Uvod u matematičku logiku

SKRIPTA

Januar 2016.

Reč autora

Ova skripta su pripremljena za studente prve godine Matematičkog fakulteta u Beogradu. To je manje-više sve što sam uspeo da ispredajem u toku jednog semestra o čemu sam se prethodno dogovorio s kolegama Predragom Tanovićem i Nebojšom Ikodinovićem. Uvodni deo koji se tiče skupova, relacija i funkcija je obrađen na kraju skripata [16] iz linearne algebre.

Svakom studentu preporučujem da pre čitanja ovog teksta pročita [5]. Ovo su samo skripta i ukoliko neke stvari treba razjasniti ili dopuniti primerima i novim tvrđenjima, savetujem vam da pogledate [3], [4], [6], [7], [8], [11], [10], [17] i [18]. Naravno, u svakom trenutku mi možete poslati poruku sa pitanjem na donju elektronsku adresu. Trudiću se da vam odgovorim što pre.

Za one koji su zainteresovani da pročitaju i nešto više, savetujem da pogledaju [1], [2], [9] i [15]. Što se tiče zadataka, preporučujem zbirku [12] kao osnovnu, a [13] i [14] kao pomoćne. Sve to je dostupno na adresi http://gen.lib.rus.ec/search.php

Svi komentari su dobrodošli!

U Beogradu, 5. januar 2016.

Zoran Petrić
zpetric@mi.sanu.ac.rs

Zahvalnica

Veoma sam zahvalan Milošu Adžiću, docentu Filozofskog fakulteta u Beogradu na preporučenoj literaturi koja je korišćena prilikom pisanja ovog teksta i na vežbama koje su pratile moja predavanja. Takođe sam mu zahvalan što mi je preneo svoja iskustva koja su mi pomogla da bolje postavim raspored gradiva po nedeljama tokom jednog semestra.

Sa Bojanom Lasković, asistentom Matematičkog fakulteta imam veoma dobru saradnju tokom ove dve godine mog angažovanja na predmetu *Uvod u matematičku logiku* i njena pomoć pri nastajanju ovog teksta je od posebnog značaja.

SADRŽAJ

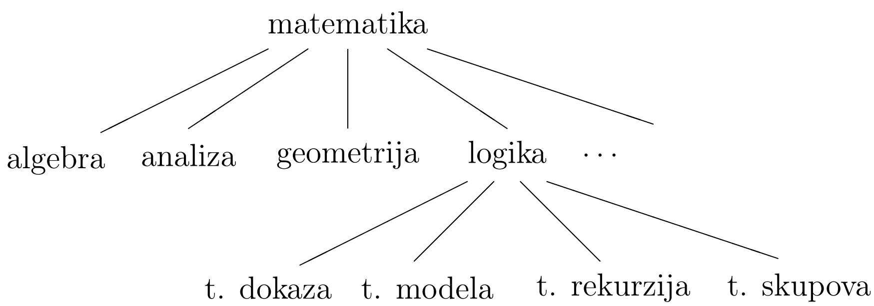
OSNOVNI POJMOVI I NOTACIJA

$\emptyset$	prazan skup
$\mathbf{N}$	skup prirodnih brojeva: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\wedge$	konjunkcija
$\vee$	disjunkcija
$\rightarrow$	implikacija
$\leftrightarrow$	ekvivalencija
$\neg$	negacija
$\perp$	konstanta za apsurd
$\top$	konstanta $\perp \rightarrow \perp$
$\mathcal{F}$	skup svih formula
$\mathcal{F}_n$	skup svih formula sa najviše n veznika i kvantifikatora
$p, q, r, \ldots$	metapromenljive za iskazna slova
$A, B, C, \ldots$	metapromenljive za formule
$x, y, z, \ldots$	individualne promenljive
$\forall x$	univerzalni kvantifikator koji vezuje x
$\exists x$	egzistencijalni kvantifikator koji vezuje x
$\models A$	A je tautologija odnosno A je valjana
$\models_v A$	valuacija v zadovoljava formulu A ($\hat{v}(A) = 1$)
$\vdash A$	A je teorema
$\Gamma \vdash A$	A je izvodiva iz hipoteza koje pripadaju skupu Γ
$\Gamma \models A$	svaka valuacija koja zadovoljava sve formule iz Γ zadovoljava i A

§1. Odeljak 1.

1.1 Uvod

Logika je matematička oblast koja se grubo može podeliti na teoriju dokaza, teoriju modela, teoriju rekurzija i teoriju skupova. Ova podela nije najpreciznija i neke discipline koje su sasvim bliske logici, kao što je na primer teorijsko računarstvo, ovde nisu navedene.



Na ovom kursu ćemo se baviti osnovnim pojmovima iz teorije dokaza i teorije modela, stalno se pozivajući na neformalnu teoriju skupova (videti [16, sekcija 17.1]). U trenucima kada budemo spominjali odlučivost zalazićemo u osnove teorije rekurzija.

Logika ima svoje antičke korene u radovima Aristotela koji se bavio *silogizmima*, zaključivanjima kao što je na primer

Svako M je P.
Svako S je M.
Dakle, svako S je P.

Filon iz Megare je zaslužan za tumačenje implikacije kakvo ga i mi ovde prihvatamo: „ako A, onda B" je tačno osim ako je A tačno a B netačno. To je klasična ili materijalna implikacija. Klasična logika je ona koja prihvata ovakvo tumačenje implikacije i samo njom ćemo se baviti na ovom kursu.

U devetnaestom veku, značajan doprinos logici su dali Bul, Kantor i Frege, ali njen pravi procvat je vezan za dvadeseti vek.

1.2 Iskazna logika

Primer. Pokažimo skupovnu jednakost $X \cap (Y - Z) = (X - Z) \cap Y$. Kad levu i desnu stranu ove jednakosti analiziramo prema definicijama skupovnih operacija preseka i razlike vidimo da treba pokazati

$$\{x \mid x \in X \text{ i } (x \in Y \text{ i } x \notin Z)\} = \{x \mid (x \in X \text{ i } x \notin Z) \text{ i } x \in Y\}.$$

U stvari, treba pokazati da svojstvo „$x \in X$ i ($x \in Y$ i $x \notin Z$)” znači isto što i „($x \in X$ i $x \notin Z$) i $x \in Y$”, to jest kada jedno važi, onda i drugo važi i obrnuto. Vidimo da su ove rečenice formirane od prostijih „$x \in X$”, „$x \in Y$” i „$x \in Z$” pomoću veznika „i” i „nije”. Da bismo postigli naš cilj, uopšte ne moramo da ulazimo u to šta znače ove proste rečenice jer za bilo koje rečenice A, B i C koje mogu biti tačne ili lažne, ako „A i (B i nije C)” važi, onda i „(A i nije C) i B” važi i obrnuto.

Zadatak iskazne logike je da odredi, odnosno da uporedi, tačnost određenog tipa rečenica analizirajući ih samo do nivoa njihove izgrađenosti pomoću veznika „i”, „ili”, „nije” i „ako [onda]”. Rečenice kojima se bavi iskazna logika se zovu iskazi.

Iskaz je rečenica kojom se nešto tvrdi, koja je ili tačna ili lažna (ili važi ili ne važi). Mi ćemo se zadržati na iskazima u matematičkom jeziku i zbog višesmislenosti ćemo izbegavati prirodni jezik. Ponekad se za iskaz ne uzima sama rečenica, već njeno značenje čega se mi ovde nećemo držati.

PRIMER. Iskaz „$2 > 3 + 5$” je netačan dok su iskazi „$3|342$”, „$1 \in \mathbf{N}$ i $2 \in \mathbf{N}$” i „ako je $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, onda je $\pi \in \mathbf{R}$” tačni. Pošto x standardno smatramo promenljivom, „$x > 3$” za nas nije iskaz i to će postati tek kada promenljivoj dodelimo neku konkretnu vrednost.

Iskazna logika se bavi rečima „i”, „ili”, „nije” i „ako [onda]” koje zovemo *logičkim veznicima*. Logički veznici povezuju prostije iskaze u složenije.

Konjunkcija je veznik „i”. Ona povezuje dva iskaza koji se zovu *konjunkti* u novi iskaz koji se zove takođe konjunkcija.

Disjunkcija je veznik „ili”. Ona povezuje dva iskaza koji se zovu *disjunkti* u novi iskaz koji se zove takođe disjunkcija.

Implikacija je veznik „ako” uz koji obavezno ide „onda”. Ona povezuje *antecedens* (pretpostavku) i *konsekvens* (zaključak) u novi iskaz koji se zove takođe implikacija.

Umesto unarnog veznika *negacije* uvešćemo jednu logičku konstantu *apsurd* i za nas će iskaz „nije A” biti definisan kao „ako A, onda apsurd”. Ovo nije najstandardnija baza veznika, ali ćemo je prihvatiti zbog određenih tehničkih razloga.

1.3 Formalni jezik

Da bismo se bavili iskaznom logikom uvodimo veštački jezik koji je znatno prostiji od prirodnog. To je jedan *formalni jezik* i kao takav je dat svojim alfabetom (skupom simbola) od kojih se prave reči. Od svih reči nad datim alfabetom izdvajamo jedan skup reči koje su nam bitne. U našem slučaju te bitne reči se zovu iskazne formule. Formalni jezik je deo sintakse iskazne logike.

Alfabet za iskaznu logiku se sastoji od simbola koji se zovu *iskazna slova*, *logičkih veznika* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ i $\perp$, kao i *pomoćnih simbola* (i). Pretpostavljamo da je skup $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$ iskaznih slova prebrojiv. Konačan niz simbola alfabeta je *reč*. Bitan skup reči nad ovim alfabetom je zadat sledećom *induktivnom definicijom*.

Iskazne formule su reči koje zadovoljavaju:

(1) Iskazna slova i konstanta $\perp$ su iskazne formule.

(2) Ako su reči A i B iskazne formule, onda su $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ i $(A \to B)$ takođe iskazne formule čiji su *glavni veznici* redom $\wedge$, $\vee$ i $\to$.

(3) Ništa više nije iskazna formula.

Da bismo govorili o formalnom jeziku (*objekt-jeziku*), koristimo *metajezik* i to je ovde običan (prirodan) jezik. U metajeziku koristimo promenljive $p, q, r, \ldots$ za iskazna slova i promenljive $A, B, C, \ldots$ za iskazne formule. Implikaciju u metajeziku ćemo ponekad označavati sa $\Rightarrow$. U ovom delu kursa ćemo govoriti samo o iskaznim formulama pa ćemo ih skraćeno zvati formule.

Definišemo binarni veznik ekvivalencije (u oznaci $\leftrightarrow$) kao

$$(A \leftrightarrow B) =_{df} ((A \to B) \wedge (B \to A)),$$

unarni veznik negacije (u oznaci $\neg$) kao

$$\neg A =_{df} (A \to \perp)$$

i konstantu $\top$ kao

$$\top =_{df} (\perp \to \perp).$$

Ove definisane veznike ćemo koristiti najčešće da bismo skratili zapis ali napominjemo da oni nisu deo objekt-jezika.

Uvodimo dogovor da najspoljašnjije zagrade u formulama ne pišemo. Na primer, pisaćemo $p \wedge (q \to p)$ umesto $(p \wedge (q \to p))$. Za formule A i B, jednakost $A = B$ znači da su A i B iste formule.

Neka je $\mathcal{F}$ skup svih iskaznih formula (on je prebrojiv) i sa $\mathcal{F}_n$ označimo skup svih formula sa najviše n pojavljivanja binarnih veznika u sebi. Jasno je da važi

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \mathcal{F}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Svakoj iskaznoj formuli odgovara jedno planarno *drvo*. U listovima tog drveta se nalaze iskazna slova i konstanta $\perp$, dok se u ostalim čvorovima nalaze veznici $\wedge$, $\vee$ i $\to$. Na primer, formuli $((p_1 \wedge p_1) \to p_2) \vee (p_1 \vee p_3)$ odgovara drvo

$$\begin{tikzcd}
p_1 \arrow[dr, dash] & & p_1 \arrow[dl, dash] & & & & & \\
& \wedge \arrow[dr, dash] & & p_2 \arrow[dl, dash] & & p_1 \arrow[dr, dash] & & p_3 \arrow[dl, dash] \\
& & \to \arrow[drr, dash] & & & & \vee \arrow[dll, dash] & \\
& & & & \vee & & &
\end{tikzcd}$$

Podniz uzastopnih simbola neke reči je njena *podreč*. *Potformula* neke formule je njena podreč koja je i sama formula. Na primer, $p_1 \wedge p_1$ je potformula od

$$((p_1 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \vee (p_1 \vee p_3).$$

Kao što smo svakoj formuli pridružili planarno drvo, tako joj možemo pridružiti i planarno drvo njenih potformula. Na primer, drvo potformula prethodne formule je

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
p_1 \arrow[dr, dash] & & p_1 \arrow[dl, dash] & & & & \\
& p_1 \wedge p_1 \arrow[dr, dash] & & p_2 \arrow[dl, dash] & p_1 \arrow[dr, dash] & & p_3 \arrow[dl, dash] \\
& & (p_1 \wedge p_1) \rightarrow p_2 \arrow[dr, dash] & & & p_1 \vee p_3 \arrow[dll, dash] & \\
& & & ((p_1 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \vee (p_1 \vee p_3) & & &
\end{tikzcd}$$

1.4 Princip matematičke indukcije

Princip matematičke indukcije je vezan za skup **N** prirodnih brojeva. Pretpostavimo da imamo niz iskaza $I_0, I_1, \ldots$ i hoćemo da pokažemo da za svaki prirodan broj n važi iskaz I_n. Princip matematičke indukcije kaže da je dovoljno pokazati:

(**baza indukcije**) da važi I_0;

(**induktivni korak**) za proizvoljno n, iz pretpostavke da važi I_n (to je induktivna hipoteza) sledi da važi I_{n+1}.

PRIMER. Pokažimo da svaka formula ima isti broj levih i desnih zagrada. Pošto svaka formula pripada nekom skupu $\mathcal{F}_n$, dovoljno je pokazati da za svako n važi iskaz I_n: „Svaka formula iz $\mathcal{F}_n$ ima isti broj levih i desnih zagrada." Primenimo princip matematičke indukcije.

(**baza indukcije**) Formule iz $\mathcal{F}_0$ ne sadrže zagrade pa I_0 važi.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da važi I_n. Neka je A proizvoljna formula iz $\mathcal{F}_{n+1}$. Ako je A u $\mathcal{F}_n$, onda ona po induktivnoj hipotezi ima isti broj levih i desnih zagrada. Ovaj slučaj ubuduće nećemo razmatrati jer se on uvek svodi na direktnu primenu induktivne hipoteze.

Ako je A u $\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$, onda je ona oblika $(B \wedge C)$ ili $(B \vee C)$ ili $(B \rightarrow C)$ za neke formule B i C iz $\mathcal{F}_n$. Primenimo induktivnu hipotezu na formule B i C i dodajmo još jednu levu i jednu desnu zagradu, te zaključimo da i A ima isti broj levih i desnih zagrada.

Pošto je A bila proizvoljna formula iz $\mathcal{F}_{n+1}$, zaključujemo da važi I_{n+1}. $\square$

U ovom primeru je primenjena *indukcija po složenosti formule*.

§2. Odeljak 2.

2.1 Istinosna funkcionalnost

U klasičnoj iskaznoj logici imamo samo dve vrednosti: istinu i laž. U njoj zahtevamo da istinosna vrednost složenog iskaza zavisi samo od istinosnih vrednosti prostijih iskaza od kojih je složeni iskaz sastavljen. Zato kažemo da su veznici u klasičnoj logici *istinosno-funkcijski*.

Da bismo videli kako se dodeljuju vrednosti složenijim iskazima, poslužićemo se sledećom algebarskom strukturom koju ćemo označiti sa **2**. To je algebra istine 1 i laži 0. Formalno, posmatramo sledeću strukturu

$$(\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 0),$$

gde su $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ binarne operacije zadate tablicama

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

dok je 0 konstanta, odnosno nularna operacija. Crvena boja je korišćena da bi se ove operacije u strukturi (preslikavanja iz $\{0,1\} \times \{0,1\}$ u $\{0,1\}$) razlikovale od simbola odgovarajućih iskaznih veznika koji su deo sintakse (nisu nikakve operacije).

Pomoću ovih operacija možemo definisati na skupu $\{0,1\}$ binarnu operaciju $\leftrightarrow$ kao

$$x \leftrightarrow y =_{df} (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$$

i unarnu operaciju $\neg$ kao

$$\neg x =_{df} x \rightarrow 0.$$

Prema ovim definicijama, odgovarajuće tablice su

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

	$\neg$
0	1
1	0

Algebru **2** zovemo i *modelom* iskazne logike. Ona čini nešto što se zove *semantika* iskazne logike.

2.2 Valuacija

U sekciji 1.3 smo se upoznali sa delom sintakse iskazne logike a u prethodnoj sekciji smo uveli model **2** koji predstavlja semantiku iskazne logike. Sada ćemo uvesti jedan tip funkcija koje iskaznim formulama dodeljuju elemente skupa $\{0,1\}$. Te funkcije se zovu valuacije i one predstavljaju most između sintakse i semantike.

Proizvoljna funkcija v koja preslikava skup iskaznih slova $\mathcal{P}$ u skup $\{0,1\}$ je jedna *osnovna valuacija*. Cilj je da takvu funkciju proširimo do funkcije $\hat{v}\colon \mathcal{F} \to \{0,1\}$ koja će svakoj formuli dodeliti jednu vrednost—istinu 1 ili laž 0. Za to će nam poslužiti sledeća induktivna definicija. Ako je A iz $\mathcal{F}_0$ iskazno slovo p, onda je $\hat{v}(A) = v(p)$, a ako je A iz $\mathcal{F}_0$ konstanta $\perp$, onda je $\hat{v}(A) = 0$.

Pretpostavimo da je $\hat{v}$ definisana na $\mathcal{F}_n$. Ako je $A \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$, onda je A oblika $B \wedge C$ ili $B \vee C$ ili $B \to C$ za neke formule B i C iz $\mathcal{F}_n$ za koje je $\hat{v}$ već definisano. Tada $\hat{v}(A)$ definišemo redom kao $\hat{v}(B) \wedge \hat{v}(C)$ ili $\hat{v}(B) \vee \hat{v}(C)$ ili $\hat{v}(B) \to \hat{v}(C)$. Na taj način smo definisali željenu funkciju $\hat{v}$ koja se zove *valuacija*.

