В заданиях 1 и 2 используйте унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

Задание 1. Вещественное.

Рассмотрите следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. Прямоугольная функция. $f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$
2. Треугольная функция. $f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$
3. Кардинальный синус. $f(t) = a\,\mathrm{sinc}(bt)$.
4. Функция Гаусса. $f(t) = ae^{-bt^2}$.
5. Двустороннее затухание. $f(t) = ae^{-b|t|}$.

Для каждой из функции $f(t)$ проведите исследование ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ и свойств преобразования Фурье. Для этого:

- Приведите аналитические выражения оригинала функции $f(t)$ и ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ *в общем виде* (без выбора конкретных значений a и b).
  - Для функций 1, 2 и 5 необходимо привести *вывод* соответствующего аналитического выражения.
  - Для функций 3, 4 достаточно привести результат. Вы можете воспользоваться *свойствами преобразования Фурье* или же *готовыми таблицами преобразований Фурье.*
  - ***Использовать WolframAlpha и аналогичные средства расчета настоятельно не рекомендуется, так как они могут дать ненаглядные и неадекватные результаты.***
- Задайтесь не менее чем тремя наборами значений параметров $a, b > 0$ и постройте графики оригинала функции $f(t)$ и графики Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для выбранных значений. Проанализируйте полученные результаты с точки зрения свойств преобразования Фурье.
- Проверьте выполнение равенства Парсеваля.

Ожидаемые результаты:

- Для каждый из функций $f(t)$:
    - Аналитические выражения функции-оригинала $f(t)$ и ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$. Для функций 1, 2, 5 также привести выкладки расчетов.
    - Выбранные наборы параметров $a, b > 0$.
    - Графики функции-оригинала $f(t)$ и ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для выбранных значений параметров, их сравнение. Для повышения наглядности сравнения полученных графиков и демонстрации влияния параметров рекомендуется размещать соответствующие графики на одном рисунке (все $f(t)$ на одной координатной плоскости, все $\hat{f}(\omega)$ на другой).
    - Результаты проверки равенства Парсеваля.
- Выводы.

Задание 2. Комплексное.

Выберите любую f из задания 1 и один из наборов параметров a и b. Рассмотрите сдвинутую функцию $g(t) = f(t + c)$ проведите исследование ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$. Для этого:

- Приведите аналитические для соответствующего Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$.
- Задайтесь не менее чем тремя значениями параметра $c \neq 0$ и постройте графики оригинала функции $g(t)$. Проанализируйте влияние параметра c на оригинал функции.
- Для выбранных ранее значений параметра c постройте графики вещественной и мнимой компоненты Фурье-образа $\mathrm{Re}\left(\hat{g}(\omega)\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\hat{g}(\omega)\right)$, а также график модуля Фурье-образа $|\hat{g}(\omega)|$. Проанализируйте влияние параметра c как на вещественную и мнимую компоненты, так и на модуль Фурье-образа.

Ожидаемые результаты:

- Аналитическое выражения функции-оригинала $g(t)$ и ее Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$.
- Выбранные значения параметра c.
- Графики функции-оригинала $g(t)$, компонент Фурье-образа $\mathrm{Re}\left(\hat{g}(\omega)\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\hat{g}(\omega)\right)$ и Фурье-образа $|\hat{g}(\omega)|$.
- Выводы.

В задании 3 используйте преобразование Фурье к обыкновенной частоте ν.

Задание 3. Музыкальное.

Скачайте одну запись какого-нибудь музыкального аккорда с этого гугл-диска и выполните следующие шаги:

- Прослушайте запись.
- Преобразуйте запись в массив, соответствующий функции времени $f(t)$.
    - В `MATLAB` это можно сделать с помощью функции `audioread`.
    - Если функция возвращает два звуковых канала, выберите один.
- Постройте график $f(t)$.
- С помощью численного интегрирования найдите Фурье-образ $\hat{f}(\nu)$.
    - Для численного интегрирования используйте функции подобные `trapz` (численное интегрирование трапециями). В `Matlab`, например, сделать это можно так (обратите внимание, что числовые переменные `V` и `dv`, а также массивы `t` и `y` в этом примере считаются уже заданными):

```
v = -V : dv : V;       % Задаём набор интересных нам частот
v = 0 : dv : V;        % Или так - если достаточно положительных
for k = 1 : length(v)
    Y(k)=trapz(t,y.*exp(-1i*2*pi*v(k)*t)); % Преобразование Фурье
end
```

    - В этом задании мы просим вас не использовать функцию `fft`, а воспользоваться методами численного интегрирования (например, функцией `trapz`). Позднее мы познакомимся с функцией `fft` и узнаем, в чём состоит разница между этими двумя подходами.
- Постройте график $|\hat{f}(\nu)|$.
- Проанализируйте график Фурье-образа. Найдите основные частоты, присутствующие в аккорде. Соотнесите частоты с музыкальными нотами (самостоятельно найдите таблицу соответствия нот и частот). Сделайте вывод о том, из каких нот составлен аккорд.
- *Необязательный пункт.* Если немного разбираетесь в музыке, то можете попробовать воспроизвести этот аккорд на любом музыкальном инструменте и сравнить звучание, а также определить его название.

Ожидаемые результаты:

- Графики $f(t)$ и модуля Фурье-образа $\left|\hat{f}(\omega)\right|$.
- Выявленные ноты аккорда.
- (*Опционально*) Ваше творчество и название аккорда.

Контрольные вопросы для подготовки к защите:

1. В чем идея преобразования Фурье? Что является результатом преобразования?
2. Какие свойства преобразования Фурье вам известны?
3. Что является критерием унитарности преобразования Фурье? Всегда ли преобразование Фурье унитарно?
4. Как принцип неопределенности проявляет себя в преобразовании Фурье? С каким свойством он связан?
5. Как смещение функции-оригинала влияет на модуль ее образа Фурье? Можно ли это обосновать математически?
6. Как четные и нечетные компоненты функции-оригинала проявляют себя в ее образе Фурье?
7. Какая из рассмотренных в **Задании 1** функций может оказаться равна своему Фурье-образу в точности до замены аргумента (t на ω)? При каких значениях параметров a и b это равенство выполняется?