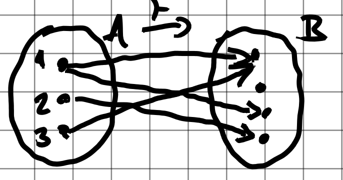
Функције

Дефиниција: Нека је $F \subseteq A \times B$ релација. F је функција из A у B, $F: A \to B$, ако:

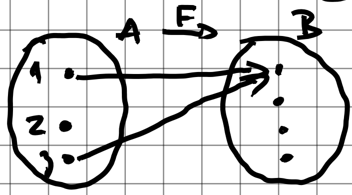
$$(\forall a\in A)(\exists_1 b\in B)\ aFb$$

Како је за свако $a\in A$, $b\in B$ тд aFb јединствено одређено, то b означавамо са $F(a) := b$.



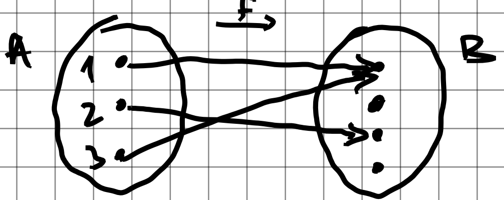
Није ф-ја

јер је 1 у рел. F са два ел. у B



Није ф-ја

јер 2 није у рел. F ни са једним ел. из B



јесте ф-ја

Пример: Нека су $F, G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дефинисане са:

$F = \{(x,x^2) \mid x\in\mathbb{R}\}$ $(\forall x\in\mathbb{R})\ xFx^2$; $x^2 = F(x)$

$G = \{(x^2,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2Gx$ [$G = F^{-1}$]

Да ли су F и G ф-је?

$\underline{\underline{G}}$: $(\forall a\in\mathbb{R})(\exists_1 b\in\mathbb{R})\ aGb$?

$a = b^2$ Није ф-ја

- за $a=-1$, не постоји $b\in\mathbb{R}$ тд $-1=b^2$!
- за $a=4$, имамо $b_1=2$ и $b_2=-2$ тд $4=b_1^2=b_2^2$.

тј. b није јединствено!

$\underline{\underline{F}}$: $(\forall a\in\mathbb{R})(\exists_1 b\in\mathbb{R})\ aFb$?

$b = a^2$ ЈЕСТЕ ф-ја

јер квадрат реалног броја постоји и јединствен је.

Дефиниција: Нека је $F: A \to B$.

(1) Скуп A назива се <u>домен</u> ф-је F, $A =: \mathrm{Dom}(F)$.

(2) Скуп B назива се <u>кодомен</u> ф-је F.

(3) <u>Слика ф-је F</u> је скуп

$$\mathrm{Im}(F) = \{ F(a) \mid a \in A \} \subseteq B.$$

Пример: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$

$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R}$, кодомен је $\mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(F) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$

Тврђење: Нека су $F: A \to B$ и $G: B \to C$ (као рел. $F \subseteq A \times B$ и $G \subseteq B \times C$). Тада имамо дефинисану рел $G \circ F \subseteq A \times C$. Важи: $G \circ F : A \to C$.

Доказ: <u>знамо:</u> $(\forall a \in A)(\exists_1 b \in B)\; aFb \quad (*)$ јер је F ф-ја

$(\forall b \in B)(\exists_1 c \in C)\; bGc \quad (\#)$ -||- G -||-

$$a\, G \circ F\, c \equiv (\exists b \in B)(aFb \wedge bGc)$$

<u>циљ:</u> $(\forall a \in A)(\exists_1 c \in C)\; a\, G \circ F\, c$!

Нека је $a \in A$ произвољан елемент.

<u>Егзистенција $(\exists c \in C)\; a\, G\circ F\, c$:</u>

из $(*)$ постоји $b \in B$ тд aFb

из $(\#)$ постоји $c \in C$ тд bGc $\Big\}$ $a\, G \circ F\, c$.

<u>Јединственост $(\exists_1 c \in C)\; a\, G \circ F\, c$:</u>

Нека $a\, G \circ F\, c_1$ и $a\, G \circ F\, c_2$. Тада:

постоји $b_1 \in B$ тд $\boxed{aFb_1} \wedge \boxed{b_1 G c_1}$

постоји $b_2 \in B$ тд $\boxed{aFb_2} \wedge \boxed{b_2 G c_2}$

из aFb_1, aFb_2 и $(*)$ имамо $b_1 = b_2 =: b$

из bGc_1, bGc_2 и $(\#)$ имамо $c_1 = c_2$ ✓

<u>Напомена:</u> $a\, G \circ F\, c \equiv (\exists b \in B)\; aFb \wedge bGc$

$\underline{c = G \circ F(a)}$ $\qquad b = F(a) \qquad c = G(b)$

$G\circ F(a) = c = G(b) = G(F(a))$

Дакле, $G\circ F(a) = G(F(a))$ за $a\in A$.

