

## Линейные системы автоматического управления

---

Формы представления линейных систем

---

## Математическая модель

– совокупность математических символов, однозначно определяющих развитие процессов в системе

Мирошник И. В.  
«Теория автоматического управления.  
Линейные системы.»

## Математическая модель

– совокупность математических символов, однозначно определяющих развитие процессов в системе

Классификация систем с вводного  
занятия по сути классификация  
математических моделей систем

Мирошник И. В.  
«Теория автоматического управления.  
Линейные системы.»

## Математические модели линейных систем



Аналитические

Строятся с помощью  
буквенных символов

Графоаналитические

Буквенные символы и  
графические обозначения

Мирошник И. В.  
«Теория автоматического управления.  
Линейные системы.»

## Математические модели линейных систем



Аналитические



Вход-Выход:  
*дифференциальные  
уравнения,  
передаточные  
функции*

Графоаналитические



Структурные схемы

## Математические модели линейных систем

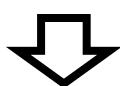


Аналитические



В-В:  
*ДУ, ПФ*

Графоаналитические



Структурные схемы

Привыкаем к  
сокращениям

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

## Линейное ДУ

$$n \geq m!$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

$n \geq m!$

Громоздко

## Вход-выход

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

$n \geq m!$

Громоздко



Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \cdots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

$Q(p)$  и  $R(p)$  – операторные  
характеристические полиномы

## Вход-выход

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко



Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \cdots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

Корни  $Q(p)$  называются  
полюсами системы,  
а  $R(p)$  – нулями системы

## Вход-выход

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко



Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \cdots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

Дифференциально-интегральный  
оператор  $W(p)$  – ПФ системы

$$\text{ПФ } y = \frac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$$

Мирошник И. В.  
«Теория автоматического управления.  
Линейные системы.»

## Вход-выход

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко



Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \cdots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$



$$\text{ПФ } y = \frac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$$

Удобно, компактно, позволяет сделать выводы о динамике системы, неочевидные из ДУ

## Вход-выход

## Пример

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6u = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

ПФ?

 $n \geq m!$ 

Громоздко

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \cdots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \cdots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

ПФ  $y = \frac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$

Удобно, компактно, позволяет сделать выводы о динамике системы, неочевидные из ДУ

# Вход-выход

## Пример

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6u = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

$n \geq m!$

Громоздко

$$y = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} [u]$$

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \dots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \dots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \dots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

$$\text{ПФ } y = \frac{R(p)}{Q(p)} [u] = W(p)[u]$$

Удобно, компактно, позволяет сделать выводы о динамике системы, неочевидные из ДУ

## Вход-выход

## Пример

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6u = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u \quad y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко



Абсолютный динамический  
порядок будто бы 3...

$$y = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} [u]$$

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \dots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \dots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \dots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

ПФ  $y = \frac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$

Удобно, компактно, позволяет сделать  
выводы о динамике системы,  
неочевидные из ДУ

## Вход-выход

## Пример

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6u = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко



Абсолютный динамический  
порядок будто бы 3...

$$y = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p^2+5p+6)}[u]$$

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \dots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \dots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \dots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

ПФ  $y = \frac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$

Удобно, компактно, позволяет сделать  
выводы о динамике системы,  
неочевидные из ДУ

## Вход-выход

## Пример

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6u = \ddot{u} + 2\dot{u} + 6u \quad y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко

$$y = \frac{(p+1)}{(p^2 + 5p + 6)} [u]$$

Введ

Относительный порядок тот же,  
но абсолютный ниже т.к. **нуль и полюс** совпали  
и часть динамики системы компенсировалась

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y] + \dots + a_1p[y] + a_0y = b_mp^m[u] + \dots + b_1p[u] + b_0u$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \dots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$

$$\text{ПФ} \quad y = \frac{R(p)}{Q(p)} [u] = W(p)[u]$$

Удобно, компактно, позволяет сделать  
выводы о динамике системы,  
неочевидные из ДУ

## Вход-выход

## Линейное ДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

 $n \geq m!$ 

Громоздко



Введем в рассмотрение оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

В литературе можно встретить и иное обозначение...

$$p^n[y] + a_{n-1}p^{n-1}[y]$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)[y] = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)[u]$$

$$Q(p)[y] = R(p)[u]$$



$$\text{ПФ } y = \frac{R(p)}{Q(p)}[u] = W(p)[u]$$

Удобно, компактно, позволяет сделать выводы о динамике системы, неочевидные из ДУ

В отечественной и зарубежной научной литературе можно встретить использование символа  $s$  в качестве оператора дифференцирования...

...или ввода обозначения  $r$  в качестве переменной Лапласа.

На нашем курсе условимся, что  $r$  – оператор дифференцирования, а  $s$  – переменная Лапласа, но будем держать в уме возможные разнотечения в учебной и научной литературе!

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

Преобразование Лапласа  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$f(t)$  – **оригинал**,  
функция **вещественного** аргумента

$F(s)$  – **изображение**,  
функция **комплексного** аргумента

Преобразование Лапласа –  
полезный инструмент для  
работы с линейными системами!

Абстрактный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

Комплексное число

$$s = \sigma + j\omega$$

Разница!

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Обратное:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

Абстрактный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

Комплексное число

$$s = \sigma + j\omega$$

Разница!

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Обратное:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

А в чем эквивалентность  
 $p$  и  $s$ ?

Абстрактный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

Комплексное число

$$s = \sigma + j\omega$$

Разница!

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ F(s) &= \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= sF(s) - f(-0) \\ \mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} &= s^2F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0) \\ &\dots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(-0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ F(s) &= \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Свойства:

1. **Линейность**
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n a_k F_k(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$
$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

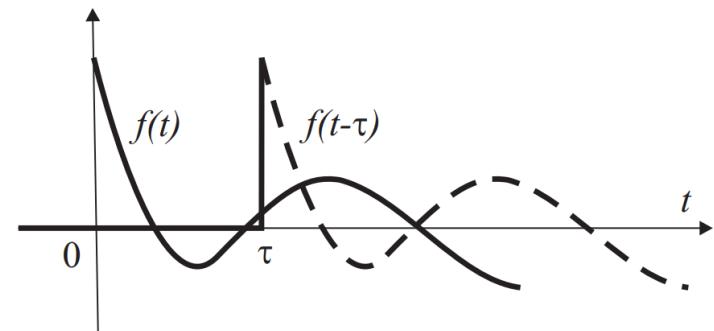
Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$
$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$



Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$
$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = \alpha F(\alpha s)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ F(s) &= \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$
$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Применимо не всегда!

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

## Некоторые изображения

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$A$ – матрица	$(sI - A)^{-1}$

$f(t)$ оригинал	$F(S)$ изображение
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{s \cdot \sin(\phi) + \omega \cdot \cos(\phi)}{s^2 + \omega^2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ F(s) &= \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Свойства:

1. Линейность
2. Дифференцирование
3. Интегрирование
4. Смещение
5. Подобие
6. Умножение (свертка)
7. Начальное значение
8. Предельное значение

Позволяют использовать запись  
в образах Лапласа для ПФ

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$



$$W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

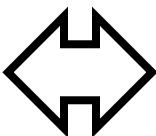
# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Полная эквивалентность  
только при нулевых  
начальных условиях!

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$



$$W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

↓  
 $y(t) = W(p)[u(t)]$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$   
 $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$

Дифференциально-интегральный  
оператор

↓  
 $Y(s) = W(s)U(s)$

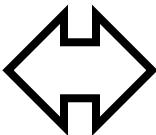
Функция комплексной  
переменной

# Об операторе дифференцирования и преобразовании Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$
$$F(s) = \int_{-0}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Полная эквивалентность  
только при нулевых  
начальных условиях!

$$W(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$



$$W(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

↓  
 $y(t) = W(p)[u(t)]$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

↓  
 $Y(s) = W(s)U(s)$

Дифференциально-интегральный  
оператор

Передаточная функция системы в изображениях Лапласа  
равна отношению изображений по Лапласу выхода и входа  
при нулевых начальных условиях

Поляков К. Ю.

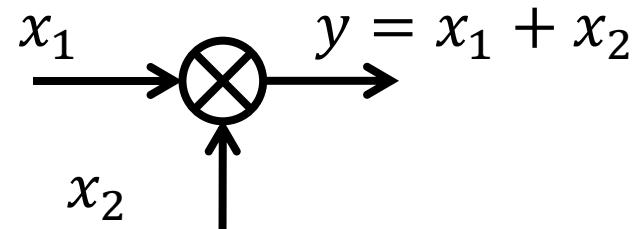
«Теория автоматического  
управления для “чайников”»

линейных систем

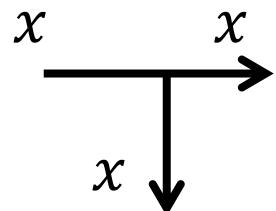
# Структурные схемы

Элементы:

## 1. Узел суммирования



## 2. Точка ветвления



## 3. Звено



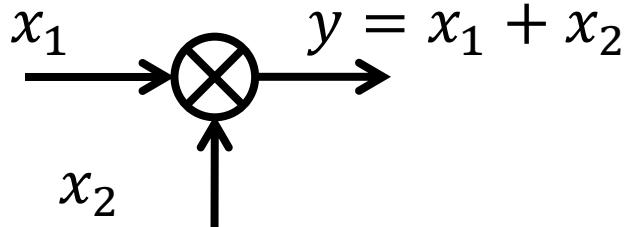
<...> структурная схема –  
разновидность направленного графа

Мирошник И. В.  
«Теория автоматического управления.  
Линейные системы.»

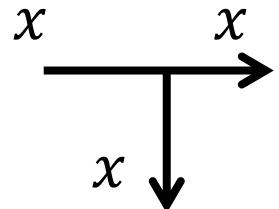
# Структурные схемы

Элементы:

## 1. Узел суммирования



## 2. Точка ветвления

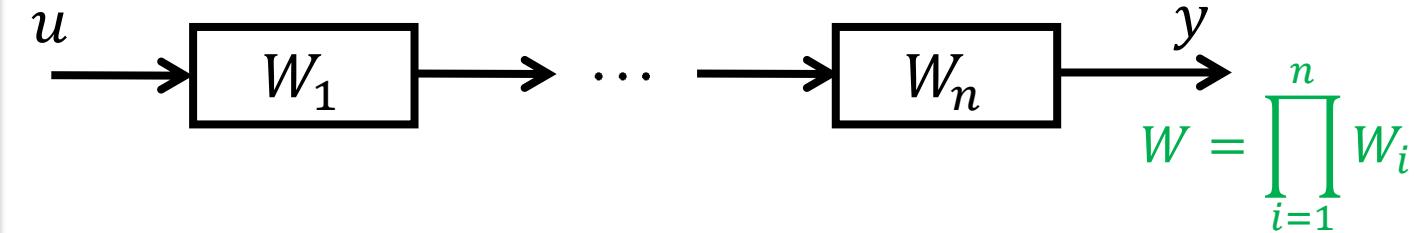


## 3. Звено



Типы соединения звеньев:

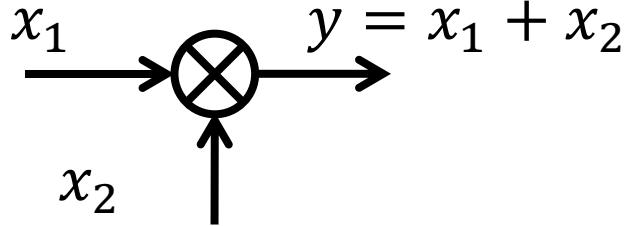
## 1. Последовательное



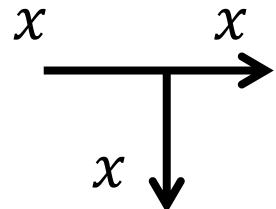
# Структурные схемы

Элементы:

## 1. Узел суммирования



## 2. Точка ветвления

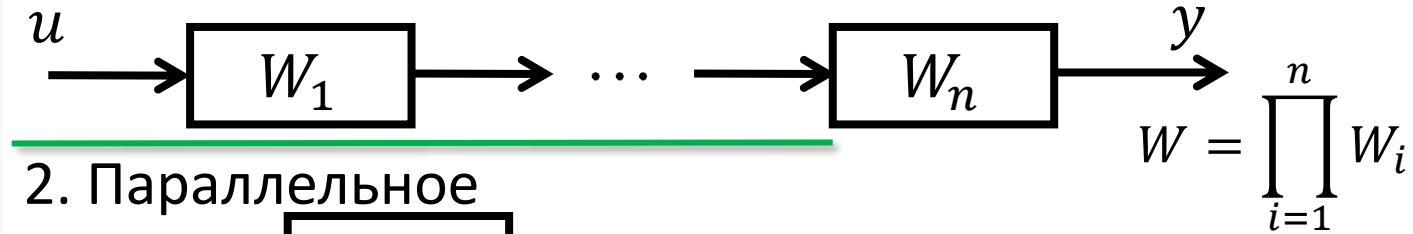


## 3. Звено

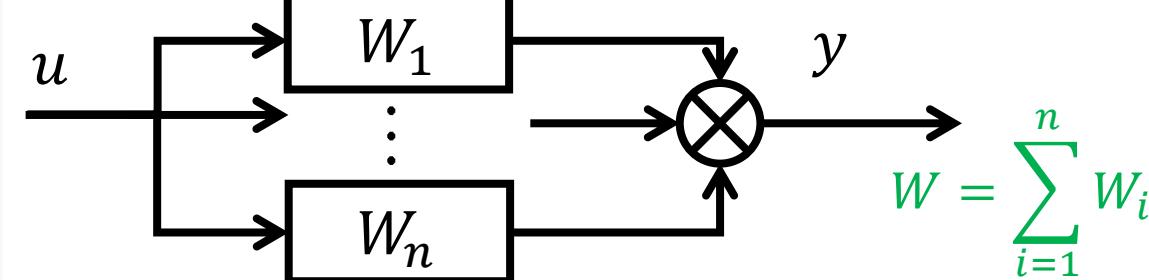


Типы соединения звеньев:

## 1. Последовательное



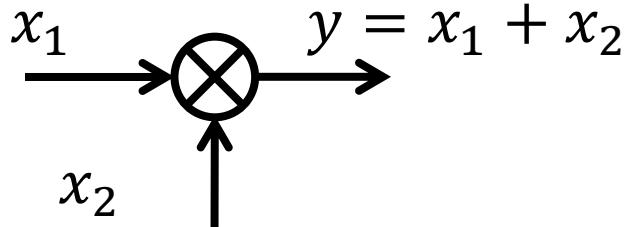
## 2. Параллельное



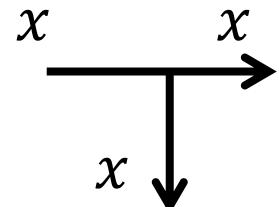
# Структурные схемы

Элементы:

## 1. Узел суммирования



## 2. Точка ветвления

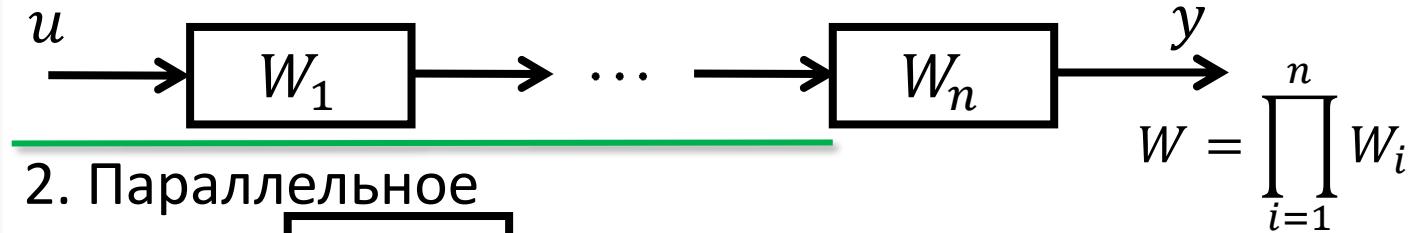


## 3. Звено

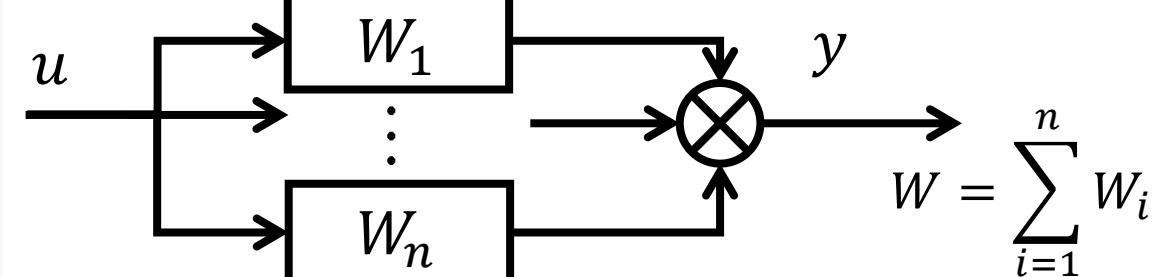


Типы соединения звеньев:

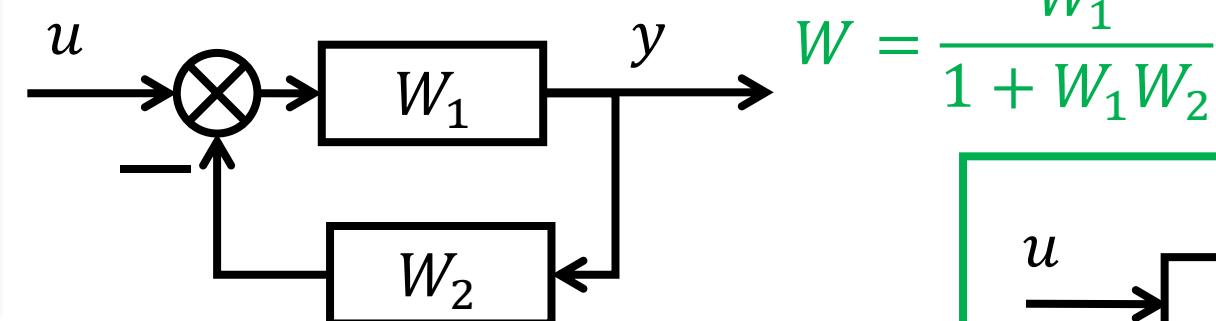
## 1. Последовательное



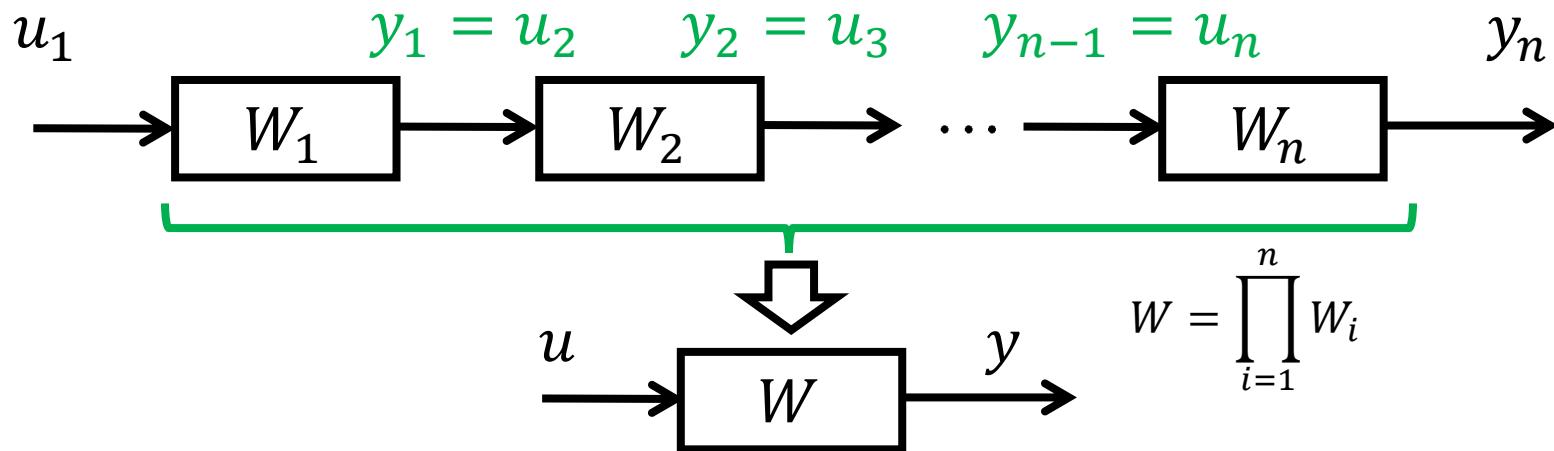
## 2. Параллельное



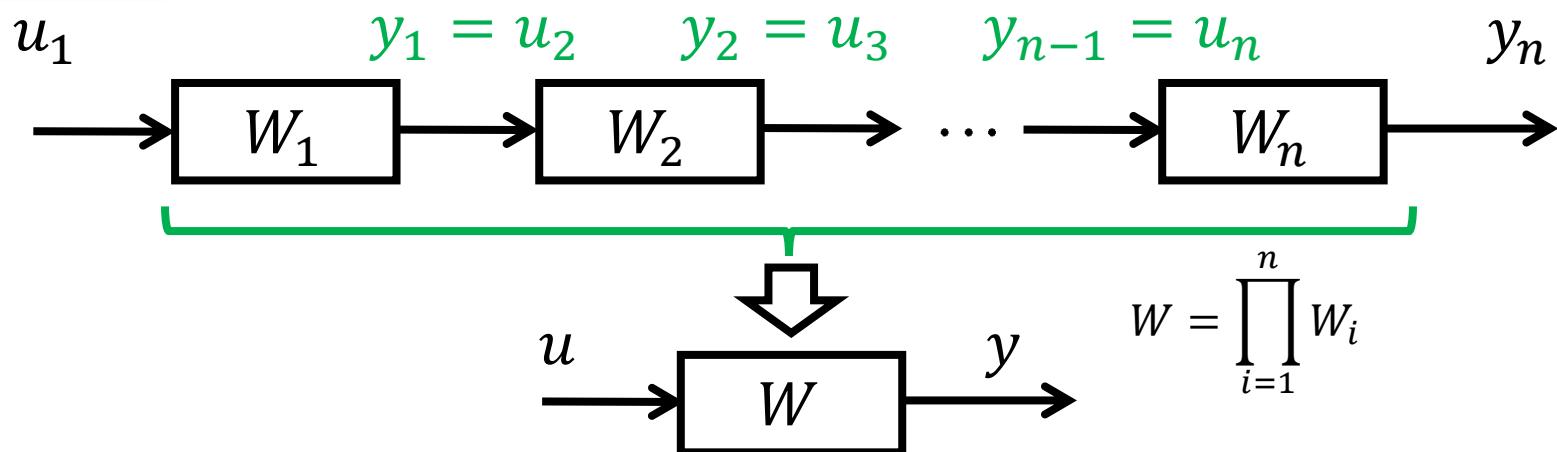
## 3. Встречно-параллельное



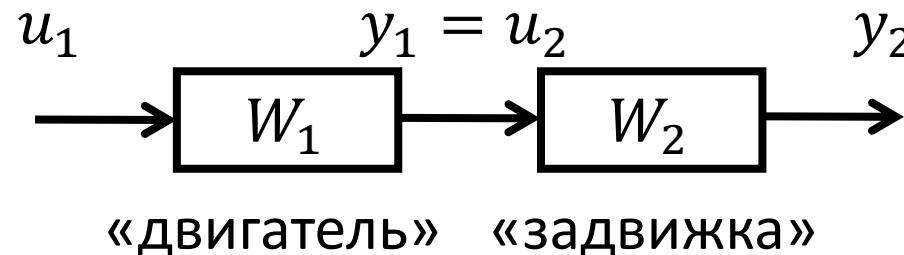
## Структурные схемы: Последовательное соединение



