

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2

Свободное движение, устойчивость

Студенты: Загайнов А.А.

Поток: Лин САУ R23 бак 1.1.2

Вариант: 11

Преподаватели: Перегудин. А.А., Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2026

Содержание

Задание 1. Свободное движение	3
Вариант 1.	4
Вариант 2.	4
Вариант 3.	5
Вариант 4.	6
Вариант 5.	7
Вариант 6.	7
Задание 2. Область устойчивости	9
Область устойчивости	9
Граница устойчивости при фиксированном T_2	10
Граница устойчивости при фиксированном T_1	10
Моделирование при разных устойчивостях	10
Задание 3. Автономный генератор	13
Моделирование	15
Выводы	15

Задание 1. Свободное движение

В задании рассматриваем систему 2-го порядка вида:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = a_0 u$$

В соответствии с нашим 11 вариантом, для этой системы мы имеем шесть вариантов наборов начальных условий и корней характеристического уравнения. Для каждого варианта надо будет найти его коэффициенты a_0, a_1 и найти аналитическое выражение для свободной составляющей системы. В этом задании будем руководствоваться несколькими общими методами, которые упростят задачу.

Нахождение коэффициентов a_0, a_1 : Так как нам уже известны корни уравнения, а найти надо его коэффициенты, то воспользуемся теоремой Виета для нахождения:

$$a_0 = \lambda_1 \lambda_2$$

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Свободная составляющая системы: Со свободной составляющей системы сложнее, но и для этого мы имеем общие формы. В случае, если корни вещественные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то выглядеть это будет вот так:

$$y_{free} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(0) = c_1 + c_2$$

$$\dot{y}(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{\dot{y}(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$c_1 = y(0) - \frac{\dot{y}(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = y(0) - c_2$$

Если же комплексно сопряженные, то так:

$$y_{free} = \left(\frac{c + dj}{2} \right) e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{c - dj}{2} \right) e^{\lambda_2 t}$$

$$y(0) = \left(\frac{c + dj}{2} \right) + \left(\frac{c - dj}{2} \right) = c$$

$$\dot{y}(0) = \left(\frac{\lambda_1(c + dj)}{2} \right) + \left(\frac{\lambda_2(c - dj)}{2} \right)$$

$$d = -j \frac{2\dot{y}(0) - y(0)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Теперь рассмотрим каждый вариант по порядку.

Вариант 1.

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -3, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты a_0, a_1 :

$$a_1 = 7, \quad a_0 = 12$$

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 12u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C_1 = \frac{1 * (-3) - 0}{-3 - (-4)} = -3, \quad C_2 = \frac{0 - 1 * (-4)}{-3 - (-4)} = 4$$

$$y_{free}(t) = -3e^{-4t} + 4e^{-3t}$$

Займемся моделированием. Составим модель свободного движения для этой системы, а затем сравним результат с аналитическим решением:

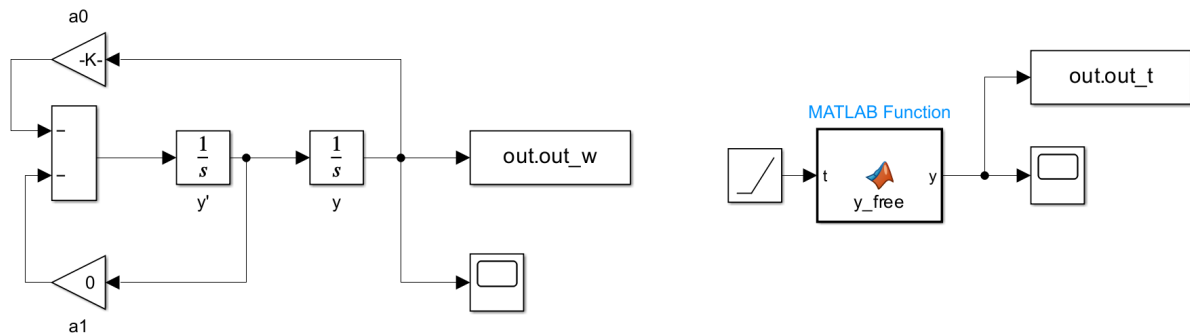


Рисунок 1: Схемы для эксперимента и аналитических данных

Запустим и посмотрим:

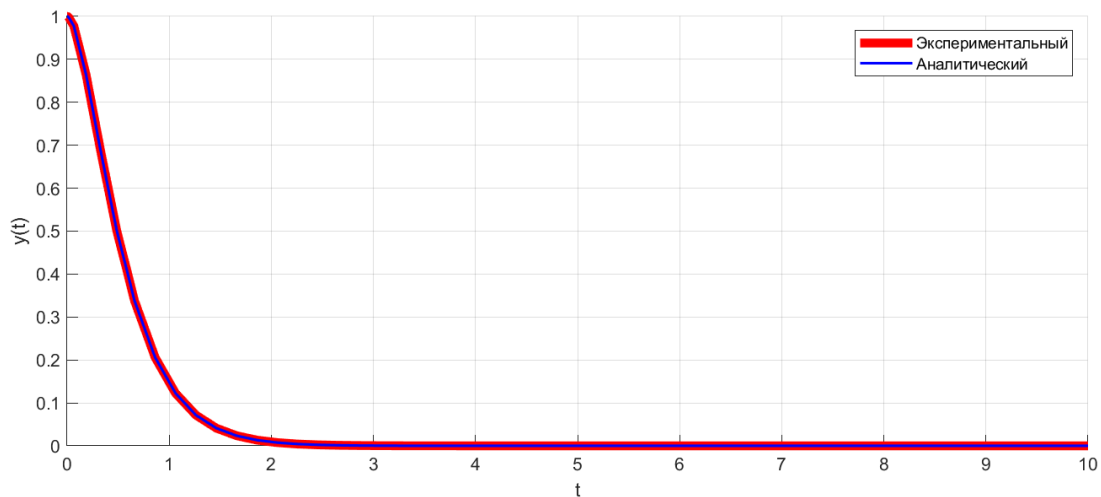


Рисунок 2: Графики экспериментальных и аналитических данных

По корневому критерию мы точно можем предсказать, что наша система асимптотически устойчива - оба корня меньше нуля. По графикам можем подтвердить, что система устойчива и довольно уверенно сходится к нулю. Результаты в точности совпали, как и наши прогнозы!

Вариант 2.

$$\lambda_1 = -1.6 + j13, \quad \lambda_2 = -1.6 - j13, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты a_0, a_1 :

$$a_1 = 3.2, \quad a_0 = (-1.6 + j13)(-1.6 - j13) = 171.56$$

$$\ddot{y} + 3.2\dot{y} + 171.56y = 171.56u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C = 1$$

$$d = -j \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1.6 + j13 - 1.6 - j13)}{-1.6 + j13 - (-1.6 - j13)} = \frac{1.6}{13}$$

$$y_{free}(t) = \frac{1 + j\frac{1.6}{32}}{2} e^{(-1.6 + j13)t} + \frac{1 - j\frac{1.6}{32}}{2} e^{(-1.6 - j13)t}$$

Проведем моделирование работы системы:

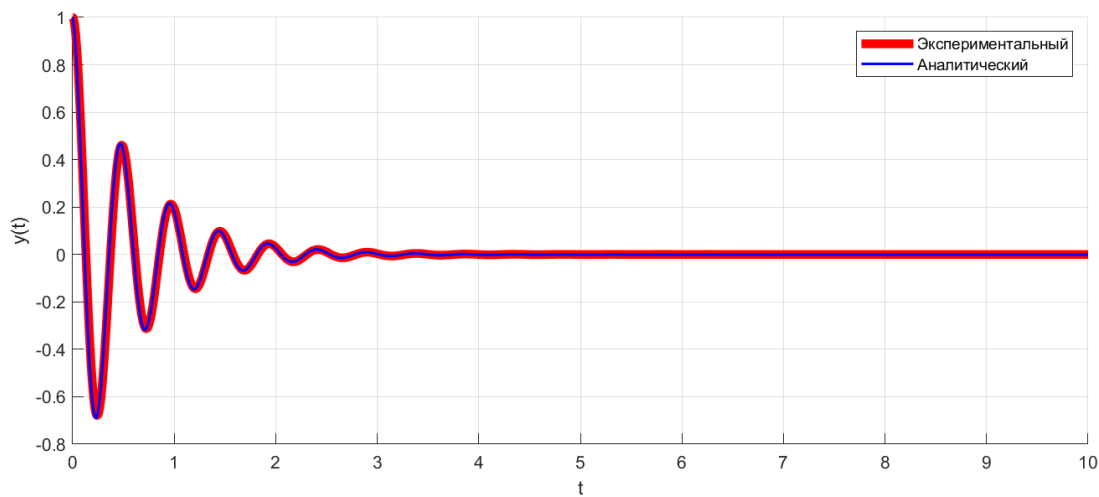


Рисунок 3: Графики экспериментальных и аналитических данных

Корневой критерий предсказывает асимптотическую устойчивость - вещественные части корней отрицательные. Экспериментальные данные подтверждают устойчивость системы. Результаты совпадают с аналитическими!

Вариант 3.

$$\lambda_1 = j13, \quad \lambda_2 = -j13, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты a_0, a_1 :

$$a_1 = 0 \quad a_0 = 169$$

$$\ddot{y} + 169y = 169u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C = 1$$

$$d = -j \cdot \frac{2\dot{y}(0) - y(0)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = -j \cdot \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2j13} = -j \cdot 0 = 0$$

$$y_{free}(t) = \frac{1}{2} e^{j13t} + \frac{1}{2} e^{-j13t}$$

Проведем моделирование работы системы:

