Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №6

Критерий Найквиста и системы с запаздыванием

Студенты: Загайнов А.А.
Поток: Лин САУ R23 бак 1.1.2

Вариант: 11
Преподаватели: Перегудин. А.А., Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2026

Содержание

Задание 1. Годограф Найквиста

В задании рассматриваем синтез объектов управления 5-го порядка. В соответствии с нашим 11 вариантом, для этих систем мы имеем следующие требования к полюсам:

- Порядок системы: 5
- Число вещественных полюсов p=1
- Число комплексно-сопряженных полюсов q=4 (две пары)

Для каждого объекта надо будет найти коэффициенты передаточной функции, удовлетворяющие заданному количеству неустойчивых корней в разомкнутом (n) и замкнутом (m) состояниях. В этом задании будем руководствоваться несколькими общими методами, которые упростят задачу.

Найдем базовые полиномы:

Так как нам нужно обеспечить q=4, зафиксируем две пары одинаковых левых (устойчивых) комплексно-сопряженных полюсов для всех трех объектов. Пусть это будут корни:

$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -5 \pm 5j$

Тогда полином знаменателя, образующий эти полюса, выглядит вот так:

$D(s) = ((s+5)^2 + 25)^2 = (s^2 + 10s + 50)^2$

Оставшийся 1 вещественный корень и числитель будем подбирать для каждого варианта по порядку. Начнем!!

Обьект 1

По нашему варианту. Мы имеем значение n=1 (это для наших разомкнутых неустойчивых),и m=1 (замкнутых неустойчивых).

Посчитаем коэффициенты передаточной функции: чтобы получить n=1, поместим вещественный полюс в правую полуплоскость: $\lambda_5 = 1$. Чтобы в замкнутом состоянии остался 1 неустойчивый полюс (m=1), выберем небольшой положительный коэффициент усиления K=10, при котором корень не успеет перейти в левую полуплоскость.

$$W_1(s) = \frac{10}{(s-1)(s^2+10s+50)^2}$$

По основному критерию Найквиста посчитаем необходимое число оборотов годографа: N=m-n=1-1=0 По логарифмическому критерию разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ через критический отрезок $(-\pi)$ при L(ω)>0 должна быть равна нулю.

Займемся моделированием:

Составим модель для этой системы, а затем сравним результат с аналитическим решением:

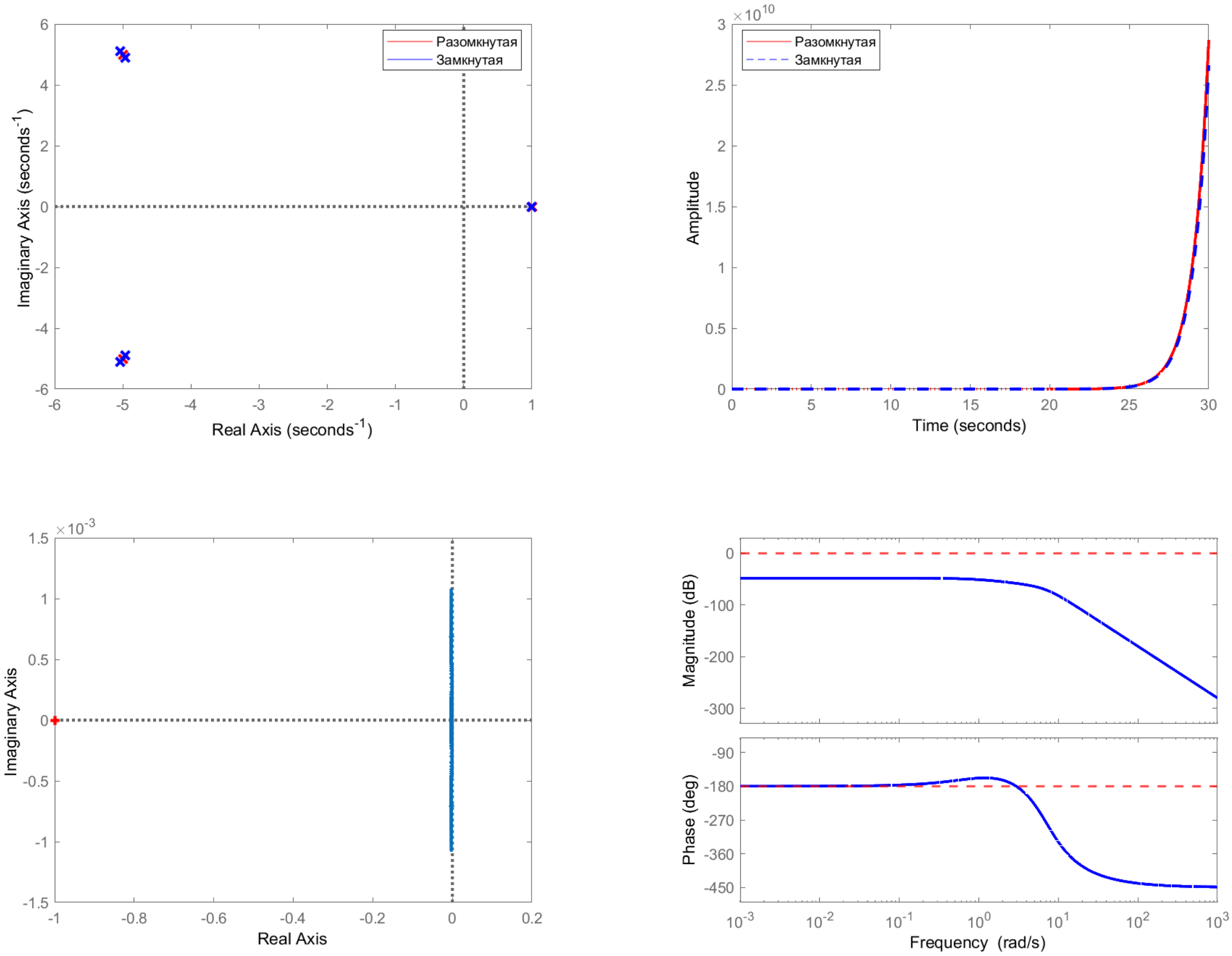


Рисунок 1: Карты нулей и полюсов, переходные характеристики, годограф Найквиста и ЛАФЧХ для Объекта 1

Сразу необходимо сделать уточнение, что визуально может показаться, что разомкнутая система имеет только три полюса. Но это совершенно не так, и на практике это просто наложение кратных корней. В замкнутой системе эти полюса уже сдвигаются относительно друг друга, и потому становятся видны уже все пять полюсов.

