Увод у теорију скупова

Наивна дефиниција: **Скуп** је колекција неких елемената.
Ако је A скуп, са $\underline{x \in A}$ записујемо да елемент x припада колекцији A; у супротном, пишемо $x \notin A$.
$[\neg\, x \in A]$

Како записујемо скупове?

- $\{2, 5, 6, 10\}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$, $\{2, 3, 4, \dots, 20\}$
- $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \le n \le 20\}$
- $\underset{\overset{\shortparallel}{(-1,1)}}{\{x \mid x^2 - 1 < 0\}}$, подразумевамо $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.
- $\underset{\overset{!!}{A}}{\{x \mid P(x)\}}$ – скуп свих елем. $x\,(\in \mathcal{U})$ који зад. $P(x)$.

$x \in A \equiv P(x)$ или $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow P(x)) = 1$

Раселов парадокс: $\mathcal{U}$: сви скупови

$P(x)$: $x \notin x$

$A = \{x \mid x \notin x\}$, тј. $x \in A \equiv x \notin x$

Сад, за $x = A$ добијамо: $A \in A \equiv A \notin A$ $\lightning$

Парадокс о берберину: Постоји село и у селу берберин који брије тачно све људе који сами себе не брију.
Да ли берберин брије сам себе?
Берберин брије сам себе акко сам себе не брије! $\lightning$

Скуп дефинишемо аксиоматски; Цермело-Френкелове аксиоме.

Дефиниција: Два скупа A и B су једнака ако имају исте елементе.

$x \in A \equiv x \in B$ или $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) = 1$.

Дефиниција: Постоји скуп који нема елементе. Такав скуп називамо **празан скуп** и обележавамо га са $\emptyset$.

коментар: • Ако је A скуп без елемената, то значи:

$$(\forall x)\ x \notin A = 1. \quad [\text{или} \quad x \in A \equiv \bot]$$

• Скуп који нема елементе је јединствен.
Нека су A и B скупови без елемената. Тада имамо:

$$x \in A \equiv \bot \equiv x \in B, \quad \text{па} \quad A = B.$$

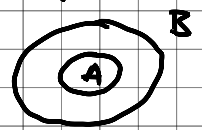
• $$(\exists x \in \emptyset)\ P(x) \equiv (\exists x)\underbrace{(\underbrace{x \in \emptyset}_{0} \wedge P(x))}_{0} = 0$$

$$(\forall x \in \emptyset)\ P(x) \equiv (\forall x)\underbrace{(\underbrace{x \in \emptyset}_{0} \to P(x))}_{1} = 1$$

Дефиниција: Нека су A и B скупови. A је **подскуп** од B, $A \subseteq B$, ако је сваки ел. од A уједно и елемент од B.

$A \subseteq B$ значи $(\forall x)(x \in A \to x \in B) = 1$ или

$$x \in A \to x \in B \equiv \top$$



Основне особине: • $\emptyset \subseteq A$, за сваки скуп A

$$\underbrace{\underbrace{x \in \emptyset}_{0} \to x \in A}_{1} \equiv \top$$

• $A \subseteq A$, за сваки скуп A

јер $\quad x \in A \to x \in A \equiv \top$.

• $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \equiv A = B$

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$: $\quad x \in A \to x \in B \equiv \top \quad \wedge \quad x \in B \to x \in A \equiv \top$

$$(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A) \equiv \top$$

$$x \in A \leftrightarrow x \in B \equiv \top$$

$$x \in A \equiv x \in B \quad : \quad A = B$$

• $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$:

$A \subseteq B \wedge B \subseteq C$: $x\in A \to x \in B \equiv T \quad \wedge \quad x \in B \to x \in C \equiv T$

Шта је са $x\in A \to x\in C$?

Ако $x \in A$, због $x\in A \to x\in B = 1$ имамо $x \in B = 1$.

Даље, због $x \in B \to x\in C = 1$ имамо $x \in C = 1$.

Дакле, $x\in A \to x \in C = 1 \to 1 = 1$

Ако $x \notin A$, $x \in A \to x\in C = 0 \to$ нешто $= 1$

Према томе, $x\in A \to x \in C \equiv T$, тј. $A \subseteq C$.

<u>Дефиниција</u>: <u>Партитивни скуп</u> скупа A је скуп свих подскупова од A, у ознаци $P(A)$.

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}, \qquad X \in P(A) \equiv X \subseteq A$$

<u>Пример</u>: $P(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$!

$$X \in P(\emptyset) \equiv X \subseteq \emptyset$$

- $X = \emptyset$, тада $\emptyset \subseteq \emptyset$, па $\emptyset \in P(\emptyset)$.
- $X \neq \emptyset$, тада постоји $t \in X$

због t

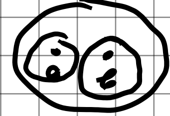
$t \in X \to t \in \emptyset = 1 \to 0 = 0$, па $x \in X \to x \in \emptyset \not\equiv T$

тј. $X \not\subseteq \emptyset$.

тј. $X \notin P(\emptyset)$.

- $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$



- Ако $|A| = n$, онда $|P(A)| = 2^n$.

<u>Дефиниција</u>: Нека су A и B скупови.