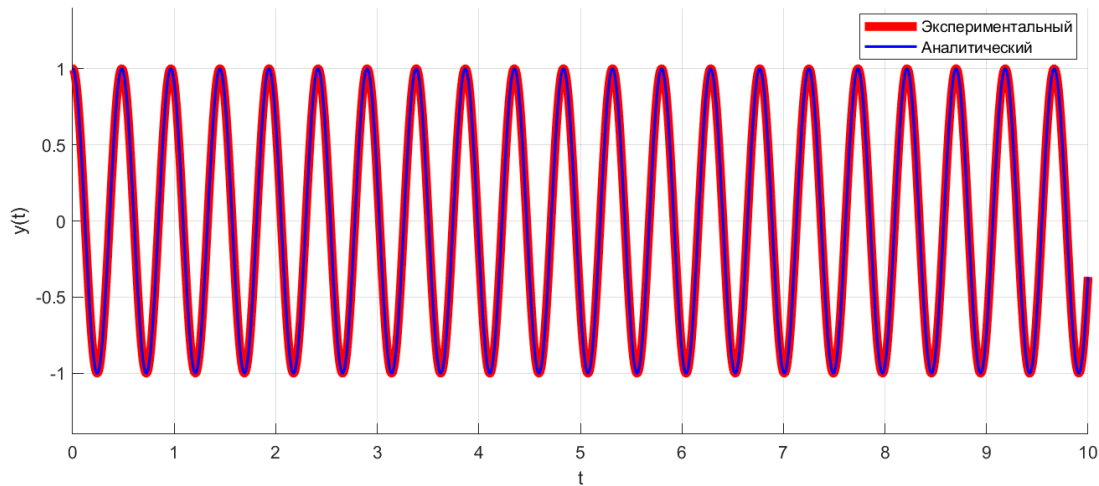


Рисунок 4: Графики экспериментальных и аналитических данных

Корневой критерий говорит о устойчивости по Ляпунову, ведь наши корни содержат только мнимую часть. Эксперимент подтверждает предположение, система всегда будет находиться в пределах $[-1, 1]$. Оно и понятно, ведь уравнение свободного движения это косинус. Результаты опять совпали

Вариант 4.

$$\lambda_1 = 1.6 + j13, \quad \lambda_2 = 1.6 - j13, \quad y(0) = 0.05, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты a_0, a_1 :

$$a_1 = -3.2 \quad a_0 = 171.56$$

$$\ddot{y} - 3.2\dot{y} + 171.56y = 171.56u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C = 0.05 \quad d = -\frac{0.08}{13}$$

$$y_{\text{free}}(t) = \left(\frac{0.05}{2} + \frac{0.04}{13}j \right) e^{(1.6+j13)t} + \left(\frac{0.05}{2} - \frac{0.04}{13}j \right) e^{(1.6-j13)t}$$

Проведем моделирование:

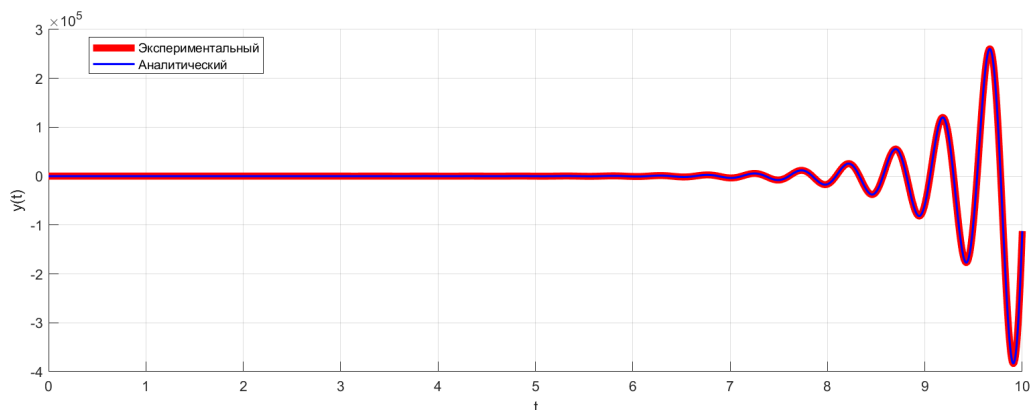


Рисунок 5: Графики экспериментальных и аналитических данных

Корневой критерий дает нам сразу понять, что система будет неустойчива, ведь $\text{Re}(\lambda) > 0$. Эксперимент так же подтверждает наше предположение. Результаты вновь совпали!

Вариант 5.

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3, \quad y(0) = 0.05, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Посчитаем коэффициенты a_1, a_0 :

$$a_1 = -7 \quad a_0 = 12$$

$$\ddot{y} - 7\dot{y} + 12y = 12u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C_1 = -0.95 \quad C_2 = 1$$

$$y_{free} = 0.95e^{4t} - e^{3t}$$

Проведем моделирование:

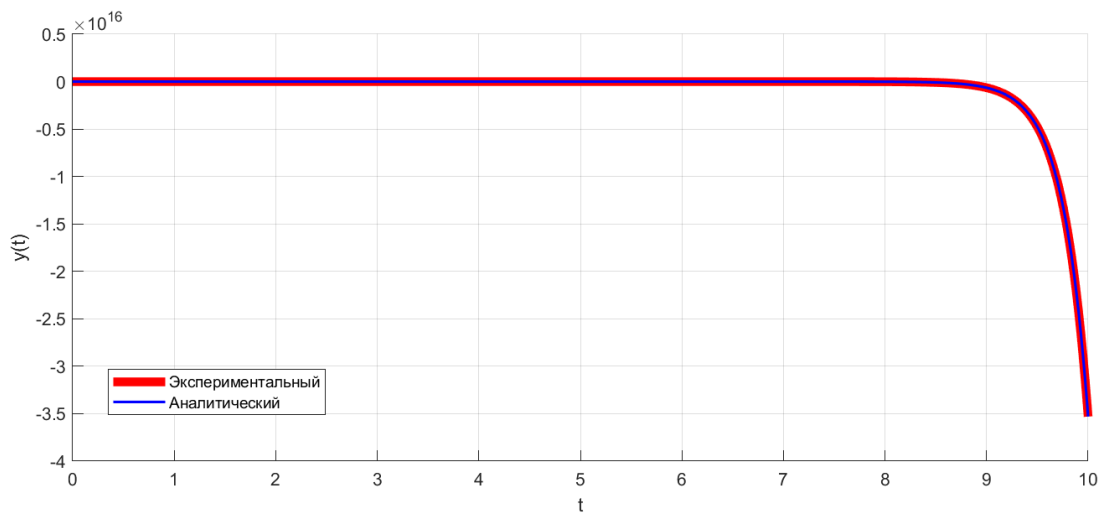


Рисунок 6: Графики экспериментальных и аналитических данных

По корневому критерию можем сразу предсказать, что система будет неустойчивой, ведь вещественные части корней больше нуля. Что собственно мы и подтверждаем совпадающими друг с другом экспериментальными и теоретическими графиками.

