Uvod u organizaciju i arhitekturu računara 1

Stefan Mišković

2020/2021.

2 Zapis označenih brojeva u računaru

2.1 Neoznačeni i označeni brojevi

Ukoliko se za zapis broja ne uzima u obzir njegov znak, broj nazivamo neoznačenim. Nasuprot tome, ukoliko se za zapis znak uzima u obzir, broj je označen. Na primer, dekadni brojevi 425 i 12345 su neoznačeni, a brojevi +425, −12345 i 2267 su označeni. Iako je pozitivan znak izostavljen, u kontekstu označenih brojeva, broj 2267 se smatra pozitivnim brojem, a znak + se podrazumeva.

Neoznačeni celi brojevi u proizvoljnoj osnovi se u računaru zapisuju kao pri njihovom standardnom zapisu. Neka je $(x)_n = x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$ proizvoljan broj u osnovi n, zapisan u računaru kao neoznačen ceo broj sa k cifara. Kako za svaku cifru imamo n mogućnosti za zapis (svaka cifra može uzeti neku od vrednosti $0, 1, \dots, n-1$), ukupan broj različitih brojeva koji može da se zapiše na ovaj način je n^k. Specijalno, ako je $n = 2$, taj broj iznosi 2^k, a interval u kome se brojevi mogu napisati na ovaj način je $[0, 2^k - 1]$. Ako je $(x)_2 = x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$ neoznačen binarni broj sa k cifara, njegova dekadna vrednost se može dobiti standardnim prevođenjem iz binarnog u dekadni sistem i iznosi

$$2^0x_0 + 2^1x_1 + \cdots + 2^{k-1}x_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i x_i.$$

Nasuprot neoznačenim brojeva, kod označenih brojeva, pored samog broja, treba voditi računa o znaku. Na jedan način treba zapisivati pozitivne, a na drugi negativne brojeve. U računaru bi znakovi + i − trebalo takođe da budu predstavljeni brojevima. Zbog toga se izdvaja mesto za dodatnu cifru. U zavisnosti od toga na koji način se celi brojevi zapisuju u računaru kao označeni brojevi, razlikujemo sledeća četiri zapisa:

- znak i apsolutna vrednost,
- neptpuni komplement,
- potpuni komplement,
- višak k.

Za svaki od ovih zapisa će biti posebno reči u nastavku. Svi razmatrani brojevi će biti celi brojevi čija je osnova ceo broj n takav da je $n \geq 2$. Biće razmotrene i osnovne operacije u tim zapisima, među kojima su:

- konverzija između zapisa različitih dužina,

- promena znaka,
- sabiranje,
- oduzimanje.

Pri računskim operacijama, razmatraćemo samo binarne brojeve, a opisani postupci se mogu uopštiti i na proizvoljnu osnovu n.

2.2 Znak i apsolutna vrednost

Neka je dat proizvoljan pozitivan broj $(x)_n = x_{k-2}\dots x_1x_0$ u osnovi n sa $(k-1)$-om cifrom. On se sa k cifara u zapisu znak i apsolutna vrednost piše kao $0x_{k-2}\dots x_1x_0$. Drugim rečima, pozitivni brojevi se u ovom zapisu pišu tako što im se na mesto najveće težine doda cifra 0 za znak, a apsolutna vrednost broja se dopiše u nastavku. Neka je sa $n' = n-1$ označena najveća cifra sistema sa osnovom n. Negativan broj $(x)_n = -x_{k-2}\dots x_1x_0$ se u zapisu znak i apsolutna vrednost piše kao $n'x_{k-2}\dots x_1x_0$. Drugim rečima, cifra najveće težine koja označava negativan znak broja je najveća cifra sistema, a nakon nje se dopisuje apsolutna vrednost broja. Tako se, na primer, dekadni broj 345 zapisuje kao 0345, a dekadni broj -345 kao 9345. Heksadekadni broj 6577A bi se zapisivao kao 06577A, a njegova negativna varijanta $-6577A$ ima zapis F6577A, budući da je F najveća cifra heksadekadnog sistema. Uopšte uzev, ceo broj $(x)_n = \pm x_{k-2}\dots x_1x_0$ se u zapisu znak i apsolutna vrednost zapisuje u obliku $x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$, gde je $x_{k-1} = 0$ ako je broj pozitivan, a $x_{k-1} = n'$, ako je broj negativan.

