пример: Свако у дому има дилера кога не воли.

$D(x)$: особа x је у дому $\qquad (\forall x y)\,(D(x) \wedge C(x,y) \rightarrow D(y))$

$C(x,y)$: x и y су дилери

$V(x,y)$: x воли y

$$(\forall x)\,[D(x) \rightarrow (\exists y)\,(C(x,y) \wedge \neg V(x,y))]$$

ОГРАНИЧЕНИ КВАНТИФИКАТОРИ

$P(x)$, $\mathcal{U}$ - унив. дискурса, $A \subseteq \mathcal{U}$.

* За свако $x \in A$ важи $P(x)$.

$$(\forall x \in A)\, P(x) \;:\equiv\; (\forall x)\,(x \in A \rightarrow P(x))$$

* За неко $x \in A$ важи $P(x)$.

(Постоји $x \in A$ тд важи $P(x)$.)

$$(\exists x \in A)\, P(x) \;:\equiv\; (\exists x)\,(x \in A \wedge P(x))$$

пример: Нека је (a_n) низ реалних бројева и $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ акко $\underline{(\forall \varepsilon > 0)}\,\underline{(\exists n_0 \in \mathbb{N})}\,\underline{(\forall n > n_0)}\; |a_n - a| < \varepsilon$.

Унив. дискурса је $\mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$

$\forall n > n_0 \quad \longleftrightarrow \quad \forall n \in (n_0, +\infty) \cap \mathbb{N}$

$$(\forall \varepsilon)\Big[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists n_0)\Big(n_0 \in \mathbb{N} \wedge (\forall n)\Big(n > n_0 \wedge n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\Big)\Big)\Big]$$

КВАНТИФИКАТОР $\exists_1$ ($\exists!$)

* Постоји тачно једно $x \in \mathcal{U}$ тд важи $P(x)$.

(Постоји јединствено $x \in \mathcal{U}$ тд важи $P(x)$.)

$(\exists_1 x)\, P(x) \qquad [\,(\exists! x)\, P(x)\,]$

Постоји x тд важи $P(x)$ и за свако друго y важи $\neg P(y)$ (не важи $P(y)$).

$$(\exists_1 x)\, P(x) \equiv (\exists x)\,[P(x) \wedge \underbrace{(\forall y \neq x)}_{\forall y \in \mathcal{U} \setminus \{x\}} \neg P(y)]$$

$$:\equiv (\exists x)\,[P(x) \wedge (\forall y)\,(y \neq x \rightarrow \neg P(y))]$$

ЗАКОНИ СА КВАНТИФИКАТОРИМА

$(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$ $\qquad$ $(\exists x)P(x) \equiv (\exists y)P(y)$

$$\left.\begin{array}{l} (*)\ \neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x) \\ \neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x) \end{array}\right\}$$ Де Морганови закони за квантификаторе.

(*) Треба да докажемо да су лева и десна страна исте тачности.

1° Нека је $\neg(\forall x)P(x) = 1$ (тачно)

<u>Циљ:</u> $(\exists x)\neg P(x) = 1$.

Из $\neg(\forall x)P(x) = 1$ имамо $(\forall x)P(x) = 0$.

Тада имамо $a \in U$ тд $P(a) = 0$; тада $\neg P(a) = 1$.

Из $\neg P(a) = 1$ добијамо $(\exists x)\neg P(x) = 1$.

2° Нека је $(\exists x)\neg P(x) = 1$.

<u>Циљ:</u> $\neg(\forall x)P(x) = 1$.

Из $(\exists x)\neg P(x) = 1$ имамо $a \in U$ тд $\neg P(a) = 1$, тј. $P(a) = 0$. Тада $(\forall x)P(x) = 0$, тј. $\neg(\forall x)P(x) = 1$. $\square$

$$\left.\begin{array}{l} (*)\ \neg(\forall x \in A)P(x) \equiv (\exists x \in A)\neg P(x) \\ \neg(\exists x \in A)P(x) \equiv (\forall x \in A)\neg P(x) \end{array}\right\}$$ Де Морганови закони за огр. квант.