Вариант 6.

$$\lambda_1 = -1.2, \quad \lambda_2 = 1.2, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.1$$

Посчитаем коэффициенты a_1, a_0 :

$$a_1 = 0 \quad a_0 = -1.44$$

$$\ddot{y} - 1.44y = -1.44u$$

Построим свободную составляющую движения:

$$C_1 = -\frac{1}{24} \quad C_2 = \frac{1}{24}$$

$$y_{free} = -\frac{1}{24}e^{-1.2t} + \frac{1}{24}e^{1.2t}$$

Проведем моделирование:

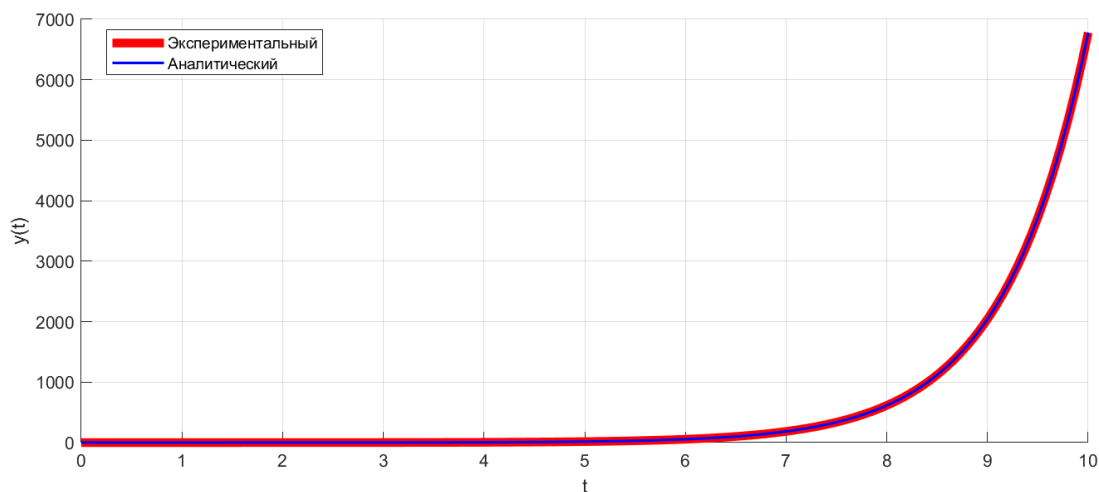


Рисунок 7: Графики экспериментальных и аналитических данных

По корневому критерию можем точно сказать, что система вновь будет неустойчивой, ведь один из корней больше нуля. Как видим на практике - совпавшие теоретические и экспериментальные графики подтверждают наше предположение.

Выводы по заданию 1:

В рамках выполнения первого задания я освежил мои знания по работе с корневым критерием в динамических системах с прошлого курса. Работал я над свободным движением, смог успешно посчитать уравнение этого свободного движения исходя только из начальных условий и характеристических корней данной системы. Проверил на практике истинность моих расчетов, сравнив теоретические результаты с экспериментальной моделью.

Задание 2. Область устойчивости

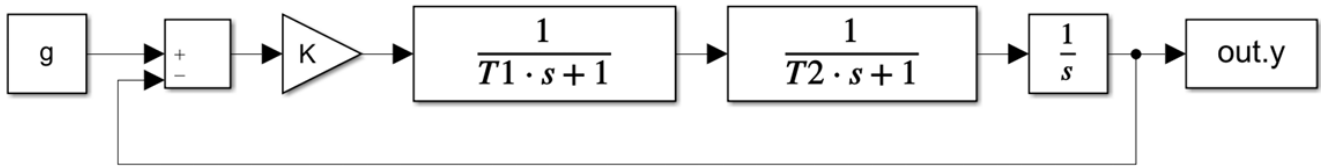


Рисунок 8: Схема моделирования

В этом задании будем работать с системой, изображенной на рисунке. Будем изучать вопрос зависимости области устойчивости системы от её внутренних параметров.

Во-первых определим, при каких значениях T_1, T_2 полюса соответствующих передаточных функций совпадут с первым набором корней $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ из предыдущего задания.

