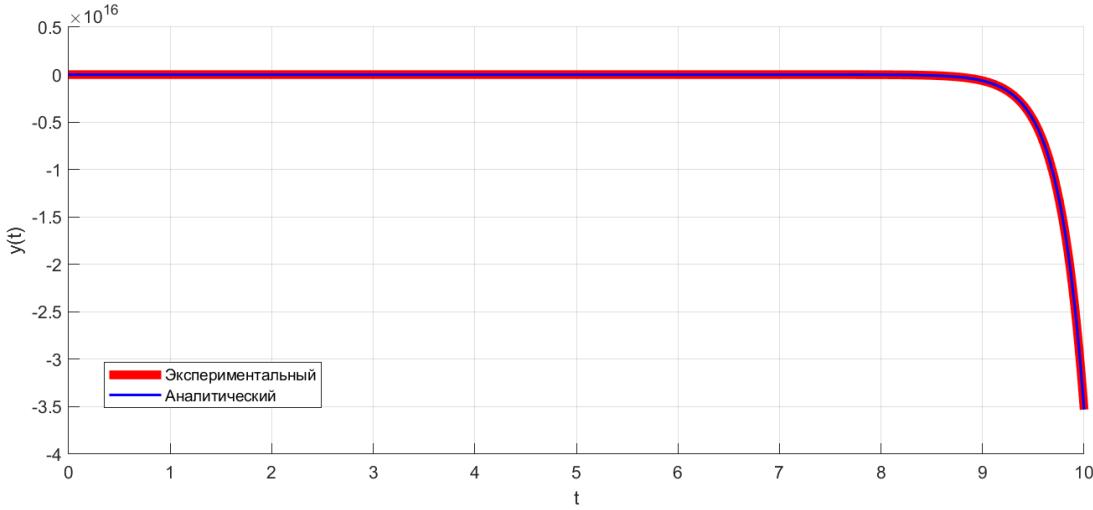


Рисунок 6: Графики экспериментальных и аналитических данных

По корневому критерию можем сразу предсказать, что система будет неустойчивой, ведь вещественные части корней больше нуля. Что собственно мы и подтверждаем совпадающими друг с другом экспериментальными и теоретическими графиками.

**Вариант 6.**

$$\lambda_1 = -1.2, \quad \lambda_2 = 1.2, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.1$$

Посчитаем коэффициенты  $a_1, a_0$ :

$$a_1 = 0 \quad a_0 = -1.44$$

$$\ddot{y} - 1.44y = -1.44u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C_1 = -\frac{1}{24} \quad C_2 = \frac{1}{24}$$

$$y_{free} = -\frac{1}{24}e^{-1.2t} + \frac{1}{24}e^{1.2t}$$

Проведем моделирование:

