УРЕЂЕНИ ПАР И ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД

(a,b) задовољава следећу особину
$(a,b) = (c,d)$ ако $a=c$ и $b=d$.

конкретно: $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$.

Дефиниција: Нека су A и B скупови. **Декартов производ** скупова A и B је скуп:

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}.$$

пример:
- $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ – реална раван
- $\{1,2\}\times\{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$
- ако $|A|=m$, $|B|=n$, онда $|A\times B| = m\cdot n$.

Особине:

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(*)\quad A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$
$$A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C)$$
$$A\times(B\triangle C) = (A\times B)\triangle(A\times C)$$
$$A\times B^c = (A\times B)^c$$

(*) $\boxed{\subseteq}$ Нека $x\in A\times(B\cap C)$; $x=(a,b)$, $a\in A$, $b\in B\cap C$
из $b\in B\cap C$ имамо $b\in B$ и $b\in C$
из $a\in A$, $b\in B$ имамо $x=(a,b)\in A\times B$
из $a\in A$, $b\in C$ имамо $x=(a,b)\in A\times C$
Дакле, $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

$\boxed{\supseteq}$ Нека је $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$; тада $x\in A\times B$ и $x\in A\times C$
из $x\in A\times B$ имамо $x=(a,b)$, $a\in A$, $b\in B$,
из $x\in A\times C$ имамо $x=(a',b')$, $a'\in A$, $b'\in C$
Имамо $(a,b)=x=(a',b')$, па важи $a=a'$ и $b=b'$
Дакле, $a\in A$, и $b\in B$ и $b\in C$, па $b\in B\cap C$
Према томе $x=(a,b)\in A\times(B\cap C)$ ∎

Дефиниција: Уређена n-торка елемената $a_1, a_2, \dots, a_n$ је објекат $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ који зад. след. особину:

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ акко $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Конкретно: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ дефинишемо рекурзивно:

(a_1, a_2) - већ дефинисано

$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) := ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1})$

$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4) = (((a_1, a_2), a_3), a_4)$.

Дефиниција: Декартов производ скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ је:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$.

Ако су $A_1 = A_2 = \dots = A_n =: A$, тада Декартов производ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n} =: A^n$ зове се Декартов степен.

$A^1 := A$, $A^0 := \{\emptyset\}$.

пример: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - реална раван

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - реални простор.

$\mathbb{R}^n$

РЕЛАЦИЈЕ

Дефиниција: Бинарна релација између скупова A и B је било који подскуп $R \subseteq A \times B$.

пример: • „$\leq$" $\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, где $(a, b) \in \leq$ акко $a \leq b$

• $\perp \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{R}$, где $(p, \alpha) \in \perp$ акко $p \perp \alpha$.

$\mathcal{P}$ = скуп правих | $(p, \alpha) \notin \perp$ пишемо $p \not\perp \alpha$

$\mathcal{R}$ = скуп равни

коментар: Ако $R \subseteq A \times B$, уместо $(a, b) \in R$ пишемо $a R b$. (понекад пишемо $R(a, b)$.)

уместо $(a, b) \notin R$ пишемо $a \cancel{R} b$ ($\neg a R b$, $\neg R(a, b)$)

Дефиниција (наставак): Бинарна релација на скупу A је било који подскуп $R \subseteq A^2$. $[A = B]$

Дефиниција: n-арна рел. између скупова $A_1, A_2, \ldots, A_n$ је било који подскуп $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

n-арна рел. на скупу A је било који подскуп од A^n.

Коментар: уместо $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ пишемо $R(a_1, \ldots, a_n)$

$(a_1, \ldots, a_n) \notin R$ $\qquad \neg R(a_1, \ldots, a_n)$.

