КАРДИНАЛНОСТ

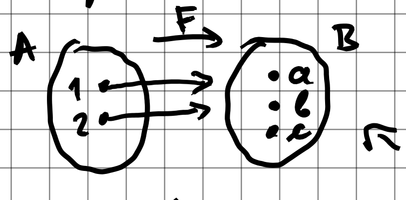
Интуитивно: Кардиналност скупа A, $|A|$, је број елемената скупа A.

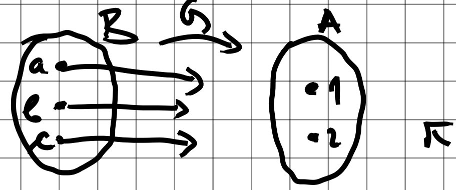
Пример: $|\{1,2,3\}| = 3$, $|\emptyset| = 0$, $|P(\{1,2,3\})| = 8$

Дефиниција: • $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$ (алеф-нула)

• $|\mathbb{R}| =: \mathfrak{c}$ (моћ континуума)

Пример: $|A| = 2$, $|B| = 3$ $\quad A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$





$|Im(F)| \leq |A| = 2$

$Im(F) \subsetneq B$

F не може бити „НА"

„1-1" ф-ја постоји

$Im(G) \subseteq A$

$|Im(G)| \leq |A| = 2$

G не може бити „1-1"

„НА" ф-ја постоји

Дефиниција: (1) Скупови A и B су једнаке кардиналности, $|A| = |B|$, ако постоји бијекција $A \to B$.

(2) Скуп A је кардиналности мање или једнаке од B, $|A| \leq |B|$, ако постоји „1-1" $A \to B$.

(3) $|A| < |B| :\equiv |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$

$$\left[\exists\, A \xrightarrow{1-1} B \quad \wedge \quad \neg \exists\, A \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} B\right]$$

Основне особине: (1) Ако $|A| = |B|$, онда $|A| \leq |B|$.

$\left[\text{Ако } F: A \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} B, \text{ онда нарочито } F: A \xrightarrow{1-1} B\right]$

(2) $|A| = |A|$ и $|A| \leq |A|$

$\left[id_A: A \to A \text{ је биј, па } |A| = |A|;\ |A| \leq |A| \text{ према (1)}\right]$

(3) $|A| = |B|$ повлачи $|B| = |A|$

$\left[\text{Ако је } F: A \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} B, \text{ онда } F^{-1}: B \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} A\right]$

(4) $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$ повлачи $|A| = |C|$

и $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$ повлачи $|A| \leq |C|$

[Ако $F: A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$ и $G: B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C$, онда $G \circ F: A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C$;
и слично ако су F и G $1-1$.]

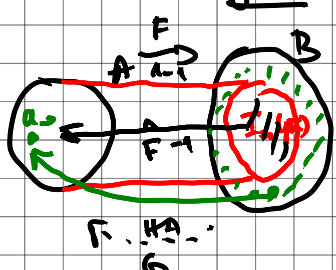
(5) (Кантор-Бернштајнова т.) $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$ повлачи $|A| = |B|$. [доказ касније]

(6) За свака два скупа важи $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$.
[доказ касније]

Тврђење: Постоји $A \xrightarrow{1-1} B$ акко постоји $B \xrightarrow{\text{на}} A$, $A \neq \emptyset$.

доказ: [⇒] Нека је $F: A \xrightarrow{1-1} B$

циљ: конструисати $G: B \xrightarrow{\text{на}} A$.



