ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК *517.986.22*

Немеш Норберт Тиборович

Метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость банаховых модулей

Специальность 01.01.01 —
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Хелемский А.Я.

Москва — 2016

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В любой математической теории, где рассматриваются множества с определенными структурами и отображения, должным образом реагирующие на эти структуры, рано или поздно возникают задачи подъема и продолжения таких отображений. На современном языке это задачи подъема и продолжения морфизмов в тех или иных категориях. Объекты, из которых любой морфизм можно поднять вдоль любого эпиморфизма, называются проективными, а объекты, у которых любой морфизм действующий в них можно продолжить вдоль любого мономорфизма, называются инъективными. В категориях, где есть разумные аналоги тензорного произведения, например, в замкнутых моноидальных категориях, можно определить понятие плоского объекта, то есть объекта, у которого соответствующий функтор тензорного произведения сохраняет мономорфизмы. Понятия проективности, инъективности и плоскости являются тремя китами, на которых покоится здание гомологической алгебры. С момента своего возникновения в 50-х годах XX века эта ветвь математики широко развилась и стала незаменимым инструментом в алгебраической теории чисел, теории представлений, комплексном и функциональном анализе. Цель данной диссертации — изучение двух специальных типов гомологически тривиальных объектов в категории банаховых модулей, точнее изучение метрически и топологически проективных, инъективных и плоских банаховых модулей.

При попытке перенести понятия проективности, инъективности и плоскости из чистой алгебры в функциональный анализ естественно возникли два подхода. В первом из них, назовем его топологическим, от подъемов операторов и продолжений операторов требовалась лишь непрерывность, а в роли эпиморфизмов и мономорфизмов рассматривались открытые отображения и вложения с замкнутым образом соответственно. Второй подход, назовем его метрическим, учитывал не только топологическую структуру банаховых пространств, но и точное значение нормы: в качестве эпиморфизмов рассматривались строгие фактор-отображения, а в качестве мономорфизмов брали изометрические вложения.

Первый нетривиальный результат в этой области был получен в конце 20-хх годов XX века. Это теорема Хана-Банаха [1], [2], [3], которая утверждает метрическую инъективность $\mathbb{C}$ как банахова пространства. Конечно, в то время гомологической алгебры не было и в помине. Затем в 1950 году Нахбин [4] и Гуднер [5], в предположении существования хотя бы одной крайней точки в единичном шаре пространства, доказали, что все метрически инъективные действительные банаховы пространства суть $C(K)$-пространства, для некоторого стоунова пространства K. В 1952 году Келли [6] смог избавиться от этого предположения. Наконец, в 1958 году Хасуми [7] получил описание метрически инъективных комплексных банаховых пространств. В этот промежуток в 1955 году Гротендик описал [8] метрически плоские банаховы пространства, они оказались изометрически изоморфны L_1-пространствам. В 1966 Кёте доказал [9], что все топологически проективные банаховы пространства топологически изоморфны ℓ_1-пространствам. В 1972 году Стигал и Резерфорд [10] показали, что топологически плоские пространства — это в точности $\mathscr{L}_1$-пространства, то есть пространства локально устроенные так же как и ℓ_1-пространства. Наконец, в 2013 году Хелемский заметил [11], что из результатов Гротендика легко получается описание метрически проективных банаховых пространств — они изометрически изоморфны ℓ_1-пространствам. Единственная до сих пор нерешенная задача — это описание топологически инъективных банаховых пространств. Некоторые специалисты оценивают ее как безнадежную (ср. [12]).

Параллельно с этим шло становление банаховой гомологии. В 1954 году Данфорд [13] показал взаимосвязь между расширениями банаховых алгебр и спектральными операторами. Используя банахов аналог комплекса Хохшильда, в 1962 году Камовиц [14] определил группы когомологий банаховой алгебры с коэффициентами в банаховом бимодуле. Вскоре эта конструкция нашла применения в теории расширений и дифференцирований банаховых алгебр [15], [16].

В 1970 году Хелемским был предложен общий подход к гомологии банаховых алгебр [17]. Его идея состояла в построении варианта относительной гомологической алгебры для категорий банаховых модулей. Здесь под относительной гомологической алгеброй мы понимаем конструкцию Эйленберга и Мура [18], в которой рассматриваются не все эпиморфизмы и мономорфизмы, а только некоторый выделенный класс так называемых допустимых морфизмов. В случае банаховых модулей Хелемский определил допустимые морфизмы как морфизмы банаховых модулей, обладающие дополняемым (в смысле банаховой геометрии) ядром и образом. Как следствие, возникли понятия относительно проективного, инъективного и плоского банахова модуля. На категорию банаховых модулей были перенесены многие конструкции гомологической алгебры, такие как резольвента, производный функтор, группы когомологий. Построенную теорию стали называть относительной банаховой гомологией.

Методы относительной банаховой гомологии позволили получить ряд результатов о наличии аналитической структуры в спектре коммутативной полупростой банаховой алгебры [19], [20], дать гомологическую интерпретацию таким топологическим понятиям как дискретность, паракомпактность [21] и метризуемость [22], [23]. В теории операторных алгебр были получены структурные теоремы о строении C^*- и W^*-алгебр [24], [25], [26] и некоторых несамосопряженных операторных алгебр [27], [28]. Пожалуй, самый известный результат здесь — это теорема Джонсона [29]: локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда ее сверточная алгебра относительно аменабельна.

Относительная банахова гомология стремительно развивалась, и вопросов всегда было больше чем ответов. Поэтому другие варианты банаховой гомологии почти не рассматривались. Под другими вариантами мы понимаем варианты относительной гомологии банаховых модулей с иными классами допустимых морфизмов. Можно рассматривать как более узкие, так и более широкие классы, чем класс относительно допустимых морфизмов. Первые два кандидата — это, конечно же, допустимые морфизмы из метрической и топологической теории банаховых пространств. Метрической банаховой гомологией назовем вариант относительной гомологии банаховых модулей, где допустимые мономорфизмы — это изометрические морфизмы модулей, а допустимые эпиморфизмы — это морфизмы модулей, являющиеся строгими фактор-отображениями. Аналогично в топологической банаховой гомологии в качестве допустимых мономорфизмов берутся морфизмы модулей, являющиеся вложениями с замкнутым образом, а в качестве допустимых эпиморфизмов рассматриваются морфизмы модулей, являющиеся открытыми отображениями. Устоявшихся названий для этих версий банаховой гомологии еще нет.

Первые упоминания метрической банаховой гомологии можно найти уже в 1967 году в работе Хаманы [30]. Точнее, Хамана исследовал только метрическую инъективность банаховых модулей. Он дал определение инъективной оболочки банахова модуля, доказал ее существование и единственность. Также он доказал следующий критерий: унитальная C^*-алгебра метрически инъективна как модуль над собой тогда и только тогда, когда она является коммутативной AW^*-алгеброй. Более основательно метрическая банахова гомология была впервые рассмотрена в 1979 году в работе Гравена [31]. Он определил понятия метрически проективного, инъективного и плоского банахова модуля и описал простейшие свойства таких модулей. В качестве приложений он дал критерии метрической проективности, инъективности и плоскости классических модулей гармонического анализа над сверточной алгеброй. Уже в этой работе были первые намеки на взаимосвязь между метрической банаховой гомологией и геометрией банаховых пространств. Подход Гравена во многом схож с методами относительной банаховой гомологи, но судя по аннотации к статье, сам Гравен, скорее всего, не знал о существовании этого направления.

История топологической банаховой гомологии также началась с исследования инъективности. В 1984 году Хелемский и Шейнберг [32] при изучении относительной аменабельности банаховых алгебр дали определение топологически инъективного и плоского банахова модуля. Они доказали критерий топологической плоскости циклических модулей и дали достаточное условие топологической плоскости идеалов. В следующий раз об этом направлении банаховой гомологии напомнил Уайт в 1995 году [33]. Его определения строго проективного, инъективного и плоского модуля учитывали нормы морфизмов, но по своей сути они были эквиваленты определениям топологической проективности, инъективности и плоскости. Уайт доказал базовые свойства этих модулей по аналогии с относительной банаховой гомологией, дал количественный аналог теоремы Шейнберга о топологической плоскости циклических модулей. Также Уайт провел исследование некоторых гомологических свойств модулей над равномерными алгебрами.

В 2008 году Хелемский начал систематическое исследование гомологически тривиальных объектов в метрической теории. В работах [34], [35], [36] он дал описания метрически проективных и плоских объектов для некоторых специальных категорий банаховых модулей. После этого, в работе [11] он предложил новый подход к доказательству базовых теорем для различных версий банаховой гомологии. Идея состояла в определении понятия проективности и свободы для так называемых оснащенных категорий. В последствии метрическая, топологическая и относительная банахова гомология были вписаны в эту общекатегорную схему.

В данной работе предпринята попытка собрать воедино все важные результаты и провести полное исследование метрических и топологических гомологических свойств трех типов модулей анализа: классических модулей над алгебрами ограниченных и компактных операторов на гильбертовом пространстве, модулей над алгебрами ограниченных и исчезающих на бесконечности функций и модулей над сверточной алгеброй и алгеброй мер локально компактной группы.

Цель работы. Целью данной работы является:

1. Построение общей теории для изучения проективных, инъективных и плоских модулей в метрической и топологической банаховой гомологии.

2. Исследование гомологических свойств классических модулей анализа.

3. Сравнение метрической и топологической теории с уже хорошо изученной относительной банаховой гомологией.

Основные положения выносимые на защиту. В диссертации получены следующие результаты:

1. Доказано, что замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей. Аналогичное утверждение получено и для метрической проективности.

2. Доказано, что для банаховой алгебры, являющейся $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством, все ее топологически проективные, инъективные и плоские модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.

3. Доказано, что над относительно аменабельной банаховой алгеброй всякий банахов модуль, являющийся $\mathscr{L}_1$-пространством, топологически плоский.

4. Дан критерий проективности идеалов C^*-алгебр, а именно, доказано, что левый замкнутый идеал C^*-алгебры метрически или топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает самосопряженной правой единицей.

5. Получено описание AW^*-алгебр топологически инъективных над собой как правые модули. Все такие алгебры являются произведением конечного числа матричных алгебр с коэффициентами в коммутативных AW^*-алгебрах.

6. Получено описание топологически инъективных, топологически сюръективных, изометрических и коизометрических операторов умножения действующих между L_p-пространствами. Доказано, что топологически инъективные и изометрические операторы умножения обладают соответственно ограниченными и сжимающими левыми обратными операторами умножения, а топологически сюръективные и коизометрические обладают соответственно ограниченными и сжимающим правыми обратными операторами умножения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре “Алгебры в анализе” под руководством А.Я. Хелемского (2014 — 2015 гг.) и на семинаре “Теория групп” под руководством А.Ю. Ольшанского и А.А. Клячко (2016 г.).

Основные методы исследования. В диссертации используются методы локальной теории банаховых пространств, теории операторных и банаховых алгебр, гармонического анализа и теории меры. Помимо этого, применяются специфические методы гомологической теории банаховых алгебр.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы настоящей работы могут найти применение в гомологической теории банаховых алгебр, геометрии банаховых пространств, абстрактном гармоническом анализе и теории операторных алгебр.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [37], [38], [39].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 101 наименования. Общий объем диссертации составляет 118 страниц.

Во введении обсуждается история возникновения различных версий банаховой гомологии, формулируются основные задачи, исследуемые в работе и перечисляются главные результаты.

Глава 1 содержит предварительные сведения. В параграфе 1.1 перечислены все необходимые результаты из геометрии банаховых пространств. Параграф 1.2 содержит краткое введение в теорию банаховых алгебр и их модулей. В параграфе 1.3 дано краткое введение в относительную банахову гомологию и перечислены главные определения и факты из теории оснащенных категорий.

В главе 2 обсуждаются общие свойства метрически и топологически проективных, инъективных и плоских модулей. В некоторых случаях получаются полные описания таких модулей. Все эти результаты активно используются в следующей главе, где речь идет о классических модулях анализа. Более детально структура главы 2 следующая.

Основываясь на общих теоремах теории оснащенных категорий, в параграфе 2.1 доказываются базовые свойства метрически и топологически проективных, инъективных и плоских модулей. Изучаются различные категорные конструкции (такие как произведение, копроизведение и тензорное произведение), сохраняющие эти три свойства. Эти результаты используются для исследования метрической и топологической проективности левых идеалов банаховых алгебр. Для произвольных банаховых алгебр даются необходимые условия. Для случая коммутативных банаховых алгебр, получается следующий критерий.

Теорема (2.1.16)**.** *Если замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры обладает ограниченной аппроксимативной единицей, то он топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.*

В единые доказательства объединяются известные результаты о метрической и топологической проективности и плоскости циклических модулей.

Параграф 2.2 посвящен банахово-геометрическим свойствам гомологически тривиальных модулей в метрической и топологической теории. Здесь даются критерии метрической и топологической проективности, инъективности и плоскости аннуляторных модулей и устанавливается их тесная связь с метрически и топологически проективными, инъективными и плоскими банаховыми пространствами. Далее в работе дается несколько примеров, подтверждающих тезис: “метрически и топологически гомологически тривиальные модули над банаховой алгеброй схожи по банахово-геометрическими свойствами со своей алгеброй”. Примеры включают свойство быть $\mathscr{L}_1$-пространством, свойство Данфорда-Петтиса и свойство l.u.st. Здесь следует выделить следующий результат.

Теорема (2.2.13)**.** *Если банахова алгебра, является, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством, то все ее топологически проективные, инъективные и плоские модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.*

В параграфе 2.3 перечисляются условия, при которых метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость сохраняются при переходе между модулем над алгеброй и модулем над идеалом этой алгебры. В конце параграфа даются необходимые и достаточные условия топологической плоскости банаховых модулей и необходимые условия метрической и топологической инъективности двусторонних идеалов банаховых алгебр. Главный результат параграфа звучит так.