БИНАРНА РЕЛАЦИЈА НА СКУПУ

Нека је $R \subseteq A^2$. Кажемо да је R:

* РЕФЛЕКСИВНА : $(\forall x \in A)\ xRx$
* АНТИРЕФЛЕКСИВНА: $(\forall x \in A)\ \neg\, xRx$
* СИМЕТРИЧНА : $(\forall x,y \in A)\ (xRy \to yRx)$
* АСИМЕТРИЧНА : $(\forall x,y \in A)\ (xRy \to \neg\, yRx)$
* АНТИСИМЕТРИЧНА: $(\forall x,y \in A)\ (xRy \wedge yRx \to x=y)$
* ТРАНЗИТИВНА: $(\forall x,y,z \in A)\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$

Пример: (a) $\leq$ на $\mathbb{R}$

(Р) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leq x$ ✓

(АР) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \not\leq x$ ✗

(С) $(\forall x,y \in \mathbb{R})(x \leq y \to y \leq x)$ ✗

$$\underbrace{1 \leq 2}_{1} \to \underbrace{2 \leq 1}_{0} = 0$$

(АС) $(\forall x,y \in \mathbb{R})\ (x \leq y \to y \not\leq x)$ ✗

$$\underbrace{1 \leq 1}_{1} \to \underbrace{1 \not\leq 1}_{0} = 0$$

(АнС) $(\forall x,y \in \mathbb{R})\ (x \leq y \wedge y \leq x \to x=y)$ ✓

(Т) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})\ (x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$ ✓

(б) $<$ на $\mathbb{R}$

(P) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x < x$ ✗

(AP) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \not< x$ ✓

(C) $(\forall x,y \in \mathbb{R})\ (x<y \to y<x)$ ✗

(AC) $(\forall x,y \in \mathbb{R})\ (x<y \to y \not< x)$ ✓

($A_нC$) $(\forall x,y \in \mathbb{R})\ \underbrace{(\underbrace{x<y \land y<x}_{\text{бар један конјункт је } 0} \to x=y)}_{1}$ ✓

(T) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})\ (x<y \land y<z \to x<z)$ ✓

(в) $\parallel$ на скупу свих правих

(P) ✓ (AP) ✗ (C) ✓ (AC) ✗ ($A_нC$) ✗ (T) ✓

(г) $\perp$ на скупу свих правих

(P) ✗ (AP) ✓ (C) ✓ (AC) ✗ ($A_нC$) ✗ (T) ✗

(д) $R=\emptyset$ на скупу A

(P) $(\forall x \in A)\ \underbrace{x R x}_{0}$ $\begin{cases} ✗ & A \neq \emptyset \\ ✓ & A = \emptyset \end{cases}$

(AP) $(\forall x \in A)\ \underbrace{\neg x R x}_{1}$ $\begin{cases} ✓ & A \neq \emptyset \quad (\text{због } R=\emptyset) \\ ✓ & A = \emptyset \quad (\text{због } A=\emptyset) \end{cases}$

(C) $(\forall x,y \in A)\ (\underbrace{xRy}_{0} \to yRx)$ ✓

(AC) $(\forall x,y \in A)\ (\underbrace{xRy}_{0} \to \neg yRx)$ ✓

($A_нC$) $(\forall x,y \in A)\ (\underbrace{xRy}_{0} \land yRx \to x=y)$ ✓

(T) $(\forall x,y,z \in A)\ (\underbrace{xRy}_{0} \land yRz \to xRz)$ ✓

ОПЕРАЦИЈЕ СА РЕЛАЦИЈАМА

Како $R, S \subseteq A^2$, дефинисани су $R\cup S$, $R\cap S$, $R\setminus S$, $R\triangle S$, R^c (универзум A^2; $R^c = A^2\setminus R$).

$a \; R\cup S \; b \equiv aRb \lor aSb$

$a \; R\cap S \; b \equiv aRb \land aSb$

$a \; R\setminus S \; b \equiv aRb \land \neg aSb$

$a \; R\triangle S \; b \equiv aRb \veebar aSb$

$a \; R^c \; b \equiv \neg aRb$

<u>Дефиниција:</u> <u>Инверз</u> релације $R\subseteq A^2$ је релација $R^{-1}\subseteq A^2$ дефинисана са:

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$

$b\,R^{-1}a \equiv aRb$

[Ако $R\subseteq A\times B$, онда $R^{-1}\subseteq B\times A$.]