Нека је $\hat{F}: A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Im(F)$

$\hat{F}(a) := F(a)$

$\hat{F}^{-1}: Im(F) \to A$

Нека је $a_0 \in A$ (постоји јер $A \neq \emptyset$)

Дефинишемо $G: B \to A$:

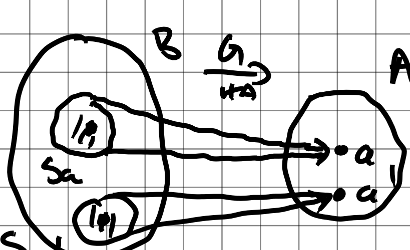
$$G(b) = \begin{cases} \hat{F}^{-1}(b) & b \in Im(F) \\ a_0 & b \notin Im(F) \end{cases}$$

G јесте „НА": Нека $a \in A$. Узмимо $b := F(a) \in Im(F)$

$$G(b) \underset{b \in Im(F)}{=} \hat{F}^{-1}(b) = \hat{F}^{-1}(F(a)) = \hat{F}^{-1}(\hat{F}(a)) = a$$

[⇐] Нека је $G: B \xrightarrow{\text{на}} A$

циљ: конструисати $F: A \xrightarrow{1-1} B$



Нека је ($a \in A$) $S_a = \{b \in B \mid G(b) = a\}$
[$= G^{-1}[\{a\}]$]

$b \in S_a \equiv G(b) = a$

(1) $(\forall a\in A)\ S_a \neq \emptyset$ јер је G „НА"

(2) $(\forall a,a'\in A)\ (a\neq a' \to S_a \cap S_{a'} = \emptyset)$

ако $b \in S_a \cap S_{a'}$, онда $a = G(b) = a'$ ↯

(3) $\bigcup_{a\in A} S_a = B$; $b \in S_{G(b)}$

Дакле, $\{S_a \mid a\in A\}$ је партиција скупа B.

Нека је $T \subseteq B$ трансверзала ове партиције, тј.

$(\forall a\in A)\ (\exists_1 t\in T)\ t\in S_a$.

[Овде смо искористили аксиому избора.]

Дефинишимо $F: A \to B$ на след. начин:

за $a\in A$, нека је t јединствени ел. скупа $T\cap S_a$

и ставимо $F(a) := t$.

<u>F јесте „1-1"</u>: $F(a_1) = F(a_2)$

$t_1 = t_2 =: t$, где $t_1 \in T\cap S_{a_1}$

$t_2 \in T\cap S_{a_2}$

Дакле, $t \in S_{a_1} \cap S_{a_2} \Rightarrow a_1 = G(t) = a_2$ ///

Скуп A је <u>пребројив</u> ако $|A| = \aleph_0\ (:= |\mathbb{N}|)$, тј.

ако постоји бијекција $F: \mathbb{N} \to A$.

У том случају $A = \{F(0), F(1), F(2), \dots\}$

Скуп A је <u>моћи континуума</u> ако $|A| = c\ (:= |\mathbb{R}|)$, тј.

ако постоји бијекција $F: \mathbb{R} \to A$.

<u>Примери:</u> (1) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ $(\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, али $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|)$

Дефинишемо $F: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$F(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ паран} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ непаран} \end{cases}$$

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$

<u>Задатак:</u> Доказати да је F бијекција.

(2) $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$

Дефинишемо $F: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$F((m,n)) = 2^m(2n+1) - 1$$

задатак: F је бијекција

задатак: $G: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$G((m,n)) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

G је такође бијекција

(3) $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$

$$\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}, \qquad \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N}$$

последица: $|\mathbb{N}^k| = \aleph_0$, $k \geq 1$

(4) $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

Ако $q \in \mathbb{Q}$, тада $q = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$

овакав запис је јединствен ако НЗД$(m,n) = 1$.

Дакле, имамо $F: \mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$

$F(q) = (m,n)$, где m,n су изабрани као малопре

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{N}, \qquad \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N}$$

Дакле $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$. Са друге стране, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ јер $G: \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}$.

$G(n) = n$

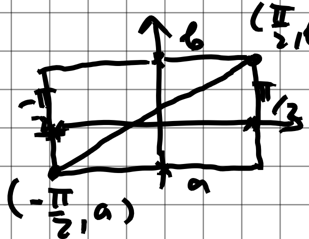
Дакле, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ по Кантор-Бернштајновој т.