<u>Коментар:</u> Видели смо да инверзна релација ф-је $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2$, није ф-ја.

<u>Дефиниција:</u> Нека је $F: A\to B$.

(1) F је ИНЈЕКТИВНА или „1-1" ако:

$(\forall a_1,a_2\in A)(a_1\neq a_2 \to F(a_1)\neq F(a_2))$ „

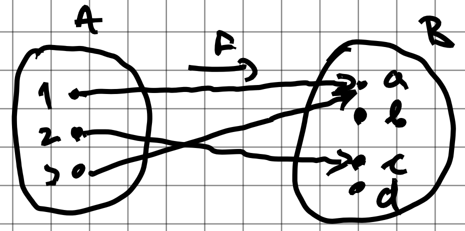
$(\forall a_1,a_2\in A)(F(a_1)=F(a_2)\to a_1=a_2)$ "

(2) F је СУРЈЕКТИВНА или „НА" ако:

$(\forall b\in B)(\exists a\in A)\ b=F(a) \quad \equiv \quad B = Im(F)$

(3) F је БИЈЕКТИВНА ако је „1-1" и „НА".

<u>Пример:</u>



• F није 1-1:

$\underbrace{1\neq 3}_{1} \to \underbrace{F(1)\neq F(3)}_{0} = 0$

• F није НА:

$\neg(\exists x\in A)\ b=F(x)$

$\neg(\exists x\in A)\ d=F(x)$

$Im(F)=\{a,c\}\neq B$.

• $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2$

<u>Није 1-1:</u> $\underbrace{2\neq -2}_{1}\to \underbrace{F(2)\neq F(-2)}_{0} = 0$

<u>Није НА:</u> $\neg(\exists x\in\mathbb{R})\ -1 = F(x)=x^2$

<u>Тврђење:</u> Нека је $F:A\to B$ ($F\subseteq A\times B$, $F^{-1}\subseteq B\times A$).

$F^{-1}: B\to A$ акко F је бијекција.

<u>Доказ:</u> $(\Rightarrow)$ Нека је $F^{-1}: B\to A$

<u>значи:</u> $(\forall b\in B)(\exists_1 a\in A)\ b\, F^{-1} a$ (*)

дтв: $(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \to F(a_1) \neq F(a_2))$!

$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ b = F(a)$

1-1: Нека $a_1, a_2 \in A$ и $a_1 \neq a_2$. дтв: $F(a_1) \neq F(a_2)$

(ттс) $F(a_1) = F(a_2) =: b$. Тада $a_1 F b$ и $a_2 F b$

$b F^{-1} a_1$ и $b F^{-1} a_2$

из (*), $b F^{-1} a_1$, $b F^{-1} a_2$ имамо $a_1 = a_2$ ↯

НА: Нека $b \in B$. из (*) постоји $a \in A$ тд $b F^{-1} a$

тј. $a F b$, тј. $b = F(a)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека је F бијекција.

знамо: $(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \to F(a_1) \neq F(a_2))$ (#)

$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ b = F(a)$. ($)

дтв: $F^{-1}: B \to A$ тј.

$(\forall b \in B)(\exists_1 a \in A)\ b F^{-1} a$!

Нека $b \in B$. из ($) имамо $a \in A$ тд $b = F(a)$

$a F b$

$b F^{-1} a$

Дакле, $(\exists a \in A)\ b F^{-1} a$.

Јединственост a: Нека је $b F^{-1} a'$, тј. $a' F b$, тј. $b = F(a')$.

Имамо $F(a) = b = F(a')$, па због (#) $a = a'$ ☒

Коментар: $F: A \to B$, тада $F: A \xrightarrow{НА} Im(F)$

$F^{-1}: Im(F) \to A$ акко F је 1-1.

Коментар: Нека је $F: A \to B$ бij, тј. $F^{-1}: B \to A$.

