ПРИМЕР: Свако у дому има цимера кога не воли.

$C(x,y)$: x и y су цимери

$V(x,y)$: x воли y

$D(x)$: x живи у дому

$$(\forall x)\big(D(x) \to (\exists y)(C(x,y) \land \neg V(x,y))\big)$$

ОГРАНИЧЕНИ КВАНТИФИКАТОРИ

Нека је $\mathcal{U}$ - унив. диск., $A \in \mathcal{U}$, $P(x)$:

* за свако x из скупа A важи $P(x)$

$$(\forall x \in A)\, P(x) :\equiv (\forall x)(x \in A \to P(x)) \quad //$$

* за неко x из скупа A важи $P(x)$

(постоји x у скупу A тд важи $P(x)$)

$$(\exists x \in A)\, P(x) :\equiv (\exists x)(x \in A \land P(x)) \quad //$$

ПРИМЕР: Нека је (a_n) низ реалних бројева и $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ акко $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall \underline{\underline{n}} > n_0)\ |a_{\underline{\underline{n}}} - a| < \varepsilon$.

Унив. диск. је $\mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \iff \forall \varepsilon \in (0, +\infty)$

$\forall n > n_0 \iff \forall n \in (n_0, +\infty) \cap \mathbb{N}$

$$(\forall \varepsilon)\Big[\varepsilon > 0 \to (\exists n_0)\big(n_0 \in \mathbb{N} \land (\forall n)(n > n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)\big)\Big]$$

КВАНТИФИКАТОР $\exists_1$ $(\exists!)$

* Постоји тачно једно x за које важи $P(x)$

(постоји јединствено x за које важи $P(x)$)

$(\exists_1 x)\, P(x)$ $\quad [(\exists! x)\, P(x)]$

желимо да кажемо: $(\exists x)(P(x) \land (\forall y \neq x)\, \neg P(y))$

$\forall y \neq x \iff \forall y \in \mathcal{U} \setminus \{x\}$

$$(\exists_1 x)\, P(x) :\equiv (\exists x)\big(P(x) \land (\forall y)(y \neq x \to \neg P(y))\big)$$

ЗАКОНИ СА КВАНТИФИКАТОРИМА

$$
\left.\begin{aligned}
(*)\ \neg(\exists x)P(x) &\equiv (\forall x)\neg P(x) \\
\neg(\forall x)P(x) &\equiv (\exists x)\neg P(x)
\end{aligned}\right\}
$$
Де Морганови закони за квантификаторе.

$(*)$: треба да докажемо да су лева и десна страна увек исте тачности

Нека је $\neg(\exists x)P(x) = 0$; тада $(\exists x)P(x) = 1$

нека је $a \in U$ тд $P(a) = 1$. Тада $\neg P(a) = 0$.

Шта је са формулом $(\forall x)\neg P(x)$? $(\forall x)\neg P(x) = 0$, јер имамо да је $\neg P(a) = 0$.

Нека је сада $(\forall x)\neg P(x) = 0$. Тада можемо да нађемо $a \in U$ тд $\neg P(a) = 0$. Тада $P(a) = 1$, па $(\exists x)P(x) = 1$.

Коначно, $\neg(\exists x)P(x) = 0$. $\boxed{\text{Q.E.D.}}$

$$
\left.\begin{aligned}
(\#)\ \neg(\exists x\in A)P(x) &\equiv (\forall x\in A)\neg P(x) \\
(\$)\ \neg(\forall x\in A)P(x) &\equiv (\exists x\in A)\neg P(x)
\end{aligned}\right\}
$$
Де Морганова закони за огр. квант.

$$
\begin{aligned}
(\#)\quad \neg(\exists x\in A)P(x) &\equiv \neg(\exists x)(x\in A \wedge P(x)) \\
&\equiv (\forall x)\neg(x\in A \wedge P(x)) \\
&\equiv (\forall x)\neg(x\in A \wedge \neg\neg P(x)) \\
&\equiv (\forall x)(x\in A \to \neg P(x)) \\
&\equiv (\forall x\in A)\neg P(x)
\end{aligned}
$$

