РЕЛАЦИЈЕ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ

Дефиниција: Рел. $E \subseteq A^2$ је еквиваленција ако је (Р), (С) и (Т).

Примери: * Δ_A је еквиваленција

* $\parallel$ на скупу правих је еквиваленција

* Нека је $m \geq 0$. Дефинишемо на $\mathbb{Z}$ релацију $\equiv_m$ (једнакост по модулу m) са:

$x \equiv_m y$ ако $m \mid x-y$ (тј. $(\exists k \in \mathbb{Z})\ x-y = m \cdot k$)

$\equiv_m$ је еквиваленција на скупу $\mathbb{Z}$

(Р) $(\forall x \in \mathbb{Z})\ x \equiv_m x$: $m \mid x-x$, тј. $m \mid 0$ ✓

(С) $(\forall x,y \in \mathbb{Z})(x \equiv_m y \rightarrow y \equiv_m x)$: Нека $x \equiv_m y$, тј. $m \mid x-y$

Тада $m \mid -(x-y) = y-x$, тј. $y \equiv_m x$.

(Т) $(\forall x,y,z \in \mathbb{Z})(x \equiv_m y \wedge y \equiv_m z \rightarrow x \equiv_m z)$:

Нека $x \equiv_m y \wedge y \equiv_m z$, тј. $m \mid x-y \wedge m \mid y-z$.

Тада $m \mid (x-y)+(y-z) = x-z$, тј. $x \equiv_m z$.

• Шта значи $x \equiv_m y$, за $m \geq 2$?

$x = mq_1 + r_1$, $r_1 \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$

$y = mq_2 + r_2$, $r_2 \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$

$x \equiv_m y$ акко $m \mid x-y$ акко $m \mid m(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$

акко $m \mid r_1 - r_2$ акко$^{(*)}$ $r_1 = r_2$

(*): $0 \leq r_1, r_2 < m$, па

$$\begin{cases} 0 \leq r_1 < m \\ 0 \leq r_2 < m \quad / \cdot (-1) \\ -m < -r_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$-m < r_1 - r_2 < m$$

Како $m \mid r_1 - r_2$, то $r_1 - r_2 = 0$, тј. $r_1 = r_2$.

$x \equiv_m y$ значи да су остаци по модулу m једнаки.

• $\underline{m=0}$: $x \equiv_0 y$ акко $0 \mid x-y$ акко $x-y=0$

акко $x=y$

Дакле, $\equiv_0 \; = \; \Delta_{\mathbb{Z}}$.

• $\underline{m=1}$: $x \equiv_1 y$ акко $1 \mid x-y$ акко $\top$

Дакле, $\equiv_1 \; = \; \mathbb{Z}^2$.

Дефиниција: Нека је $E \subseteq A^2$ еквиваленција и $a \in A$.

Класа екв. ел. a је скуп:

$$[a]_E := \{x \in A \mid x E a\}$$
$$= \{x \in A \mid a E x\} \quad \text{због (С)}$$

$$\boxed{x \in [a]_E \equiv x E a \equiv a E x}$$

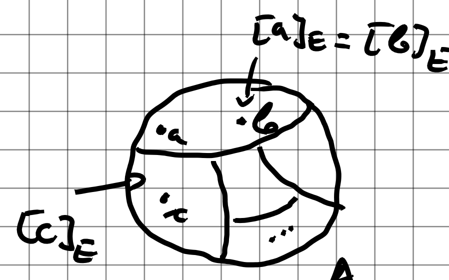
Количнички скуп екв. E је фамилија свих класа:

$$A/E := \{[a]_E \mid a \in A\}.$$

Коментар: $[a]_E \subseteq A$, тј. $[a]_E \in P(A)$

па $A/E \subseteq P(A)$.

Тврђење: Нека је $E \subseteq A^2$ екв.



(а) $a \in [a]_E$; посл., $[a]_E \neq \emptyset$.

(б) $aEb \to [a]_E = [b]_E$

(в) $\neg aEb \to [a]_E \cap [b]_E = \emptyset$

(г) заправо важи $\leftrightarrow$ и у (б) и у (в).

