Uvod u organizaciju i arhitekturu računara 1

Stefan Mišković

2020/2021.

10 Zapis brojeva pomoću označenih logaritama

10.1 Zapis brojeva

Neka je dat realan pozitivan broj x. Kako je $x > 0$, sledi da je definisan logaritam $\log_a x$, gde je a neka osnova tog logaritma. Za fiksiranu osnovu a, uvedimo oznaku $l_x = \log_a x$. Vrednost l_x može biti pozitivna, negativna ili jednaka nuli. Preciznije,

$$l_x = \begin{cases} \text{pozitivna vrednost} & \text{ako je } x > 1, \\ 0 & \text{ako je } x = 1, \\ \text{negativna vrednost} & \text{ako je } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Kako je $l_x = \log_a x$, po definiciji važi da je $x = a^{l_x}$.

Neka je sada dat proizvoljan realan broj x. Za razliku od slučaja kada je x pozitivan broj, za $x \leq 0$, vrednost l_x nije definisana. Zbog toga se, za zapis proizvoljnog označenog broja, pored vrednosti l_x, uvode i indikatori i_x i s_x. Indikator i_x označava da li je vrednost x jednaka nuli, tj. važi da je

$$i_x = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = 0, \\ 0 & \text{ako je } x \neq 0. \end{cases}$$

Indikator s_x označava znak broja, odnosno ima vrednost 0 ako je broj x pozitivan, a vrednost 1 ako je broj x negativan. U slučaju označenog broja, vrednost l_x se definiše na osnovu apsolutne vrednosti broja x. Preciznije,

$$l_x = \begin{cases} \log_a |x| & \text{ako je } |x| > 0, \\ 0 & \text{ako je } x = 0. \end{cases}$$

Ovde osnova a može biti proizvoljna. Primetimo da ako je $x = 0$, vrednost $\log_a |x|$ nije definisana, zbog čega se taj slučaj posebno razmatra i tada važi da je $l_x = 0$.

Na opisan način se proizvoljan označen broj x može napisati pomoću označenih logaritama u obliku trojke (i_x, s_x, l_x), pri čemu indikatori i_x i s_x mogu uzeti vrednosti 0 ili 1, a l_x treba zapisati u binarnom sistemu. Broj l_x može biti proizvoljan označen broj i zapisuje se u potpunom komplementu u binarnom sistemu, pri čemu je unapred fiksiran ukupan broj bitova za zapis, kao i broj bitova za zapis razlomljenog dela. Na primer, ako je $l_x = 2.5$ i ako je zapis dužine 5, pri čemu imamo dve cifre iza decimalne tačke u zapisu, potpuni komplement je oblika $(010.10)^5_2$. Primetimo da se ovaj zapis u potpunom komplementu jednostavno uopštava sa celih na mešovite brojeve. Tako se pri promeni znaka jedinica dodaje na poslednje mesto zapisa, pa je, na primer, zapis broja $-l_x$ na isti broj mesta jednak $(101.10)_2^5$. Vrednost poslednjeg zapisa u dekadnom sistemu iznosi

$$0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 - 1 \cdot 2^2 = 0.5 + 1 - 4 = -2.5.$$

Ako bismo želeli na osnovu trojke (i_x, s_x, l_x) da odredimo vrednost broja x, možemo primetiti da imamo sledeće slučajeve:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{ako je } i_x = 1, \\ a^{l_x} & \text{ako je } i_x = 0 \text{ i } s_x = 0, \\ -a^{l_x} & \text{ako je } i_x = 0 \text{ i } s_x = 1. \end{cases}$$

Ovo se u jednom izrazu može napisati u obliku $x = (1 - i_x) \cdot (-1)^{s_x} \cdot a^{l_x}$. Razmotrimo sve slučajeve:

- Ako je $i_x = 1$, tada je $x = (1 - 1) \cdot (-1)^{s_x} \cdot a^{l_x} = 0$.
- Ako je $i_x = 0$ i $s_x = 0$, zamenom u polazni izraz se dobija da je $x = (1 - 0) \cdot (-1)^0 \cdot a^{l_x} = a^{l_x}$. Kako je po definiciji $a^{l_x} = a^{\log_a |x|} = |x|$, sledi da je $x = |x|$, što je ispunjeno, jer je x zbog $s_x = 0$ pozitivan broj.
- Ako je $i_x = 0$ i $s_x = 1$, zamenom u polazni izraz se dobija da je $x = (1 - 0) \cdot (-1)^1 \cdot a^{l_x} = -a^{l_x}$. Kako je po definiciji $a^{l_x} = a^{\log_a |x|} = |x|$, sledi da je $x = -|x|$, što je ispunjeno, jer je x zbog $s_x = 1$ negativan broj.