По критерию Найквиста, а именно опираясь на формулу $m = n + N \to N = m - n = 1 - 1 = 0$, можем ожидать, что годограф не должен охватывать точку (-1;j0) вообще. По графикам можем подтвердить, что кривая проходит мимо критической точки, а переходные характеристики и разомкнутой, и замкнутой систем уходят в бесконечность. Результаты в точности совпали, как и наши прогнозы!

Анализ ЛФЧХ и ЛАЧХ на логарифмический критерий Найквиста тоже удолетворяет нашим результатам. Логарифмическая амплитуда на протяжении всего промежутка ω меньше 0. Потому мы точно можем утверждать, что система не стала устойчивой.

Объект 2

Для второго объекта задано n=0 и m=1.

Подберем параметры: для n=0 нужен устойчивый вещественный полюс, поэтому возьмем $\lambda_5 = -1$. Чтобы замкнутая система стала неустойчивой (m=1), зададим отрицательное усиление достаточно большого значения: $K = -3000$. Тогда

$$W_2(s) = \frac{-3000}{(s+1)(s^2+10s+50)^2}$$

По критерию Найквиста число оборотов годографа $N = m - n = 1$. Поскольку разомкнутая система устойчива, кривая должна один раз охватить точку $(-1; j0)$ в положительном направлении (по часовой стрелке), чтобы в замкнутой системе появился один неустойчивый корень.

Перейдем к моделированию:

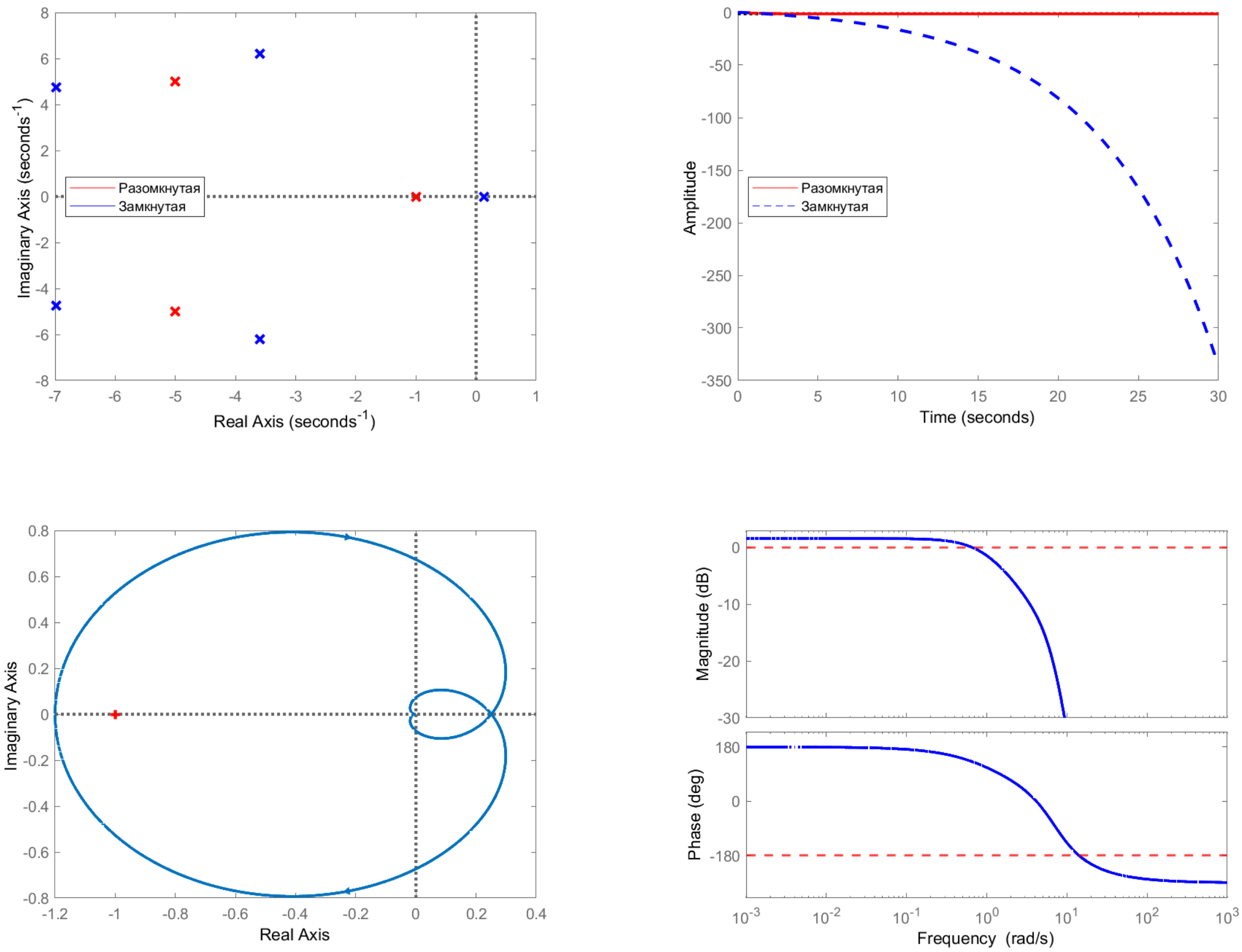


Рисунок 2: Карты нулей и полюсов, переходные характеристики, годограф Найквиста и ЛАФЧХ для Объекта 2

На графиках мы можем увидеть, что из-за отрицательного коэффициента годограф начинается в левой полуплоскости и охватывает точку (-1; j0). А это значит, что мы сделали один из полюсов неустойчивым, а вслед за этим и всю систему. Для графика ЛАЧХ я несколько обрезал масштаб, чтобы был четко заметен промежуток, где логарифмическая амплитуда была больше нуля. И что же - ЛАФЧХ подтверждает, что запас по амплитуде отрицателен, что и приводит к потере устойчивости замкнутой системы. Прогнозы снова совпали.

Объект 3

Для третьего объекта задано n=1 (разомкнутая система неустойчива) и m=0 (в замкнутом виде устойчива).