Доказ: (а) $a \in [a]_E \equiv aEa$ ✓ због (Р)

(б) Нека $\underline{aEb}$; $\underline{\text{циљ}}$: $[a]_E = [b]_E$.

$$x \in [a]_E \equiv xEa \overset{(*)}{\equiv} xEb \equiv x \in [b]_E$$

$\underline{(*)}$: $\boxed{\Rightarrow}$ ако xEa, како aEb, то xEb због (Т)

$\boxed{\Leftarrow}$ ако xEb, како bEa (због (С) јер aEb),

то xEa због $\underline{(Т)}$.

(в) Нека $\underline{\neg aEb}$; $\underline{\text{циљ}}$: $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$

(ДПС) $[a]_E \cap [b]_E \neq \emptyset$, тј. имамо $x \in [a]_E \cap [b]_E$

$$x \in [a]_E \wedge x \in [b]_E$$

Тада $aEx \wedge xEb$, па aEb због (т) ↯

(г) $\boxed{\leftarrow \text{из (б)}}$ Ако $[a]_E = [b]_E \neq \emptyset$ (због (а))
па $[a]_E \cap [b]_E = [a]_E \neq \emptyset$, па према
(в) $\neg\neg aEb$, тј. aEb.
$\boxed{\leftarrow \text{из (в)}}$ Ако $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$, како $[a]_E, [b]_E \neq \emptyset$
па $[a]_E \neq [b]_E$, одавде $\neg aEb$ према (б). □

<u>Коментар:</u> За A/E важи:
(1) $(\forall X \in A/E)\ X \neq \emptyset$ (због (а))
(2) $(\forall X, Y \in A/E)\ (X = Y \vee X \cap Y = \emptyset)$ (због (б) и (в))
(3) $\bigcup A/E = A$.

<u>Доказ:</u> <u>(3)</u>: $\boxed{\supseteq}$ Нека $a \in A$
како $a \in [a]_E$ (због (а)), то $a \in \bigcup A/E$
$\boxed{\subseteq}$ за сваку класу $[a]_E$ важи $[a]_E \subseteq A$, па
је $\bigcup A/E \subseteq A$. □

<u>Пример:</u> $x \equiv_m$ на $\mathbb{Z}$, $m \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}$
$[a]_{\equiv_m} = ?$

$$
\begin{aligned}
x \in [a]_{\equiv_m} &\equiv x \equiv_m a \\
&\equiv m \mid x - a \\
&\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})\ x - a = m \cdot k \\
&\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})\ x = a + mk \\
&\equiv x \in \underbrace{\{a + mk \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{a + m\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

Дакле, $[a]_{\equiv_m} = a + m\mathbb{Z}$.

- за <u>$a = 0$</u>: $[0]_{\equiv_m} = m\mathbb{Z} = \{\ldots, -3m, -2m, -m, 0, \underline{m}, 2m, \ldots\}$
- за <u>$a = 1$</u>: $[1]_{\equiv_m} = 1 + m\mathbb{Z} = \{\ldots, 1-3m, 1-2m, 1-m, 1, 1+m, \ldots\}$

...

$\mathbb{Z}/_{\equiv_m} = \{[0]_{\equiv_m}, [1]_{\equiv_m}, [2]_{\equiv_m}, \ldots, [m-1]_{\equiv_m}\}$

* На скупу $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дефинишемо рел. E са

