1 Deljenje celih brojeva

1.1 Deljenje neoznačenih celih brojeva

Za realizaciju algortima za deljenje neoznačenih celih brojeva potrebna su nam tri registra A, P i M i jedan brojač. Broj bitova n za zapis deljenika i delioca (dužina registara) će biti unapred zadat.

Početno stanje (inicijalizacija):

- 1. Deljenik upisujemo u registar P, a delilac u registar M. Sa P_0 ćemo obeležiti najniži bit registra P.
- 2. Registar A inicijalizujemo na 0.

Koraci algoritma:

- 1. Sadržaj registra AP kao jednu reč pomeramo za jednu poziciju ulevo (na upražnjeno mesto zdesna upisuje se 0).
- 2. Računamo razliku A-M i rezultat upisujemo u registar A:
 - Ako je $A \ge 0$, oduzimanje je uspešno i u P_0 upisujemo 1.
 - ullet Ako je A<0, oduzimanje je neuspešno pa ga poništavamo, odnosno vršimo restauraciju sadržaja registra A (dodavanjem sadržaja registra M).
- 3. Prethodna dva koraka ponavljamo onoliko puta koliko ima bitova u zapisu brojeva.

Količnik očitavamo iz registra P a ostatak iz registra A.

Napomena: Oduzimanje A-M je potrebno izvršiti u **svakom** koraku, jer se samo na osnovu rezultata oduzimanja može zaključiti da li je uslov $A \ge 0$ ispunjen ili ne.

1. Izračunati 131 : 12 ukoliko su brojevi predstavljeni kao neoznačeni celi binarni brojevi sa 8 bitova. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

deljenik: $P = 131 = (10000011)_2^8$, delilac: $M = 12 = (00001100)_2^8$

	A	P	
	00000000	10000011	inicijalizacija
1	00000001	00000110	AP pomeramo ulevo
	11110101		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000001	00000110	restauracija sadržaja A
2	00000010	00001100	pomeranje ulevo
	11110110		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000010	00001100	restauracija sadržaja A
3	00000100	00011000	pomeranje ulevo
	11111000		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000100	00011000	restauracija sadržaja A
4	00001000	00110000	pomeranje ulevo
	11111100		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00001000	00110000	restauracija sadržaja A
5	00010000	01100000	pomeranje ulevo
	00000100	0110000 <u>1</u>	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
6	00001000	11000010	pomeranje ulevo
	11111100		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00001000	11000010	restauracija sadržaja A
7	00010001	10000100	pomeranje ulevo
	00000101	$1000010\underline{1}$	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
8	00001011	00001010	pomeranje ulevo
	11111111		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00001011	00001010	restauracija sadržaja A

količnik: $P = (00001010)_2 = 10$, ostatak: $A = (00001011)_2 = 11$

2. Izračunati 123 : 4 ukoliko su brojevi predstavljeni kao neoznačeni celi binarni brojevi sa 8 bitova. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

deljenik: $P = 123 = (01111011)_2^8$, delilac: $M = 4 = (00000100)_2^8$

A	P	
00000000	01111011	inicijalizacija
00000000	11110110	AP pomeramo ulevo
11111100		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
00000000	11110110	restauracija sadržaja A
00000001	11101100	pomeranje ulevo
11111101		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
00000001	11101100	restauracija sadržaja A
00000011	11011000	pomeranje ulevo
11111111		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
00000011	11011000	restauracija sadržaja A
00000111	10110000	pomeranje ulevo
00000011	1011000 <u>1</u>	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
00000111	01100010	pomeranje ulevo
00000011	0110001 <u>1</u>	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
00000110	11000110	pomeranje ulevo
00000010	1100011 <u>1</u>	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
00000101	10001110	pomeranje ulevo
00000001	1000111 <u>1</u>	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
00000011	00011110	pomeranje ulevo
11111111		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
00000011	00011110	restauracija sadržaja A
	00000000 00000000 11111100 00000000 00000001 11111101 00000011 11111111	00000000 01111011 00000000 11110110 11111100 11110110 00000000 11110110 00000001 11101100 11111101 11011000 00000011 11011000 1111111 100000011 11111111 10110000 00000111 10110001 00000111 101100010 00000111 01100011 00000110 11000110 00000010 11000111 00000111 10001110 00000011 10001111 00000011 10001111 00000011 10001111 00000011 10001111 00000011 10001111 11111111 00011111