$F^{-1}(b) = a \equiv b F^{-1} a \equiv a F b \equiv F(a) = b$

Тада: $F^{-1}(F(a)) = F^{-1}(b) = a$; $F^{-1} \circ F(a) = a$

$F(F^{-1}(b)) = F(a) = b$; $F \circ F^{-1}(b) = b$

Дефиниција: Идентитета скупа A је ф-ја $id_A: A \to A$ дата са $id_A(a) = a$ (као рел. $id_A = \Delta_A$)

Коментар: Нека је $F: A \to B$ биј., тј. $F^{-1}: B \to A$.

Тада $F^{-1} \circ F: A \to A$ и $F \circ F^{-1}: B \to B$

$F^{-1} \circ F(a) = a = id_A(a)$

$F \circ F^{-1}(b) = b = id_B(b)$

$$\boxed{\begin{array}{l} F^{-1} \circ F = id_A \\ F \circ F^{-1} = id_B \end{array}}$$

Тврђење: Нека је $F: A \to B$. F је бијекција акко постоји ф-ја $G: B \to A$ тд $G \circ F = id_A$ и $F \circ G = id_B$. (и у том случају $G = F^{-1}$.)

Доказ: $\boxed{\Rightarrow}$ Нека је F биј. Узмимо $G := F^{-1}$.

Једнакости важе према претходном коментару.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека је $G: B \to A$ тд $\underline{G \circ F = id_A}$ и $\underline{F \circ G = id_B}$.

тдк: F је 1-1 и F је НА!

1-1: $(\forall a_1, a_2 \in A)(F(a_1) = F(a_2) \to a_1 = a_2)$

Нека $a_1, a_2 \in A$ и $F(a_1) = F(a_2)$; тдк: $a_1 = a_2$

$F(a_1) = F(a_2) \quad | G$

$G(F(a_1)) = G(F(a_2))$

$G \circ F(a_1) = G \circ F(a_2)$

$id_A(a_1) = id_A(a_2)$, тј. $a_1 = a_2$ ✓

НА: $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ b = F(a)$

Нека $b \in B$. Узмимо $a := G(b)$.

Тада $F(a) = F(G(b)) = F \circ G(b) = id_B(b) = \underline{b}$ ∎

Задатак: Нека је $F: A \to B$.

(1) F је 1-1 акко постоји $G: B \to A$ тд $G \circ F = id_A$

(2) F је НА акко постоји $G: B \to A$ тд $F \circ G = id_B$.

Задатак: Нека је $F: A \to B$ и $G: B \to C$; $G \circ F: A \to C$.

(1) Ако су F и G 1-1, онда је и $G \circ F$ 1-1.

(1') Ако је $G \circ F$ 1-1, онда је F 1-1.

(1'') Ако је $G \circ F$ 1-1, онда G не мора бити 1-1 (наћи пример)

(2) Ако су F и G НА, онда је $G \circ F$ НА.

(2') Ако је $G \circ F$ НА, онда је G НА

(2'') Ако је $G \circ F$ НА, онда F не мора бити НА (наћи пример)

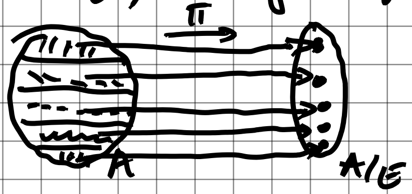
(3) Ако су F и G биј, онда је $G \circ F$ биј.

(3') Ако је $G \circ F$ биј, онда F је 1-1 и G је НА.

(3'') Ако је $G \circ F$ биј, онда не мора F бити НА и G 1-1 (наћи пример)

ЈЕЗГРО ФУНКЦИЈЕ

Нека је E екв. на A. Тада дефинишемо пројекцију $\pi : A \to A/E$ са $\pi(a) = [a]_E$; π је тривијално НА.



Нека је $F: A \to B$. Дефинишемо релацију $\equiv_F$ на A

$$a_1 \equiv_F a_2 \quad :\equiv \quad F(a_1) = F(a_2)$$

$\equiv_F$ зове се <u>језгро ф-је</u> F (понекад се означава и са $\ker(F)$)

<u>$\equiv_F$ је еквиваленција на A:</u>

(P) $a \equiv_F a \quad \equiv \quad F(a) = F(a)$ ✓

(C) $a \equiv_F b \quad \equiv \quad F(a) = F(b) \quad \equiv \quad F(b) = F(a) \quad \equiv \quad b \equiv_F a$

(T) $a \equiv_F b \wedge b \equiv_F c \quad \equiv \quad F(a) = F(b) \wedge F(b) = F(c)$

тада $F(a) = F(c)$, тј. $a \equiv_F c$.