(5) $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = c$ јер $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$|(0,+\infty)| = c$ јер $\ln: (0,+\infty) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathbb{R}$

$$\left|(a,b)\right| = c \quad \text{јер} \quad F : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} (a,b)$$
$a<b$

$$F(x) = \frac{b-a}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + a$$



(б) $\aleph_0 \leq c$: $F : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$
$F(n) = n$

$\aleph_0 \neq c$: (нпр) $\aleph_0 = c$, тада $|(0,1)| = \aleph_0$

тј. $(0,1) = \{ r_0, r_1, r_2, r_3, \dots \}$

[ако је $r : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} (0,1)$, $r_n := r(n)$, онда важи претходно набрајање]

Запишимо
$$r_0 = 0,\boxed{r_0^0}\, r_0^1\, r_0^2\, r_0^3 \dots$$
$$r_1 = 0, r_1^0\, \boxed{r_1^1}\, r_1^2\, r_1^3 \dots$$
$$r_2 = 0, r_2^0\, r_2^1\, \boxed{r_2^2}\, r_2^3 \dots$$
$$r_3 = 0, r_3^0\, r_3^1\, r_3^2\, \boxed{r_3^3} \dots$$
$$\vdots$$

Дефинишимо цифру $s_n := \begin{cases} 1 & r_n^n \neq 1 \\ 2 & r_n^n = 1 \end{cases}$

посматрајмо $s := 0, s_0 s_1 s_2 s_3 \dots \in (0,1)$

како је r НА, постоји $n \in \mathbb{N}$ тд $s = r(n) = r_n$

n-та децимала броја r_n је r_n^n

n-та децимала броја s је s_n

Дакле, n-та децимала бројева r_n и s се разликују

па $r_n \neq s$ ↯

Дакле, $\aleph_0 < c$.

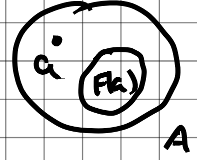
Тврђење (Канторова теорема): За сваки скуп A важи $|A| < |P(A)|$.

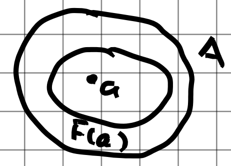
доказ: • $|A| \leq |P(A)|$: $F : A \xrightarrow{1-1} P(A)$
$F(a) = \{a\}$

• $|A| \neq |P(A)|$: (ппс) $|A| = |P(A)|$

Нека је $F : A \xrightarrow{НА} P(A)$

$a \in A \qquad F(a) \in P(A),\ F(a) \subseteq A$





уочимо скуп $S = \{a \in A \mid a \notin F(a)\} \subseteq A$

тј. $S \in P(A)$

Како је F „НА", постоји $s \in A$ тд $F(s) = S$.

• $s \in S$, онда $s \in F(s)$, па $s \notin S$

• $s \notin S$, онда $s \notin F(s)$, па $s \in S$ $\Big\}$ ↯ $\square$

Задатак: (1) Ако $|A| = |B|$, онда $|P(A)| = |P(B)|$.

(2) Ако $|A| = |A'|$ и $|B| = |B'|$, онда $|A \times B| = |A' \times B'|$.

Дефиниција: $A^B := \{F \mid F : B \to A\}$

$[\ A^0 := \{\emptyset\}$ јер $A^\emptyset = \{\emptyset\}\ ]$

Задатак: (3) Ако $|A| = |A'|$ и $|B| = |B'|$, онда $|A^B| = |A'^{B'}|$.

Тврђење: За сваки скуп A важи $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$.