količnik: $P = (00011110)_2 = 30$, ostatak: $A = (00000011)_2 = 3$

3. Izračunati 99 : 33 ukoliko su brojevi predstavljeni kao neoznačeni celi binarni brojevi sa 8 bitova. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

deljenik: $P = 99 = (01100011)_2^8$, delilac: $M = 33 = (00100001)_2^8$

	A	P	
i	00000000	01100011	inicijalizacija
1	00000000	11000110	pomeranje ulevo
	11011111		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000000	11000110	restauracija sadržaja A
2	00000001	10001100	pomeranje ulevo
	11100000		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000001	10001100	restauracija sadržaja A
3	00000011	00011000	pomeranje ulevo
	11100010		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000011	00011000	restauracija sadržaja A
4	00000110	00110000	pomeranje ulevo
	11100101		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00000110	00110000	restauracija sadržaja A
5	00001100	01100000	pomeranje ulevo
	11101011		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00001100	01100000	restauracija sadržaja A
6	00011000	11000000	pomeranje ulevo
	11110111		A = A - M: $A < 0$, oduzimanje neuspešno
	00011000	11000000	restauracija sadržaja A
7	00110001	10000000	pomeranje ulevo
	00010000	10000001	$A = A - M$: $A > 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$
8	00100001	00000010	pomeranje ulevo
	00000000	$0000001\underline{1}$	$A = A - M$: $A = 0$, oduzimanje uspešno, $1 \to P_0$

količnik: $P = (00000011)_2 = 3$, ostatak: $A = (00000000)_2 = 0$

1.2 Deljenje označenih celih brojeva u potpunom komplementu

Za realizaciju algoritma za deljenje označenih celih brojeva u potpunom komplementu potrebna su nam tri registra A, P i M. Sa P_0 ćemo obeležiti najniži bit registra P. Sa \overline{P}_{n-i} označavamo prefiks registra P dužine n-i, gde je i redni broj pomeranja (tj. koraka).

Početno stanje (inicijalizacija):

- 1. Deljenik zapisujemo u potpunom komplementu u registru P. Registar A služi za proširenje deljenika ako je deljenik pozitivan A se inicijalizuje nulama, a ako je negativan jedinicama.
- 2. Delilac zapisujemo kao broj u potpunom komplementu u registru M.

Koraci algoritma:

- 1. Sadržaj registra AP kao jednu reč pomeramo za jednu poziciju ulevo.
- 2. Upoređujemo prvi bit registra A sa prvim bitom registra M:
 - \bullet Ako su bitovi jednaki (vrednosti u registrima A i M su istog znaka) računamo razliku $A-M^1$ i upisujemo je u registar A
 - \bullet Ako su bitovi različiti (vrednosti u registrima A i M su različitog znaka) računamo zbir A+Mi u upisujemo ga u registar A

Ukoliko je znak registra A nepromenjen nakon izvršavanja operacije ili važi $A\overline{P}_{n-i}=0$, za operaciju kažemo da je uspešna i u P_0 upisujemo 1 .

Ukoliko nijedan od dva navedena uslova nije ispunjen, za operaciju kažemo da je neuspešna i

- \bullet 0 upisujemo u P_0 (u P_0 je već 0 nakon pomeranja, pa ovo ne radimo)
- odbacujemo dobijeni rezultat, tj. vršimo restauraciju prethodnog sadržaja registra A.
- 3. Prethodna dva koraka ponavljamo onoliko puta koliko ima bitova u registru P.

Količnik očitavamo iz registra P kao broj u potpunom komplementu. Ukoliko su još deljenik i delilac različitog znaka, količnik treba uzeti sa predznakom minus (tj. komplementiranjem sadržaja iz P). Ostatak očitavamo iz registra A kao broj zapisan u potpunom komplementu.

Napomena 1: Odgovarajuću operaciju sabiranja A + M ili oduzimanja A - M je potrebno izvršiti u svakom koraku, jer se samo na osnovu rezultata operacije zaključuje da li je znak sadržaja registra A promenjen ili ne. Drugim rečima neophodno je računom pokazati uspešnost ili neuspešnost operacije.