Нужно стабилизировать изначально неустойчивое звено. Оставим вещественный полюс в правой полуплоскости: $\lambda_5 = 1$, чтобы сохранить n=1. Для устойчивости в замкнутом контуре (m=0) добавим три нуля в левой полуплоскости, например при $s = -5$, и возьмем коэффициент усиления $K = 50$. Тогда

$$W_3(s) = \frac{50(s+5)^3}{(s-1)(s^2+10s+50)^2}$$

По критерию Найквиста ожидаем $N = m - n = -1$. То есть годограф должен один раз охватить точку $(-1; j0)$ в отрицательном направлении (против часовой стрелки), что соответствует компенсации неустойчивости разомкнутой системы.

Перейдем к моделированию:

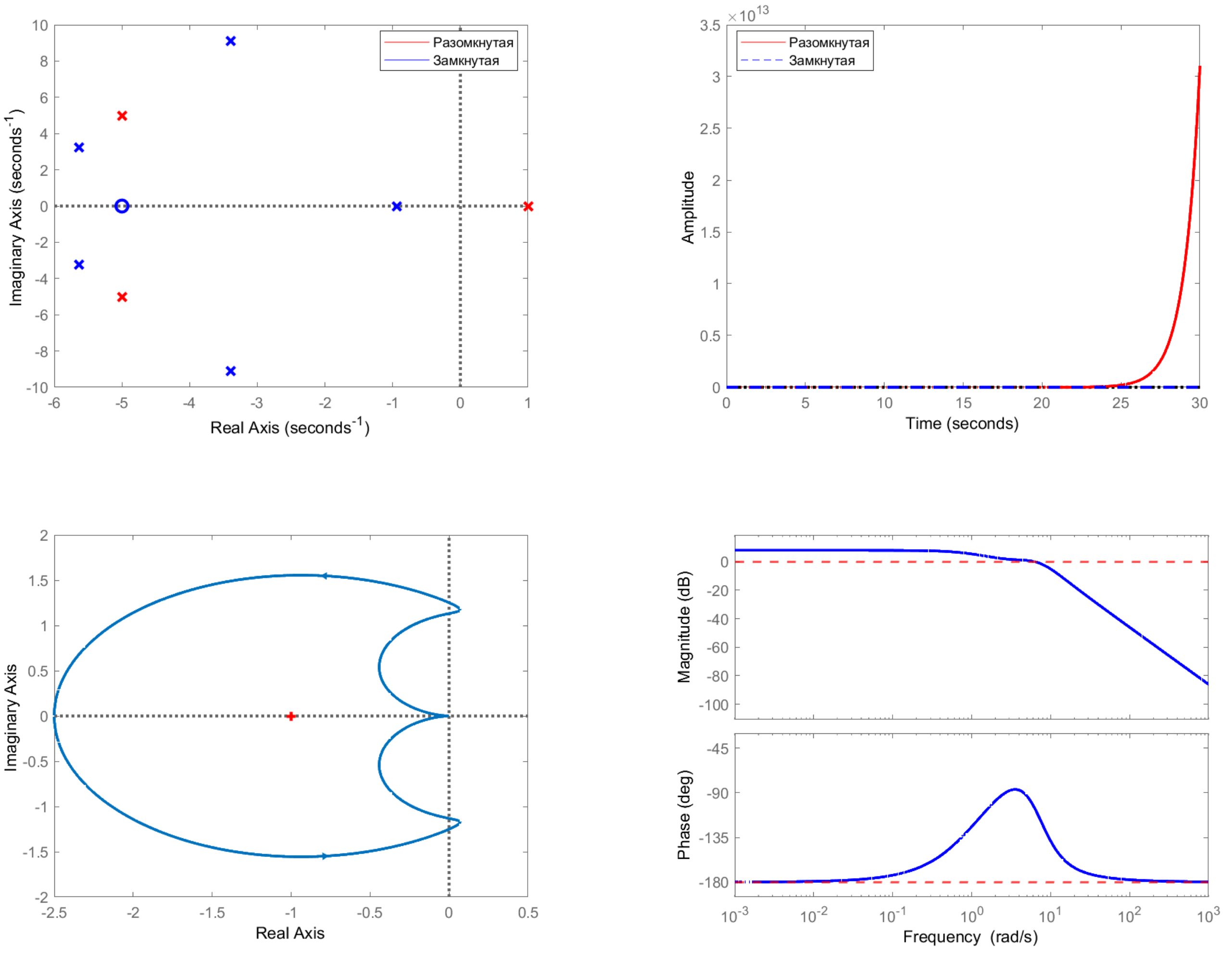


Рисунок 3: Карты нулей и полюсов, переходные характеристики, годограф Найквиста и ЛАФЧХ для Объекта 3

Результаты моделирования показывают, что годограф за счет влияния наших нулей числителя изгибается таким образом, что охватывает точку (-1; j0) против часовой стрелки. Карта полюсов подтверждает, что все полюса замкнутой системы успешно перешли в левую полуплоскость. Логарифмический критерий выполняется - при положительной логарифмической амплитуде фаза выше критической точки. Переходная характеристика замкнутой системы стремится к установившемуся значению, в то время как разомкнутая система расходится в бесконечность.

Выводы по первому заданию: В рамках задания мы отработали оценку устойчивости замкнутой системы сразу несколькими критериями на основе идей Найквиста. Причем успешно различили и случаи смены устойчивости системы при переходе от разомкнутого состояния к замкнутому.

Задание 2. Коэффициент усиления

В данном задании мы исследуем влияние коэффициента усиления k на устойчивость замкнутой системы. В соответствии с нашим 11 вариантом (по Таблице 1 значение $i = 5$), для работы нам даны следующие передаточные функции:

$$W_1(s) = k \cdot \frac{s-9}{s^2+s+8}$$

$$W_2(s) = k \cdot \frac{-80s^3+80s^2+3s-0.04}{100s^3-20s^2-2s+0.3}$$

Для каждого объекта мы построим годографы Найквиста при разных значениях k, найдем границы устойчивости замкнутой системы, а также определим запас устойчивости по амплитуде, который показывает, во сколько раз можно растянуть годограф до касания критической точки.

Объект 1

Рассмотрим первую передаточную функцию $W_1(s)$. Для начала определим полюса разомкнутой системы, решив характеристическое уравнение знаменателя: $s^2 + s + 8 = 0$.

Корни этого уравнения лежат в левой полуплоскости ($s_{1,2} = -0.5 \pm j2.78$), значит мы точно уверены, что разомкнутая система асимптотически устойчива ($n = 0$).