Ako ceo broj ima $k-1$ cifru, najmanji broj cifara na koji može biti zapisan u ovom zapisu iznosi k, budući da je potrebna jedna cifra za zapis znaka. Isti broj može biti zapisan i na više mesta od k, samo je potrebno odgovarajuća cifarska mesta između cifre za znak i apsolutne vrednosti dopuniti nulama. Tako bi se taj broj pisao u obliku $x_{k-1}0\dots 0x_{k-2}\dots x_1x_0$, gde je između cifre za znak x_{k-1} i apsolutne vrednosti broja $x_{k-2}\dots x_1x_0$ dopisan odgovarajući broj nula. Tako se, na primer, dekadni broj 345 može napisati na 6 mesta u obliku 000345, a dekadni broj -345 na 6 mesta kao 900345.

Jedna od osnovnih mana ovog zapisa je dvoznačan zapis nule, što otežava izvođenje računskih operacija. Na primer, u dekadnom sistemu na tri mesta nula se može zapisati kao 000 ili 900, a u binarnom sistemu na četiri mesta, nula se može zapisati kao 0000 ili 1000. Dodatno, ostale računske operacije su nešto komplikovanije, jer posebno treba razmatrati cifru za znak.

Pretpostavimo u nastavku da je $n = 2$, odnosno da je reč o binarnim brojevima. Tada je cifra za znak $x_{k-1} = 0$ za pozitivne, a $x_{k-1} = 1$ za negativne brojeve. Ako je sa $x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$ zapisan pozitivan broj u znaku i apsolutnoj vrednosti, njegova vrednost je $\sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i$, a ako je zapisan negativan, vrednost je $-\sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i$. U opštem slučaju, dekadna vrednost se može dobiti na osnovu zapisa broja prema formuli

$$(-1)^{x_{k-1}} \sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i.$$

U binarnom sistemu, interval brojeva koji se mogu zapisati u znaku i apsolutnoj vrednosti na k mesta iznosi $[-2^{k-1}+1, 2^{k-1}-1]$. Promena znaka je jednostavna, budući da pritom apsolutna vrednost ostaje ista, potrebno je samo promeniti cifru za znak. Ako se vrši prelazak iz pozitivnog u negativan broj, potrebno je cifru 0 promeniti u 1, i obratno. Ako je ceo broj sa k cifara potrebno zapisati kao ceo broj sa l cifara u znaku i apsolutnoj vrednosti, potrebno je dopuniti ili, ukoliko je to moguće, izbaciti odgovarajući broj 0. Ako je $k < l$, broj se jednostavno može proširiti sa $l - k$ nula između cifre za znak i ostalih cifara. Ako je $k > l$, potrebno je oduzeti $k - l$ nula između cifre za znak i ostalih cifara, ukoliko je to moguće.

U sledećoj tabeli su dati primeri zapisa nekih celih brojeva u znaku i apsolutnoj vrednosti u raznim osnovama:

Ceo broj	Zapis sa 3 cifre	Zapis sa 4 cifre	Zapis sa 6 cifara
$(345)_{10}$	Ne može da se zapiše	$(0345)_{10}^{4}$	$(000345)_{10}^{6}$
$(-110)_2$	Ne može da se zapiše	$(1110)_2^4$	$(100110)_2^6$
$(-E3)_{16}$	$(FE3)_{16}^{3}$	$(F0E3)_{16}^{4}$	$(F000E3)_{16}^{6}$

Sabiranje i oduzimanje u znaku i apsolutnoj vrednosti. Sabiranje binarnih brojeva zapisanih u znaku i apsolutnoj vrednosti je slično sabiranju običnih binarnih brojeva, s tim što ovde treba voditi računa o znaku. Razlikujemo sledeće slučajeve:

- Ukoliko se sabiraju dva pozitivna broja, znak rezultata je pozitivan, a apsolutna vrednost rezultata je jednaka zbiru apsolutnih vrednosti sabiraka. Na primer, pri sabiranju $(0001101)_2^7$ i $(0010011)_2^7$, rezultat je pozitivan. Sabiranjem apsolutnih vrednosti u binarnoj osnovi se dobija

```
  001101
+ 010011
--------
  100000
```

  Rešenje je $(0100000)_2^7$.