Napomena 2: Prefiks \overline{P}_{n-i} registra P je potrebno razmatrati samo u specijalnom slučaju kada su zadati brojevi deljivi i pri tom je deljenik negativan. Ukoliko je nakon izvršavanja odgovarajuće operacije ispunjen uslov $A\overline{P}_{n-i}=0$, tj. kao novi sadržaj registra A se dobije 0, pri čemu je prethodni sadržaj u A bio negativan i još važi $\overline{P}_{n-i}=0$ (među preostalim bitovima deljenika u registru P nema jedinica), operacija se smatra uspešnom. Vrednost A=0 u registru A biće očuvana do poslednjeg koraka, što znači da će ostatak pri deljenju biti 0.

 $^{^{1}}$ A-M=A+(-M) pa se računanje razlike može svesti na računanje zbira sadržaja registra A i potpunog komplementa sadržaja iz M

1. Izračunati 103:(-7) ukoliko su brojevi predstavljeni kao označeni celi binarni brojevi sa 8 bitova u potpunom komplementu. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

deljenik: $P=103=(01100111)_{pk}^8,\ AP=(00000000\ 01100111)_{pk}^{16}$ delilac: $M=-7=(1001)_{pk}^4=(11111001)_{pk}^8$

Kako su vrednosti u registrima A i M različitog znaka, operacija koju vršimo je A+M.

	A	P	
	00000000	01100111	inicijalizacija
1	00000000	11001110	AP pomeramo ulevo
	11111001		A = A + M: promenjen znak u A , sabiranje neuspešno
	00000000	11001110	restauracija sadržaja A
2	00000001	10011100	AP pomeramo ulevo
	11111010		A = A + M, sabiranje neuspešno
	00000001	10011100	restauracija sadržaja A
3	00000011	00111000	AP pomeramo ulevo
	11111100		A = A + M, sabiranje neuspešno
	00000011	00111000	restauracija sadržaja A
4	00000110	01110000	pomeranje ulevo
	11111111		A = A + M, sabiranje neuspešno
	00000110	01110000	restauracija sadržaja A
5	00001100	11100000	pomeranje ulevo
	00000101	1110000 <u>1</u>	$A = A + M$: znak u A nije promenjen, sabiranje uspešno, $1 \rightarrow P_0$
6	00001011	11000010	pomeranje ulevo
	00000100	$1100001\underline{1}$	$A = A + M$, sabiranje uspešno, $1 \to P_0$
7	00001001	10000110	pomeranje ulevo
	00000010	1000011 <u>1</u>	$A = A + M$, sabiranje uspešno, $1 \to P_0$
8	00000101	00001110	pomeranje ulevo
	11111110		A = A + M, sabiranje neuspešno
	00000101	00001110	restauracija sadržaja A

količnik: $-P=(11110010)_{pk}=-(00001110)_2=-14$, jer su deljenik i delilac različitog znaka ostatak: $A=(00000101)_{pk}=+(101)_2=5$

2. Izračunati -102:(-21) ukoliko su brojevi predstavljeni kao označeni celi binarni brojevi sa 8 bitova u potpunom komplementu. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

deljenik: $102=(01100110)_{pk}^8$, $P=-102=(10011010)_{pk}^8$, $AP=(111111111\ 10011010)_{pk}^{16}$ delilac: $M=-21=-32+8+2+1=(101011)_{pk}^6=(11101011)_{pk}^8$ Kako su vrednosti u registrima A i M istog znaka, operacija koju vršimo je A-M (ili A+(-M)).

	A	P	
	11111111	10011010	inicijalizacija
1	111111111	00110100	AP pomeramo ulevo
	00010100		A = A - M: promenjen znak u A , oduzimanje neuspešno
	11111111	00110100	restauracija sadržaja A
2	11111110	01101000	pomeranje ulevo
	00010011		A = A - M, oduzimanje neuspešno
	11111110	01101000	restauracija sadržaja A
3	11111100	11010000	pomeranje ulevo
	00010001		A = A + (-M), neuspešno
	11111100	11010000	restauracija sadržaja A
4	11111001	10100000	pomeranje ulevo
	00001110		A = A + (-M), neuspešno
	11111001	10100000	restauracija sadržaja A
5	11110011	01000000	pomeranje ulevo
	00001000		A = A - M, neuspešno
	11110011	01000000	restauracija sadržaja A
6	11100110	10000000	pomeranje ulevo
	11111011	10000001	$A = A + (-M)$ uspešno, $1 \to P_0$
7	11110111	00000010	pomeranje ulevo
	00001100		A = A - M, neuspešno
	11110111	00000010	restauracija sadržaja A
8	11101110	00000100	pomeranje ulevo
	00000011		A = A + (-M) neuspešno
	11101110	00000100	restauracija sadržaja A

```
količnik: P = (00000100)_{pk} = +(100)_2 = 4, deljenik i delilac su istog znaka pa nema promena ostatak: A = (11101110)_{pk} = -(0010010)_2 = -18
```