Теорема (2.3.9)**.** *Пусть A — относительно аменабельная банахова алгебра, и F — левый банахов A-модуль, являющийся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда F — топологически плоский A-модуль.*

В главе 3 общие результаты главы 2 применяются к классическим модулям анализа.

В параграфе 3.1 исследуется метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость идеалов C^*-алгебр. В этой части, по-видимому, наиболее важны два следующих критерия.

Теорема (3.1.4)**.** *Левый замкнутый идеал C^*-алгебры топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает самосопряженной правой единицей.*

Теорема (3.1.11)**.** *AW^*-алгебра топологически инъективна как правый модуль над собой тогда и только тогда, когда она является произведением конечного числа матричных алгебр с коэффициентами в коммутативных AW^*-алгебрах.*

Также доказывается критерий метрической и топологической плоскости C^*-алгебры как модуля над своим двусторонним идеалом. Эти критерии оказываются незаменимыми средствами для описания в метрической и топологической теории некоторых гомологически тривиальных модулей над алгебрами ограниченных и компактных операторов на гильбертовом пространстве. Аналогичная классификация дается и в коммутативном случае, то есть для алгебр ограниченных и исчезающих на бесконечности функций заданных на некотором индексном множестве.

В параграфе 3.2 исследуется проективность, инъективность и плоскость классических модулей гармонического анализа. Доказывается критерий топологической плоскости левых идеалов сверточной алгебры вида $L_1(G) * \mu$ для некоторой идемпотентной меры μ. Благодаря специфической банахово-геометрической структуре сверточной алгебры и алгебры мер локально компактной группы устанавливается, что большинство классических модулей гармонического анализа не являются гомологически тривиальными.

В параграфе 3.3 строится пример категории модулей ведущей себя совершенно иначе, чем категории рассмотренные ранее. Эта категория состоит из пространств Лебега со структурой банахова модуля над алгеброй измеримых ограниченных функций. Все эти модули оказываются гомологически тривиальными по отношению к своей категории. В основе этого результата лежит следующая теорема.

Теорема (3.3.12, 3.3.16, 3.3.19, 3.3.24)**.** *Пусть (Ω,Σ,μ) и (Ω,Σ,ν) — два σ-конечных пространства с мерой и пусть $1 \leq p,q \leq +\infty$. Тогда ограниченный оператор умножения $M_g : L_p(\Omega,\mu) \to L_q(\Omega,\nu) : f \mapsto gf$ является*

(i) топологически инъективным тогда и только тогда, когда он обладает левым обратным ограниченным оператором умножения;

(ii) изометрическим тогда и только тогда, когда он обладает левым обратным сжимающим оператором умножения;

(iii) топологически сюръективным тогда и только тогда, когда он обладает правым обратным ограниченным оператором умножения;

(iv) коизометрическим тогда и только тогда, когда он обладает правым обратным изометрическим оператором умножения.

Наконец, в заключении перечислены нерешенные задачи и направления для дальнейших исследований.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Я. Хелемскому за постановку интересных задач и полезные обсуждения, а А.Ю. Пирковскому за ценные советы и замечания.

Глава 1

Предварительные сведения

В дальнейшем, в предложениях мы будем использовать сразу несколько фраз, последовательно перечисляя их и заключая в скобки таким образом: $\langle\ \ldots / \ldots\ \rangle$. Например: число x называется $\langle$ положительным / неотрицательным $\rangle$ если $\langle\ x > 0\ /\ x \geq 0\ \rangle$. Иногда некоторые части могут не содержать фраз. Мы будем использовать символ $:=$ для обозначения равенства по определению.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения для множеств чисел: $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_n$ — множество первых n натуральных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел, $\mathbb{T}$ — множество комплексных чисел с модулем равным 1, наконец, $\mathbb{D}$ — множество комплексных чисел с модулем меньшим 1. Для $z \in \mathbb{C}$ символ $\overline{z}$ обозначает число, комплексно-сопряженное к z.

Для заданного отображения $f : M \to M'$ и подмножества $\langle\ N \subset M\ /\ N' \subset M'$ такого, что $\operatorname{Im}(f) \subset N'\ \rangle$ через $\langle\ f|_N\ /\ f|^{N'}\ \rangle$ мы обозначаем $\langle$ ограничение f на N / коограничение f на N' $\rangle$, то есть $\langle\ f|_N : N \to M' : x \mapsto f(x)\ /\ f|^{N'} : M \to N' : x \mapsto f(x)\ \rangle$. Индикаторная функция подмножества N обозначается как χ_N, то есть $\chi_N(x) = 1$ для $x \in N$ и $\chi_N(x) = 0$ для $x \in M \setminus N$. Также мы будем активно использовать обозначение $\delta_x = \chi_{\{x\}}$, где $x \in M$. Через $\mathcal{P}(M)$ мы будем обозначать множество всех подмножеств M, а через $\mathcal{P}_0(M)$ — множество всех конечных подмножеств M. Символ M^N, как обычно, будет обозначать множество всех отображений из N в M. Мы будем писать $\operatorname{Card}(M)$ для обозначения мощности множества M. Через $\aleph_0$ мы будем обозначать мощность $\mathbb{N}$.

1.1 Банаховы пространства

Мы будем предполагать известными основные факты и конструкции функционального анализа, которые можно найти, например, в [40] или [41]. В этой работе мы также будем активно использовать результаты по геометрии банаховых пространств. Краткое введение можно найти в [42], [43] или [44]. Все банаховы пространства будут рассматриваться над полем комплексных чисел, если не оговорено иначе.

Пусть E — банахово пространство. Через $\langle\ B_E\ /\ B_E^\circ\ \rangle$ мы будем обозначать $\langle$ замкнутый / открытый $\rangle$ единичный шар пространства E с центром в нуле. Если S — подмножество E, то через $\mathrm{cl}_E(S)$ мы будем обозначать замыкание S в E. Если F — замкнутое подпространство в E, то E/F будет обозначать факторпространство E по F. Через E^{cc} мы обозначим комплексно-сопряженное банахово пространство, то есть банахово пространство с тем же множеством векторов, что и у E, тем же сложением, но новым умножением на комплексно-сопряженные скаляры: $\alpha\overline{x} := \overline{\overline{\alpha}x}$ для $\alpha \in \mathbb{C}$ и $x \in E$. Отметим, что элементы E^{cc} мы обозначаем через $\overline{x}$. Очевидно, $(E^{cc})^{cc} = E$.

Теперь зафиксируем два банаховых пространства E и F. Отображение $T : E \to F$ называется сопряженно-линейным, если соответствующее отображение $T : E^{cc} \to F$ линейно. Линейный оператор $T : E \to F$ называется:

(i) сжимающим, если его норма не превосходит 1;

(ii) компактным, если $T(B_E)$ относительно компактно в F;

(iii) ядерным, если он может быть представлен как ряд одномерных операторов, абсолютно сходящийся по операторной норме.

Через $\langle\ \mathcal{B}(E,F)\ /\ \mathcal{K}(E,F)\ /\ \mathcal{N}(E,F)\ \rangle$ мы обозначим банахово пространство $\langle$ ограниченных / компактных / ядерных $\rangle$ линейных операторов, действующих из E в F. Если $F = E$, мы будем использовать обозначение $\langle\ \mathcal{B}(E)\ /\ \mathcal{K}(E)\ /\ \mathcal{N}(E)\ \rangle$ для этого пространства. Нормы в $\mathcal{B}(E,F)$ и $\mathcal{K}(E,F)$ суть операторные нормы. Норма ядерного оператора T определяется равенством

$$\|T\| := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|S_n\| : T = \sum_{n=1}^{\infty}S_n, \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} - \text{ одномерные операторы}\right\}.$$

Пусть E, F и G — три банаховых пространства. Тогда билинейный оператор $\Phi : E\times F \to G$ называется ограниченным, если его норма $\|\Phi\| := \sup\{\|\Phi(x,y)\| : x \in B_E, y \in B_F\}$ конечна. Банахово пространство всех ограниченных билинейных операторов на $E \times F$ со значениями в G будем обозначать через $\mathcal{B}(E \times F,G)$.

Ограниченный линейный оператор $T : E \to F$ будем называть:

(i) топологически инъективным, если он осуществляет гомеоморфизм на свой образ;

(ii) топологически сюръективным, если является открытым отображением;

(iii) коизометрическим, если $T(B_E^\circ) = B_F^\circ$;

(iv) строго коизометрическим, если $T(B_E) = B_F$.

(v) c-топологически инъективным, если $\|x\| \leq c\|T(x)\|$ для всех $x \in E$;

(vi) c-топологически сюръективным, если $cT(B_E^\circ) \supset B_F^\circ$;

(vii) строго c-топологически сюръективным, если $cT(B_E) \supset B_F$;

Отметим, что T топологически $\langle$ инъективен / сюръективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он c-топологически $\langle$ инъективен / сюръективен $\rangle$ для некоторой константы $c > 0$. Очевидно, что $\langle$ коизометрические / строго коизометрические $\rangle$ операторы это в точности сжимающие $\langle$ 1-топологически сюръективные / строго 1-топологически сюръективные $\rangle$ операторы.

Два банаховых пространства E и F называются $\langle$ изометрически изоморфными / топологически изоморфными $\rangle$, если существует ограниченный линейный оператор $T : E \to F$, который является $\langle$ изометрическим и сюръективным / топологически инъективным и топологически сюръективным $\rangle$. Тот факт, что E и F являются $\langle$ изометрически изоморфными / топологически изоморфными $\rangle$, мы будем записывать как $\langle$ $E \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} F$ / $E \underset{\mathbf{Ban}}{\cong} F$ $\rangle$.

Еще один важный класс операторов — это класс ограниченных проекторов. Ограниченный линейный оператор $P : E \to E$ называется проектором, если $P^2 = P$. Если $F = P(E)$, то мы будем говорить, что P — это проектор E на F, и F дополняемо в E. Если $\|P\| \leq C$, то мы будем говорить, что F C-дополняемо в E. Другое эквивалентное определение говорит, что замкнутое подпространство F в E дополняемо, если существует замкнутое подпространство G в E такое, что $E \underset{\mathbf{Ban}}{\cong} F \bigoplus G$. Все конечномерные пространства дополняемы, но не обязательно 1-дополняемы. Пример 1-дополняемого подпространства таков: для заданного банахова пространства E, пространство E^* 1-дополняемо в E^{***} посредством проектора Диксмье $P = \iota_{E^*}(\iota_E)^*$, где ι_E обозначает естественное вложение E в свое второе сопряженное E^{**}. Самый известный пример недополняемого пространства был построен Филлипсом. Он доказал, что банахово пространство $c_0(\mathbb{N})$ недополняемо в $\ell_\infty(\mathbb{N})$ [45].

Теперь рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $E \otimes F$ банаховых пространств E и F. Это линейное пространство можно наделить различными нормами, но самая важная среди них — это проективная норма. Для заданного тензора $u \in E \otimes F$ мы определяем его проективную норму как

$$\|u\| := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, (x_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \subset E, (y_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \subset F \right\}.$$

Это действительно норма, но, вообще говоря, неполная. Символом $E \widehat{\otimes} F$ мы будем обозначать пополнение $E \otimes F$ по проективной норме. Получающееся пополнение мы будем называть проективным тензорным произведением банаховых пространств E и F. Пусть $T : E_1 \to E_2$ и $S : F_1 \to F_2$ — два ограниченных линейных оператора между банаховыми пространствами. Тогда существует единственный ограниченный линейный оператор $T \widehat{\otimes} S : E_1 \widehat{\otimes} F_1 \to E_2 \widehat{\otimes} F_2$ такой, что $(T \widehat{\otimes} S)(x \widehat{\otimes} y) = T(x) \widehat{\otimes} S(y)$ для всех $x \in E_1$ и $y \in F_1$. При этом $\|T \widehat{\otimes} S\| = \|T\| \|S\|$. Главное свойство проективного тензорного произведения, которое делает его таким важным, — это свойство универсальности: для любых банаховых пространств E, F и G существует изометрический изоморфизм:

$$\mathcal{B}(E \mathbin{\widehat{\otimes}} F, G) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{B}(E \times F, G).$$

Другими словами, проективное тензорное произведение линеаризует билинейные операторы. Также мы имеем следующие два изометрических изоморфизма:

$$\mathcal{B}(E \mathbin{\widehat{\otimes}} F, G) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{B}(E, \mathcal{B}(F, G)) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{B}(F, \mathcal{B}(E, G)).$$

На алгебраическом тензорном произведении банаховых пространств существует много норм. Их детальное рассмотрение можно найти в [46].

Теперь перейдем к рассмотрению различных банаховых пространств функций.

Важный источник примеров банаховых пространств — это L_p-пространства, также известные как пространства Лебега. Подробное обсуждение свойств L_p-пространств можно найти в [42]. Прежде чем давать определения отметим, что мы будем рассматривать класс пространств с мерой более широкий, чем можно было ожидать. Пространство с мерой (Ω, Σ, μ) называется строго локализуемым, если существует семейство измеримых множеств $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ конечной меры такое, что:

1. объединение $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ есть все пространство Ω;
2. множество E измеримо тогда и только тогда, когда $E \cap E_\lambda$ измеримо для всех $\lambda \in \Lambda$;
3. для любого измеримого множества E выполнено $\mu(E) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu(E \cap E_\lambda)$.