## Структурные схемы: Последовательное соединение

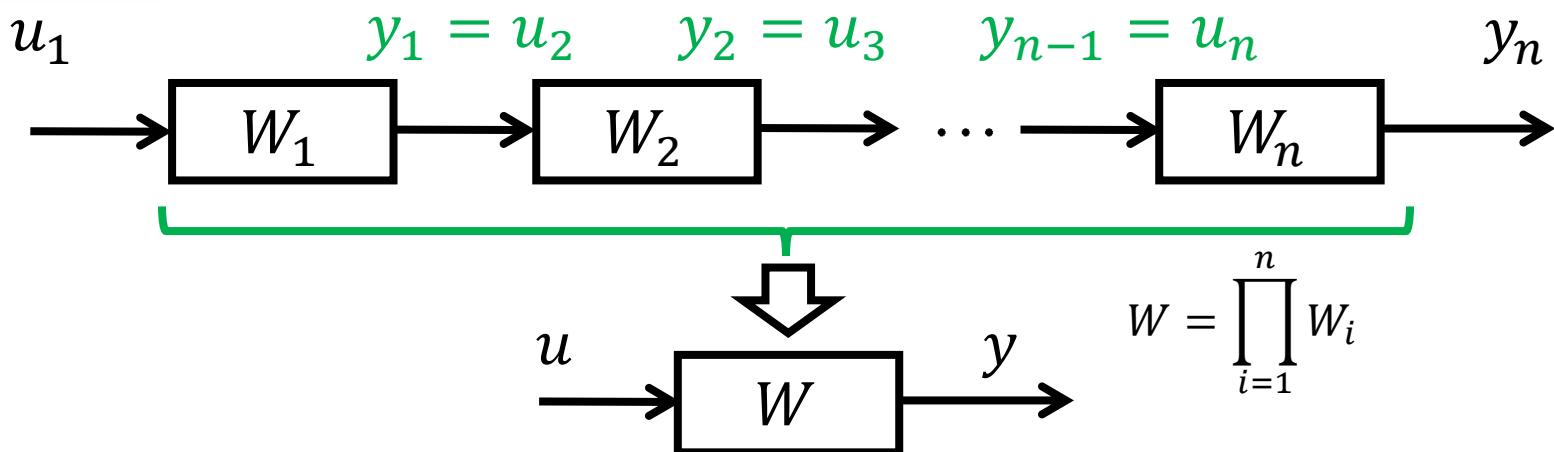


Пример

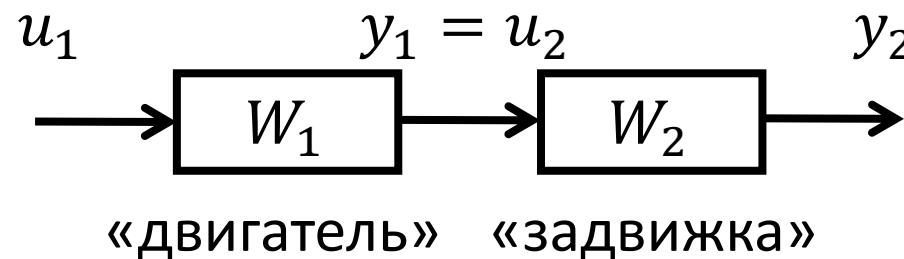


$$W_1(p) = \frac{p+3}{p+2}, W_2(p) = \frac{p+2}{p+3}$$

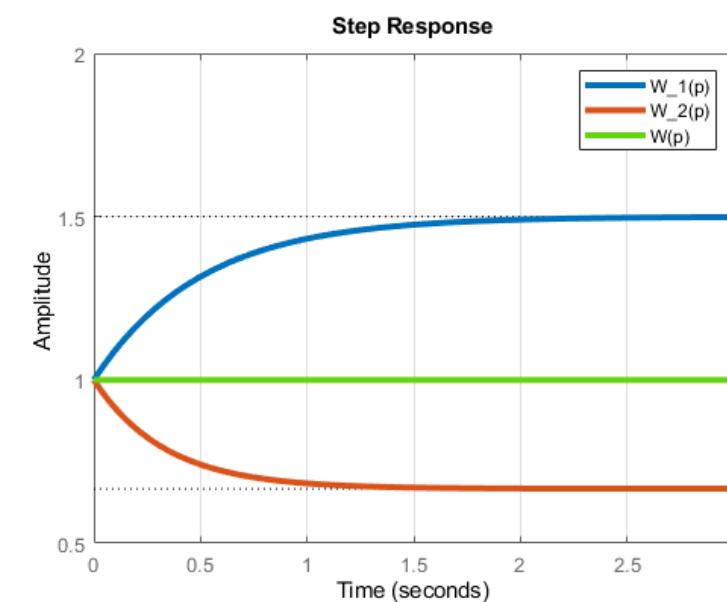
# Структурные схемы: Последовательное соединение



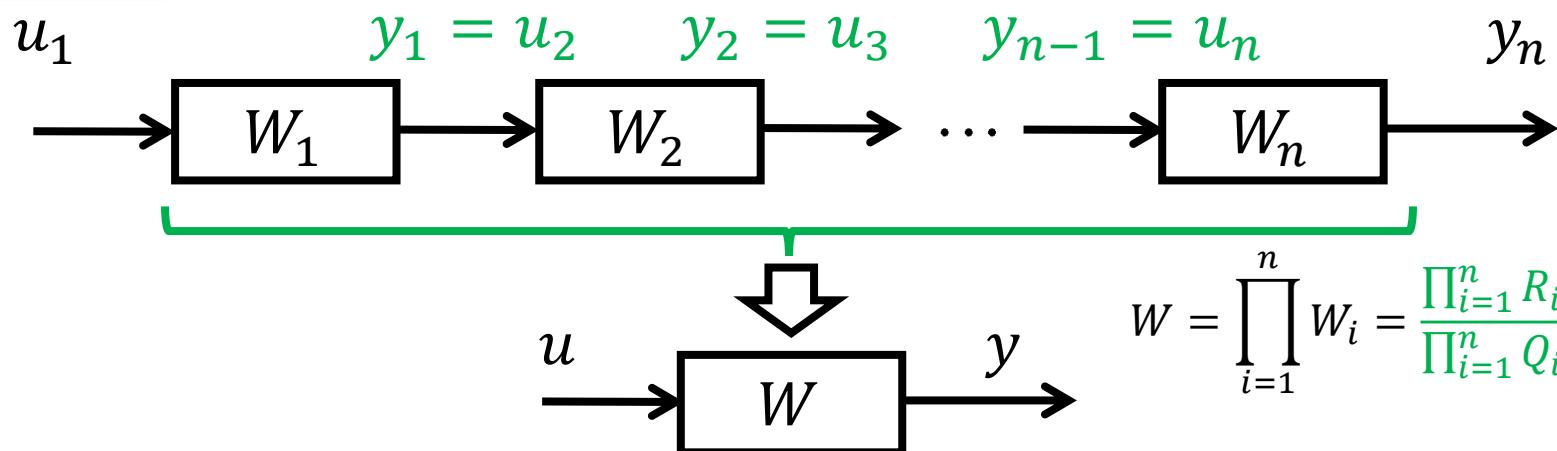
Пример



$$W_1(p) = \frac{p+3}{p+2}, W_2(p) = \frac{p+2}{p+3}, W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = 1$$

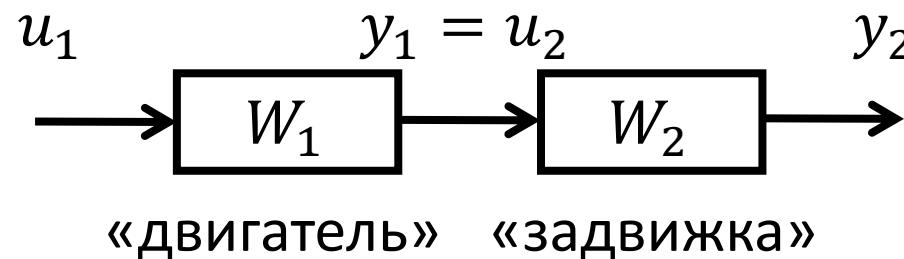


# Структурные схемы: Последовательное соединение

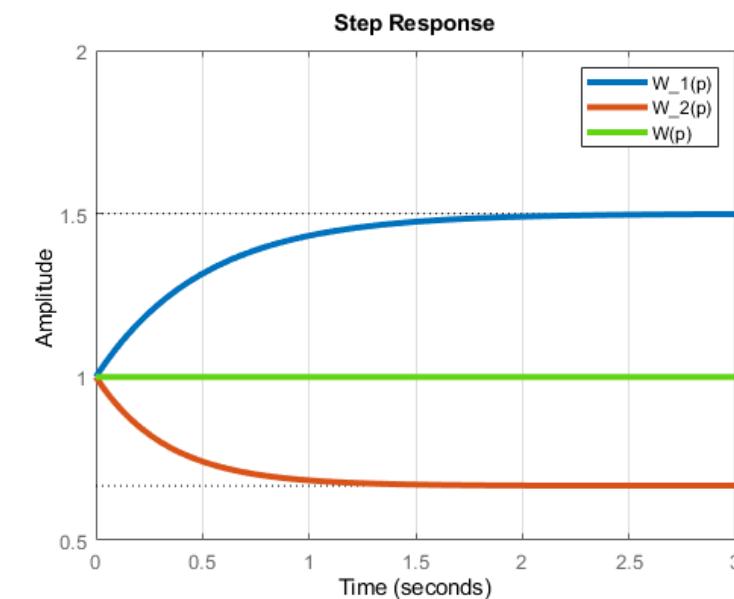


Эквивалентная ПФ вбирает в себя все нули и полюса от отдельных ПФ в цепи, при этом они могут скомпенсировать друг друга

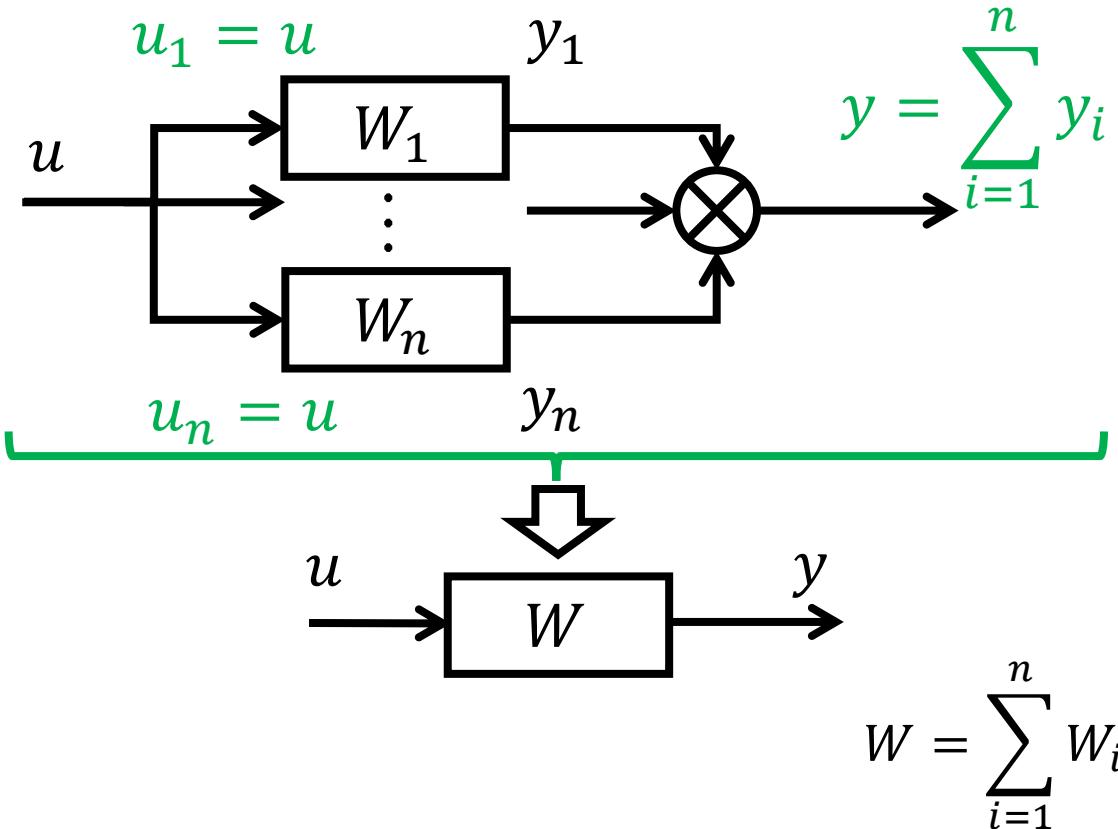
## Пример



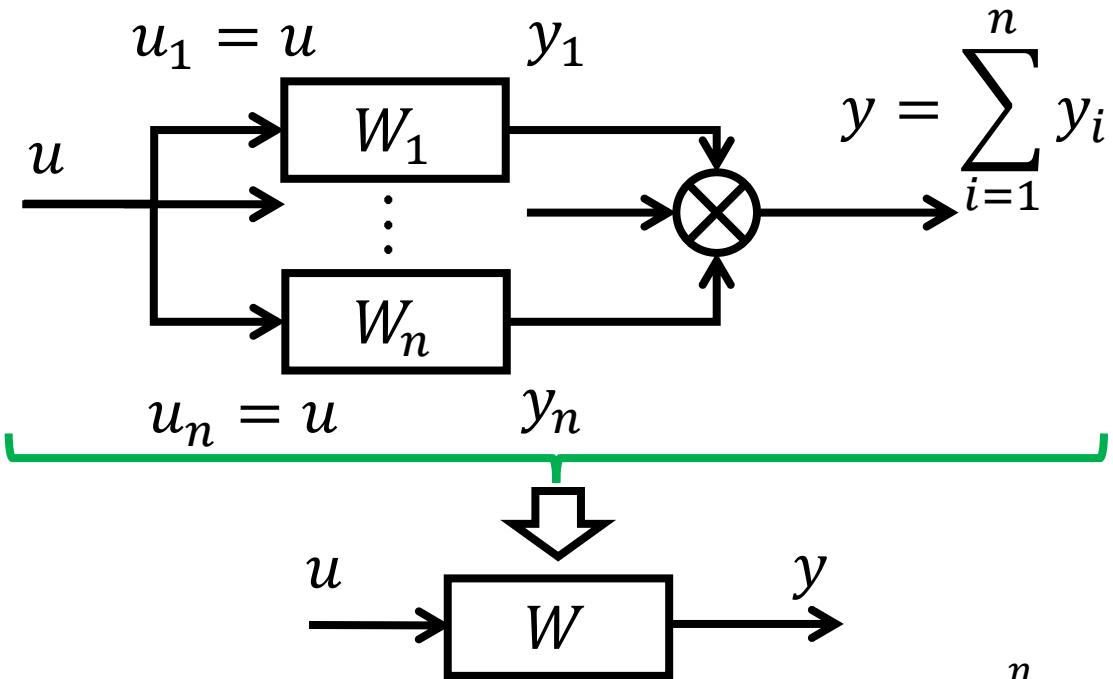
$$W_1(p) = \frac{p+3}{p+2}, W_2(p) = \frac{p+2}{p+3}, W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = 1$$



# Структурные схемы: Параллельное соединение



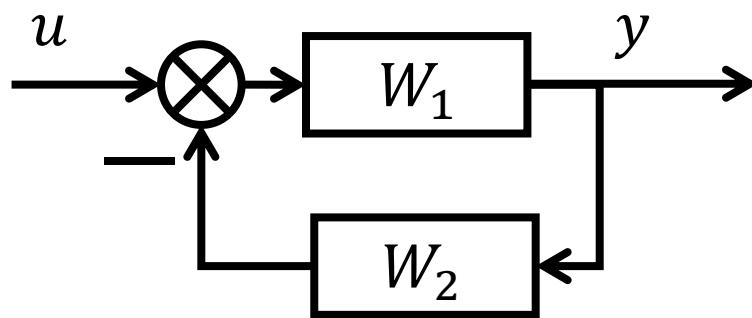
$$W = \sum_{i=1}^n W_i$$



$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{Q_i} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{\prod_{i=1}^n Q_i}$$

Эквивалентная ПФ вбирает в себя все полюса от отдельных ПФ, нули же «замешиваются» сложнее, сложнее и осуществлять коррекцию динамики (компенсации нуля полюсом) таким образом

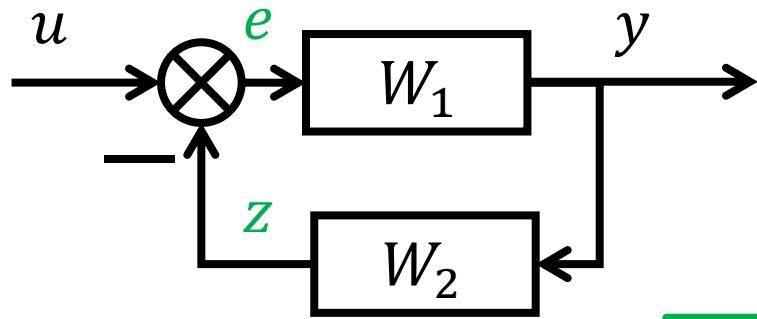
# Структурные схемы: Встречно-параллельное



Пусть контур с отрицательной обратной связью (ООС)

Как правильно подступиться?