- Ukoliko se sabiraju dva negativna broja, znak rezultata je negativan, a apsolutna vrednost rezultata je jednaka zbiru apsolutnih vrednosti sabiraka. Na primer, pri sabiranju $(1001101)_2^7$ i $(1010011)_2^7$, rezultat je negativan. Sabiranjem u apsolutnih vrednosti u binarnoj osnovi se dobija

```
  001101
+ 010011
--------
  100000
```

  Rešenje je $(1100000)_2^7$.

- Ukoliko se sabiraju dva broja različitog znaka, znak rezultata je jednak znaku rezultata koji ima veću apsolutnu vrednost. Apsolutna vrednost rezultata se dobija oduzimanjem apsolutnih vrednosti brojeva, pri čemu se oduzima manja apsolutna vrednost od veće. Na primer, kod sabiranja brojeva $(10011)_2^5$ i $(01000)_2^5$, rezultat je pozitivan, a apsolutna vrednost rezultata je

```
  1000
- 0011
------
  0101
```

Rešenje je $(00101)^5_2$.

Oduzimanje se svodi na sabiranje, pri čemu se vrši promena znaka umanjiocu. Ako su x i y dva broja zapisana u znaku i apsolutnoj vrednosti, važi da je $x - y = x + y'$, gde je y' broj koji se dobija promenom znaka broja y. Na taj način se i oduzimanje može svesti na jedan od pomenuta tri slučaja sabiranja.

Pri sabiranju dva broja istog znaka može doći do pojave da se rezultat ne može zapisati na isti broj cifara kao sabirci. Tada dolazi do prekoračenja. Na primer, pri sabiranju dva pozitivan broja 0100 i 0111 (ili dva negativna broja 1100 i 1111), rezultat ne može biti zapisan na četiri cifre, već na pet. Tada dolazi do prekoračenja, jer rezultat inače treba da bude zapisan na isti broj cifara kao sabirci. Primetimo da kod sabiranja dva broja različitog znaka (što se svodi na oduzimanje apsolutnih vrednosti) ne može doći do prekoračenja, jer rezultat uvek ostaje u odgovarajućem opsegu unutar kojeg brojevi mogu biti zapisani.

2.3 Nepotpuni komplement

Neka je dat proizvoljan pozitivan broj $(x)_n = x_{k-2} \dots x_1 x_0$ u osnovi n sa $(k-1)$-om cifrom. On se sa k cifara u nepotpunom komplementu piše kao $0x_{k-2} \dots x_1 x_0$, odnosno na isti način kao i u znaku i apsolutnoj vrednosti. Neka je sa $n' = n - 1$ označena najveća cifra sistema sa osnovom n i neka je $x'_i = n' - x_i$. Negativan broj $(x)_n = -x_{k-2} \dots x_1 x_0$ se u nepotpunom komplementu piše kao $n' x'_{k-2} \dots x'_1 x'_0$. Drugim rečima, cifra najveće težine koja označava negativan znak broja je najveća cifra sistema, a sve ostale cifre se dobijaju tako što se oduzmu od najveće cifre sistema (ovaj postupak se naziva komplementiranje). Tako se negativan broj može najpre napisati kao odgovarajući pozitivan, a u drugoj fazi se svaka cifra komplementira oduzimanjem od n'. Tako se, na primer, dekadni broj 345 zapisuje kao 0345, a dekadni broj -345 kao 9654. Heksadekadni broj 6577A bi se zapisivao kao 06577A, a njegova negativna varijanta $-6577A$ ima zapis F9A885.