Primer. Neka je $v\colon \mathcal{P} \to \{0,1\}$ takva da je $v(p_1) = 1$, a $v(p_2) = 0$ i neka je A formula

$$((p_1 \wedge (p_2 \to \perp)) \vee p_1) \to p_2.$$

Da bismo odredili $\hat{v}(A)$ možemo upisati ispod iskaznih slova njihove vrednosti date sa v, a zatim iz dubine ka površini računati po tablicama vrednost same formule.

$$\begin{array}{ccccccccc} ((p_1 & \wedge & (p_2 & \to & \perp)) & \vee & p_1) & \to & p_2 \\ 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 0 & \end{array} \qquad \hat{v}(A) = 0$$

Tvrđenje 2.2.1. *Valuacija formule zavisi samo od osnovne valuacije iskaznih slova koja se pojavljuju u njoj.*

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule A u kojoj se pojavljuju samo iskazna slova iz skupa $\mathcal{Q}$ ćemo pokazati da ukoliko su ograničenja osnovnih valuacija v i w na taj skup jednaka, onda je i $\hat{v}(A) = \hat{w}(A)$.

(**baza indukcije**) Neka je $A \in \mathcal{F}_0$. Ako je A iskazno slovo p iz $\mathcal{Q}$, onda je

$$\hat{v}(A) = v(p) = w(p) = \hat{w}(A),$$

a ako je A konstanta $\perp$, onda je $\hat{v}(A) = 0 = \hat{w}(A)$.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu iz $\mathcal{F}_n$. Neka je $A \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Tada je ona oblika $B \wedge C$ ili $B \vee C$ ili $B \to C$ za neke formule B i C iz $\mathcal{F}_n$.

Neka je A oblika $B \wedge C$. Primenimo induktivnu hipotezu na formule B i C i dobijamo da je $\hat{v}(B) = \hat{w}(B)$ i $\hat{v}(C) = \hat{w}(C)$. Dakle,

$$\hat{v}(A) = \hat{v}(B) \wedge \hat{v}(C) = \hat{w}(B) \wedge \hat{w}(C) = \hat{w}(A).$$

Na isti način postupamo u slučajevima kada je A oblika $B \vee C$ ili $B \to C$. $\square$

2.3 Istinosne tablice

Po tvrđenju 2.2.1, ako formula A ima n iskaznih slova, onda postoji 2^n osnovnih valuacija $v_1, \ldots, v_{2^n}$ takvih da za proizvoljnu osnovnu valuaciju v postoji $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ takvo da je $\hat{v}(A) = \hat{v}_i(A)$. Pretpostavimo da su $q_1, \ldots, q_n$ sva iskazna slova koja se pojavljuju u A. Kod svake osnovne valuacije, vezano za formulu A, nas interesuje samo koje vrednosti ona dodeljuje iskaznim slovima $q_1, \ldots, q_n$ pa je možemo zameniti nizom dužine n koji se sastoji od nula i jedinica, s tim što je prvi član tog niza valuacija od q_1 i tako dalje do poslednjeg koji je valuacija od q_n. Na primer, niz $1\,0\,0\,1\,0$ odgovara osnovnoj valuaciji v za koju važi da je $v(q_1) = 1$, $v(q_2) = 0$, $v(q_3) = 0$, $v(q_4) = 1$ i $v(q_5) = 0$.

Na taj način svih ovih 2^n osnovnih valuacija možemo sistematski urediti (u leksikografski poredak). Na primer, ako je $n = 3$, ove valuacije su date u poretku:

$$\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1
\end{array}$$

Na taj način možemo odrediti sve moguće valuacije formule A formiranjem njene *istinosne tablice*. Na primer,

$$\begin{array}{ccccccc}
((p_0 & \wedge & p_1) & \rightarrow & p_0) & \rightarrow & p_1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

je istinosna tablica formule $((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_0) \rightarrow p_1$, pri čemu je crvenom bojom data vrednost formule pri osnovnoj valuaciji datoj plavom bojom.

2.4 Tautologije

Tautologija je iskazna formula A koja za svaku valuaciju ima vrednost 1. Oznaka je $\models A$. Na primer, formula $p \rightarrow p$ je tautologija jer za proizvoljnu osnovnu valuaciju v važi da ako je $v(p) = 0$, onda je $\hat{v}(p \rightarrow p) = 0 \rightarrow 0 = 1$, a ako je $v(p) = 1$, onda je $\hat{v}(p \rightarrow p) = 1 \rightarrow 1 = 1$. *Isključenje trećeg* $p \vee \neg p$ je još jedan primer tautologije.

S druge strane, iskazna formula koja za svaku valuaciju ima vrednost 0 je *kontradikcija*. Na primer, formula $p \wedge \neg p$ je kontradikcija. Mnoge formule (na primer p ili formula s kraja prethodne sekcije) nisu ni tautologije ni kontradikcije.

PRIMER 1. Pokazati primenom istinosnih tablica da su sledeće formule tautologije:

(1) $p \to (q \to p)$,

(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$,

(3) $p \to (q \to (p \wedge q))$,

(4a) $(p \wedge q) \to p$, (4b) $(p \wedge q) \to q$,

(5a) $p \to (p \vee q)$, (5b) $q \to (p \vee q)$,

(6) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$,

(7) $((p \to \bot) \to \bot) \to p$.

Tvrđenje 2.4.1. *Ako je $\models A \to B$ i $\models A$, onda je $\models B$.*

Dokaz. Neka je v proizvoljna osnovna valuacija. Pošto su $A \to B$ i A tautologije, imamo da je $\hat{v}(A \to B) = 1$ i $\hat{v}(A) = 1$. Dakle,

$$1 = \hat{v}(A \to B) = \hat{v}(A) \to \hat{v}(B) = 1 \to \hat{v}(B),$$

pa po tablici za implikaciju mora biti $\hat{v}(B) = 1$. Znači i B je tautologija. □

Pitanje da li je neka formula tautologija je odlučivo. Postoji konačna procedura koja uvek daje odgovor na to pitanje. Pošto je formula reč, ona ima samo konačno mnogo slova u sebi. Ako je taj broj n, onda je dovoljno formirati istinosne tablice te formule sa 2^n vrsta koje se računaju korišćenjem tablica kojima je zadata algebra **2**. Ta procedura je često neefikasna i uskoro ćemo upoznati neke druge mogućnosti provere da li je neka formula tautologija.

2.5 Supstitucija

Za formule A, B i iskazno slovo p, neka je formula A^p_B rezultat zamene svih pojavljivanja iskaznog slova p u formuli A formulom B. Kažemo da je A^p_B dobijena *uniformnom supstitucijom* formule B na mesto iskaznog slova p u formuli A. Na primer,

$$((p \to q) \wedge p)^p_{q \to r} \quad \text{je} \quad ((q \to r) \to q) \wedge (q \to r).$$

Neka je A tautologija $p \to p$. Posmatrajmo formulu $(q \wedge r) \to (q \wedge r)$ koja je rezultat supstitucije $A^p_{q \wedge r}$. Neka je v proizvoljna osnovna valuacija i neka je w osnovna valuacija koja se poklapa sa v osim eventualno što je $w(p) = \hat{v}(q \wedge r)$. Tada važi

$$\hat{v}(A^p_{q\wedge r}) = \hat{v}(q \wedge r) \to \hat{v}(q \wedge r) = w(p) \to w(p) = \hat{w}(A) = 1,$$

zato što je A tautologija. Pošto je v bila proizvoljna, zaključujemo da je i $A^p_{q\wedge r}$ tautologija. Ovo ilustruje dokaz sledećeg tvrđenja koje nam daje mogućnost da od poznatih tautologija stvaramo nove.

Tvrđenje 2.5.1. *Ako je A tautologija, onda je i A^p_B tautologija za proizvoljno iskazno slovo p i proizvoljnu formulu B.*

Za formule A, $B_1, \ldots, B_n$ i iskazna slova $q_1, \ldots, q_n$, neka je formula $A^{q_1 \cdots q_n}_{B_1 \ldots B_n}$ rezultat istovremene zamene svih pojavljivanja iskaznih slova $q_1, \ldots, q_n$ u formuli A redom formulama $B_1, \ldots, B_n$. Kažemo da je $A^{q_1 \cdots q_n}_{B_1 \ldots B_n}$ dobijena *simultanom supstitucijom* formula $B_1 \ldots B_n$ na mesto iskaznih slova $q_1, \ldots, q_n$ u formuli A. Na primer,

$$((p \to q) \wedge p)^{p\ \ q}_{q\to r\ p} \quad \text{je} \quad ((q \to r) \to p) \wedge (q \to r).$$

Sledeće tvrđenje je uopštenje tvrđenja 2.5.1.

Tvrđenje 2.5.2. *Ako je A tautologija, onda je i $A^{q_1 \cdots q_n}_{B_1 \ldots B_n}$ tautologija za proizvoljna iskazna slova $q_1, \ldots, q_n$ i proizvoljne formule $B_1, \ldots, B_n$.*

Posledica 2.5.3. *Sve formule dobijene simultanom supstitucijom proizvoljnih formula A, B i C na mesto iskaznih slova p, q i r u formulama datim u primeru 1 iz sekcije 2.4 su tautologije.*

2.6 Zamena ekvivalenata (semantička)

Za formule A i B kažemo da su *logički ekvivalentne* kada je formula $A \leftrightarrow B$ tautologija. Po tablici za ekvivalenciju, A i B su logički ekvivalentne ako i samo ako imaju iste vrednosti u proizvoljnoj valuaciji. Dokaz narednog tvrđenja je sasvim lak.

Tvrđenje 2.6.1. *Logička ekvivalentnost je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{F}$.*

Primer. Sledeće tautologije daju neke važne parove logički ekvivalentnih formula. Zamenom svih simbola $\wedge$ i $\top$ u tim formulama redom simbolima $\vee$ i $\bot$ i obrnuto, dobijamo *dualne* parove logički ekvivalentnih formula.

$(((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$	asocijativnost
$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	komutativnost
$(p \wedge p) \leftrightarrow p$	idempotentnost
$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$	apsorpcija
$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	distributivnost
$(p \wedge \bot) \leftrightarrow \bot$	nulta distributivnost
$(p \wedge \top) \leftrightarrow p$	neutral
$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	De Morganov zakon
$\neg\top \leftrightarrow \bot$	
$\neg\neg p \leftrightarrow p$	dvostruka negacija

Posmatrajmo formulu $(p \wedge \neg p) \rightarrow ((q \vee (r \wedge s)) \rightarrow t)$. Njena istinosna tablica ima 32 reda. U svakom od njih vrednost potformule $p \wedge \neg p$ je 0. Pošto je glavni veznik u formuli implikacija čiji je antecedens $p \wedge \neg p$, bez obzira na vrednost konsekvensa, ona ima vrednost 1. Dakle, ona je tautologija i to smo utvrdili bez prevelikog računa.

Suština je u tome da su formule $p \wedge \neg p$ i $\perp$ logički ekvivalentne. Prethodno razmatranje formalizujemo kroz sledeću teoremu.

Teorema 2.6.2 (o zameni ekvivalenata-semantička)**.** *Neka je C_A formula u kojoj se pojavljuje potformula A i neka formula C_B nastaje od C_A zamenom potformule A formulom B. Tada važi:*

(a) *ako je $\models A \leftrightarrow B$ i $\models C_A$, onda je $\models C_B$;*

(b) *ako je $\models A \leftrightarrow B$, onda je $\models C_A \leftrightarrow C_B$.*

Dokaz. Dokazaćemo samo deo pod (b) pošto je onaj pod (a) njegova trivijalna posledica. Neka je $\models A \leftrightarrow B$. Dokaz da je $\models C_A \leftrightarrow C_B$ izvodimo indukcijom po složenosti formule C_A.

(**baza indukcije**) Neka je $C_A = A$. Tada je $C_B = B$ i jasno je da $\models A \leftrightarrow B$ povlači $\models C_A \leftrightarrow C_B$.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule iz $\mathcal{F}_n$ koje sadrže potformulu A. Neka je $C_A \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Tada je (do na komutativnost konjunkcije i disjunkcije) formula C_A jednog od sledećih oblika

$$L_A \wedge D \quad \text{ili} \quad L_A \vee D \quad \text{ili} \quad L_A \rightarrow D \quad \text{ili} \quad L \rightarrow D_A,$$

gde su formule L_A, D, L i D_A iz $\mathcal{F}_n$, pri čemu su prva i poslednja potformule od C_A u kojima se pojavljuje A.

Neka je C_A oblika $L_A \wedge D$. Neka je v proizvoljna osnovna valuacija. Po induktivnoj pretpostavci je $\models L_A \leftrightarrow L_B$ pa je $\hat{v}(L_A) = \hat{v}(L_B)$. Odavde zaključujemo

$$\hat{v}(C_A) = \hat{v}(L_A) \wedge \hat{v}(D) = \hat{v}(L_B) \wedge \hat{v}(D) = \hat{v}(C_B),$$

pa je $\hat{v}(C_A \leftrightarrow C_B) = 1$. Pošto je v bila proizvoljna, važi $\models C_A \leftrightarrow C_B$. Na isti način postupamo u slučajevima kada je C_A oblika $L_A \vee D$ ili $L_A \rightarrow D$ ili $L \rightarrow D_A$. $\square$

U slučaju formule $(p \wedge \neg p) \rightarrow ((q \vee (r \wedge s)) \rightarrow t)$, pošto je $\models \perp \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$, po teoremi 2.6.2 (a) dovoljno je proveriti da je $C_\perp = \perp \rightarrow ((q \vee (r \wedge s)) \rightarrow t)$ tautologija. Ona to jeste po tvrđenju 2.5.1 jer je dobijena supstitucijom formule $(q \vee (r \wedge s)) \rightarrow t$ na mesto slova p u formuli $\perp \rightarrow p$ koja je tautologija.

2.7 Čišćenje (diskusija po slovu)

Posmatrajmo sledeću tabelu koja nam daje formulu logički ekvivalentnu formuli kojoj je konjunkt, disjunkt, antecedens ili konsekvens konstanta $\perp$ odnosno $\top$.

A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$
$\perp$	$\perp$	B	$\top$	$\neg B$	$\neg B$	$\top$
$\top$	B	$\top$	B	$\top$	B	$\perp$

Tvrđenje 2.7.1. *Formula A je tautologija akko su formule $A^p_\perp$ i $A^p_\top$ tautologije.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Direktno iz tvrđenja 2.5.1.

($\Leftarrow$) Neka je v proizvoljna osnovna valuacija. Ako je $v(p) = 0$, onda je $\hat{v}(A) = \hat{v}(A^p_\perp) = 1$, a ako je $v(p) = 1$, onda je $\hat{v}(A) = \hat{v}(A^p_\top) = 1$. $\square$

Primer. Neka je A formula $p \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$. Proverimo da li je ona tautologija primenom prethodnog tvrđenja. Neophodan i dovoljan uslov da je A tautologija je da su formule $\perp \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (r \rightarrow \neg\perp))$ i $\top \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (r \rightarrow \neg\top))$ tautologije.

Po teoremi 2.6.2 uz gornju tabelu, dobijamo da je prva logički ekvivalentna formuli $\top$ koja je tautologija, dok je druga logički ekvivalentna formuli $(q \vee r) \rightarrow \neg r$. Dakle, A je tautologija akko $(q \vee r) \rightarrow \neg r$ je tautologija, što je po tvrđenju 2.7.1 ekvivalentno sa time da su formule $(q \vee \perp) \rightarrow \neg\perp$ i $(q \vee \top) \rightarrow \neg\top$ tautologije.

Po teoremi 2.6.2 uz gornju tabelu, dobijamo da je prva logički ekvivalentna formuli $\top$ koja je tautologija, dok je druga logički ekvivalentna formuli $\perp$ koja nije tautologija. Zaključak je da A nije tautologija.

§3. Odeljak 3.

3.1 Formalni sistemi

Formalni sistem se zadaje formalnim jezikom (alfabetom i formulama), aksiomama i pravilima izvođenja. U formalnim sistemima vezanim za iskaznu logiku formalni jezik će uvek biti onaj uveden u sekciji 1.3. *Aksiome* su posebne formule zadate tako da ih možemo prepoznati. *Pravila izvođenja* su relacije koje povezuju više formula s jednom formulom. To da pravilo izvođenja ρ povezuje formule $A_1 \dots A_n$ (*premise* pravila ρ) s formulom B (*zaključkom* pravila ρ) se zapisuje kao

$$\frac{A_1 \dots A_n}{B}\ \rho$$

mada ćemo mi indeks ρ redovno izostavljati jer će biti jasno iz konteksta o kom pravilu je reč. Gornju figuru shvatamo kao drvo sa n listova i korenom i u sklopu nekog većeg drveta ćemo je zvati *grananjem* opravdanim pravilom ρ.

Izvođenje u formalnom sistemu je konačno planarno drvo u čijim čvorovima se nalaze formule i svako grananje je opravdano nekim pravilom izvođenja. Ukoliko su u izvođenju sve formule u listovima aksiome, onda je to *dokaz* za formulu A koja se nalazi u njegovom korenu. Za takvo A kažemo da je *teorema* datog formalnog sistema. Oznaka je $\vdash A$. Neka tvrđenja do sada, na primer teorema 2.6.2 su nosila isto to ime što bi moglo da dovede do zabune. Pravilno bi bilo da sva ta tvrđenja koja su se zvala teoreme i koja tvrde nešto o pojmovima vezanim za iskaznu logiku nazivamo *metateoremama* i da reč teorema rezervišemo za pojam koji je ovde uveden. Da ne bismo previše komplikovali terminologiju i u nadi da će uvek biti jasno u kom smislu koristimo reč „teorema" u datoj situaciji, ostaćemo pri ovoj pomalo dvosmislenoj terminologiji koja je uobičajena u logici. Sasvim slična diskusija bi se mogla razviti i oko reči „dokaz".

Formule koje se nalaze u listovima izvođenja a nisu aksiome su *hipoteze* tog izvođenja. Ukoliko sve hipoteze izvođenja pripadaju nekom skupu Γ, onda je to izvođenje iz hipoteza Γ za formulu A koja se nalazi u njegovom korenu. Oznaka je $\Gamma \vdash A$.

Ako je A pojavljivanje neke formule u izvođenju, onda je *podizvođenje* sa korenom A drvo čiji je koren A, a svi preostali čvorovi su oni iznad A u polaznom izvođenju. Relacija naslednik-prethodnik je nasleđena iz polaznog izvođenja.

Ovakav formalni sistem predstavlja sintaksu logike. Njega možemo shvatiti kao mašinu za proizvodnju teorema. To da smo u svetu sintakse vidimo po tome što kada izvodimo neku formulu uopšte ne moramo da razmišljamo o njenom značenju, to jest o njenoj vrednosti u algebri **2** pri nekoj valuaciji. Kad budemo dokazali stav potpunosti (vidi sekciju 3.6) znaćemo da se skup teorema podudara sa skupom tautologija tako da će naš formalni sistem postati mašina za proizvodnju svih tautologija.