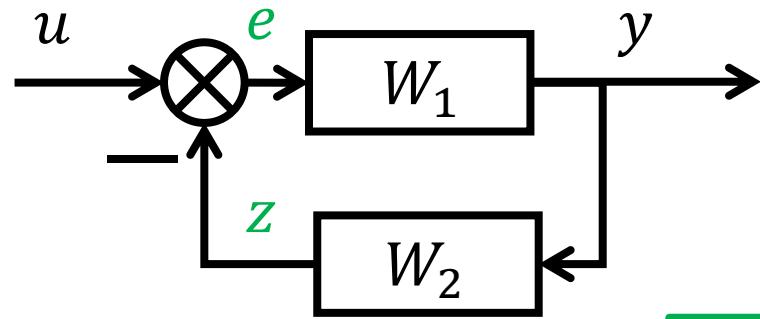
## Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u - z$$

Вводится в  
рассмотрение ошибки  $e$

## Структурные схемы: Встречно-параллельное

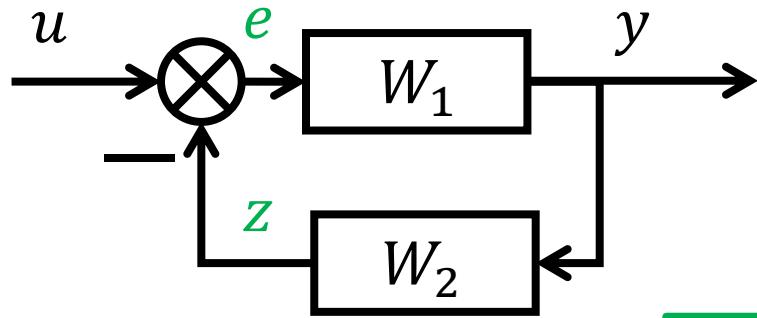


$$e = u - z$$

Вводится в  
рассмотрение ошибка  $e$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

## Структурные схемы: Встречно-параллельное



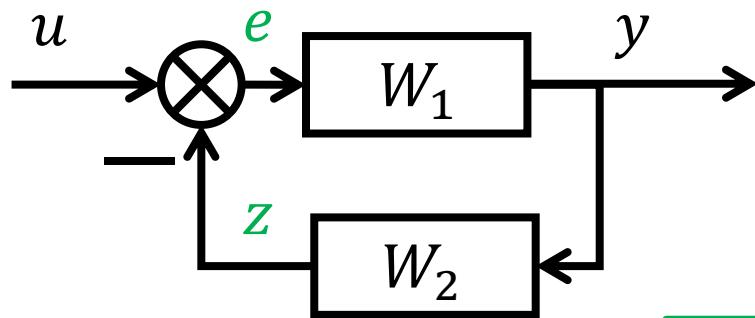
$$e = u - z$$

Вводится в  
рассмотрение ошибки  $e$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

$$(1 + W_1 W_2)y = W_1 u$$

# Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u - z$$

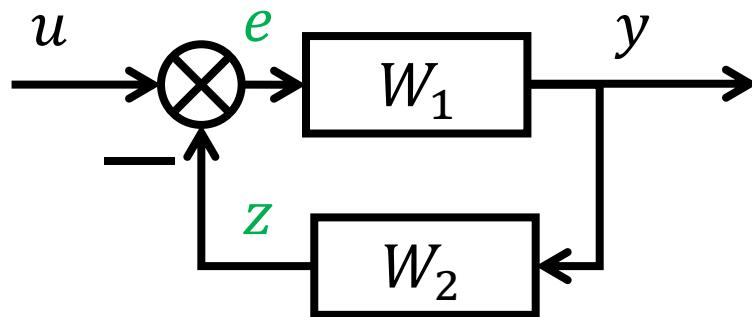
Вводится в  
рассмотрение ошибки  $e$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

$$(1 + W_1 W_2)y = W_1 u$$

$$W = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

## Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u - z$$

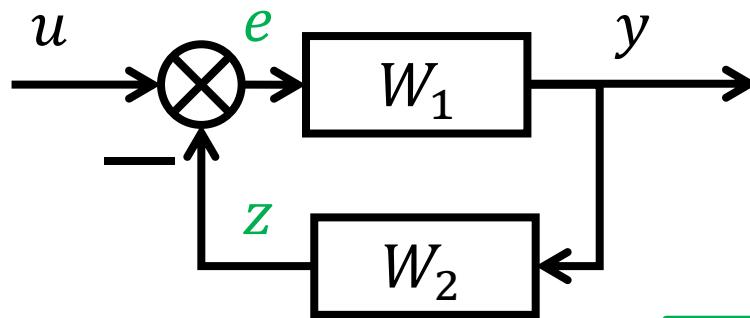
$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

$$(1 + W_1 W_2)y = W_1 u$$

$$W = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} = \frac{R_1 Q_2}{Q_1 Q_2 + R_1 R_2}$$

Все нули и полюса  
перемешались

# Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u - z$$

Вводится в  
рассмотрение ошибки  $e$

$$y = W_1 e = W_1 u - W_1 z = W_1 u - W_1 W_2 y$$

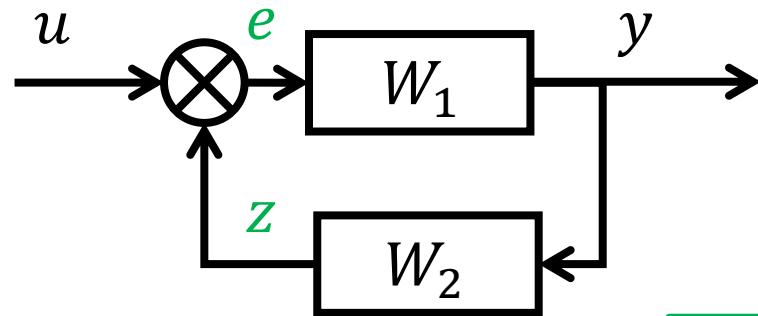
$$(1 + W_1 W_2)y = W_1 u$$

$$W_{u \rightarrow y} = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

$$W_{u \rightarrow e} = \frac{e}{u} = \frac{1}{1 + W_1 W_2}$$

Часто также рассматривается  
ПФ по ошибке

# Структурные схемы: Встречно-параллельное



$$e = u + z$$

Вводится в  
рассмотрение ошибки  $e$

$$y = W_1 e = W_1 u + W_1 z = W_1 u + W_1 W_2 y$$

$$(1 - W_1 W_2)y = W_1 u$$

$$W_{u \rightarrow y} = \frac{y}{u} = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2}$$

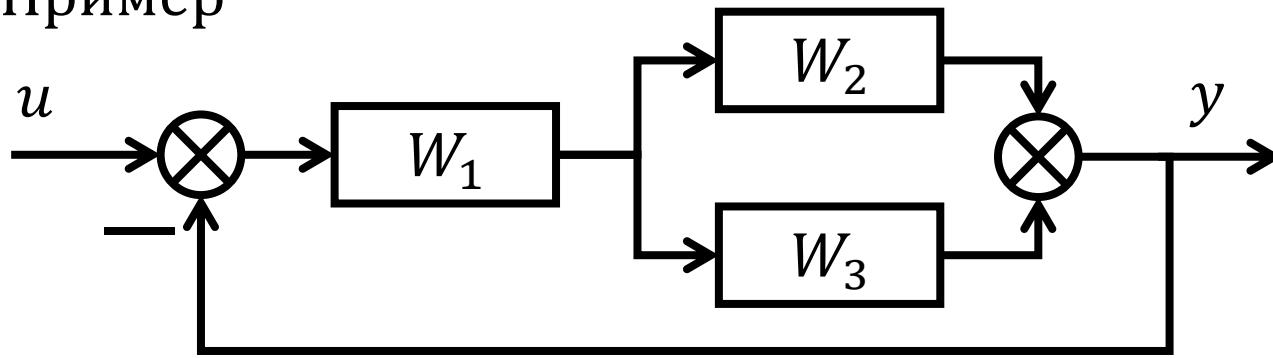
$$W_{u \rightarrow e} = \frac{e}{u} = \frac{1}{1 - W_1 W_2}$$

Если обратная связь не отрицательная, а положительная

Положительная ОС  
характерна не для  
систем управления, а  
для генераторов

# Структурные схемы

Пример

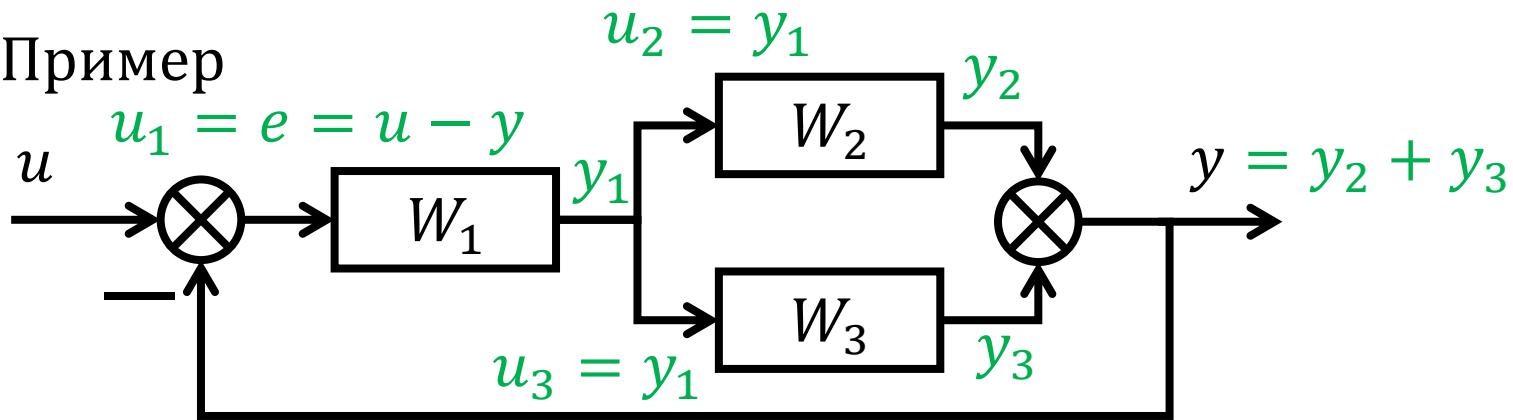


$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

# Структурные схемы

Пример

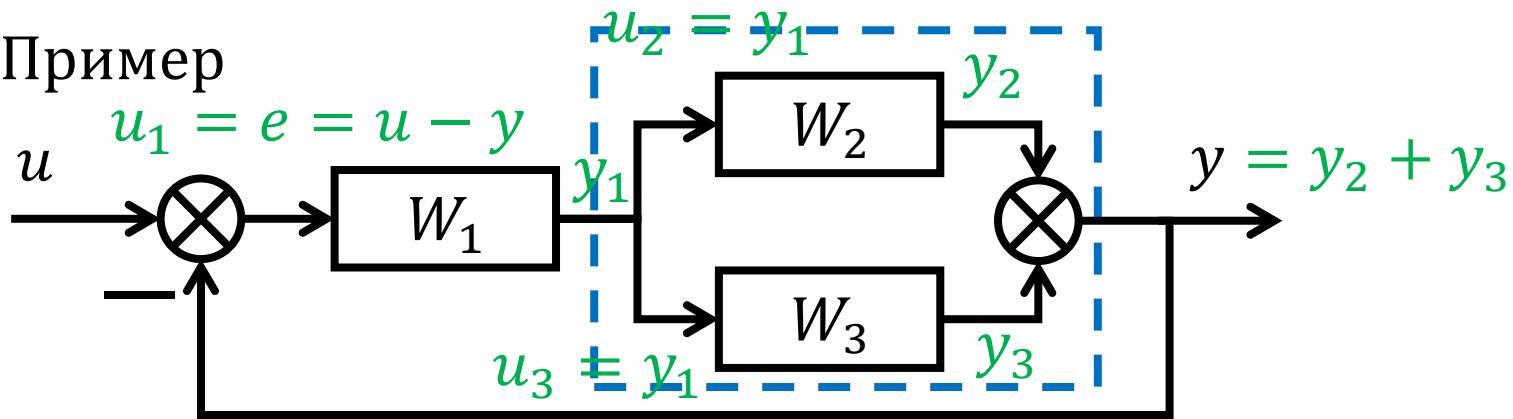


$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

# Структурные схемы

Пример



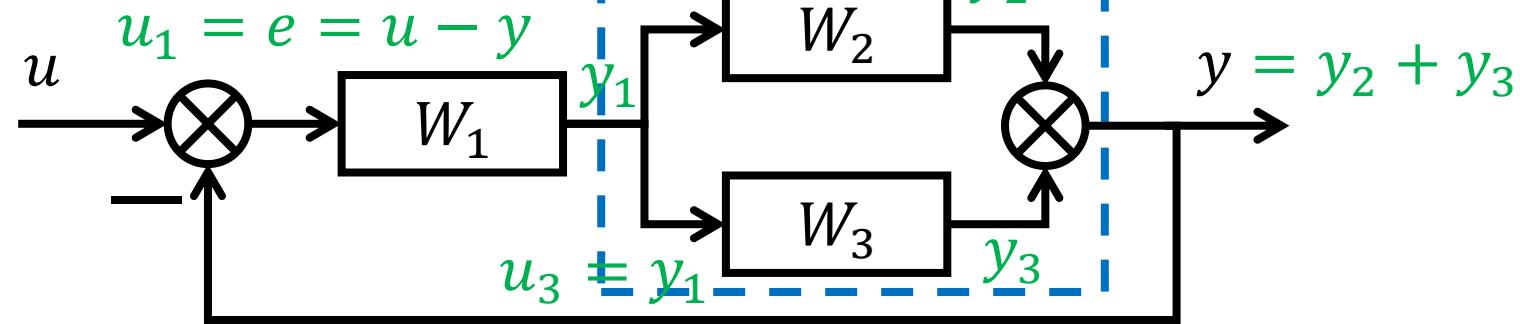
$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

# Структурные схемы

Пример

$$u \xrightarrow{u_1 = e = u - y} \textcircled{\times}$$



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

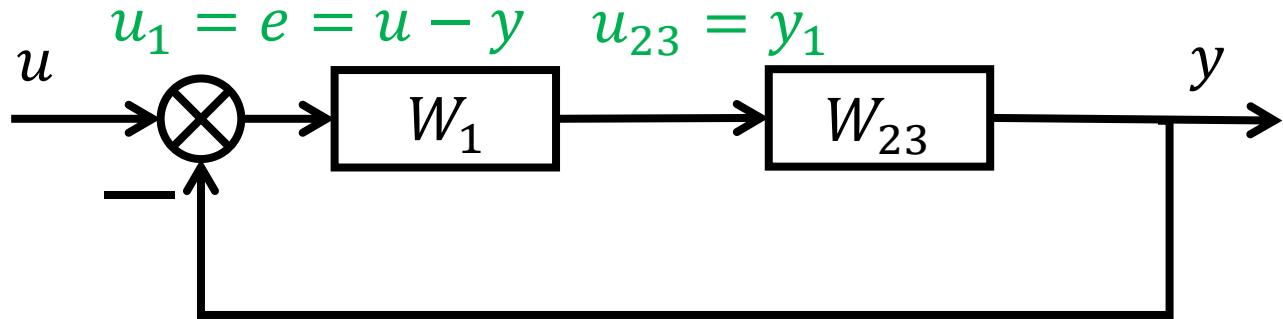
$$W(p) = ?$$

Параллельное

$$\begin{aligned} W_{23}(p) &= W_2(p) + W_3(p) = \\ &= \frac{3p+4}{p(p+2)} \end{aligned}$$

# Структурные схемы

Пример



Параллельное

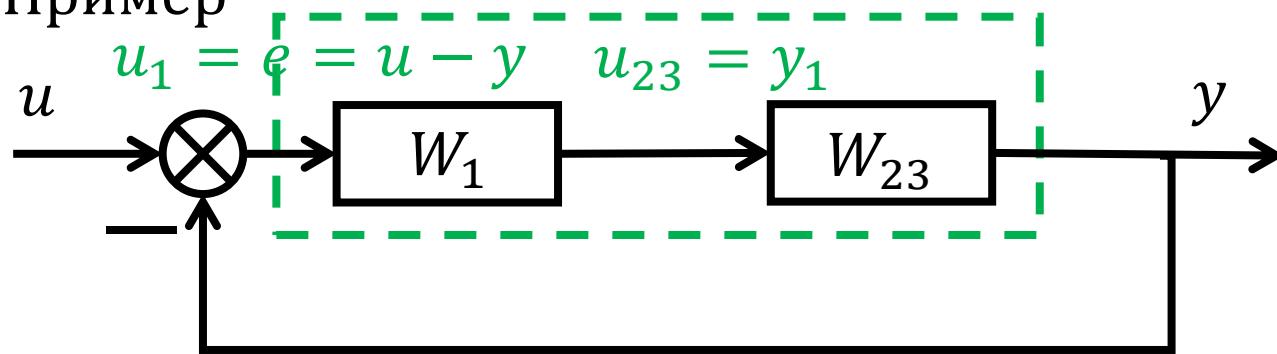
$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) = \frac{3p + 4}{p(p + 2)}$$

$$W_1(p) = \frac{p}{p + 1}, W_2(p) = \frac{1}{p + 2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

# Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

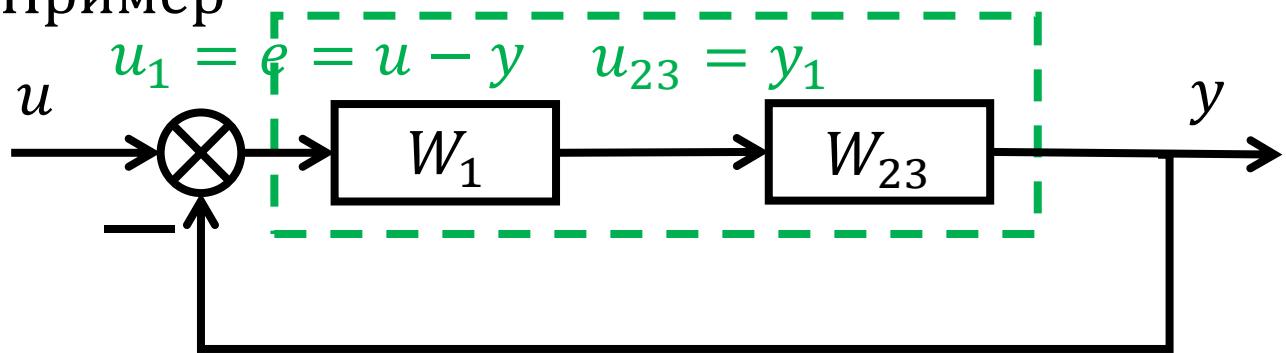
$$W(p) = ?$$

Параллельное

$$\begin{aligned} W_{23}(p) &= W_2(p) + W_3(p) = \\ &= \frac{3p + 4}{p(p + 2)} \end{aligned}$$

# Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Параллельное

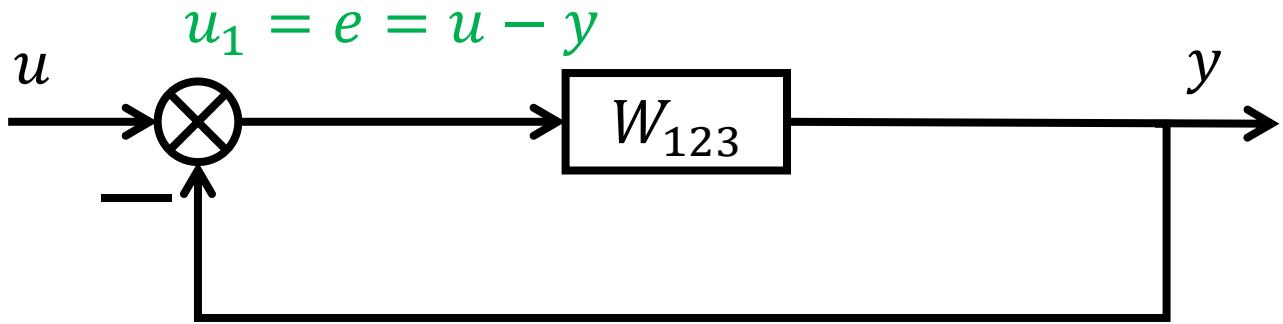
$$\begin{aligned} W_{23}(p) &= W_2(p) + W_3(p) = \\ &= \frac{3p+4}{p(p+2)} \end{aligned}$$

Последовательное

$$\begin{aligned} W_{123}(p) &= W_1(p)W_{23}(p) = \\ &= \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

# Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Параллельное

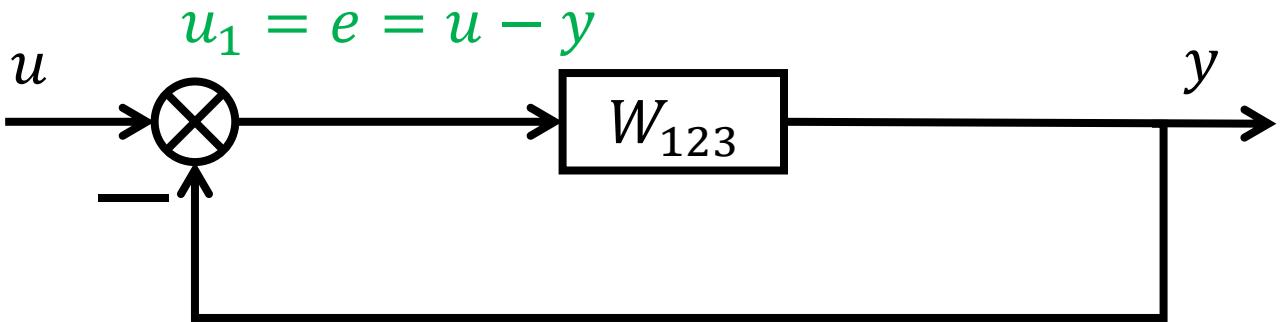
$$\begin{aligned} W_{23}(p) &= W_2(p) + W_3(p) = \\ &= \frac{3p+4}{p(p+2)} \end{aligned}$$

Последовательное

$$\begin{aligned} W_{123}(p) &= W_1(p)W_{23}(p) = \\ &= \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

# Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Параллельное

$$\begin{aligned} W_{23}(p) &= W_2(p) + W_3(p) = \\ &= \frac{3p+4}{p(p+2)} \end{aligned}$$

Последовательное

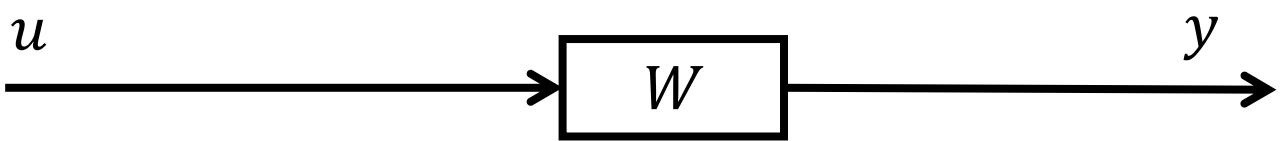
$$\begin{aligned} W_{123}(p) &= W_1(p)W_{23}(p) = \\ &= \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

Встречно-параллельное

$$W(p) = \frac{W_{123}(p)}{1 + W_{123}(p)} = \frac{3p+4}{p^2 + 6p + 6}$$

# Структурные схемы

Пример



$$W_1(p) = \frac{p}{p+1}, W_2(p) = \frac{1}{p+2}, W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

$$W(p) = ?$$

Параллельное

$$\begin{aligned} W_{23}(p) &= W_2(p) + W_3(p) = \\ &= \frac{3p+4}{p(p+2)} \end{aligned}$$