Nepotpuni komplement pripada grupi zapisa koji koriste tzv. komplementacionu konstantu. Ideja komplementacione konstante je da se pozitivni brojevi zapisuju kao u znaku i apsolutnoj vrednosti, a negativni oduzimanjem od nje. U slučaju nepotpunog komplementa, za osnovu n i zapis od k cifara, komplementaciona konstanta iznosi $n^k - 1$. Na primer, za dekadne brojeve na 4 mesta vrednost joj je 9999, a za binarne brojeve na 6 mesta vrednost joj je 111111. Oduzimanje od komplementacione konstante se poklapa sa opisanim algoritmom za zapis negativnih brojeva u nepotpunom komplementu.

Ako ceo broj ima $k - 1$ cifru, najmanji broj cifara na koji može biti zapisan u ovom zapisu iznosi k, budući da je potrebna jedna cifra za zapis znaka. Isti broj može biti zapisan i na više mesta od k, samo je potrebno odgovarajuća mesta sleva dopuniti ciframa koje su jednake cifri za znak. Tako bi se taj broj pisao u obliku $x_{k-1} \dots x_{k-1} x_{k-2} \dots x_1 x_0$, gde je levo od cifre za znak x_{k-1} dopisan odgovarajući broj istih cifara. Tako se, na primer, dekadni broj 345 može napisati na 6 mesta u obliku 000345, a dekadni broj -345 na 6 mesta kao 999654.

Jedna od osnovnih mana ovog zapisa je dvoznačan zapis nule, što otežava izvođenje računskih operacija. Na primer, u dekadnom sistemu na tri mesta nula se može zapisati kao 000 ili 999, a u binarnom sistemu na četiri mesta, nula se može zapisati kao 0000 ili 1111. Ostale računske operacije se izvode nešto lakše nego u zapisu znak i apsolutna vrednost.

Pretpostavimo u nastavku da je $n = 2$, odnosno da je reč o binarnim brojevima. U binarnom sistemu, interval brojeva koji se mogu zapisati u nepotpunom komplementu na k mesta iznosi $[-2^{k-1}+1, 2^{k-1}-1]$.

Kod promene znaka, potrebno je izvršiti komplementiranje svake cifre, odnosno svaku cifru oduzeti od najveće cifre sistema, bez obzira da li se radi o prelasku iz pozitivnog u negativan broj ili obratno. Na primer, zapis negativnog broja $(9654)_{10}^4$ menjanjem znaka postaje $(0345)_{10}^4$, i obratno.

Ako je ceo broj sa k cifara potrebno zapisati kao ceo broj sa l cifara u nepotpunom komplementu, potrebno je dopuniti ili, ukoliko je to moguće, izbaciti odgovarajući broj istih cifara za znak sleva. Ako je $k < l$, broj se jednostavno može proširiti sa $l - k$ cifara sleva čija je vrednost jednaka ciframa za znak broja. Ako je $k > l$, potrebno je oduzeti $k - l$ cifara za znak sleva, ukoliko je to moguće.

U sledećoj tabeli su dati primeri zapisa nekih celih brojeva u nepotpunom komplementu u raznim osnovama:

Ceo broj	Zapis sa 3 cifre	Zapis sa 4 cifre	Zapis sa 6 cifara
$(345)_{10}$	Ne može da se zapiše	$(0345)_{10}^4$	$(000345)_{10}^6$
$(-110)_2$	Ne može da se zapiše	$(1001)_2^4$	$(111001)_2^6$
$(-E3)_{16}$	$(F1C)_{16}^3$	$(FF1C)_{16}^4$	$(FFFF1C)_{16}^6$