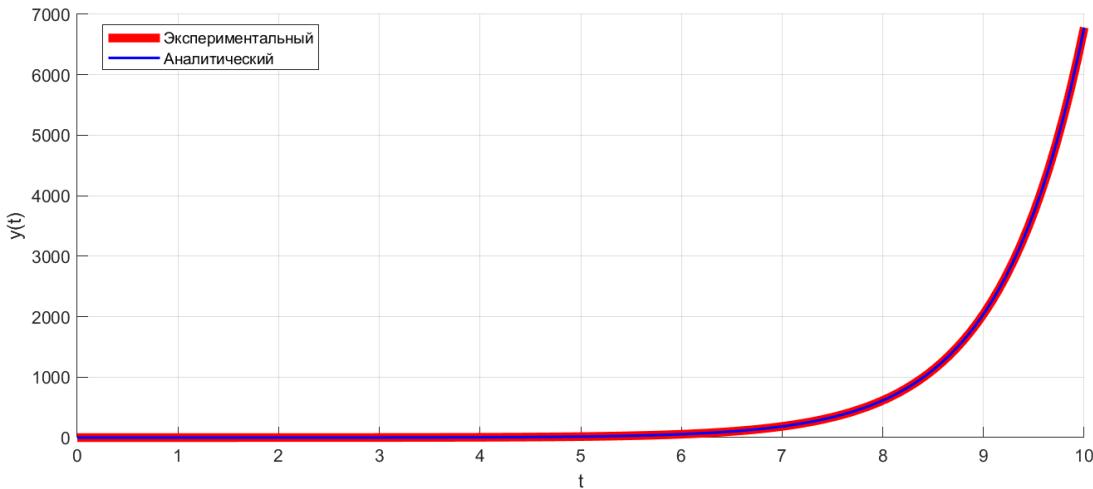


Рисунок 7: Графики экспериментальных и аналитических данных

По корневому критерию можем точно сказать, что система вновь будет неустойчивой, ведь один из корней больше нуля. Как видим на практике - совпавшие теоретические и экспериментальные графики подтверждают наше предположение.

#### Выводы по заданию 1:

В рамках выполнения первого задания я освежил мои знания по работе с корневым критерием в динамических системах с прошлого курса. Работал я над свободным движением, смог успешно посчитать уравнение этого свободного движения исходя только из начальных условий и характеристических корней данной системы. Проверил на практике истинность моих расчетов, сравнив теоретические результаты с экспериментальной моделью.

## Задание 2. Область устойчивости

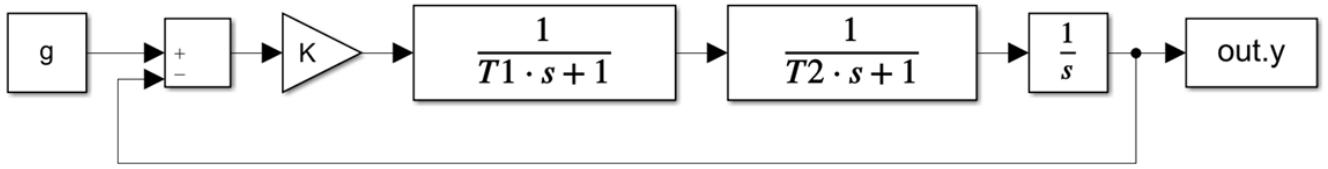


Рисунок 8: Схема моделирования

В этом задании будем работать с системой, изображенной на рисунке. Будем изучать вопрос зависимости области устойчивости системы в зависимости от ее внутренних параметров.

Во первых определим, при каких значениях  $T_1, T_2$ , полюса соответствующих передаточных функций совпадут с первым набором корней -4, -3 из предыдущего задания:

Для начала переведем систему к виду  $g \rightarrow y$ :

$$\frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)s} (g - y) = y \Rightarrow K(g - y) = (T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s) y \Rightarrow$$

$$Kg = (T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K) y \Rightarrow \underbrace{\left( \frac{K}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K} \right)}_{W(s)} g = y$$

В нашем случае получившейся передаточной функции есть собственные числа. Т.к. мы имеем только два собственных числа -4 и -3, а полином мы имеем 3-ей степени, распишем все следующим образом:

$$\begin{cases} T_1 T_2 = 0 \\ \frac{1}{T_1 + T_2} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ \frac{K}{T_1 + T_2} = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0 \\ T_2 = 0 \\ T_1 + T_2 = \frac{1}{7} \\ K = 12(T_1 + T_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0 \\ T_2 = \frac{1}{7} \\ T_1 = \frac{1}{7} \\ T_2 = 0 \\ K = \frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{Дают -4 и -3 при подстановке}$$

В дальнейших двух пунктах будем работать со следующим набором параметров:

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{7} \quad K = \frac{12}{7}$$

### Область устойчивости с постоянным $T_2$

Используем критерий Гурвица для получения аналитического выражения границы устойчивости:

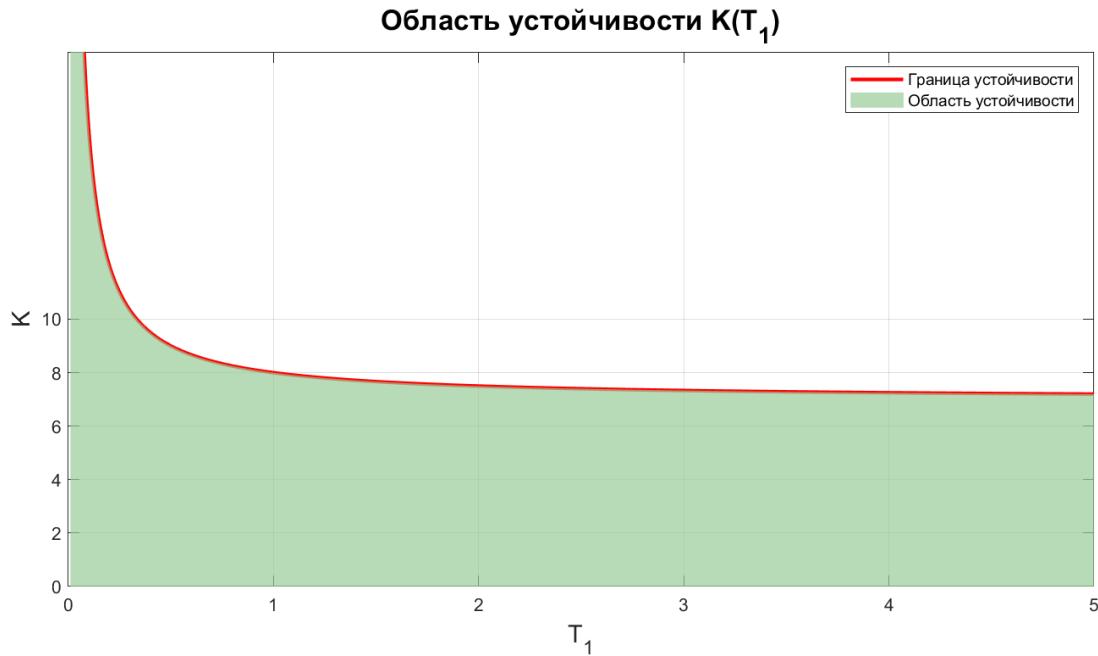
$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K$$

$$\begin{bmatrix} T_1 + \frac{1}{7} & K & 0 \\ T_1 \cdot \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & T_1 + \frac{1}{7} & K \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_1 + \frac{1}{7} > 0 \\ T_1 + \frac{1}{7} - K \cdot T_1 \cdot \frac{1}{7} > 0 \\ K (T_1 + \frac{1}{7} - K \cdot T_1 \cdot \frac{1}{7}) > 0 \end{cases}$$

Мы знаем, что  $T_1, T_2$  - константы времени, потому очевидно, что они точно будут больше нуля.

$$\begin{cases} T_1 > 0 \\ 0 < K < 7 + \frac{1}{T_1} \end{cases}$$

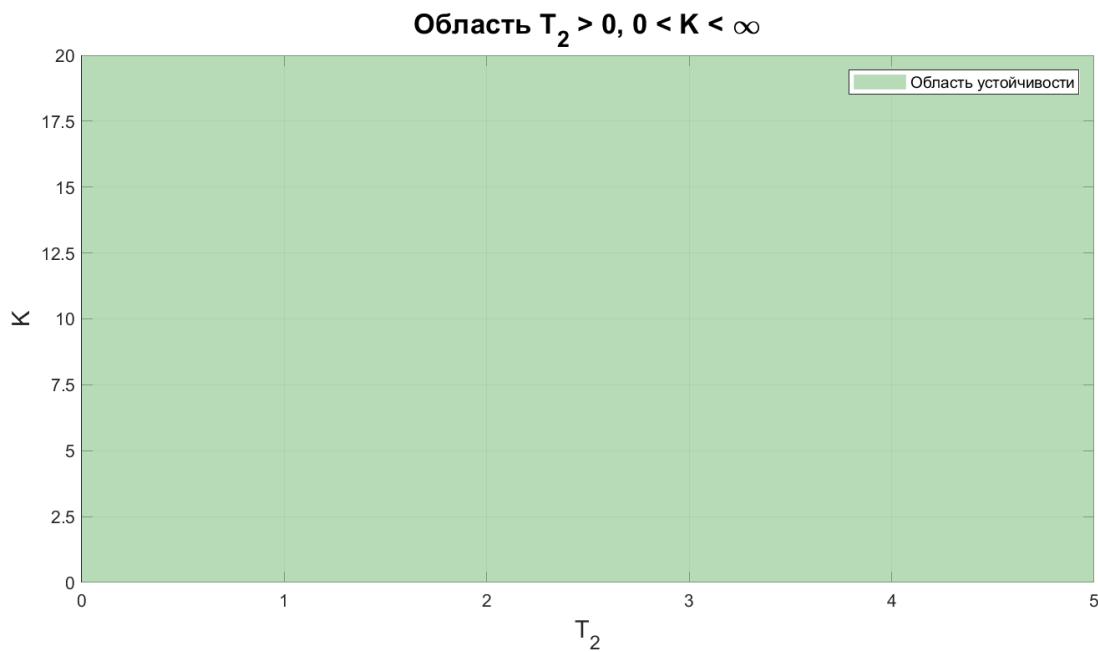
Проведем моделирование и получим график области устойчивости:

Рисунок 9: Область устойчивости при  $T_2 = \text{const}$ **Область устойчивости с постоянным  $T_1$** 

Преобразования с Гурвицом идентичные, просто сменяем  $T_1$  на  $T_2$  и подставляем другую константу

$$\begin{cases} T_2 > 0 \\ 0 < K < \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}(\frac{1}{0}) = \infty \end{cases}$$

Думаю область устойчивости в данном случае кристально понятно, но все же промоделируем и посмотрим:

Рисунок 10: Область устойчивости при  $T_1 = \text{const}$ 

По аналитическому решению и по графику видим, что в данном случае система будет устойчива при любых  $K$ , при условии положительного  $T_2$ (что само собой подразумевается).

### Моделирование при разных устойчивостях

На основе полученных результатов, посмотрим, соответствуют ли эти области правде. Возьмем три набора параметров:

- $K = 5, T_1 = 2, T_2 = 0$  - как пример устойчивой системы
- $K = 8, T_1 = \frac{1}{7}, T_2 = 1$  - как пример пограничной устойчивости
- $K = 10, T_1 = \frac{1}{7}, T_2 = 2$  - как пример неустойчивой системы

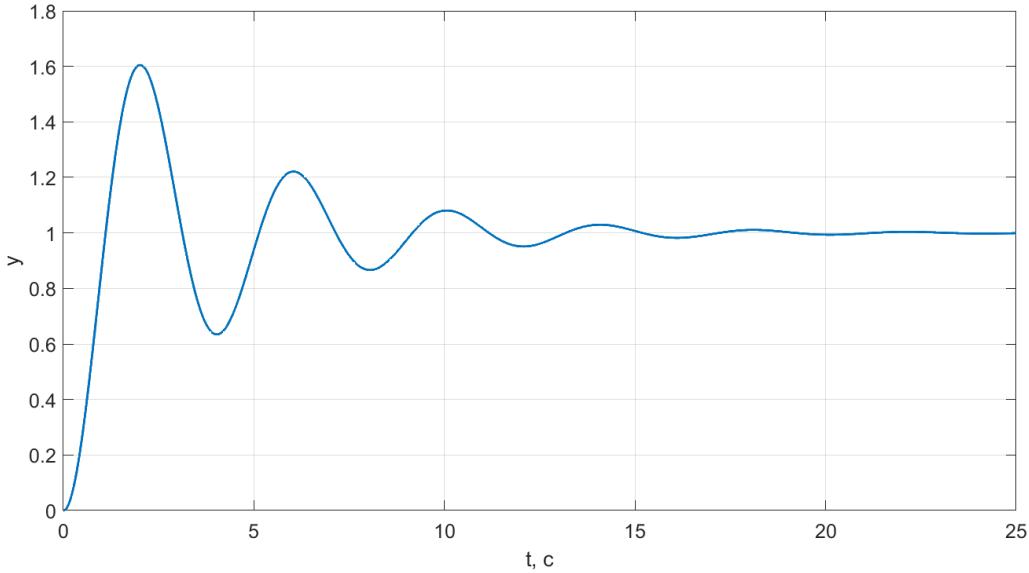


Рисунок 11: Моделирование устойчивой системы

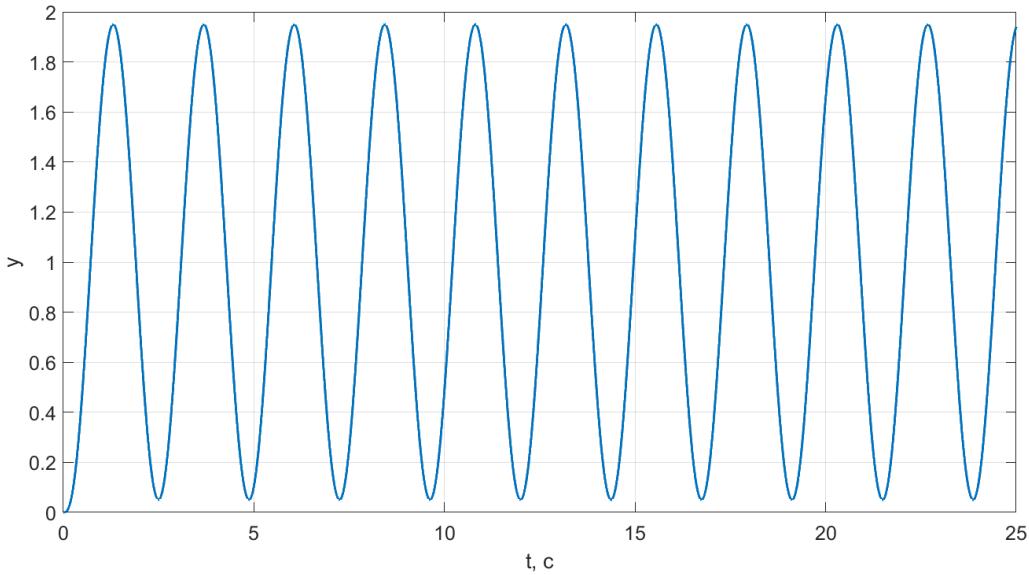


Рисунок 12: Моделирование системы на границе устойчивости

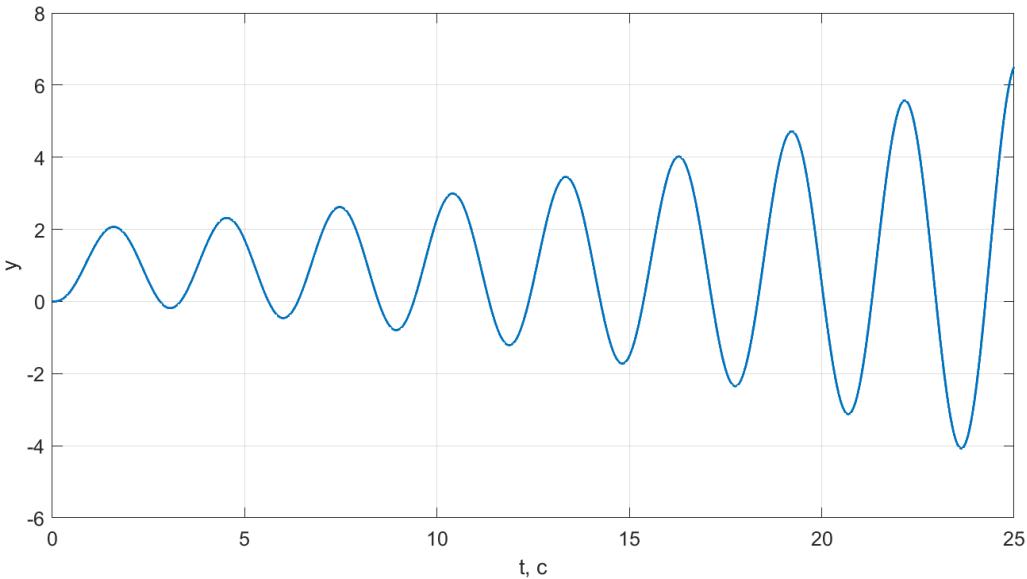


Рисунок 13: Моделирование неустойчивой системы

Можем смело заявлять, что наборы точно соответствуют своим обозначениям. Мы получили одну устойчивую, одну погранично устойчивую и одну неустойчивую систему. А значит мы и дополнительно утвердились в аналитически подсчитанных областях устойчивости.