3.2 Prirodna dedukcija

Prvi formalni sistem s kojim ćemo se upoznati je *prirodna dedukcija*. Skup aksioma ovog formalnog sistema je prazan dok su pravila izvođenja data sledećim shemama (u smislu da A, B i C mogu biti proizvoljne formule):

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \textit{uvođenje konjunkcije} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \textit{eliminacija konjunkcije}$$

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \textit{uvođenje disjunkcije} \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]_*\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]_*\\ C\end{array}}{C} *\ \textit{eliminacija disjunkcije}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]_*\\ B\end{array}}{A \to B} *\ \textit{uvođenje implikacije} \qquad\qquad \frac{A \to B \qquad A}{B}\ \textit{eliminacija implikacije}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A \to \bot]_*\\ \bot\end{array}}{A} *\ \textit{jako svođenje na apsurd}$$

Oznaka $[D]_*$ iznad neke premise pravila izvođenja znači da ukoliko se D našla u listovima u podizvođenju u čijem korenu je ta premisa, onda te listove *možemo* zanemariti. Dakle, ne zahtevamo da se D obavezno našla u tom podizvođenju niti da moramo zanemariti sve listove u kojima se pojavljuje. Oznaka $*$ obeležava trenutak kada su neki listovi obrisani i nadalje ćemo ta mesta označavati prirodnim brojevima.

Neki primeri izvođenja u prirodnoj dedukciji su dati u sekciji 8.1. Tvrđenje koje sledi govori o tome da se skup pravila izvođenja može proširiti bez povećanja skupa teorema odnosno izvodivih formula iz datog skupa hipoteza.

Tvrđenje 3.2.1. *Sledeća pravila izvođenja se mogu dobiti pomoću postojećih.*

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A} \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg B} \qquad \frac{\neg(\neg A \vee B)}{A} \qquad \frac{\neg(A \vee \neg B)}{B}$$

$$\frac{\neg(A \to B)}{A} \qquad\qquad \frac{\neg(A \to B)}{\neg B}$$

Dokaz. U levom izvođenju koje sledi je poslednje pravilo uvođenje implikacije dok je u desnom izvođenju poslednje pravilo jako svođenje na apsurd.

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee B) \qquad \dfrac{[A]_1}{A\vee B}}{\bot}}{\neg A}\,1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg A\vee B) \qquad \dfrac{[\neg A]_1}{\neg A\vee B}}{\bot}}{A}\,1$$

U levom izvođenju koje sledi je poslednje pravilo jako svođenje na apsurd dok je u desnom izvođenju poslednje pravilo uvođenje implikacije.

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A\to B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_2 \quad [A]_1}{\bot}}{B}}{A\to B}\,1}{\bot}}{A}\,2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\neg(A\to B) \qquad \dfrac{[B]_1}{A\to B}}{\bot}}{\neg B}\,1$$

□

Napomena 3.2.2. *Na ispitu slobodno koristite ova dobijena pravila označavajući ih masnim crtama. Svako od ovih šest pravila koje ste koristili u zadatku opravdajte negde sa strane na gorenavedeni način.*

3.3 Zamena ekvivalenata (sintaksna)

U ovoj sekciji ćemo pokazati sintaksnu varijantu teoreme o zameni ekvivalenata čija je semantička varijanta pokazana u sekciji 2.6. Novina je u tome što na mestu gde je ranije stajalo „tautologija" u sintaksnoj varijanti stoji „teorema". Za formule A i B kažemo da su *sintaksno ekvivalentne* kada je formula $A \leftrightarrow B$ teorema. Ovo je sintaksni analogon pojma logičke ekvivalencije. Dokaz narednog tvrđenja je sasvim lak.

Tvrđenje 3.3.1. *Sintaksna ekvivalentnost je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{F}$.*

Teorema 3.3.2 (o zameni ekvivalenata-sintaksna)**.** *Neka je C_A formula u kojoj se pojavljuje potformula A i neka formula C_B nastaje od C_A zamenom potformule A formulom B. Tada važi:*

(a) *ako je $\vdash A \leftrightarrow B$ i $\vdash C_A$, onda je $\vdash C_B$;*

(b) *ako je $\vdash A \leftrightarrow B$, onda je $\vdash C_A \leftrightarrow C_B$.*

Dokaz. Dokazaćemo samo deo pod (b) pošto je onaj pod (a) njegova trivijalna posledica. Neka je $\vdash A \leftrightarrow B$. Dokaz da je $\vdash C_A \leftrightarrow C_B$ izvodimo indukcijom po složenosti formule C_A.

(**baza indukcije**) Neka je $C_A = A$. Tada je $C_B = B$ i jasno je da $\vdash A \leftrightarrow B$ povlači $\vdash C_A \leftrightarrow C_B$.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule iz $\mathcal{F}_n$ koje sadrže potformulu A. Neka je $C_A \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Tada je (do na komutativnost konjunkcije i disjunkcije) formula C_A jednog od sledećih oblika

$$L_A \wedge D \quad \text{ili} \quad L_A \vee D \quad \text{ili} \quad L_A \to D \quad \text{ili} \quad L \to D_A,$$

gde su formule L_A, D, L i D_A iz $\mathcal{F}_n$, pri čemu su prva i poslednja potformule od C_A u kojima se pojavljuje A.

Neka je C_A oblika $L_A \wedge D$. Po induktivnoj hipotezi važi $\vdash L_A \leftrightarrow L_B$. Dokaz za formulu X koji postoji po induktivnoj hipotezi ćemo nadalje predstavljati kao $\dfrac{}{X}$.

Dokaz za $(L_A \wedge D) \leftrightarrow (L_B \wedge D)$ je dat sa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{L_A \leftrightarrow L_B}}{L_A \to L_B} \quad \dfrac{[L_A \wedge D]_1}{L_A}}{L_B} \quad \dfrac{[L_A \wedge D]_1}{D}}{L_B \wedge D}}{(L_A \wedge D) \to (L_B \wedge D)}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{L_A \leftrightarrow L_B}}{L_B \to L_A} \quad \dfrac{[L_B \wedge D]_2}{L_B}}{L_A} \quad \dfrac{[L_B \wedge D]_2}{D}}{L_A \wedge D}}{(L_B \wedge D) \to (L_A \wedge D)}\,2}{(L_A \wedge D) \leftrightarrow (L_B \wedge D)}$$

Analogno bismo postupili u slučajevima kada je C_A oblika $L_A \vee D$ ili $L \to D_A$.

Ostaje nam još slučaj kada je C_A oblika $L_A \to D$. Tada je dokaz za formulu $(L_A \to D) \leftrightarrow (L_B \to D)$ dat sa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[L_A \to D]_2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{L_A \leftrightarrow L_B}}{L_B \to L_A} \quad [L_B]_1}{L_A}}{D}}{L_B \to D}\,1}{(L_A \to D) \to (L_B \to D)}\,2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[L_B \to D]_4 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{L_A \leftrightarrow L_B}}{L_A \to L_B} \quad [L_A]_3}{L_B}}{D}}{L_A \to D}\,3}{(L_B \to D) \to (L_A \to D)}\,4}{(L_A \to D) \leftrightarrow (L_B \to D)}$$

□

3.4 Konjunktivna normalna forma

U ovoj sekciji ćemo videti da je svaka formula sintaksno ekvivalentna formuli jednog posebnog oblika. To će nam kasnije pomoći da dokažemo teoremu potpunosti. Ponekad nećemo pisati zagrade vezane za konjunkciju koja je sama konjunkt, odnosno disjunkciju koja je sama disjunkt. Na primer, umesto $(p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg p \wedge (q \vee \neg r))$ ćemo pisati $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg r)$. Pretvaranje ovakve reči u formulu nije jednoznačno ali zbog asocijativnosti konjunkcije i disjunkcije koja je pokazana u primeru 2 iz sekcije 8.1, sve tako dobijene formule su međusobno sintaksno ekvivalentne.

Pod *literalom* podrazumevamo iskazno slovo ili negaciju iskaznog slova. Na primer p i $\neg q$ (zvanično $q \to \perp$) su literali. *Disjunkcija literala* je formula oblika $L_1 \vee \ldots \vee L_n$, za $n \geq 1$, gde su L_i literali.

Formule $\perp$, $\top$ (zvanično $\perp \to \perp$) i $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$, za $m \geq 1$, gde su D_i disjunkcije literala, su u *konjunktivnoj normalnoj formi* (KNF).

Teorema 3.4.1 (o svođenju na KNF)**.** *Svaka formula je sintaksno ekvivalentna formuli u KNF.*

Traženu formulu u KNF dobijamo sintaksnom zamenom ekvivalenata. Parovi sintaksno ekvivalentnih formula koji se koriste tom prilikom su dati u primeru 3 iz sekcije 8.1. Dokaz ove teoreme nam ujedno daje proceduru svođenja na KNF kao i na tri usputne normalne forme. Tu proceduru ćemo ilustrovati na primeru formule

$$((p \wedge (q \to r)) \vee \perp) \to (q \to r). \tag{0}$$

Označimo sa NF1 skup svih formula u kojima sve implikacije imaju konsekvens oblika $\perp$, to jest sve implikacije su negacije.

Lema 3.4.2. *Svaka formula je sintaksno ekvivalentna formuli u NF1.*

Dokaz. Primenjujemo indukciju po broju implikacija u polaznoj formuli čiji konsekvens nije $\perp$. Baza te indukcije je trivijalna, a u induktivnom koraku koristimo zamenu ekvivalenata na osnovu primera 3(1) iz sekcije 8.1. □

Polazeći od gornje formule (0), primenjujući ovu proceduru, dobićete formulu

$$\neg((p \wedge (\neg q \vee r)) \vee \perp) \vee (\neg q \vee r), \tag{1}$$

koja pripada NF1. Označimo sa NF2 skup formula dobijenih od literala, $\perp$ i $\top$ pomoću konjunkcije i disjunkcije. Lako se vidi da je NF2 $\subseteq$ NF1.

Lema 3.4.3. *Svaka formula je sintaksno ekvivalentna formuli u NF2.*

Dokaz. Po lemi 3.4.2 i tvrđenju 3.3.1, dovoljno je to pokazati za svaku formulu iz NF1. Primenićemo indukciju po složenosti formule iz NF1. Baza te indukcije, to jest kada je formula oblika p ili $\perp$, kao i slučajevi kada je formula oblika $\neg p$ ili $\top$ su trivijalni. Ako je formula oblika konjunkcije ili disjunkcije, primeni se induktivna hipoteza na konjunkte odnosno disjunkte.

Ako je formula oblika $\neg(A \wedge B)$, odnosno $\neg(A \vee B)$, onda je ona na osnovu primera 3(2)-(3) iz sekcije 8.1 sintaksno ekvivalentna formuli $\neg A \vee \neg B$, odnosno formuli $\neg A \wedge \neg B$. Na $\neg A$ i $\neg B$ se može primeniti induktivna hipoteza.

Ako je formula oblika $\neg\neg A$, onda je ona na osnovu primera 3(4) iz sekcije 8.1 sintaksno ekvivalentna formuli A na koju se može primeniti induktivna hipoteza. □

Polazeći od gornje formule (1), primenjujući ovu proceduru, dobićete formulu

$$((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge \top) \vee (\neg q \vee r), \tag{2}$$

koja pripada NF2. Označimo sa NF3 skup formula dobijenih od literala pomoću konjunkcije i disjunkcije. Lako se vidi da je NF3 $\subseteq$ NF2.

Lema 3.4.4. *Svaka formula je sintaksno ekvivalentna formuli oblika $\bot$ ili $\top$ ili formuli u NF3.*

Dokaz. Po lemi 3.4.3 i tvrđenju 3.3.1, dovoljno je to pokazati za svaku formulu iz NF2. Primenjujemo indukciju po broju konjunkata ili disjunkata oblika $\bot$ i $\top$ u takvoj formuli. Baza ove indukcije je trivijalna, a u induktivnom koraku koristimo zamenu ekvivalenata na osnovu primera 3(5)-(8) iz sekcije 8.1. □

Polazeći od gornje formule (2), primenjujući ovu proceduru, dobićete formulu

$$(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg q \vee r). \tag{3}$$

Lema 3.4.5. *Svaka formula u NF3 je sintaksno ekvivalentna formuli u KNF.*

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule u NF3 pokazujemo da je ona sintaksno ekvivalentna formuli u KNF koja nije konstanta. Baza indukcije kao i slučaj kada je formula oblika $\neg p$ su trivijalni pošto su p i $\neg p$ u KNF i nisu konstante. Ako je formula oblika konjunkcije, onda primenimo induktivnu hipotezu na konjunkte i dobijemo formulu u KNF koja nije konstanta.

Ako je formula oblika disjunkcije, onda je po induktivnoj hipotezi ona sintaksno ekvivalentna formuli oblika

$$(D_1 \wedge \ldots \wedge D_m) \vee (E_1 \wedge \ldots \wedge E_k), \quad m, k \geq 1,$$

gde su D_i i E_j disjunkcije literala. Na osnovu primera 4 iz sekcije 8.1 imamo da je ova formula sintaksno ekvivalentna formuli

$$(D_1 \vee E_1) \wedge \ldots \wedge (D_m \vee E_k),$$

koja je u KNF i nije konstanta. □

Polazeći od gornje formule (3), primenjujući ovu proceduru, dobićete formulu

$$(\neg p \vee q \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg q \vee r).$$

Leme 3.4.4 i 3.4.5 uz tvrđenje 3.3.1 daju teoremu 3.4.1. Dualan pojam konjunktivnoj normalnoj formi je disjunktivna normalna forma. Nju definišemo na sledeći način. *Konjunkcija literala* je formula oblika $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$, za $n \geq 1$, gde su L_i literali.

Formule $\perp$, $\top$ i $K_1 \vee \ldots \vee K_m$, za $m \geq 1$, gde su K_i konjunkcije literala, su u *disjunktivnoj normalnoj formi* (DNF). Sledeća lema je dualna lemi 3.4.5 i dokazuje se na isti način.

Lema 3.4.6. *Svaka formula u NF3 je sintaksno ekvivalentna formuli u DNF.*

Na osnovu nje važi i sledeća teorema.

Teorema 3.4.7 (o svođenju na DNF)**.** *Svaka formula je sintaksno ekvivalentna formuli u DNF.*

3.5 Hilbertovski sistem

U ovoj sekciji ćemo uvesti još jedan formalni sistem za iskaznu logiku. Taj novi sistem karakteriše puno shematskih aksioma i samo jedno pravilo izvođenja. Kasnije ćemo pokazati da iz jednog skupa formula možemo izvesti iste formule i u prirodnoj dedukciji i u hilbertovskom sistemu. Na osnovu toga ćemo se moći služiti bilo jednim bilo drugim sistemom u zavisnosti od toga šta nam bude bilo zgodnije.

Kao što smo najavili, *jezik* je isti onaj uveden u 1.3. Sheme *aksioma* su

(1) $A \to (B \to A)$,

(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(3) $A \to (B \to (A \wedge B))$,

(4a) $(A \wedge B) \to A$, (4b) $(A \wedge B) \to B$,

(5a) $A \to (A \vee B)$, (5b) $B \to (A \vee B)$,

(6) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,

(7) $\neg\neg A \to A$,

(u smislu da A, B i C mogu biti proizvoljne formule). Ima ih beskonačno mnogo ali ih uvek možemo prepoznati.

Jedino pravilo izvođenja je *modus ponens*:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}.$$

PRIMER. Dokaz u hilbertovskom sistemu za formulu $A \to A$, koji odgovara definiciji iz sekcije 3.1, je sledeće drvo (iznad listova je naznačen broj aksiome čiju instancu koristimo)

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))}^{(2)} \quad \overbrace{A \to ((B \to A) \to A)}^{(1)}}{(A \to (B \to A)) \to (A \to A)} \quad \overbrace{A \to (B \to A)}^{(1)}}{A \to A}$$

Sad ćemo dati jednu alternativnu definiciju pojma izvođenja iz hipoteza u hilbertovskom sistemu. Ona je u literaturi više prisutna nego naša definicija data u sekciji 3.1. *Izvođenje* za formulu A iz skupa hipoteza Γ je konačan niz formula koji se završava formulom A, takav da za svaku formulu iz tog niza važi da je aksioma ili pripada Γ ili je izvodiva iz neke dve prethodne pomoću modus ponensa. Ako je Γ prazan, onda je to *dokaz* za *teoremu* A. *Dužina izvođenja* je broj članova tog niza.

Dokaz iz gornjeg primera bi se nakon „peglanja” pretvorio u sledeći dokaz u formi niza: $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$, $A \to ((B \to A) \to A)$, $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$, $A \to (B \to A)$, $A \to A$.

Prilično lako se vidi da se svako drvenasto izvođenje može ispeglati i obrnuto, da se svako izvođenje u obliku niza može pretvoriti u drvo. Ponekad će nam zbog induktivnih argumenata biti lakše da baratamo sa izvođenjima datim nizom formula. Da je formula A izvodiva u hilbertovskom sistemu iz skupa hipoteza Γ označićemo sa $\Gamma \vdash_H A$.

Teorema 3.5.1 (teorema dedukcije)**.** *Ako je* $\Gamma \cup \{A\} \vdash_H B$*, onda je* $\Gamma \vdash_H A \to B$*.*

Dokaz. Primenićemo indukciju po dužini $n \geq 1$ izvođenja za B iz skupa hipoteza $\Gamma \cup \{A\}$.

(**baza indukcije**) Ako je $n = 1$, onda je B aksioma ili je $B \in \Gamma$ ili je $B = A$.

(1) Ako je B aksioma onda je $B, B \to (A \to B), A \to B$ izvođenje iz Γ u kome su prva i druga formula aksiome a treća je dobijena od njih pomoću modus ponensa.

(2) Ako je $B \in \Gamma$, onda je prethodni niz takođe izvođenje iz Γ u kome je prva formula iz Γ a ostalo je isto.

(3) Ako je $B = A$, onda iskoristimo gornje izvođenje za $A \to A$ iz praznog skupa hipoteza.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako izvođenje dužine najviše n. Neka je dato izvođenje za B iz $\Gamma \cup \{A\}$ dužine $n+1$. Tada je B aksioma ili je $B \in \Gamma$ ili je $B = A$ ili je to izvođenje oblika (uz moguću zamenu mesta C i $C \to B$)

$$\mathcal{U}, C, \mathcal{S}, C \to B, \mathcal{W}, B,$$

gde su $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{W}$ nizovi formula (možda i prazni).