Sabiranje i oduzimanje u nepotpunom komplementu. Sabiranje u binarnom sistemu u nepotpunom komplementu se obavlja nešto jednostavnije nego u znaku i apsolutnoj vrednosti, budući da ne treba posebno voditi računa o znaku rezultata. Štaviše, cifre za znak se sabiraju ravnopravno kao i ostale cifre. Sabiranje se obavlja u dve faze. U prvoj fazi se vrši klasično sabiranje dva broja u binarnom sistemu, a u drugoj fazi se eventualni prenos na poziciji najveće težine dodaje na rezultat. Preciznije, pri sabiranju brojeva $x_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1x_0$ i $y_{k-1}y_{k-2}\ldots y_1y_0$, u prvoj fazi se dobija

$$\begin{array}{r} x_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1x_0 \\ +y_{k-1}y_{k-2}\ldots y_1y_0 \\ \hline z'_k z'_{k-1}z'_{k-2}\ldots z'_1z'_0 \end{array}$$

U drugoj fazi se poslednji prenos z'_k (koji može biti 0 ili 1) dodaje na vrednost $z'_{k-1}z'_{k-2}\ldots z'_1z'_0$, gde se dobija rezultat $z_{k-1}z_{k-2}\ldots z_1z_0$. Celokupan postupak sabiranja izgleda ovako:

$$\begin{array}{r} x_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1x_0 \\ +y_{k-1}y_{k-2}\ldots y_1y_0 \\ \hline z'_{k-1}z'_{k-2}\ldots z'_1z'_0 \\ + \qquad\qquad\quad z'_k \\ \hline z_{k-1}z_{k-2}\ldots z_1z_0 \end{array}$$

Na primer, pri sabiranju brojeva 00110 i 00111 u nepotpunom komplementu se u prvoj fazi dobija

```
  00110
+ 00111
-------
  01101
```

Kako je poslednji prenos 0, to je ujedno i rezultat i drugu fazu nije potrebno izvršavati. Pri sabiranju brojeva 11001 i 01110 se dobija

```
  11001
+ 01110
-------
1|00111
```

Prenos 1 je odvojen uspravnom crtom od ostatka. Kako je prenos 1, potrebno je izvršiti drugu fazu, radi dobijanja konačnog rezultata:

```
  00111
+     1
-------
  01000
```

Oduzimanje se svodi na sabiranje, pri čemu se vrši promena znaka umanjiocu na način kako se to i radi u nepotpunom komplementu. Ako su x i y dva broja zapisana u nepotpunom komplementu, važi da je $x - y = x + y'$, gde je y' broj koji se dobija promenom znaka broja y.

Pri sabiranju dva broja istog znaka može doći do pojave prekoračenja. Prekoračenje u nepotpunom komplementu se javlja kada se pri sabiranju dva broja istog znaka ne dobija rezultat tog znaka. Preciznije, prekoračenje se javlja ako zbir pozitivnih brojeva nije pozitivan ili ako zbir negativnih brojeva pri sabiranju nije negativan. Ovo znači da rezultat može biti drugog znaka ili da se dobija nekorektan zapis, što znači da prva cifra rezultata nije ni najmanja ni najveća cifra sistema (u binarnom sistemu će uvek rezultat svakako uvek biti pozitivan ili negativan). Prekoračenje se jedino može javiti kod sabiranja dva broja istog znaka, a nikad se ne javlja ako su sabirci različitog znaka.

Prekoračenje ne treba mešati sa prenosom na mestu cifre najveće težine. Nekada može doći do prekoračenja, a da nema prenosa, i obratno. Najpre treba izvršiti obe faze sabiranja, a onda razmotriti znak rezultata i time ustanoviti da li je ili nije došlo do prekoračenja.

Na primer, pri sabiranju brojeva 0100 i 0111 se dobija

```
  0100
+ 0111
------
  1011
```

Kako nema prenosa na cifri najveće težine, rezultat je 1011. Međutim, sabiranjem dva pozitivna broja se nije dobio pozitivan zbir, pa je došlo do prekoračenja. Nasuprot tome, kod sabiranja brojeva 10110 i 10111 u se u prvoj fazi dobija

```
  10110
+ 11111
-------
1|10101
```

U drugoj fazi, pri sabiranju se jedinicom sledi

```
  10101
+     1
-------
  10110
```

Sabiranjem dva negativna broja se dobio negativan rezultat, pa ovde ne dolazi do prekoračenja.