3. Izračunati (-123): (-4) ukoliko su brojevi predstavljeni kao označeni celi binarni brojevi sa 8 bitova u potpunom komplementu. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

```
deljenik: P = -123 = -128 + 5 = (10000101)_{pk}^8, AP = (11111111 \ 10000101)_{pk}^{16} delilac: M = -4 = (100)_{pk}^3 = (111111100)_{pk}^8
```

Kako su vrednosti u registrima A i M istog znaka, operacija koju vršimo je A-M (ili A+(-M)).

A	P	
11111111	10000101	inicijalizacija
11111111	0000101 0	AP pomeramo ulevo (1)
00000011		A = A - M: promenjen znak u A , oduzimanje neuspešno
11111111	0000101 0	restauracija sadržaja A
11111110	000101 00	pomeranje ulevo (2)
00000010		A = A - M, neuspešno
11111110	000101 00	restauracija sadržaja A
11111100	00101 000	pomeranje ulevo (3)
00000000		$A=A-M$: $A=0$, ali $\overline{P}_5\neq 0 \Rightarrow$ oduzimanje neuspešno
11111100	00101 000	restauracija sadržaja A
11111000	0101 0000	pomeranje ulevo (4)
11111100	$0101 000\underline{1}$	$A = A + (-M)$, uspešno, $1 \to P_0$
11111000	101 00010	pomeranje ulevo (5)
11111100	$101 0001\underline{1}$	$A = A + (-M)$, uspešno, $1 \to P_0$
11111001	01 000110	pomeranje ulevo (6)
11111101	$01 00011\underline{1}$	$A = A + (-M)$, uspešno, $1 \to P_0$
11111010	1 0001110	pomeranje ulevo (7)
11111110	$1 000111\underline{1}$	$A = A + (-M)$, uspešno, $1 \to P_0$
11111101	00011110	pomeranje ulevo (8)
00000001		A = A - M, neuspešno
11111101	00011110	restauracija sadržaja A

količnik: $P = (00011110)_{pk} = 30$, jer su deljenik i delilac istog znaka.

ostatak: $A = (11111101)_{pk}^8 = (101)_{pk}^3 = -4 + 1 = -3$

4. Izračunati (-128): 2 ukoliko su brojevi predstavljeni kao označeni celi binarni brojevi sa 8 bitova u potpunom komplementu. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

```
deljenik: P = -128 = (10000000)_{pk}^8, AP = (11111111 \ 10000000)_{pk}^{16} delilac: M = 2 = (0000010)_{pk}^8
```

Kako su vrednosti u registrima A i M različitog znaka, operacija koju vršimo je A+M.

A	P	
11111111	10000000	inicijalizacija
11111111	0000000 0	AP pomeramo ulevo (1)
00000001		A = A + M: promenjen znak u A , sabiranje neuspešno
11111111	0 0000000	restauracija sadržaja A
11111110	000000 00	pomeranje ulevo (2)
00000000	000000 01	$A=A+M\colon\thinspace A=0$ i $\overline{P}_6=0$, sabiranje uspešno, $1\to P_0$
00000000	00000 010	pomeranje ulevo (3)
11111110		A=A-M (jer su A i M istog znaka): oduzimanje neuspešno
00000000	00000 010	restauracija sadržaja A
00000000	01000000	pomeranje ulevo za 5 mesta (narednih 5 koraka je isto: $A = 0$) (4-8)
11111110		A = A - M, oduzimanje neuspešno
00000000	01000000	restauracija sadržaja A

količnik: $-P = (11000000)_{pk} = -(01000000)_2 = -64$, jer su deljenik i delilac različitog znaka. ostatak: $A = (00000000)_{pk} = 0$

5. Izračunati (-126): 3 ukoliko su brojevi predstavljeni kao označeni celi binarni brojevi sa 8 bitova u potpunom komplementu. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

```
deljenik: P = -126 = (10000010)_{pk}^8, AP = (11111111 \ 10000010)_{pk}^{16} delilac: M = 3 = (00000011)_{pk}^8
```

Kako su vrednosti u registrima A i M različitog znaka, operacija koju vršimo je A+M.