Полюс звена первого порядка $\frac{1}{T_i s + 1}$ равен:

$$s = -\frac{1}{T_i}.$$

В нашем случае распишем это как:

$$-\frac{1}{T_1} = -4 \quad -\frac{1}{T_2} = -3.$$

$$T_1 = \frac{1}{4} = 0.25 \quad T_2 = \frac{1}{3} \approx 0.333333.$$

Распишем знаменатель передаточной функции нашей системы, которая по своей сути является для нас характеристическим полиномом:

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)s + K = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K.$$

Соответствующие коэффициенты сопоставим:

$$a_3 = T_1 T_2, \quad a_2 = T_1 + T_2, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = K.$$

Область устойчивости

Для полинома третьей степени, по критерию Гурвица необходимы и достаточны условия:

$$\begin{cases} a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \\ a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \\ a_2 a_1 > a_3 a_0. \end{cases}$$

Подставим $a_3 = T_1 T_2$, $a_2 = T_1 + T_2$, $a_1 = 1$, $a_0 = K$. Тогда дополнительное условие даёт:

$$T_1 + T_2 > T_1 T_2 K \quad \rightarrow \quad K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Также требуется $K > 0$ и $T_1 > 0$, $T_2 > 0$. При этом можем заявлять точно, что T_1 и T_2 больше нуля, ведь это константы времени.

Подставим найденные значения $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{3}$:

$$T_1 + T_2 = \frac{7}{12}, \quad T_1 T_2 = \frac{1}{12}.$$

$$K < \frac{7}{12} \frac{12}{1} = 7, \quad K > 0.$$

Тогда, при выбранных T_1, T_2 область асимптотической устойчивости:

$$0 < K < 7$$

Граница устойчивости задаётся равенством $K = 7$.

Граница устойчивости при фиксированном T_2

Зафиксируем $T_2 = \frac{1}{3}$ и оставим T_1 переменным. Условие Гурвица даёт

$$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{T_1 + \frac{1}{3}}{T_1 \cdot \frac{1}{3}} = 3 + \frac{1}{T_1}, \quad T_1 > 0.$$

Таким образом граница устойчивости в плоскости (T_1, K) при $T_2 = \frac{1}{3}$ задаётся кривой

$$K = 3 + \frac{1}{T_1} \quad T_1 > 0,$$

а область устойчивости — под этой кривой при $K > 0$.

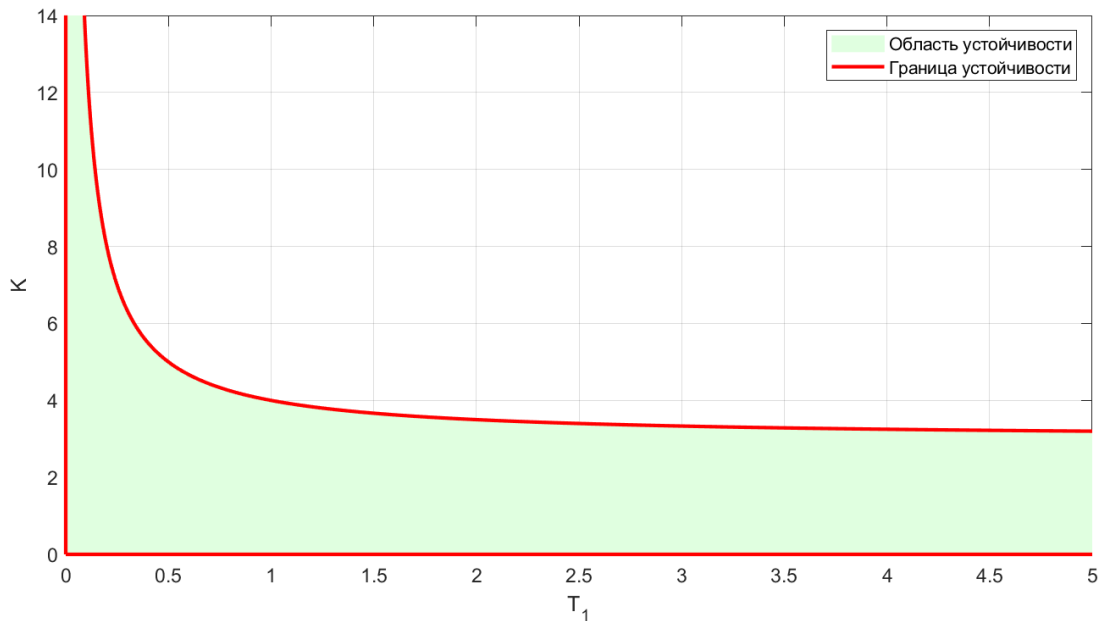


Рисунок 9: Область устойчивости при фиксированном $T_2 = \frac{1}{3}$

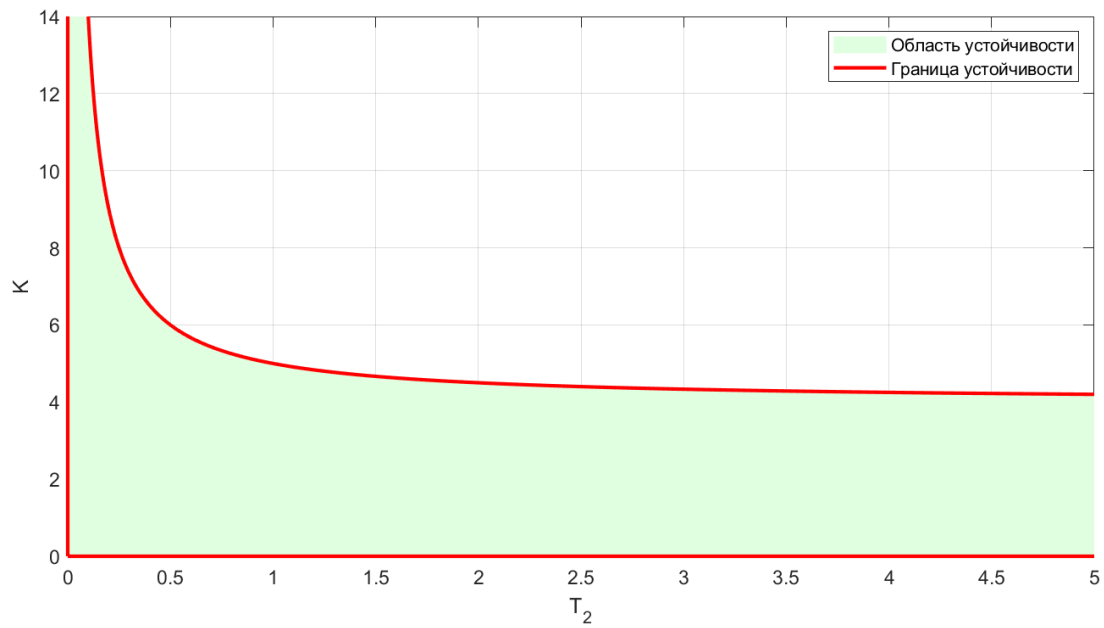
Граница устойчивости при фиксированном T_1

