РЕЛАЦИЈЕ ПОРЕТКА

Дефиниција: Нека је $R \subseteq A^2$. R је поредак на A ако:

(Р) $(\forall x \in A)\, xRx$

(АнС) $(\forall x,y \in A)(xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$

(Т) $(\forall x,y,z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

Пример: • $\leq$ на $\mathbb{R}$

• $\subseteq$ на било којој фамилији скупова (нпр. $P(A)$)

• $\mid$ на $\mathbb{N}$

Нотација: Ако је $R \subseteq A^2$ поредак

xRy читамо „x је R-мањи од y"

тј. „y је R-већи од x"

Дефиниција: Нека је $R \subseteq A^2$ поредак. Елементи x и y су *упоредиви* ако xRy или yRx. У супротном, ако $\neg xRy$ и $\neg yRx$, кажемо да су x и y неупоредиви и записујемо $x \perp_R y$. Поредак R је *линеаран* ако су свака два елемента упоредива тј.

$(\forall x,y \in A)(xRy \vee yRx)$.

Пример: • $\leq$ на $\mathbb{R}$ је линеаран; $(\forall x,y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$

• $\subseteq$ на $P(A)$, $|A| \geq 2$, није линеаран

за $a,b \in A$, $a \neq b$, имамо $\{a\} \nsubseteq \{b\} \wedge \{b\} \nsubseteq \{a\}$.

Дакле, $\{a\} \perp_{\subseteq} \{b\}$.

• $\mid$ на $\mathbb{N}$ није линеаран: $2 \nmid 3 \wedge 3 \nmid 2$, тј. $2 \perp 3$.

Дефиниција: Нека је $R \subseteq A^2$ поредак, $B \subseteq A$, $a \in A$.

• a је *минималан ел.* скупа B ако

$a \in B \wedge (\forall x \in B)(xRa \rightarrow x=a)$

($a \in B$ и не постоји елемент у B који је R-мањи од a.)

• a је *минимум* (*најмањи ел.*) скупа B ако

$a \in B \wedge (\forall x \in B)\, aRx$

(a ∈ B и a је R-мањи од свих елемената из B.)

- a је <u>максималан ел.</u> скупа B ако
  $a \in B \land (\forall x \in B)(aRx \rightarrow x = a)$.
  (a ∈ B и ништа из B није R-веће од a)
- a је <u>максимум (највећи ел.)</u> скупа B ако
  $a \in B \land (\forall x \in B)\, xRa$.
  (a ∈ B и a је R-већи од свих ел. из B.)

<u>Пример:</u> $|$ на $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

<u>деф:</u> $a \mid b \;:\equiv\; (\exists k \in \mathbb{N})\; b = a \cdot k$.

(Р) $a \mid a$ јер $a = a \cdot 1$. (спец. $0 \mid 0$!)

(А∧С) $a \mid b \land b \mid a$, тј. $b = a \cdot k \land a = b \cdot l$

тада $b = b \cdot (kl)$, тј. $b(1 - kl) = 0$

1° $b = 0$: $a = b \cdot l = 0 \cdot l = 0$, па $a = b$

2° $1 - kl = 0$: $kl = 1$, тада $k = l = 1$, па

$a = b \cdot l = b \cdot 1 = b$, тј. $a = b$

[$|$ на $\mathbb{Z}$ НИЈЕ (А∧С): $5 \mid -5 \land -5 \mid 5$, али $5 \neq -5$]

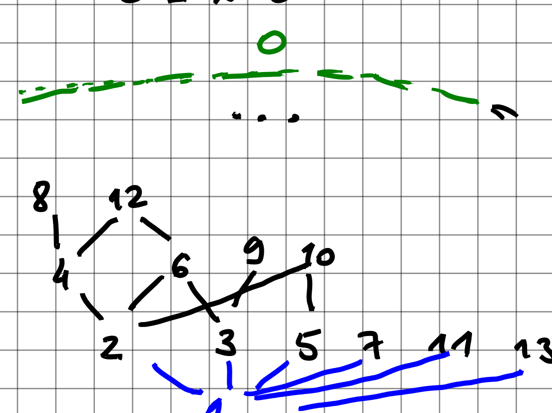
(Т) $a \mid b \land b \mid c$, тј. $b = a \cdot k \land c = b \cdot l$

тада $c = a \cdot (kl)$, тј. $a \mid c$.