Primeri:

- Neka je broj $x = 1/128$ potrebno zapisati pomoću označenih logaritama za osnovu $a = 4$. Kako je osnova 4, najpre je, radi lakšeg računanja, broj x pogodno zapisati u obliku stepena broja 4. Tako se dobija da je

  $$x = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{2^{2 \cdot 3.5}} = \frac{1}{4^{3.5}} = 4^{-3.5}.$$

  Sada jednostavno sledi da je $i_x = 0$, $s_x = 0$ i $l_x = \log_4 |4^{-3.5}| = \log_4 4^{-3.5} = -3.5$. Broj l_x je potrebno zapisati u binarnom sistemu u potpunom komplementu. Neka je taj zapis dužine 4, pri čemu postoji jedna cifra u razlomljenom delu. Zapis je oblika $(-3.5)_{10} \to (100.1)_2^3$, pa je zapis broja dat sa $(0, 0, 100.1)$.

- Neka je broj $x = -1/128$ potrebno zapisati pomoću označenih logaritama za osnovu $a = 2$. Važi da je $i_x = 0$, $s_x = 1$ i

  $$l_x = \log_2 \left| -\frac{1}{128} \right| = \log_2 \frac{1}{2^7} = \log_2 2^{-7} = -7.0.$$

  Neka je zapis u potpunom komplementu broja l_x dužine 5, pri čemu postoji jedna cifra u razlomljenom delu. Slično prethodnom primeru, važi da je $(-7)_{10} \to (1001.0)_2$, pa je traženi zapis $(0, 1, 1001.0)$.

- Neka je $x = 0$. Tada je $i_x = 1$ i $l_x = 0$. Ako x označava pozitivnu nulu, važi da je $s_x = 0$, pa je zapis $(1, 0, 0)$. Ako x označava negativnu nulu, važi da je $s_x = 1$, pa je zapis $(1, 1, 0)$. Ovde vrednost osnove a ne utiče na vrednost zapisa.

- Neka je zapis broja x dat sa $(i_x, s_x, l_x) = (0, 0, 100.1)$, gde je logaritamska osnova $a = 4$. Zbog vrednosti i_x i s_x, očigledno je da je $x > 0$. Zapis $(100.1)_2^4$ u potpunom komplementu predstavlja dekadni broj -3.5, pa je $x = 4^{-3.5} = 1/128$ (slučaj kada je $i_x = 0$ i $s_x = 0$). Zamenom u obrazac se takođe mogla dobiti ista vrednost:

$$x = (1 - i_x) \cdot (-1)^{s_x} \cdot a^{l_x} = (1 - 0) \cdot (-1)^0 \cdot 4^{-3.5} = 1/128.$$

10.2 Aritmetičke operacije

Podsetimo se da za pozitivne brojeve x i y važi da je $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ i $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ za neku osnovu a. Imajući ovo u vidu, možemo zaključiti da se množenje i deljenje u ovom zapisu lako izvršavaju. Nasuprot teme, kod zapisa pomoću označenih algoritama sabiranje i oduzimanje su veoma skupe operacije.

U nastavku, neka su dva označena broja x i y zapisani redom u obliku (i_x, s_x, l_x) i (i_y, s_y, l_y), i neka je logaritamska osnova a.

Množenje. Neka je $z = xy$. Odredimo zapis (i_z, s_z, l_z). Primetimo da je $i_z = 1$ ako je bar jedan od indikatora i_x i i_y jednak 1, a inače je 0. Zapišimo sve mogućnosti tablično:

i_x	i_y	i_z
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Vidimo da indikator i_z možemo zapisati u obliku $i_z = i_x \vee i_y$, gde je $\vee$ logički operator disjunkcije. Indikator s_z ima vrednost 1 ako je $s_x \neq s_y$ (ako su x i y različitog znaka), a vrednost 0 ako je $s_x = s_y$ (ako su x i y istog znaka), pa se može zapisati u obliku $s_z = s_x \oplus s_y$, gde je $\oplus$ logički operator ekskluzivne disjunkcije. Za vrednost l_z se dobija

$$l_z = \log_a |z| = \log_a |xy| = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a |x| + \log_a |y| = l_x + l_y.$$

Iz poslednjeg konačno sledi da je $(i_z, s_z, l_z) = (i_x \vee i_y, s_x \oplus s_y, l_x + l_y)$.