Последовательное

$$\begin{aligned} W_{123}(p) &= W_1(p)W_{23}(p) = \\ &= \frac{3p+4}{(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

Встречно-параллельное

$$W(p) = \frac{W_{123}(p)}{1 + W_{123}(p)} = \frac{3p+4}{p^2+6p+6}$$

# Структурные схемы

## Пример

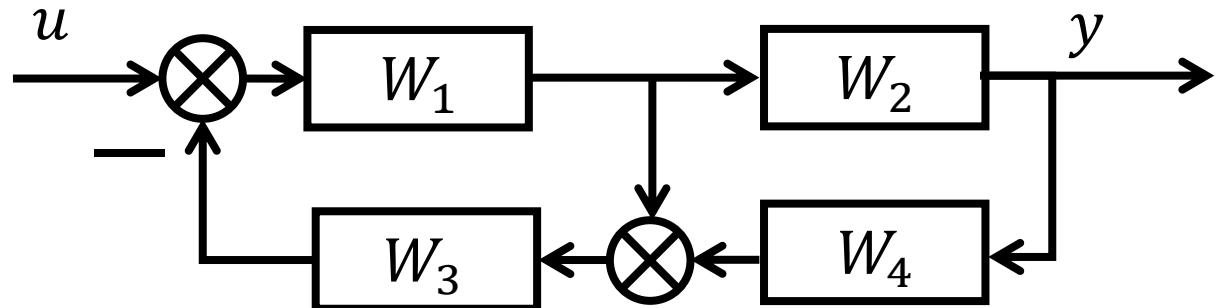
$$u \quad \boxed{\phantom{000}} \quad w(s) \quad y$$

Но схемы бывают сложнее

# Что делать?

$$W_1(p) = \frac{p}{p+}$$

$$W(p) = ?$$



$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p) =$$

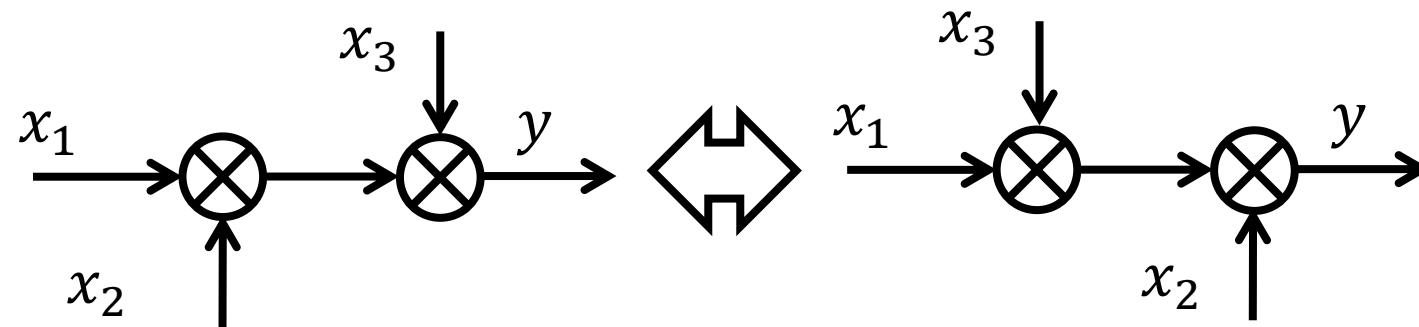
$$= \frac{3p + 4}{p(p + 2)}$$

$$\text{ледовательное} \\ ) = W_1(p)W_{23}(p) = \\ \frac{3p + 4}{(p + 1)(p + 2)}$$

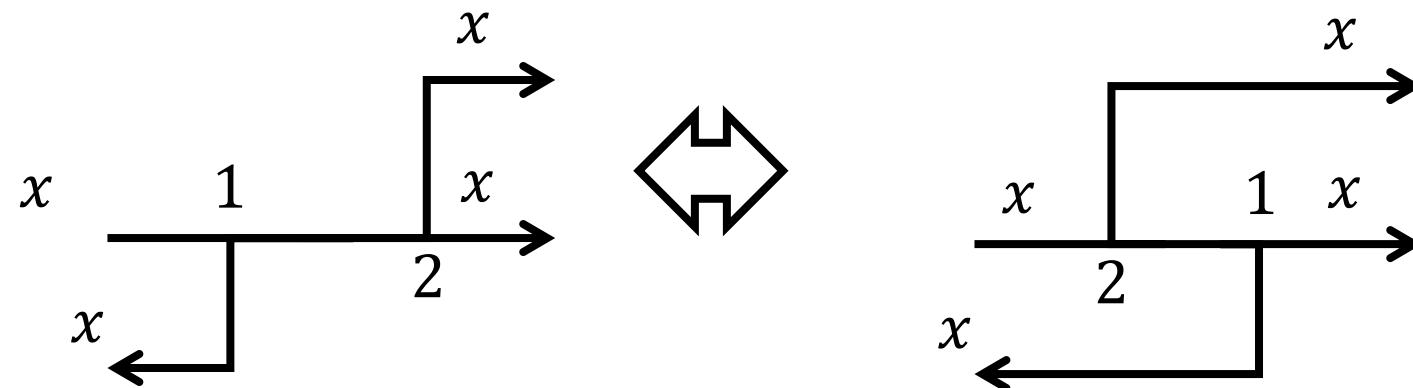
ио-параллельное

# Преобразование структурных схем

## 1. Перенос узла суммирования через узел

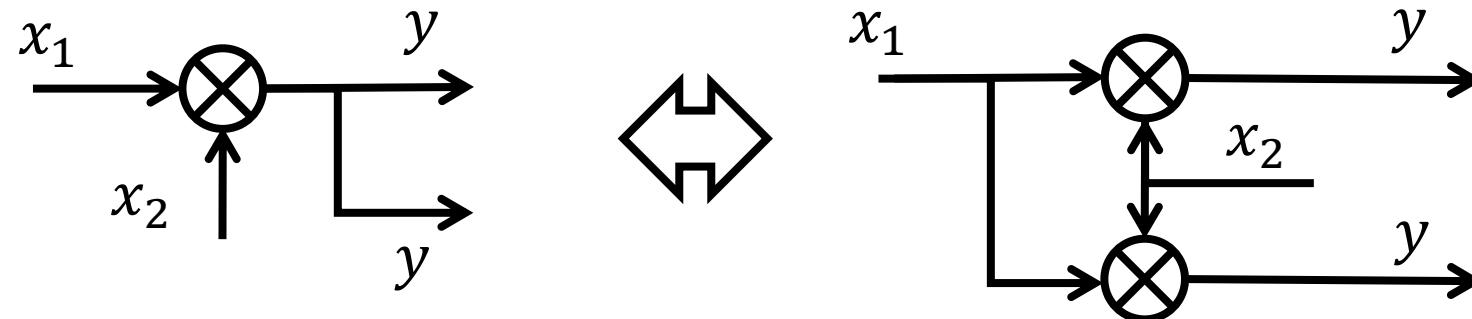


## 2. Перенос точки ветвления через точку ветвления

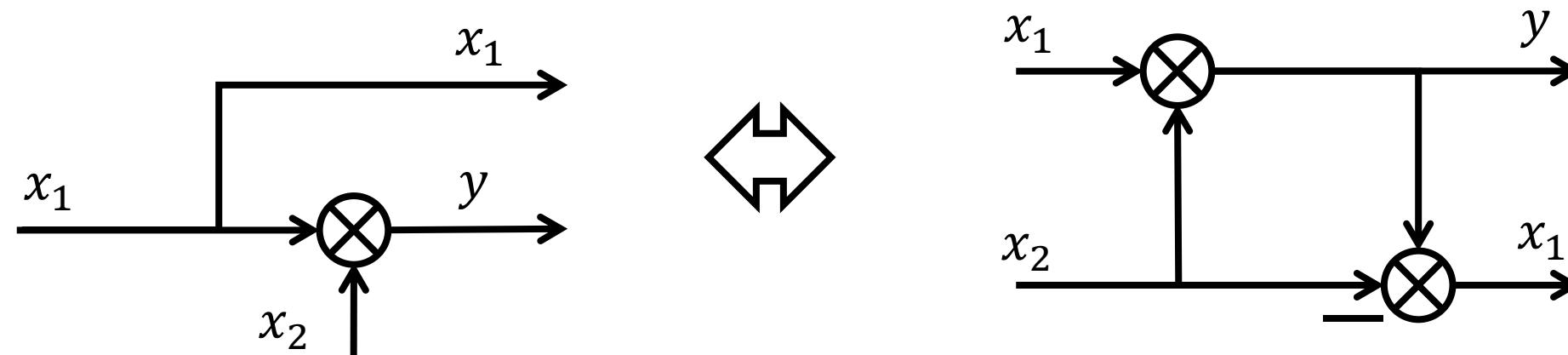


# Преобразование структурных схем

3. Перенос узла суммирования через точку ветвления

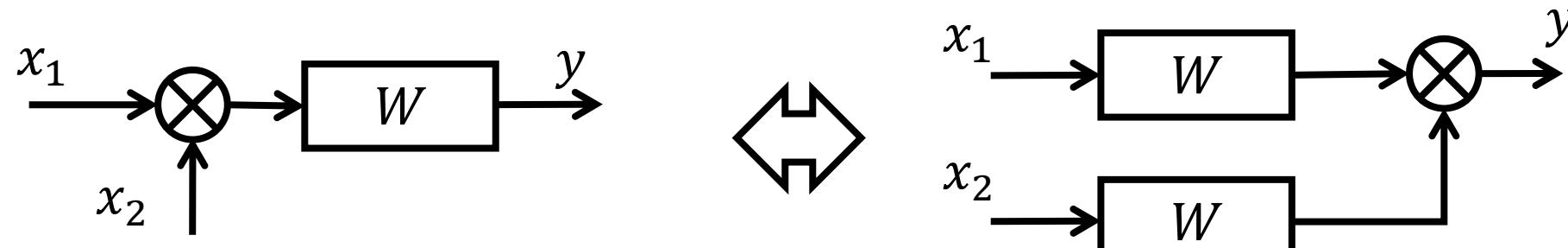


4. Перенос точки ветвления через узел суммирования

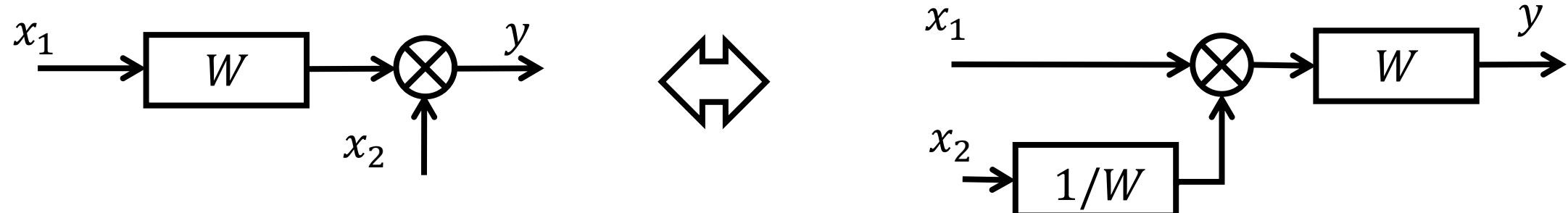


# Преобразование структурных схем

5. Перенос узла суммирования через звено по ходу сигнала

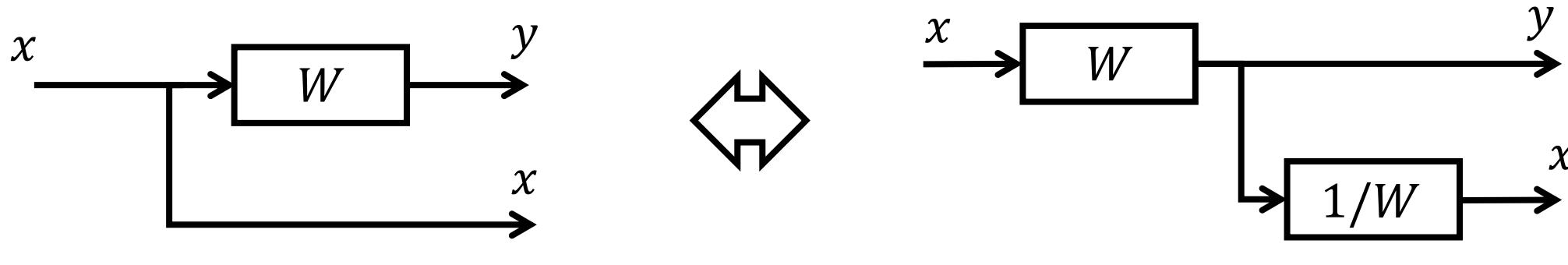


6. Перенос узла суммирования через звено против хода сигнала

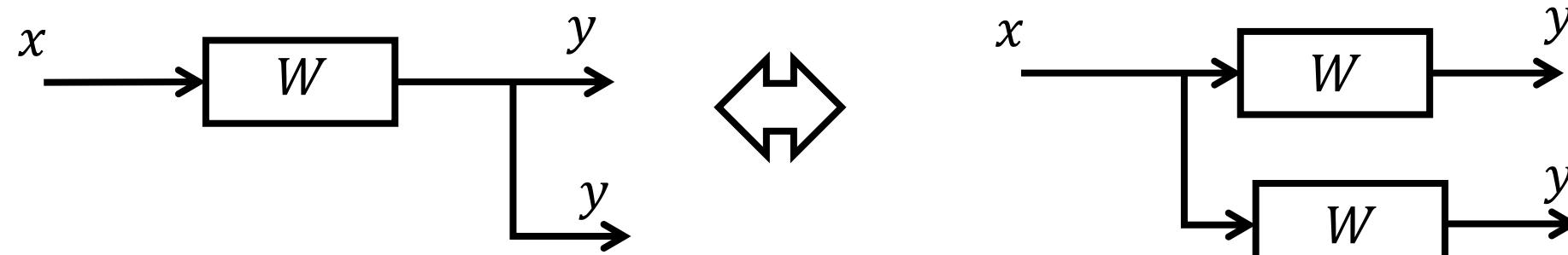


# Преобразование структурных схем

7. Перенос точки ветвления через звено по ходу сигнала

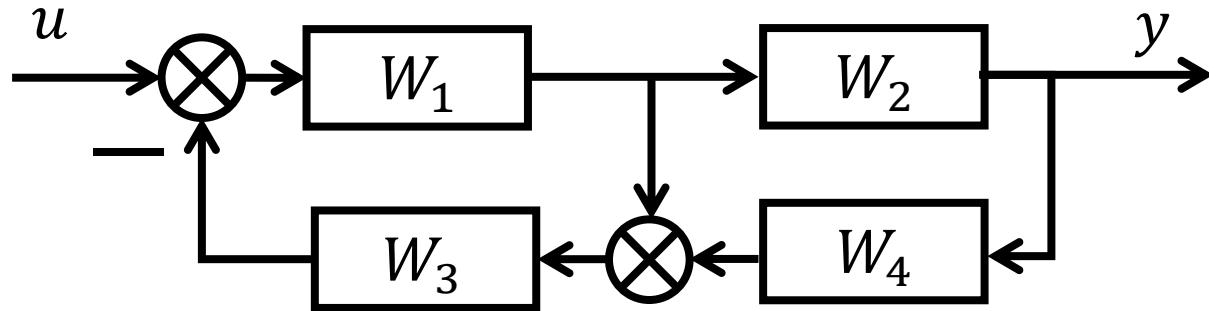


8. Перенос точки ветвления через звено против хода сигнала



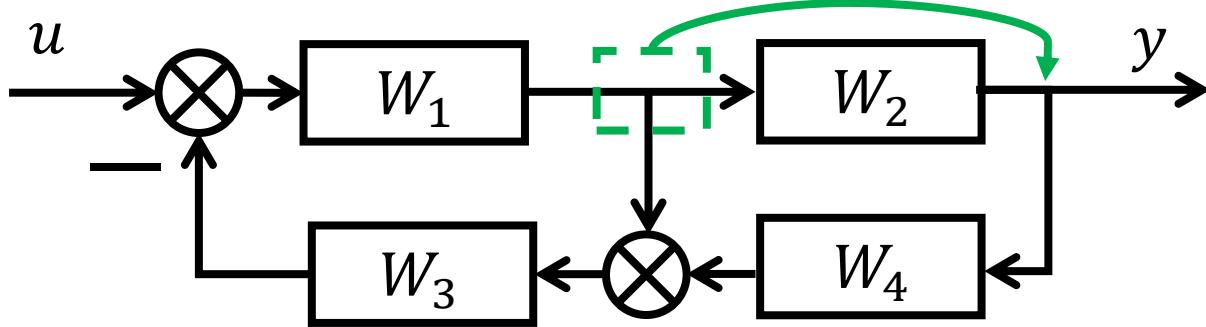
# Преобразование структурных схем

Пример:



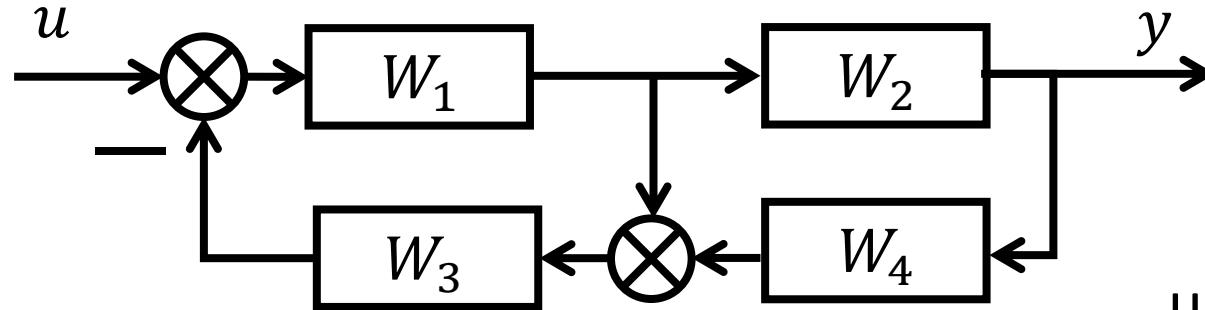
# Преобразование структурных схем

Пример:

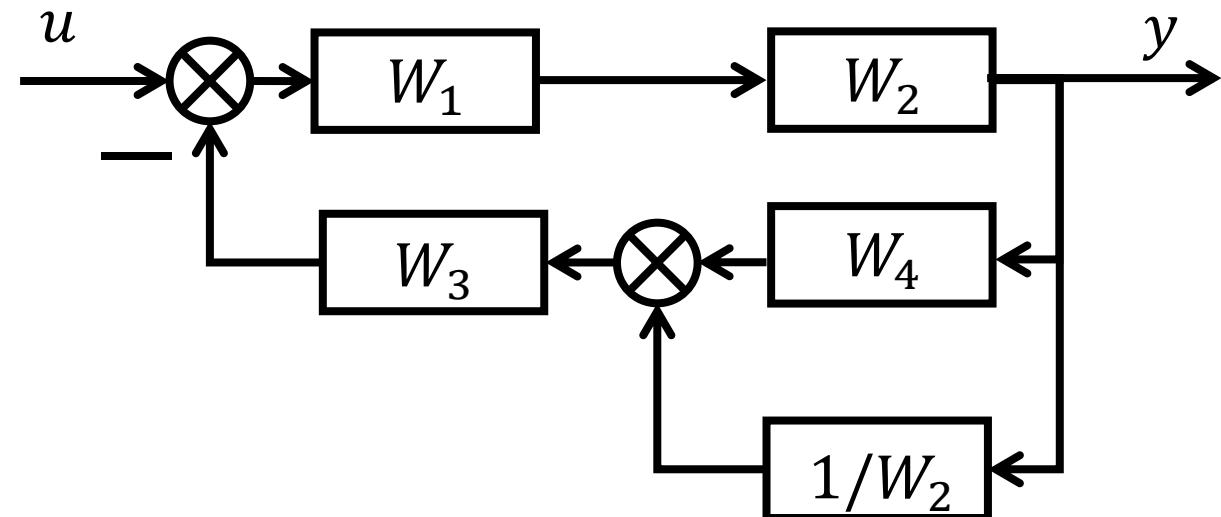


# Преобразование структурных схем

Пример:

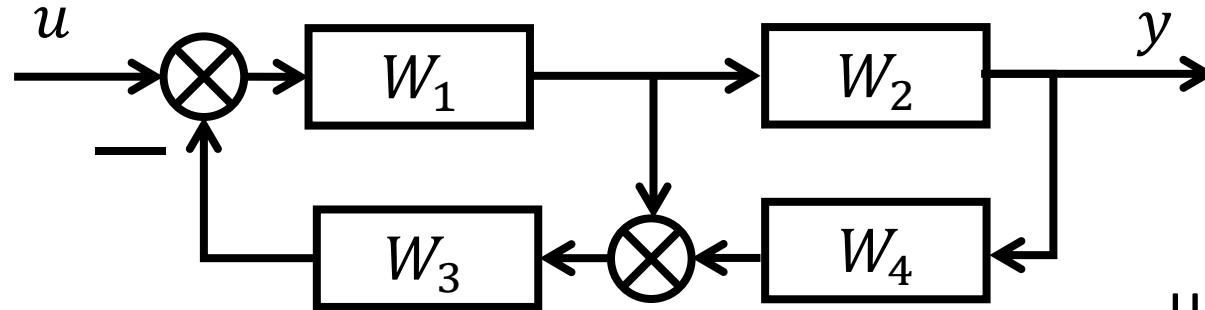


Шаг 1:

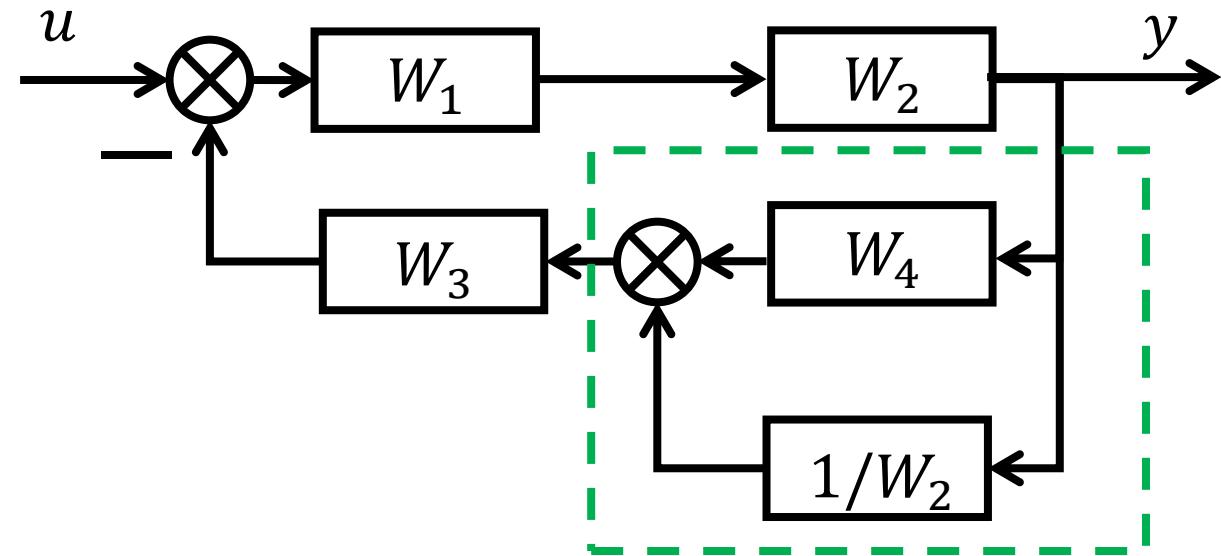


# Преобразование структурных схем

Пример:

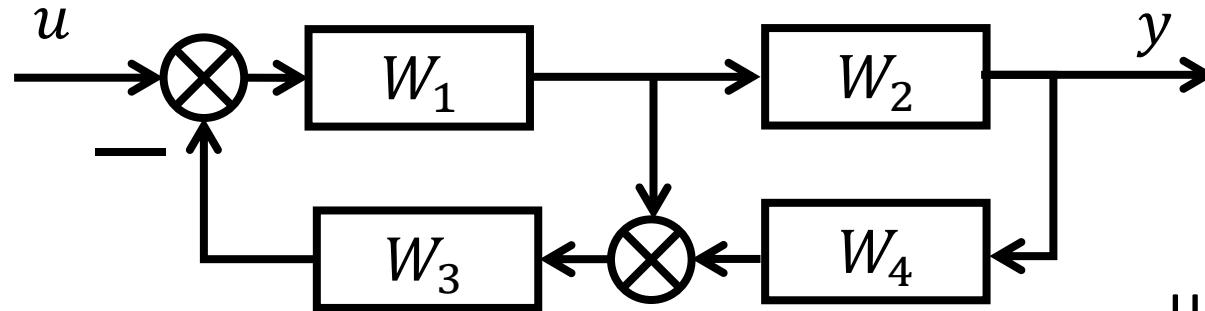


Шаг 1:

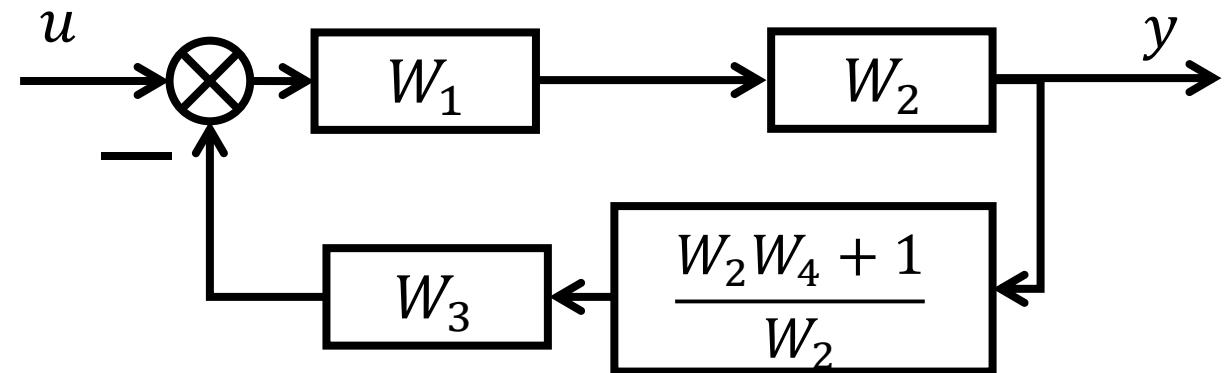


# Преобразование структурных схем

Пример:

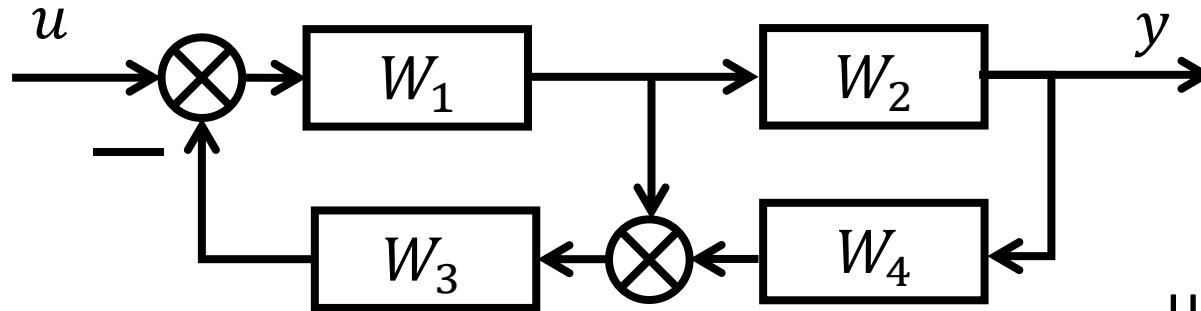


Шаг 2:

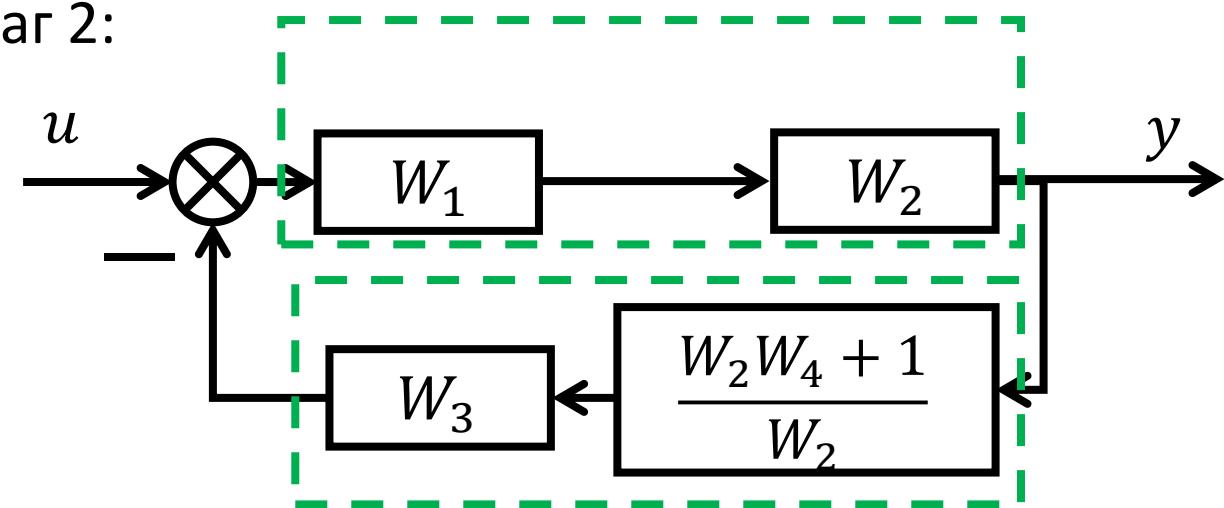


# Преобразование структурных схем

Пример:

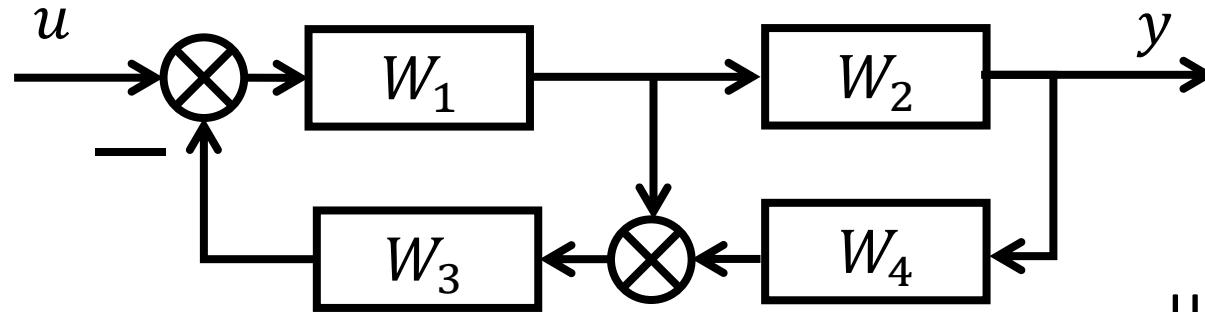


Шаг 2:

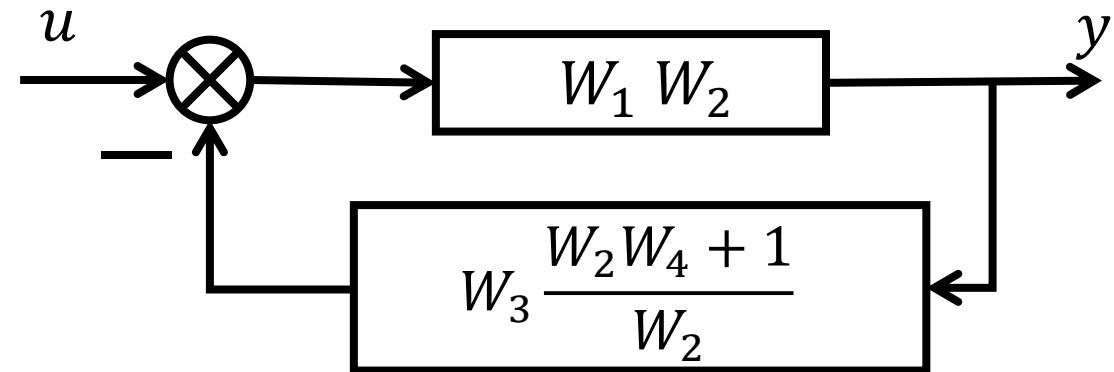


# Преобразование структурных схем

Пример:

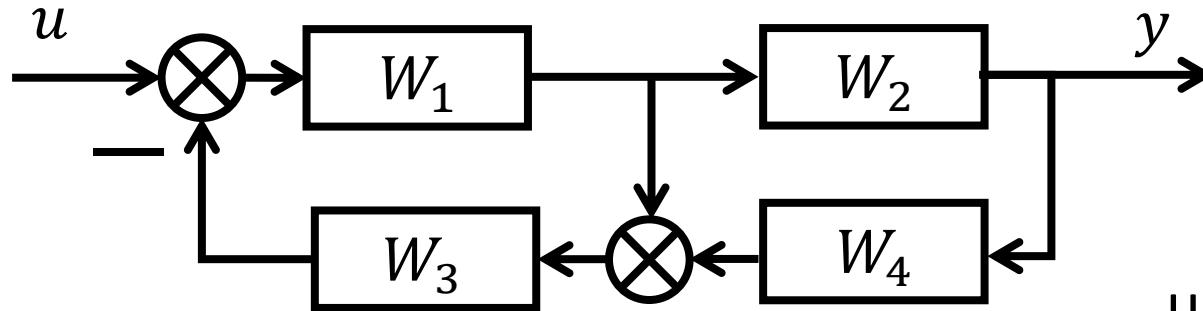


Шаг 3:

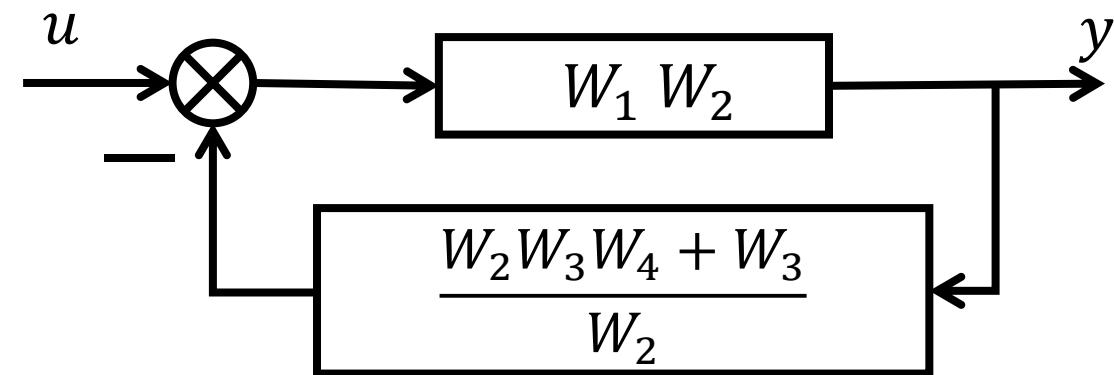


# Преобразование структурных схем

Пример:

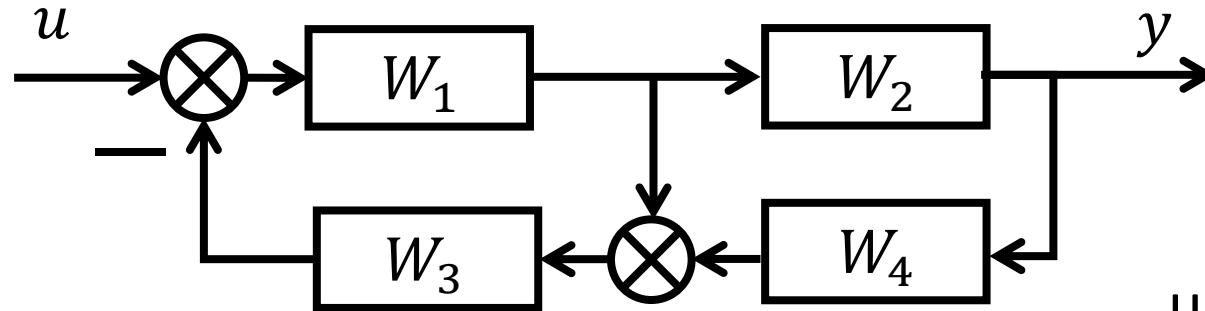


Шаг 3:

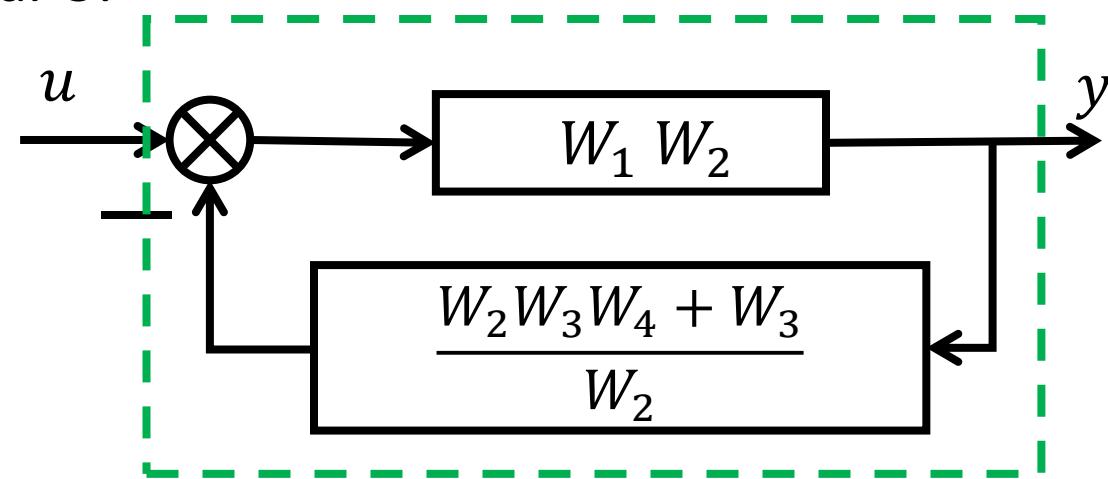


# Преобразование структурных схем

Пример:

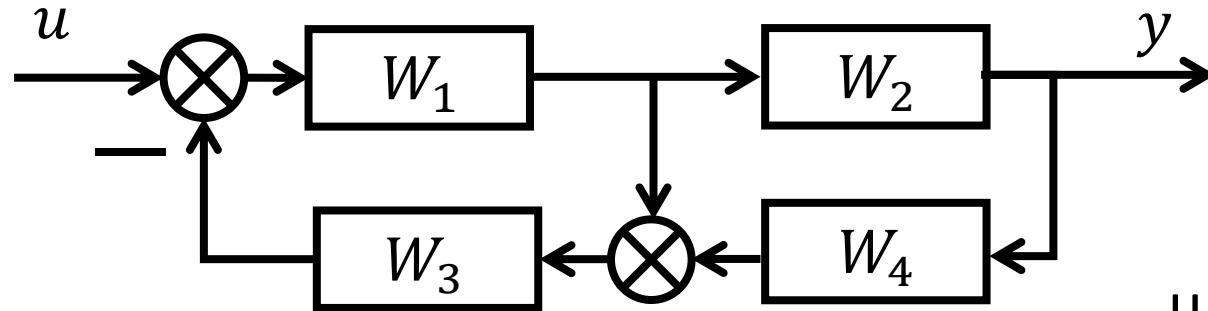


Шаг 3:



# Преобразование структурных схем

Пример:



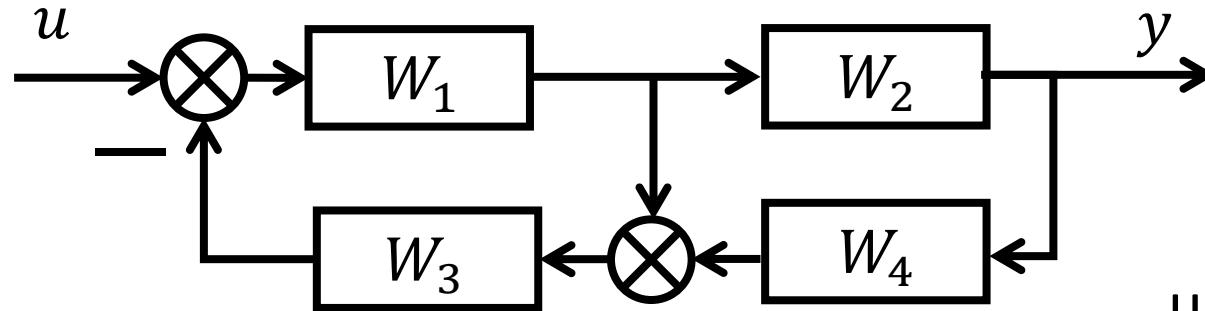
Шаг 4:



$$W = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 \frac{W_2 W_3 W_4 + W_3}{W_2}}$$

# Преобразование структурных схем

Пример:



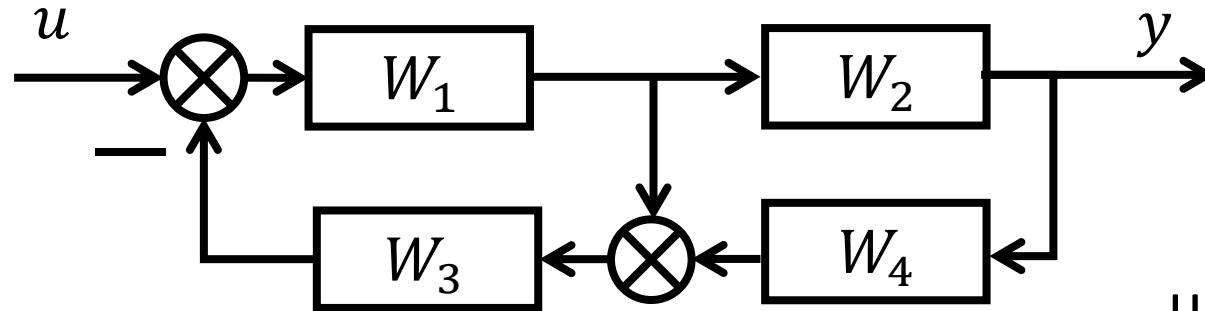
Шаг 4:



$$W = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 [W_3 W_4 + 1]}$$

# Преобразование структурных схем

Пример:



Шаг 4:



$$W = \frac{W_1 W_2 W_2}{W_2 + W_1 W_2 W_2 W_3 W_4 + W_1 W_2 W_3}$$

**Элементарные звенья** – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

**Типовые динамические звенья** – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

**Элементарные звенья** – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

**Типовые динамические звенья** – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

А в чем существенная разница?  
Почему два понятия?