<u>$B = \mathbb{N}$</u>: <u>минимум од B</u>: $a \in \mathbb{N}$ је минимум ако $(\forall x \in \mathbb{N})\; a \mid x$, тј. $a = 1$ је минимум

<u>максимум од B</u>: $a \in \mathbb{N}$ је максимум ако $(\forall x \in \mathbb{N})\; x \mid a$

$a = 0$ је максимум! $x \mid 0$ јер $0 = x \cdot 0$



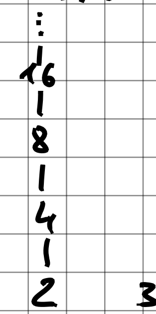
1 је једини минималан ел.

0 је једини максималан ел.

- <u>$B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$</u>:
  B нема минимум

B има бесконачно много минималних елемената: то су прости бројеви

- $B = \mathbb{N}\setminus\{0\}$: B нема ни максимум ни максималне ел.



- $B = \{2^n \mid n\geq 1\}\cup\{3\} = \{2,3,4,8,16,32,\dots\}$

- B нема минимум
- минимални су 2 и 3 (јер $2^n \nmid 3, n\geq 1$)
- B нема максимум
- максималан ел. је 3. (јер $3 \nmid 2^n, n\geq 1$)

[$3\in B \wedge (\forall x\in B)(3\mid x \to 3=x)$

$x=3$: $\underbrace{3\mid 3}_{1} \to \underbrace{3=3}_{1} = 1$

$x=2^n$: $\underbrace{3\mid 2^n}_{0} \to 3=2^n = 1$]

Тврђење: Нека је $R\subseteq A^2$ поредак, $B\subseteq A$, $a\in A$.

(а) Ако је a минимум од B, онда је a јединствени минимум од B и јединствени минималан ел. од B.

(б) Ако је a максимум од B, онда је a јединствени максимум од B и јединствени максималан ел. од B

Последица: Ако B нема или има бар два минимална ел., онда B нема минимум.
(Исто важи за максималан / максимум.)

Коментар: Како је минимум од B, ако постоји, јединствен, означавамо га са min(B).
(Исто важи за максимум / max(B).)

Доказ тврђења: (а) Нека је a минимум од B, тј:

$$a\in B \wedge (\forall x\in B)\, aRx \quad (*)$$

1° a је јединствени минимум: Нека је b минимум од B, тј:

$$b\in B \wedge (\forall x\in B)\, bRx \quad (\#).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{како } a\in B \text{, у (\#) за } x=a \text{ имамо } bRa \\ \text{како } b\in B \text{, у (*) за } x=b \text{ имамо } aRb\end{array}\right\}$$

по (АнС) имамо $a=b$.

2° <u>a јесте минималан ел.:</u>

<u>Циљ</u>: $\underbrace{a\in B}_{1} \land (\forall x\in B)(xRa \to x=a)$

Нека $x\in B$; докажимо $xRa \to x=a$, па нека xRa

из (*) имамо aRx, па по (АнС) $x=a$.

Дакле, $xRa \to x=a = 1$ за све $x\in B$.

3° <u>a је једини минималан ел.:</u>

Нека је b минималан ел. од B, тј:

$b\in B \land (\forall x\in B)(xRb \to x=b)$ (\$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{из (*), за } x=b \text{, имамо } aRb \\ \text{из (\$), за } x=a \text{, имамо } aRb \to a=b\end{array}\right\} \; a=b$$

$\blacksquare$

<u>Дефиниција</u>: Нека је $R\subseteq A^2$ поредак, $B\subseteq A$.

(а) B је <u>ланац</u> ако су свака два ел. из B упоредива

тј. $(\forall x,y\in B)(xRy \lor yRx)$

(б) B је <u>антиланац</u> ако су свака два разл. ел. из B неупоредива, тј. $(\forall x,y\in B)(x\neq y \to x\perp_R y)$

<u>Пример</u>: $|$ на $\mathbb{N}$

- $\{2^n \mid n\geq 0\} = \{1,2,4,8,\dots\}$ је ланац
- Скуп простих бројева је антиланац.

<u>Тврђење</u>: Нека је $R\subseteq A^2$ поредак, $B\subseteq A$, $a\in A$.

(а) Ако је a минималан ел. од B и B ланац, онда је a минимум од B.

(б) Ако је a максималан ел. од B и B ланац, онда је a максимум од B.

Доказ: Нека је a минималан ел. од B, тј.

$$a\in B \wedge (\forall x\in B)(xRa \to x=a) \quad (*)$$

Циљ: $a\in B \wedge \underline{(\forall x\in B)\ aRx}$!

Нека је $x\in B$ произвољно.