2.4 Potpuni komplement

Neka je dat proizvoljan pozitivan broj $(x)_n = x_{k-2} \ldots x_1 x_0$ u osnovi n sa $(k-1)$-om cifrom. On se sa k cifara u potpunom komplementu piše kao $0x_{k-2} \ldots x_1 x_0$, odnosno na isti način kao i u znaku i apsolutnoj vrednosti i nepotpunom komplementu. Neka je sa $n' = n - 1$ označena najveća cifra sistema sa osnovom n i neka je $x_i' = n' - x_i$. Negativan broj $(x)_n = -x_{k-2} \ldots x_1 x_0$ se u potpunom komplementu piše kao $n' x_{k-2}' \ldots x_1' x_0' + 1$. Drugim rečima, cifra najveće težine koja označava negativan znak broja je najveća cifra sistema, a sve ostale cifre se dobijaju tako što se oduzmu od najveće cifre sistema (ovaj postupak se naziva komplementiranje), a zatim se na dobijeni broj doda vrednost 1. Tako se negativan broj može najpre napisati kao odgovarajući pozitivan, zatim se u drugoj fazi svaka cifra komplementira oduzimanjem od n', a u trećoj fazi se vrši dodavanje cifre 1 na dobijeni broj. Na primer, u potpunom komplementu se dekadni broj 345 zapisuje kao 0345, a dekadni broj -345 kao 9655. Heksadekadni broj 6577A bi se zapisivao kao 06577A, a njegova negativna varijanta $-6577A$ ima zapis F9A886.

Potpuni komplement takođe pripada grupi zapisa koji koriste komplementacionu konstantu za zapis brojeva. Ideja komplementacione konstante i ovde je da se pozitivni brojevi zapisuju kao u znaku i apsolutnoj vrednosti, a negativni oduzimanjem od nje. U slučaju potpunog komplementa, za osnovu n i zapis od k cifara, komplementaciona konstanta iznosi n^k. Na primer, za dekadne brojeve na 4 mesta vrednost joj je 10000, a za binarne brojeve na 6 mesta vrednost joj je 1000000. Oduzimanje od takve komplementacione konstante se poklapa sa opisanim algoritmom za zapis negativnih brojeva u potpunom komplementu.

Ako ceo broj ima $k-1$ cifru, najmanji broj cifara na koji može biti zapisan u ovom zapisu iznosi k, budući da je potrebna jedna cifra za zapis znaka. Isti broj može biti zapisan i na više mesta od k, samo je potrebno odgovarajuća mesta sleva dopuniti ciframa koje su jednake cifri za znak. Tako bi se taj broj pisao u obliku $x_{k-1} \ldots x_{k-1} x_{k-2} \ldots x_1 x_0$, gde je levo od cifre znak x_{k-1} dopisan odgovarajući broj istih cifara. Tako se, na primer, dekadni broj 345 može napisati na 6 mesta u obliku 000345, a dekadni broj -345 na 6 mesta kao 999655.

Za razliku od znaka i apsolutne vrednosti i nepotpunog komplementa, ovde se nula piše na jedinstven način. Na primer, u dekadnom sistemu na tri mesta nula piše kao 000, a u binarnom sistemu na četiri mesta nula se piše kao 0000. Ovaj zapis označava i pozitivnu i negativnu nulu. Time su i računske operacije jednostavnije nego u prethodnim zapisima.

Pretpostavimo u nastavku da je $n = 2$, odnosno da je reč o binarnim brojevima. Tada je cifra za znak $x_{k-1} = 0$ za pozitivne, a $x_{k-1} = 1$ za negativne brojeve. Ako je sa $x_{k-1} x_{k-2} \ldots x_1 x_0$ zapisan pozitivan broj u potpunom komplementu, njegova vrednost je $\sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i$, a ako je zapisan negativan, vrednost je $-2^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i$. U opštem slučaju, dekadna vrednost se može dobiti na osnovu zapisa broja prema formuli

$$-2^{k-1} x_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i.$$

U binarnom sistemu, interval brojeva koji se mogu zapisati u potpunom komplementu na k mesta iznosi $[-2^{k-1}, 2^{k-1} - 1]$. Ovo je za jedan broj više nego u prethodna dva zapisa, budući da se 0 može zapisati na jedinstven način.