Доказ: $\chi : P(A) \to \{0,1\}^A$

$\chi(S) = \chi_S : A \to \{0,1\} \qquad \chi_S(a) = \begin{cases} 0 & a \notin S \\ 1 & a \in S \end{cases}$

χ је бијекција: „1-1": $S_1, S_2 \subseteq A,\quad S_1 \neq S_2$

нпр. постоји $a \in S_1 \land a \notin S_2$

онда $\chi_{S_1}(a) = 1 \neq 0 = \chi_{S_2}(a) \Rightarrow \chi_{S_1} \neq \chi_{S_2}$

$\chi(S_1) \neq \chi(S_2)$

„НА": Нека $F : A \to \{0,1\}$, нека је $S = F^{-1}[\{1\}]$.

$F(a) = 1 \equiv a \in F^{-1}[\{1\}] \equiv a \in S \equiv \chi_S(a) = 1$

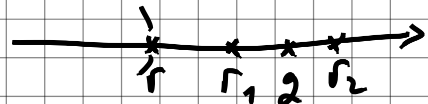
Дакле $F = \chi_S = \chi(S)$ $\square$

Последица: $|P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

(По Канторовој т. $|P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$, па $\mathfrak{c} > \aleph_0$)

$|\mathbb{R}| \overset{①}{\leq} |P(\mathbb{Q})| \overset{②}{=} |P(\mathbb{N})| \overset{③}{=} |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \overset{④}{\leq} |\mathbb{R}|$

① $F: \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} P(\mathbb{Q})$



$F(r) = (-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$

F „1-1“: Нека $r_1 \neq r_2$, нпр. $r_1 < r_2$

постоји $q \in \mathbb{Q}$ тд $r_1 < q < r_2$

тада $q \notin F(r_1)$, $q \in F(r_2)$ $\Rightarrow$ $F(r_1) \neq F(r_2)$

② из задатка ③ тврђење

④ $G: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$

$G(a) = 0{,}a(0)\,a(1)\,a(2)\dots$

Ако $a \neq b$, тада $a(n) \neq b(n)$ за неко $n \in \mathbb{N}$

па се n-те децимале бројева $G(a)$ и $G(b)$ разликују

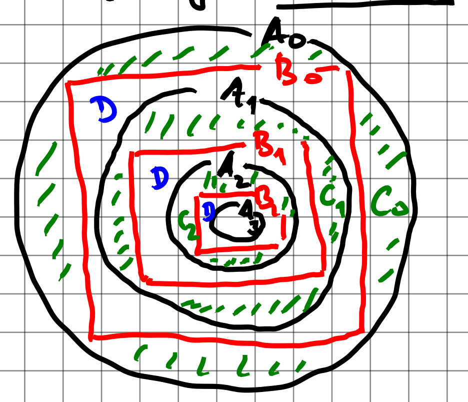
па $G(a) \neq G(b)$. Дакле, G је „1-1“. $\square$

Кантор-Бернштајнова т.: Ако постоје $A \xrightarrow{1-1} B$ и $B \xrightarrow{1-1} A$, тада постоји $A \xrightarrow[на]{1-1} B$.

Лема: Нека $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1$ и $|A_0| = |A_1|$, тада $|A_0| = |B_0|$.

доказ: Нека $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1$

Нека $F: A_0 \xrightarrow[на]{1-1} A_1$, $A_1 = F[A_0]$



Дефинишемо: $A_{n+1} = F[A_n]$,

$B_{n+1} = F[B_n]$,

(1) како $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \mid F[-]$

$A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \mid F[-]$

$A_2 \supseteq B_2 \supseteq A_3$

$\vdots$

$A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1}$, за $n \geq 0$

Дефинишемо $C_n := A_n \setminus B_n$, F „1-1“

(2) $F[C_n] = F[A_n \setminus B_n] = F[A_n] \setminus F[B_n] = A_{n+1} \setminus B_{n+1} = C_{n+1}$

Дефинишемо: $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$, $C' = \bigcup_{n \geq 1} C_n$, $D = A_0 \setminus C$

(3) $F[C] = F\left[\bigcup_{n\geq 0} C_n\right] = \bigcup_{n\geq 0} F[C_n] = \bigcup_{n\geq 0} C_{n+1} = \bigcup_{n\geq 1} C_n = C'$

(4) $A_0 = C \cup D, \quad C \cap D = \emptyset$

$B_0 = C' \cup D, \quad C' \cap D = \emptyset$

Дефинишимо $G : A_0 \to B_0$

$$G(a) = \begin{cases} F(a) & a \in C \\ a & a \in D \end{cases}$$

G задата јесте ф-ја $G : A_0 \to B_0$ због (3) и (4).