Како је B ланац, a и x су упоредиви, тј. aRx или xRa.

1° Ако aRx, нема шта да се доказује.

2° Нека $\underline{xRa}$. Из $(*)$ имамо $\underline{xRa \to x=a}$

па $x=a$, па aRx важи због (P).

У сваком случају важи $\underline{aRx}$. ☑

Дефиниција: Нека је $R\subseteq A^2$ поредак, $B\subseteq A$, $a\in A$.

(а) a је <u>доње ограничење</u> за B ако $(\forall x\in B)\ aRx$.

(а је мањи од свих ел. из B, али не тражимо да $a\in B$, тј. не говоримо о минимуму!)

(б) a је <u>горње ограничење</u> за B ако $(\forall x\in B)\ xRa$

(в) a је <u>инфимум</u> од B ако је a највеће доње ограничење за B. (тј. a је максимум скупа доњих ограничења за B)

(г) a је <u>супремум</u> од B ако је a најмање горње ограничење за B (тј. a је минимум скупа горњих ограничења за B)

Коментар: Инфимум (супремум) скупа B, ако постоји, је јединствен (јер је минимум (максимум) јединствен) па га обележавамо са $\inf(B)$ ($\sup(B)$).

Пример: (а) $|$ на $\mathbb{N}$

* $B = \{4, 6, 20\}$

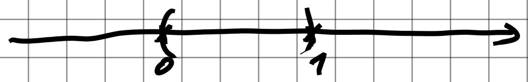
доња граничена за B: $1, 2$; $\inf(B) = 2$

горња гр. за B: $60 \cdot n,\ n \geq 0$; $\sup(B) = 60$

* $B \subseteq \mathbb{N}$ коначан: $\inf(B) =$ НЗД ел. из B

$\sup(B) =$ НЗС ел. из B

(б) $\leq$ на $\mathbb{R}$



* $B = (0,1)$

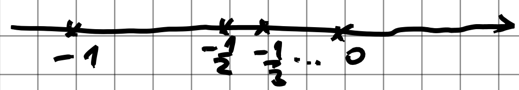
доња огр: $a \in (-\infty, 0]$ $\inf(B) = 0$

горња гр: $a \in [1, +\infty)$ $\sup(B) = 1$

* $B = (0,1]$

горња гр: $a \in [1, +\infty)$ $\sup(B) = 1$

* $B = \{-\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$



доња гр: $a \in (-\infty, -1]$ $\inf(B) = -1$

горња гр: $a \in [0, +\infty)$ $\sup(B) = 0$

* $B = \mathbb{N}$:

доња гр: $a \in (-\infty, 0]$ $\inf(B) = 0$

горња гр: $\emptyset$ $\sup(B)$ не постоји

(в) $R \subseteq A^2$ поредак и $B = \emptyset$

доња гр: a је доње гр. ако $\underbrace{(\forall x \in \emptyset)\, aRx}_{1}$

сви $a \in A$ су доња гр.

$\inf(\emptyset) = \max(A)$, ако постоји

горња гр: a је горње огр. ако $\underbrace{(\forall x \in \emptyset)\, xRa}_{1}$

сви $a \in A$ су горња гр.

$\sup(\emptyset) = \min(A)$, ако постоји

Тврђење: Нека је $R \subseteq A^2$ поредак и $B \subseteq A$.

(а) Ако $a = \min(B)$, онда $a = \inf(B)$.

(б) Ако $a = \max(B)$, онда $a = \sup(B)$.

(в) Ако $a = \inf(B)$ и $a \in B$, онда $a = \min(B)$.

(г) Ако $a = \sup(B)$ и $a \in B$, онда $a = \max(B)$.

Доказ: (а) Нека је $a = \min(B)$, тј.

$$\underline{a \in B} \wedge (\forall x \in B)\, aRx.$$

због $(\forall x \in B)\, aRx$ имамо да a јесте доње огр. за B.

циљ: Ако је b доње огр. за B, онда bRa.

Нека је b доње огр. за B, тј. $(\forall x \in B)\, bRx$.

Посебно, за $x = a$ имамо bRa. ✓

(в) Ако $a = \inf(B)$ и $a \in B$, тада имамо

$$a \in B \wedge \underbrace{(\forall x \in B)\, aRx}_{\text{јер је } a \text{ доње огр.}}, \text{ тј. } a = \min(B).$$

∎

Тврђење: Нека је $R \subseteq A^2$ поредак. Тада је и R^{-1} поредак и важе:

* R - минималан ел. од B = R^{-1} - максималан ел. од B
* R - максималан -//- = R^{-1} - минималан -//-
* R - минимум од B = R^{-1} - максимум од B
* R - максимум од B = R^{-1} - минимум од B
* R - доње огр. за B = R^{-1} - горње огр. за B
* R - горње огр. за B = R^{-1} - доње огр. за B
* R - инфимум од B = R^{-1} - супремум од B
* R - супремум од B = R^{-1} - инфимум од B.