Kod promene znaka, potrebno je u prvoj fazi izvršiti komplementiranje svake cifre, odnosno svaku cifru oduzeti od najveće cifre sistema. U drugoj fazi se vrši dodavanje jedinice na dobijeni rezultat. Na primer, zapis negativnog broja $(9655)^4_{10}$ menjanjem znaka postaje $(0345)^4_{10}$, i obratno.

Ako je ceo broj sa k cifara potrebno zapisati kao ceo broj sa l cifara u potpunom komplementu, potrebno je dopuniti ili, ukoliko je to moguće, izbaciti odgovarajući broj istih cifara za znak sleva. Ako je $k < l$, broj se jednostavno može proširiti sa $l - k$ cifara sleva čija je vrednost jednaka ciframa za znak broja. Ako je $k > l$, potrebno je oduzeti $k - l$ cifara za znak sleva, ukoliko je to moguće.

Dokažimo da se u potpunom komplementu konverzijom u zapis veće dužine ne menja vrednost broja, tj. da je takva konverzija validna. Ako je pozitivan broj sa k cifara potrebno zapisati na l cifara ($l > k$), potrebno je dodati $l-k$ nula, pa se pritom očigledno vrednost broja ne menja. Ako je broj negativan, tada je prvi zapis oblika $1x_{k-2}\dots x_1x_0$, a drugi $1\dots 1x_{k-2}\dots x_1x_0$, pri čemu drugi zapis ima $l - k$ jedinica više. Kako su oba zapisa binarna i u potpunom komplementu, vrednost prvog broja je

$$\sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i - 2^{k-1},$$

a drugog

$$\sum_{i=0}^{k-2} 2^i x_i + 2^{k-1} + \dots + 2^{l-1} - 2^l.$$

Kako su prve sume u oba zapisa identične, a pritom važi identitet

$$-2^{k-1} = 2^{k-1} + \dots + 2^{l-1} - 2^l,$$

sledi da su vrednosti oba zapisa jednake.

U sledećoj tabeli su dati primeri zapisa nekih celih brojeva u potpunom komplementu u raznim osnovama:

Ceo broj	Zapis sa 3 cifre	Zapis sa 4 cifre	Zapis sa 6 cifara
$(345)_{10}$	Ne može da se zapiše	$(0345)^4_{10}$	$(000345)^6_{10}$
$(-110)_2$	Ne može da se zapiše	$(1010)^4_2$	$(111010)^6_2$
$(-E3)_{16}$	$(F1D)^3_{16}$	$(FF1D)^4_{16}$	$(FFFF1D)^6_{16}$

Sabiranje i oduzimanje u potpunom komplementu. Sabiranje u binarnom sistemu u potpunom komplementu se obavlja jednostavnije nego u znaku i apsolutnoj vrednosti i nepotpunom komplementu. Zbog toga su zapisi označenih brojeva, kao i odgovarajuće operacije, na današnjim računarima uglavnom implementirane u potpunom komplementu.

Sabiranje u potpunom komplementu se vrši kao klasično sabiranje dva broja u binarnom sistemu, a eventualni prenos se ignoriše. Preciznije, pri sabiranju $x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$ i $y_{k-1}y_{k-2}\dots y_1y_0$, se dobija

$$\begin{array}{r} x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0 \\ +y_{k-1}y_{k-2}\dots y_1y_0 \\ \hline z_kz_{k-1}z_{k-2}\dots z_1z_0 \end{array}$$

Rezultat je uvek $z_{k-1}z_{k-2}\dots z_1z_0$, bez obzira na vrednost poslednjeg prenosa z_k (on se briše). Na primer, pri sabiranju brojeva 00110 i 00111 u potpunom komplementu se dobija

```
  00110
+ 00111
-------
  01101
```

Pri sabiranju brojeva 11001 i 01110 se dobija

```
  11001
+ 01110
-------
  00111
```

Prenos 1 na poziciji najveće težine se ingoriše.