U prve tri situacije postupamo kao u bazi, dok u poslednjoj iskoristimo induktivnu hipotezu za sledeća dva izvođenja čija je dužina najviše n

$$\mathcal{U}, C \quad i \quad \mathcal{U}, C, \mathcal{S}, C \to B.$$

Na taj način dobijamo dva izvođenja $\mathcal{U}', A \to C$ i $\mathcal{S}', A \to (C \to B)$ iz skupa hipoteza Γ. Posmatrajmo niz formula

$$\mathcal{U}', A \to C, \mathcal{S}', A \to (C \to B), (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)),$$
$$(A \to C) \to (A \to B), A \to B.$$

To je jedno izvođenje za $A \to B$ iz Γ, pošto smo ga dobili nadovezivanjem dva izvođenja iz Γ, instance prve aksiome i još dva rezultata primene modus ponensa na neke od prethodnih formula. $\square$

U sledećem tvrđenju je sa $\Gamma \vdash_{ND} A$ označeno to da je formula A izvodiva iz skupa hipoteza Γ u prirodnoj dedukciji.

Tvrđenje 3.5.2. *$\Gamma \vdash_H A$ akko $\Gamma \vdash_{ND} A$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Svako drvenasto izvođenje u hilbertovskom sistemu možemo transformisati u prirodnodedukcijsko izvođenje tako što svaku aksiomu u listovima zamenimo njenim prirodnodedukcijskim dokazom datim u primeru 1 iz sekcije 8.1. Modus ponens koji je korišćen u ostatku izvođenja odgovara eliminaciji implikacije.

($\Leftarrow$) Neka je dato prirodnodedukcijsko izvođenja za A iz Γ. Indukcijom po broju čvorova u tom drvetu ćemo pokazati da postoji niz formula koji predstavlja hilbertovsko izvođenje za A iz Γ.

(**baza indukcije**) Ako izvođenje za A iz Γ ima samo jedan čvor, onda se u njemu nalazi A i to mora biti formula iz Γ. Jednočlani niz A je onda hilbertovsko izvođenje za A iz Γ.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako prirodnodedukcijsko izvođenje sa najviše n čvorova. Neka je dato prirodnodedukcijsko izvođenje za A iz Γ sa $n+1$ čvorova. Imamo sedam mogućnosti za poslednje primenjeno pravilo u tom izvođenju.

(1) Ako je to uvođenje konjunkcije i A je formula $A_1 \wedge A_2$, onda po induktivnoj pretpostavci postoje hilbertovska izvođenja $\mathcal{U}, A_1$ i $\mathcal{S}, A_2$ iz Γ. Posmatrajmo niz

$$\mathcal{U}, A_1, \mathcal{S}, A_2, A_1 \to (A_2 \to (A_1 \wedge A_2)), A_2 \to (A_1 \wedge A_2), A_1 \wedge A_2,$$

koji je dobijen nadovezivanjem ta dva niza, instancom treće aksiome i još dva rezultata primene modus ponensa na neke od prethodnih formula. To je hilbertovsko izvođenje za A iz Γ.

(2) Ako je to prva eliminacija konjunkcije, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, A \wedge B$ iz Γ i traženo izvođenje je

$$\mathcal{U}, A \wedge B, (A \wedge B) \to A, A.$$

Slično postupamo ukoliko je u pitanju druga eliminacija konjunkcije.

(3) Ako je to prvo uvođenje disjunkcije i A je formula $A_1 \vee A_2$, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, A_1$ iz Γ i traženo izvođenje je

$$\mathcal{U}, A_1, A_1 \to (A_1 \vee A_2), A_1 \vee A_2.$$

Slično postupamo ukoliko je u pitanju drugo uvođenje disjunkcije.

(4) Ako je to eliminacija disjunkcije, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, B \vee C$, iz Γ i hilbertovska izvođenja $\mathcal{S}, A$ iz $\Gamma \cup \{B\}$ i $\mathcal{W}, A$ iz $\Gamma \cup \{C\}$. Po teoremi dedukcije, na osnovu poslednja dva izvođenja postoje izvođenja $\mathcal{S}', B \to A$ i $\mathcal{W}', C \to A$ iz Γ i traženo izvođenje je

$$\begin{aligned}\mathcal{U}, B \vee C, \mathcal{S}', B \to A, \mathcal{W}', C \to A, (B \to A) \to ((C \to A) \to ((B \vee C) \to A)),\\ (C \to A) \to ((B \vee C) \to A), (B \vee C) \to A, A.\end{aligned}$$

(5) Ako je to uvođenje implikacije i A je formula $A_1 \to A_2$, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, A_2$, iz $\Gamma \cup \{A_1\}$. Po teoremi dedukcije to znači da postoji izvođenje $\mathcal{U}', A_1 \to A_2$ iz Γ i to je traženo izvođenje.

(6) Ako je to eliminacija implikacije, onda po induktivnoj hipotezi postoje hilbertovska izvođenje $\mathcal{U}, B \to A$ i $\mathcal{S}, B$ iz Γ i traženo izvođenje je

$$\mathcal{U}, B \to A, \mathcal{S}, B, A.$$

(7) Ako je to jako svođenje na apsurd, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, \bot$ iz $\Gamma \cup \{\neg A\}$, pa po teoremi dedukcije postoji izvođenje $\mathcal{U}', \neg\neg A$ iz Γ i traženo izvođenje je

$$\mathcal{U}', \neg\neg A, \neg\neg A \to A, A.$$ □

3.6 Potpunost iskazne logike

U ovoj sekciji ćemo pokazati da su sve teoreme tautologije i obrnuto.

Teorema 3.6.1 (valjanost)**.** *Svaka teorema je tautologija.*

Dokaz. Neka je B formula u nekom hilbertovskom dokazu. Indukcijom po mestu gde se B nalazi u tom dokazu ćemo pokazati da je B tautologija.

(**baza indukcije**) Ako je B prva formula u dokazu, onda je to aksioma i ona je tautologija po posledici 2.5.3.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da su sve formule koje prethode B u našem dokazu tautologije. Ako je B aksioma, onda postupamo kao u bazi. Ako je B dobijena pomoću modus ponensa, onda po induktivnoj hipotezi postoje tautologije $A \to B$ i A. Na osnovu tvrđenja 2.4.1 zaključujemo da je i B tautologija. □

Iz teoreme 3.6.1 možemo zaključiti da $\bot$ nije teorema iskazne logike, što znači da je iskazna logika *neprotivurečna*.

Teorema 3.6.2 (potpunost)**.** *Svaka tautologija je teorema.*

Dokaz. Neka je formula A tautologija. Neka je A' formula u KNF takva da je $\vdash A \leftrightarrow A'$ (ona postoji po teoremi 3.4.1). Pokažimo da je A' teorema.

Po teoremi 3.6.1 je $\models A \leftrightarrow A'$, pa je i A' tautologija po teoremi 2.6.2(a). Dakle, A' ne može biti oblika $\perp$, što znači da je oblika $\top$ ili $D_1 \wedge \ldots, \wedge D_m$, za $m \geq 1$, gde su D_i disjunkcije literala.

Ako je A' oblika $\top$, onda je njen dokaz $\dfrac{[\perp]_1}{\perp \to \perp}1$.

Ako je A' oblika $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$, onda pošto je tautologija, za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$, disjunkcija literala D_i mora biti tautologija. Iz toga što je disjunkcija literala D_i tautologija sledi da u njoj postoji slovo i njegova negacija. (Ovo je veoma važno mesto u dokazu teoreme potpunosti jer se tu postiže dodir sintakse i semantike.) Ukoliko to ne bi bio slučaj, za osnovnu valuaciju v koja svako slovo koje se ne-negirano pojavljuje u D_i slika u 0, a svako slovo koje se negirano pojavljuje u D_i slika u 1, važi da je $\hat{v}(D_i) = 0$, pa D_i ne bi bila tautologija.

Dakle, na osnovu komutativnosti i asocijativnosti disjunkcije (vidi primer 2 iz sekcije 8.1), teoreme 3.3.2 i tvrđenja 3.3.1, imamo da je D_i sintaksno ekvivalentna formuli oblika $(p \vee \neg p) \vee D_i'$ koja je teorema zbog

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg(p \vee \neg p)]_1}{\neg p} \qquad \cfrac{[\neg(p \vee \neg p)]_1}{p}}{\perp}}{p \vee \neg p}\;1}{(p \vee \neg p) \vee D_i'}$$

Po teoremi 3.3.2(a) je onda i D_i teorema pa je nakon uvođenja konjunkcija i formula A' teorema. Dakle, u svakom slučaju A' je teorema pa je po teoremi 3.3.2(a) i A teorema. □

Pošto je pitanje da li je neka formula tautologija odlučivo, iz teorema 3.6.1 i 3.6.2 sledi da je i pitanje da li je neka formula teorema takođe odlučivo. To je svojstvo *odlučivosti* iskazne logike.

§4. Odeljak 4.

4.1 Predikatska logika

U iskaznoj logici smo se bavili rečima *i*, *ili*, *ako* [*onda*] i *ne*. Iskazi koji su nam bili bitni su bili oni koji odgovaraju tautologijama. To su za nas bile logičke istine. Na primer, iskaz „ako je 2+3>5, onda je 2+3>5" je jedan takav iskaz. Za njegovu tačnost uopšte nije bilo bitno šta nam znači prostiji iskaz „2+3>5", već smo njegovu tačnost zaključili zato što on odgovara tautologiji $p \to p$.

Posmatrajmo sledeći iskaz koji se odnosi na elemente nekog podskupa od $\mathbf{N}$. „Ako postoji broj koji deli sve brojeve, onda za svaki broj postoji neki koji ga deli". Ovo je jedan iskaz koji odgovara formuli oblika $p \to q$. Potpuno nam je prihvatljivo da ga smatramo tačnim ali u ovom slučaju ne možemo postupiti kao u prethodnom jer $p \to q$ nije tautologija. Tačnost ovog iskaza sledi iz analize reči *postoji* i *svaki*.

Predikatska logika prvog reda, nadalje skraćeno *predikatska logika*, se pored reči *i*, *ili*, *ako* [*onda*] i *ne* bavi još i rečima *svaki*, *postoji*, *jednako je* i još nekim kao što je na primer gornje *deli*. Ona pored mogućnosti jezika da nešto tvrdi koristi mogućnost da on nešto i imenuje. U svrhu imenovanja poslužiće nam termi. Na primer, gornje „2" ili „2+3" su termi koji imenuju matematičke individue kojima se bavimo.

4.2 Operacijsko-relacijske strukture

U [16, sekcija 17.7] smo upoznali pojam operacijske (algebarske) strukture. Ovde ćemo upoznati nešto opštiji pojam operacijsko-relacijske strukture.

Primer. Posmatrajmo skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ i na njemu standardno definisano sabiranje $+_{\mathbf{N}}$, množenje $\cdot_{\mathbf{N}}$, konstantu $0_{\mathbf{N}}$ i parcijalno uređenje $\leq_{\mathbf{N}}$. Indeksi nam ovde služe da označe da su sve ove operacije i relacije date na skupu $\mathbf{N}$. Skup $\mathbf{N}$ zajedno sa navedenim operacijama i relacijama čini jednu operacijsko-relacijsku strukturu.

Izbor operacija i relacija na datom skupu nam diktira *operacijsko-relacijski jezik*. On se sastoji od *operacijskih* simbola sa odgovarajućim arnostima (dužinama), simbolima *konstanti* i relacijskim simbolima sa odgovarajućim arnostima. Na primer, $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, \leq\}$ je operacijsko-relacijski jezik koji odgovara gorenavedenoj operacijsko-relacijskoj strukturi. Podrazumevamo da su arnosti simbola u njemu redom 2, 2, 0, 2 i da su prva tri operacijska dok je poslednji relacijski.

Operacijsko-relacijska struktura $\mathbb{M}$ (*model*) operacijsko-relacijskog jezika $\mathcal{L}$ je zadata

(1) *nepraznim* skupom M,

(2) n-arnom operacijom $o_M : M^n \to M$ za svaki operacijski simbol o arnosti n iz $\mathcal{L}$,

(3) istaknutim elementom c_M iz M za svaki simbol konstante c iz $\mathcal{L}$,

(4) n-arnom relacijom $\rho_M \subseteq M^n$ za svaki relacijski simbol ρ arnosti n iz $\mathcal{L}$.

Ubuduće ćemo umesto operacijsko-relacijska struktura govoriti samo struktura ili model i umesto operacijsko-relacijski jezik govoriti samo jezik. Taj jezik je samo deo formalnog jezika predikatske logike koji ćemo uvesti u sledećoj sekciji.

Skup M je *nosač* strukture $\mathbb{M}$. Konkretne operacije o_M, konstante c_M i relacije ρ_M na nosaču su *interpretacije* simbola o, c i ρ iz $\mathcal{L}$. Ponekad ćemo celu strukturu označavati sa M ukoliko je iz konteksta jasno o kojoj interpretaciji jezika se radi. Ukoliko $\mathcal{L}$ sadrži simbol „=" (često se to i podrazumeva), onda taj simbol mora da se interpretira kao jednakost na skupu M, to jest kao $\{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M^2$.

4.3 Formalni jezik

Formalni jezik predikatske logike je nešto složeniji od formalnog jezika iskazne logike. Ta složenost mu daje veću izražajnu moć. Polazimo od *alfabeta* koji se sastoji od

individualnih promenljivih $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$,

simbola logičkih veznika $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ i $\perp$,

kvantifikatora $\forall x$ i $\exists x$ za svaku promenljivu x,

simbola iz datog operacijsko-relacijskog jezika $\mathcal{L}$,

pomoćnih simbola , ( ).

Dve vrste reči nad ovim alfabetom su nam bitne. To su termi i formule. *Termi* su reči koje zadovoljavaju:

(1) Individualne promenljive i simboli konstanti iz $\mathcal{L}$ su termi.

(2) Ako je o operacijski simbol iz $\mathcal{L}$ arnosti n i ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi, onda je $o(t_1, \ldots, t_n)$ takođe term.

(3) Ništa više nije term.

Elementarne formule su reči koje zadovoljavaju:

(1) $\perp$ je elementarna formula.

(2) Ako je ρ relacijski simbol iz $\mathcal{L}$ arnosti n i ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi, onda je $\rho(t_1, \ldots, t_n)$ elementarna formula.

(3) Ništa više nije elementarna formula.

Predikatske formule ili samo *formule* su reči koje zadovoljavaju:

(1) Elementarne formule su formule.

(2) Ako su A i B formule, a x individualna promenljiva, onda su i

$$(A \wedge B),\ \ (A \vee B),\ \ (A \rightarrow B),\ \ \forall x A,\ \ \exists x A$$

takođe formule.

(3) Ništa više nije formula.

Negacija, ekvivalencija i $\top$ su definisani kao u sekciji 1.3. I ovde ćemo se držati dogovora o brisanju najspoljašnjijih zagrada. Individualne promenljive ćemo kraće zvati samo promenljive. Formule $\forall x_1 \dots \forall x_n A$ i $\exists x_1 \dots \exists x_n A$ ćemo skraćeno pisati kao $\forall x_1 \dots x_n A$ odnosno $\exists x_1 \dots x_n A$. Za binarni relacijski simbol ρ, formulu $\forall x(x\rho t \rightarrow A)$ ćemo skraćeno pisati kao $(\forall x\rho t)A$, dok ćemo formulu $\exists x(x\rho t \wedge A)$ skraćeno pisati kao $(\exists x\rho t)A$.

Neka je $\mathcal{F}$ skup svih formula i sa $\mathcal{F}_n$ označimo skup svih formula sa najviše n pojavljivanja binarnih veznika odnosno kvantifikatora u sebi. Kao i u iskaznom slučaju važi

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

4.4 Valuacija

U sekciji 2.2 smo govorili o valuaciji kao o mostu između sintakse i semantike iskazne logike. U slučaju predikatske logike, formalni jezik uveden u prethodnoj sekciji se nalazi na njenoj sintaksnoj strani, dok se na semantičkoj strani nalazi model operacijsko-relacijskog jezika $\mathcal{L}$. Cilj nam je da polazeći od jedne funkcije koja preslikava promenljive u nosač M ovog modela dobijemo dve funkcije—jednu koja preslikava terme u M i drugu koja formulama dodeljuje njihove istinosne vrednosti iz skupa $\{0, 1\}$. Te funkcije ćemo takođe zvati *valuacijama* i one predstavljaju most između sintakse i semantike.

Neka je dat model $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$. Funkciju $v\colon \mathcal{V} \rightarrow M$, gde je $\mathcal{V}$ skup promenljivih zovemo *valuacijom individualnih promenljivih* ili kraće valuacijom.

Valuacija (vrednost) $\hat{v}$ terma za valuaciju v je zadata sa

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} v(x) & \text{ako je } t \text{ promenljiva } x, \\ c_M & \text{ako je } t \text{ simbol konstante } c \text{ iz } \mathcal{L}, \\ o_M(\hat{v}(t_1), \dots, \hat{v}(t_n)) & \text{ako je } t \text{ term } o(t_1, \dots, t_n). \end{cases}$$

Za $b \in M$ i $v\colon \mathcal{V} \rightarrow M$ definišemo valuaciju v^x_b kao

$$v^x_b(y) = \begin{cases} v(y) & \text{ako } y \text{ nije } x, \\ b & \text{ako je } y \text{ baš } x. \end{cases}$$

Valuacija (vrednost) $\hat{v}$ formule za valuaciju v je zadata sa

(1$\bot$) ako je A elementarna formula $\bot$, onda je $\hat{v}(A) = 0$;

(1) ako je A elementarna formula $\rho(t_1, \dots, t_n)$ i $(\hat{v}(t_1), \dots, \hat{v}(t_n)) \in \rho_M$, onda je $\hat{v}(A) = 1$, inače je $\hat{v}(A) = 0$;

(2) ako je formula konjunkcija, disjunkcija ili implikacija, onda je

$$\hat{v}(A \wedge B) = \hat{v}(A) \wedge \hat{v}(B), \quad \hat{v}(A \vee B) = \hat{v}(A) \vee \hat{v}(B), \quad \hat{v}(A \to B) = \hat{v}(A) \to \hat{v}(B),$$

gde su $\wedge, \vee, \to$ zadate tablicama u sekciji 2.1;

(2$\forall$) ako je formula oblika $\forall x A$ i za svako $b \in M$ važi da je $\hat{v}^x_b(A) = 1$, onda je $\hat{v}(\forall x A) = 1$, inače je $\hat{v}(\forall x A) = 0$;

(2$\exists$) ako formula oblika $\exists x A$ i za neko $b \in M$ važi da je $\hat{v}^x_b(A) = 1$, onda je $\hat{v}(\exists x A) = 1$, inače je $\hat{v}(\exists x A) = 0$.

Ako je $\hat{v}(A) = 1$, onda kažemo da A *važi* u $\mathbb{M}$ pri valuaciji v, odnosno da v *zadovoljava* A i to označavamo sa $\mathbb{M} \models_v A$ ili skraćeno sa $\models_v A$.