(*)
$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in A)P(x) &\equiv \neg(\forall x)(x \in A \to P(x)) \\ &\equiv (\exists x)\neg(x \in A \to P(x)) \\ &\equiv (\exists x)\neg\neg(x \in A \wedge \neg P(x)) \\ &\equiv (\exists x)(x \in A \wedge \neg P(x)) \\ &\equiv (\exists x \in A)\neg P(x). \quad \square \end{aligned}$$

$P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

$(\forall x)P(x) \equiv \neg(\exists x)\neg P(x)$ $\qquad$ $(\exists x)P(x) \equiv \neg(\forall x)\neg P(x)$

$$\left.\begin{array}{l} (\exists x)(\exists y)P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x,y) \\ (*)(\forall x)(\forall y)P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x,y) \end{array}\right\}$$ ком. егз. и унив. квантификатора

(*) 1° Нека је $(\forall x)(\forall y)\, P(x,y) = 0$

циљ: $(\forall y)(\forall x)\, P(x,y) = 0$

Уочимо $(\forall x)\underbrace{(\forall y)\, P(x,y)}_{=:Q(x)} = 0$, тј. $(\forall x)\, Q(x) = 0$

Тада можемо да нађемо $a \in \mathcal{U}$ тд $Q(a)=0$, тј. $(\forall y)\, P(a,y) = 0$. Аналогно, имамо $b \in \mathcal{U}$ тд $P(a,b)=0$.

Шта је са фрмл. $(\forall x)\, P(x,b)$? $(\forall x)\, P(x,b)=0$ јер $P(a,b)=0$.

Шта је са фрмл. $(\forall y)\underbrace{(\forall x)\, P(x,y)}_{=:R(y)}$? Имамо $R(b)=0$, па $(\forall y)\, R(y)=0$. Другим речима, $(\forall y)(\forall x)\, P(x,y)=0$.

2° Нека је $(\forall y)(\forall x)\, P(x,y)=0$.

циљ: $(\forall x)(\forall y)\, P(x,y)=0$. Симетрично као 1°. $\square$

Скраћени запис: $(\forall xy)\, P(x,y) :\equiv (\forall x)(\forall y)\, P(x,y)$

$$(\equiv (\forall y)(\forall x)\, P(x,y))$$

$(\exists xy)\, P(x,y) :\equiv (\exists x)(\exists y)\, P(x,y)$

$$(\equiv (\exists y)(\exists x)\, P(x,y))$$

$$(\exists x)(\forall y)\, P(x,y) \not\equiv (\forall y)(\exists x)\, P(x,y)$$

приоритет квантификатора: $\exists$ и $\forall$ имају исти приор. као $\neg$ (највиши)

тврђење: $(\exists x)(\forall y)\, P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)\, P(x,y) \equiv \top$.

доказ: претпоставимо $(\exists x)(\forall y)\, P(x,y) = 1$

циљ: $(\forall y)(\exists x)\, P(x,y) = 1$.

Посматрајмо $(\exists x)\underbrace{(\forall y)\, P(x,y)}_{=:Q(x)} = 1$, тј. $(\exists x)\, Q(x) = 1$.

Нека је $a \in \mathcal{U}$ тд $Q(a)=1$, тј. $(\forall y)\, P(a,y) = 1.^{(*)}$

(ппс) $(\forall y)\underbrace{(\exists x)\, P(x,y)}_{=:R(y)} = 0$, тј. $(\forall y)\, R(y) = 0$.

Постоји ел. $b \in U$ тд $R(b)=0$, тј: $(\exists x) P(x,b) = 0$. (#)

Из (*), тј: из $(\forall y) P(a,y) = 1$ имамо да за све $y \in U$ важи $P(a,y)=1$; специјално, за $y = b$ имамо $P(a,b) = 1$.

Шта је $(\exists x) P(x,b)$? $(\exists x) P(x,b) = 1$, јер $P(a,b) = 1$. ↯

Дакле, $(\forall y)(\exists x) P(x,y) = 1$. $\boxed{\checkmark}$

ПРИМЕР: $(\forall y)(\exists x) P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\forall y) P(x,y) \not\equiv \top$.

Унив. диск. је $\mathbb{R}$.

$P(x,y) : x < y$.

$(\forall y)(\exists x)\, x<y$: За сваки реалан број y постоји реалан број x тд $x<y$.

$(\forall y)(\exists x)\, x<y = 1$.

$(\exists x)(\forall y)\, x<y$: Постоји реалан број x који је мањи од свих реалних бројева.

$(\exists x)(\forall y)\, x<y = 0$.

$(\forall y)(\exists x)\, x<y \rightarrow (\exists x)(\forall y)\, x<y = 1 \rightarrow 0 = 0$ $\boxed{\checkmark}$

$(\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

(*) $(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

(*) 1° Нека је $(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) = 0$ (#)

Циљ: $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = 0$

Из (#) $(\forall x) P(x) = 0$ или $(\forall x) Q(x) = 0$

1.1° $(\forall x) P(x) = 0$: Постоји $a \in U$ тд $P(a) = 0$.