Oduzimanje se svodi na sabiranje, pri čemu se vrši promena znaka umanjiocu na način kako se to i radi u potpunom komplementu. Ako su x i y dva broja zapisana u potpunom komplementu, važi da je $x - y = x + y'$, gde je y' broj koji se dobija promenom znaka broja y.

Pri sabiranju dva broja istog znaka može doći do pojave prekoračenja. Prekoračenje u potpunom komplementu se javlja kada se pri sabiranju dva broja istog znaka ne dobija rezultat tog znaka. Preciznije, prekoračenje se javlja ako zbir pozitivnih brojeva nije pozitivan ili ako zbir negativnih brojeva pri sabiranju nije negativan. Ovo znači da rezultat može biti drugog znaka ili da se dobija nekorektan zapis, što znači da prva cifra rezultata nije ni najmanja ni najveća cifra sistema (u binarnom sistemu će uvek rezultat svakako uvek biti pozitivan ili negativan). Prekoračenje se jedino može javiti kod sabiranja dva broja istog znaka, a nikad se ne javlja ako su sabirci različitog znaka.

Prekoračenje ne treba mešati sa prenosom na mestu cifre najveće težine. Nekada može doći do prekoračenja, a da nema prenosa, i obratno. Najpre treba izvršiti sabiranje, a onda razmotriti znak rezultata i time ustanoviti da li je ili nije došlo do prekoračenja.

Na primer, pri sabiranju brojeva 0100 i 0111 se dobija

```
  0100
+ 0111
------
  1011
```

Sabiranjem dva pozitivna broja se nije dobio pozitivan zbir, pa je došlo do prekoračenja. Kod sabiranja brojeva 10110 i 10111 u se dobija

```
  10110
+ 11111
-------
  10101
```

Poslednji prenos 1 se ignoriše. Sabiranjem dva negativna broja se dobio negativan rezultat, pa ovde ne dolazi do prekoračenja.

2.5 Višak k

U ovom zapisu, brojevi se zapisuju tako što se na njihov zapis u potpunom komplementu doda vrednost k. Zbog toga su operacije koje se obavljaju sa njima slične operacijama u potpunom komplementu. Na primer, zapis dekadnog broja 345 u višku 4 na 5 mesta bi bio 00349, budući da je 00345 odgovarajući zapis u potpunom komplementu. Zapis negativnog dekadnog broja -345 u istom zapisu bi bio 99659.

Zapis višak k se često koristi kada želimo da imamo sortirani poredak brojeva. Na primer, ako je dozvoljeni interval brojeva za zapis $[-2^i, 2^i - 1]$, nekad je zgodno te brojeve zapisati u višku 2^i, kako bi najmanji broj bio predstavljen svim nulama, a svi brojevi zapisa bili pozitivni, čime se olakšava njihovo poređenje.

Operacije sabiranja i oduzimanja se u višku k vrše slično kao u potpunom komplementu, s tim što je potrebno voditi računa da je i rezulat sabiranja i oduzimanja takođe zapisan u višku k. Odnosno, nakon operacije sabiranja, od rezultata treba oduzeti k, a nakon operacije oduzimanja rezultatu treba dodati k. Preciznije, neka su x i y zapisa dva broja u potpunom komplementu, a $x' = x + k$ i $y' = x + k$ odgovarajući zapisi u višku k. Pri sabiranju se dobija

$$x' + y' = (x + k) + (y + k) = (x + y) + 2k,$$

pa je takav rezultat zapisan u višku $2k$. Ovo se ispravlja oduzimanjem jednog k. Slično, pri oduzimanju se dobija

$$x' - y' = (x + k) + (y + k) = x - y,$$

pa razlika nije zapisana u višku k. Ovo se ispravlja dodavanjem k na rezultat.