Formula A je *zadovoljiva u modelu* $\mathbb{M}$ kada postoji valuacija $v : \mathcal{V} \to M$ koja je zadovoljava. Formula je *zadovoljiva* kada postoji model datog jezika u kome je zadovoljiva. Formula A je *valjana* (u oznaci $\models A$) kada za svaki model $\mathbb{M}$ datog jezika i svaku valuaciju $v : \mathcal{V} \to M$ važi $\models_v A$. Alternativno, A je valjana kada $\neg A$ nije zadovoljiva. *Kontramodel* za formulu A čine struktura $\mathbb{M}$ datog jezika i valuacija $v : \mathcal{V} \to M$ takva da je $\hat{v}(A) = 0$. Kontramodel nam svedoči da formula nije valjana.

Primer. Neka je $\mathcal{L} = \{+, \leq, =\}$.

(1) Neka je A formula $\forall x \exists y\ x + y \leq x$. Ona nije zadovoljiva u modelu čiji je nosač skup $\mathbf{N}^+$ sa standardno interpretiranim $+$ i $\leq$. To pokazujemo na sledeći način. Neka je $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}^+$ proizvoljna valuacija i neka je B formula $\exists y\ x + y \leq x$. Imamo da je $\hat{v}^x_1(B) = 0$ zato što ne postoji $b \in \mathbf{N}^+$ takvo da je $(\hat{v}^x_1)^y_b(x + y \leq x) = 1$. Dakle, $\hat{v}(A) = 0$, pa A nije zadovoljiva u $\mathbf{N}^+$. Formula A jeste zadovoljiva, na primer u modelu čiji je nosač skup $\mathbf{N}$ sa standardno interpretiranim $+$ i $\leq$.

(2) Neka je A formula $\exists x\ x + y = z$. Pokazaćemo da je ona zadovoljiva ali da nije valjana. Posmatrajmo strukturu $\mathbf{N}^+$ kao u prethodnom primeru i valuaciju $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}^+$ pri kojoj je $v(y) = 3$, a $v(z) = 4$. Tada je $\hat{v}(A) = 1$ zato što je $\hat{v}^x_1(x + y = z) = 1$. To znači da je A zadovoljiva. Neka je $v : \mathcal{V} \to \mathbf{N}^+$ valuacija pri kojoj je $v(y) = v(z) = 3$. Tada je $\hat{v}(A) = 0$ zato što ne postoji $b \in \mathbf{N}^+$ takvo da je $\hat{v}^x_b(x + y = z) = 1$. Dakle, A nije valjana.

(3) Neka $\mathcal{L}$ sadrži samo jedan unarni relacijski simbol (predikat) P. Neka je $\mathbb{M}$ model tog jezika takav da je $M = \{a\}$ i P je interpretiran kao $\{a\}$, to jest $P_M = \{a\} \subseteq M$. Tada za proizvoljnu valuaciju $v : \mathcal{V} \to M$ važi

$$\models_v \exists x P(x), \quad \models_v \forall x P(x), \quad \models_v P(x) \to \forall y P(y).$$

Neka je A iskazna formula i $p_1, \ldots, p_n$ sva iskazna slova u njoj. Neka su $C_1, \ldots, C_n$ neke predikatske formule. Formula $A^{p_1 \ldots p_n}_{C_1 \ldots C_n}$ nastaje uniformnom zamenom slova $p_1, \ldots, p_n$ u A formulama $C_1, \ldots, C_n$.

Tvrđenje 4.4.1. *Ako je A tautologija, onda je $A^{p_1 \ldots p_n}_{C_1 \ldots C_n}$ valjana.*

Dokaz. Formalno bismo ovo izvodili indukcijom po složenosti formule A, ali i ovo što sledi je dovoljno ubedljivo. Pretpostavimo da je A tautologija. Neka je $v : \mathcal{V} \to M$ proizvoljna valuacija individualnih promenljivih. Neka je $w : P \to \{0, 1\}$ valuacija iskaznih slova takva da za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi $w(p_i) = \hat{v}(C_i)$. Pošto je $\hat{w}(A) = 1$, to je i $\hat{v}(A^{p_1 \ldots p_n}_{C_1 \ldots C_n}) = 1$. $\square$

Podreč formule koja je sama formula je *potformula* te formule. Neka je $\forall x B$ potformula formule A. Tada je B oblast dejstva ovog univerzalnog kvantifikatora u formuli A. Isto tako za egzistencijalni kvantifikator.

Ako se promenljiva x pojavljuje u oblasti dejstva kvantifikatora $\forall x$ ili $\exists x$, onda je to njeno pojavljivanje *vezano*, inače je *slobodno*. Neki autori obeležavaju razlicitim simbolima slobodne i vezane promenljive ali mi to nećemo raditi. Promenljiva x je slobodna u formuli A kada postoji njeno slobodno pojavljivanje u A. Skup slobodnih promenljivih formule A označavamo sa $FV(A)$. *Rečenica* je formula u kojoj nema slobodnih promenljivih.

Primer. (1) U formuli $\forall x(P(x, y) \to \forall y Q(y))$, jedino pojavljivanje promenljive x je vezano, dok je prvo (sleva) pojavljivanje promenljive y slobodno, a drugo je vezano.

(2) U formuli $\forall x P(x, y) \to \forall y R(x, y)$, prvo pojavljivanje x je vezano, a drugo je slobodno, dok je prvo pojavljivanje y slobodno, a drugo je vezano.

(3) U formuli $\neg \exists y Q(y, y) \wedge R(f(x, y))$, jedino pojavljivanje promenljive x je slobodno, dok su prva dva pojavljivanja y vezana, a treće je slobodno.

Tvrđenje 4.4.2. *Valuacija formule zavisi samo od valuacije individualnih promenljivih koje su slobodne u njoj.*

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule A ćemo pokazati da ukoliko su ograničenja valuacija $v, w \colon \mathcal{V} \to M$ na skup slobodnih promenljivih u A jednaka, onda je i $\hat{v}(A) = \hat{w}(A)$.

(**baza indukcije**) Neka je $A \in \mathcal{F}_0$. Ako je A elementarna formula $\perp$, onda je $\hat{v}(A) = 0 = \hat{w}(A)$. Ako je A elementarna formula $\rho(t_1, \ldots, t_n)$, lako zaključujemo da za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi da je $\hat{v}(t_i) = \hat{w}(t_i)$, pa je onda

$$(\hat{v}(t_1), \ldots, \hat{v}(t_n)) \in \rho_M \quad \text{akko} \quad (\hat{w}(t_1), \ldots, \hat{w}(t_n)) \in \rho_M,$$

što znači da je $\hat{v}(A) = \hat{w}(A)$.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu iz $\mathcal{F}_n$. Neka je $A \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Tada je ona oblika $B \wedge C$ ili $B \vee C$ ili $B \to C$ ili $\forall x B$ ili $\exists x B$ za neke formule B i C iz $\mathcal{F}_n$.

Neka je A oblika $B \wedge C$. Primenimo induktivnu hipotezu na formule B i C i dobijamo da je $\hat{v}(B) = \hat{w}(B)$ i $\hat{v}(C) = \hat{w}(C)$. Dakle,

$$\hat{v}(A) = \hat{v}(B) \wedge \hat{v}(C) = \hat{w}(B) \wedge \hat{w}(C) = \hat{w}(A).$$

Na isti način postupamo u slučajevima kada je A oblika $B \vee C$ ili $B \to C$.

Neka je A oblika $\forall x B$. Pretpostavimo da je $\hat{v}(A) = 1$. To znači da za svako $b \in M$ važi da je $\hat{v}^x_b(B) = 1$. Po induktivnoj hipotezi zaključujemo da za svako $b \in M$ važi da je $\hat{w}^x_b(B) = 1$, što znači da je onda $\hat{w}(A) = 1$. Na isti način zaključujemo da je $\hat{v}(A) = 1$ iz pretpostavke da je $\hat{w}(A) = 1$, pa je $\hat{v}(A) = \hat{w}(A)$. Na sličan način postupamo kada je A oblika $\exists x B$. $\square$

4.5 Preimenovanje vezanih promenljivih

Za formule A i B kažemo da su *logički ekvivalentne* kada je formula $A \leftrightarrow B$ valjana. Dokaz narednog tvrđenja je sasvim lak.

Tvrđenje 4.5.1. *Logička ekvivalentnost je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{F}$.*

Uopštavajući dokaz teoreme 2.6.2 možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 4.5.2 (o zameni ekvivalenata-semantička)**.** *Neka je C_A formula u kojoj se pojavljuje potformula A i neka formula C_B nastaje od C_A zamenom potformule A formulom B. Tada važi:*

(a) ako je $\models A \leftrightarrow B$ i $\models C_A$, onda je $\models C_B$;

(b) ako je $\models A \leftrightarrow B$, onda je $\models C_A \leftrightarrow C_B$.

Indukcijom po složenosti formule A možemo dokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.5.3. *Neka je A^x_y rezultat zamene svakog slobodnog javljanja promenljive x u A promenljivom y koja se ne pojavljuje u A. Tada su formule $\forall x A$ i $\forall y A^x_y$, kao i formule $\exists x A$ i $\exists y A^x_y$ logički ekvivalentne.*

Neka su $\forall x A$ i $\forall y A^x_y$ kao u prethodnom tvrđenju. Ako u nekoj formuli zamenimo potformulu $\forall x A$ formulom $\forall y A^x_y$, onda kažemo da je nova formula nastala *preimenovanjem vezanih promenljivih* u staroj. Isto u slučaju kada umesto univerzalnog posmatramo egzistencijalni kvantifikator. Kao posledicu tvrđenja 4.5.3 i teoreme 4.5.2 imamo da su polazna formula i formula nastala preimenovanjem vezanih promenljivih logički ekvivalentne.

Neka je data formula A i neka je x promenljiva. Term t je *slobodan za* x u A kada za svaku promenljivu z koja se javlja u t važi da svako slobodno pojavljivanje x u A nije u oblasti dejstva kvantifikatora $\forall z$ ili $\exists z$.

Napomena 4.5.4. *Za svaku formulu A, promenljivu x i term t postoji preimenovanje vezanih promenljivih u A takvo da je t slobodan za x u novonastaloj formuli.*

Primer. Neka je $\mathcal{L} = \{+, P, R\}$, gde je $+$ binarni operacijski, a P i R binarni relacijski simboli. Neka je A formula $\forall x P(x,y) \to \forall y R(x,y)$ i t term $x+y$. Term t nije slobodan za x u A pošto se jedino slobodno pojavljivanje x nalazi u oblasti dejstva $\forall y$, a y se pojavljuje u t. Preimenovanjem vezane promenljive y dobijamo formulu $\forall x P(x,y) \to \forall z R(x,z)$ logički ekvivalentnu formuli A. Term t je slobodan za promenljivu x u novonastaloj formuli.

Term u^x_t nastaje od terma u zamenom svih pojavljivanja promenljive x termom t. Ako je t slobodan za x u A, onda formula A^x_t nastaje od formule A zamenom svih slobodnih javljanja promenljive x termom t. Ako t nije slobodno za x u A, onda A^x_t nastaje tako što se prvo preimenuju vezane promenljive kako bi t postao slobodan za x, pa se onda izvrši zamena.

Indukcijom po složenosti terma (broju pojavljivanja operacijskih simbola u njemu) možemo dokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.5.5. *Neka su u i t termi, x promenljiva i $v\colon \mathcal{V} \to M$ valuacija. Tada važi*

$$\hat{v}(u^x_t) = \hat{v}^x_{\hat{v}(t)}(u).$$

Indukcijom po složenosti formule, uz tvrđenje 4.5.5, možemo dokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.5.6. *Neka je t term, x promenljiva i $v\colon \mathcal{V} \to M$ valuacija. Tada važi*

$$\hat{v}(A^x_t) = \hat{v}^x_{\hat{v}(t)}(A).$$

Tvrđenje 4.5.7. *Za svaku formulu A, promenljivu x i term t važi*

$$\models \forall x A \to A^x_t \quad \text{i} \quad \models A^x_t \to \exists x A.$$

Dokaz. Neka je $v : \mathcal{V} \to M$ proizvoljna valuacija i neka je $b = \hat{v}(t) \in M$. Ako je $\hat{v}(\forall x A) = 0$, onda je $\hat{v}(\forall x A \to A^x_t) = 1$. Ako je $\hat{v}(\forall x A) = 1$, onda je, po definiciji valuacije formula, i $\hat{v}^x_b(A) = 1$, pa po tvrđenju 4.5.6 važi $\hat{v}(A^x_t) = 1$. Dakle, uvek važi $\hat{v}(\forall x A \to A^x_t) = 1$.

Ako je $\hat{v}(A^x_t) = 0$, onda je $\hat{v}(A^x_t \to \exists x A) = 1$. Ako je $\hat{v}(A^x_t) = 1$, onda po tvrđenju 4.5.6 važi $\hat{v}^x_b(A) = 1$, pa je, po definiciji valuacije formula, i $\hat{v}(\exists x A) = 1$. Dakle, uvek važi $\hat{v}(A^x_t \to \exists x A) = 1$. □

Ako ne bismo vodili računa o tome da t bude slobodan za x u A prilikom zamene slobodnih javljanja x termom t u toj formuli, onda gornje tvrđenje ne bi važilo. Neka je na primer A formula $\exists y\, x < y$ i neka je t baš promenljiva y. Tada formula

$$\forall x \exists y\, x < y \to \exists y\, y < y$$

nije valjana. Kontramodel je dat strukturom $(\mathbf{N}, <)$ i proizvoljnom valuacijom (pošto je u pitanju rečenica).

Ako je A formula $\forall y\, y \leq x$ i t je baš y, onda formula

$$\forall y\, y \leq y \to \exists x \forall y\, y \leq x$$

nije valjana. Kontramodel je dat strukturom $(\mathbf{N}, \leq)$ i proizvoljnom valuacijom.

Tvrđenje 4.5.8. *Ako se x ne javlja slobodno u B, onda važi*

$$\models \forall x(B \to A) \to (B \to \forall x A) \quad \text{i} \quad \models \forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B).$$

Dokaz. Neka je $v\colon \mathcal{V} \to M$ proizvoljna valuacija.

Pokažimo da je $\hat{v}(\forall x(B \to A) \to (B \to \forall x A)) = 1$. To je sigurno tako osim eventualno kada je

$$\hat{v}(\forall x(B \to A)) = 1 \quad \text{i} \quad \hat{v}(B) = 1.$$

Pokažimo da je tada i $\hat{v}(\forall x A) = 1$. Neka je $b \in M$ proizvoljno. Iz $\hat{v}(\forall x(B \to A)) = 1$ sledi da je $\hat{v}^x_b(B \to A) = 1$. Pošto $x \notin FV(B)$, iz $\hat{v}(B) = 1$ po tvrđenju 4.4.2 sledi da je $\hat{v}^x_b(B) = 1$, pa onda mora da bude i $\hat{v}^x_b(A) = 1$. Dakle, $\hat{v}(\forall x(B \to A) \to (B \to \forall x A)) = 1$, pa je ta formula valjana.

Pokažimo da je $\hat{v}(\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B)) = 1$. To je sigurno tako osim eventualno kada je

$$\hat{v}(\forall x(A \to B)) = 1 \quad \text{i} \quad \hat{v}(\exists x A) = 1.$$

Pokažimo da je tada i $\hat{v}(B) = 1$. Neka je $b \in M$ takvo da je $\hat{v}^x_b(A) = 1$. Pošto je $\hat{v}(\forall x(A \to B)) = 1$ imamo da je $\hat{v}^x_b(A \to B) = 1$, pa mora biti $\hat{v}^x_b(B) = 1$. Po tvrđenju 4.4.2 sledi da je $\hat{v}(B) = 1$. Dakle, $\hat{v}(\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B)) = 1$, pa je ta formula valjana. □

Tvrđenje 4.5.9. *Ako $\models A$, onda $\models \forall x A$.*

Dokaz. Neka je $v\colon \mathcal{V} \to M$ proizvoljna valuacija i neka je $b \in M$ proizvoljan. Pošto je A valjana imamo da je $\hat{v}^x_b(A) = 1$. Dakle, $\hat{v}(\forall x A) = 1$, pa je ta formula valjana. □

§5. Odeljak 5.

5.1 Prirodna dedukcija bez jednakosti

Prvi formalni sistem i u slučaju predikatske logike će biti *prirodna dedukcija*. Formalni jezik je uveden u sekciji 4.3. Slučaj kada jezik sadrži jednakost ćemo ostaviti za kasnije. Skup aksioma ovog formalnog sistema ako u jeziku nemamo jednakost je i dalje prazan dok su pravila izvođenja data shemama iz sekcije 3.2 uz još četiri sheme:

$$\frac{A}{\forall x A}\ \dagger\ \textit{uvođenje } \forall \qquad\qquad \frac{\forall x A}{A^x_t}\ \textit{eliminacija } \forall$$

† promenljiva x nije slobodna u hipotezama podizvođenja sa korenom A,

$$\frac{A^x_t}{\exists x A}\ \textit{uvođenje } \exists \qquad\qquad \frac{\exists x A \qquad \begin{matrix}[A]_*\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ *\ \dagger\dagger\textit{eliminacija } \exists$$

†† promenljiva x nije slobodna u premisi C, niti u hipotezama podizvođenja čiji je koren premisa C osim eventualno u A.

Pojam teoreme je isti kao i u proizvoljnom formalnom sistemu (vidi sekciju 3.1) i oznaka da je A teorema je $\vdash A$. Takođe, ukoliko sve hipoteze izvođenja pripadaju nekom skupu Γ, onda je to izvođenje iz hipoteza Γ za formulu A koja se nalazi u njegovom korenu. Oznaka je $\Gamma \vdash A$.

Neki primeri izvođenja u prirodnoj dedukciji su dati u sekciji 8.2. Tvrđenje koje sledi nam daje još jedno pravilo izvođenja na koje se možete pozivati, a izvesti ga samo jednom negde sa strane.

Tvrđenje 5.1.1. *Sledeće pravilo izvođenja se može dobiti pomoću postojećih.*

$$\frac{\neg\exists x A}{\neg A}$$

Dokaz.

$$\cfrac{\cfrac{\neg\exists x A \qquad \cfrac{[A]_1}{\exists x A}}{\bot}}{\neg A}\ 1$$

□

5.2 Zamena ekvivalenata (sintaksna)

U ovoj sekciji ćemo pokazati sintaksnu varijantu teoreme o zameni ekvivalenata čija je semantička varijanta pokazana u sekciji 4.5. Za formule A i B kažemo da su *sintaksno ekvivalentne* kada je formula $A \leftrightarrow B$ teorema. Ovo je sintaksni analogon pojma logičke ekvivalencije. Dokaz narednog tvrđenja je sasvim lak.