Доказ: Видели смо да је R (Р) [(АнС), (Т)] акко је R^{-1} (Р) [(АнС), (Т)].

Дакле, R је поредак акко R^{-1} поредак.

$aRb \equiv b R^{-1} a$, тј.

a R-мање од b $=$ a R^{-1}-веће од b

b R-веће од a $=$ b R^{-1}-мање од a $\boxed{//}$

пример: $\leq$ на $\mathbb{R}$; $\leq^{-1} = \geq$.

$a \leq^{-1} b \equiv b \leq a \equiv a \geq b$.

СТРОГИ ПОРЕДАК

пример: $<$ на $\mathbb{R}$, $>$ на $\mathbb{R}$

задатак: Нека је $R \subseteq A^2$.

(а) Ако је R (AC), онда је R (AP).

(б) Ако је R (AP) + (T), онда је R (AC).

(в) R је (AP) + (T) $\equiv$ R је (AC) + (T)

решење: (в) је последица од (а) и (б).

(а) Нека је R (AC), тј. $(\forall x,y \in A)(xRy \to \neg yRx)$ (*)

циљ: R је (AP), тј. $(\forall x \in A) \neg xRx$.

за $x \in A$, у (*) ако ставимо $x=y$

имамо $xRx \to \neg xRx = 1$

одавде имамо $xRx = 0$, тј. $(\forall x \in A) \neg xRx$.

(б) Нека је R (AP) + (T), тј.

$(\forall x \in A) \neg xRx$

$(\forall x,y,z \in A)(xRy \wedge yRz \to xRz)$

циљ: $(\forall x,y \in A)(xRy \to \neg yRx)$.

(птс) за неке $x,y \in A$ имамо $xRy \wedge yRx$

због (T) добијамо xRx (горе ставимо $z=x$)

ово је контрадикција јер је R (AP). $\boxed{//}$

дефиниција: Рел. $R \subseteq A^2$ је <u>строги поредак</u> ако је (AP) и (T) [еквивалентно, (AC) и (T)].

Тврђење: (а) Ако је $R \subseteq A^2$ поредак, онда је са $xR^*y :\equiv xRy \land x \neq y$ дефинисан строги поредак.

(б) Ако је $R \subseteq A^2$ строги поредак, онда је са: $xR^{\#}y :\equiv xRy \lor x = y$ дефинисан поредак.

(в) Ако је $R \subseteq A^2$ поредак, онда $(R^*)^{\#} = R$.

(г) Ако је $R \subseteq A^2$ строги поредак онда $(R^{\#})^* = R$.

Пример: $x < y \equiv x \leq y \land x \neq y \qquad < \,=\, \leq^*$

$x \leq y \equiv x < y \lor x = y \qquad \leq \,=\, <^{\#}$

Доказ тврђења: (а) Нека је R (Р, АнС, Т).

Циљ: R^* (АР, Т)

$$xR^*y \equiv xRy \land x \neq y$$

(АР) $xR^*x \equiv \underbrace{xRx \land \underbrace{x \neq x}_{0}}_{0}$, тј. $(\forall x \in A)\neg xRx$

(Т) $\underline{xR^*y \land yR^*z \to xR^*z}$:

Нека $xR^*y \land yR^*z$, тј. $xRy \land x \neq y \land yRz \land y \neq z$

из $xRy \land yRz$ следи xRz јер је R (Т)

такође $x \neq z$: ако $x = z$, онда имамо $xRy \land yRx$, па $x = y$ по (АнС) ↯

Дакле важи $xRz \land x \neq z$, тј. xR^*z.

(б) вежба.

(в) $(R^*)^{\#} = R$

$$\begin{aligned} x\,(R^*)^{\#}\,y &\equiv xR^*y \lor x = y \\ &\equiv (xRy \land x \neq y) \lor x = y \\ &\equiv (xRy \lor x = y) \land (x \neq y \lor x = y) \\ &\equiv (xRy \lor x = y) \land \top \\ &\equiv xRy \lor x = y \equiv xRy \end{aligned}$$

↑ због (Р) R-а

(ī) benda.