Зафиксируем $T_1 = \frac{1}{4}$. Аналогично получаем

$$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{\frac{1}{4} + T_2}{\frac{1}{4} T_2} = 4 + \frac{1}{T_2}, \quad T_2 > 0.$$

Граница в плоскости (T_2, K) при $T_1 = \frac{1}{4}$:

$$K = 4 + \frac{1}{T_2} \quad T_2 > 0.$$

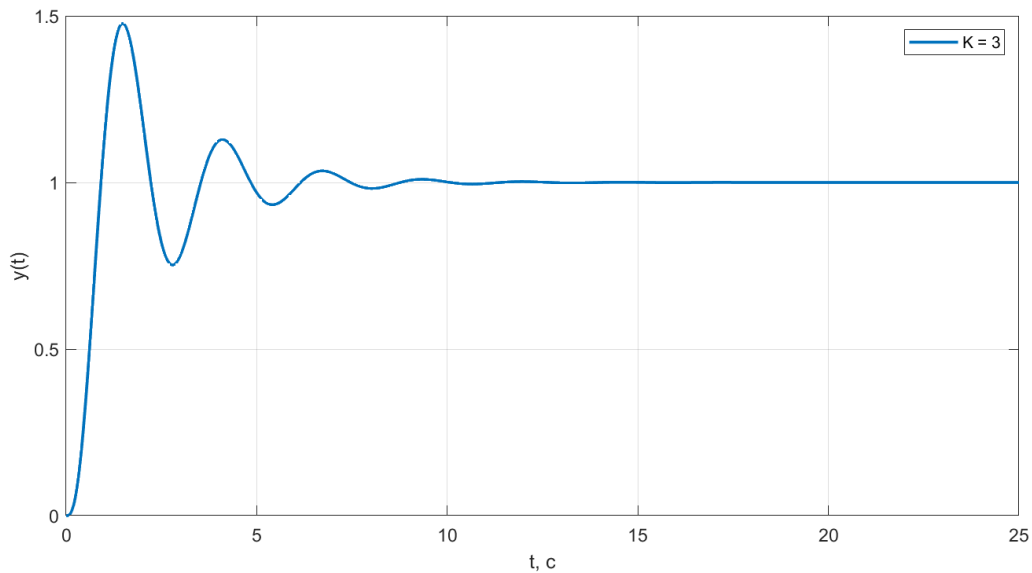
Рисунок 10: Область устойчивости при фиксированном $T_1 = \frac{1}{4}$

Моделирование при разных устойчивостях

Для моделирования возьмём $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{3}$ и три значения K для разных видов устойчивости:

- асимптотически устойчивая система: $K = 3$
- система на границе устойчивости: $K = 7$.
- неустойчивая система: $K = 8$

На основе выбранных наборов параметров проведём моделирование (графики ниже — результаты моделирования):

Рисунок 11: Моделирование асимптотически устойчивой системы ($K = 3$, $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{3}$)

По моделированию видно, что выбранные наборы соответствуют своим обозначениям: при K внутри интервала система затухает, при $K = 7$ наблюдается пограничное поведение, при $K > 7$ — рост (неустойчивость).