Tvrđenje 5.2.1. *Sintaksna ekvivalentnost je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{F}$.*

Teorema 5.2.2 (o zameni ekvivalenata-sintaksna)**.** *Neka je C_A formula u kojoj se pojavljuje potformula A i neka formula C_B nastaje od C_A zamenom potformule A formulom B. Tada važi:*

(a) *ako je $\vdash A \leftrightarrow B$ i $\vdash C_A$, onda je $\vdash C_B$;*

(b) *ako je $\vdash A \leftrightarrow B$, onda je $\vdash C_A \leftrightarrow C_B$.*

Dokaz. Kao i u iskaznom slučaju, dokazaćemo samo deo pod (b) dopunjavajući dokaz teoreme 3.3.2.

Neka je $C_A \in (\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n)$ oblika $\forall x D_A$. Po induktivnoj hipotezi važi $\vdash D_A \leftrightarrow D_B$. Dokaz za $\forall x D_A \leftrightarrow \forall x D_B$ je dat sa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{D_A \leftrightarrow D_B}}{D_A \to D_B} \quad \dfrac{[\forall x D_A]_1}{D_A}}{D_B}}{\forall x D_B}\,\dagger}{\forall x D_A \to \forall x D_B}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{D_A \leftrightarrow D_B}}{D_B \to D_A} \quad \dfrac{[\forall x D_B]_2}{D_B}}{D_A}}{\forall x D_A}\,\dagger}{\forall x D_B \to \forall x D_A}\,2}{\forall x D_A \leftrightarrow \forall x D_B}$$

Neka je $C_A \in (\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n)$ oblika $\exists x D_A$. Po induktivnoj hipotezi važi $\vdash D_A \leftrightarrow D_B$. Dokaz za $\exists x D_A \leftrightarrow \exists x D_B$ je dat sa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x D_A]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{D_A \leftrightarrow D_B}}{D_A \to D_B} \quad [D_A]_1}{D_B}}{\exists x D_B}}{\exists x D_B}\,1\dagger\dagger}{\exists x D_A \to \exists x D_B}\,2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\exists x D_B]_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{D_A \leftrightarrow D_B}}{D_B \to D_A} \quad [D_B]_3}{D_A}}{\exists x D_A}}{\exists x D_A}\,3\dagger\dagger}{\exists x D_B \to \exists x D_A}\,4}{\exists x D_A \leftrightarrow \exists x D_B}$$

□

5.3 Preneksna normalna forma

Kao posledicu teoreme 5.2.2, tvrđenja 5.2.1 i primera 2-5 iz sekcije 8.2 imamo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 5.3.1. *Pod pretpostavkom da $x \notin FV(B)$, sledeće formule su teoreme.*

(1)	$(\forall x A \wedge B) \leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$,	(2)	$(\exists x A \wedge B) \leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$,
(3)	$(\forall x A \vee B) \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$	(4)	$(\exists x A \vee B) \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$
(5)	$(B \rightarrow \forall x A) \leftrightarrow \forall x(B \rightarrow A)$	(6)	$(B \rightarrow \exists x A) \leftrightarrow \exists x(B \rightarrow A)$
(7)	$(\forall x A \rightarrow B) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow B)$	(8)	$(\exists x A \rightarrow B) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow B)$

Formula je u *preneksnoj normalnoj formi* kada je oblika $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n A$, gde je $n \geq 0$, svaki Q_i je kvantifikator $\forall$ ili $\exists$ i A je formula bez kvantifikatora.

Teorema 5.3.2 (o svođenju na PNF)**.** *Za svaku formulu postoji njoj sintaksno ekvivalentna formula u preneksnoj normalnoj formi.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme se zasniva na primeni tvrđenja 5.3.1. Formalno, koristimo indukciju po složenosti formule.

(**baza indukcije**) Svaka elementarna formula je u PNF i sintaksno je ekvivalentna sama sebi (tvrđenje 5.2.1).

(**induktivni korak**) Ako je $A \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$, onda je A oblika $B \wedge C$ ili $B \vee C$ ili $B \rightarrow C$ ili $\forall x B$ ili $\exists x B$ za neke formule B i C iz $\mathcal{F}_n$. Po induktivnoj hipotezi B i C su sintaksno ekvivalentne redom formulama $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n B'$ i $R_1 y_1 \ldots R_m y_m C'$, gde su B' i C' formule bez kvantifikatora, a svaki Q_i i R_j je kvantifikator $\forall$ ili $\exists$. Još uz preimenovanje vezanih promenljivih možemo pretpostaviti da se $x_1, \ldots, x_n$ ne javljaju ni vezano ni slobodno u C' i da se $y_1, \ldots, y_m$ ne javljaju ni vezano ni slobodno u B'.

Neka je A oblika $B \wedge C$. Po teoremi 5.2.2 i tvrđenju 5.2.1 imamo da je

$$\vdash A \leftrightarrow (Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n B' \wedge R_1 y_1 \ldots R_m y_m C').$$

Višestrukom primenom tvrđenja 5.3.1 (1-2) dobijamo da je A sintaksno ekvivalentna formuli $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n R_1 y_1 \ldots R_m y_m (B' \wedge C')$.

Analogno postupamo kada je A oblika $B \vee C$ uz tvrđenje 5.3.1 (3-4). Slučajevi kada je A oblika $\forall x B$ ili $\exists x B$ se svode na primenu induktivne hipoteze.

Neka je A oblika $B \rightarrow C$. Kao i malopre dobijamo pod istim uslovima

$$\vdash A \leftrightarrow (Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n B' \rightarrow R_1 y_1 \ldots R_m y_m C').$$

Višestrukom primenom tvrđenja 5.3.1 (5-8) dobijamo da je A sintaksno ekvivalentna formuli $\bar{Q}_1 x_1 \ldots \bar{Q}_n x_n R_1 y_1 \ldots R_m y_m (B' \rightarrow C')$, gde je $\bar{Q}_i$ kvantifikator $\exists$ ako je Q_i bio $\forall$ i obrnuto. $\square$

5.4 Hilbertovski sistem

Kao i u slučaju iskazne logike, pored prirodne dedukcije uvešćemo i hilbertovski sistem za predikatsku logiku. Formalni jezik ovog sistema je onaj uveden u 4.3. Sheme *aksioma* su pored onih sedam uvedenih u 3.5 i sledeće četiri sheme

(8) $\forall x A \to A^x_t$,

(9) $A^x_t \to \exists x A$,

(10) $\forall x(B \to A) \to (B \to \forall x A), \quad x \notin FV(B)$

(11) $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B), \quad x \notin FV(B)$.

Pravila izvođenja su modus ponens i pravilo *generalizacije* po promenljivoj

$$\frac{A}{\forall x A}\ \dagger$$

† promenljiva x nije slobodna u hipotezama podizvođenja sa korenom A.

Pojam izvođenja u formi drveta je preuzet iz sekcije 3.1. Isto se odnosi i na sve pojmove uvedene u toj sekciji. Alternativni pojam izvođenja iz hipoteza u formi niza formula zajedno sa pojmom *zavisnosti* formule od hipoteza su uvedeni na sledeći način.

Izvođenje za formulu A iz skupa hipoteza Γ je konačan niz formula koji se završava formulom A, takav da za svaku formulu iz tog niza važi da je aksioma i ona ne zavisi ni od kakve hipoteze, ili pripada Γ i u tom slučaju ona zavisi od same sebe, ili je izvodiva iz neke dve prethodne pomoću modus ponensa i u tom slučaju zavisi od svih hipoteza od kojih zavise te dve formule, ili je oblika $\forall x B$ i B je formula koja joj neposredno prethodi i ne zavisi od hipoteze u kojoj se x pojavljuje slobodno i u tom slučaju ona zavisi od svih hipoteza od kojih zavisi B. Ako je Γ prazan, onda je to *dokaz* za *teoremu* A. *Dužina izvođenja* je broj članova tog niza.

Kao i u iskaznom slučaju lako se vidi da se svako drvenasto izvođenje može ispeglati i obrnuto, da se svako izvođenje u obliku niza može pretvoriti u drvo. Da je formula A izvodiva u hilbertovskom sistemu iz skupa hipoteza Γ označićemo sa $\Gamma \vdash_H A$.

Teorema 5.4.1 (teorema dedukcije)**.** *Ako je* $\Gamma \cup \{A\} \vdash_H B$*, onda je* $\Gamma \vdash_H A \to B$*. Pri tom, važi* $(*)$ *ako se* x *ne javlja slobodno u hipotezama izvođenja za* B *iz* $\Gamma \cup \{A\}$ *od kojih zavisi* B*, osim eventualno u* A*, onda postoji izođenje za* $A \to B$ *iz* Γ *takvo da se* x *ne javlja slobodno u hipotezama od kojih zavisi* $A \to B$*.*

Dokaz. Primenićemo indukciju po dužini $n \geq 1$ izvođenja za B iz skupa hipoteza $\Gamma \cup \{A\}$ i dopuniti dokaz teoreme 3.5.1. Baza indukcije i induktivni korak do slučaja kada je B formula oblika $\forall x B'$ i izvođenje za B iz $\Gamma \cup \{A\}$ je oblika

$$\mathcal{U}, B', \forall x B'$$

su isti kao u dokazu teoreme 3.5.1 i lako se proverava da tada $(*)$ važi.

Neka je izvođenje za B iz $\Gamma \cup \{A\}$ gornjeg oblika. Ako B' ne zavisi od hipoteze A, onda brisanjem svih pojavljivanja te hipoteze kao i formula koje zavise od njih dobijamo izvođenje $\mathcal{U}', B', \forall x B'$ i možemo ga nastaviti do izvođenja

$$\mathcal{U}', B', \forall x B', \forall x B' \rightarrow (A \rightarrow \forall x B'), A \rightarrow \forall x B'$$

u kome nema hipoteze A i koje potvrđuje svojstvo $(*)$.

Ako B' zavisi od hipoteze A, onda zbog primene generalizacije po x, ta promenljiva se ne javlja slobodno u A. Primenimo induktivnu hipotezu na izvođenje $\mathcal{U}, B'$ i tako dobijamo izvođenje $\mathcal{U}', A \rightarrow B'$ iz skupa hipoteza Γ takvo da $A \rightarrow B'$ ne zavisi od hipoteza u kojima se x javlja slobodno. Produžimo ovo izvođenje do izvođenja

$$\mathcal{U}', A \rightarrow B', \forall x(A \rightarrow B'), \forall x(A \rightarrow B') \rightarrow (A \rightarrow \forall x B'), A \rightarrow \forall x B',$$

u kome nema hipoteze A i koje potvrđuje svojstvo $(*)$. $\square$

Kao i u sekciji 3.5 uz oznaku $\Gamma \vdash_{ND} A$ za to da je A izvodiva u prirodnoj dedukciji iz skupa hipoteza Γ imamo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 5.4.2. *$\Gamma \vdash_H A$ akko $\Gamma \vdash_{ND} A$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Svako drvenasto izvođenje u hilbertovskom sistemu možemo transformisati u prirodnodedukcijsko izvođenje tako što svaku aksiomu u listovima zamenimo njenim prirodnodedukcijskim dokazom datim u primeru 1 iz sekcije 8.1, u primeru 1 iz sekcije 8.2 kao i dokazima čije postojanje garantuje tvrđenje 5.3.1 (5) i (8). Modus ponens koji je korišćen u ostatku izvođenja odgovara eliminaciji implikacije, dok generalizacija odgovara uvođenju univerzalnog kvantifikatora.

$(\Leftarrow)$ Neka je dato prirodnodedukcijsko izvođenja za A iz Γ. Indukcijom po broju čvorova u tom drvetu ćemo pokazati da postoji niz formula koji predstavlja hilbertovsko izvođenje za A iz Γ, pri čemu iste hipoteze učestvuju i u prvom i u drugom izvođenju. Ovde ćemo samo dopuniti dokaz tvrđenja 3.5.2 sledećim slučajevima za poslednje primenjeno pravilo u polaznom izvođenju.

(8) Ako je to uvođenje univerzalnog kvantifikatora i A je formula $\forall x B$, onda po induktivnoj pretpostavci postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, B$ iz Γ u čijim se hipotezama x ne javlja slobodno pa ga možemo nastaviti do izvođenja $\mathcal{U}, B, \forall x B$.

(9) Ako je to eliminacija univerzalnog kvantifikatora i A je formula B^x_t, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, \forall x B$ iz Γ i možemo ga nastaviti do izvođenja $\mathcal{U}, \forall x B, \forall x B \rightarrow B^x_t, B^x_t$.

(10) Ako je to uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora i A je formula $\exists x B$, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, B^x_t$ iz Γ i možemo ga nastaviti do izvođenja $\mathcal{U}, B^x_t, B^x_t \rightarrow \exists x B, \exists x B$.

(11) Ako je to eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora

$$\dfrac{\exists x B \quad \begin{array}{c}[B]_*\\ A\end{array}}{A}$$

i promenljiva x nije slobodna u premisi A, niti u hipotezama podizvođenja čiji je koren premisa A osim eventualno u B, onda po induktivnoj hipotezi postoji hilbertovsko izvođenje $\mathcal{U}, \exists x B$ iz Γ i $\mathcal{S}, A$ iz $\Gamma \cup \{B\}$. Primenimo teoremu dedukcije uz svojstvo $(*)$ na drugo izvođenje i dobijamo izvođenje $\mathcal{S}', B \to A$ takvo da $B \to A$ ne zavisi od hipoteza u kojima se x javlja slobodno. Traženo izvođenje je

$$\mathcal{S}', B \to A, \forall x(B \to A), \forall x(B \to A) \to (\exists x B \to A), \exists x B \to A, \mathcal{U}, \exists x B, A. \qquad \square$$

5.5 Sistemi sa jednakošću

Ukoliko jezik sadrži jednakost, $t = t$ je shema aksiome (t je proizvoljan term) prirodne dedukcije. Ona odgovara uvođenju jednakosti. Eliminacija jednakosti je data shematskim pravilom

$$\frac{A^x_t \qquad t = u}{A^x_u}$$

Na primer, sledeće drvo je prirodnodedukcijski dokaz za teoremu $t = u \to u = t$ (za formulu A iz gornje sheme je uzeta formula $x = t$)

$$\cfrac{\cfrac{t = t \qquad [t = u]_1}{u = t}}{t = u \to u = t}\,1$$

Hilbertovski sistem za jezik sa jednakošću se dobija proširivanjem postojećeg sledećim shemama aksioma

$$t = t, \qquad\qquad t = u \to (A^x_t \to A^x_u).$$

Neka je ponovo A formula $x = t$. Tada je A^x_t formula $t = t$, a A^x_u je formula $u = t$. Instanca druge aksiome u tom slučaju glasi $t = u \to (t = t \to u = t)$. Dakle, u hilbertovskom sistemu, dokaz za teoremu $t = u \to u = t$ bi bio sledeći niz

$$\begin{array}{l}\mathcal{U}, (t = u \to (t = t \to u = t)) \to (t = t \to (t = u \to u = t)),\\ t = u \to (t = t \to u = t), t = t \to (t = u \to u = t), t = t, t = u \to u = t,\end{array}$$

u kome početak predstavlja dokaz za iskaznu teoremu $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$.

5.6 Potpunost predikatske logike

U ovoj sekciji ćemo pokazati da su sve teoreme valjane i ilustrovati kako bi se mogao pokazati obrnuti rezultat.

Teorema 5.6.1 (valjanost). *Svaka teorema je valjana formula.*

Dokaz. Neka je B formula u nekom hilbertovskom dokazu. Indukcijom po mestu gde se B nalazi u tom dokazu ćemo pokazati da je B valjana.

(**baza indukcije**) Ako je B prva formula u dokazu, onda je to aksioma. Ukoliko je to instanca aksioma (1)-(7), onda je ona valjana po primeru 1 iz sekcije 2.4 i tvrđenju 4.4.2. Ukoliko je to instanca aksioma (8)-(9), onda je ona valjana po tvrđenju 4.5.7, a ukoliko je to instanca aksioma (10)-(11), onda je ona valjana po tvrđenju 4.5.8.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da su sve formule koje prethode B u našem dokazu valjane. Ako je B aksioma, onda postupamo kao u bazi. Ako je B dobijena pomoću modus ponensa, onda po induktivnoj hipotezi postoje valjane formule A i $A \to B$. Kao u tvrđenju 2.4.1 zaključujemo da je i B valjana. Ako je B dobijena generalizacijom i oblika je $\forall x B'$, onda je po induktivnoj pretpostavci formula B' valjana pa je po tvrđenju 4.5.9 i B valjana. □

Skup formula Γ je *protivurečan* kada važi $\Gamma \vdash \perp$, inače je *neprotivurečan*. Iz teoreme 5.6.1 možemo zaključiti da $\perp$ nije teorema predikatske logike, što znači da je prazan skup formula neprotivurečan, to jest sama predikatska logika je *neprotivurečna*.

Skup formula je *zadovoljiv* kada postoji model $\mathbb{M}$ i valuacija $v\colon \mathcal{V} \to M$ takva da za svako A iz Γ važi $\hat{v}(A) = 1$. Formula A je *semantička posledica* skupa formula Γ (u oznaci $\Gamma \models A$) kada svaka valuacija koja zadovoljava sve formule iz Γ zadovoljava i A. Ako je Γ prazan skup, to se svodi na to da je A valjana.

Tvrđenje 5.6.2. *Ako je skup formula zadovoljiv, onda je on neprotivurečan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Γ zadovoljiv i protivurečan. Pošto je svako izvođenje konačno, postoji konačno mnogo formula $A_1, \ldots, A_n$ iz Γ takvih da je $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \perp$. Po teoremi dedukcije dobijamo da je formula $A_1 \to (\ldots \to (A_n \to \perp)\ldots)$ teorema, pa je po teoremi 5.6.1 ona i valjana. S druge strane, pošto je Γ zadovoljiv, postoji valuacija $v\colon \mathcal{V} \to M$ takva da za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$, važi $\hat{v}(A_i) = 1$. S obzirom da je i $\hat{v}(A_1 \to (\ldots \to (A_n \to \perp)\ldots)) = 1$, to bi značilo da je $\hat{v}(\perp) = 1$, što je nemoguće. □

Dakle, ovo tvrđenje je direktna posledica teoreme 5.6.1. Ukoliko bismo ga nezavisno pokazali, teorema 5.6.1 bi bila njegova direktna posledica.

Dokaze i skice dokaza sledeće teoreme možete naći u [10], [4] i [6].

