Дедуктивно закључивање. Логички везници.

Пример 1:

Идем на посао данас или сутра.
Данас нећу стићи да одем на посао. } ПРЕМИСЕ
Дакле, стићи ћу на посао сутра. ← ЗАКЉУЧАК

Пример 2 (Нетачан дед. аргумент)

Газду је убио батлер или собарица.
Газду је убила собарица или кувар. } ПРЕМИСЕ
Дакле, газду је убио батлер или кувар. ← ЗАКЉУЧАК

(Ако је собарица убица, премисе су тачне, али закључак није, па закључивање није добро.)

Пример 3:

Данас ће падати снег или киша.
Превише је топло за снег.
Дакле, данас ће падати киша.

Пример 4:

Ако је данас недеља, не идем на посао.
Данас је недеља.
Дакле, данас не идем на посао.

У примерима 1 и 3:

P или Q	$P \vee Q$	(дисјунктивни силогизам)
није P	$\neg P$	
Дакле, Q.	$\therefore Q$	

Исказ је реченица којој можемо одредити тачност.

Логички везници	Значење	
$\vee$	или	ДИСЈУНКЦИЈА
$\neg$	не/није	НЕГАЦИЈА
$\wedge$	и	КОНЈУНКЦИЈА

пример: а) Ана је отишла кући и неће се вратити.

$P \land Q$: P: Ана је отишла кући.

Q: Ана се неће вратити.

$P \land \neg R$: R: Ана ће се вратити.

б) Ана је на послу, а Бане није, или Бане је на послу а Ана није.

A: Ана је на послу. $(A \land \neg B) \lor (B \land \neg A)$

B: Бане је на послу.

ЗАПИС: $\neg$ има већи приоритет од $\land$ и $\lor$.

$\neg P \land Q$ — $(\neg P) \land Q$ ✓ ; $\neg(P \land Q)$ ✗

$A \land B \lor C$ ✗

КОМЕНТАР: а) Ана и Бане су на послу.

$A \land B$

б) Ана и Бане су пријатељи.

НИЈЕ КОНЈУНКЦИЈА

пример: G: Бане је глуп.

L: Бане је лењ.

а) $(\neg G \land L) \lor G$

Бане није глуп, али је лењ, или је глуп.

б) $\neg G \land (L \lor G)$

Бане није глуп, али јесте глуп или лењ.

в) $\neg(G \land L) \lor G$

Бане није глуп и лењ, или је глуп.

пример: $3 \leq \pi \iff 3 < \pi \lor 3 = \pi$

$3 \leq \pi < 4 \iff (3 < \pi \lor 3 = \pi) \land \pi < 4$

$\lneq$: $3 \lneq \pi \iff 3 < \pi \land \neg\, 3 = \pi$

$\nleq$: $3 \nleq \pi \iff \neg(3 < \pi \lor 3 = \pi)$

Истинитосне таблице

$\boxed{0,\ 1,}$

$0,\ \bot$ нетачно

$1,\ \top$ тачно

P	$\neg P$
0	1
1	0

логичка еквивалентност

$$\neg\neg P \equiv P$$

Дефиниција: Два сложенија исказа (формуле) су логички еквивалентне ако увек имају исту тачност. Користимо симбол $\equiv$ између логички еквивалентних исказа.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ (комутативност)

$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

(асоцијативност)

$P \wedge Q \wedge R$ $\quad$ $P \wedge \cancel{Q} \vee R$

P	Q	$P \vee Q$	$P \veebar Q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

$\veebar$ – Ексклузивна дисјункција

$\vee$: ... или ...

Бар једно од ... и ... .

$\veebar$: или ... или ...

Тачно једно од ... и ... .

$P \vee Q \equiv Q \vee P$

$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \longrightarrow P \vee Q \vee R$ ✓

$P \vee Q \vee R \longleftrightarrow$ Бар једно од P, Q, R.