- <u>Унија</u> скупова A и B је скуп:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B$$

- <u>Пресек</u> скупова A и B је скуп:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B$$

• <u>Разлика</u> скупова A и B је скуп

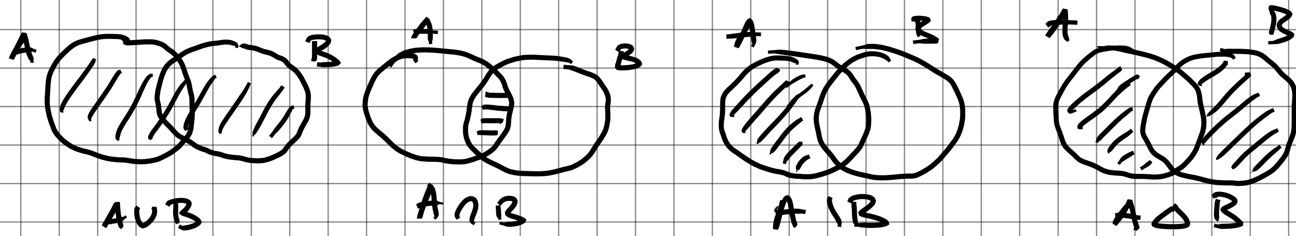
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \equiv x \in A \wedge x \notin B$$

• <u>Симетрична разлика</u> скупова A и B је скуп

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}$$

$$x \in A \triangle B \equiv x \in A \veebar x \in B$$



<u>Основне особине</u>:

• $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \triangle B = B \triangle A$, $A \setminus B \neq B \setminus A$

• $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\equiv x \in A \vee x \in B \cup C \\ &\equiv x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\equiv (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\equiv x \in A \cup B \vee x \in C \\ &\equiv x \in (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,

$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$, али $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \setminus A = \emptyset$, $A \triangle A = \emptyset$ (заправо $A \triangle B = \emptyset$ акко $A = B$)

$A \subseteq B$ акко $A \cup B = B$ акко $A \cap B = A$ акко $A \setminus B = \emptyset$.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\left.\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}\right\} \text{Де Морганови закони}$$

Дефиниција: **Комплемент** скупа A је скуп(!)

$$A^c = \{x \mid x \notin A\} \qquad \boxed{A^c = \mathcal{U} \setminus A}$$

$$x \in A^c \equiv x \notin A$$

(комплемент узимамо унутар унив. дисц.)

$$\left.\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}\right\} \text{ Де Морганови закони}$$

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\equiv x \notin A \cap B \\ &\equiv \neg\, x \in A \cap B \\ &\equiv \neg\,(x \in A \wedge x \in B) \\ &\equiv \neg\, x \in A \vee \neg\, x \in B \\ &\equiv x \notin A \vee x \notin B \\ &\equiv x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\equiv x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Дефиниција: **Фамилија скупова** је скуп чији су елементи такође скупови (нпр. $P(A)$)

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија скупова.

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid (\exists A \in \mathcal{F})\, x \in A\} \qquad x \in \bigcup \mathcal{F} \equiv (\exists A \in \mathcal{F})\, x \in A$$

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid (\forall A \in \mathcal{F})\, x \in A\} \qquad x \in \bigcap \mathcal{F} \equiv (\forall A \in \mathcal{F})\, x \in A$$

пример:

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B$$

$$\bigcap \{A, B\} = A \cap B$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset \; : \; x \in \bigcup \emptyset \equiv \underbrace{(\exists A \in \emptyset)\, x \in A}_{0}$$

$$\bigcap \emptyset = \mathcal{U} \; : \; x \in \bigcap \emptyset \equiv \underbrace{(\forall A \in \emptyset)\, x \in A}_{1}$$

Дефиниција: **Индексирана фамилија** скупова је фамилија скупа $\mathcal{F}$ облика: $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$

i индекс, I индексни скуп

пример: $A_r = (r, +\infty)$, $\{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ = фамилија десних интервала

Нека е $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$.

$$\bigcap \mathcal{F} =: \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \bigcup \mathcal{F} =: \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)\ x \in A_i\}; \qquad x \in \bigcup_{i\in I} A_i \equiv (\exists i\in I)\ x \in A_i$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)\ x \in A_i\}; \qquad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \equiv (\forall i\in I)\ x \in A_i$$

Особено:
$$A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} A \cap B_i$$

$$(*) \quad A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} A \cup B_i \quad //$$

$(*)$:
$$\begin{aligned}
x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i &\equiv x \in A \lor x \in \bigcap_{i\in I} B_i \\
&\equiv x \in A \lor (\forall i \in I)\ x \in B_i \\
&\equiv x\in A \lor (\forall i)(i \in I \to x \in B_i) \\
&\equiv (\forall i)\,[x \in A \lor (i \in I \to x \in B_i)] \\
&\equiv (\forall i)\,[x \in A \lor \neg\, i \in I \lor x \in B_i] \\
&\equiv (\forall i)\,[\neg\, i \in I \lor x \in A \lor x \in B_i] \\
&\equiv (\forall i)\,[i \in I \to x \in A \lor x \in B_i] \\
&\equiv (\forall i \in I)\,(x \in A \lor x \in B_i) \\
&\equiv (\forall i \in I)\ x \in A \cup B_i \\
&\equiv x \in \bigcap_{i\in I} A \cup B_i . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_i \cap B_j =: \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_i \cap B_j$$
$$= \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_i \cap B_j$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_i \cup B_j =: \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_i \cup B_j$$
$$= \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_i \cup B_j$$

пример: $\{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}} (a, +\infty) = \mathbb{R} \qquad \bigcap_{a\in\mathbb{R}} (a,+\infty) = \varnothing$$

Уређени пар

Дефиниција: **Уређени пар** елемената a и b је објекат (a, b) који задовољава следећу особину:

$$(a,b) = (c,d) \quad \text{акко} \quad a=c \text{ и } b=d.$$

Нејзва дефиниција: $(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$

* проверити да овако дефинисан (a,b) задовољава тражену особину.