Teorema 5.6.3. *Ako je skup rečenica neprotivurečan, onda je on zadovoljiv.*

Kao posledicu ove teoreme imamo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 5.6.4. *Za skup rečenica* Γ *i rečenicu* A *važi: ako* $\Gamma \models A$*, onda* $\Gamma \vdash A$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da nije $\Gamma \vdash A$. To bi značilo da je $\Gamma \cup \{\neg A\}$ neprotivurečan jer iz $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \bot$, po teoremi dedukcije dobijamo $\Gamma \vdash \neg\neg A$, odnosno $\Gamma \vdash A$. Po teoremi 5.6.3 bi to značilo da je $\Gamma \cup \{\neg A\}$ zadovoljiv pa onda nije $\Gamma \models A$. $\square$

Tvrđenje 5.6.5. *Za svaku formulu* A *važi: ako* $\models A$*, onda* $\vdash A$*.*

Dokaz. Ako je A valjana, onda je po tvrđenju 4.5.9 njeno univerzalno zatvorenje A' (sve slobodne promenljive vežemo univerzalnim kvantifikatorom) rečenica koja je valjana. Po tvrđenju 5.6.4 je A' teorema, pa je onda i A teorema. $\square$

Pitanje da li je neka predikatska formula teorema nije odlučivo. Ovo nije očigledno ali se time ovde nećemo baviti. Samo zaključujemo da predikatska logika *nije odlučiva*.

§6. Odeljak 6.

6.1 Teorije prvog reda

Podsetimo se da je rečenica jezika $\mathcal{L}$ formula tog jezika bez slobodnih promenljivih. Po tvrđenju 4.4.2 vrednost rečenice u modelu ne zavisi od konkretne valuacije pa kažemo da model $\mathbb{M}$ *zadovoljava* rečenicu A (u oznaci $\mathbb{M} \models A$) kada za neku (što odmah znači i za svaku) valuaciju $v : \mathcal{V} \to M$ važi $\mathbb{M} \models_v A$. *Teorija prvog reda* ili samo *teorija* jezika $\mathcal{L}$ je skup rečenica jezika $\mathcal{L}$.

Teorije nam služe da opišemo neku klasu modela ili neki konkretan model. Na primer, ukoliko želimo da opišemo parcijalna uređenja, jezik $\mathcal{L}$ pored jednakosti sadrži samo još jedan binarni relacijski simbol $\leq$, a teorija koja ih opisuje se sastoji od sledeće tri rečenice koje kažu da je interpretacija od $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna

$$\forall x\, x \leq x, \quad \forall xy((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y), \quad \forall xyz((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z).$$

Teorija $\mathcal{T}$ je *zatvorena* kada za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$ važi da ako je $\mathcal{T} \vdash A$, onda je $A \in \mathcal{T}$. Teorija $\mathcal{T}$ je *kompletna* ili *potpuna* kada za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$ važi da je $\mathcal{T} \vdash A$ ili $\mathcal{T} \vdash \neg A$. Gornja teorija koja opisuje parcijalna uređenja nije ni zatvorena niti kompletna. Zašto?

S druge strane, ako je $\mathbb{M}$ neki konkretan model jezika $\mathcal{L}$, onda je teorija $Th(\mathbb{M})$ koja ga potpuno opisuje data skupom

$$\{A \mid A \text{ je rečenica jezika } \mathcal{L} \text{ i } \mathbb{M} \models A\}.$$

Ta teorija je zatvorena i kompletna.

Skup *aksioma* $\mathcal{A}$ teorije $\mathcal{T}$ je skup rečenica takvih da za svaku formulu A datog jezika važi

$$\mathcal{T} \vdash A \quad \text{akko} \quad \mathcal{A} \vdash A.$$

Najčešće od skupa aksioma zahtevamo da postoji procedura odlučivosti da li je rečenica datog jezika aksioma ili nije. Jedan od važnih zadataka je naći takvu aksiomatizaciju za teoriju oblika $Th(\mathbb{M})$. Ukoliko je skup aksioma konačan, onda je teorija *konačnoaksiomatizabilna*.

6.2 Peanova aritmetika

Posmatrajmo skup prirodnih brojeva i na njemu binarne operacije $+$ i $\cdot$, unarnu operaciju *sledbenik* u oznaci s (sn interpretiramo kao $n + 1$), konstantu 0 i jednakost. To je operacijsko-relacijska struktura $\mathbb{N}$ na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, s, 0, =\}$.

Peanova aritmetika **PA** je teorija jezika $\mathcal{L}$ data sledećim rečenicama.

1.	$\forall x \, \neg sx = 0$	s nije **na**
2.	$\forall xy(sx = sy \rightarrow x = y)$	s je **1-1**
3. 4.	$\forall x \, x + 0 = x$ $\forall xy \, x + sy = s(x + y)$	induktivna definicija za $+$
5. 6.	$\forall x \, x \cdot 0 = 0$ $\forall xy \, x \cdot sy = (x \cdot y) + x$	induktivna definicija za $\cdot$
7_A.	za proizvoljnu formulu A, $FV(A) \subseteq \{x, y_1, \ldots, y_n\}$ $\forall y_1 \ldots y_n((A^x_0 \wedge \forall x(A \rightarrow A^x_{sx})) \rightarrow \forall x A)$	aksiome indukcije

Ona nije konačna pošto imamo beskonačno mnogo instanci rečenice 7. Da li je **PA** skup aksioma teorije $Th(\mathbb{N})$? Gedel je dao negativan odgovor na to pitanje.

§7. Odeljak 7.

7.1 Mreže

Mreža je algebarska struktura $(L, \wedge, \vee)$ u kojoj važi

$$\begin{array}{ccl} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, & \text{asocijativnost} \\ x \wedge y = y \wedge x, & x \vee y = y \vee x, & \text{komutativnost} \\ x \wedge x = x, & x \vee x = x, & \text{idempotentnost} \\ x \wedge (x \vee y) = x, & x \vee (x \wedge y) = x, & \text{apsorpcija.} \end{array}$$

Lema 7.1.1. *Za $a, b \in L$ važi $a \wedge b = a$ akko $a \vee b = b$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$ uz komutativnost i apsorpciju.
$(\Leftarrow)$ $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$ uz apsorpciju. □

U formulaciji sledećeg tvrđenja se pojavljuju pojmovi uvedeni u [16, sekcija 17.4].

Tvrđenje 7.1.2. *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup takav da za svaki $(x, y) \in X^2$ postoji supremum i infimum skupa $\{x, y\}$ u oznaci $\sup(x, y)$ odnosno $\inf(x, y)$. Tada je struktura $(X, \inf, \sup)$ mreža.*

Dokaz. Pokazaćemo da za svako $x, y \in X$ važi $\inf(x, \sup(x, y)) = x$. Sve ostalo se radi analogno. Pošto je $\inf(x, \sup(x, y))$ donja granica skupa čiji je element x, imamo da je $\inf(x, \sup(x, y)) \leq x$. Po refleksivnosti je $x \leq x$. Pošto je $\sup(x, y)$ gornja granica skupa čiji je element x važi $x \leq \sup(x, y)$. Dakle, x je donja granica skupa $\{x, \sup(x, y)\}$, pa je $x \leq \inf(x, \sup(x, y))$. Još ostaje da iskoristimo antisimetričnost. □

Takođe važi i obrat.

Tvrđenje 7.1.3. *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ mreža. Ako relaciju $\leq$ na L definišemo kao*

$$a \leq b \quad \text{akko} \quad a \wedge b = a,$$

onda je $(L, \leq)$ parcijalno uređen skup takav da je za svaki $(a, b) \in L^2$, supremum odnosno infimum skupa $\{a, b\}$ jednak $a \vee b$ odnosno $a \wedge b$.

Dokaz. Pokazaćemo da je $\leq$ tranzitivna. Ostala svojstva se pokazuju analogno. Neka je $a \leq b$ i $b \leq c$, to jest $a \wedge b = a$ i $b \wedge c = b$. Tada važi

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a,$$

pa je i $a \leq c$.

Pokažimo još da je supremum skupa $\{a, b\}$ jednak $a \vee b$. Imamo da je $a \leq a \vee b$ zbog apsorpcije. Isto tako je uz komutativnost i $b \leq a \vee b$, pa je $a \vee b$ gornja granica skupa

$\{a, b\}$. Neka je c proizvoljna gornja granica skupa $\{a, b\}$. To znači da je $a \wedge c = a$ i $b \wedge c = b$, pa je po lemi 7.1.1, $a \vee c = c$ i $b \vee c = c$. Odavde zaključujemo da je

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c,$$

pa je i $(a \vee b) \wedge c = a \vee b$, što znači da je $a \vee b \leq c$. Dakle, $a \vee b$ je najmanja gornja granica, to jest supremum skupa $\{a, b\}$. $\square$

Nadalje ćemo mrežu i odgovarajući parcijalno uređen skup često izjednačavati i koristiti onu strukturu koja nam u datom trenutku odgovara.

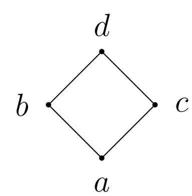
Tvrđenje 7.1.4. *Ako je $a \leq b$, onda je $a \wedge c \leq b \wedge c$ i $a \vee c \leq b \vee c$.*

Dokaz. $(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$, $(a \vee c) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c$ $\square$

PRIMER 1. Posmatrajmo sledeće dve mreže sa nosačem $\{a, b, c, d\}$ čija su odgovarajuća parcijalna uređenja predstavljena *Haseovim* dijagramima.

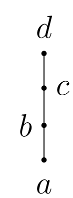
$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d



$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	b	b
c	a	b	c	c
d	a	b	c	d

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	c	d
d	d	d	d	d



Mreža je *distributivna* kada važi još

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{i} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

7.2 Bulove algebre

Bulova algebra je struktura $(B, \wedge, \vee, ', 1, 0)$ za koju važi

1. $(B, \wedge, \vee)$ je distributivna mreža,

2. $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$, to jest 0 je najmanji, a 1 najveći element u mreži.

3. $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$.

PRIMER 2. Gornju mrežu iz primera 1, možemo dopuniti *komplementiranjem* $'$

	a	b	c	d
$'$	d	c	b	a

i dvema konstantama d i a koje imaju uloge 1 odnosno 0 i tako dobiti Bulovu algebru. Nešto kasnije ćemo videti da se donja mreža iz primera 1 ne može dopuniti do strukture Bulove algebre.

PRIMER 3. Ako u algebri **2**, uvedenoj u sekciji 2.1, operaciju $\rightarrow$ zamenimo definisanom operacijom $\neg$ i dodamo konstantu 1, onda dobijamo strukturu Bulove algebre.

PRIMER 4. Za proizvoljan skup X, struktura $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, {}^c, X, \emptyset)$ je Bulova algebra. Pokazaćemo da su u suštini sve konačne Bulove algebre takve.

PRIMER 5. Neka je $\mathcal{F}$ skup iskaznih formula (mogli smo poći i od skupa predikatskih formula). Neka je $\sim$ relacija sintaksne ekvivalentnosti na $\mathcal{F}$, to jest $A \sim B$ akko $\vdash A \leftrightarrow B$. Po tvrđenju 3.3.1, to je relacija ekvivalencije. Uvedimo operacije $\wedge$, $\vee$ i $'$ na količničkom skupu $\mathcal{F}/\sim$ kao

$$[A] \wedge [B] = [A \wedge B], \quad [A] \vee [B] = [A \vee B], \quad [A]' = [\neg A].$$

Ove definicije su dobre, to jest važi da $A \sim A'$ i $B \sim B'$ povlači $A \wedge B \sim A' \wedge B'$, $A \vee B \sim A' \vee B'$ i $\neg A \sim \neg A'$, po teoremi 3.3.2 i tvrđenju 3.3.1.

Struktura $(\mathcal{F}/\sim, \wedge, \vee, {}', [\top], [\bot])$ je Bulova algebra. To je *Lindenbaum-Tarski* algebra iskazne logike.

Bulove algebre $(B, \wedge, \vee, {}', 1, 0)$ i $(D, \wedge, \vee, {}', 1, 0)$ su *izomorfne* kada postoji bijekcija $f \colon B \to D$ takva da je

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \;\; f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \;\; f(x') = (f(x))', \;\; f(1) = 1, \;\; f(0) = 0.$$

Tvrđenje 7.2.1. *Ako su skupovi X i Y iste kardinalnosti, onda su Bulove algebre $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, {}^c, X, \emptyset)$ i $(\mathcal{P}(Y), \cap, \cup, {}^c, Y, \emptyset)$ izomorfne.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ bijekcija i neka je $f : P(X) \to P(Y)$ indukovano preslikavanje definisano u [16, sekcija 17.3]. Po tvrđenjima 17.7 i 17.8, (13) i (15) iz [16] dobijamo da je to indukovano preslikavanje bijekcija, a tražena svojstva proizilaze iz tvrđenja 17.6, 17.7 i 17.8 (10), (2), (11) i (14) iz [16]. □

Neka je $(B, \leq)$ parcijalno uređenje koje odgovara mrežnoj strukturi neke Bulove algebre. Element $a \in B - \{0\}$ je *atom* kada od njega nema manjih u $B - \{0\}$, to jest a je minimalan element u $B - \{0\}$. Bulova algebra je *atomična* kada za svako $x \in B - \{0\}$ postoji atom a takav da je $a \leq x$. U gornjoj mreži iz primera 1 elementi b i c su atomi i Bulova algebra uvedena u primeru 2 je atomična jer je svaki od elemenata b, c i d veći ili jednak od nekog atoma.

Lindenbaum-Tarski algebra iz primera 5, ukoliko je skup iskaznih slova beskonačan, nema atoma. Svaki njen element različit od nule $[\bot]$ je predstavljen formulom koja nije kontradikcija. Za svaku takvu formulu A i slovo p koje se ne pojavljuje u A važi da $[A \wedge p] \leq [A]$, $[A \wedge p] \neq [\bot]$ i $[A \wedge p] \neq [A]$, pa $[A]$ ne može biti atom. Prema tome ta Bulova algebra nije ni atomična.

Napomena 7.2.2. *Za svaka dva različita atoma a_1 i a_2 važi $a_1 \wedge a_2 = 0$.*

Tvrđenje 7.2.3. *Svaka konačna Bulova algebra je atomična.*

Dokaz. Neka je $x \in B - \{0\}$. Skup $\{y \in B - \{0\} \mid y \leq x\}$ je neprazan i konačan pa ima minimalan element. Lako se vidi da je to atom ispod x. □

Lema 7.2.4. *Ako je u Bulovoj algebri $b \wedge c = c$ i $b \wedge c' = 0$, onda je $b = c$.*

Dokaz. $b = b \wedge 1 = b \wedge (c \vee c') = (b \wedge c) \vee (b \wedge c') = c \vee 0 = c$. □

Lema 7.2.5. *Ako je u Bulovoj algebri $b \wedge c = 0$ i $b \vee c = 1$, onda je $b = c'$.*

Dokaz. $b = (b \wedge c) \vee (b \wedge c') = 0 \vee (b \wedge c') = (c \wedge c') \vee (b \wedge c') = (c \vee b) \wedge c' = c'$. □

Teorema 7.2.6. *Svaka konačna Bulova algebra sa skupom atoma A je izomorfna Bulovoj algebri $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup, {}^c, A, \emptyset)$.*

Dokaz. Neka je $f\colon \mathcal{P}(A) \to B$ definisano kao

$$f(\emptyset) = 0, \qquad f(\{a_1, \ldots, a_n\}) = a_1 \vee \ldots \vee a_n.$$

f je **1-1**. Neka su X i Y različiti podskupovi od A. Pretpostavimo da postoji $a \in X - Y$. Zbog apsorpcije (odnosno u slučaju kada je $X = \{a\}$ zbog idempotentnosti) je $a \wedge f(X) = a$. Ako je $Y = \emptyset$, onda je $a \wedge f(Y) = a \wedge 0 = 0 \neq a$. Ako $Y \neq \emptyset$, onda po napomeni 7.2.2, za svaki $a' \in Y$ važi $a \wedge a' = 0$, pa uz distributivnost konjunkcije prema disjunkciji imamo da je $a \wedge f(Y) = 0$. Dakle, $f(X) \neq f(Y)$. Analogno postupamo kada postoji $a \in Y - X$.

f je **na**. Neka je $x \in B$ i neka je $X = \{a \in A \mid a \leq x\}$. Pokazaćemo da je $f(X) = x$. Pošto je $f(X)$ supremum skupa X, a x mu je gornja granica imamo da je $f(X) \leq x$. Po lemi 7.2.4 je dovoljno pokazati još da je $x \wedge (f(X))' = 0$. Ukoliko to ne bi bio slučaj, po tvrđenju 7.2.3, postojao bi atom a takav da je $a \leq x \wedge (f(X))'$. Odavde sledi kao prvo da je $a \leq x$, a kao drugo da je $a \leq (f(X))'$. Iz prvog zaključujemo da je $a \in X$, pa je i $a \leq f(X)$, što zajedno sa drugim daje $a \leq 0$, što je nemoguće. Dakle, $x \wedge (f(X))' = 0$ što je dovoljno za $f(X) = x$. Odavde posebno dobijamo da je $f(A) = 1$.

To da je $f(X \cap Y) = f(X) \wedge f(Y)$ sledi po idempotentnosti i napomeni 7.2.2, uz distributivnost konjunkcije prema disjunkciji. To da je $f(X \cup Y) = f(X) \vee f(Y)$ sledi po idempotentnosti. Još treba pokazati da je $f(X^c) = (f(X))'$. To sledi po lemi 7.2.5 jer imamo

$$0 = f(\emptyset) = f(X^c \cap X) = f(X^c) \wedge f(X), \quad 1 = f(A) = f(X^c \cup X) = f(X^c) \vee f(X).$$

$\square$

Posledica 7.2.7. *Svaka konačna Bulova algebra ima 2^n elemenata za neko $n \in \mathbf{N}$ i svake dve konačne Bulove algebre su izomorfne akko imaju isti broj elemenata.*

Odavde vidimo da donja mreža iz primera 1 iz prethodne sekcije ne može da se dopuni do Bulove algebre jer već kao mreža nije izomorfna gornjoj, koja se može dopuniti do Bulove algebre, a morala bi biti pošto ima isti broj elemenata.