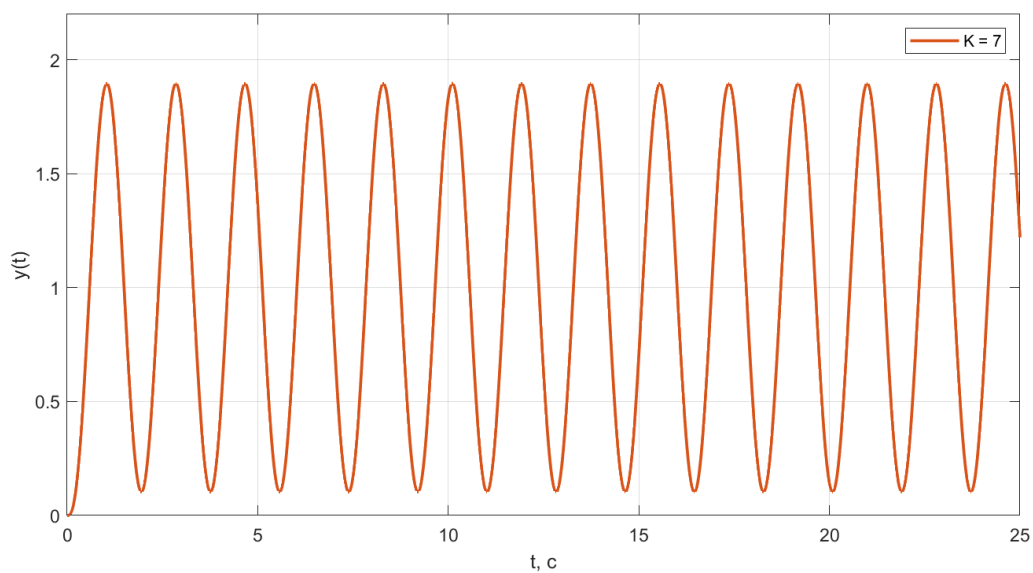


Рисунок 12: Моделирование системы на границе устойчивости ($K = 7$, $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{3}$)

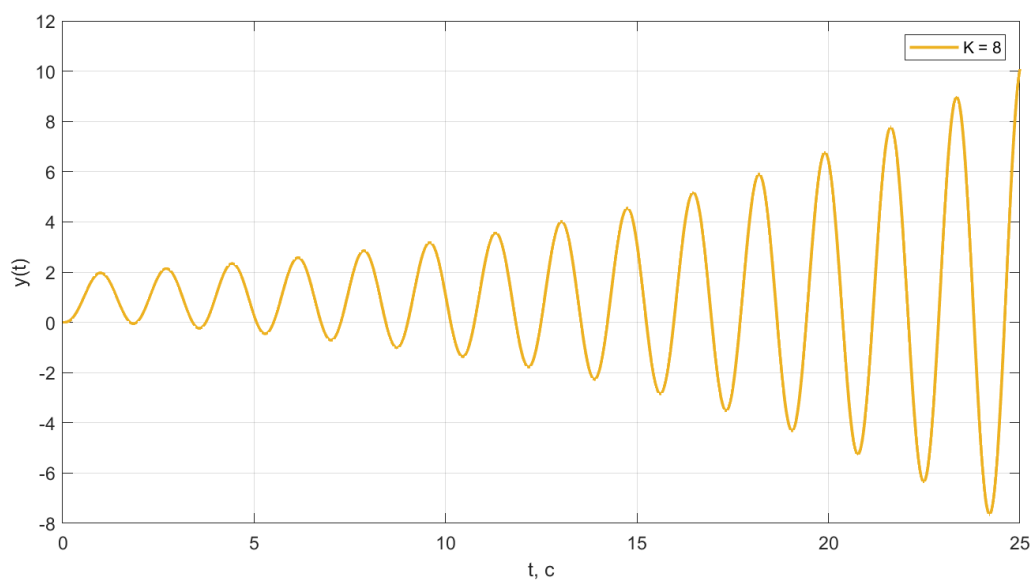


Рисунок 13: Моделирование неустойчивой системы ($K = 8$, $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_2 = \frac{1}{3}$)

Выводы по заданию 2.

В рамках второго задания удалось теснее поработать с аспектом анализа устойчивости системы. Успешно посчитал область устойчивости системы при изменении её внутренних компонент.

Задание 3. Автономный генератор

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ g = Cx, \\ x(0), \end{cases}$$

и зададим такие параметры A , C и $x(0)$, чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым сигналом

$$g_{\text{ж}}(t) = \cos(4t) + e^{6t} \cos(2t).$$

Все полученные матрицы и вектора не должны содержать комплексных чисел.

Для начала разложим желаемый сигнал на составляющие моды. Разобьем имеющийся сигнал на половинки:

$\cos(4t)$ — гармоническое колебание с частотой 4 рад/с

$e^{6t} \cos(2t)$ — нарастающее гармоническое колебание

Каждой из этих половин сигнала соответствует своя пара комплексных корней, особенно это очевидно если по формуле Эйлера преобразовать выражения в экспоненциальную форму

$$\begin{aligned} \cos(4t) &\rightarrow \frac{e^{j4t} + e^{-j4t}}{2} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4j \\ e^{6t} \cos(2t) &\rightarrow \frac{e^{6+24t} + e^{6-24t}}{2} \rightarrow \lambda_{3,4} = 6 \pm 2j \end{aligned}$$

Для построения вещественной матрицы A воспользуемся стандартной формой матрицы для $\alpha \pm j\beta$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Для первой половины ($\alpha = 0, \beta = 4$) получаем блок

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

а для второй половины ($\alpha = 6, \beta = 2$) — блок

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти блоки в блочно-диагональную матрицу, получаем матрицу состояния для нашего случая:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдём вектор начальных условий $x(0)$ и выходную матрицу C . Решение автономной системы имеет вид $x(t) = e^{At}x(0)$. Матричная экспонента схожа:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\sin(4t) & 0 & 0 \\ \sin(4t) & \cos(4t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \cos(2t) & -e^{6t} \sin(2t) \\ 0 & 0 & e^{6t} \sin(2t) & e^{6t} \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

Предположим что

$$x(0) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

а

$$C = [c_1, c_2, c_3, c_4]$$

Тогда выход системы:

$$g(t) = Ce^{At}x(0) = c_1(x_1 \cos 4t - x_2 \sin 4t) + c_2(x_1 \sin 4t + x_2 \cos 4t) + \\ + c_3(x_3 e^{6t} \cos 2t - x_4 e^{6t} \sin 2t) + c_4(x_3 e^{6t} \sin 2t + x_4 e^{6t} \cos 2t).$$