Поскольку разомкнутая система уже устойчива, мы можем просто применить упрощенную формулировку критерия Найквиста: замкнутая система будет устойчива в том случае, если годограф Найквиста не охватывает критическую точку $(-1; j0)$.

Найдем аналитически предельное значение k, при котором система находится на границе устойчивости. Запишем характеристический полином замкнутой системы:

$$D(s) = s^2 + s + 8 + k(s-9) = s^2 + s(1+k) + (8-9k) = 0$$

По критерию Гурвица для системы второго порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты полинома были строго положительными: 1. $1 + k > 0 \implies k > -1$ (выполняется, так как по условию $k > 0$) 2. $8 - 9k > 0 \implies k < \frac{8}{9} \approx 0.889$

Таким образом, пределы значений коэффициента усиления, при которых замкнутая система сохраняет устойчивость: $0 < k < 0.889$. Запас устойчивости по амплитуде при единичном коэффициенте ($k = 1$) легко определяется по точке пересечения годографом отрицательной вещественной оси. При $\omega = 0$ годограф начинается в точке $-9/8 = -1.125$. Запас по амплитуде вычисляется как величина, обратная этому расстоянию, то есть:

$$A_{=\frac{1}{1.125}=\frac{8}{9}\approx 0.889}$$

Поскольку при $k = 1$ система уже неустойчива, этот запас показывает, до какого значения нужно «ослабить» регулятор.

Для моделирования выберем четыре значения: $k = 0.5$ (устойчива), $k = 0.889$ (граница устойчивости), $k = 1$ (неустойчива) и $k = 1.5$ (неустойчива).

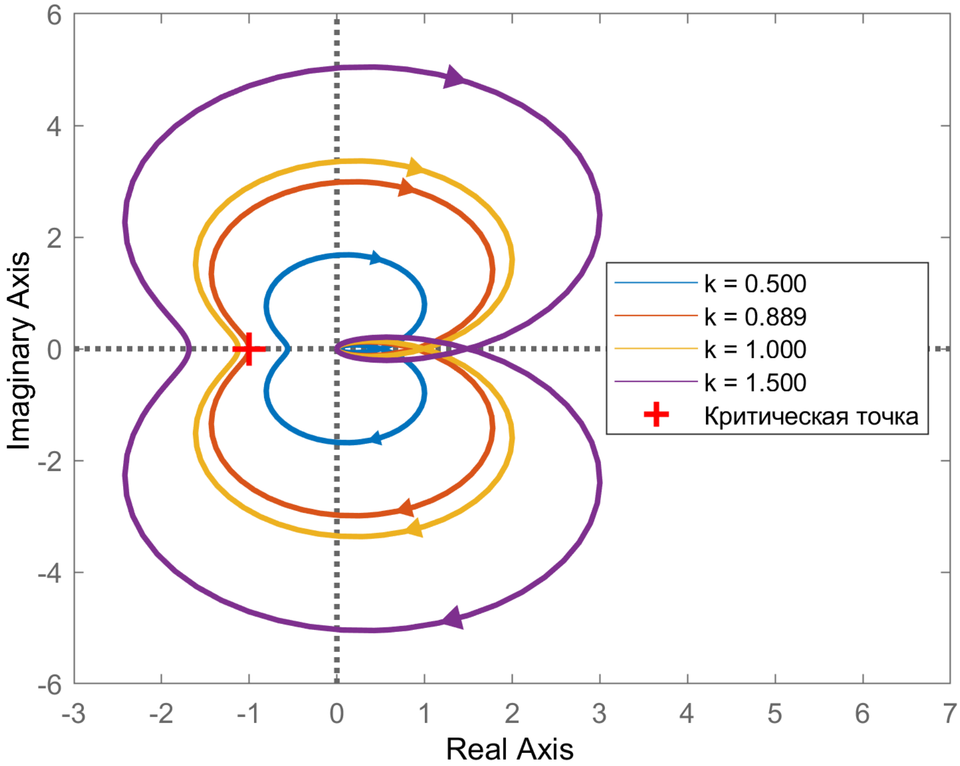
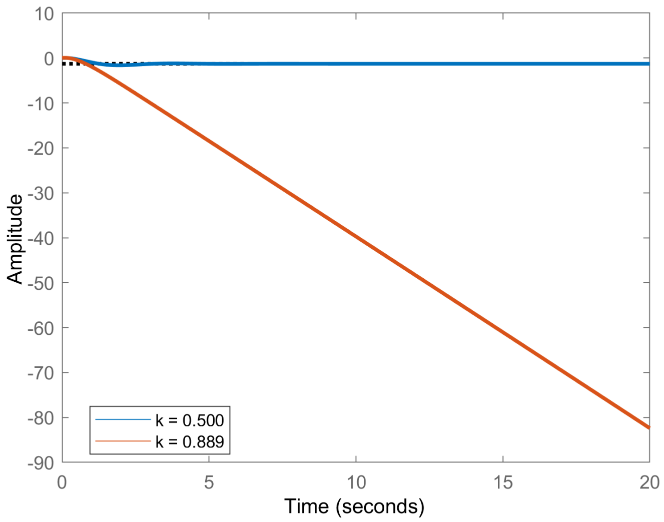


Рисунок 4: Сравнение годографов Найквиста Объекта 1 при различных k (от 0.5 до 1.5)



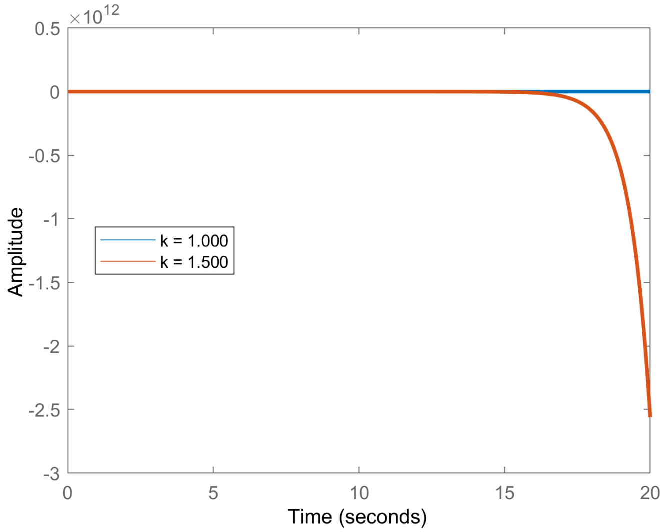


Рисунок 5: Переходные характеристики замкнутой системы Объекта 1 (слева: устойчивые при k=0.5 и k=0.889; справа: неустойчивые при k=1.0 и k=1.5)

Объект 2

Рассмотрим вторую передаточную функцию $W_2(s)$. Найдем количество неустойчивых полюсов разомкнутой системы (n), проверив корни знаменателя: $100s^3 - 20s^2 - 2s + 0.3 = 0$. Смена знаков коэффициентов указывает на то, что разомкнутая система неустойчива. Проверка критерием Гурвица показывает наличие $n = 2$ правых (неустойчивых) корней.