G „1-1": $a_1, a_2 \in A_0$, $a_1 \neq a_2$.

1° $a_1, a_2 \in C$: $G(a_1) = F(a_1) \neq F(a_2) = G(a_2)$ ← јер је F 1-1

2° $a_1, a_2 \in D$: $G(a_1) = a_1 \neq a_2 = G(a_2)$

3° $a_1 \in C$, $a_2 \in D$: $G(a_1) = F(a_1) \in C'$, $\neq$, $G(a_2) = a_2 \in D$ ← јер $C' \cap D = \emptyset$.

G „НА": Нека $b \in B_0$.

1° $b \in C'$: $b \in F[C]$ према (3), па имамо $a \in C$ тд $b = F(a)$. Тада $G(a) = F(a) = b$

2° $b \in D$: за $a := b$, имамо $G(a) \overset{a \in D}{=} a = b$ ∎

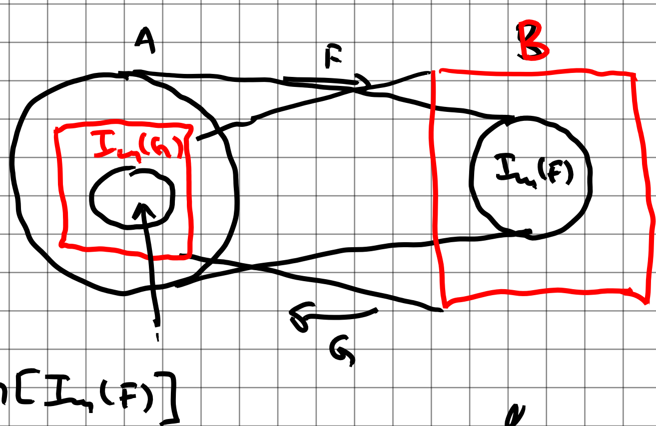
Доказ К-Б. теореме: Нека $F : A \xrightarrow{1-1} B$ и $G : B \xrightarrow{1-1} A$

$\hat{F} : A \xrightarrow[НА]{1-1} Im(F)$, $\quad \hat{G} : B \xrightarrow[НА]{1-1} Im(G)$

$\hat{F}(a) := F(a)$, $\quad \hat{G}(b) = G(b)$

$\tilde{G} : Im(F) \xrightarrow[НА]{1-1} G[Im(F)]$

$\tilde{G}(b) = G(b)$



$A_0 := A$

$\cup\!\!\!\mid$

$B_0 := Im(G)$

$\cup\!\!\!\mid$

$A_1 := G[Im(F)]$

Докажимо $|A_0| = |A_1|$.

$$A \xrightarrow[\text{бij.}]{\hat{F}} Im(F) \xrightarrow[\text{бij}]{\tilde{G}} G[Im(F)]$$

$$\underset{A_0}{\overset{\shortparallel}{}} \xrightarrow[\tilde{G} \circ \hat{F}]{\text{бij}} \underset{A_1}{\overset{\shortparallel}{}}$$

Дакле, $|A_0| = |A_1|$.

Према леми $\underbrace{|A_0|}_{= |A|} = |B_0| = |Im(G)| \underset{\text{због } \hat{G}}{=} |B|$

Дакле, $|A| = |B|$, тј. постоји биј. $\underline{A \to B}$. $\blacksquare$