Тада $P(a) \wedge Q(a) = 0 \wedge \text{нешто} = 0$

па је $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = 0$.

1.2° $(\forall x) Q(x) = 0$: слично.

У сваком случају $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = 0$.

2° Нека је $(\forall x)(P(x) \land Q(x)) = 0$ ($)

Циљ: $(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x) = 0$.

из ($) имамо неко $a \in U$ тд $P(a) \land Q(a) = 0$.

Тада $P(a) = 0$ или $Q(a) = 0$.

2.1° $\underline{P(a) = 0}$: Тада $(\forall x)P(x) = 0$, па

$(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x) = 0 \land$ нешто $= 0$

2.2° $\underline{Q(a) = 0}$: слично.

У сваком случају $(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x) = 0$. ☑

$$\begin{cases} (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \not\equiv (\exists x)(P(x) \land Q(x)) \\ (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \not\equiv (\forall x)(P(x) \lor Q(x)) \end{cases}$$

$(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \to (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \equiv \top$

(*) $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \lor Q(x)) \equiv \top$

Обратне импликације не важе.

(*) Нека $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) = 1$ (#)

Циљ: $(\forall x)(P(x) \lor Q(x)) = 1$.

из (#) $(\forall x)P(x) = 1$ или $(\forall x)Q(x) = 1$.

1° $\underline{(\forall x)P(x) = 1}$:

(пнс) $(\forall x)(P(x) \lor Q(x)) = 0$. Тада имамо $a \in U$

тд $P(a) \lor Q(a) = 0$. След. $P(a) = 0$.

Тада $(\forall x)P(x) = 0$. ↯

Дакле, мора бити $(\forall x)(P(x) \lor Q(x)) = 1$.

2° $\underline{(\forall x)Q(x) = 1}$: слично.

У сваком случају $(\forall x)(P(x) \lor Q(x)) = \underline{1}$. ☑

Пример: Унив. диск. $\mathbb{N}$.

$P(x)$: x је паран.

$Q(x)$: x је непаран.

$(\forall x)P(x)$: Сваки природан број је паран.

$(\forall x)P(x) = 0$

$(\forall x)Q(x)$: Сваки природан број је непаран.

$(\forall x)Q(x) = 0$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$: Сваки пр. број је паран или непаран.

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) = 1.$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = 1 \to 0 \vee 0 = 1 \to 0 = 0$

Дакле, $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \not\equiv \top.$

(*) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\exists xy)(P(x) \wedge Q(y))$

(*) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \equiv (\forall xy)(P(x) \vee Q(y))$

(*) 1° Нека $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = 0$

циљ: $(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = 0$

Имамо $(\forall x)P(x) = 0$ и $(\forall x)Q(x) = 0.$

Из $(\forall x)P(x) = 0$ имамо $a \in U$ $P(a) = 0.$

Из $(\forall x)Q(x) = 0$ имамо $b \in U$ $Q(b) = 0.$

Тада $P(a) \vee Q(b) = 0 \vee 0 = 0$

па $(\forall y)(P(a) \vee Q(y)) = 0$ због b-а

и $(\forall x)\underbrace{(\forall y)(P(x) \vee Q(y))} = 0$ због a.

2° Нека $(\forall x)\underbrace{(\forall y)(P(x) \vee Q(y))} = 0$

циљ: $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = 0.$

Имамо $a \in U$ тд $(\forall y)(P(a) \vee Q(y)) = 0$

имамо $b \in U$ тд $P(a) \vee Q(b) = 0$

Тада $P(a) = 0$ и $Q(b) = 0.$

Из $P(a) = 0$ добијамо $(\forall x)P(x) = 0.$

Из $Q(b) = 0$ добијамо $(\forall x)Q(x) = 0.$

Дакле, $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = 0 \vee 0 = 0$ $\boxtimes$

(#) $\neg\big((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)\big) \equiv \neg(\exists x)P(x) \vee \neg(\exists x)Q(x)$

$$\equiv (\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)\neg Q(x)$$

$$\equiv (\forall x)(\forall y)\big(\neg P(x) \vee \neg Q(y)\big)$$

$$\equiv (\forall x)(\forall y)\neg\big(P(x) \wedge Q(y)\big)$$

$$\equiv (\forall x)\neg(\exists y)\big(P(x) \wedge Q(y)\big)$$

$$\equiv \neg(\exists x)(\exists y)\big(P(x) \wedge Q(y)\big)$$

ña $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(\exists y)\big(P(x) \wedge Q(y)\big)$ ∎