<u>Особине:</u> (а) $(R^{-1})^{-1} = R$

$a\,(R^{-1})^{-1}\,b \equiv b\,R^{-1}a \equiv aRb$

(б) $(R * S)^{-1} = R^{-1} * S^{-1}$, за $*\in\{\cup,\cap,\setminus,\triangle\}$

<u>доказ за $* = \triangle$:</u> $(R\triangle S)^{-1} = R^{-1}\triangle S^{-1}$

$$
\begin{aligned}
a\,(R\triangle S)^{-1}\,b &\equiv b\; R\triangle S\; a\\
&\equiv bRa \veebar bSa\\
&\equiv aR^{-1}b \veebar aS^{-1}b\\
&\equiv a\,(R^{-1}\triangle S^{-1})\,b \quad \boxtimes
\end{aligned}
$$

(в) $(R^c)^{-1} \equiv (R^{-1})^c$

<u>доказ:</u> $a\,(R^c)^{-1}\,b \equiv bR^c a \equiv \neg bRa$

$\equiv \neg aR^{-1}b \equiv a\,(R^{-1})^c\,b \quad \boxtimes$

Тврђење: Нека је $R \subseteq A^2$.
R задовољава особину (O) акко R^{-1} зад. (O),
где $O \in \{P, AP, C, AC, A_{н}C, T\}$.

доказ: $(P): (\forall x \in A)\, x R x \equiv (\forall x \in A)\, x R^{-1} x$

R је (P) $\qquad$ R^{-1} је (P) $\qquad$ због др. означавања пром.

$\equiv$ важи јер $xRx \equiv xR^{-1}x$.

(T) $\quad (\forall xyz \in A)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \equiv$ $\qquad$ R^{-1} је (T)

R је (T) $\qquad \equiv (\forall zyx \in A)(zR^{-1}y \wedge yR^{-1}x \rightarrow zR^{-1}x)$

$\equiv$ важи због деф. R^{-1} и комутативности $\wedge$. ■

Дефиниција: **Композиција** релација R и S на скупу A је релација $S \circ R = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S)\}$.
($S \circ R$ је такође рел. на A).

$$a \; S\circ R \; c \equiv (\exists b \in A)(aRb \wedge bSc).$$

[Ако $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, онда $S \circ R \subseteq A \times C$.]

пример: (a) $A = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,2)\}$ $\quad S = \{(2,3)\}$

$S \circ R = \{(1,3)\} \Leftarrow$ јер $1R2 \wedge 2S3$

$$a \; S\circ R \; c \equiv (\exists b \in A)(\underbrace{aRb}_{a=1,\, b=2} \wedge \underbrace{bSc}_{b=2,\, c=3})$$

одавде једино $1 \; S\circ R \; 3$.

$$a \; R\circ S \; c \equiv (\exists b \in A)(\underbrace{aSb}_{a=2,\, b=3} \wedge \underbrace{bRc}_{b=1,\, c=2})$$

одавде $\neg\, a \; R\circ S \; b$ ни за једно a, b

$R \circ S = \emptyset$.

Дакле, $S \circ R \neq R \circ S$.

(ђ) A - скуп свих правих $R = S = \perp$

$\perp \circ \perp = ?$

$$p \perp\circ\perp q \equiv (\exists r \in A)(p \perp r \wedge r \perp q) \equiv p \parallel q$$

Дакле, $\perp \circ \perp = \parallel$

(е) A - скуп свих правих $R = \perp$, $S = \parallel$

$$p \parallel\circ\perp q \equiv (\exists r \in A)(p \perp r \wedge r \parallel q) \equiv p \perp q$$

Дакле, $\parallel \circ \perp = \perp$

$$p \perp\circ\parallel q \equiv (\exists r \in A)(p \parallel r \wedge r \perp q) \equiv p \perp q$$

Дакле, $\perp \circ \parallel = \perp$

Домаћи: $\parallel \circ \parallel = \parallel$.