A	P	
11111111	10000010	inicijalizacija
111111111	0000010 0	AP pomeramo ulevo (1)
00000010		A = A + M: promenjen znak u A , sabiranje neuspešno
11111111	0000010 0	restauracija sadržaja A
11111110	000010 00	pomeranje ulevo (2)
00000001		A = A + M, neuspešno
11111110	000010 00	restauracija sadržaja A
11111100	00010 000	pomeranje ulevo (3)
11111111	$00010 00\underline{1}$	$A = A + M$, uspešno, $1 \to P_0$
11111110	0010 0010	pomeranje ulevo (4)
00000001		A=A+M, neuspešno (kao u koraku 2)
11111110	0010 0010	restauracija sadržaja A
11111100	010 00100	pomeranje ulevo (5)
11111111	$010 0010\underline{1}$	$A = A + M$, uspešno, $1 \to P_0$
11111110	10 001010	pomeranje ulevo (6)
00000001		A=A+M, neuspešno (kao u koraku 2)
11111110	10 001010	restauracija sadržaja A
11111101	0 0010100	pomeranje ulevo (7)
00000000	$0 001010\underline{1}$	$A = A + M$: $A = 0$ i $\overline{P}_1 = 0$, sabiranje uspešno, $1 \to P_0$
00000000	00101010	pomeranje ulevo (8)
11111101		A=A-M (jer su A i M istog znaka): oduzimanje neuspešno
00000000	00101010	restauracija sadržaja A

količnik: $-P=(11010110)_{pk}=-(00101010)_2=-42$, jer su deljenik i delilac različitog znaka. ostatak: $A=(00000000)_{pk}=0$

6. Izračunati -154:17 ukoliko su brojevi predstavljeni kao označeni celi binarni brojevi sa 9 bitova u potpunom komplementu. Odrediti dekadnu vrednost količnika i ostatka.

Napomena: S obzirom da deljenik inicijalno mora da bude zapisan korektno u registru P, neophodno je bar 9 bitova. Stoga su registri M, A i P dužine 9, pa će algoritam imati 9 koraka.

deljenik: 154 = (010011010) $_2^9$, $P = -154 = (101100110)_{pk}^9$, $AP = (111111111 101100110)_{pk}^{18}$ delilac: $M = 17 = (000010001)_{pk}^9$

Kako su vrednosti u registrima A i M različitog znaka, operacija koju vršimo je A+M.

	A	P	
	111111111	101100110	inicijalizacija
1	111111111	011001100	AP pomeramo ulevo
	000010000		A = A + M: promenjen znak u A , sabiranje neuspešno
	111111111	011001100	restauracija sadržaja A
2	111111110	110011000	pomeranje ulevo
	000001111		A = A + M, sabiranje neuspešno
	111111110	110011000	restauracija sadržaja A
3	111111101	100110000	pomeranje ulevo
	000001110		A = A + M, sabiranje neuspešno
	111111101	100110000	restauracija sadržaja A
$\overline{4}$	1111111011	001100000	pomeranje ulevo
	000001100		A = A + M, sabiranje neuspešno
	111111011	001100000	restauracija sadržaja A
5	111110110	011000000	pomeranje ulevo
	000000111		A = A + M, sabiranje neuspešno
	111110110	011000000	restauracija sadržaja A
6	111101100	110000000	pomeranje ulevo
	111111101	110000001	$A=A+M$: A ne menja znak, sabiranje uspešno, $1\to P_0$
7	1111111011	100000010	pomeranje ulevo
	000001100		A = A + M, sabiranje neuspešno
	111111011	100000010	restauracija sadržaja A
8	111110111	000000100	pomeranje ulevo
	000001000		A = A + M, sabiranje neuspešno
	111110111	000000100	restauracija sadržaja A
9	111101110	000001000	pomeranje ulevo
	111111111	00000100 <u>1</u>	$A = A + M$, sabiranje uspešno, $1 \rightarrow P_0$

količnik: $-P=(111110111)_{pk}=-(000001001)_2=-9$, jer su deljenik i delilac različitog znaka ostatak: $A=(111111111)_{pk}=-(00000001)_2=-1$