Класс строго локализуемых пространств с мерой огромен, он содержит все σ-конечные пространства с мерой, их произвольные объединения, меры Хаара локально компактных групп, считающие меры и многое другое. В дальнейшем мы будем рассматривать только строго локализуемые пространства с мерой и будем их просто называть пространствами с мерой. Итак, пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой. Множество E называется пренебрежимым [[47], определение 112D] если оно содержится в множестве меры 0. Будем говорить, что некоторое свойство выполняется почти всюду на Ω, если оно нарушается только на пренебрежимом множестве. Функции на измеримом пространстве считаются эквивалентными если они равны почти всюду. Для $1 \leq p < \infty$, как обычно, через $L_p(\Omega, \mu)$ будем обозначать банахово пространство классов эквивалентности функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$ таких, что $|f|^p$ интегрируема по Лебегу по мере μ. Норма такой функции определяется как

$$\|f\|_{L_p(\Omega, \mu)} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p}.$$

Через $L_\infty(\Omega,\mu)$ мы будем обозначать банахово пространство классов эквивалентности ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} := \inf\left\{\sup_{\omega\in\Omega\setminus N}|f(\omega)| : N\subset\Omega - \text{пренебрежимо}\right\}.$$

Мы позволим себе вольность речи и будем говорить о функциях в $L_p(\Omega,\mu)$, а не о классах эквивалентности. Все равенства и неравенства, касающиеся функций из L_p-пространств, будем считать выполненными почти всюду. Хорошо известно, что $L_p(\Omega,\mu)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_{p^*}(\Omega,\mu)$ для $1\leq p<+\infty$ [[47], теоремы 243G, 244K]. Еще один хорошо известный факт — это рефлексивность L_p-пространств для $1<p<+\infty$. Здесь мы использовали стандартное обозначение $p^*=+\infty$ для $p=1$ и $p^*=p/(p-1)$ для $1<p<+\infty$.

Самые известный класс банаховых пространств — это пространства непрерывных функций. Пусть L — локально компактное хаусдорфово пространство. Будем говорить, что функция $f:L\to\mathbb{C}$ исчезает на бесконечности, если для любого $\epsilon>0$ существует компакт $K\subset L$ такой, что $|f(t)|\leq\epsilon$ для всех $t\in L\setminus K$. Линейное пространство непрерывных на L функций исчезающих на бесконечности обозначается $C_0(L)$. Наделенное sup-нормой, $C_0(L)$ становится банаховым пространством. Любое множество Λ с дискретной топологией является локально компактным пространством и, следуя стандартному обозначению, мы будем писать $c_0(\Lambda)$ вместо $C_0(\Lambda)$. Если K — хаусдорфов компакт, то все функции на K исчезают на бесконечности, поэтому мы используем обозначение $C(K)$ для $C_0(K)$, чтобы подчеркнуть, что K компактно. Некоторые банаховы пространства являются $C(K)$-пространствами в "завуалированном" виде. Например, для заданного пространства с мерой (Ω,Σ,μ), пространство ограниченных измеримых функций $B(\Omega,\Sigma)$ с sup-нормой или $L_\infty(\Omega,\mu)$ являются $C(K)$-пространствами для некоторого компактного хаусдорфова пространства K [[43], замечание 4.2.8]. Если L — локально компактное хаусдорфово пространство, то через $M(L)$ обозначим банахово пространство комплексных конечных борелевских регулярных мер на L. Норма меры $\mu\in M(L)$ определяется равенством $\|\mu\|=|\mu|(L)$, где $|\mu|$ — вариация меры μ. По теореме Риса-Маркова-Какутани [[41], параграф C.18] мы имеем $C_0(L)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} M(L)$. На самом деле, $M(L)$ есть L_1-пространство [[48], обсуждение после предложения 2.14].

Следует упомянуть еще один важный подкласс L_p-пространств. Для заданного индексного множества Λ и считающей меры $\mu_c:\mathcal{P}(\Lambda)\to[0,+\infty]$ соответствующее L_p-пространство обозначается как $\ell_p(\Lambda)$. Для этого типа пространств с мерой имеется еще один важный для нас изоморфизм: $c_0(\Lambda)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$. Для удобства мы положим по определению, что $c_0(\varnothing)=\ell_p(\varnothing)=\{0\}$ для $1\leq p\leq+\infty$. Примеры таких L_p-пространств дают мотивировку для следующей конструкции.

Пусть $\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ — произвольное семейство банаховых пространств. Для каждого $x\in\prod_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ положим $\|x\|_p=\|(\|x_\lambda\|)_{\lambda\in\Lambda}\|_{\ell_p(\Lambda)}$ для $1\leq p\leq+\infty$ и $\|x\|_0=\|(\|x_\lambda\|)_{\lambda\in\Lambda}\|_{c_0(\Lambda)}$. Тогда банахово пространство $\left\{x\in\prod_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda:\|x\|_p<+\infty\right\}$ с нормой $\|\cdot\|_p$ мы будем обозначать как

$\bigoplus_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Будем называть такие пространства $\bigoplus_p$-суммами банаховых пространств $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Почти тавтологично утверждение, что $\ell_p(\Lambda)$ есть $\bigoplus_p$-сумма семейства $\{\mathbb{C} : \lambda \in \Lambda\}$. Важное свойство $\bigoplus_p$-сумм состоит в их связи с двойственностью:

$$\left(\bigoplus\nolimits_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_{p^*}\{{E_\lambda}^* : \lambda \in \Lambda\}$$

для $1 \leq p < +\infty$ и

$$\left(\bigoplus\nolimits_0\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1\{{E_\lambda}^* : \lambda \in \Lambda\}.$$

Если $\{T_\lambda \in \mathcal{B}(E_\lambda, F_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство ограниченных линейных операторов, то для любого $1 \leq p \leq +\infty$ или $p = 0$ корректно определен ограниченный линейный оператор

$$T : \bigoplus\nolimits_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \to \bigoplus\nolimits_p\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\} : x \mapsto \bigoplus\nolimits_p\{T_\lambda(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\},$$

который мы будем обозначать как $\bigoplus_p\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Его норма равна $\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\|$.

Теперь нам потребуется несколько определений из локальной теории банаховых пространств. Пусть E и F — два топологически изоморфных банаховых пространства. Тогда расстояние Банаха-Мазура между ними определяется по формуле $d_{BM}(E,F) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in \mathcal{B}(E,F)$ — топологический изоморфизм$\}$. Если E и F не топологически изоморфны, то расстояние Банаха-Мазура между ними по определению равно бесконечности. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство конечномерных банаховых пространств. Говорят, что банахово пространство E имеет $(\mathcal{F}, C)$-локальную структуру, если для каждого конечномерного подпространства F в E существует содержащее F конечномерное подпространство G в E такое, что $d_{BM}(G,H) \leq C$ для некоторого H из $\mathcal{F}$. Будем говорить, что E имеет $\mathcal{F}$-локальную структуру, если оно имеет $(\mathcal{F},C)$-локальную структуру для некоторого $C \geq 1$. Один из самых важных примеров такого типа — это так называемые $\mathscr{L}_p$-пространства. Впервые они были определены в новаторской работе [49] и стали незаменимым инструментом в локальной теории банаховых пространств. Для заданного $1 \leq p \leq +\infty$ мы будем говорить, что банахово пространство E является $\mathscr{L}_{p,C}$-пространством, если оно имеет $(\mathcal{F},C)$-локальную структуру для класса $\mathcal{F}$ конечномерных ℓ_p-пространств. Если банахово пространство E — $\mathscr{L}_{p,C}$-пространство для некоторого $C \geq 1$, то говорят, что E — это $\mathscr{L}_p$-пространство. Ясно, что любое конечномерное банахово пространство является $\mathscr{L}_p$-пространством для всех $1 \leq p \leq +\infty$. Любое L_p-пространство является $\mathscr{L}_p$-пространством [[50], теорема 3.2], но обратное неверно. В основном нас будут интересовать $\mathscr{L}_1$- и $\mathscr{L}_\infty$-пространства. Любое дополняемое подпространство $\langle$ $\mathscr{L}_1$-пространства / $\mathscr{L}_\infty$-пространства $\rangle$ снова является $\langle$ $\mathscr{L}_1$-пространством / $\mathscr{L}_\infty$-пространством $\rangle$ [[51], предложение 1.28]. Сопряженное к $\langle$ $\mathscr{L}_1$-пространству / $\mathscr{L}_\infty$-пространству $\rangle$ есть $\langle$ $\mathscr{L}_\infty$-пространство / $\mathscr{L}_1$-пространство $\rangle$ [[51], предложение 1.27]. Все $C(K)$-пространства являются $\mathscr{L}_\infty$-пространствами [[50], теорема 3.2]. Отметим, что для заданного локально компактного хаусдорфова пространства L банахово пространство $C_0(L)$

дополняемо в $C(\alpha L)$, где αL — александровская компактификация L. Следовательно, $C_0(L)$-пространства тоже являются $\mathscr{L}_\infty$-пространствами.

Впоследствии, подражая банаховым геометрам, мы будем говорить, что банахово пространство E содержит $\langle$ изометрическую копию / копию $\rangle$ банахова пространства F, если F $\langle$ изометрически изоморфно / топологически изоморфно $\rangle$ некоторому замкнутому подпространству в E.

1.2 Банаховы алгебры и их модули

Банахова алгебра A — это банахово пространство со структурой ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{C}$ и сжимающим билинейным оператором умножения $\cdot : A \times A \to A : (a,b) \mapsto ab$. Типичный пример коммутативной банаховой алгебры — это алгебра непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве с поточечным умножением. Типичный пример некоммутативной алгебры — алгебра ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве с композицией в качестве умножения. Оба примера принадлежат к важному классу C^*-алгебр, которые мы обсудим позже. Под $\langle$ левым / правым / двусторонним $\rangle$ идеалом I банаховой алгебры A мы всегда будем подразумевать замкнутую подалгебру A такую, что $\langle$ ax / xa / ax и xa $\rangle$ принадлежит I для всех $a \in A$ и $x \in I$.

Будем говорить, что элемент p банаховой алгебры A является $\langle$ левой / правой $\rangle$ единицей в A, если $\langle$ $pa = a$ / $ap = a$ $\rangle$ для всех $a \in A$. Элемент который является левой и правой единицей называется единицей и обозначается e_A. Мы не предполагаем, что наши банаховы алгебры унитальны, то есть обладают единицей. Даже если банахова алгебра A унитальна, мы не предполагаем, что ее единица имеет норму 1. Мы используем обозначение $A_+ = A \bigoplus_1 \mathbb{C}$ для стандартной унитизации банаховых алгебр. Умножение в A_+ определяется формулой $(a \oplus_1 z)(b \oplus_1 w) = (ab + wa + zb) \oplus_1 zw$, для $a,b \in A$ и $z,w \in \mathbb{C}$. Очевидно, $(0,1)$ есть единица в A_+. Через $A_\times$ мы будем обозначать условную унитизацию A, то есть $A_\times = A$, если A имеет единицу нормы 1 и $A_\times = A_+$ иначе. Даже в отсутствие единицы, в банаховой алгебре могут быть ее суррогаты называемые аппроксимативными единицами. Будем говорить, что направленность $(e_\nu)_{\nu \in N}$ в A есть $\langle$ левая / правая / двусторонняя $\rangle$ аппроксимативная единица, если $\langle$ $\lim_\nu e_\nu a = a$ / $\lim_\nu a e_\nu = a$ / $\lim_\nu e_\nu a = \lim_\nu a e_\nu = a$ $\rangle$ для всех $a \in A$. В этих определениях предполагается сходимость по норме. Если мы будем подразумевать сходимость в слабой топологии, то получим определение левой, правой и двусторонней слабой аппроксимативной единицы. Будем говорить, что аппроксимативная единица $(e_\nu)_{\nu \in N}$ $\langle$ ограниченная / сжимающая $\rangle$, если величина $\sup_\nu \|e_\nu\|$ $\langle$ конечна / не превосходит 1 $\rangle$. Иногда нам будет нужен следующий простой факт: если A — банахова алгебра с $\langle$ левой / правой $\rangle$ единицей p и $\langle$ правой / левой $\rangle$ аппроксимативной единицей $(e_\nu)_{\nu \in N}$, то A унитальна с единицей p нормы $\lim_\nu \|e_\nu\|$.

Для унитальной банаховой алгебры A спектр $\mathrm{sp}_A(a)$ элемента $a \in A$ есть множество комплексных чисел z таких, что $a - ze_A$ необратим в A. В банаховой алгебре спектр любого элемента не пуст и компактен в $\mathbb{C}$ [[52], следствие 2.1.16].

Характер банаховой алгебры A — это ненулевой гомоморфизм алгебр $\varkappa : A \to \mathbb{C}$. Все характеры непрерывны и содержатся в единичном шаре A^* [[52], теорема 1.2.6]. Следовательно, мы можем рассматривать множество характеров с индуцированной слабой* топологией. Получающееся топологическое пространство хаусдорфово и локально компактно. Оно называется спектром банаховой алгебры A и обозначается $\mathrm{Spec}(A)$. Если A унитальна, то ее спектр компактен [[52], теорема 1.2.50]. Для заданной банаховой алгебры A с непустым спектром мы можем построить сжимающий гомоморфизм $\Gamma_A : A \to C_0(\mathrm{Spec}(A)) : a \mapsto (\varkappa \mapsto \varkappa(a))$, называемый преобразованием Гельфанда алгебры A [[52], теорема 4.2.11]. Ядро этого гомоморфизма называется радикалом Джекобсона и обозначается $\mathrm{Rad}(A)$. Для банаховой алгебры A с пустым спектром мы полагаем по определению $\mathrm{Rad}(A) = A$. Если $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$, то A называется полупростой. По теореме Шилова об идемпотентах [[53], глава 3.5] любая полупростая банахова алгебра с компактным спектром унитальна.

Большинство стандартных конструкций для банаховых пространств имеют свои аналоги для банаховых алгебр. Например, $\bigoplus_p$-суммы банаховых алгебр с покоординатным умножением являются банаховыми алгебрами, фактор банаховой алгебры по двустороннему идеалу есть банахова алгебра. Даже проективное тензорное произведение двух банаховых алгебр является банаховой алгеброй, если определить умножение на элементарных тензорах так же, как и в чистой алгебре.