**Элементарные звенья** – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

Больше математическое, формулировка  
отталкивается от полюсов и нулей

**Типовые динамические звенья** – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Инженерно-конструкторское, существуют таблицы типовых звеньев, для которых посчитаны характеристики и из которых удобно как из конструктора синтезировать системы

**Элементарные звенья** – звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, т.е. элементарное звено может быть описано либо одним вещественным нулём, либо одним вещественным полюсом, либо парой комплексно-сопряжённых нулей, либо парой комплексно-сопряжённых полюсов.

В основном соответствуют друг другу!

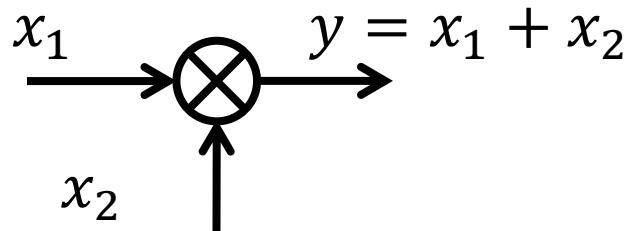
**Типовые динамические звенья** – элемент системы, который описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

...но из-за схожести в литературе можно столкнуться с путаницей, аналогичной различиям обозначений  $r$  и  $s$ .

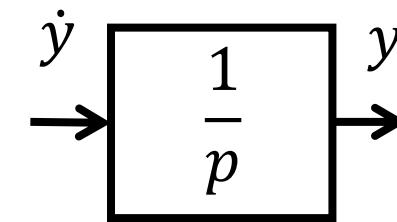
Будьте готовы!

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

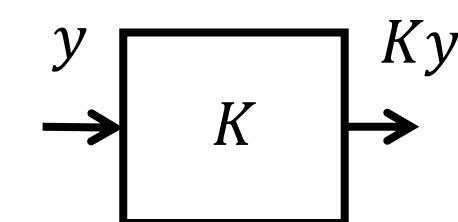
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»

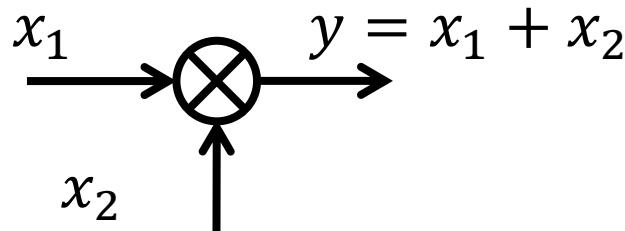


3. «Усилитель»

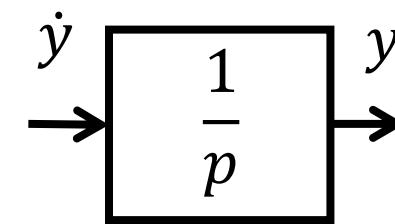


Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

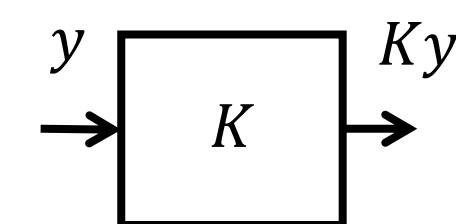
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



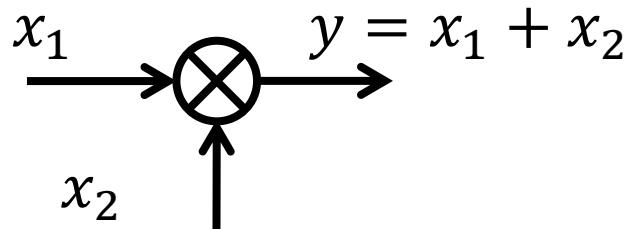
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

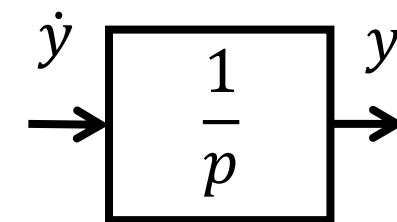
# Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

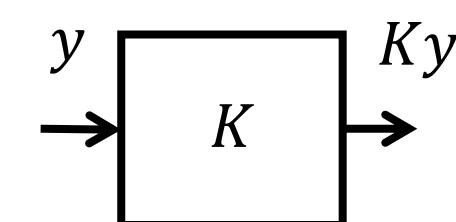
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

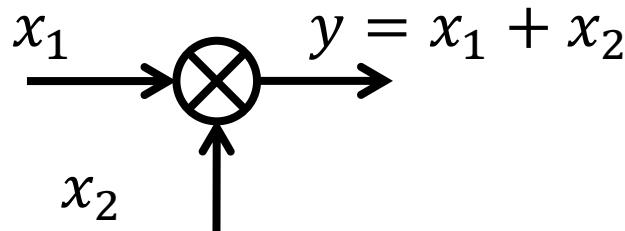
$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

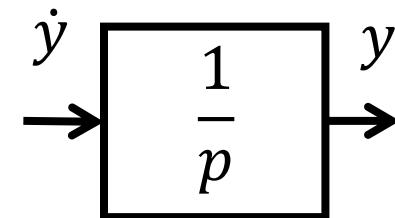
$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

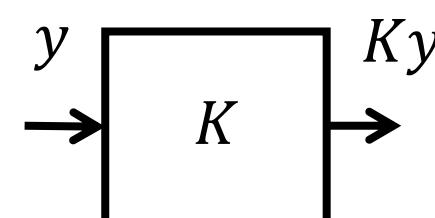
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

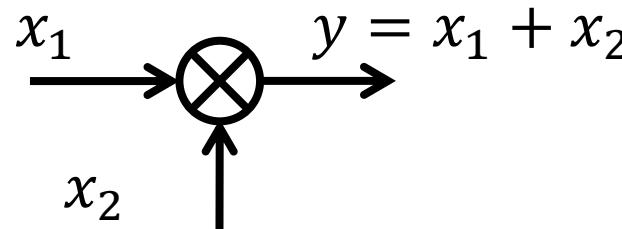
$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

$$y = \frac{1}{p^2}[u] - a_1 \frac{1}{p}[y] - a_0 \frac{1}{p^2}[y]$$

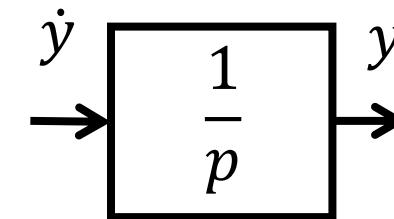
# Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

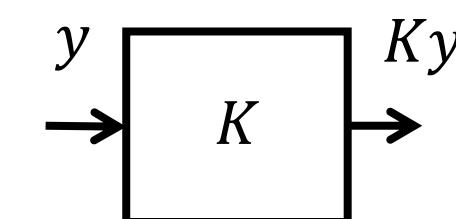
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



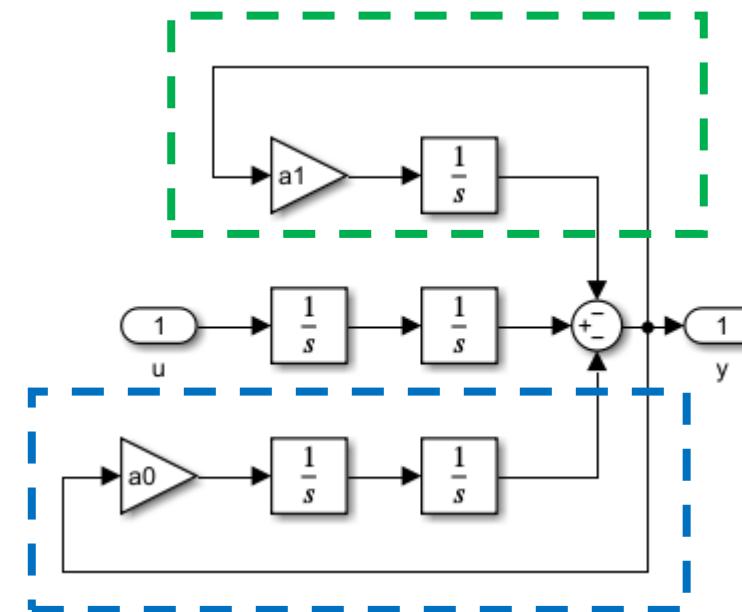
Пример

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1 \dot{y} - a_0 y$$

$$p^2[y] = u - a_1 p[y] - a_0 y$$

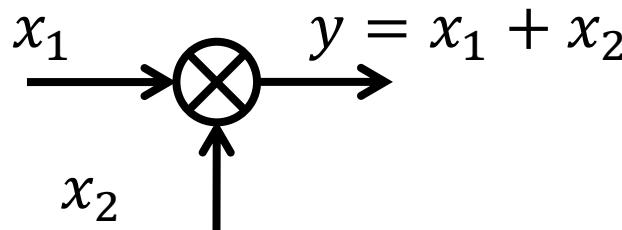
$$y = \frac{1}{p^2} [u] - a_1 \frac{1}{p} [y] - a_0 \frac{1}{p^2} [y]$$



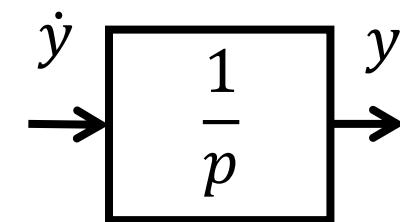
# Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

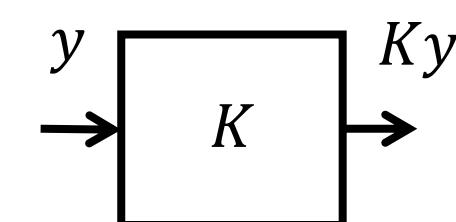
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

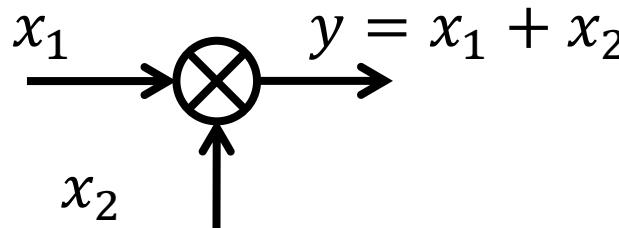
$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

$$y = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p}[u] - a_1y - a_0 \frac{1}{p}[y] \right]$$

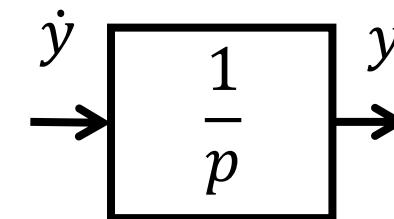
# Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

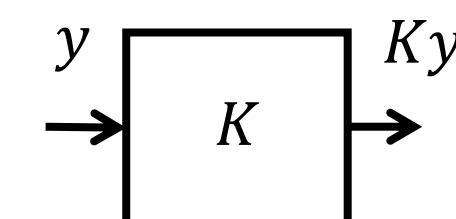
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



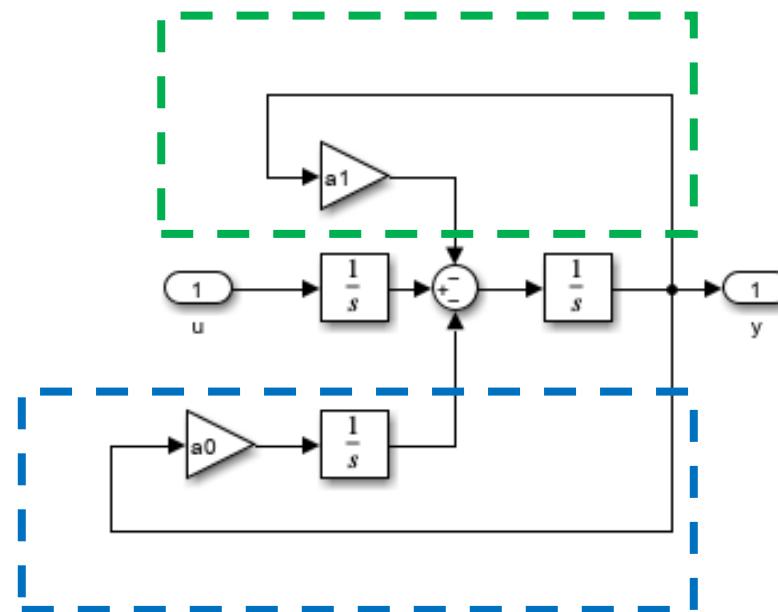
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

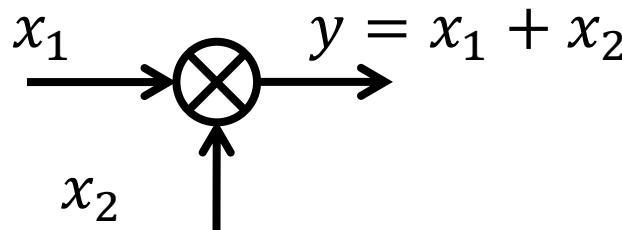
$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

$$y = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p}[u] - a_1y - a_0 \frac{1}{p}[y] \right]$$

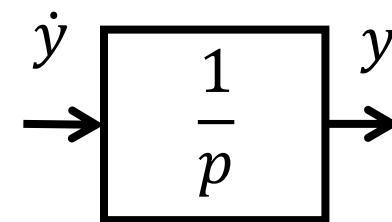


Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

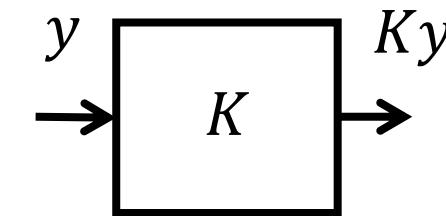
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

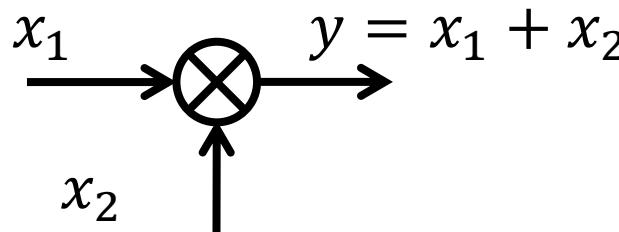
$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

$$y = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p} [u - a_0y] - a_1y \right]$$

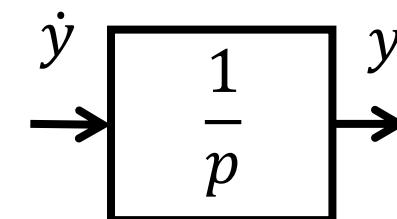
# Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

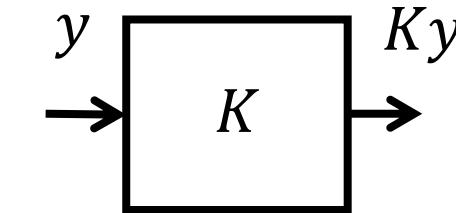
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



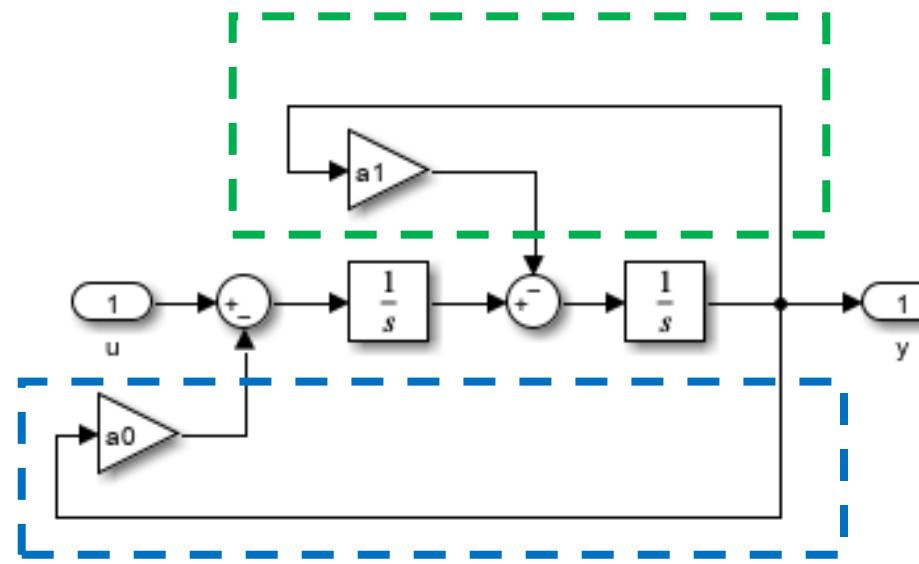
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

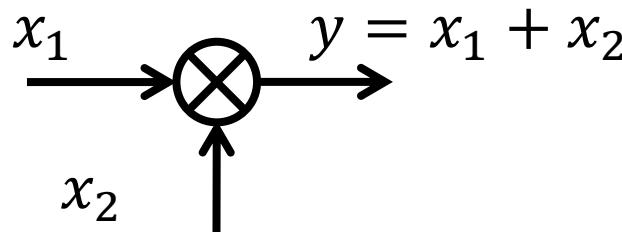
$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

$$y = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p} [u - a_0y] - a_1y \right]$$

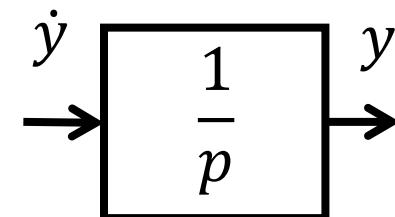


Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

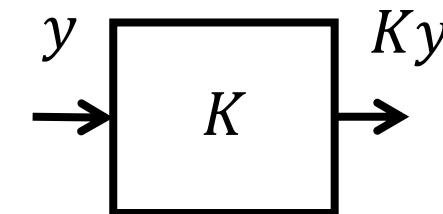
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

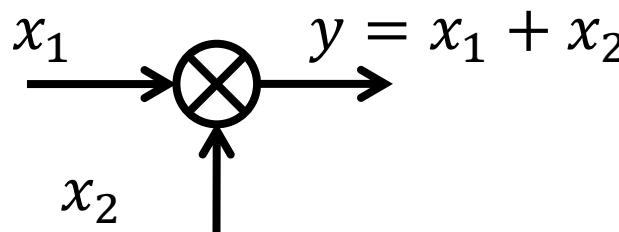
$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

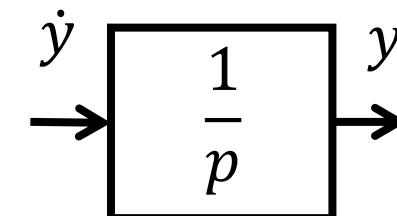
$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0y - a_1p[y]]$$

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

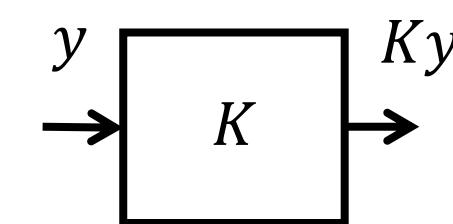
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

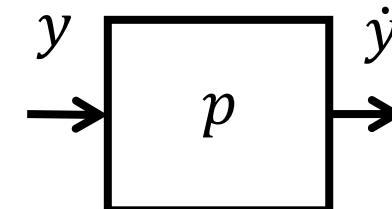
$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

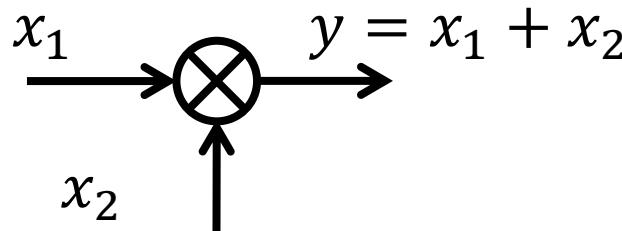
$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0y - a_1p[y]]$$

Физически нереализуемо?