Согласно полному критерию Найквиста, число неустойчивых полюсов замкнутой системы равно $m = n + N$. Для того чтобы замкнутая система стала устойчивой ($m = 0$), годограф разомкнутой системы должен сделать ровно $n = 2$ оборота против часовой стрелки (то есть $N = -2$) вокруг критической точки $(-1; j0)$.

Найдем границы коэффициента k аналитически, составив характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$100s^3 - 20s^2 - 2s + 0.3 + k(-80s^3 + 80s^2 + 3s - 0.04) = 0$$

$$(100 - 80k)s^3 + (80k - 20)s^2 + (3k - 2)s + (0.3 - 0.04k) = 0$$

Применим критерий Гурвица для полинома третьей степени ($a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$). Для устойчивости необходимо будет выполнение условий $a_i > 0$ и $a_2a_1 > a_3a_0$:

1. $100 - 80k > 0 \implies k < 1.25$
2. $80k - 20 > 0 \implies k > 0.25$
3. $3k - 2 > 0 \implies k > 0.667$
4. $0.3 - 0.04k > 0 \implies k < 7.5$
5. и еще условие: $(80k - 20)(3k - 2) > (100 - 80k)(0.3 - 0.04k)$

Раскрыв скобки и решив квадратное неравенство ($236.8k^2 - 192k + 10 > 0$), мы получаем уточненную нижнюю границу: $k > 0.755$.

Объединяя все условия, находим, что замкнутая система устойчива в достаточно узком диапазоне: $0.755 < k < 1.25$. Именно в этом "окне"значений коэффициента усиления годограф правильно изгибается и делает необходимые 2 оборота против часовой стрелки.

Для моделирования выберем три значения: $k = 0.5$ (система неустойчива), $k = 1$ (система устойчива - как раз внутри промежутка), $k = 1.5$ (система неустойчива).

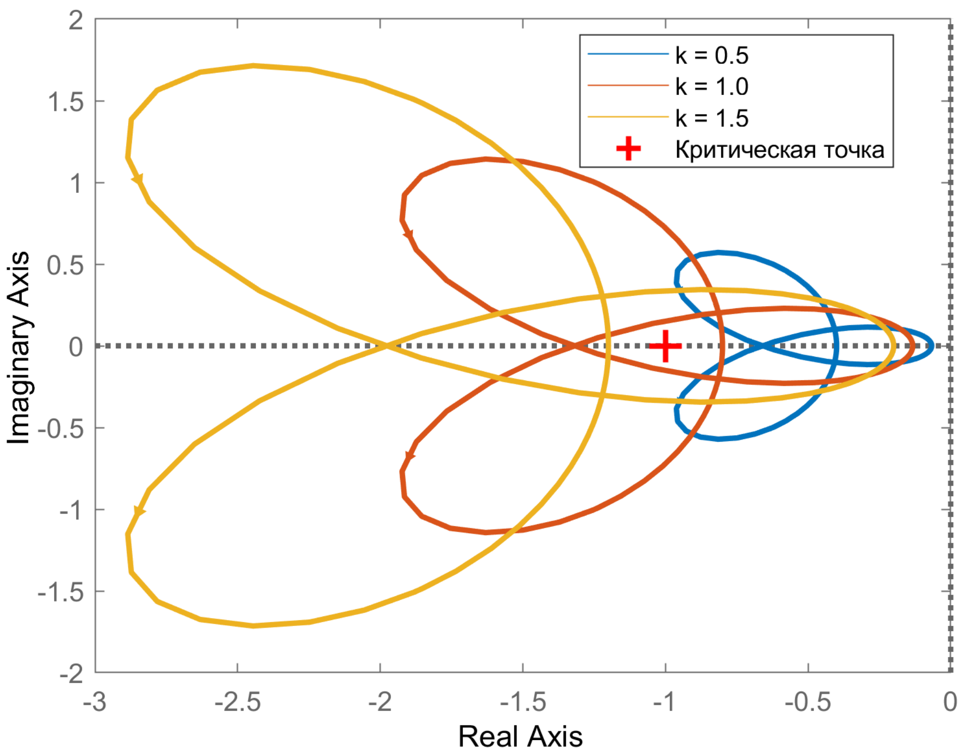
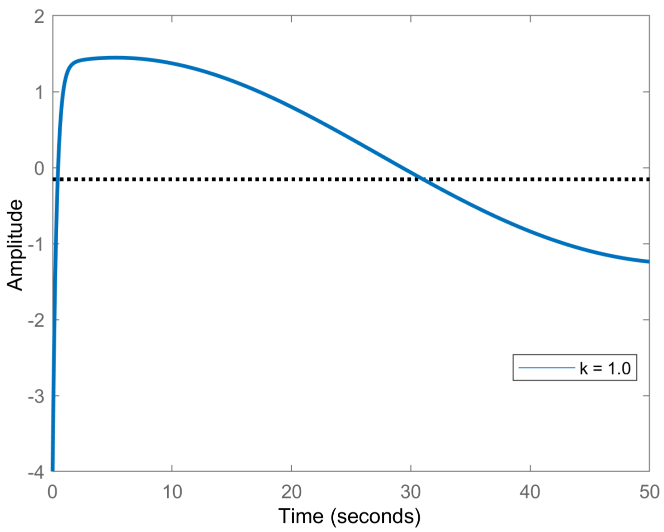