Перейдем к обсуждению наиболее важного класса банаховых алгебр. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{C}$, тогда сопряженно-линейный оператор $^* : A \to A$ называется инволюцией, если $(ab)^* = b^*a^*$ и $a^{**} = a$ для всех $a,b \in A$. Алгебры с инволюцией называются *-алгебрами. Гомоморфизмы *-алгебр, сохраняющие инволюцию, называются *-гомоморфизмами. Банахова алгебра с изометрической инволюцией называется *-банаховой алгеброй. Пример такой банаховой алгебры — это алгебра ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве с операцией взятия гильбертова сопряженного оператора в роли инволюции. Будем говорить, что *-банахова алгебра A есть C^*-алгебра, если для всех $a \in A$ выполнено равенство $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Главное достоинство C^*-алгебр — это их известные теоремы представления, доказанные Гельфандом и Наймарком. Первая теорема представления [[52], теорема 4.7.13] утверждает, что любая коммутативная C^*-алгебра A изометрически изоморфна как *-алгебра алгебре $C_0(\mathrm{Spec}(A))$. Вторая теорема [[52], теорема 4.7.57] дает описание произвольных C^*-алгебр как замкнутых *-банаховых подалгебр в $\mathcal{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H. Таких представлений может быть много, но норма (если она существует), которая превращает *-алгебру в C^*-алгебру, всегда единственна. Если *-подалгебра в $\mathcal{B}(H)$ слабо* замкнута, то она называется алгеброй фон Ноймана. Если C^*-алгебра изоморфна как *-алгебра алгебре фон Ноймана, то она называется W^*-алгеброй. По известной теореме Сакаи [[54], теорема III.2.4.2] каждая C^*-алгебра, являющаяся сопряженным банаховым пространством, есть W^*-алгебра. Стоит отметить, что W^*-алгебра может быть представлена как не слабо* замкнутая *-подалгебра в $\mathcal{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H.

Многие стандартные конструкции переносятся с банаховых алгебр на C^*-алгебры, но не все. Например, $\bigoplus_\infty$-сумма C^*-алгебр есть C^*-алгебра. Фактор C^*-алгебры по замкнутому двустороннему идеалу есть C^*-алгебра. В то же время проективное тензорное произведение C^*-алгебр редко имеет структуру C^*-алгебры, но существует много других способов наделить алгебраическое тензорное произведение таких алгебр структурой C^*-алгебры.

Теперь перечислим несколько фактов о единицах и аппроксимативных единицах C^*-алгебр и их идеалов. Всякий замкнутый двусторонний идеал C^*-алгебры имеет двустороннюю сжимающую положительную аппроксимативную единицу [[52], теорема 4.7.79], и любой левый идеал имеет правую сжимающую положительную аппроксимативную единицу. В некоторых случаях нам не будет достаточно даже аппроксимативной единицы, и для этого случая существует процедура наделения C^*-алгебры единицей, сохраняющая структуру C^*-алгебры [[52], предложение 4.7.6]. Этот тип унитизации мы будем обозначать как $A_\#$. До конца абзаца мы будем предполагать, что A — унитальная C^*-алгебра. Элемент $a \in A$ называется проектором (или ортогональным проектором), если $a = a^* = a^2$; самосопряженным, если $a = a^*$; положительным, если $a = b^*b$ для некоторого $b \in A$; унитарным, если $a^*a = aa^* = e_A$. Множество A_{pos} всех положительных элементов в A есть замкнутый конус в A. Если элемент $a \in A$ $\langle$ самосопряженный / положительный $\rangle$, то $\langle$ $\operatorname{sp}_A(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$ / $\operatorname{sp}_A(a) \subset [0,\|a\|]$ $\rangle$. Для самосопряженного элемента $a \in A$, всегда существует единственный *-гомоморфизм $\operatorname{Cont}_a : C(\operatorname{sp}_A(a)) \to A$ такой, что $\operatorname{Cont}_a(f) = a$, где $f : \operatorname{sp}_A(a) \to \mathbb{C} : t \mapsto t$. Он называется непрерывным функциональным исчислением [[52], теорема 4.7.24]. Проще говоря, он позволяет брать непрерывные функции от самосопряженных элементов C^*-алгебр, поэтому мы используем стандартное обозначение $f(a)$ вместо $\operatorname{Cont}_a(f)$. Другой тесно связанный результат называется теоремой об отображении спектра и позволяет вычислять спектр элементов полученных с помощью непрерывного функционального исчисления: $\operatorname{sp}_A(f(a)) = f(\operatorname{sp}_A(a))$.

Наконец, мы переходим к обсуждению более общих объектов — банаховых модулей. Пусть A — банахова алгебра. Будем говорить, что X — $\langle$ левый / правый $\rangle$ банахов A-модуль, если X — это банахово пространство с билинейным оператором $\langle \cdot : A \times X \to X \,/\, \cdot : X \times A \to X \rangle$ нормы не более 1 (называемым внешним умножением) таким, что $\langle a\cdot(b\cdot x) = ab\cdot x \,/\, (x\cdot a)\cdot b = x\cdot ab \rangle$ для всех $a,b \in A$ и $x \in X$. Любое банахово пространство E можно наделить структурой $\langle$ левого / правого $\rangle$ банахова A-модуля, положив по определению $\langle a \cdot x = 0 \,/\, x \cdot a = 0 \rangle$ для всех $a \in A$ и $x \in E$. Любую банахову алгебру A можно рассматривать как левый и правый банахов A-модуль — внешнее умножение совпадает с умножением в алгебре. Конечно, есть и более содержательные примеры, которые мы встретим позже. Обычно мы будем обсуждать левые модули, потому что для их правых "собратьев" большинство определений и результатов аналогичны. Левый банахов модуль X над унитальной банаховой алгеброй A называется унитальным, если $e_A \cdot x = x$ для всех $x \in X$. Для заданного левого банахова A-модуля X и подмножеств $S \subset A$, $M \subset X$ мы определим произведения $S \cdot M = \{a \cdot x : a \in S, x \in M\}$, $SM = \operatorname{span}(S \cdot M)$ и аннуляторы $S^{\perp M} = \{a \in S : a \cdot M = \{0\}\}$, ${}^{\perp S}M = \{x \in M : S \cdot x = \{0\}\}$. Существенная и аннуляторная часть X определяются как $X_{ess} = \operatorname{cl}_X(AX)$ и $X_{ann} = {}^{\perp A}X$, соответственно. Модуль X называется $\langle$ верным / аннуляторным / существенным $\rangle$, если $\langle$ $A^{\perp X} = \{0\}$ / $X = X_{ann}$ / $X = X_{ess}$ $\rangle$. Простое применение теоремы Хана-Банаха показывает, что X — существенный A-модуль тогда и только тогда, когда X^* — верный A-модуль.

Пусть X и Y — два $\langle$ левых / правых $\rangle$ банаховых A-модуля. Линейный оператор $\phi : X \to Y$ называется морфизмом $\langle$ левых / правых $\rangle$ A-модулей, если $\langle$ $\phi(a \cdot x) = a \cdot \phi(x)$ / $\phi(x \cdot a) = \phi(x) \cdot a$ $\rangle$ для всех $a \in A$ и $x \in X$. Ограниченный морфизм A-модулей называется A-морфизмом. Множество A-морфизмов между $\langle$ левыми / правыми $\rangle$ A-модулями X и Y обозначается как $\langle$ ${}_A\mathcal{B}(X,Y)$ / $\mathcal{B}_A(X,Y)$ $\rangle$. Если X и Y являются $\langle$ левыми / правыми $\rangle$ аннуляторными A-модулями, то $\langle$ ${}_A\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{B}(X,Y)$ / $\mathcal{B}_A(X,Y) = \mathcal{B}(X,Y)$ $\rangle$.

Произвольный A-морфизм $\xi : X \to Y$ будем называть $\langle$ C-ретракцией / C-коретракцией $\rangle$ если существует A-морфизм $\eta : Y \to X$ такой, что $\langle$ $\xi\eta = 1_Y$ / $\eta\xi = 1_X$ $\rangle$ и $\|\xi\|\|\eta\| \leq C$. Непосредственно из определения следует, что композиция $\langle$ C_1- и C_2-ретракции / C_1- и C_2-коретракции $\rangle$ есть $\langle$ C_1C_2-ретракция / C_1C_2-коретракция $\rangle$. Очевидно, A-морфизм сопряженный к $\langle$ C-ретракции / C-коретракции $\rangle$ является $\langle$ C-коретракцией / C-ретракцией $\rangle$.

Упомянем несколько конструкций над банаховыми модулями, которые в дальнейшем нам пригодятся. Любой левый банахов A-модуль можно рассматривать как унитальный банахов A_+-модуль, просто положив по определению $(a \oplus_1 z) \cdot x = a \cdot x + zx$ для всех $a \in A$, $x \in X$ и $z \in \mathbb{C}$. Линейное подпространство Y левого банахова A-модуля X называется левым A-подмодулем в X если $A \cdot Y \subset Y$. Например, любой левый идеал I банаховой алгебры A есть левый A-подмодуль в A. Если Y — замкнутый левый A-подмодуль в X, то банахово пространство X/Y имеет структуру левого A-модуля с внешним умножением $a \cdot (x + Y) = a \cdot x + Y$ для всех $a \in A$ и $x + Y \in X/Y$. Такой объект называется фактор A-модулем. Фактормодули вида A/I, где I — левый идеал в A, называются циклическими. Мотивировку такого названия можно найти в [[52], предложение 6.2.2]. Очевидно, X/X_{ess} — аннуляторный A-модуль. Если $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство левых банаховых A-модулей и $1 \leq p \leq +\infty$ или $p = 0$, то их $\bigoplus_p$-сумма есть левый банахов A-модуль с внешним умножением определенным равенством $a \cdot x = \bigoplus_p \{a \cdot x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, где $a \in A$, $x \in \bigoplus_p \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Если X — левый банахов A-модуль и E — банахово пространство, то $\langle$ $\mathcal{B}(X,E)$ / $\mathcal{B}(E,X)$ $\rangle$ есть $\langle$ правый / левый $\rangle$ банахов A-модуль с внешним умножением определенным равенством $\langle$ $(T \cdot a)(x) = T(a \cdot x)$ для всех $a \in A$, $x \in X$ и $T \in \mathcal{B}(X, E)$ / $(a \cdot T)(x) = a \cdot T(x)$ для всех $a \in A$, $x \in E$ и $T \in \mathcal{B}(E, X)$ $\rangle$. В частности, X^* — правый банахов A-модуль.

Проективное тензорное произведение банаховых пространств имеет свою модульную версию, которая называется проективным модульным тензорным произведением. Допустим X — правый, а Y — левый банахов A-модуль. Их проективное модульное тензорное произведение $X \widehat{\otimes}_A Y$ определяется как факторпространство $X \widehat{\otimes} Y / N$, где $N = \operatorname{cl}_{X \widehat{\otimes} Y}(\operatorname{span}\{x \cdot a \widehat{\otimes} y - x \widehat{\otimes} a \cdot y : x \in X, y \in Y, a \in A\})$. Пусть $\phi \in \mathcal{B}_A(X_1,X_2)$ и $\psi \in {}_A\mathcal{B}(Y_1,Y_2)$ где X_1, X_2 — правые банаховы A-

модули, а Y_1, Y_2 — левые банаховы A-модули. Тогда существует единственный ограниченный линейный оператор $\phi \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \psi : X_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_A} Y_1 \to X_2 \mathbin{\widehat{\otimes}_A} Y_2$ такой, что $(\phi \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \psi)(x \mathbin{\widehat{\otimes}_A} y) = \phi(x) \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \psi(y)$ для всех $x \in X_1$ и $y \in Y_1$. При этом $\|\phi \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \psi\| \leq \|\phi\|\|\psi\|$. Проективное модульное тензорное произведение имеет свое свойство универсальности: для любого правого банахова A-модуля X, любого левого банахова A-модуля Y и любого банахова пространства E существует изометрический изоморфизм:

$$\mathcal{B}(X \mathbin{\widehat{\otimes}_A} Y,E) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{B}_{bal}(X \times Y, E),$$

где $\mathcal{B}_{bal}(X \times Y, E)$ обозначает банахово пространство билинейных сбалансированных операторов $\Phi : X \times Y \to E$, то есть билинейных операторов со свойством $\Phi(x \cdot a,y) = \Phi(x,a \cdot y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$ и $a \in A$. Более того, имеются два изометрических изоморфизма:

$$\mathcal{B}(X \mathbin{\widehat{\otimes}_A} Y,E) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} {}_A\mathcal{B}(Y,\mathcal{B}(X,E)) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{B}_A(X,\mathcal{B}(Y,E)).$$

Детальное обсуждение банаховых алгебр и банаховых модулей можно найти в [52], [55] или [56].

1.3 Относительная гомология и оснащенные категории

Теперь нам нужно напомнить некоторые факты из теории категорий и договориться об обозначениях. Мы будем считать известными такие понятия теории категорий как категория, функтор, морфизм. Краткое введение в теорию категорий можно найти в [[40], глава 0] или [[57], глава 1].

Для заданной категории $\mathbf{C}$ через $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ мы будем обозначать класс ее объектов. Символ $\mathbf{C}^o$ обозначает противоположную категорию. Для объектов X и Y категории $\mathbf{C}$ через $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ мы будем обозначать множество морфизмов из X в Y. Часто мы будем писать $\phi : X \to Y$ вместо $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$. Морфизм $\phi : X \to Y$ называется $\langle$ ретракцией / коретракцией $\rangle$, если он имеет $\langle$ правый / левый $\rangle$ обратный морфизм. Морфизм ϕ называется изоморфизмом, если он одновременно ретракция и коретракция. Наличие изоморфизма между X и Y мы будем записывать так: $X \underset{\mathbf{C}}{\cong} Y$. Будем говорить, что морфизмы $\phi : X_1 \to Y_1$ и $\psi : X_2 \to Y_2$ эквивалентны в $\mathbf{C}$ если существуют изоморфизмы $\alpha : X_1 \to X_2$ и $\beta : Y_1 \to Y_2$ такие, что $\beta\phi = \psi\alpha$.

