Пример: 2, 3 и 5 су прости бројеви.

- $P \wedge Q \wedge R$: P : 2 је прост број
  Q : 3 је прост број
  R : 5 је прост број

- $P(x)$: x је прост број ; $P(2) \wedge P(3) \wedge P(5)$
  ↑ променљива

Пример: a је прост број, и b или c је дељиво са a

- $P \wedge (Q \vee R)$: P : a је прост број
  Q : b је дељиво са a
  R : c је дељиво са a

- $P(x)$: x је прост број
  $D(x,y)$: x је дељиво са y | $P(a) \wedge (D(b,a) \vee D(c,a))$

Пример: B је мушко, A је жена, B воли A, али A не воли B.

$M(x)$: x је мушко $\qquad \neg M(x)$: x је жена

$V(x,y)$: x воли y $\qquad \neg V(x,y)$: x не воли y

$M(B) \wedge \neg M(A) \wedge V(B,A) \wedge \neg V(A,B)$

Универзум дискурса је скуп кроз који „пролазе" променљиве, тј. скуп из кога променљиве узимају вредности.

У прва два примера унив. диск. је $\mathbb{N}$ (или $\mathbb{Z}$), у трећем примеру унив. диск. је скуп свих људи.

Тачност $P(x)$ зависи од x. Нпр. ако $P(x)$: x је прост онда $P(2)=1$, $P(3)=1$, $P(4)=0$, $P(5)=1$, $P(6)=0$, ...

ИМПЛИКАЦИЈА И ЕКВИВАЛЕНЦИЈА

ПРИМЕР: Ако је данас недеља, онда не идем на посао.
Данас јесте недеља.
Дакле, не идем на посао.

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$$

(MODUS PONENS)

$P \to Q$: Ако P, онда Q.

Q, ако P.

P, само ако Q.

Из P следи Q.

P имплицира (повлачи) Q

P је довољан услов за Q.

Q је потребан услов за P

Шта је таблица за $\to$?

материјална импликација

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ПРИМЕР: Ако је $x>3$, онда је $x>1$. ← ово је тачно шта год да је x

$P(x)$: $x > 3$

$Q(x)$: $x > 1$

$P(x) \to Q(x) = 1$ за све x.

$x=4$: $P(4)=1$, $Q(4)=1$; $P(4) \to Q(4) = 1$

$1 \to 1 = 1$

$x=2$: $P(2)=0$, $Q(2)=1$; $P(2) \to Q(2) = 1$

$0 \to 1 = 1$

$x=-1$: $P(-1)=0$, $Q(-1)=0$; $P(-1) \to Q(-1) = 1$

$0 \to 0 = 1$

ПРИМЕР: Родитељи кажу детету: „Ако $\underbrace{\text{будеш одличан}}_{P}$, $\underbrace{\text{купићемо ти телефон}}_{Q}$." $P \to Q$

Када ћемо рећи да су родитељи слагали дете?

Одговор на чет: $P(x): x>3$; $Q(x): x>1$

$P(x) \to Q(x)$: Ако $x>3$, онда $x>1$.

$x>1$, ако $x>3$.

$x>3$, само ако $x>1$.

$x>1$, само ако $x>3$

P	Q	P → Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$x \in \{0,1\}$

$0 \to x = 1$ $\qquad$ $x \to 0 = \neg x$

$x \to 1 = 1$ $\qquad$ $1 \to x = x$

Закони:

$$P \to P \equiv T$$

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$(*)\ P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

P	Q	P → Q	¬P	¬P ∨ Q
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

$(*)$: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg P \vee \neg\neg Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

$(\#)$ $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$ $\quad$ закон контрапозиције

$(\#)$: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg P \vee \neg\neg Q \equiv \neg\neg Q \vee \neg P$

$\equiv \neg Q \to \neg P$

$P \to Q \not\equiv Q \to P$ $\qquad$ $P \to (Q \to R) \not\equiv (P \to Q) \to R$

$P \to Q \to R$

Приоритети у запису: $\to$ има најнижи приоритет.

горе: $\neg Q \to \neg P$ $<$ $(\neg Q) \to (\neg P)$; $\neg(Q \to (\neg P))$

$P \wedge Q \to R \vee S$ значи $(P \wedge Q) \to (R \vee S)$

Пример: Ако је број дељив са 6, онда је дељив са 3.

P: број је дељив са 6

Q: број је дељив са 3

$\Big\}$ $P \to Q$

Како се доказује тврђење облика $P \to Q$?

Желимо да покажемо да је $P \to Q$ тачно!

СТРАТЕГИЈА 1: претпоставимо да је P тачно и докажемо да је Q тачно.

ОБЈАШЊЕЊЕ: P може бити тачно или нетачно.

Ако је P нетачно, онда $P \to Q$ тачно и завршили смо у доказу.

Други случај је када је P тачно, па претпостављамо да је P тачно. Тада $P \to Q$ и Q имају исту тачност па да бисмо доказали да је $P \to Q$ тачно, докажемо да је Q тачно.