Рисунок 6: Сравнение годографов Найквиста Объекта 2 при k=0.5, k=1.0 и k=1.5



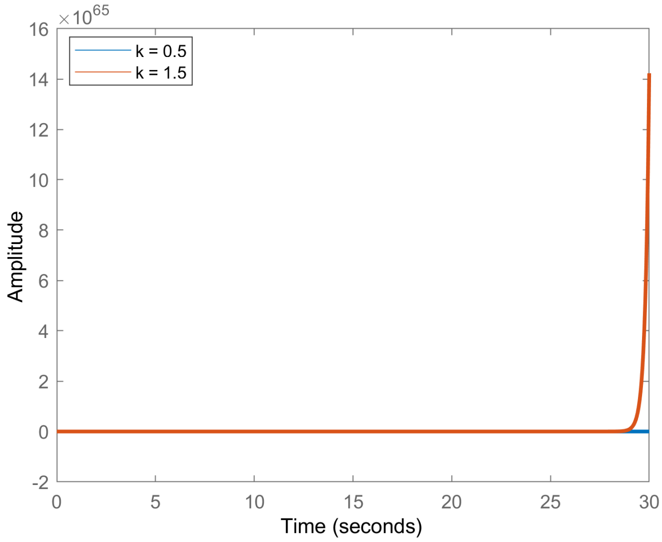


Рисунок 7: Переходные характеристики замкнутой системы Объекта 2 (слева: устойчивая при k=1.0; справа: неустойчивые при k=0.5 и k=1.5)

Выводы по заданию 2: В ходе выполнения задания наглядно увидели влияние коэффициента усиления пропорционального регулятора k на устойчивость замкнутой системы. Увеличение k приводит к пропорциональному растяжению годографа Найквиста относительно начала координат. Для изначально устойчивого Объекта 1 сильное растяжение годографа привело к охвату критической точки и потере устойчивости. В то же время для неустойчивого Объекта 2 существовало лишь строго ограниченное "окно"значений коэффициента k, при которых обратная связь стабилизировала систему путем обеспечения необходимого количества оборотов годографа вокруг критической точки.

Задание 3. Запаздывание

В данном задании мы исследуем влияние звена чистого запаздывания $e^{-\tau s}$ на устойчивость замкнутой системы. Имеем следующие передаточные функции:

$$W_3(s) = \frac{9s+2}{s^2+6s+1}$$

$$W_4(s) = \frac{8s^2+4s+2.4}{10s^2-5s+11}$$

Наша задача — определить запас устойчивости по фазе (если это применимо), аналитически найти критическое время запаздывания τ_{max}, при котором система теряет устойчивость, и проиллюстрировать этот процесс графически.

Объект 3

Рассмотрим передаточную функцию $W_3(s)$. Найдем корни ее знаменателя: $s^2+6s+1 = 0 \implies s_{1,2} \approx -0.17, -5.83$. Все корни лежат в левой полуплоскости, значит, разомкнутая система устойчива ($n = 0$). При замыкании системы без запаздывания ($\tau = 0$) характеристический полином $D(s) = s^2 + 15s + 3 = 0$ также имеет только отрицательные корни. Значит, исходная замкнутая система асимптотически устойчива.

Найдем критическое время запаздывания τ_{max}, при котором годограф закрутится настолько, что охватит критическую точку $(-1; j0)$. Для этого сначала найдем частоту среза ω, при которой амплитуда $A(\omega) = 1$:

$$|W_3(j\omega)| = \frac{|9j\omega+2|}{|(1-\omega^2)+6j\omega|} = 1 \implies \omega \approx 6.86 \text{ рад/с}.$$

Запас устойчивости по фазе φ:

$$\varphi{=}180^\circ{+}\varphi(\omega){\approx}129.9^\circ{\approx}2.267 \text{ рад}.$$

Поскольку запаздывание вносит дополнительный сдвиг фазы $\Delta\varphi = -\tau\omega$, критическое время запаздывания равно:

$$\tau_{max} = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2.267}{6.86} \approx 0.33 \text{ с.}$$

Таким образом, пределы значений коэффициента запаздывания τ, при которых замкнутая система устойчива: $0 \le \tau < 0.33$.

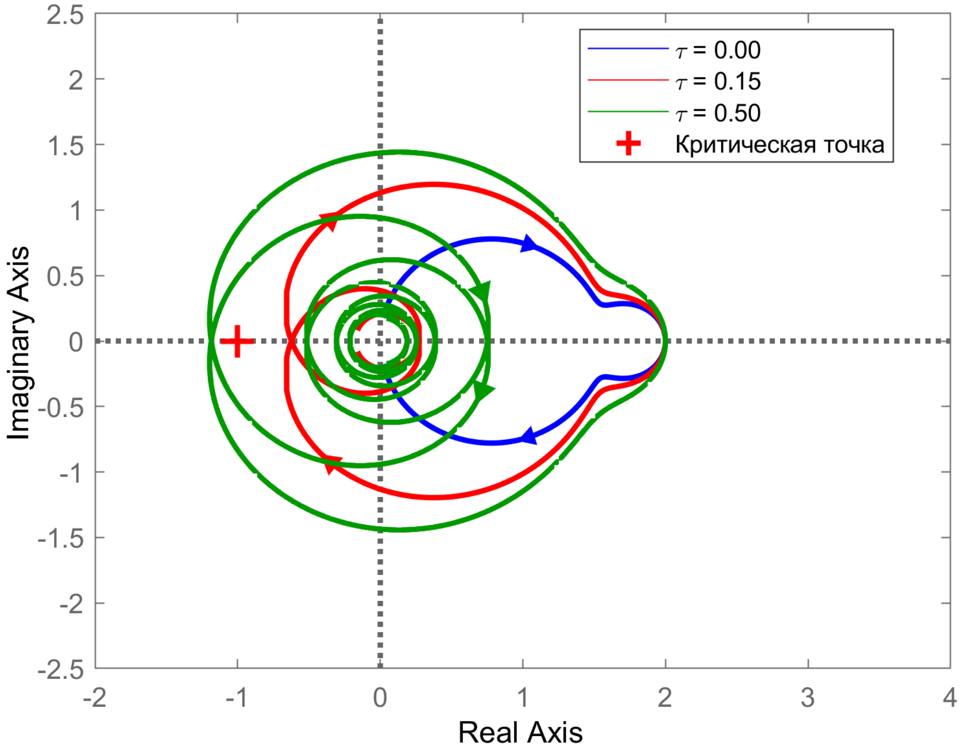


Рисунок 8: Сравнение годографов Найквиста Объекта 3 при различных значениях τ.

Очень явно видно, как при увеличении задержки годограф «закручивается» и пересекает критическую точку.