Приведем несколько примеров категорий важных для нас. Первая из них, конечно, категория всех множеств и всех отображений между ними. Мы обозначим ее **Set**. Через **Ban** мы обозначим категорию банаховых пространств и ограниченных линейных операторов в роли морфизмов, а через $\mathbf{Ban}_1$ мы обозначим категорию банаховых пространств с сжимающими линейными операторами в роли морфизмов. Как следствие, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(E,F)$ есть ничто иное как $\mathcal{B}(E,F)$. Символом $\langle$ $A - \mathbf{mod}$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$ мы будем обозначать категорию $\langle$ левых /

правых $\rangle$ A-модулей с непрерывными A-модульными операторами в роли морфизмов. Через $\langle$ $A-\mathbf{mod}_1$ / $\mathbf{mod}_1-A$ $\rangle$ мы будем обозначать подкатегорию $\langle$ $A-\mathbf{mod}$ / $\mathbf{mod}-A$ $\rangle$ с теми же объектами и лишь сжимающими морфизмами. Таким образом, $\langle$ $\mathrm{Hom}_{A-\mathbf{mod}}(X,Y) = {}_A\mathcal{B}(X,Y)$ / $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}-A}(X,Y) = \mathcal{B}_A(X,Y)$ $\rangle$.

Перейдем к обсуждению функторов. Два важных примера функторов, которые есть в каждой категории — это функторы морфизмов. Для заданного объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ можно определить ковариантный и контравариантный функторы

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set} : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y), \phi \mapsto (\psi \mapsto \phi \circ \psi),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set} : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X), \phi \mapsto (\psi \mapsto \psi \circ \phi).$$

Пусть E — банахово пространство. Нам часто будут встречаться следующие функторы:

$$\mathcal{B}(-,E) : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Ban}, \qquad \mathcal{B}(E,-) : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Ban},$$

$$- \mathbin{\widehat{\otimes}} E : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Ban}, \qquad E \mathbin{\widehat{\otimes}} - : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Ban}.$$

В случае категорий модулей это будут функторы:

$$\mathcal{B}(-,E) : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{mod} - A, \qquad \mathcal{B}(E,-) : \mathbf{mod} - A \to \mathbf{mod} - A,$$

$$- \mathbin{\widehat{\otimes}}_A Y : \mathbf{mod} - A \to \mathbf{Ban}, \qquad X \mathbin{\widehat{\otimes}}_A - : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ban},$$

где E — банахово пространство, X — правый A-модуль и Y — левый A-модуль. Все вышеупомянутые функторы имеют очевидные аналоги для категорий $\mathbf{Ban}_1$, $A-\mathbf{mod}_1$, $\mathbf{mod}_1-A$. Наконец, отметим, что хорошо известный функтор двойственности * есть ничто иное, как $\mathcal{B}(-,\mathbb{C})$.

Два ковариантных функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называются изоморфными, если существует класс изоморфизмов $\{\eta_X : X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})\}$ в $\mathbf{D}$ таких, что $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$ для всех $f : X \to Y$. В этом случае мы будем просто писать $F \cong G$. Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ — $\langle$ ковариантный / контравариантный $\rangle$ функтор, тогда F называется представимым объектом X, если $\langle$ $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$ / $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X)$ $\rangle$. Если функтор представим, то его представляющий объект единственный с точностью до изоморфизма в $\mathbf{C}$.

Важнейшую роль для нас будут играть конструкции категорного произведения и копроизведения. Объект X называется $\langle$ произведением / копроизведением $\rangle$ семейства объектов $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, если функтор $\langle$ $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X_\lambda) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ / $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_\lambda,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ $\rangle$ представим объектом X. Как следствие, $\langle$ произведение / копроизведение $\rangle$, если оно существует, единственно с точностью до изоморфизма. В таких категориях функционального анализа как $\mathbf{Ban}_1$, $A-\mathbf{mod}_1$ или $\mathbf{mod}_1-A$ любое семейство объектов имеет $\langle$ произведение / копроизведение $\rangle$, и оно совпадает с $\langle$ $\bigoplus_1$-суммой / $\bigoplus_\infty$-суммой $\rangle$ этого семейства. Аналогичное утверждение верно для категорий **Ban**, $A-\mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod}-A$, если ограничиться конечными семействами объектов [[40], глава 2, параграф 5].

Далее мы кратко обсудим основы банаховой гомологии, созданной и активно изучаемой Хелемским и его школой. Зафиксируем произвольную банахову алгебру A. Будем говорить, что морфизм $\xi : X \to Y$ левых A-модулей X и Y есть относительно допустимый эпиморфизм, если он имеет правый обратный ограниченный линейный оператор. Левый A-модуль P называется относительно проективным, если для любого относительно допустимого эпиморфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна. Такой A-морфизм ψ называется подъемом морфизма ϕ и, вообще говоря, он не единственный. Аналогично, будем говорить, что морфизм $\xi : Y \to X$ правых A-модулей X и Y есть относительно допустимый мономорфизм, если он имеет левый обратный ограниченный линейный оператор. Правый A-модуль J называется относительно инъективным, если для любого относительно допустимого мономорфизма $\xi : Y \to X$ и любого A-морфизма $\phi : Y \to J$ существует A-морфизм $\psi : X \to J$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\ J & Y \arrow[l, "\phi"] \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Такой A-морфизм ψ называется продолжением ϕ и, вообще говоря, он не единственный.

Причина рассмотрения относительно допустимых морфизмов в этих определениях состоит в попытке отделить банахово-геометрические и алгебраические причины, по которым A-модуль может не быть относительно проективным или инъективным. Прямая проверка показывает, что ретракт относительно $\langle$ проективного / инъективного $\rangle$ A-модуля снова относительно $\langle$ проективен / инъективен $\rangle$. Очевидно, любой относительно допустимый $\langle$ эпиморфизм на относительно проективный A-модуль / мономорфизм из относительно инъективного A-модуля $\rangle$ есть $\langle$ ретракция / коретракция $\rangle$.

Специальный класс относительно $\langle$ проективных / инъективных $\rangle$ A-модулей — это так называемые относительно $\langle$ свободные / косвободные $\rangle$ модули. Они имеют вид $\langle$ $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ / $\mathcal{B}(A_+,E)$ $\rangle$ для некоторого банахова пространства E. Главное свойство таких модулей состоит в том, что для любого A-модуля X существует относительно $\langle$ свободный / косвободный $\rangle$ A-модуль F и относительно допустимый $\langle$ эпиморфизм $\xi : F \to X$ / мономорфизм $\xi : X \to F$ $\rangle$. Если X относительно $\langle$ проективен / инъективен $\rangle$, то мы немедленно заключаем, что морфизм ξ есть $\langle$ ретракция / коретракция $\rangle$. Таким образом, A-модуль относительно

$\langle$ проективен / инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он является ретрактом относительно $\langle$ свободного / косвободного $\rangle$ A-модуля.

Утверждения предыдущего абзаца имеют свои аналоги для многих других типов проективности и инъективности в других категориях математики [58]. Более того, легко заметить, что проективность и инъективность, в некотором смысле, двойственны друг другу. Все эти наблюдения наводят на мысль, что существует общекатегорный подход к изучению свойств гомологически тривиальных объектов. Такой подход был предложен Хелемским в [11]. Как мы увидим, этот подход описывает относительную проективность и инъективность, а вышеупомянутые свойства являются простыми следствиями общих результатов.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две фиксированные категории. Упорядоченная пара $(\mathbf{C}, \square : \mathbf{C} \to \mathbf{D})$, где $\square$ — верный ковариантный функтор, называется оснащенной категорией. Морфизм ξ в $\mathbf{C}$ называется $\square$-допустимым эпиморфизмом если $\square(\xi)$ — ретракция в $\mathbf{D}$. Объект P в $\mathbf{C}$ называется $\square$-проективным, если для каждого $\square$-допустимого эпиморфизма ξ в $\mathbf{C}$ отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P,\xi)$ сюръективно. Объект F в $\mathbf{C}$ называется $\square$-свободным с базой M в $\mathbf{D}$, если существует изоморфизм функторов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(M,\square(-)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(F,-)$. Оснащенная категория $(\mathbf{C},\square)$ называется свободолюбивой [[11], определение 2.10], если каждый объект в $\mathbf{D}$ является базой некоторого $\square$-свободного объекта из $\mathbf{C}$. Резюме предложений 2.3, 2.11 и 2.12 из [11] выглядит следующим образом:

(i) любой ретракт $\square$-проективного объекта $\square$-проективен;

(ii) любой $\square$-допустимый эпиморфизм в $\square$-проективный объект есть ретракция;

(iii) любой $\square$-свободный объект $\square$-проективен;

(iv) если $(\mathbf{C},\square)$ — свободолюбивая оснащенная категория, то любой объект $\square$-проективен тогда и только тогда, когда он есть ретракт $\square$-свободного объекта;

(v) копроизведение семейства $\square$-проективных объектов $\square$-проективно.

Противоположной к оснащенной категории $(\mathbf{C}, \square)$ будем называть оснащенную категорию $(\mathbf{C}^o,\square^o : \mathbf{C}^o \to \mathbf{D}^o)$. Тогда, переходя к противоположной категории, мы можем определить допустимые мономорфизмы, инъективность и косвободу. Морфизм ξ называется $\square$-допустимым мономорфизмом, если он $\square^o$-допустимый эпиморфизм. Объект J из $\mathbf{C}$ называется $\square$-инъективным, если он $\square^o$-проективен. Наконец, объект F из $\mathbf{C}$ называется $\square$-косвободным, если он $\square^o$-свободный. Следовательно, для инъективности и косвободы мы можем сформулировать результаты аналогичные тем, что были для проективности и свободы.

Теперь рассмотрим верный функтор $\square_{rel} : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ban}$, который просто “забывает” модульную структуру. Легко видеть, что $(A - \mathbf{mod},\square_{rel})$ — оснащенная категория, у которой $\square_{rel}$-допустимые $\langle$ эпиморфизмы / мономорфизмы $\rangle$ в точности относительно допустимые $\langle$ эпиморфизмы / мономорфизмы $\rangle$ и $\langle$ $\square_{rel}$-проективные / $\square_{rel}$-инъективные $\rangle$ объекты в точности относительно $\langle$ проективные / инъективные $\rangle$ A-модули. Более того, можно показать, что все $\langle$ $\square_{rel}$-свободные / $\square_{rel}$-косвободные $\rangle$ объекты изоморфны в $A - \mathbf{mod}$ модулям вида $\langle$ $A_+ \widehat{\otimes} E$ / $\mathcal{B}(A_+, E)$ $\rangle$ для некоторого банахова пространства E. Этот пример показывает, что относительная теория прекрасно вписывается в схему оснащенных категорий.

В этой работе мы применим данную схему к метрической и топологической теории гомологически тривиальных модулей. В этих теориях накладываются значительно более слабые ограничения на допустимые морфизмы. Поговорка “много хочешь — мало получишь” отлично поясняет, что произойдет в следующих главах.

Глава 2

Общая теория

2.1 Проективность, инъективность и плоскость

2.1.1 Метрическая и топологическая проективность

В дальнейшем A обозначает необязательно унитальную банахову алгебру. Мы сразу же приступим к формулировке, пожалуй, двух самых важных определений в этой работе.

Определение 2.1.1 ([11], определение 1.4)**.** *A-модуль P называется метрически проективным, если для любого строго коизометрического A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$ такой, что $\xi\psi = \phi$ и $\|\psi\| = \|\phi\|$.*

Определение 2.1.2 ([11], определение 1.2)**.** *A-модуль P называется топологически проективным, если для любого топологически сюръективного A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$ такой, что $\xi\psi = \phi$.*

Эквивалентные и более короткие определения звучат так: A-модуль P называется $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективным, если функтор $\langle$ $\operatorname{Hom}_{A-\mathbf{mod}_1}(P,-) : A-\mathbf{mod}_1 \to \mathbf{Ban}_1$ / $\operatorname{Hom}_{A-\mathbf{mod}}(P,-) : A-\mathbf{mod} \to \mathbf{Ban}$ $\rangle$ переводит $\langle$ строго коизометрические / топологически сюръективные $\rangle$ A-морфизмы в $\langle$ строго коизометрические / сюръективные $\rangle$ операторы.

Теперь мы нацелены применить аппарат оснащенных категорий к метрической и топологической проективности. Прежде чем это сделать, нам нужно описать категории так называемых полунормированных пространств определенных Штейнером в [59]. Полулинейное пространство над полем $\mathbb{C}$ это множество E, элементы которого называются векторами, с бинарной операцией $\cdot : \mathbb{C} \times E \to E$, удовлетворяющей трем аксиомам:

(i) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha\beta \cdot x$ для всех $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ и $x \in E$;

(ii) $1 \cdot x = x$ для всех $x \in E$;

(iii) существует нулевой вектор $0 \in E$ такой, что $0 \cdot x = 0$ для всех $x \in E$.

Отображение $T : E \to F$ между полулинейными пространствами называется полулинейным оператором, если $T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и $x \in E$. Полунормированное пространство E — это полулинейное пространство вместе с функцией $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}_+$ (называемой нормой) такой, что

(i) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(ii) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и $x \in E$.