§8. Izvođenja u prirodnoj dedukciji

8.1 Iskazna logika

Primer 1. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

(1) $A \to (B \to A)$,

(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(3) $A \to (B \to (A \wedge B))$,

(4a) $(A \wedge B) \to A$, (4b) $(A \wedge B) \to B$,

(5a) $A \to (A \vee B)$, (5b) $B \to (A \vee B)$,

(6) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,

(7) $\neg\neg A \to A$.

$$(1)\quad \dfrac{\dfrac{[A]_1}{B \to A}}{A \to (B \to A)}\;1 \qquad (4a)\quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]_1}{A}}{(A \wedge B) \to A}\;1 \qquad (5a)\quad \dfrac{\dfrac{[A]_1}{A \vee B}}{A \to (A \vee B)}\;1$$

$$(2)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]_3 \quad [A]_1}{B \to C} \qquad \dfrac{[A \to B]_2 \quad [A]_1}{B}}{C}}{A \to C}\;1}{(A \to B) \to (A \to C)}\;2}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\;3$$

$$(3)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [B]_1}{A \wedge B}}{B \to (A \wedge B)}\;1}{A \to (B \to (A \wedge B))}\;2 \qquad (7)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]_2 \quad [\neg A]_1}{\perp}}{A}\;1}{\neg\neg A \to A}\;2$$

$$(6)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\vee B]_2 \qquad \dfrac{[A\to C]_4 \quad [A]_1}{C} \qquad \dfrac{[B\to C]_3 \quad [B]_1}{C}}{C}\ 1}{(A\vee B)\to C}\ 2}{(B\to C)\to((A\vee B)\to C)}\ 3}{(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))}\ 4$$

Primer 2. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

$$(1)\quad ((A\wedge B)\wedge C)\leftrightarrow(A\wedge(B\wedge C)), \qquad (2)\quad (A\wedge B)\leftrightarrow(B\wedge A),$$

$$(3)\quad ((A\vee B)\vee C)\leftrightarrow(A\vee(B\vee C)), \qquad (4)\quad (A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A).$$

Napomena 8.1.1. *Zbog nedostatka prostora, dokaz za formulu oblika $A\leftrightarrow B$ ćemo predstaviti dokazom za formulu $A\to B$ i dokazom za formulu $B\to A$. Uz pravilo za uvođenje konjunkcije dobili bismo dokaz za $A\leftrightarrow B$.*

$$(1)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A\wedge B)\wedge C]_1}{A\wedge B}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A\wedge B)\wedge C]_1}{A\wedge B}}{B} \qquad \dfrac{[(A\wedge B)\wedge C]_1}{C}}{B\wedge C}}{A\wedge(B\wedge C)}}{((A\wedge B)\wedge C)\to(A\wedge(B\wedge C))}\ 1$$

Obrnuta implikacija se dokazuje na sličan način.

$$(2)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge B]_1}{B} \qquad \dfrac{[A\wedge B]_1}{A}}{B\wedge A}}{(A\wedge B)\to(B\wedge A)}\ 1$$

Obrnuta implikacija se dokazuje tako što A i B zamene mesta.

$$(3)\qquad \dfrac{\dfrac{[(A\vee B)\vee C]_3 \quad \dfrac{[A\vee B]_2 \quad \dfrac{[A]_1}{A\vee(B\vee C)} \quad \dfrac{\dfrac{[B]_1}{B\vee C}}{A\vee(B\vee C)}}{A\vee(B\vee C)}\;1 \quad \dfrac{\dfrac{[C]_2}{B\vee C}}{A\vee(B\vee C)}}{A\vee(B\vee C)}\;2}{((A\vee B)\vee C)\to(A\vee(B\vee C))}\;3$$

Obrnuta implikacija se dokazuje na sličan način.

$$(4)\qquad \dfrac{\dfrac{[A\vee B]_2 \quad \dfrac{[A]_1}{B\vee A} \quad \dfrac{[B]_1}{B\vee A}}{B\vee A}\;1}{(A\vee B)\to(B\vee A)}\;2$$

Obrnuta implikacija se dokazuje tako što A i B zamene mesta.

Primer 3. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

(1)	$(A\to B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$,	(2)	$\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$,
(3)	$\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$,	(4)	$\neg\neg A\leftrightarrow A$,
(5)	$(\top\vee A)\leftrightarrow\top$,	(6)	$(\top\wedge A)\leftrightarrow A$,
(7)	$(\bot\vee A)\leftrightarrow A$,	(8)	$(\bot\wedge A)\leftrightarrow\bot$,
(9)	$((A\wedge B)\vee C)\leftrightarrow((A\vee C)\wedge(B\vee C))$,		
(10)	$((A\vee B)\wedge C)\leftrightarrow((A\wedge C)\vee(B\wedge C))$.		

Dokazi za (1).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{2pt}{}{[\neg(\neg A\vee B)]_1}{\neg B} \quad \dfrac{[A\to B]_2 \quad \genfrac{}{}{2pt}{}{[\neg(\neg A\vee B)]_1}{A}}{B}}{\bot}}{\neg A\vee B}\;1}{(A\to B)\to(\neg A\vee B)}\;2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \lor B]_3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]_1 \quad [A]_2}{\bot}}{B} \qquad [B]_1}{B}\,1}{A \to B}\,2}{(\neg A \lor B) \to (A \to B)}\,3$$

Dokazi za (2).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \land B)]_2 \qquad \dfrac{\genfrac{}{}{2pt}{}{[\neg(\neg A \lor \neg B)]_1}{A} \qquad \genfrac{}{}{2pt}{}{[\neg(\neg A \lor \neg B)]_1}{B}}{A \land B}}{\bot}}{\neg A \lor \neg B}\,1}{\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)}\,2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \lor \neg B]_3 \qquad \dfrac{[\neg A]_1 \quad \dfrac{[A \land B]_2}{A}}{\bot} \qquad \dfrac{[\neg B]_1 \quad \dfrac{[A \land B]_2}{B}}{\bot}}{\bot}\,1}{\neg(A \land B)}\,2}{(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)}\,3$$

Dokazi za (3).

$$\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{2pt}{}{[\neg(A \lor B)]_1}{\neg A} \qquad \genfrac{}{}{2pt}{}{[\neg(A \lor B)]_1}{\neg B}}{\neg A \land \neg B}}{\neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)}\,1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\lor B]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A\land\neg B]_3}{\neg A}\qquad [A]_1}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A\land\neg B]_3}{\neg B}\qquad [B]_1}{\bot}}{\bot}\,1}{\neg(A\lor B)}\,2}{(\neg A\land\neg B)\to\neg(A\lor B)}\,3$$

Dokaz za jedan smer od (4) (drugi je dokazan u primeru 8.1 (7)).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_1 \quad [A]_2}{\bot}}{\neg\neg A}\,1}{A\to\neg\neg A}\,2$$

Dokazi za (5) ($\top$ je po definiciji $\bot\to\bot$).

$$\dfrac{\dfrac{[\bot]_1}{\bot\to\bot}\,1}{(\top\lor A)\to(\bot\to\bot)} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[\top]_1}{\top\lor A}}{\top\to(\top\lor A)}\,1$$

Dokazi za (6) ($\top$ je po definiciji $\bot\to\bot$).

$$\dfrac{\dfrac{[\top\land A]_1}{A}}{(\top\land A)\to A}\,1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bot]_1}{\bot\to\bot}\,1 \qquad [A]_2}{(\bot\to\bot)\land A}}{A\to((\bot\to\bot)\land A)}\,2$$

Dokazi za (7).

$$\dfrac{\dfrac{[\bot\lor A]_2 \quad \dfrac{[\bot]_1}{A} \quad [A]_1}{A}\,1}{(\bot\lor A)\to A}\,2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[A]_1}{\bot\lor A}}{A\to(\bot\lor A)}\,1$$

Dokazi za (8).

$$\dfrac{\dfrac{[\bot\wedge A]_1}{\bot}}{(\bot\wedge A)\to\bot}\,1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[\bot]_1}{\bot\wedge A}}{\bot\to(\bot\wedge A)}\,1$$

Dokazi za (9) (u donjem je u dva lista formula $(A\vee C)\wedge(B\vee C)$ zamenjena sa X).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A\wedge B)\vee C]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[A\wedge B]_1}{A}}{A\vee C} \quad \dfrac{[C]_1}{A\vee C}}{A\vee C}\,1 \quad \dfrac{[(A\wedge B)\vee C]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[A\wedge B]_2}{B}}{B\vee C} \quad \dfrac{[C]_2}{B\vee C}}{B\vee C}\,2}{(A\vee C)\wedge(B\vee C)}}{((A\wedge B)\vee C)\to((A\vee C)\wedge(B\vee C))}\,3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[X]_3}{A\vee C} \quad \dfrac{\dfrac{[X]_3}{B\vee C} \quad \dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [B]_1}{A\wedge B}}{(A\wedge B)\vee C} \quad \dfrac{[C]_1}{(A\wedge B)\vee C}}{(A\wedge B)\vee C}\,1 \quad \dfrac{[C]_2}{(A\wedge B)\vee C}}{(A\wedge B)\vee C}\,2}{((A\vee C)\wedge(B\vee C))\to((A\wedge B)\vee C)}\,3$$

Dokazi za (10) su za domaći.

Primer 4. Pokazati indukcijom po $m+k\geq 2$, uz pomoć primera 3(9-10) i primera 2(2),(4), da važi:

$$\vdash ((D_1\wedge\ldots\wedge D_m)\vee(E_1\wedge\ldots\wedge E_k))\leftrightarrow((D_1\vee E_1)\wedge\ldots\wedge(D_m\vee E_k)),$$

$$\vdash ((D_1\vee\ldots\vee D_m)\wedge(E_1\vee\ldots\vee E_k))\leftrightarrow((D_1\wedge E_1)\vee\ldots\vee(D_m\wedge E_k)).$$

8.2 Predikatska logika

PRIMER 1. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

(1) $\forall xA \to A^x_t$, (2) $A^x_t \to \exists xA$.

Dokazi za (1) i (2).

$$\dfrac{\dfrac{[\forall xA]_1}{A^x_t}}{\forall xA \to A^x_t}\,1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[A^x_t]_1}{\exists xA}}{A^x_t \to \exists xA}\,1$$

PRIMER 2. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

(1) $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$, (2) $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$.

Dokazi za (1) (u levom je $\genfrac{}{}{2pt}{0}{\neg\neg A}{A}$ dobijeno pravilo $\genfrac{}{}{2pt}{0}{\neg(A \to \bot)}{A}$ iz tvrđenja 5.1.1).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\forall xA]_2 \qquad \dfrac{\genfrac{}{}{2pt}{0}{\genfrac{}{}{2pt}{0}{[\neg\exists x\neg A]_1}{\neg\neg A}}{A}}{\forall xA}}{\bot}}{\exists x\neg A}\,1}{\neg\forall xA \to \exists x\neg A}\,2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\neg A]_3 \qquad \dfrac{[\neg A]_1 \quad \dfrac{[\forall xA]_2}{A}}{\bot}}{\bot}\,1}{\neg\forall xA}\,2}{\exists x\neg A \to \neg\forall xA}\,3$$

Dokazi za (2).

$$\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{2pt}{0}{[\neg\exists xA]_1}{\neg A}}{\forall x\neg A}}{\neg\exists xA \to \forall x\neg A}\,1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists xA]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x\neg A]_3}{\neg A} \quad [A]_1}{\bot}\,1}{\bot}\,1}{\neg\exists xA}\,2}{\forall x\neg A \to \neg\exists xA}\,3$$

PRIMER 3. Pokazati uz uslov $x \notin FV(B)$ da su sledeće formule teoreme:

(1) $B \leftrightarrow \forall xB$, (2) $B \leftrightarrow \exists xB$.

Dokazi za (1).

$$\dfrac{\dfrac{[B]_1}{\forall xB}\ (\dagger \text{ važi jer } x \notin FV(B))}{B \to \forall xB}\ 1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[\forall xB]_1}{B}}{\forall xB \to B}\ 1$$

Dokazi za (2).

$$\dfrac{\dfrac{[B]_1}{\exists xB}}{B \to \exists xB}\ 1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[\exists xB]_2 \qquad [B]_1}{B}\ 1\ (\dagger\dagger \text{ važi jer } x \notin FV(B))}{\exists xB \to B}\ 2$$

Primer 4. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

(1) $(\forall xA \wedge \forall xB) \leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$,

(2) $(\exists xA \wedge B) \leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$, $x \notin FV(B)$.

Dokazi za (1).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xA \wedge \forall xB]_1}{\forall xA}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall xA \wedge \forall xB]_1}{\forall xB}}{B}}{A \wedge B}}{\forall x(A \wedge B)}}{(\forall xA \wedge \forall xB) \to \forall x(A \wedge B)}\ 1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(A \wedge B)]_1}{A \wedge B}}{A}}{\forall xA} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(A \wedge B)]_1}{A \wedge B}}{B}}{\forall xB}}{\forall xA \wedge \forall xB}}{\forall x(A \wedge B) \to (\forall xA \wedge \forall xB)}\ 1$$

Dokazi za (2).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists xA \wedge B]_2}{\exists xA} \qquad \dfrac{\dfrac{[A]_1 \qquad \dfrac{[\exists xA \wedge B]_2}{B}}{A \wedge B}}{\exists x(A \wedge B)}}{\exists x(A \wedge B)}\ 1\ (\dagger\dagger \text{ važi jer } x \notin FV(B))}{(\exists xA \wedge B) \to \exists x(A \wedge B)}\ 2$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x(A\wedge B)]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge B]_1}{A}}{\exists xA} \quad \dfrac{[A\wedge B]_1}{B}}{\exists xA\wedge B}}{\exists xA\wedge B}\ 1\ (\dagger\dagger \text{ važi jer } x\notin FV(B))}{\exists x(A\wedge B)\to(\exists xA\wedge B)}\ 2$$

Primer 5. Pokazati da su sledeće formule teoreme:

(1) $(\exists xA\vee\exists xB)\leftrightarrow\exists x(A\vee B)$,

(2) $(\forall xA\vee B)\leftrightarrow\forall x(A\vee B)$, $x\notin FV(B)$.

Dokazi za (1).

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xA\vee\exists xB]_4 \qquad \dfrac{[\exists xA]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[A]_1}{A\vee B}}{\exists x(A\vee B)}}{\exists x(A\vee B)}\ 1 \qquad \dfrac{[\exists xB]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[B]_2}{A\vee B}}{\exists x(A\vee B)}}{\exists x(A\vee B)}\ 2}{\exists x(A\vee B)}\ 3}{(\exists xA\vee\exists xB)\to\exists x(A\vee B)}\ 4$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x(A\vee B)]_3 \qquad \dfrac{[A\vee B]_2 \quad \dfrac{\dfrac{[A]_1}{\exists xA}}{\exists xA\vee\exists xB} \quad \dfrac{\dfrac{[B]_1}{\exists xB}}{\exists xA\vee\exists xB}}{\exists xA\vee\exists xB}\ 1}{\exists xA\vee\exists xB}\ 2}{\exists x(A\vee B)\to(\exists xA\vee\exists xB)}\ 3$$

Dokazi za (2).

$$\dfrac{\dfrac{[\forall xA\vee B]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xA]_1}{A}}{A\vee B}}{\forall x(A\vee B)} \qquad \dfrac{\dfrac{[B]_1}{A\vee B}}{\forall x(A\vee B)}\ (\dagger \text{ važi jer } x\notin FV(B))}{\forall x(A\vee B)}\ 1}{(\forall xA\vee B)\to\forall x(A\vee B)}\ 2$$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg(\forall xA \vee B)]_2 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall x(A\vee B)]_3}{A\vee B} \qquad [A]_1 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg(\forall xA \vee B)]_2}{\neg B} \qquad [B]_1}{\bot}}{A}}{A}\ 1}{\forall xA}\ (\dagger \text{ važi jer } x \notin FV(B))}{\forall xA \vee B}}{\bot}}{\forall xA \vee B}\ 2}{\forall x(A\vee B) \to (\forall xA \vee B)}\ 3
$$

Primer 6. Ako se promenljiva y ne pojavljuje u formuli A, onda su sledeće formule teoreme:

(1) $\forall y A^x_y \leftrightarrow \forall x A$, (2) $\exists x A \leftrightarrow \exists y A^x_y$.

Iz uslova da se promenljiva y ne pojavljuje u formuli A sledi da je $(A^x_y)^y_x = A$. Tu činjenicu koristimo u donjim dokazima.

Dokazi za (1).

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall y A^x_y]_1}{(A^x_y)^y_x}}{\forall x A}}{\forall y A^x_y \to \forall x A}\ 1
\qquad\qquad
\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall x A]_1}{A^x_y}}{\forall y A^x_y}}{\forall x A \to \forall y A^x_y}\ 1
$$

Dokazi za (2).

$$
\cfrac{\cfrac{[\exists x A]_2 \qquad \cfrac{[(A^x_y)^y_x]_1}{\exists y A^x_y}}{\exists y A^x_y}\ 1}{\exists x A \to \exists y A^x_y}\ 2
\qquad\qquad
\cfrac{\cfrac{[\exists y A^x_y]_2 \qquad \cfrac{[A^x_y]_1}{\exists x A}}{\exists x A}\ 1}{\exists y A^x_y \to \exists x A}\ 2
$$

Literatura

[1] J.L. Bell and M. Machover, ***A Course in Mathematical Logic***, North-Holland, Amsterdam, 1977

[2] G.S. Boolos, J.P. Burgess and R.C. Jeffrey, ***Computability and Logic***, Cambridge University Press, Cambridge, 2002

[3] M. Borisavljević, ***Uvod u logiku I deo***, Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet, http://gen.lib.rus.ec/, 2009

[4] M. Borisavljević, ***Uvod u logiku II deo***, rukopis, 2013

[5] K. Došen, ***Osnovna logika***, rukopis, http://www.mi.sanu.ac.rs/∼kosta/publications.htm, 2013

[6] N. Ikodinović, ***Uvod u matematičku logiku***, http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/43-Logika.pdf, 2014

[7] N. Ikodinović, ***Uvod u matematičku logiku-skripta***, http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/43-uml_new2.pdf, 2015

[8] P. Janičić, ***Matematička logika u računarstvu***, http://poincare.matf.bg.ac.rs/ janicic//books/mlr.pdf, 2008

[9] S.C. Kleene, ***Mathematical Logic***, Dover Publications, New York, 2002

[10] Ž. Kovijanić-Vukićević i S. Vujošević, ***Uvod u logiku***, Univerzitet Crne Gore, http://elibrary.matf.bg.ac.rs/, 2009

[11] A. Kron, ***Logika***, (Univerzitetski udžbenici, 85), Univerzitet, Beograd, 1998

[12] I. Lavrov and L. Maksimova, ***Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms***, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1982

[13] S. Lipschutz, ***Schaum's Outline of Theory and Problems of Set Theory and Related Topics***, McGraw-Hill, New York, 1998

[14] W. Marek and J. Onyszkiewicz, ***Elements of Logic and Foundations of Mathematics in Problems***, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003

[15] E. Mendelson, ***Introduction to Mathematical Logic***, CRC Press, 2010

[16] Z. Petrić, ***Linearna algebra-skripta***,
http://www.mi.sanu.ac.rs/ zpetric/skriptaAB.pdf, 2013

[17] Z. Petrović i Ž. Mijajlović, ***Matematička logika-elementi teorije skupova***, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012

[18] S. Prešić, ***Elementi matematičke logike***, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1974

Indeks