Neka je, na primer, $x = 32$, $y = -1/(2\sqrt{2})$ i neka je potrebno odrediti proizvod $z = xy$ ako su brojevi x i y zapisani pomoću označenih algoritama u osnovi $a = 2$, gde je broj cifara u zapisu brojeva l_x, l_y i l_z jednak 5, pri čemu ti zapisi sadrže tačno jednu cifru iza decimalne tačke. Važi da je $i_x = 0$, $s_x = 0$ i $l_x = \log_2 |32| = \log_2 2^5 = 5$, odnosno $i_y = 0$, $s_y = 1$ i $l_y = \log_2 |-1/(2\sqrt{2})| = \log_2 2^{-3/2} = -3/2$. Zapis broja l_x je 0101.0, a broja l_y je 1110.1, pa su zapisi brojeva x i y redom $(0, 0, 0101.0)$ i $(0, 1, 1110.1)$. Za zapis indikatora i_z i s_z se dobija $i_z = i_x \vee i_y = 0 \vee 0 = 0$ i $s_z = s_x \oplus s_y = 0 \oplus 1 = 1$. Sabiranjem zapisa l_x i l_y u potpunom komplementu se dobija $0101.0 + 1110.1 = 0011.1$, pa je $l_z = 3.5$. Zapis broja z je $(0, 1, 0011.1)$, a njegova vrednost

$$z = (1 - i_z) \cdot (-1)^{s_z} \cdot a^{l_z} = (1 - 0) \cdot (-1)^1 \cdot 2^{3.5} = -8\sqrt{2}.$$

Deljenje. Odredimo zapis (i_z, s_z, l_z), gde je $z = x/y$ i $y \neq 0$. Kako je $y \neq 0$, to mora važiti da je $i_y = 0$, da bi deljenje bilo definisano. U tom slučaju je $z = 0$ ako i samo ako je $x = 0$, pa je $i_z = i_x$. Slično kao kod množenja, indikator s_z ima vrednost 1 ako je $s_x \neq s_y$, a vrednost 0 ako je $s_x = s_y$, pa se može napisati u obliku $s_z = s_x \oplus s_y$. Za vrednost l_z se dobija

$$l_z = \log_a |z| = \log_a \left|\frac{x}{y}\right| = \log_a \left(\frac{|x|}{|y|}\right) = \log_a |x| - \log_a |y| = l_x - l_y.$$

Sledi da je $(i_z, s_z, l_z) = (i_x, s_x \oplus s_y, l_x - l_y)$.

Neka je, na primer, $x = 32$, $y = -1/(2\sqrt{2})$ i neka je potrebno odrediti količnik $z = x/y$ ako su brojevi x i y zapisani pomoću označenih algoritama u osnovi $a = 2$, gde je broj cifara u zapisu brojeva l_x, l_y i l_z jednak 5, pri čemu ti zapisi sadrže tačno jednu cifru iza decimalne tačke. Kao kod primera za množenje, dobija se da je $(i_x, s_x, l_x) = (0, 0, 0101.0)$ i $(i_y, s_y, l_y) = (0, 1, 1110.1)$. Za zapis indikatora i_z i s_z se dobija $i_z = i_x = 0$ i $s_z = s_x \oplus s_y = 0 \oplus 1 = 1$. Oduzimanjem zapisa l_x i l_y u potpunom komplementu se dobija $0101.0 - 1110.1 = 0101.0 + 0001.1 = 0110.1$, pa je $l_z = 6.5$. Zapis broja z je $(0, 1, 0110.1)$, a njegova vrednost

$$z = (1 - i_z) \cdot (-1)^{s_z} \cdot a^{l_z} = (1 - 0) \cdot (-1)^1 \cdot 2^{6.5} = -64\sqrt{2}.$$

Sabiranje i oduzimanje. Operacije sabiranja i oduzimanja su nešto složenije od operacija množenja i deljenja, a pošto se izvode slično, posmatraćemo ih uporedo. Neka je $z = x \pm y$ i neka je pritom potrebno odrediti zapis (i_z, s_z, l_z). Za određivanje svakog od parametara i_z, s_z i l_z, biće potrebno uporediti vrednosti $|x|$ i $|y|$. Međutim, za njihovo poređenje, ne moramo upoređivati njihove stvarne vrednosti, već se zaključak o tome da li su jednaki i koji je broj veći može jednostavno izvesti na osnovu njihovih zapisa.

Indikator i_z se jednostavno određuje razmatranjem da li je $|x| = |y|$, na osnovu indikatora za znak i nulu i uzimajući u obzir da li se radi o sabiranju ili oduzimanju.