Полулинейный оператор $T : E \to F$ между полунормированными пространствами E и F называется ограниченным, если существует константа $C \geq 0$ такая, что $\|\phi(x)\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in E$. Наименьшая такая константа называется нормой ϕ и обозначается как $\|\phi\|$. Наконец, мы определим категорию полунормированных пространств **HNor**: ее объекты — полунормированные пространства, ее морфизмы — полулинейные операторы. На самом деле, полунормированные пространства и ограниченные полулинейные операторы это то, что останется от нормированных пространств и ограниченных линейных операторов, если убрать из их определений все упоминания операции сложения векторов. Вот типичный пример полунормированного пространства. Для заданного непустого множества Λ рассмотрим букет $\mathbb{C}^\Lambda := \bigvee\{\mathbb{C} : \lambda \in \Lambda\}$ копий $\mathbb{C}$ с общим нулевым вектором. Умножение на скаляры и норма в $\mathbb{C}^\Lambda$ определяются очевидным образом. Также положим по определению $\mathbb{C}^\varnothing = \{0\}$. Любое полунормированное пространство изоморфно в **HNor** пространству $\mathbb{C}^\Lambda$ для некоторого множества Λ [[59], предложение 1.1.9].

В [11] и [59] были построены два верных функтора:

$$\Box_{met} : A - \mathbf{mod}_1 \to \mathbf{Set} : X \mapsto B_X, \phi \mapsto \phi|_{B_X}^{B_Y},$$

$$\Box_{top} : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{HNor} : X \mapsto X, \phi \mapsto \phi.$$

Первый из них отправляет банахов A-модуль в его единичный шар, а всякий сжимающий A-морфизм в соответствующее биограничение. Второй функтор “забывает” о модульной и аддитивной структуре. В тех же статьях было доказано, что, во-первых, A-морфизм ξ $\langle$ строго коизометричен / топологически сюръективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\Box_{met}$-допустимый / $\Box_{top}$-допустимый $\rangle$ эпиморфизм и, во-вторых, A-модуль P является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективным тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\Box_{met}$-проективен / $\Box_{top}$-проективен $\rangle$. Таким образом, мы немедленно получаем следующее предложение.

Предложение 2.1.3. *Всякий ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного модуля в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ снова $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен.*

Также было доказано, что оснащенная категория $\langle$ $(A - \mathbf{mod}_1, \Box_{met})$ / $(A - \mathbf{mod}, \Box_{top})$ $\rangle$ свободолюбива, и что $\langle$ $\Box_{met}$-свободные / $\Box_{top}$-свободные $\rangle$ модули изоморфны в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ модулям вида $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ. Более того, для любого

A-модуля X существует $\langle$ $\square_{met}$-допустимый / $\square_{top}$-допустимый $\rangle$ эпиморфизм

$$\pi_X^+ : A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_X) : a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto a \cdot x.$$

Как следствие общих результатов об оснащенных категориях мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.1.4. *A-модуль P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда π_P^+ — ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$.*

Так как $\langle$ $\square_{met}$-свободные / $\square_{top}$-свободные $\rangle$ модули совпадают с точностью до изоморфизма в $A - \mathbf{mod}$ и всякая ретракция в $A - \mathbf{mod}_1$ есть ретракция в $A - \mathbf{mod}$, то из предложения 2.1.3 мы видим, что любой метрически проективный A-модуль топологически проективен. Напомним, что каждый относительно проективный модуль есть ретракт в $A - \mathbf{mod}$ модуля вида $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ для некоторого банахова пространства E. Следовательно, каждый топологически проективный A-модуль будет относительно проективным. Мы резюмируем эти результаты в следующем предложении.

Предложение 2.1.5. *Каждый метрически проективный модуль топологически проективен, и каждый топологически проективный модуль относительно проективен.*

Количественный аналог определения топологической проективности был дан Уайтом.

Определение 2.1.6 ([33], определение 2.4)**.** *A-модуль P называется C-топологически проективным, если для любого строго c-топологически сюръективного A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$ такой, что $\xi\psi = \phi$ и $\|\psi\| \leq cC\|\phi\|$.*

Нам понадобятся следующие два факта об этом типе проективности.

Предложение 2.1.7 ([33], лемма 2.7)**.** *Всякий C_1-ретракт C_2-топологически проективного модуля является C_1C_2-топологически проективным.*

Предложение 2.1.8 ([33], предложение 2.10)**.** *A-модуль P является C-топологически проективным тогда и только тогда, когда π_P^+ — C-ретракция в $A - \mathbf{mod}$.*

Как следствие, банахов модуль топологически проективен тогда и только тогда, когда он C-топологически проективен для некоторого C. Далее мы будем использовать определения 2.1.2 и 2.1.6 без ссылки на их эквивалентность.

Теперь перейдем к обсуждению примеров. Заметим, что категория банаховых пространств может рассматриваться как категория левых банаховых модулей над нулевой алгеброй. Как следствие, мы получаем определение $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного банахова пространства. Все результаты полученные выше верны для этого типа проективности. Оба типа проективных банаховых пространств уже описаны. В [9] Кёте доказал, что все топологически проективные банаховы пространства топологически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ. Используя результат Гротендика из [8], Хелемский показал, что метрически проективные банаховы пространства изометрически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого индексного множества Λ [[11], предложение 3.2].

Предложение 2.1.9. *A-модуль $A_\times$ метрически и топологически проективен.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный A-морфизм $\phi : A_\times \to Y$ и строго коизометрический A-морфизм $\xi : X \to Y$. Из определения строго коизометрического оператора следует, что существует $x_0 \in X$ такой, что $\xi(x_0) = \phi(e_{A_\times})$ и $\|x_0\| = \|\phi(e_{A_\times})\|$. Рассмотрим A-морфизм $\psi : A_\times \to X : a \mapsto a \cdot x_0$. Очевидно, $\|\psi\| \leq \|x_0\| \leq \|\phi\|\|e_{A_\times}\| = \|\phi\|$. С другой стороны, $\xi\psi = \phi$, так что $\|\phi\| \leq \|\xi\|\|\psi\| = \|\psi\|$. Следовательно, $\|\phi\| = \|\psi\|$. Итак, мы доказали по определению, что $A_\times$ — метрически проективный A-модуль. По предложению 2.1.5 он также топологически проективен. $\square$

Предложение 2.1.10. *Пусть P — существенный A-модуль. Тогда P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда отображение $\pi_P : A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) : a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto a \cdot x$ есть $\langle$ 1-ретракция / C-ретракция $\rangle$ в $A - \mathbf{mod}$.*

Доказательство. Если P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен, то по предложению $\langle$ 2.1.4 / 2.1.8 $\rangle$ морфизм π_P^+ имеет правый обратный морфизм σ^+ с нормой $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Тогда

$$\sigma^+(P) = \sigma^+(\mathrm{cl}_{A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)}(AP)) \subset \mathrm{cl}_{A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)}(A \cdot \sigma(P))$$

$$= \mathrm{cl}_{A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)}(A \cdot (A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P))) = A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P).$$

Поэтому корректно определено коограничение $\sigma : P \to A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P)$, которое также есть A-морфизм с нормой $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Ясно, что $\pi_P \sigma = 1_P$, поэтому π_P является $\langle$ 1-ретракцией / C-ретракцией $\rangle$ в $A - \mathbf{mod}$.

Обратно, допустим π_P имеет правый обратный морфизм σ с нормой $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Тогда его копродолжение σ^+ также является правым обратным морфизмом к π_P^+ с той же нормой. Снова, по предложению $\langle$ 2.1.4 / 2.1.8 $\rangle$ модуль P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен. $\square$

Следует напомнить, что $\langle$ произвольное / лишь конечное $\rangle$ семейство объектов в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ обладает категорным копроизведением, которое на самом деле есть их $\bigoplus_1$-сумма. В этом и состоит причина почему мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.1.11. *Пусть $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда* *(i)* *A-модуль $\bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически проективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль P_λ метрически проективен;*

(ii) *A-модуль $\bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ C-топологически проективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль P_λ C-топологически проективен.*

Доказательство. Обозначим $P := \bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

(i) Доказательство аналогично доказательству из пункта (ii).

(ii) Допустим, что P C-топологически проективен. Заметим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ модуль P_λ является 1-ретрактом P посредством канонической проекции $p_\lambda : P \to P_\lambda$. По предложению 2.1.7 модуль P_λ C-топологически проективен.

Обратно, допустим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ модуль P_λ C-топологически проективен. По предложению 2.1.8 мы имеем семейство C-ретракций $\pi_\lambda : A_+ \widehat{\otimes}\, \ell_1(S_\lambda) \to P_\lambda$. Следовательно, $\bigoplus_1\{\pi^+_{P_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ является C-ретракцией в $A - \mathbf{mod}$. Значит, P есть C-ретракт

$$\bigoplus\nolimits_1 \left\{A_+ \widehat{\otimes}\, \ell_1(S_\lambda) : \lambda \in \Lambda\right\} \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1 \left\{\bigoplus\nolimits_1 \{A_+ : s \in S_\lambda\} : \lambda \in \Lambda\right\} \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1 \{A_+ : s \in S\}$$

в $A - \mathbf{mod}$, где $S = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$. Ясно, что последний модуль 1-топологически проективен, поэтому из предложения 2.1.7 следует, что A-модуль P C-топологически проективен. $\square$

Следствие 2.1.12. *Пусть P — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $P \widehat{\otimes}\, \ell_1(\Lambda)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен.*

Доказательство. Заметим, что $P \widehat{\otimes}\, \ell_1(\Lambda) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus_1\{P : \lambda \in \Lambda\}$. Теперь достаточно применить предложение 2.1.11 с $P_\lambda = P$ для всех $\lambda \in \Lambda$. $\square$

2.1.2 Метрическая и топологическая проективность идеалов и циклических модулей

Как мы вскоре увидим, идемпотенты играют основную роль в изучении метрической и топологической проективности. Поэтому нам следует напомнить одно из следствий теоремы Шилова об идемпотентах [[53], параграф 3.5]: каждая полупростая коммутативная банахова алгебра с компактным спектром имеет единицу, но не обязательно нормы 1.

Предложение 2.1.13. *Пусть I — левый идеал банаховой алгебры A. Тогда*

(i) *если $I = Ap$ для некоторого $\langle$ идемпотента $p \in I$ нормы 1 / идемпотента $p \in I$ $\rangle$, то I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль;*

(ii) *если I — коммутативная полупростая алгебра и $\operatorname{Spec}(I)$ компактен, то I топологически проективен как A-модуль.*

Доказательство. (i) Очевидно, что A-модульные операторы $\pi : A_\times \to I : x \mapsto xp$ и $\sigma : I \to A_\times : x \mapsto x$ $\langle$ сжимающие / ограниченные $\rangle$ и $\pi\sigma = 1_I$. Тогда I есть ретракт $A_\times$ в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Теперь результат следует из предложений 2.1.3 и 2.1.9.

(ii) По теореме Шилова об идемпотентах идеал I унитален. Вообще говоря, норма его единицы не меньше 1. Из пункта (i) следует, что идеал I топологически проективен. □

Предположение полупростоты в 2.1.13 не обязательно. В [[60], упражнение 2.3.7] дан пример коммутативной унитальной банаховой алгебры A, которая не является полупростой. По предложению 2.1.13 она топологически проективна как A-модуль. Чтобы доказать главный результат этого параграфа нам нужны две подготовительные леммы.

Лемма 2.1.14. *Пусть I — двусторонний идеал банаховой алгебры A, существенный как левый I-модуль и пусть задан A-морфизм $\phi : I \to A$. Тогда* $\operatorname{Im}(\phi) \subset I$.

Доказательство. Так как I — правый идеал, то $\phi(ab) = a\phi(b) \in I$ для всех $a,b \in I$. Поэтому $\phi(I \cdot I) \subset I$. Так как I — существенный левый I-модуль, то $I = \operatorname{cl}_A(\operatorname{span}(I \cdot I))$ и $\operatorname{Im}(\phi) \subset \operatorname{cl}_A(\operatorname{span}\phi(I \cdot I)) = \operatorname{cl}_A(\operatorname{span} I) = I$. □

Лемма 2.1.15. *Пусть I — левый идеал банаховой алгебры A. Допустим, выполнено одно из следующих условий:*

$(*)$ I имеет левую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу, и для любого морфизма $\phi : I \to A$ левых A-модулей найдется морфизм $\psi : I \to I$ правых I-модулей со свойством $\phi(x)y = x\psi(y)$ для всех $x,y \in I$.

$(**)$ I имеет правую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу, и существует $\langle$ $C = 1$ / $C \geq 1$ $\rangle$ такое, что для любого морфизма $\phi : I \to A$ левых A-модулей найдется морфизм $\psi : I \to I$ правых I-модулей со свойствами $\|\psi\| \leq C\|\phi\|$ и $\phi(x)y = x\psi(y)$ для всех $x,y \in I$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль;

(ii) I обладает $\langle$ правой единицей нормы 1 / правой единицей $\rangle$.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Если выполнено $(*)$ или $(**)$, то I обладает односторонней аппроксимативной единицей. Следовательно, I — существенный левый I-модуль и тем более существенный A-модуль. По предложению 2.1.10, существует правый обратный A-морфизм $\sigma : I \to A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I)$ к π_I в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Для каждого $d \in B_I$ рассмотрим A-морфизм $p_d : A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I) \to A : a \widehat{\otimes} \delta_x \mapsto \delta_x(d)a$ и $\sigma_d = p_d\sigma$. Тогда $\sigma(x) = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) \widehat{\otimes} \delta_d$ для всех $x \in I$. Из отождествления $A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_1 \{A : d \in B_I\}$ мы имеем $\|\sigma(x)\| = \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(x)\|$ для всех $x \in I$. Так как σ — правый обратный морфизм к π_I то $x = \pi_I(\sigma(x)) = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x)d$ для всех $x \in I$.