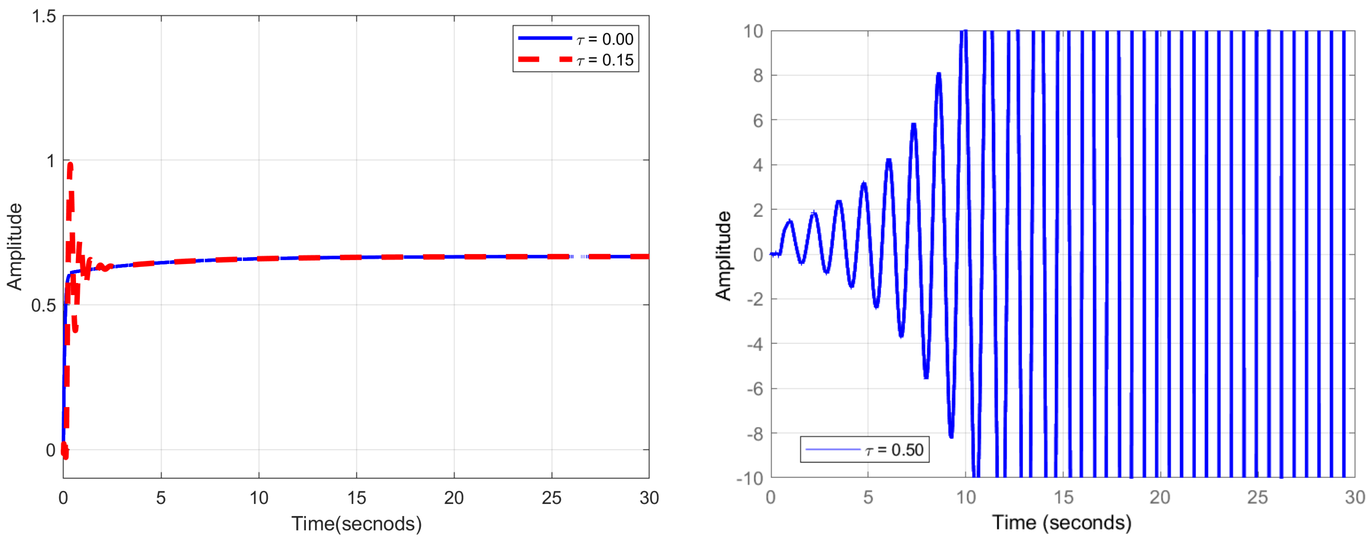


Рисунок 9: Переходные характеристики Объекта 3. Слева: устойчивые процессы ($\tau = 0$ и $\tau = 0.15$). Справа: расходящийся вариант при $\tau = 0.5$.

Объект 4

Рассмотрим четвертую передаточную функцию $W_4(s)$. Разомкнутая система неустойчива ($n = 2$, корни $0.25 \pm j1.02$). Замкнутая система без запаздывания ($\tau = 0$) также неустойчива.

Однако все не так уж и просто! В нашем случае, внесение фазового сдвига закручивает годограф, и при определенных значениях τ он охватывает точку -1 нужное число раз ($N = -2$). Так что мы можем сделать нашу систему устойчивой при помощи задержек.

Для определения границ устойчивости системы с запаздыванием τ воспользуемся частотным методом. Замкнутая система находится на границе устойчивости, когда годограф разомкнутой системы $W_{open}(j\omega)$ проходит через критическую точку $-1 + j0$.

Разомкнутая система имеет вид:

$$W_{open}(j\omega) = W_4(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} = \frac{8(j\omega)^2 + 4j\omega + 2.4}{10(j\omega)^2 - 5j\omega + 11} \cdot e^{-j\omega\tau}$$

Условие нахождения на границе устойчивости определяется системой уравнений для модуля и фазы:
- Амплитудное условие: $|W_4(j\omega)| = 1$. Запаздывание не влияет на модуль, так как $|e^{-j\omega\tau}| = 1$.
- Фазовое условие: $\arg(W_4(j\omega)) - \omega\tau = -(2k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Решим уравнение для модуля $|W_4(j\omega)|^2 = 1$:

$$\frac{(2.4 - 8\omega^2)^2 + (4\omega)^2}{(11 - 10\omega^2)^2 + (-5\omega)^2} = 1$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые относительно $x = \omega^2$:

$$(5.76 - 38.4\omega^2 + 64\omega^4) + 16\omega^2 = (121 - 220\omega^2 + 100\omega^4) + 25\omega^2$$

$$36\omega^4 - 172.6\omega^2 + 115.24 = 0$$

Решение данного биквадратного уравнения дает две положительные критические частоты:

$$\omega_{cr1} \approx 0.91 \text{ рад/с}, \quad \omega_{cr2} \approx 1.98 \text{ рад/с}$$

Теперь наконец расчитаем!

Для каждой частоты определим фазу исходного объекта $\varphi(\omega) = \arg(W_4(j\omega))$ и найдем τ из фазового условия:

$$\tau = \frac{\varphi(\omega) + (2k+1)\pi}{\omega}$$

Учитывая, что разомкнутая система имеет два правых полюса ($P = 2$), согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы годограф должен охватить точку -1 дважды в положительном направлении ($N = -P/2 = -1$ оборот или 2 охвата). Это условие выполняется в интервале между первым и вторым прохождением фазы через критическое значение:

Для $\omega_{cr1} \approx 0.91$: фаза объекта $\varphi_1 \approx -2.87$ рад. Критическое $\tau_1 \approx 0.28$ с.

Для $\omega_{cr2} \approx 1.98$: фаза объекта $\varphi_2 \approx -5.65$ рад. Критическое $\tau_2 \approx 1.27$ с.

Таким образом, область устойчивости (окно) по запаздыванию для данной системы составляет:

$$0.28 < \tau < 1.27 \text{ с.} \tag{1}$$

При $\tau < 0.28$ система неустойчива (недостаточный фазовый сдвиг), а при $\tau > 1.27$ избыточное запаздывание приводит к потере устойчивости из-за "перекручивания"годографа.

Выбранное для моделирования значение $\tau = 0.5$ попадает в устойчивый интервал. Годограф должен будет совершить 2 оборота против часовой стрелки, что обеспечивит нам устойчивость замкнутой системы.