<u>Тврђење:</u> Нека је $F: A \to B$ и E екв. на A. Постоји $\hat{F} : A/E \to B$ тд $F = \hat{F} \circ \pi$ акко $E \subseteq \equiv_F$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/E \arrow[ur, dashed, "\hat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

$F = \hat{F} \circ \pi$

Доказ: $\boxed{\rightarrow}$ Нека $\hat{F} : A/E \to B$ тд $\underline{F = \hat{F} \circ \pi}$

Циљ: $E \subseteq \equiv_F$.

Нека $a_1 E a_2$. Тада $[a_1]_E = [a_2]_E$, тј.

$$\pi(a_1) = \pi(a_2) \quad / \hat{F}$$

Тада $\hat{F}(\pi(a_1)) = \hat{F}(\pi(a_2))$, тј. $\hat{F} \circ \pi(a_1) = \hat{F} \circ \pi(a_2)$

тј. $F(a_1) = F(a_2)$, тј. $a_1 \equiv_F a_2$.

$\boxed{\leftarrow}$ Нека $\underline{E \subseteq \equiv_F}$. Циљ: Дефинисати $\hat{F} : A/E \to B$ тд. $F = \hat{F} \circ \pi$ //

$$F(a) = \hat{F} \circ \pi(a) = \hat{F}(\pi(a)) = \hat{F}([a]_E)$$

Дефинишимо $\underline{\hat{F}([a]_E) := F(a)}$.

Треба доказати да је $\hat{F} : A/E \to B$!

Може се десити $[a_1]_E = [a_2]_E$, али $F(a_1) \neq F(a_2)$.

Тада
$$\begin{array}{ccc} \hat{F}([a_1]_E) & = & F(a_1) \\ \| & & \neq \\ \hat{F}([a_2]_E) & = & F(a_2) \end{array} \quad \lightning$$

Нека $[a_1]_E = [a_2]_E$. Тада $a_1 E a_2$, па $a_1 \equiv_F a_2$.
(јер $E \subseteq \equiv_F$), тј. $F(a_1) = F(a_2)$.

Дакле, дефиниција $\hat{F}([a]_E)$ не зависи од избора представника a из класе. ///

Како $\equiv_F \subseteq \equiv_F$, због имамо $\hat{F}$ тд $\underline{F = \hat{F} \circ \pi}$

где $\pi : A \to A/_{\equiv_F}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/_{\equiv_F} \arrow[ur, dotted, "\hat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Тврђење: Уз претходне ознаке, $\hat{F}$ је бијекција између $A/_{\equiv_F}$ и $Im(F)$.

Доказ: НА: Нека $b \in Im(F)$, тј. $b = F(a)$ за неко $a \in A$.

Тада $b = F(a) = \hat{F} \circ \pi(a) = \hat{F}(\pi(a)) = \hat{F}([a]_{\equiv_F})$.

1-1: $\hat{F}([a_1]_{\equiv_F}) = \hat{F}([a_2]_{\equiv_F})$

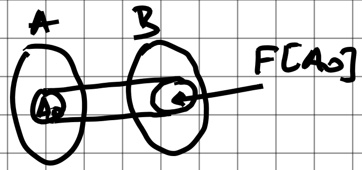
$\hat{F}(\pi(a_1)) = \hat{F}(\pi(a_2))$

$\hat{F} \circ \pi(a_1) = \hat{F} \circ \pi(a_2)$, тј. $F(a_1) = F(a_2)$, тј. $a_1 \equiv_F a_2$

Дакле, $[a_1]_{\equiv_F} = [a_2]_{\equiv_F}$. ☐

Директна и инверзна слика

Нека је $F : A \to B$, $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$.

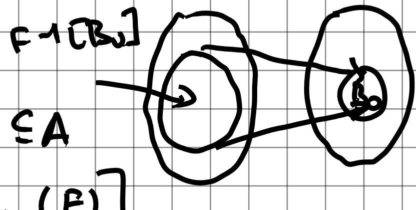


Директна слика скупа A_0 је:

$$F[A_0] = \{F(a) \mid a \in A_0\} \subseteq B$$

Специјално, $F[A] = Im(F)$

$$\boxed{b \in F[A_0] \equiv (\exists a \in A_0)\ b = F(a)}$$



Инверзна слика скупа B_0 је:

$$F^{-1}[B_0] = \{a \in A \mid F(a) \in B_0\} \subseteq A$$

Специјално, $F^{-1}[B] = A = F^{-1}[Im(F)]$.

$$\boxed{a \in F^{-1}[B_0] \equiv F(a) \in B_0}$$

Основне особине: $F : A \to B$, $A_0, A_0' \subseteq A$, $B_0, B_0' \subseteq B$

(1) $F[A_0] = \emptyset$ акко $A_0 = \emptyset$.