претпоставимо супротно

СТРАТЕГИЈА 2: (пис) $P \to Q$ није тачно, тј. P је тачно а Q нетачно, и тражимо контрадикцију.

ПРИМЕР: Ако је број x дељив са 6, дељив је са 3.

Доказ: претпоставимо да је x дељиво са 6.
и докажимо (то нам је циљ) да је x дељиво са 3.

Пошто је x дељиво са 6, можемо да запишемо $x = 6 \cdot y$, за неко y. Тада $x = 3 \cdot (2y)$, одакле специјално имамо да је x дељиво са 3. $\boxed{\checkmark}$

СТРАТЕГИЈА 3: Доказати контрапозицију $\neg Q \to \neg P$
(користећи СТРАТЕГИЈУ 1 или 2)

Еквиваленција:

ПРИМЕР: Број x је дељив са 6 ако и само ако је дељив са 2 и са 3.

$$D(x,6) \leftrightarrow (D(x,2) \wedge D(x,3))$$

где $D(x,y)$: x је дељиво са y

$P \leftrightarrow Q$: P ако и само ако Q
P акко Q
P је еквивалентно са Q

везник еквиваленције

$P \leftrightarrow Q$: P ако и само ако Q

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \land (Q \to P)$$

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$x \in \{0,1\}$

$0 \leftrightarrow x = \neg x = x \leftrightarrow 0$

$1 \leftrightarrow x = x = x \leftrightarrow 1$

$P \leftrightarrow Q$ је тачно значи да су P и Q једнаке тачности

Закони:

$P \leftrightarrow P \equiv \top$

$P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$

$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$; $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R$ ✓

$P \leftrightarrow Q \equiv \neg(P \veebar Q)$

приоритет у запису: $\leftrightarrow$ има исти приоритет као $\to$

$\veebar$ -||-

$$\neg P \leftrightarrow Q \equiv \neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \leftrightarrow \neg Q$$

Како доказујемо $P \leftrightarrow Q$, тј. да је $P \leftrightarrow Q$ тачно?

СТРАТЕГИЈА: доказујемо $P \to Q$ и $Q \to P$.

КВАНТИФИКАТОРИ

пример: Квадрат сваког реалног броја је већи или једнак 0.

$(\forall x)(x^2 \geq 0)$; универзум дискурса је $\mathbb{R}$.

$P(x)$: неки исказ о пром. x из неког унив. диск.

$(\forall x)P(x)$: за свако x (из унив. диск.) важи $P(x)$

↑ универзални квантификатор

$(\forall x)\, P(x) = 1$ ако је $P(x) = 1$ за свако x из унив. диск.

пример: Ако је $x > 3$, онда је $x > 1$, за све $x \in \mathbb{R}$.

$(\forall x)(x > 3 \to x > 1)$, где је унив. диск. $\mathbb{R}$.

↑ ова формула је тачна

пример: $x^2-2x+3=0$ има реално решење.

$(\exists x)\ x^2-2x+3=0$; унив. диск. је $\mathbb{R}$.

$P(x)$: неки исказ о x у неком унив. диск.

$(\exists x)\ P(x)$: постоји x (у унив. диск.) тд важи $P(x)$

за неко x важи $P(x)$

егзистенцијални квантификатор

$(\exists x)\ P(x)=1$ ако $P(x)=1$ за неко (бар једно) x из унив. диск.

$(\exists x)\ (x^2-2x+3=0)$ је нетачно у унив. диск. $\mathbb{R}$.

пример: $M(x)$: x је мушко

$P(x)$: x има плаву косу

унив. диск.: скуп свих људи

а) $(\exists x)(M(x)\wedge P(x))$: Бар једна особа је плавушан.

б) $(\forall x)(M(x)\to P(x))$: Свака мушка особа има плаву косу.

пример: а) Неко није радио тест.

унив.: студенти групе 1и2.

$T(x)$: x је радио тест

$(\exists x)\ \neg T(x)$

б) Нико није радио тест. $(\forall x)\ \neg T(x)$

пример: унив. диск.: скуп свих људи

$M(x)$: x је мушко

$R(x,y)$: x је родитељ од y

$B(x,y)$: x и y су у браку.

а) x је отац од y : $M(x)\wedge R(x,y)$ =: $\mathrm{Otac}(x,y)$

x је мајка од y : $\neg M(x)\wedge R(x,y)$ =: $\mathrm{Majka}(x,y)$

д) x је рођени брат од y (x и y имају бар једног заједничког родитеља)

$$M(x) \wedge (\exists z)(R(z,x) \wedge R(z,y)) =: Brat(x,y)$$

ђ) x је ујна од y

x је жена од $\underbrace{\text{брата}}_{z}$ од $\underbrace{\text{мајке}}_{w}$ од y.

$$\neg M(x) \wedge (\exists z w)(B(x,z) \wedge Brat(z,w) \wedge Majka(w,y))$$

е) x је <u>шурњаја</u> од y. (домаћи)