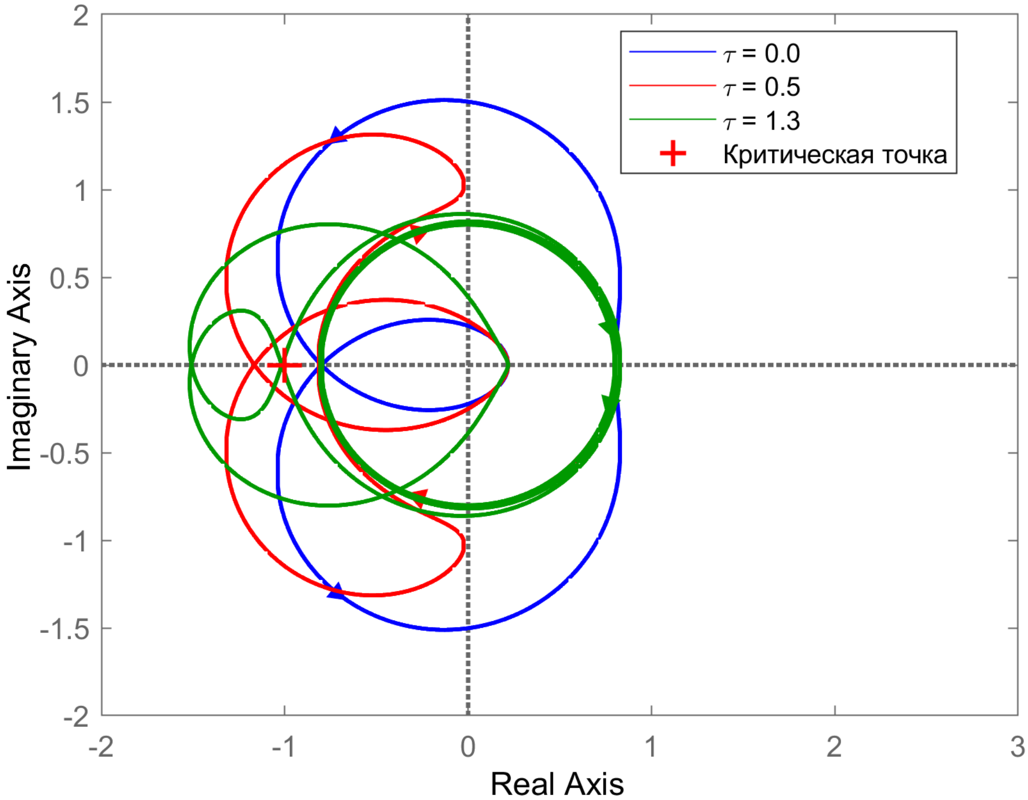


Рисунок 10: Годографы Найквиста Объекта 4.

Видим по рисунку что синий ($\tau = 0$) не охватывает -1. А вот красный ($\tau = 0.5$) охватывает точку дважды, обеспечивая устойчивость. Зеленый же закручивается чресчур сильно, что лишает его стабильности.

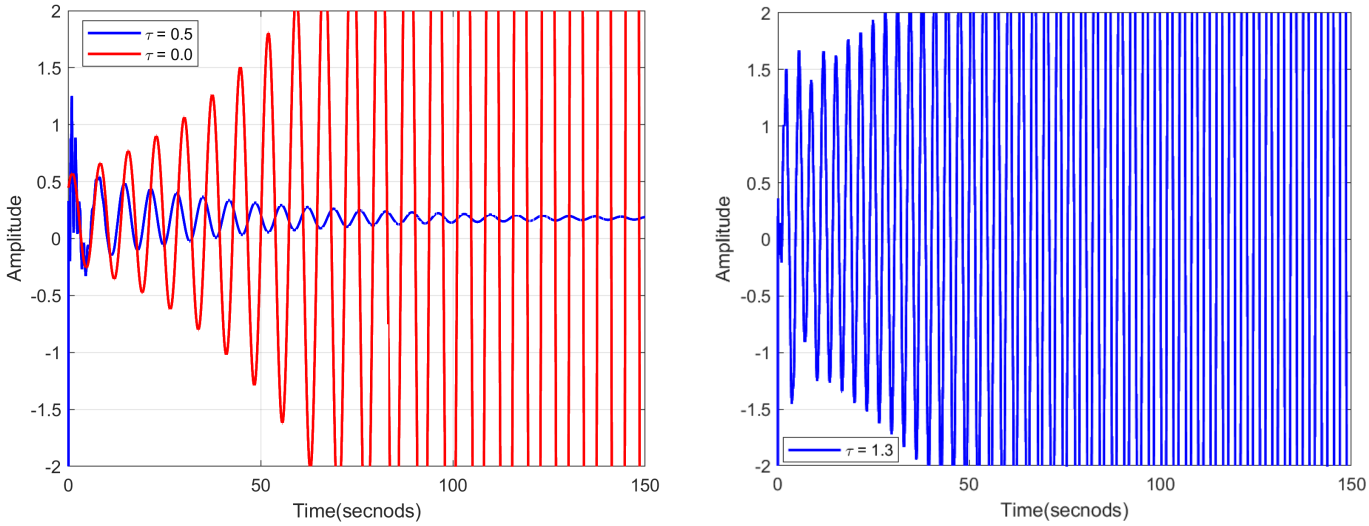


Рисунок 11: Переходные характеристики Объекта 4. Слева: сравнение неустойчивой ($\tau = 0$) и стабилизированной ($\tau = 0.5$) систем. Справа: потеря устойчивости при выходе из окна ($\tau = 1.3$).

Общие выводы по заданию 3

Введение запаздывания вносит дополнительный фазовый сдвиг $\Delta\varphi = -\tau\omega$. В случае устойчивого Объекта 3 запаздывание снижает запас устойчивости до нуля. Для неустойчивого Объекта 4 запаздывание выступает регулятором: при попадании в окно $0.28 < \tau < 1.27$ оно доворачивает годограф так, что система становится асимптотически устойчивой. По сути это открывает нам скажем так «позитивные возможности» применения задержек.

Вывод

В рамках шестой заключительной лабораторной работы по линейным системам автоматического управления я основательно так поработал с критерием Найквиста. Это оказался очень мощный инструмент, который позволяет мне удобно анализировать сложные системы на устойчивость. Так же довелось и столкнуться с до этого невиданной сложностью в виде систем с задержками. Как оказалось, преобразование Лапласа помогает очень эффективно представлять эту задержку в виде слегка особенной экспоненты, а дальше работа с ней уже дело техники.