Indikator s_z zavisi od toga koji broj je veći po apsolutnoj vrednosti. Na primer, za sabiranje važi da, ako je $|x| > |y|$, tada je $s_z = s_x$, a ako je $|x| < |y|$, tada je $s_z = s_y$. Sličan zaključak se može izvesti i za oduzimanje.

Za određivanje l_z, razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $|x| > |y|$, tada iz $z = x \pm y = x(1 \pm y/x)$ sledi da je

  $$l_z = \log_a |z| = \log_a \left|x\left(1 \pm \frac{y}{x}\right)\right| = \log_a |x| + \log_a \left|1 \pm \frac{y}{x}\right| = l_x + \log_a \left|1 \pm \frac{y}{x}\right|.$$

  Važi da je

  $$\left|\frac{y}{x}\right| = a^{\log_a \left|\frac{y}{x}\right|} = a^{\log_a |y| - \log_a |x|} = a^{l_y - l_x} = a^{-(l_x - l_y)}.$$

  Ako su x i y istog znaka, tada je $y/x = |y/x|$, pa je

  $$l_z = l_x + \log_a \left|1 \pm \left|\frac{y}{x}\right|\right| = l_x + \log_a \left|1 \pm a^{-(l_x - l_y)}\right|.$$

  Ako su x i y različitog znaka, tada je $y/x = -|y/x|$, pa je

  $$l_z = l_x + \log_a \left|1 \mp \left|\frac{y}{x}\right|\right| = l_x + \log_a \left|1 \mp a^{-(l_x - l_y)}\right|.$$

Vidimo da u oba slučaja u formuli za izračunavanje l_z imamo operaciju logaritmovanja, što je u praksi skupa operacija. Zbog toga se mogu koristiti predefinisane vrednosti logaritma za osnovu a (nešto slično kao logaritamske tablice), gde je u memoriji računara data tabela koja za razne vrednosti argumenta t ima vrednosti izraza $\log_a |1 + a^{-t}|$ i $\log_a |1 - a^{-t}|$. Ovde je $t = l_x - l_y$.

- Ako je $|y| > |x|$, tada se na analogan način dobija da je $l_z = l_y + \log_a \left|1 \pm a^{-(l_y - l_x)}\right|$, odnosno $l_z = l_y + \log_a \left|1 \mp a^{-(l_y - l_x)}\right|$, pa se izračunavanje vrši na sličan način.

10.3 Zapis u računaru i primene

U računaru je za neki označen broj x trojka (i_x, s_x, l_x) najčešće zapisana na 32 ili 64 bita, pa je tada broj zapisan u jednostrukoj ili dvostrukoj tačnosti. Za osnovu logaritma se uzima $a = 2$. Po jedan bit su dovoljni za zapis indikatora i_x i s_x. Ukoliko ima potrebe da zapis podrži i specijalne vrednosti poput beskonačno i NaN, indikator i_x se može proširiti na dva bita, pa na osnovu njegove četiri vrednosti se mogu pokriti slučajevi: 0, beskonačno, NaN i normalan broj. Ostatak zapisa predstavlja broj l_x u binarnom obliku u potpunom komplmenetu. Od toga se određen broj bitova može dodeliti za zapis celobrojnog dela, a određen broj bitova za zapis razlomljenog dela potpunog komplementa. Ako je dužina zapisa celobrojnog dela jednaka dužini zapisa eksponenta u IEEE 754 standardu u binarnoj osnovi u jednostrukoj tačnosti (ta dužina iznosi 8), a dužina zapisa razlomljenog dela približno jednaka dužini zapisa frakcije (ta dužina iznosi nešto manje od 23), tada je opseg brojeva koji mogu da se zapišu pomoću označenih algoritama sličan opsegu koji može da se zapiše pomoću zapisa u IEEE 754 standardu u binarnoj osnovi u jednostrukoj tačnosti. Slično važi i za zapis u dvostrukoj tačnosti.

U ovom zapisu su operacije množenja i deljenja veoma brze, a sabiranja i oduzimanja veoma spore. Tu je najzahtevniji deo izračunavanje logaritma kod obrasca za l_z. Nekad se on može izračunati direktno, što iziskuje dosta vremena, a ako se određuje pomoću tabele, ona može zauzeti dosta memorije. Imajući sve ovo u vidu, ovaj zapis se danas veoma slabo koristi. Njegova primena se najčešće odnosi na aplikacije gde se u velikoj meri obavljaju operacije množenja i deljanja, a u nešto većoj meri se koristio pre uvođenja IEEE 754 standarda kod nekih serija računara.