Сгруппируем:

$$\begin{aligned} \cos(4t) : & \quad c_1 x_1 + c_2 x_2, \\ \sin(4t) : & \quad -c_1 x_2 + c_2 x_1, \\ e^{6t} \cos(2t) : & \quad c_3 x_3 + c_4 x_4, \\ e^{6t} \sin(2t) : & \quad -c_3 x_4 + c_4 x_3. \end{aligned}$$

Нам нужно, чтобы $g(t) = \cos(4t) + e^{6t} \cos(2t)$. Потому составим следующую систему уравнений, для решения:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1, \\ -c_1 x_2 + c_2 x_1 = 0, \\ c_3 x_3 + c_4 x_4 = 1, \\ -c_3 x_4 + c_4 x_3 = 0. \end{cases}$$

Выберем простые значения, удовлетворяющие этой системе. Для первой пары положим $x_1 = 1, x_2 = 0$. Тогда из первых двух уравнений: $c_1 = 1, c_2 = 0$. Для второй пары $x_3 = 1, x_4 = 0$. Тогда из последних двух уравнений: $c_3 = 1, c_4 = 0$. Получаем:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

И вуаля - мы нашли все наши необходимые составляющие! Перейдем к более интересному.

Моделирование

Выполним моделирование системы с полученными матрицами A , C и начальными условиями $x(0)$. Также вместе с этим построим график ошибки $e(t) = g_{\text{ж}}(t) - g(t)$, чтобы оценить результат

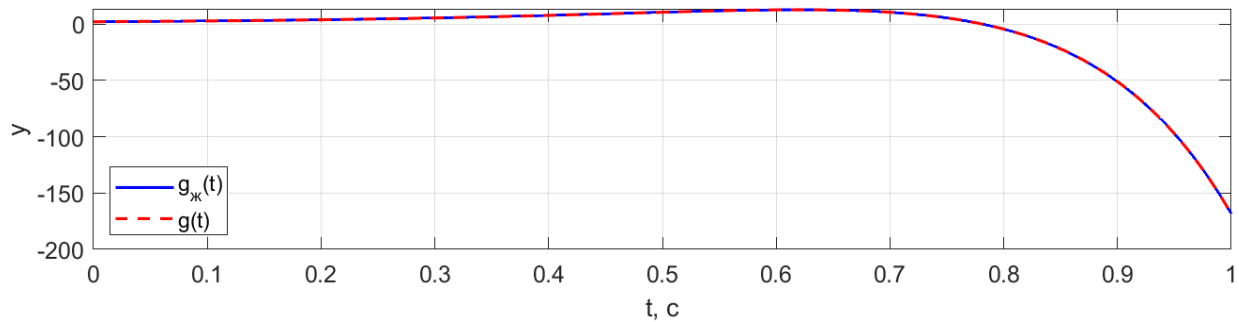


Рисунок 14: Графики сигналов $g_{\text{ж}}(t)$ и $g(t)$

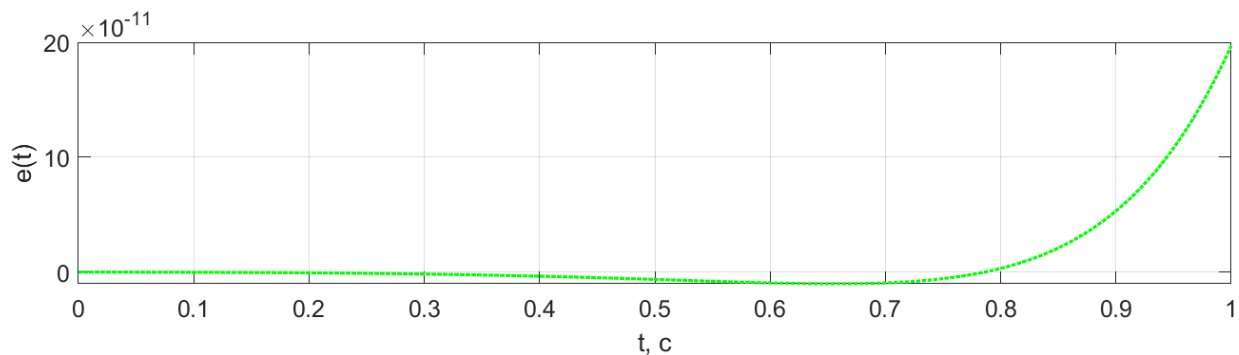


Рисунок 15: График ошибки $e(t) = g_{\text{ж}}(t) - g(t)$

Как видно из графиков, сигналы полностью совпадают, а ошибка численно очень мала, и думаю, что совершенно незначима, что подтверждает правильность выбранных параметров системы.

Подводя к выводам, вот итоговые параметры системы, что удалось вывести.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вывод по заданию 3: В третьем задании пришлось столкнуться с довольно неожиданным до этого аспектом работы в ЛСАУ, а именно с генерацией сигналов. И удалось успешно выполнить генерацию конкретно нужного сигнала с нулевой практической ошибкой (с микроскопической вычислительной ошибкой).

Выводы

В рамках второй лабораторной работы мне удалось довольно тесно изучить вопрос работы со свободным движением. Два главных аспекта это анализ устойчивости и генерация заданных сигналов. И если работа по анализу устойчивости была знакомой и ранее, то вот тема генерации сигнала была для меня в новинку.