$P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

$$
\begin{aligned}
(\$)\quad \neg(\forall x\in A)P(x) &\equiv \neg(\forall x)(x\in A \to P(x)) \\
&\equiv (\exists x)\neg(x\in A \to P(x)) \\
&\equiv (\exists x)\neg\neg(x\in A \wedge \neg P(x)) \\
&\equiv (\exists x)(x\in A \wedge \neg P(x)) \\
&\equiv (\exists x\in A)\neg P(x)
\end{aligned}
$$
$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

$$
\left.\begin{aligned}
(*)\ (\exists x)(\exists y)P(x,y) &\equiv (\exists y)(\exists x)P(x,y) \\
(\forall x)(\forall y)P(x,y) &\equiv (\forall y)(\forall x)P(x,y)
\end{aligned}\right\}
$$
ком. егз. кванти. и унив. кванти.

(*) Нека $(\exists x)\underbrace{(\exists y)\ P(x,y)}_{Q(x)} = 1$. Тада имамо $a \in U$ тд $Q(a) = 1$.

тј. $(\exists y)\, P(a,y) = 1$. Тада имамо $b \in U$ тд $P(a,b) = 1$.

Шта је са формулом $(\exists x)\, P(x,b)$? $(\exists x)\, P(x,b) = 1$, јер $P(a,b) = 1$.

Шта је са формулом $(\exists y)\underbrace{(\exists x)\ P(x,y)}_{R(y)}$? $(\exists y)(\exists x)\, P(x,y) = 1$, јер $R(b) = 1$, па $(\exists y)\, R(y) = 1$.

Слично, ако је $(\exists y)(\exists x)\, P(x,y) = 1$, онда и $(\exists x)(\exists y)\, P(x,y) = 1$ ☑

Скраћени запис: $(\exists xy)\ P(x,y) \ :\equiv\ (\exists x)(\exists y)\ P(x,y)$

(или $(\exists y)(\exists x)\ P(x,y)$)

$(\forall xy)\ P(x,y) \ :\equiv\ (\forall x)(\forall y)\ P(x,y)$

(или $(\forall y)(\forall x)\ P(x,y)$)

- $(\forall x)(\exists y)\ P(x,y) \not\equiv (\exists y)(\forall x)\ P(x,y)$.

Приоритет квантификатора: $\forall, \exists$ имају исти приоритет као $\neg$.

Тврђење: $(\exists y)(\forall x)\ P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)\ P(x,y) \equiv \top$

Доказ: (ПТС) $(\exists y)(\forall x)\ P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)\ P(x,y) = 0$

Тада $(\exists y)\underbrace{(\forall x)\ P(x,y)}\ = 1_{(*)}$ и $(\forall x)\underbrace{(\exists y)\ P(x,y)}\ = 0_{(\#)}$

Из (*) имамо да постоји $b \in U$ тд $(\forall x)\, P(x,b) = 1$. (\$)

из (#) имамо да постоји $a \in U$ тд $\boxed{(\exists y)\ P(a,y) = 0.}$

из (\$) имамо да за свако $x \in U$ важи $P(x,b) = 1$.

Следствено, за $x = a$ добијамо $P(a,b) = 1$.

Шта је са формулом $(\exists y)\, P(a,y)$?

$(\exists y)\, P(a,y) = 1$, јер је $P(a,b) = 1$. ↯ ☑

<u>Пример:</u> $(\forall x)(\exists y)\, P(x,y) \to (\exists y)(\forall x)\, P(x,y) \not\equiv \top$

$$(\forall x)(\exists y)\; x<y \;\to\; (\exists y)(\forall x)\; x<y \;=\; 0$$

универзум је $\mathbb{R}$.

$(\forall x)(\exists y)\; x<y$: Од сваког x-а постоји y веће од њега.

$(\exists y)(\forall x)\; x<y$: Постоји y које је веће од сваког x-а.