Предположим, выполнено условие $(*)$. Тогда для каждого $d \in B_I$ существует морфизм правых I-модулей $\tau_d : I \to I$ такой, что $\sigma_d(x)d = x\tau_d(d)$ для всех $x \in I$. Пусть $(e_\nu)_{\nu \in N}$ — левая $\langle$ сжимающая / ограниченная $\rangle$ аппроксимативная единица в I ограниченная по норме константой D. Поскольку $\tau_d(d) \in I$ для всех $d \in B_I$, то для любого множества $S \in \mathcal{P}_0(B_I)$ выполнено

$$\sum_{d \in S} \|\tau_d(d)\| = \sum_{d \in S} \lim_\nu \|e_\nu \tau_d(d)\| = \lim_\nu \sum_{d \in S} \|e_\nu \tau_d(d)\| = \lim_\nu \sum_{d \in S} \|\sigma_d(e_\nu) d\|$$

$$\leq \liminf_\nu \sum_{d \in S} \|\sigma_d(e_\nu)\| \|d\| \leq \liminf_\nu \sum_{d \in S} \|\sigma_d(e_\nu)\| \leq \liminf_\nu \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(e_\nu)\|$$

$$= \liminf_\nu \|\sigma(e_\nu)\| \leq \|\sigma\| \liminf_\nu \|e_\nu\| \leq D\|\sigma\|.$$

Теперь предположим что, выполнено условие $(**)$. Из предположения, для каждого $d \in B_I$ существует морфизм правых I-модулей $\tau_d : I \to I$ такой, что $\sigma_d(x)d = x\tau_d(d)$ для всех $x \in I$ и $\|\tau_d\| \leq C\|\sigma_d\|$. Пусть $(e_\nu)_{\nu \in N}$ — правая $\langle$ сжимающая / ограниченная $\rangle$ аппроксимативная единица в I ограниченная по норме некоторой константой D. Для всех $x \in I$ выполнено

$$\|\sigma_d(x)\| = \|\sigma_d(\lim_\nu x e_\nu)\| = \lim_\nu \|x \sigma_d(e_\nu)\| \leq \|x\| \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|,$$

поэтому $\|\sigma_d\| \leq \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|$. Тогда для всех $S \in \mathcal{P}_0(B_I)$ выполнено

$$\sum_{d \in S} \|\tau_d(d)\| \leq \sum_{d \in S} \|\tau_d\| \|d\| \leq C \sum_{d \in S} \|\sigma_d\| \leq C \sum_{d \in S} \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\| \leq C \liminf_\nu \sum_{d \in S} \|\sigma_d(e_\nu)\|$$

$$\leq C \liminf_\nu \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(e_\nu)\| = C \liminf_\nu \|\sigma(e_\nu)\| \leq C\|\sigma\| \liminf_\nu \|e_\nu\| \leq CD\|\sigma\|.$$

Для обоих предположений $(*)$ и $(**)$ мы доказали, что число $\sum_{d \in S} \|\tau_d(d)\|$ ограничено $\langle$ единицей / некоторой константой $\rangle$ для любого $S \in \mathcal{P}_0(B_I)$. Следовательно, существует $p = \sum_{d \in B_I} \tau_d(d) \in I$ со свойством $\langle$ $\|p\| \leq 1$ / $\|p\| < \infty$ $\rangle$. Более того, для всех $x \in I$ выполнено $x = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x)d = \sum_{d \in B_I} x\tau_d(d) = xp$, то есть p — правая единица в I.

$(ii) \implies (i)$ Пусть $p \in I$ — правая единица для I, тогда $I = Ap$. Теперь из предложения 2.1.13 мы получаем, что идеал I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль. □

Условие $(*)$ предыдущей леммы будет использовано в следующей теореме. Что касается условия $(**)$, оно будет использовано значительно позже.

Теорема 2.1.16. *Пусть I — идеал коммутативной банаховой алгебры A и I имеет $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль тогда и только тогда, когда I имеет $\langle$ единицу нормы 1 / единицу $\rangle$.*

Доказательство. Поскольку A коммутативна, то для любого A-морфизма $\phi : I \to A$ и любых $x,y \in I$ выполнено $\phi(x)y = x\phi(y)$. Так как I имеет ограниченную аппроксимативную единицу и I коммутативен, то мы можем применить лемму 2.1.14, чтобы заключить $\phi(y) \in I$. Теперь выполнено условие $(*)$ леммы 2.1.15, и мы получаем желаемую равносильность. $\square$

В относительной теории нет аналогичного критерия проективности идеалов. Наиболее общий результат такого типа дает лишь необходимое условие: если идеал I коммутативной банаховой алгебры A относительно проективен как A-модуль, то I имеет паракомпактный спектр. Этот результат получен Хелемским [[55], теорема IV.3.6].

Отметим, что существование ограниченной аппроксимативной единицы не является необходимым условием для топологической проективности идеала коммутативной банаховой алгебры. Действительно, рассмотрим банахову алгебру $A_0(\mathbb{D})$ — идеал алгебры на диске состоящий из функций исчезающих в нуле. Комбинируя предложения 4.3.5 и 4.3.13 параграф (iii) из [56] мы заключаем, что $A_0(\mathbb{D})$ не имеет ограниченных аппроксимативных единиц. С другой стороны, из [[52], пример IV.2.2] мы знаем, что $A_0(\mathbb{D}) \underset{A_0(\mathbb{D})-\mathbf{mod}}{\cong} A_0(\mathbb{D})_+$, поэтому согласно предложению 2.1.9, $A_0(\mathbb{D})$ — топологически проективный $A_0(\mathbb{D})$-модуль.

Следующее предложение является очевидной модификацией описания алгебраически проективных циклических модулей. Оно схоже с [[33], предложение 2.11].

Предложение 2.1.17. *Пусть I — левый идеал в $A_\times$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A-модуль $A_\times / I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен $\langle$ и естественное фактор-отображение $\pi : A_\times \to A_\times / I$ является строгой коизометрией / $\rangle$;

(ii) существует идемпотент $p \in I$ такой, что $I = A_\times p$ $\langle$ и $\|e_{A_\times} - p\| = 1$ / $\rangle$

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Поскольку отображение π $\langle$ строго коизометрично / топологически сюръективно $\rangle$ и модуль $A_\times / I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен, то π имеет правый обратный морфизм σ, который $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$. Положим, $e_{A_\times} - p = (\sigma\pi)(e_{A_\times})$, тогда $(\sigma\pi)(a) = a(e_{A_\times} - p)$. По построению, $\pi\sigma = 1_{A_\times}$, поэтому

$$e_{A_\times} - p = (\sigma\pi)(e_{A_\times}) = (\sigma\pi)(\sigma\pi)(e_{A_\times}) = (\sigma\pi)(e_{A_\times} - p) = (e_{A_\times} - p)(\sigma\pi)(e_{A_\times}) = (e_{A_\times} - p)^2.$$

Откуда следует, что $p^2 = p$. Значит, $A_\times p = \operatorname{Ker}(\sigma\pi)$ так как $(\sigma\pi)(a) = a - ap$. Поскольку σ инъективен, мы получаем $A_\times p = \operatorname{Ker}(\pi) = I$. Наконец, заметим, что $\|e_{A_\times} - p\| = \|(\sigma\pi)(e_{A_\times})\| \leq \|\sigma\|\|\pi\|\|e_{A_\times}\| = \|\sigma\|$.

$(ii) \implies (i)$ Пусть $p^2 = p$, рассмотрим левый идеал $I = A_\times p$ и морфизм A-модулей $\sigma : A_\times / I \to A_\times : a + I \mapsto a - ap$. Легко проверить, что $\pi\sigma = 1_{A_\times / I}$ и $\|\sigma\| \leq \|e_{A_\times} - p\|$. Это означает, что $\pi : A_\times \to A_\times / I$ — ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ и, в частности, $\langle$ строго коизометрический / топологически сюръективный $\rangle$ оператор. Теперь из предложений 2.1.9 и 2.1.3 следует, что A-модуль $A_\times / I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. $\square$

В отличие от топологической теории, в относительной теории нет полного описания относительно проективных циклических модулей. Есть частичные ответы при дополнительных предположениях. Например, если идеал I дополняем в $A_\times$ как банахово пространство, то в относительной теории имеет место почти такой же критерий [[52], предложение 7.1.29]. Существуют другие описания относительно проективных циклических модулей при менее ограничительных требованиях на банахову геометрию. Например, Селиванов доказал, что если I — двусторонний идеал и либо A/I имеет свойство аппроксимации либо все неприводимые A-модули имеют свойство аппроксимации, то A/I относительно проективен тогда и только тогда, когда $A_\times \underset{A-\mathbf{mod}}{\cong} I \bigoplus_1 I'$ для некоторого левого идеала I' в A. Подробности можно найти в [[55], глава IV, §4].

2.1.3 Метрическая и топологическая инъективность

В этом параграфе, если не оговорено иначе, мы будем считать все модули правыми.

Определение 2.1.18 ([11], определение 4.3)**.** *A-модуль J называется метрически инъективным, если для любого изометрического A-морфизма $\xi : Y \to X$ и любого A-морфизма $\phi : Y \to J$ существует A-морфизм $\psi : X \to J$ такой, что $\psi\xi = \phi$ и $\|\psi\| = \|\phi\|$.*

Определение 2.1.19 ([11], определение 4.3)**.** *A-модуль J называется топологически инъективным, если для любого топологически инъективного A-морфизма $\xi : Y \to X$ и любого A-морфизма $\phi : Y \to J$ существует A-морфизм $\psi : X \to J$ такой, что $\psi\xi = \phi$.*

Эквивалентные и более короткие определения звучат так: A-модуль J называется $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным, если функтор $\langle$ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}_1-A}(-,J) : \mathbf{mod}_1 - A \to \mathbf{Ban}_1$ / $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}-A}(-,J) : \mathbf{mod} - A \to \mathbf{Ban}$ $\rangle$ переводит $\langle$ изометрические / топологически инъективные $\rangle$ A-морфизмы в $\langle$ строго коизометрические / сюръективные $\rangle$ операторы.

В [11] и [59] были построены два верных функтора:

$$\square^d_{met} : \mathbf{mod}_1 - A \to \mathbf{Set} : X \mapsto B_{X^*}, \phi \mapsto \phi^*|^{B_{X^*}}_{B_{Y^*}},$$

$$\square^d_{top} : \mathbf{mod} - A \to \mathbf{HNor} : X \mapsto X^*, \phi \mapsto \phi^*.$$

Первый из них отправляет банахов A-модуль в единичный шар своего сопряженного пространства, а всякий сжимающий A-морфизм в соответствующее биограничение своего сопряженного. Второй функтор “забывает” о модульной и аддитивной структуре сопряженного пространства и сопряженного A-морфизма. В тех же статьях было доказано, что, во-первых, A-морфизм ξ $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\square^d_{met}$-допустимый / $\square^d_{top}$-допустимый $\rangle$ мономорфизм и, во-вторых, A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\square^d_{met}$-инъективен / $\square^d_{top}$-инъективен $\rangle$. Таким образом, мы немедленно получаем следующее утверждение.

Предложение 2.1.20. *Всякий ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного модуля в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$ снова $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

Также было доказано, что оснащенная категория $\langle$ $(\mathbf{mod}_1 - A, \square^d_{met})$ / $(\mathbf{mod} - A, \square^d_{top})$ $\rangle$ косовободолюбива, и что $\langle$ $\square^d_{met}$-косвободные / $\square^d_{top}$-косвободные $\rangle$ модули изоморфны в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$ модулям вида $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda))$ для некоторого множества Λ. Более того, для любого A-модуля X существует $\langle$ $\square^d_{met}$-допустимый / $\square^d_{top}$-допустимый $\rangle$ мономорфизм

$$\rho^+_X : X \to \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{X^*})) : x \mapsto (a \mapsto (f \mapsto f(x \cdot a))).$$

Как следствие общих результатов об оснащенных категориях мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.1.21. *A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда ρ^+_J — коретракция в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$.*

Так как $\langle$ $\square^d_{met}$-косвободные / $\square^d_{top}$-косвободные $\rangle$ модули совпадают с точностью до изоморфизма в $\mathbf{mod} - A$ и всякая ретракция в $\mathbf{mod}_1 - A$ есть ретракция в $\mathbf{mod} - A$, то из предложения 2.1.20 мы видим, что любой метрически инъективный A-модуль топологически инъективен. Напомним, что каждый относительно инъективный модуль есть ретракт в $\mathbf{mod} - A$ модуля вида $\mathcal{B}(A_+, E)$ для некоторого банахова пространства E. Следовательно, каждый топологически инъективный A-модуль будет относительно инъективным. Мы резюмируем эти результаты в следующем предложении.

Предложение 2.1.22. *Каждый метрически инъективный модуль топологически инъективен, и каждый топологически инъективный модуль относительно инъективен.*

Количественный аналог определения топологической инъективности был дан Уайтом.

Определение 2.1.23 ([33], определение 3.4)**.** *A-модуль J называется C-топологически инъективным, если для любого c-топологически инъективного A-морфизма $\xi : Y \to X$ и любого A-морфизма $\phi : Y \to J$ существует A-морфизм $\psi : X \to J$ такой, что $\psi\xi = \phi$ и $\|\psi\| \leq cC\|\phi\|$.*

Нам понадобятся следующие два факта об этом типе инъективности.

Предложение 2.1.24 ([33], лемма 3.7)**.** *Всякий C_1-ретракт C_2-топологически инъективного модуля является C_1C_2-топологически инъективным.*

Предложение 2.1.25 ([33], предложение 3.10)**.** *A-модуль J является C-топологически инъективным тогда и только тогда, когда ρ^+_J — C-коретракция в $\mathbf{mod} - A$.*

Как следствие, банахов модуль топологически инъективен тогда и только тогда, когда он C-топологически инъективен для некоторого C. Далее мы будем использовать определения 2.1.19 и 2.1.23 без ссылки на их эквивалентность.