**Выводы по заданию 2.** В рамках второго задания удалось теснее поработать с аспектом анализа устойчивости системы. Успешно посчитал область устойчивости системы при изменении её внутренних компонент.

### Задание 3. Автономный генератор

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ g = Cx, \\ x(0), \end{cases}$$

и зададим такие параметры  $A$ ,  $C$  и  $x(0)$ , чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым сигналом

$$g_{ж}(t) = \cos(4t) + e^{6t} \cos(2t).$$

Все полученные матрицы и вектора не должны содержать комплексных чисел.

Для начала разложим желаемый сигнал на составляющие моды. Разобьем имеющийся сигнал на половинки:

$\cos(4t)$  — гармоническое колебание с частотой 4 рад/с

$e^{6t} \cos(2t)$  — нарастающее гармоническое колебание

Каждой из этих половин сигнала соответствует своя пара комплексных корней, особенно это очевидно если по формуле Эйлера преобразовать выражения в экспоненциальную форму

$$\begin{aligned} \cos(4t) &\rightarrow \frac{e^{j4t} + e^{-j4t}}{2} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4j \\ e^{6+24t} \cos(2t) &\rightarrow \frac{e^{6+24t} + e^{6-j2t}}{2} \rightarrow \lambda_{3,4} = 6 \pm 2j \end{aligned}$$

Для построения вещественной матрицы  $A$  воспользуемся стандартной формой матрицы для  $\alpha \pm j\beta$ :

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Для первой половины ( $\alpha = 0, \beta = 4$ ) получаем блок

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

а для второй половины ( $\alpha = 6, \beta = 2$ ) — блок

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти блоки в блочно-диагональную матрицу, получаем матрицу состояния для нашего случая:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдём вектор начальных условий  $x(0)$  и выходную матрицу  $C$ . Решение автономной системы имеет вид  $x(t) = e^{At}x(0)$ . Матричная экспонента схожа:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\sin(4t) & 0 & 0 \\ \sin(4t) & \cos(4t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \cos(2t) & -e^{6t} \sin(2t) \\ 0 & 0 & e^{6t} \sin(2t) & e^{6t} \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

Предположим что

$$x(0) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

а

$$C = [c_1, c_2, c_3, c_4]$$

Тогда выход системы:

$$\begin{aligned} g(t) = Ce^{At}x(0) = & c_1(x_1 \cos 4t - x_2 \sin 4t) + c_2(x_1 \sin 4t + x_2 \cos 4t) + \\ & + c_3(x_3 e^{6t} \cos 2t - x_4 e^{6t} \sin 2t) + c_4(x_3 e^{6t} \sin 2t + x_4 e^{6t} \cos 2t). \end{aligned}$$

Сгруппируем:

$$\begin{aligned} \cos(4t) : & c_1x_1 + c_2x_2, \\ \sin(4t) : & -c_1x_2 + c_2x_1, \\ e^{6t} \cos(2t) : & c_3x_3 + c_4x_4, \\ e^{6t} \sin(2t) : & -c_3x_4 + c_4x_3. \end{aligned}$$

Нам нужно, чтобы  $g(t) = \cos(4t) + e^{6t} \cos(2t)$ . Поэтому составим следующую систему уравнений, для решения:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 = 1, \\ -c_1x_2 + c_2x_1 = 0, \\ c_3x_3 + c_4x_4 = 1, \\ -c_3x_4 + c_4x_3 = 0. \end{cases}$$

Выберем простые значения, удовлетворяющие этой системе. Для первой пары положим  $x_1 = 1, x_2 = 0$ . Тогда из первых двух уравнений:  $c_1 = 1, c_2 = 0$ . Для второй пары  $x_3 = 1, x_4 = 0$ . Тогда из последних двух уравнений:  $c_3 = 1, c_4 = 0$ . Получаем:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

И вуаля - мы нашли все наши необходимые составляющие! Перейдем к более интересному.