$(a_1,b_1)\,E\,(a_2,b_2) \equiv b_1=b_2$

<u>E је екв. на $\mathbb{R}^2$</u>: (Р) $(a,b)\,E\,(a,b) \equiv b=b$ ✓

(С) Нека $(a_1,b_1)\,E\,(a_2,b_2) \equiv b_1=b_2 \equiv b_2=b_1$

$\equiv (a_2,b_2)\,E\,(a_1,b_1)$

(Т) Нека $(a_1,b_1)\,E\,(a_2,b_2) \wedge (a_2,b_2)\,E\,(a_3,b_3)$

тј. $b_1=b_2 \wedge b_2=b_3$, па $b_1=b_3$

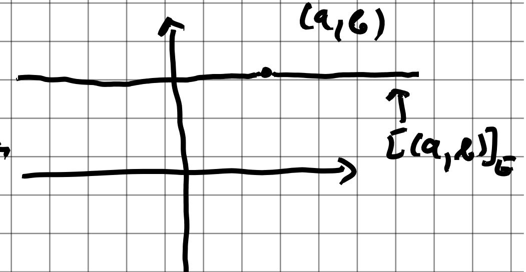
па $(a_1,b_1)\,E\,(a_3,b_3)$

<u>$[(a,b)]_E = ?$</u> $(x,y)\in[(a,b)]_E \equiv (x,y)\,E\,(a,b)$

$\equiv y=b$

$[(a,b)]_E = \{(x,b) \mid x\in\mathbb{R}\}$

= права паралелна са x-осом кроз тачку (a,b).



$\mathbb{R}^2/E$ = фамилија свих правих паралелних са x-осом

<u>Дефиниција</u>: Нека је $E\subseteq A^2$ еквиваленција.

ТРАНСВЕРЗАЛА екв. E је било који подскуп $T\subseteq A$ тд:

* $(\forall t_1,t_2\in T)(t_1=t_2 \vee \neg t_1\,E\,t_2)$
* $(\forall x\in A)(\exists t\in T)\ x\,E\,t$

Тј. трансверзала сече сваку класу у тачно једном елементу (трансверзала бира из сваке класе по један елемент)

ТРАНСВЕРЗАЛА = скуп ПРЕДСТАВНИКА КЛАСА

<u>Пример</u>: * $\equiv_m$ на $\mathbb{Z}$, $m\geq 2$

$\{0,1,2,\dots,m-1\}$ је трансверзала

* На $\mathbb{R}^2$ екв. E дата са $(a_1,b_1)\,E\,(a_2,b_2) \equiv b_1=b_2$

y-оса је једна трансверзала

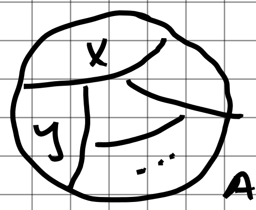
или свака права која није паралелна са x-осом је једна трансверзала.

Дефиниција: Фамилија $P \in \mathcal{P}(A)$ је партиција скупа A ако:

(1) $(\forall X \in P)\ X \neq \emptyset$

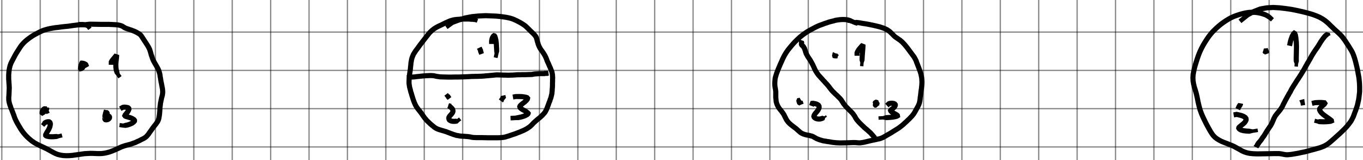
(2) $(\forall X, Y \in P)\ (X = Y \lor X \cap Y = \emptyset)$,

(3) $\bigcup P = A$.

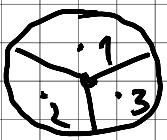


Коментар: За сваку екв. $E \subseteq A^2$ важи да је A/E једна партиција од A.

Пример: Одредити партиције скупа $A = \{1, 2, 3\}$.



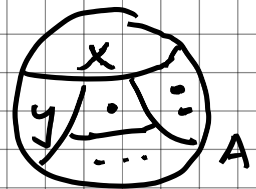
$P_1 = \{\{1,2,3\}\}$ $\quad$ $P_2 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ $\quad$ $P_2 = \{\{2\}, \{1,3\}\}$ $\quad$ $P_4 = \{\{3\}, \{1,2\}\}$



$P_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ $\quad$ Дакле, имамо 5 различитих партиција.