Тада $\underbrace{(\forall x)(\exists y)\; x<y}_{=1} \;\to\; \underbrace{(\exists y)(\forall x)\; x<y}_{=0} \;=\; 0$

$$\left.\begin{aligned} (*)\;(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) &\equiv (\exists x)\big(P(x)\lor Q(x)\big) \\ (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x) &\equiv (\forall x)\big(P(x)\land Q(x)\big) \end{aligned}\right\}$$

(*) Нека је $(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) = 1$.

Тада $(\exists x)P(x)=1$ или $(\exists x)Q(x)=1$.

1° пп $\underline{(\exists x)P(x)=1}$. Тада имамо $a \in U$ тд $P(a)=1$.

Тада $P(a) \lor Q(a) = 1 \lor$ нешто $= 1$

па $(\exists x)\big(P(x) \lor Q(x)\big) = 1$.

2° пп $\underline{(\exists x)Q(x)=1}$. Аналогно као $\underline{1°}$.

Нека је сада $(\exists x)\big(P(x) \lor Q(x)\big) = 1$.

Тада имамо $a \in U$ тд $P(a) \lor Q(a) = 1$.

Тада $P(a)=1$ или $Q(a)=1$.

1° $\underline{P(a)=1}$. Тада $(\exists x)P(x)=1$, па

$(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) = 1 \lor$ нешто $= 1$.

2° $\underline{Q(a)=1}$. Аналогно као 1°. $\blacksquare$

(*) $(\exists x)\big(P(x)\land Q(x)\big) \longrightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \equiv \top$

$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \longrightarrow (\forall x)\big(P(x)\lor Q(x)\big) \equiv \top$

Обратне импликације НЕ ВАЖЕ!

(*) Нека је $(\exists x)\underline{(P(x)\wedge Q(x))} = 1$ // (#)

Циљ: $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x) = 1$

Имамо $a\in U$ тд $P(a)\wedge Q(a)=1$ (то следи из (#))

Тада $P(a)=1$ и $Q(a)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Из } P(a)=1 \text{ имамо } (\exists x)P(x)=1 \\ \text{Из } Q(a)=1 \text{ имамо } (\exists x)Q(x)=1 \end{array}\right\} (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x) = 1\wedge 1 = \underline{1} \ //$$

<u>пример:</u> $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\to(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \not\equiv \top$

Унив. диск. је $\mathbb{N}$.

$P(x)$: x је паран $\quad$ $Q(x)$: x је непаран

$(\exists x)P(x)$: постоји паран број $\quad$ $(\exists x)P(x)=\underline{1}$.

$(\exists x)Q(x)$: постоји непаран број $\quad$ $(\exists x)Q(x)=1$.

$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$: постоји број који је и паран и непаран

$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) = 0$

$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\to(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) = 1\wedge 1\to 0 = 1\to 0 = \underline{\underline{0}}$ //

$$\left.\begin{array}{l} (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x) \equiv (\exists xy)(P(x)\wedge Q(y)) \\ \underline{(\forall x)P(x)}\vee(\forall x)Q(x) \equiv (\forall xy)(P(x)\vee Q(y)) \end{array}\right\}$$

$(\exists x)P(x) \equiv (\exists y)P(y)$, $\quad (\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$

<u>УВОД У (НАИВНУ) ТЕОРИЈУ СКУПОВА</u>

<u>Скуп</u> је колекција неких елемената.

$A = \{2,3,5,8\}$

$B = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$

$C = \{x \mid x \text{ је паран цео број}\} = \{\dots,-4,-2,0,2,4,6,\dots\}$

$\underline{D} = \{x \mid P(x)\}$ //

<u>релација припадања:</u> $x\in A$: x припада A

x је елемент од A

Раселов парадокс: $S = \{x \mid x \notin x\}$; Да ли $S \in S$?

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \text{ Ако } S \notin S, \text{ тада } S \in S, \\ 2^\circ \text{ Ако } S \in S, \text{ тада } S \notin S \end{array}\right\} \lightning .$$