$F^{-1}[B_0] = \emptyset$ акко $B_0 \cap Im(F) = \emptyset$

(2) $F^{-1}[F[A_0]] \supseteq A_0$; ако је F 1-1, онда важи (=)
и обрнуто, ако (=) важи за све $A_0 \subseteq A$, онда је F 1-1.

(3) $F[F^{-1}[B_0]] \subseteq B_0$; ако је F НА, онда важи (=)
и обрнуто, ако (=) важи за све $B_0 \subseteq B$, онда је F НА.

(4) Ако $A_0 \subseteq A_0'$, онда $F[A_0] \subseteq F[A_0']$.

Ако $B_0 \subseteq B_0'$, онда $F^{-1}[B_0] \subseteq F^{-1}[B_0']$.

(5) $F\left[F^{-1}\left[F[A_0]\right]\right] = F[A_0]$

$F^{-1}\left[F\left[F^{-1}[B_0]\right]\right] = F^{-1}[B_0]$.

(6) $F[A_0 \cup A_0'] = F[A_0] \cup F[A_0']$

$F[A_0 \cap A_0'] \subseteq F[A_0] \cap F[A_0']$

$F[A_0 \setminus A_0'] \supseteq F[A_0] \setminus F[A_0']$

(ако је F 1-1, онда важи (=) код $\cap$ и $\setminus$; штавише ако (=) важи за све $A_0, A_0' \subseteq A$, онда F је 1-1)

(7) $F^{-1}[B_0 \cup B_0'] = F^{-1}[B_0] \cup F^{-1}[B_0']$

$F^{-1}[B_0 \cap B_0'] = F^{-1}[B_0] \cap F^{-1}[B_0']$

$F^{-1}[B_0 \setminus B_0'] = F^{-1}[B_0] \setminus F^{-1}[B_0']$.

Доказ (7 $\cap$): $a \in F^{-1}[B_0 \cap B_0'] \equiv F(a) \in B_0 \cap B_0'$

$\equiv F(a) \in B_0 \wedge F(a) \in B_0'$

$\equiv a \in F^{-1}[B_0] \wedge a \in F^{-1}[B_0']$

$\equiv a \in F^{-1}[B_0] \cap F^{-1}[B_0']$

Доказ (6 $\setminus$): $F[A_0 \setminus A_0'] \supseteq F[A_0] \setminus F[A_0']$.

Нека $b \in F[A_0] \setminus F[A_0']$, тј. $b \in F[A_0] \wedge b \notin F[A_0']$

$b \in F[A_0] \equiv (\exists a \in A_0)\ b = F(a)$

па нека је $a \in A_0$ тд $b = F(a)$.

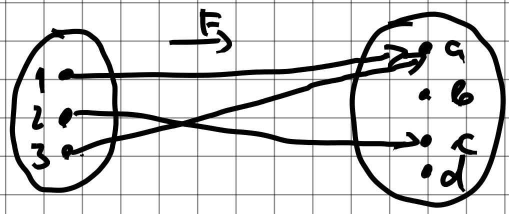
Приметимо, $a \notin A_0'$: у супротном, ако $a \in A_0'$

онда $F(a) \in F[A_0']$

тј. $b \in F[A_0']$ ↯

Дакле, $a \in A_0$, $a \notin A_0'$, $b = F(a)$, па $a \in A_0 \setminus A_0'$ и $b = F(a)$

ej. $b = F(a) \in F[A_0 \setminus A_0']$. Ya



$A_0 = \{1\}$ $\quad F[A_0] = \{a\}$

$A_0' = \{3\}$ $\quad F[A_0'] = \{a\}$

$F[A_0] \setminus F[A_0'] = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$

$F[A_0 \setminus A_0'] = F[\{1\} \setminus \{3\}] = F[\{1\}] = \{a\}$

$F[A_0 \setminus A_0'] \supsetneq F[A_0] \setminus F[A_0']$.