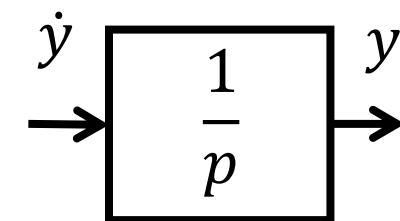


Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

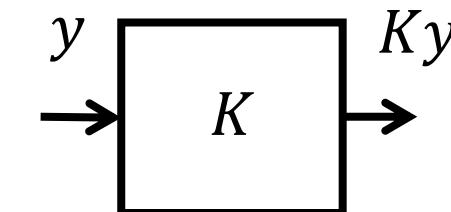
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

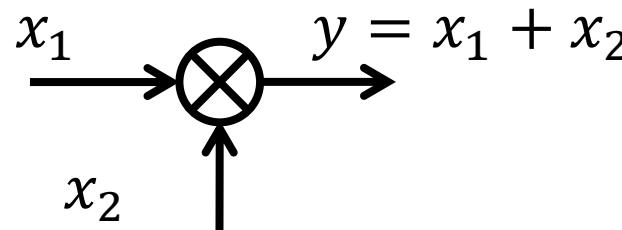
$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

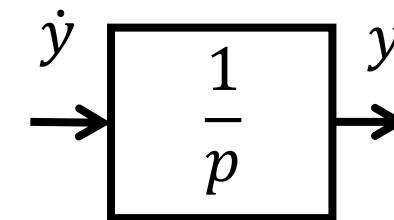
$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0y - a_1\dot{y}]$$

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

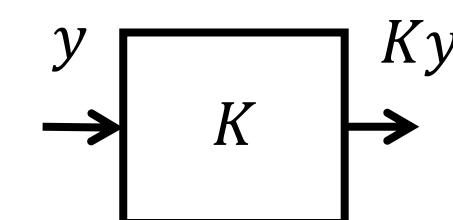
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



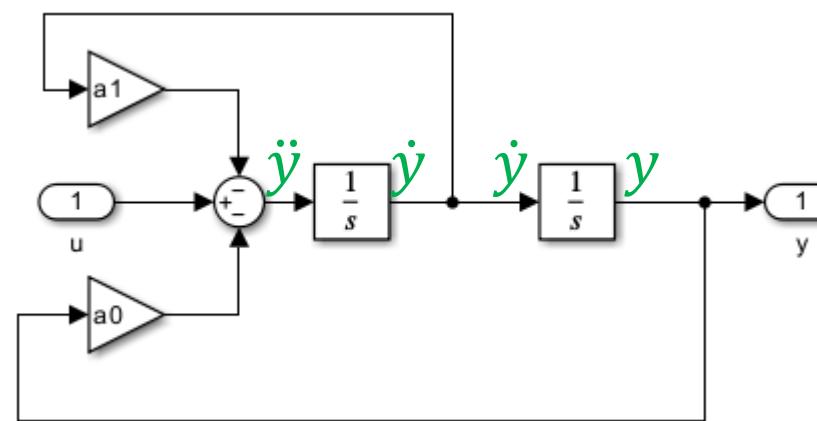
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

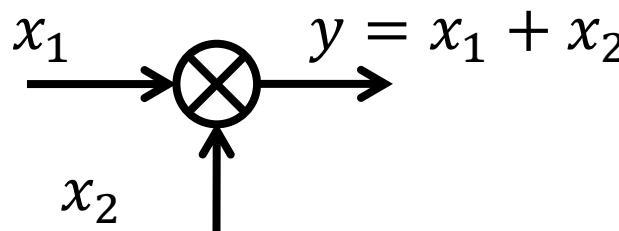
$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0y - a_1\dot{y}]$$



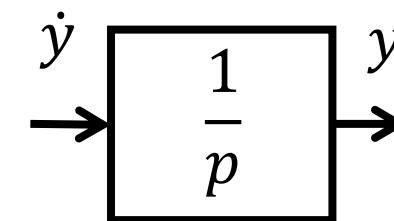
# Структурные схемы: блоки элементарных операций

Любая линейная система может быть составлена с использованием 3-х видов блоков:

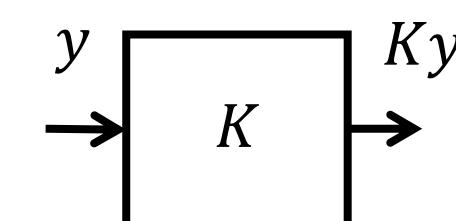
1. Узел суммирования



2. «Интегратор»



3. «Усилитель»



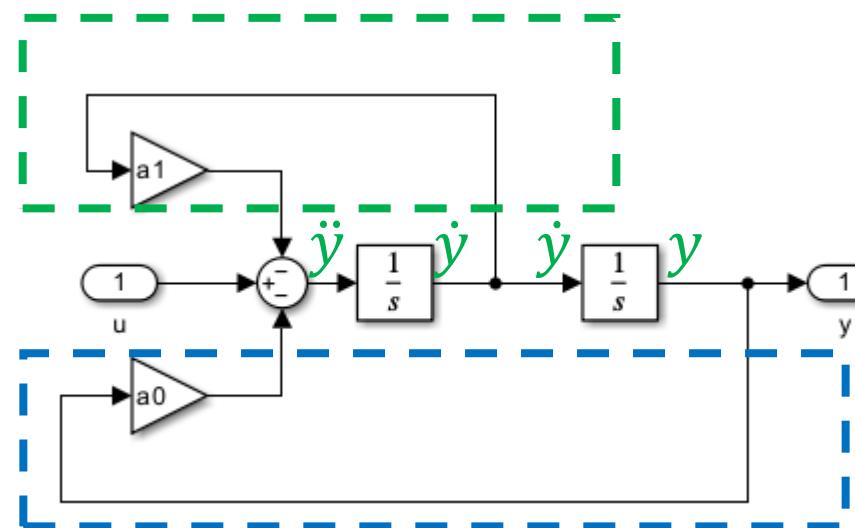
Пример

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

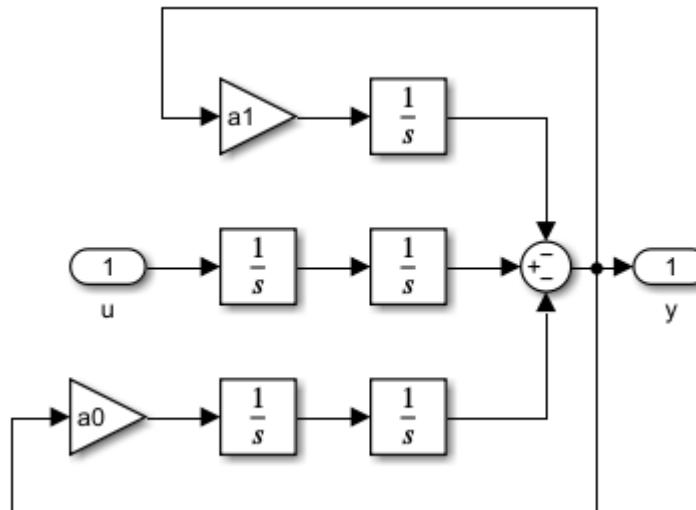
$$\ddot{y} = u - a_1\dot{y} - a_0y$$

$$p^2[y] = u - a_1p[y] - a_0y$$

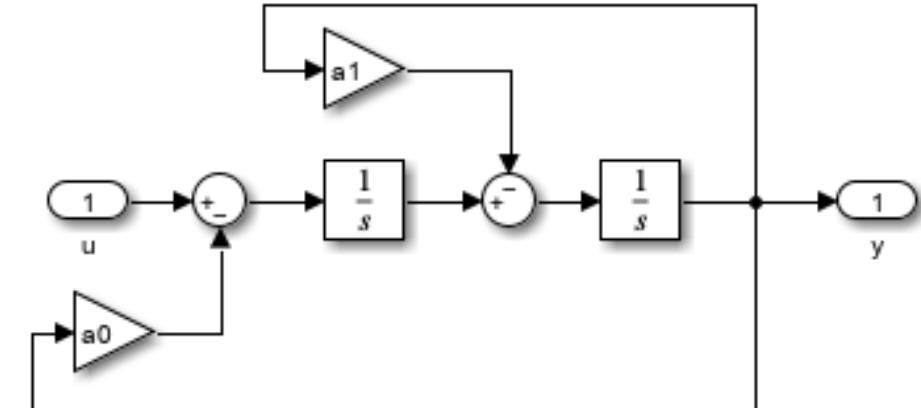
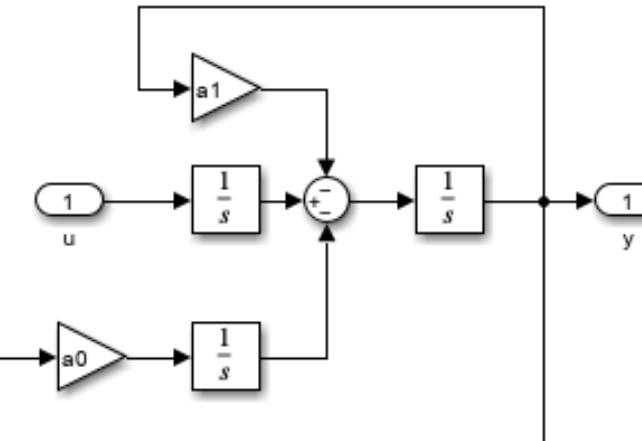
$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0y - a_1\dot{y}]$$



# Структурные схемы: блоки элементарных операций



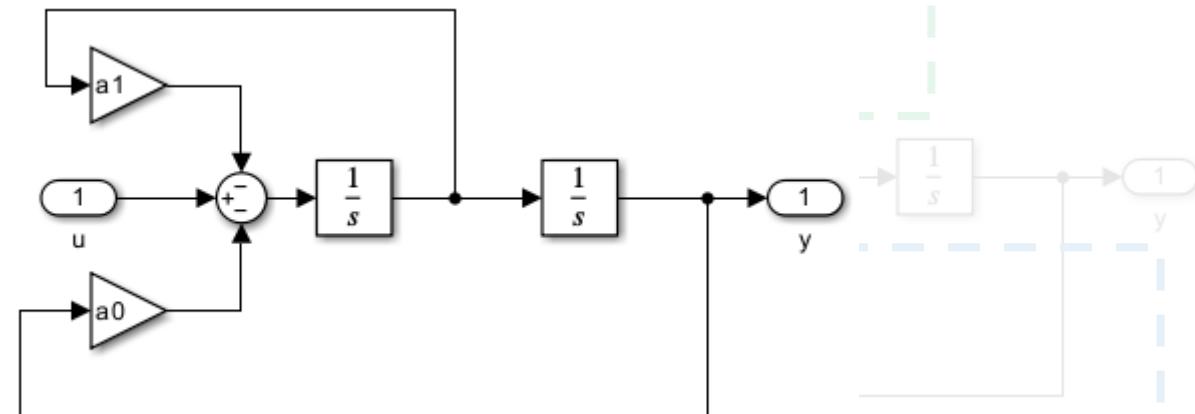
Э схема может быть составлена с использованием 2 вида блоков:



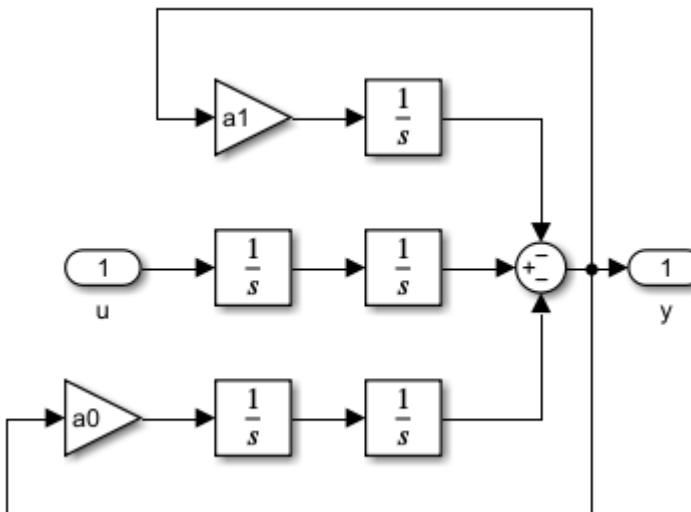
пример

Начальные условия  
выставляются на  
интеграторах

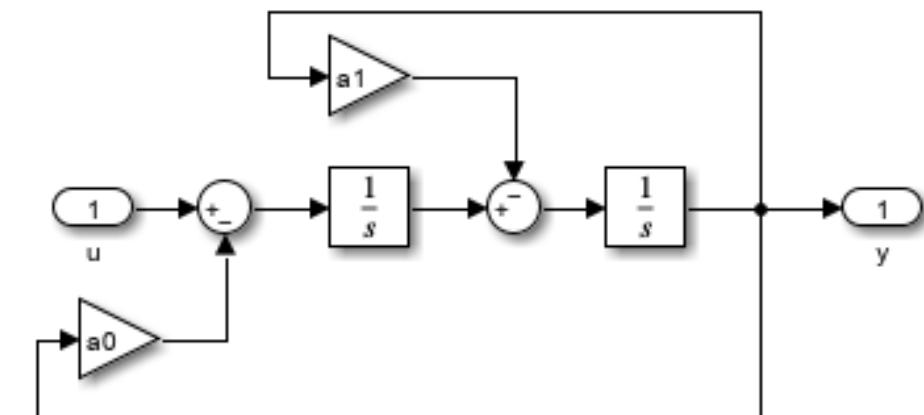
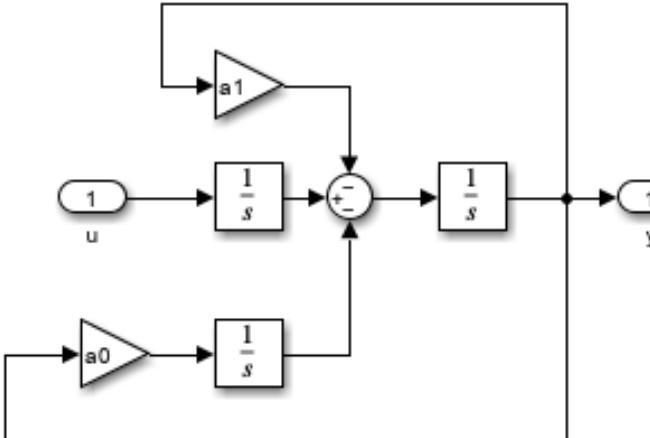
$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0 y - a_1 \dot{y}]$$



# Структурные схемы: блоки элементарных операций



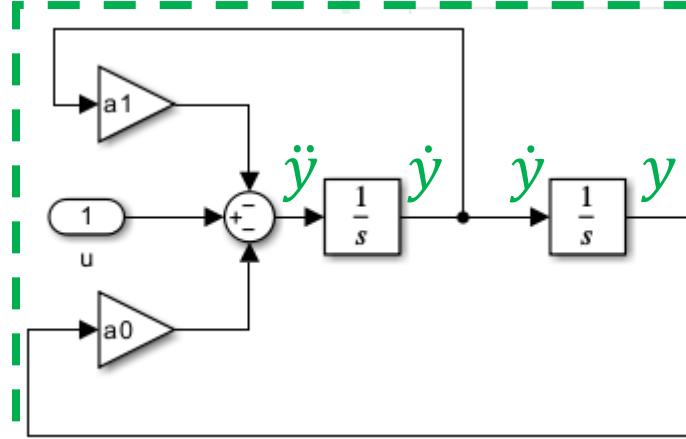
Э схема может быть составлена с использованием 2 и 3 видов блоков.



Пример

Начальные условия  
выставляются на  
интеграторах

$$y = \frac{1}{p^2} [u - a_0 y - a_1 \dot{y}]$$



Нет в явном виде  
интеграторов для  $\dot{y}$  и  $y$ ,  
н/у придется выставлять  
косвенно, пересчитывая

## Канонические формы В-С-В

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Leftrightarrow W(p) = (C(Ip - A)^{-1}B + D)$$

$A$  – матрица системы

$B$  – матрица управления

$C$  – матрица наблюдения

$D$  – матрица связи

## Канонические формы В-С-В

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Leftrightarrow W(p) = (C(Ip - A)^{-1}B + D)$$

$A$  – матрица системы

$B$  – матрица управления

$C$  – матрица наблюдения

$D$  – матрица связи

Вспоминаем, как брать обратные матрицы – на первой лабораторной работе может выпасть задача на это

# Канонические формы В-С-В

$$W(p) = d + \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}{a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}$$



Диагональная



Управляемая

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [b_0/a_n \quad b_1/a_n \quad b_2/a_n \quad \dots \quad b_{n-1}/a_n], D_y = [d]$$

Наблюдаемая

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_h = \begin{bmatrix} b_0/a_n \\ b_1/a_n \\ b_2/a_n \\ \vdots \\ b_{n-1}/a_n \end{bmatrix},$$

$$C_h = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], D_h = [d]$$

# Канонические формы В-С-В

$$W(p) = d + \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}{a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}$$



Управляемая

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [b_0/a_n \quad b_1/a_n \quad b_2/a_n \quad \dots \quad b_{n-1}/a_n], D_y = [d]$$

$$\begin{array}{ll} A_y = A_H^T, & B_y = C_H^T, \\ C_y = B_H^T, & D_y = D_H^T \end{array}$$

Наблюдаемая

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_H = \begin{bmatrix} b_0/a_n \\ b_1/a_n \\ b_2/a_n \\ \vdots \\ b_{n-1}/a_n \end{bmatrix},$$

$$C_H = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], D_H = [d]$$

# Канонические формы В-С-В

$$W(p) = d + \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}{a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}$$

Но все это справедливо  
только пока  $W(p)$  – скаляр



## Управляемая

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [b_0/a_n \quad b_1/a_n \quad b_2/a_n \quad \dots \quad b_{n-1}/a_n], D_y = [d]$$

$$A_y = A_H^T, \quad C_y = B_H^T,$$

$$B_y = C_H^T, \quad D_y = D_H^T$$

## Наблюдаемая

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}, B_H = \begin{bmatrix} b_0/a_n \\ b_1/a_n \\ b_2/a_n \\ \vdots \\ b_{n-1}/a_n \end{bmatrix},$$

$$C_H = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], D_H = [d]$$

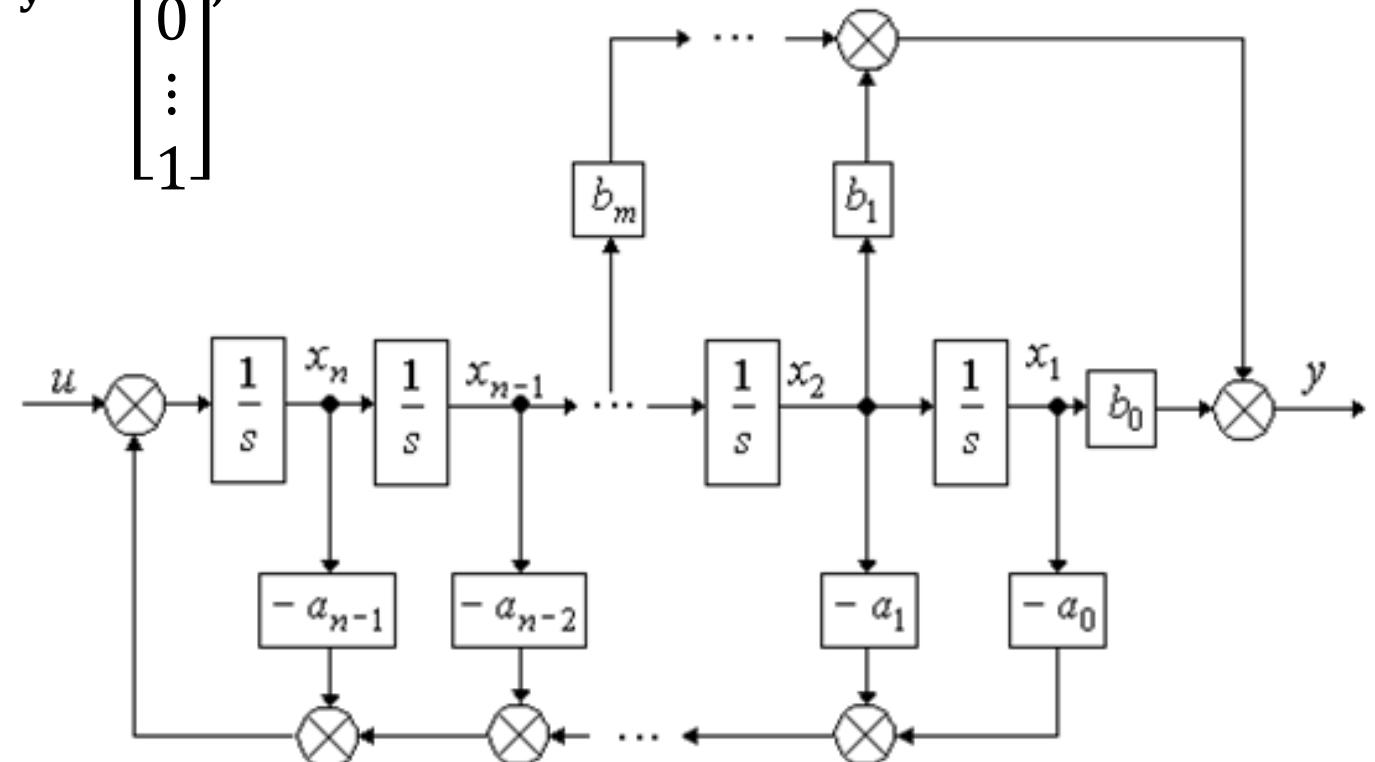
# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Управляемая