### Моделирование

Выполним моделирование системы с полученными матрицами  $A$ ,  $C$  и начальными условиями  $x(0)$ . Также вместе с этим построим график ошибки  $e(t) = g_{\text{ж}}(t) - g(t)$ , чтобы оценить результат

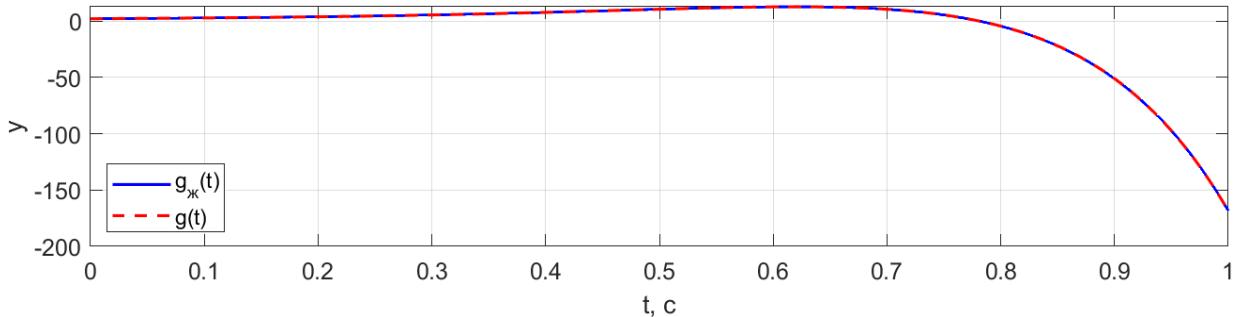


Рисунок 14: Графики сигналов  $g_{\text{ж}}(t)$  и  $g(t)$

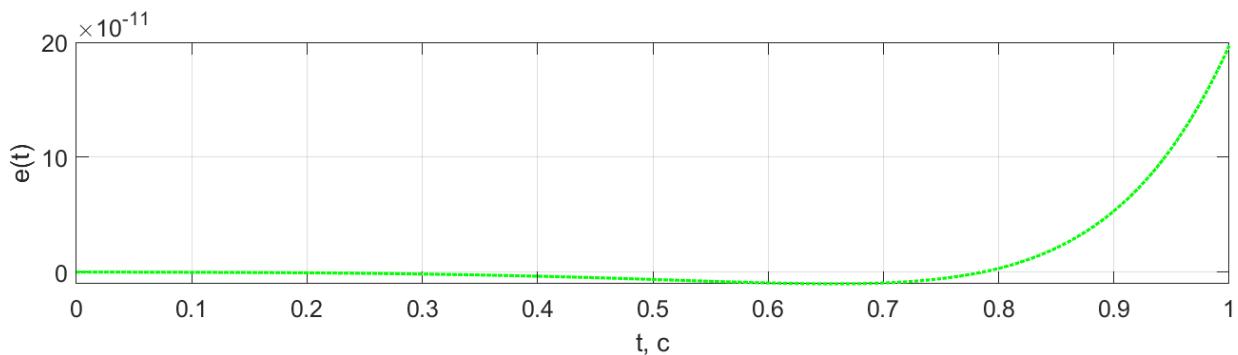


Рисунок 15: График ошибки  $e(t) = g_{\text{ж}}(t) - g(t)$

Как видно из графиков, сигналы полностью совпадают, а ошибка численно очень мала, и думаю, что совершенно незначима, что подтверждает правильность выбранных параметров системы.

Подводя к выводам, вот итоговые параметры системы, что удалось вывести.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Вывод по заданию 3:** В третьем задании пришлось столкнуться с довольно неожиданным до этого аспектом работы в ЛСАУ, а именно с генерацией сигналов. И удалось успешно выполнить генерацию конкретно нужного сигнала с нулевой практической ошибкой (с микроскопической вычислительной ошибкой).

### Выводы

В рамках второй лабораторной работы мне удалось довольно тесно изучить вопрос работы со свободным движением. Два главных аспекта это анализ устойчивости и генерация заданных сигналов. И если работа по анализу устойчивости была знакомой и ранее, то вот тема генерации сигнала была для меня в новинку.