Тврђење: Нека $R, S, T \subseteq A^2$. Важи $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Доказ:
$$\begin{aligned}
a \; T\circ(S\circ R) \; d &\equiv (\exists c \in A)[a \; S\circ R \; c \wedge c T d] \\
&\equiv (\exists c \in A)[(\exists b \in A)(a R b \wedge b S c) \wedge c T d] \\
&\equiv (\exists b, c \in A)[a R b \wedge b S c \wedge c T d] \\
&\equiv (\exists b \in A)[a R b \wedge (\exists c \in A)(b S c \wedge c T d)] \\
&\equiv (\exists b \in A)[a R b \wedge b \; T\circ S \; d] \\
&\equiv a \; (T\circ S)\circ R \; d.
\end{aligned}$$

Коментар: Писаћемо $T \circ S \circ R$, $R_n \circ R_{n-1} \circ \ldots \circ R_2 \circ R_1$

Дефиниција: Степен рел. R је релација:
$$R^n := \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}, \quad n \geq 1.$$

$$a R^n b \equiv (\exists a_0, \ldots, a_n \in A)\; a = a_0 R a_1 R a_2 R \ldots R a_{n-1} R a_n = b.$$

Особина: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

доказ:
$$\begin{aligned}
c \,(S\circ R)^{-1}\, a &\equiv a \; S\circ R \; c \\
&\equiv (\exists b \in A)(a R b \wedge b S c) \\
&\equiv (\exists b \in A)(b R^{-1} a \wedge c S^{-1} b) \\
&\equiv (\exists b \in A)(c S^{-1} b \wedge b R^{-1} a) \\
&\equiv c \; R^{-1} \circ S^{-1} \; a
\end{aligned}$$

Дефиниција: За дати скуп A, дијагонала скупа A је релација $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

$$a \, \Delta_A \, b \equiv a = b.$$

Коментар: Нека је $R \subseteq A^2$.

R је (Р) акко $\Delta_A \subseteq R$.

R је (АР) акко $\Delta_A \cap R = \emptyset$.

R је (С) акко $R \subseteq R^{-1}$.

R је (АС) акко $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

R је (А₂С) акко $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$.

R је (Т) акко $R^2 \subseteq R$.

Примери индексиране фамилије:

$$K_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\} \qquad r>0$$

$$U_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < r^2\} \qquad \Updownarrow$$

$$S_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > r^2\} \qquad r\in \underbrace{(0,+\infty)}_{\text{инд. скуп}}$$

$\mathcal{F}_K = \{K_r \mid r>0\}$ – инд. фам. свих кругова са центром $(0,0)$

$\mathcal{F}_U = \{U_r \mid r>0\}$ – инд. фам. унутрашњости свих кругова са центром $(0,0)$

$\mathcal{F}_S = \{S_r \mid r>0\}$ – –||– спољашњости.

$$\bigcup \mathcal{F}_K = \bigcup_{r>0} K_r = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad \bigcap \mathcal{F}_K = \bigcap_{r>0} K_r = \emptyset$$

$$\bigcup \mathcal{F}_U = \bigcup_{r>0} U_r = \mathbb{R}^2; \quad \bigcap \mathcal{F}_U = \bigcap_{r>0} U_r = \{(0,0)\}$$

$$\bigcup \mathcal{F}_S = \bigcup_{r>0} S_r = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad \bigcap \mathcal{F}_S = \bigcap_{r>0} S_r = \emptyset$$

$$\bigcap_{r>0} \underline{U_r \cup S_r} = \bigcap_{r>0} U_r \cup \bigcap_{r>0} S_r = \{(0,0)\} \cup \emptyset = \{(0,0)\}$$

$$\bigcup_{r>0} U_{r+1} \cap S_r = \bigcup_{r>0} U_{r+1} \cap \bigcup_{r>0} S_r$$

$$= \bigcup_{r>1} U_r \cap \bigcup_{r>0} S_r$$

$$= \mathbb{R}^2 \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$$

$$= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$