Тврђење: Нека је P партиција од A. Тада постоји еквиваленција $E \subseteq A^2$ тд $P = A/E$.

Доказ: Нека је P партиција.



Дефинишемо рел. E на A са:

$$a\,E\,b \equiv (\exists X \in P)(a \in X \land b \in X)$$

E је екв. на A: (Р) $a\,E\,a \equiv (\exists X \in P)(a \in X \land a \in X)$

$$\equiv (\exists X \in P)(a \in X) \ ✓$$

за $a \in A$, како је $A = \bigcup P$ (особина (3)) имамо $a \in \bigcup P$, па постоји $X \in P$ тд $a \in X$.

(С) $a\,E\,b \equiv (\exists X \in P)(a \in X \land b \in X)$

$$\equiv (\exists X \in P)(b \in X \land a \in X) \equiv b\,E\,a$$

(Т) Нека $a\,E\,b \land b\,E\,c$, тј. постоје $X, Y \in P$ тд $a \in X$, $b \in X$, $b \in Y$, $c \in Y$.

Како $b \in X \cap Y$, то $X \cap Y \neq \emptyset$, па $X = Y$ (особина (2))

Одатле, $a \in X \wedge c \in X$, па $a \, E \, c$.

<u>Лема:</u> $(\forall X \in P)(\forall a \in X) \; X = [a]_E$.

<u>доказ леме:</u> Нека $X \in P$ и $a \in X$. <u>Циљ:</u> $X = [a]_E$.

$\boxed{\subseteq}$ Нека $x \in X$; тада $x \in X \wedge a \in X$, па $x \, E \, a$

тј. $x \in [a]_E$.

$\boxed{\supseteq}$ Нека $x \in [a]_E$, тј. $x \, E \, a$. Постоји $Y \in P$ тд

$x \in Y \wedge a \in Y$.

Како $a \in X \wedge a \in Y$, то $X \cap Y \neq \emptyset$, па $X = Y$ (особина (2))

Дакле, $x \in X$. ■ леме

<u>Докажимо $P = A/E$:</u>

$\boxed{\subseteq}$ Нека $X \in P$. Изаберемо $a \in X$ (можемо јер $X \neq \emptyset$ особина (1))

по леми $X = [a]_E \in A/E$.

$\boxed{\supseteq}$ Нека $[a]_E \in A/E$. Због особине (3) постоји $X \in P$ тд $a \in X$. По леми $[a]_E = X \in P$ ■

КВАЗИПОРЕДАК

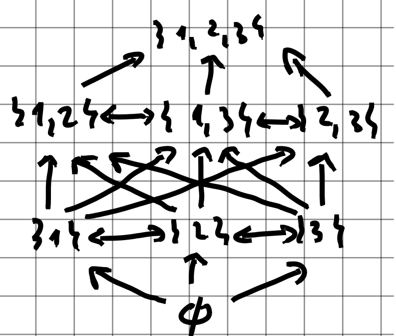
<u>Дефиниција:</u> Релација $R \subseteq A^2$ је квазипоредак ако је (Р) и (Т).

<u>Примери:</u> * Сваки поредак јесте квазипоредак.

* Свака еквиваленција јесте квазипоредак.

* Дефинишемо R на $A = P(S)$ са: $S = \{1,2,3\}$

$X \, R \, Y \equiv |X| \leq |Y|$ $\boxed{X \, R \, Y \equiv X \to Y}$



(Р): $X \, R \, X \equiv |X| \leq |X|$ ✓

(Т): $X \, R \, Y \wedge Y \, R \, Z \equiv |X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |Z|$

Тада $|X| \leq |Z|$, па $X \, R \, Z$.

$\neg(A \wedge C)$: $S=\{1,2,3\}$, тада $\{1\} R \{2\} \wedge \{2\} R \{1\}$,
али $\{1\} \neq \{2\}$.

$\neg(C)$: $S=\{1,2,3\}$, тада $\{1\} R \{1,2\}$, али $\neg\{1,2\} R \{1\}$.