$P \veebar Q \veebar R \xleftrightarrow{\text{НИЈЕ}}$ Тачно једно од P, Q, R!

$$\left.\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) &\equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned}\right\} \text{Дистрибутивност}$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$
$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$
} апсорбција

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$
} Деморганови закони

P	Q	$P \wedge$	$(P \vee Q)$	P
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Брзи рачун

$x \in \{0, 1\}$

$x \wedge 0 = 0 = 0 \wedge x$

$x \vee 0 = x = 0 \vee x$

$x \wedge 1 = x = 1 \wedge x$

$x \vee 1 = 1 = 1 \vee x$

P	Q	$\neg$	$(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\vee$	$\neg Q$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0

доказали смо $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \quad (*)$

докажимо $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$:

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \overset{(*)}{\equiv} \neg\neg P \vee \neg\neg Q$$
$$\equiv P \vee Q$$
$$\equiv \neg\neg(P \vee Q)$$

добили смо: $\cancel{\neg}(\neg P \wedge \neg Q) \equiv \cancel{\neg}\neg(P \vee Q)$

$$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q)$$

P	Q	R	$P \wedge$	$(Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$\vee$	$(P \wedge R)$
0	0	0	0		0	0	0
0	0	1	0		0	0	0
0	1	0	0		0	0	0
0	1	1	0		0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

F : Тачно једно од P, Q, R.

P	Q	R	F	$(P \veebar Q)$	$(P \veebar Q) \veebar R$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

$$\boxed{\begin{array}{l} x \veebar 0 = x = 0 \veebar x \\ x \veebar 1 = \neg x = 1 \veebar x \end{array}}$$

$P \veebar Q \veebar R$ = Непарно много од P, Q, R је тачно.

$$\frac{\begin{array}{c} P \vee Q \\ \neg P \end{array}}{Q}$$

премисе

закључак

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	Q
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	1

✓

$$\frac{\begin{array}{c} B \vee S \\ S \vee K \end{array}}{B \vee K}$$

B	S	K	$B \vee S$	$S \vee K$	$B \vee K$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

лоше закључивање

Пример:

Бане није глуп, али је лењ, или је глуп.
Бане није лењ.
Дакле, Бане је глуп.

$$\frac{\begin{array}{c} (\neg G \wedge L) \vee G \\ \neg L \end{array}}{G}$$

G	L	$(\neg G \wedge L)$	$(\neg G \wedge L) \vee G$	$\neg L$	G
0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0		1	1	1
1	1		1	0	1

← добро закључивање

Таутологије и контрадикције

Дефиниција: формула (сложени исказ) је <u>таутологија</u> ако је увек тачна. формула је <u>контрадикција</u> ако је увек нетачна.

Пример: $P \vee \neg P$ ← ТАУТОЛОГИЈА

$P \wedge \neg P$ ← КОНТРАДИКЦИЈА

Пример: $P \vee (Q \vee \neg P)$, $P \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$, $P \vee \neg(Q \vee \neg Q)$

P	Q	$P \vee (Q \vee \neg P)$		$P \wedge \neg(Q \vee \neg Q)$			$P \vee \neg(Q \vee \neg Q)$		
0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
		↑ ТАУТОЛОГИЈА		↑ КОНТРАДИКЦИЈА			↑ није ни таутологија ни контрадикција		

ОЗНАКЕ: $\top$ ← таутологија

$\bot$ ← контрадикција

$$P \vee \neg P \equiv \top \quad \text{и} \quad P \wedge \neg P \equiv \bot$$

Брзи рачун:

$$\boxed{\begin{aligned} P \vee \top &\equiv \top \\ P \wedge \top &\equiv P \\ P \vee \bot &\equiv P \\ P \wedge \bot &\equiv \bot \\ \neg\top &\equiv \bot \\ \neg\bot &\equiv \top \end{aligned}}$$

- $$\begin{aligned} P \vee (Q \vee \neg P) &\equiv P \vee Q \vee \neg P \\ &\equiv \underline{P \vee \neg P} \vee Q \\ &\equiv \top \vee Q \\ &\equiv \top \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} P \wedge \neg(Q \vee \neg Q) &\equiv P \wedge \neg\top \\ &\equiv P \wedge \bot \\ &\equiv \bot \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} P \vee \neg(Q \vee \neg Q) &\equiv P \vee \neg\top \\ &\equiv P \vee \bot \\ &\equiv P \end{aligned}$$