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$



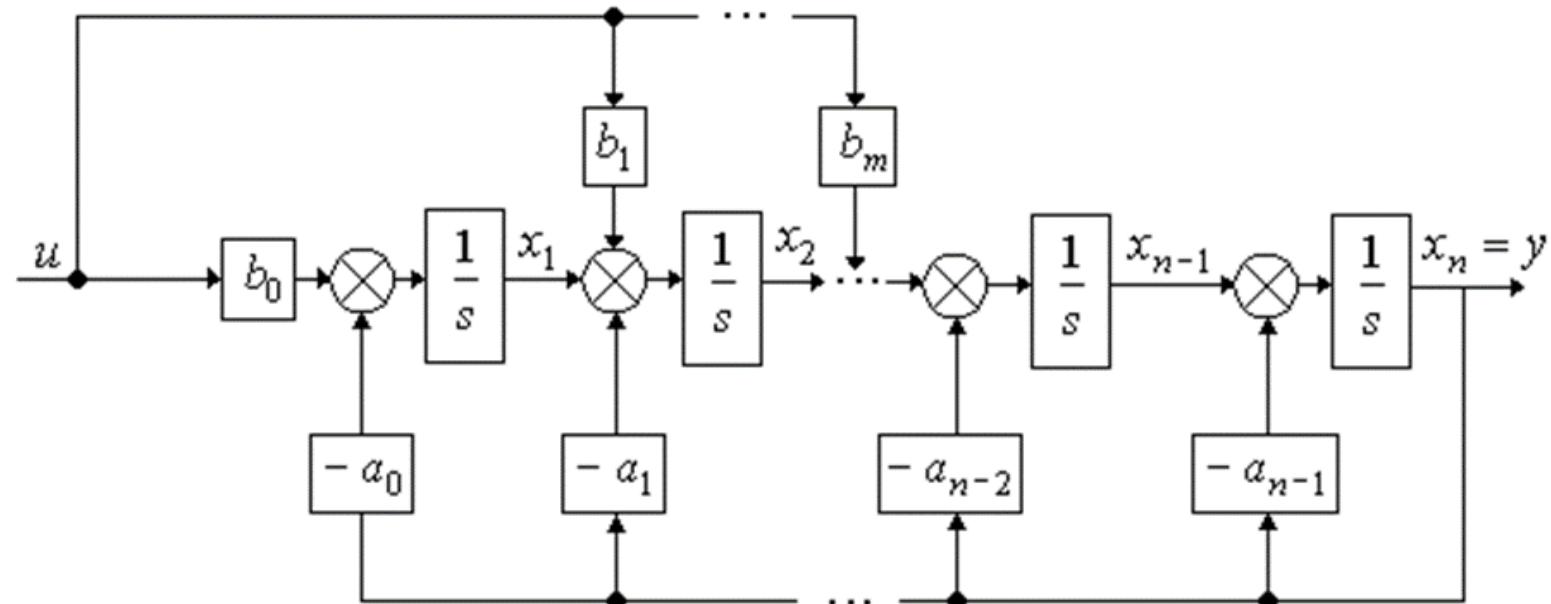
# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

## Наблюдаемая

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_H = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_H = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$



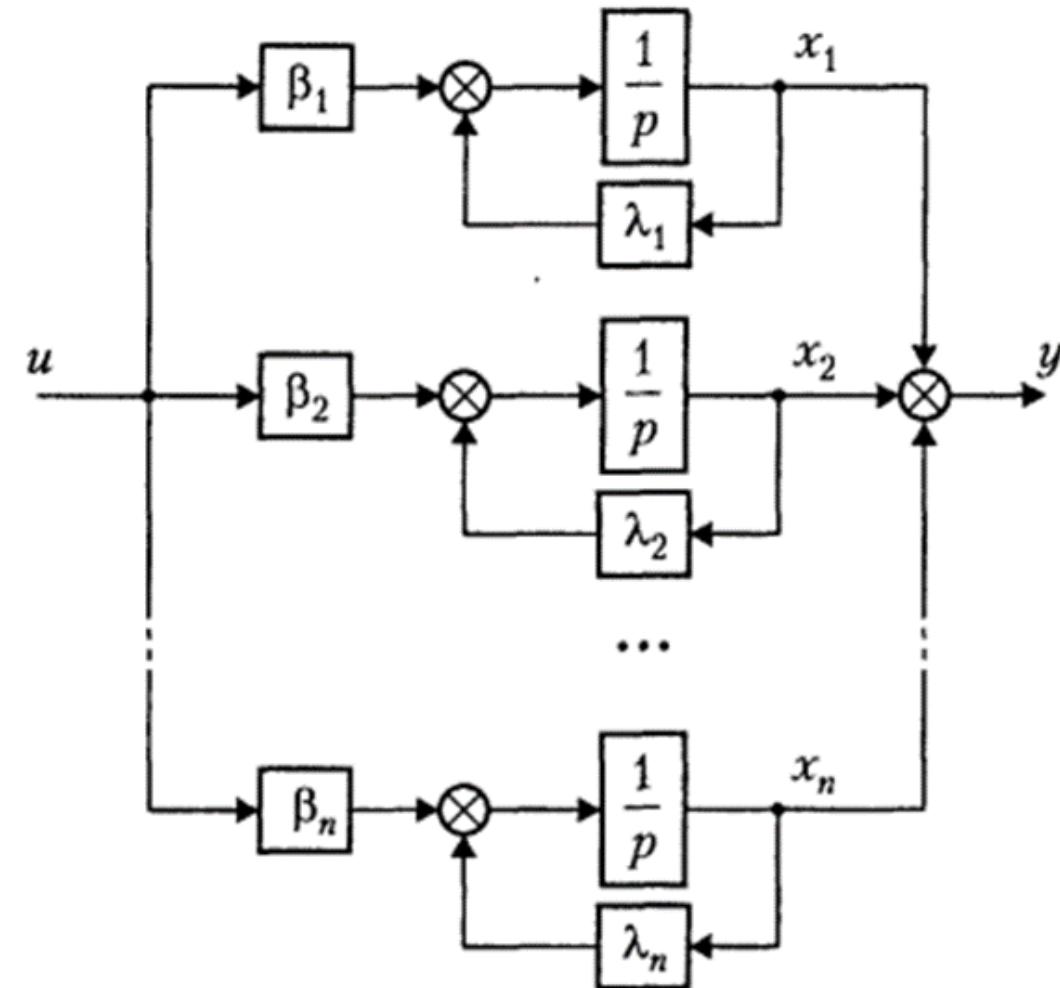
# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

## Диагональная

$$A_{\text{Д}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, B_{\text{Д}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{Д}} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{p - \lambda_i}$$



# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

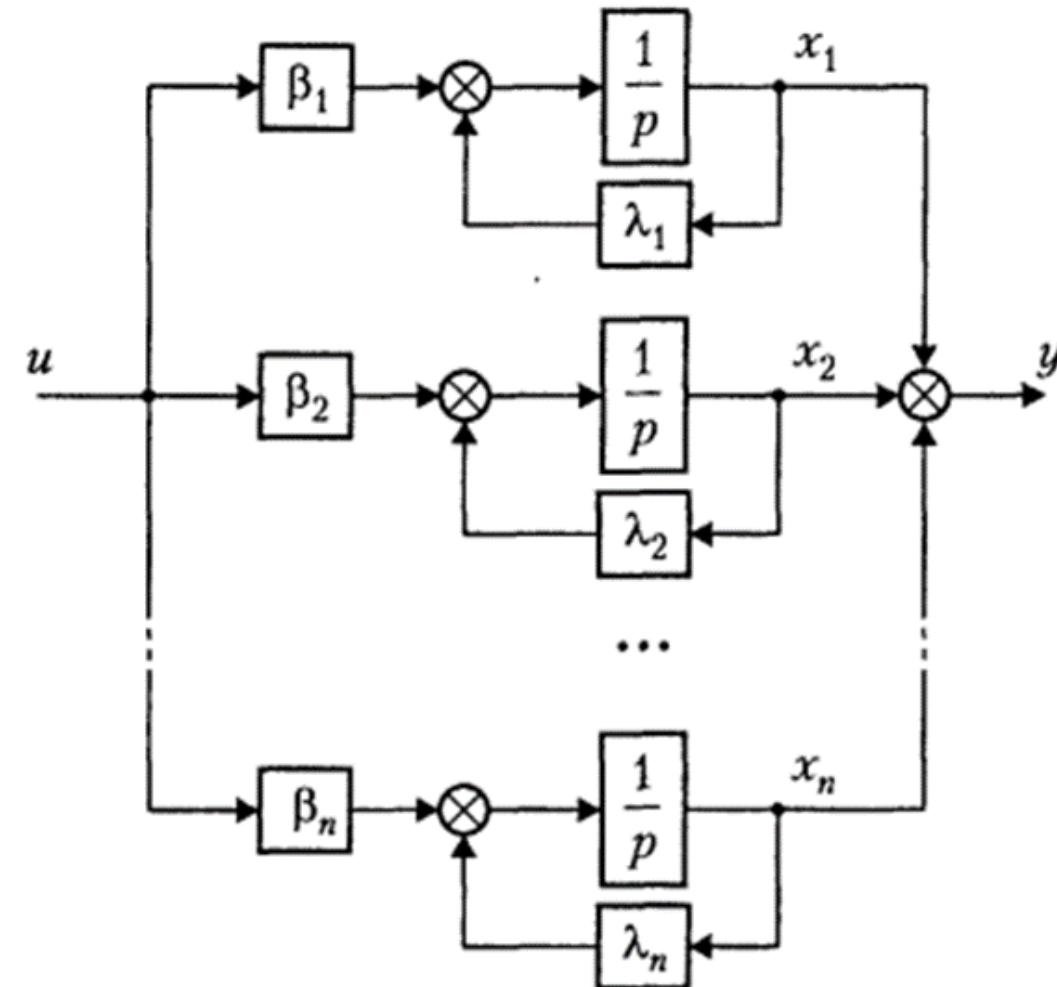
## Диагональная

$$A_{\text{Д}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, B_{\text{Д}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{Д}} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{p - \lambda_i}$$

Все полюса ПФ системы должны быть вещественными и не кратными



## Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Жорданова

$$A_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix},$$

$J_i$  – жордановы клетки

$$C_{\text{Ж}} = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \dots \quad \Gamma_4]$$

Общий случай диагональной

# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

Жорданова

$$A_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{Ж}} = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \dots \quad \Gamma_4]$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Если  $\lambda_i (i = \overline{1, n})$  – вещественные кратные

Общий случай диагональной

# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

## Жорданова

$$A_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = [1 \ 0]$$

Если  $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  – комплексно-сопряженные

$$C_{\text{Ж}} = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3 \ \dots \ \Gamma_4]$$

Общий случай диагональной

# Канонические формы В-С-В и структурные схемы

## Жорданова

$$A_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}, B_{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = [1 \ 0]$$

Если  $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  – комплексно-сопряженные

$$C_{\text{Ж}} = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3 \ \dots \ \Gamma_4]$$

Общий случай диагональной

Со схемами сложнее,  
каждую клетку следует  
рассматривать как  
отдельную подсистему

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_{\varepsilon}\omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon}$$

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U$$

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\begin{aligned}\textcolor{blue}{\omega} &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - \textcolor{blue}{U}\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} \textcolor{blue}{U} = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} \textcolor{blue}{U}\end{aligned}$$

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\begin{aligned}\omega &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,\end{aligned}$$

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

## 1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U]$$

# Формы представления: практические примеры

## 1.1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$y = \theta,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U]$$

## 1.1. Двигатель постоянного тока: Вход-Выход

$$J\dot{\omega} = M,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$p[\theta] = \omega$$

$$y = \theta,$$

$$u = U,$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) p[\theta] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\theta = \frac{k_m}{(k_\varepsilon k_m + RJp)} p[U]$$

## 2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + \textcolor{green}{M}_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ \textcolor{green}{M}_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega}\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U]$$

## Формы представления: практические примеры

## 2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + \textcolor{green}{M}_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega, \quad u = \begin{bmatrix} U \\ \textcolor{green}{M}_f \end{bmatrix}, \quad W(p) = ?$$

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega} + \textcolor{green}{M}_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} \textcolor{green}{M}_f, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U]$$

## Формы представления: практические примеры

## 2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + \textcolor{green}{M}_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega, \quad u = \begin{bmatrix} U \\ \textcolor{green}{M}_f \end{bmatrix}, \quad W(p) = ?$$

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega} + \textcolor{green}{M}_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} \textcolor{green}{M}_f, \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} \textcolor{green}{M}_f,$$

$$\omega = \frac{k_m}{k_\varepsilon k_m + RJp} [U] - \frac{R}{k_\varepsilon k_m + RJp} [\textcolor{green}{M}_f]$$

## 2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega, \quad u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad W(p) = ?$$

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f, \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = W_U(p)[U] - W_M(p)[M_f]$$

## 2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$y = \omega, \quad u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad W(p) = ?$$

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f, \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = [W_U(p) \ W_m(p)] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} = W(p)[u]$$

## 2. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \omega, \\ u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \\ W(p) = ? \end{array} \right| \quad \begin{aligned} \omega &= -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f, \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p \right) [\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = [W_U(p) \ W_m(p)] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} = W(p)[u]$$

Как это понимать?

В линейных системах с более чем  
одним входом различные входы  
действуют на выход независимо

$$I = \frac{U + \varepsilon_i}{R},$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega$$

$$W(p) = ?$$

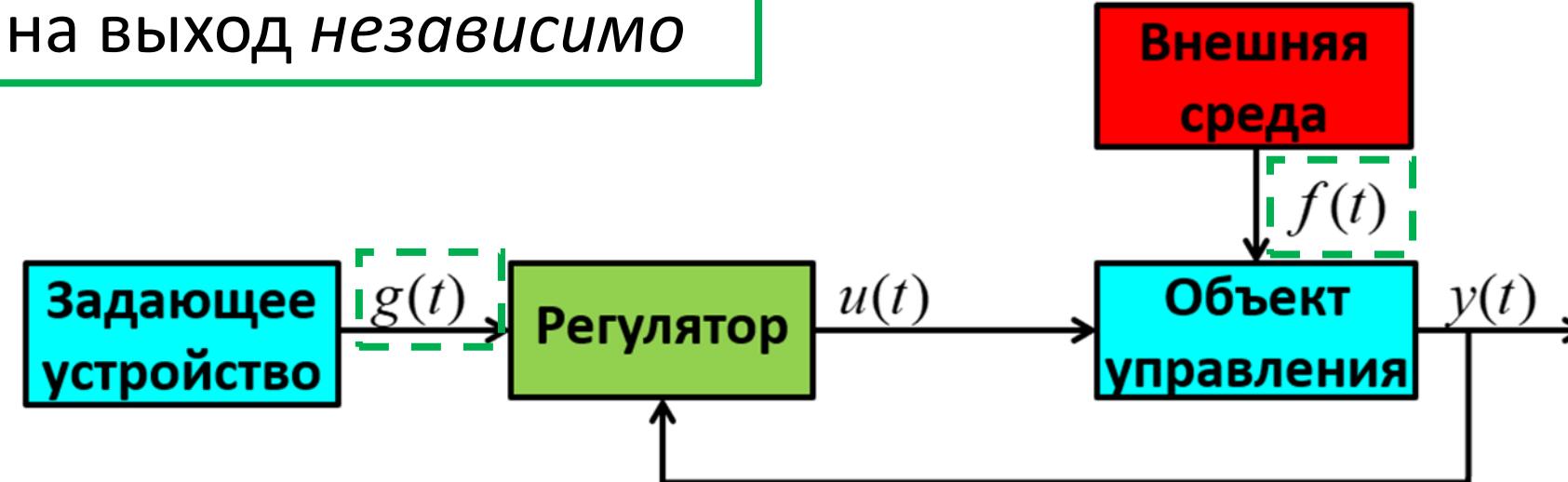
$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_\varepsilon} &= \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U = \\ &= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = W_U(p)[U] - W_M(p) \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} W(p)[u]$$

# Формы представления: практические примеры

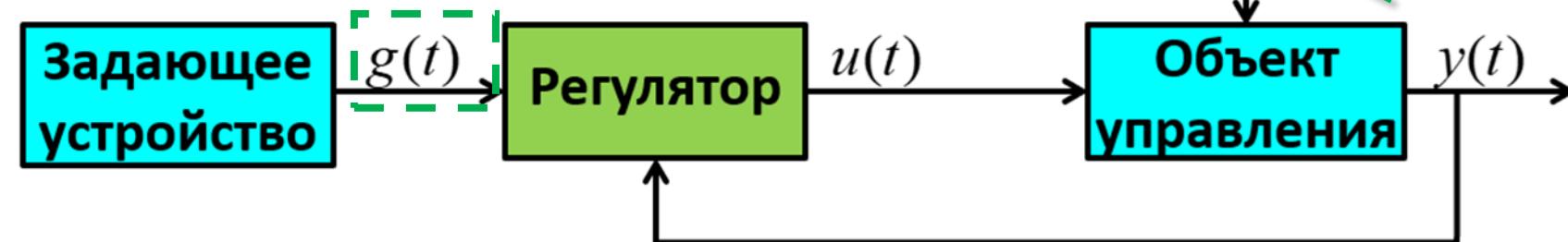
В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход **независимо**



Это значит, что при поиске ПФ от **одного** входа следует **игнорировать** другие входы

# Формы представления: практические примеры

В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход **независимо**

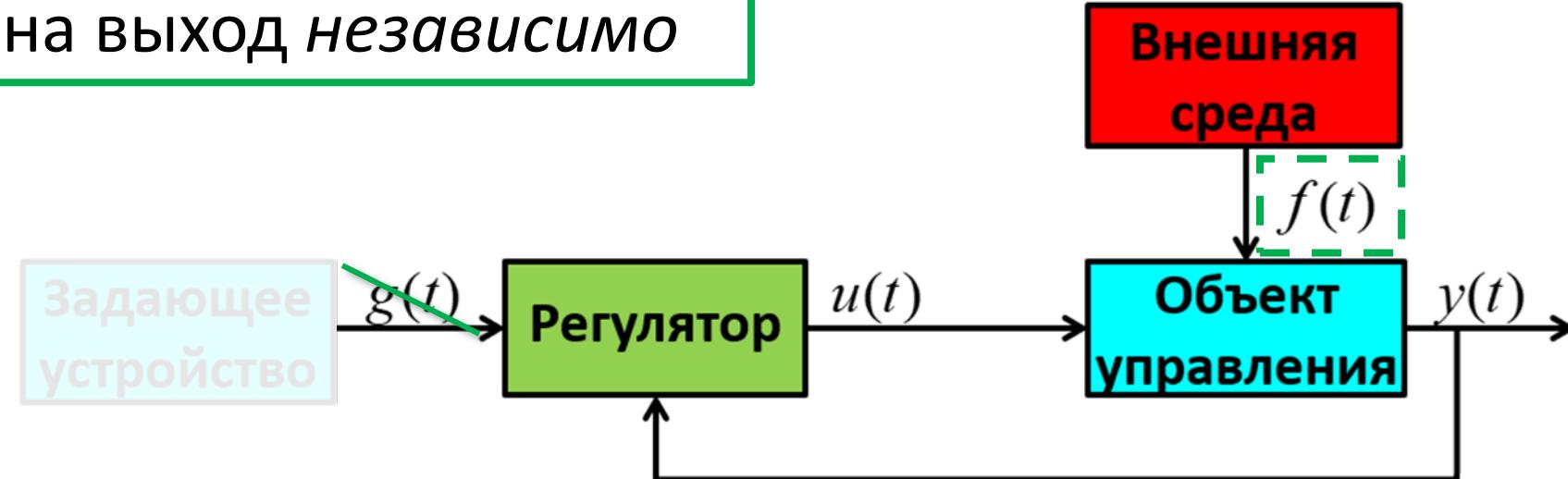


Это значит, что при поиске ПФ от **одного** входа следует **игнорировать** другие входы

$$W_{g \rightarrow y}(p) = ?$$

# Формы представления: практические примеры

В линейных системах с более чем одним входом различные входы действуют на выход независимо



Это значит, что при поиске ПФ от **одного** входа следует **игнорировать** другие входы

$$W_{f \rightarrow y}(p) = ?$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$W(p) = ?$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_i}{k_\varepsilon} = \{\varepsilon_i = IR - U\} = -\frac{R}{k_\varepsilon} I + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \left\{ I = \frac{M}{k_m} \right\} = -\frac{R}{k_\varepsilon k_m} M + \frac{1}{k_\varepsilon} U =$$

$$= \{M = J\dot{\omega} + M_f\} = -\frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p[\omega] + \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\left(1 + \frac{RJ}{k_\varepsilon k_m} p\right)[\omega] = \frac{1}{k_\varepsilon} U - \frac{R}{k_\varepsilon k_m} M_f,$$

$$\omega = [W_U(p) \ W_m(p)] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} = W(p)[u]$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix},$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J + M_f/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix}$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} = \\ y = x, \quad = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} \\ u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad A = ? \\ B = ? \\ C = ? \\ D = ? \end{array} \right.$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} = \\ y = x, \quad = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{cases} = \\ u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ -k_\varepsilon \omega/L - RI/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ U/L \end{bmatrix}, \\ A = ? \\ B = ? \\ C = ? \\ D = ? \end{array} \right.$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} =$$

$$y = x,$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{cases} =$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$C = ?$$

$$D = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}}$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} =$$

$$y = x, \quad = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{cases} =$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$A = ?$

$B = ?$

$C = ?$

$D = ?$

$$y = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

## 3. Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-2 Выхода

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} =$$

$$y = x, \quad = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{cases} =$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$A = ?$

$B = ?$

$C = ?$

$D = ?$

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$$

$$y = Cx + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

MIMO  
(Multi-Input-Multi-Output)

## 3.1 Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} = \\ y &= \varepsilon, & & \\ u &= \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, & & \\ A &=? & & \\ B &=? & & \\ C &=? & y = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix} \\ D &=? & & \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

## 3.1 Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} =$$

$$y = \varepsilon, \quad u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{cases} =$$

$$A = ?, \quad B = ?, \quad C = ?, \quad D = ?$$

$$y = \varepsilon = C \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

## 3.1 Двигатель постоянного тока: 2 Входа-Состояние-Выход

$$J\dot{\omega} = M + M_f,$$

$$M = k_m I,$$

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega,$$

$$\varepsilon_s = -L\dot{I}$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/J \\ -\varepsilon_s/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} M = k_m I, \\ \varepsilon_s = \varepsilon - \varepsilon_i \end{cases} =$$

$$y = \varepsilon, \quad = \begin{bmatrix} k_m I/J \\ (\varepsilon_i - \varepsilon)/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f/J \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varepsilon_i = -k_\varepsilon \omega, \\ \varepsilon = RI - U \end{cases} =$$

$$u = \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_\varepsilon/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix},$$

$A = ?$

$B = ?$

$C = ?$

$D = ?$

$$y = \varepsilon = IR - U = [0 \quad R] \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} U \\ M_f \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$