Тврђење: Нека је $R \subseteq A^2$ квазипоредак. Дефинишимо рел. E на A са: $aEb \equiv aRb \wedge bRa$.
Тада је E еквиваленција на A, а са:
$[a]_E\ R^*\ [b]_E \equiv aRb$ дефинисан је поредак R^* на A/E.

Доказ: $aEb \equiv aRb \wedge bRa$

E је еквиваленција:

(P) $aEa \equiv aRa \wedge aRa$ ✓ због (P) R-а

(C) $aEb \equiv aRb \wedge bRa \equiv bRa \wedge aRb \equiv bEa$

(T) $aEb \wedge bEc \equiv aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb$

из $aRb \wedge bRc$ имамо aRc због (T) R-а

из $cRb \wedge bRa$ имамо cRa због (T) R-а

Дакле, aEc.

На A/E имамо $[a]_E\ R^*\ [b]_E :\equiv aRb$

Поставља се питање да ли је претходна деф. коректна, тј. ако $[a]_E = [a']_E \wedge [b]_E = [b']_E$ имамо $aRb \equiv [a]_E\ R^*\ [b]_E = [a']_E\ R^*\ [b']_E$

$\equiv a'Rb'$

Питање је да ли важи $aRb \equiv a'Rb'$?

ДА: како aEa', тј. $aRa' \wedge a'Ra$

и bEb', тј. $bRb' \wedge b'Rb$

то aRb, повлачи $a'Rb$ (јер $a'Ra$ због (T))

па и $a'Rb'$ (јер bRb' због (T))

и слично, $a'Rb'$ повлачи aRb.

Дакле, дефиниција је коректна

R^* је поредак на A/E:

(P) $[a]_E \; R^* \; [a]_E \equiv aRa$ ✓ R је (P)

(T) $[a]_E \; R^* \; [b]_E \wedge [b]_E \; R^* \; [c]_E \equiv aRb \wedge bRc$

тогаш aRc згд (T) R-а, па $[a]_E \; R^* \; [c]_E$.

(A-C) $[a]_E \; R^* \; [b]_E \wedge [b]_E \; R^* \; [a]_E \equiv aRb \wedge bRa$

$\equiv aEb$

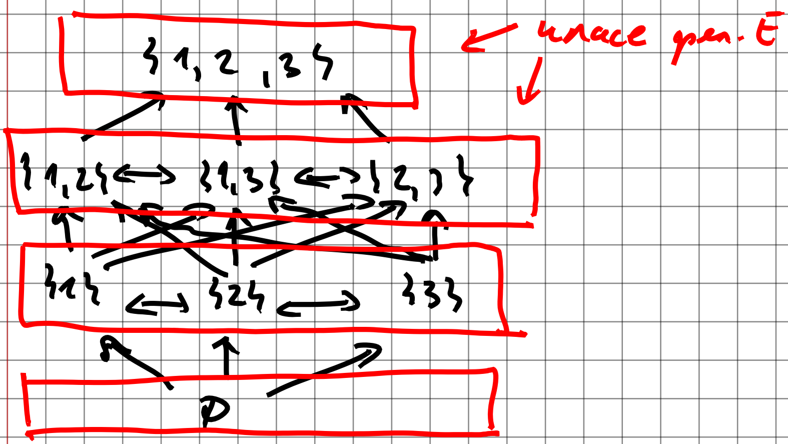
$\equiv [a]_E = [b]_E$. ▨

Претходен пример:

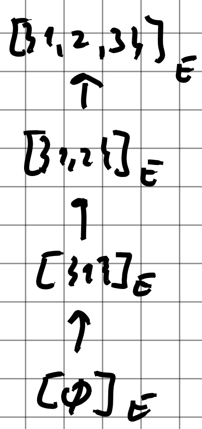
$X \, R \, Y \equiv |X| \le |Y|$ //

$X \, E \, Y \equiv XRY \wedge YRX \equiv |X| \le |Y| \wedge |Y| \le |X| \equiv |X| = |Y|$ //

$[X]_E \; R^* \; [Y]_E \equiv XRY \equiv |X| \le |Y|$ //



R



R^*