Теперь перейдем к обсуждению примеров. Заметим, что категория банаховых пространств может рассматриваться как категория правых банаховых модулей над нулевой алгеброй. Как следствие, мы получаем определение $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного банахова пространства. Все результаты, полученные выше, верны для этого типа инъективности. Эквивалентное определение говорит, что банахово пространство $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективно, если оно $\langle$ 1-дополняемо / дополняемо $\rangle$ в любом объемлющем банаховом пространстве. Стандартный пример метрически инъективного банахова пространства это L_∞-пространство. На данный момент полностью описаны только метрически инъективные банаховы пространства — эти пространства изометрически изоморфны $C(K)$-пространствам для некоторого экстремально несвязного компактного хаусдорфова пространства K [[61], теорема 3.11.6]. Обычно такие топологические пространства называются стоуновыми. Самые последние достижения в изучении топологически инъективных банаховых пространств можно найти в [[62], глава 40].

Предложение 2.1.26. *A-модуль $A_\times^*$ метрически и топологически инъективен.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный A-морфизм $\phi : Y \to A_\times^*$ и изометрический A-морфизм $\xi : Y \to X$. Определим ограниченный линейный функционал $f : Y \to \mathbb{C} : y \mapsto \phi(y)(e_{A_\times})$. Так как ξ — изометрия, то по теореме Хана-Банаха мы может продолжить f до некоторого ограниченного линейного функционала $g : X \to \mathbb{C}$ с той же самой нормой, что у f. Рассмотрим A-морфизм $\psi : X \to A_\times^* : x \mapsto (a \mapsto g(x \cdot a))$. Очевидно, $\|\psi\| \leq \|g\| = \|f\| \leq \|\phi\|$. С другой стороны $\psi\xi = \phi$, поэтому $\|\phi\| \leq \|\psi\|\|\xi\| = \|\psi\|$. Таким образом, $\|\phi\| = \|\psi\|$. Итак, мы доказали по определению, что $A_\times^*$ — метрически инъективный A-модуль. По предложению 2.1.22 он также топологически инъективен. □

Предложение 2.1.27. *Пусть J — верный A-модуль. Тогда J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда отображение $\rho_J : J \to \mathcal{B}(A,\ell_\infty(B_{J^*})) : x \mapsto (a \mapsto (f \mapsto f(x \cdot a)))$ есть $\langle$ 1-коретракция / C-коретракция $\rangle$ в $\mathbf{mod} - A$.*

Доказательство. Если J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен, то по предложению $\langle$ 2.1.21 / 2.1.25 $\rangle$ A-морфизм ρ_J^+ имеет правый обратный морфизм τ^+ с нормой $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Допустим нам задан оператор $T \in \mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_{J^*}))$ такой, что $T|_A = 0$. Зафиксируем $a \in A$, тогда $T \cdot a = 0$, и поэтому $\tau^+(T) \cdot a = \tau^+(T \cdot a) = 0$. Поскольку J — верный модуль и $a \in A$ произвольно, то $\tau^+(T) = 0$. Рассмотрим естественную проекцию $p : A_+ \to A$ и определим A-морфизм $j = \mathcal{B}(p,\ell_\infty(B_{J^*}))$ и ограниченный линейный оператор $\tau = \tau^+ j$. Для любого $a \in A$ и $T \in \mathcal{B}(A,\ell_\infty(B_{J^*}))$ мы имеем $\tau(T \cdot a) - \tau(T) \cdot a = \tau^+(j(T \cdot a) - j(T) \cdot a) = 0$, потому что $j(T \cdot a) - j(T) \cdot a|_A = 0$. Значит τ — A-морфизм. Заметим, что $\|\tau\| \leq \|\tau^+\|\|j\| \leq \|\tau^+\|$. Следовательно, τ имеет норму $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Очевидно, для всех $x \in J$ выполнено $\rho_J^+(x) - j(\rho_J(x))|_A = 0$, поэтому

$\tau^+(\rho_J^+(x) - j(\rho_J(x))) = 0$. Как следствие, $\tau(\rho_J(x)) = \tau^+(j(\rho_J(x))) = \tau^+(\rho_J^+(x)) = x$ для всех $x \in J$. Так как $\tau\rho_J = 1_J$, то ρ_J — $\langle$ 1-коретракция / C-коретракция $\rangle$ в $\mathbf{mod} - A$.

Обратно, допустим ρ_J — $\langle$ 1-коретракция / C-коретракция $\rangle$ в $\mathbf{mod} - A$, то есть ρ_J имеет правый обратный морфизм τ с нормой $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Рассмотрим естественное вложение $i : A \to A_+$ и определим A-морфизм $q = \mathcal{B}(i,\ell_\infty(B_{J^*}))$. Очевидно, $\rho_J = q\rho_J^+$. Рассмотрим A-морфизм $\tau^+ = \tau q$. Заметим, что $\|\tau^+\| \leq \|\tau\|\|q\| \leq \|\tau\|$. Следовательно, τ^+ имеет норму $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Очевидно, $\tau^+\rho_J^+ = \tau q\rho_J^+ = \tau\rho_J = 1_J$. Поэтому ρ_J^+ — $\langle$ 1-коретракция / C-коретракция $\rangle$ в $\mathbf{mod} - A$ и тогда по предложению $\langle$ 2.1.21 / 2.1.25 $\rangle$ банахов A-модуль J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен. □

Следует напомнить, что $\langle$ произвольное / лишь конечное $\rangle$ семейство объектов в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$ обладает категорным произведением, которое на самом деле есть их $\bigoplus_\infty$-сумма. В этом и состоит причина почему мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.1.28. *Пусть $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда*

- *(i) A-модуль $\bigoplus_\infty\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически инъективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль J_λ метрически инъективен;*
- *(ii) A-модуль $\bigoplus_\infty\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ C-топологически инъективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль J_λ C-топологически инъективен.*

Доказательство. Обозначим $J := \bigoplus_\infty\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

(i) Доказательство аналогично доказательству из пункта (ii).

(ii) Допустим, что J C-топологически инъективен. Заметим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ модуль J_λ является 1-ретрактом J посредством канонической проекции $p_\lambda : J \to J_\lambda$. По предложению 2.1.24 модуль J_λ C-топологически инъективен.

Обратно, допустим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ модуль J_λ C-топологически инъективен. По предложению 2.1.25 мы имеем семейство C-коретракций $\rho_\lambda : J_\lambda \to \mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(S_\lambda))$. Следовательно, $\bigoplus_\infty\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ является C-коретракцией в $A - \mathbf{mod}$. Значит, J есть C-ретракт

$$\bigoplus_\infty\{\mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(S_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\} \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \bigoplus_\infty\left\{\bigoplus_\infty\{A_+^* : s \in S_\lambda\} : \lambda \in \Lambda\right\} \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong}$$

$$\bigoplus_\infty\{A_+^* : s \in S\} \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(S))$$

в $\mathbf{mod} - A$, где $S = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$. Ясно, что последний модуль 1-топологически инъективен, поэтому из предложения 2.1.24 следует, что A-модуль J C-топологически инъективен. □

Следствие 2.1.29. *Пусть J — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\bigoplus_\infty\{J : \lambda \in \Lambda\}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предложение 2.1.28 с $J_\lambda = J$ для всех $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Предложение 2.1.30. *Пусть J — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

Доказательство. Допустим, A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим сжимающие A-морфизмы $i_\lambda : J \to \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) : x \mapsto (f \mapsto f(\lambda)x)$ и $p_\lambda : \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) \to J : T \mapsto T(\delta_\lambda)$. Очевидно, $p_\lambda i_\lambda = 1_J$, то есть J есть ретракт $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Из предложения 2.1.20 следует, что A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.

Обратно, поскольку J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен, то по предложению 2.1.21 морфизм ρ_J^+ является коретракцией в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Применим функтор $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), -)$ к этой коретракции, чтобы получить другую коретракцию $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \rho_J^+)$. Заметим, что

$$\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \left(\ell_1(\Lambda) \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})\right)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda \times B_{J^*})^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}),$$

поэтому существует изометрический изоморфизм банаховых модулей:

$$\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*})).$$

Значит $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ — ретракт $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}))$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$, то есть ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного A-модуля. По предложению 2.1.20 A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. $\square$

2.1.4 Метрическая и топологическая плоскость

Чтобы сохранить единый стиль обозначений мы будем называть метрически плоскими A-модули статьи [35], где они были названы экстремально плоскими.

Определение 2.1.31 ([35], I)**.** *A-модуль F называется метрически плоским, если для каждого изометрического A-морфизма $\xi : X \to Y$ правых A-модулей оператор $\xi \mathbin{\widehat{\otimes}}_A 1_F : X \mathbin{\widehat{\otimes}}_A F \to Y \mathbin{\widehat{\otimes}}_A F$ изометричен.*

Определение 2.1.32 ([35], определение I)**.** *A-модуль F называется топологически плоским, если для каждого топологически инъективного A-морфизма $\xi : X \to Y$ правых A-модулей оператор $\xi \mathbin{\widehat{\otimes}}_A 1_F : X \mathbin{\widehat{\otimes}}_A F \to Y \mathbin{\widehat{\otimes}}_A F$ топологически инъективен.*

Эквивалентные и более короткие определения звучат так: A-модуль J называется $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоским, если функтор $\langle$ $- \mathbin{\widehat{\otimes}}_A F : A - \mathbf{mod}_1 \to \mathbf{Ban}_1$ /

$- \widehat{\otimes}_A F : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ban} \rangle$ переводит $\langle$ изометрические / топологически инъективные $\rangle$ A-морфизмы в $\langle$ изометрические / топологически инъективные $\rangle$ операторы.

Снова рассмотрим категорию банаховых пространств как категорию левых банаховых модулей над нулевой алгеброй, тогда мы получим определения $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоского банахова пространства. Из работы Гротендика [8] следует, что любое метрически плоское банахово пространство изометрически изоморфно $L_1(\Omega,\mu)$ для некоторого пространства с мерой (Ω,Σ,μ). Для топологически плоских банаховых пространств, в отличие от топологически инъективных, мы также имеем критерий [[10], теорема V.1]: банахово пространство топологически плоское тогда и только тогда, когда оно является $\mathscr{L}_1$-пространством.

Хорошо известно, что A-модуль F относительно плоский тогда и только тогда, когда F^* относительно инъективный [[52], теорема 7.1.42]. Следующее предложение есть очевидный аналог данного результата.

Предложение 2.1.33. *A-модуль F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский тогда и только тогда, когда F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный $\langle$ изометрический / топологически инъективный $\rangle$ морфизм правых A-модулей, скажем, $\xi : X \to Y$. Оператор $\xi \widehat{\otimes}_A 1_F$ $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор $(\xi \widehat{\otimes}_A 1_F)^*$ $\langle$ строго коизометричен / топологически сюръективен $\rangle$ [[40], упражнения 4.4.6, 4.4.7]. Так как операторы $(\xi \widehat{\otimes}_A 1_F)^*$ и $\mathcal{B}_A(\xi,F^*)$ эквивалентны в $\mathbf{Ban}_1$ посредством универсального свойства модульного проективного тензорного произведения, то $\xi \widehat{\otimes}_A 1_F$ $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_A(\xi,F^*)$ $\langle$ строго коизометричен / топологически сюръективен $\rangle$. Поскольку морфизм ξ произволен, мы видим, что F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский тогда и только тогда, когда F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный.
□

Комбинируя предложение 2.1.33 с предложениями 2.1.20 и 2.1.22, мы получаем следующие два факта.

Предложение 2.1.34. *Всякий ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоского модуля в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ снова $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский.*

Предложение 2.1.35. *Каждый метрически плоский модуль топологический плоский, и каждый топологически плоский модуль относительно плоский.*

Количественный аналог определения топологической плоскости был дан Уайтом. Его определение содержало ошибку, к счастью, не повлиявшую на основные результаты. Мы берем на себя ответственность исправить эту ошибку.

Определение 2.1.36 ([33], определение 4.8)**.** *A-модуль F называется C-топологически плоским, если для каждого c-топологически инъективного A-морфизма $\xi : X \to Y$ правых A-модулей оператор $\xi \widehat{\otimes}_A 1_F : X \widehat{\otimes}_A F \to Y \widehat{\otimes}_A F$ cC-топологически инъективен.*

Ключевым для нас будет следующий факт.

Предложение 2.1.37 ([33], лемма 4.10). *A-модуль F является C-топологически плоским тогда и только тогда, когда F^* C-топологически инъективен.*

Как следствие, банахов модуль топологически плоский тогда и только тогда, когда он C-топологически плоский для некоторого C. Далее мы будем использовать определения 2.1.32 и 2.1.36 без ссылки на их эквивалентность. Из предложений 2.1.37 и 2.1.24 мы получаем еще одно полезное предложение.

Предложение 2.1.38. *Всякий C_1-ретракт C_2-топологически плоского модуля является C_1C_2-топологически плоским.*

Предложение 2.1.39. *Пусть P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный A-модуль, и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\mathcal{B}(P,\ell_\infty(\Lambda))$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль. В частности, P^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль.*

Доказательство. Из предложения 2.1.4 мы знаем, что π_P^+ — ретракция в $\langle$ $A-\mathbf{mod}_1$ / $A-\mathbf{mod}$ $\rangle$. Тогда A-морфизм $\rho^+ = \mathcal{B}(\pi_P^+,\ell_\infty(\Lambda))$ есть коретракция в $\langle$ $\mathbf{mod}_1-A$ / $\mathbf{mod}-A$ $\rangle$. Заметим, что $\mathcal{B}(A_+ \widehat{\otimes}\, \ell_1(B_P),\ell_\infty(\Lambda)) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \mathcal{B}(A_+,\mathcal{B}(\ell_1(B_P),\ell_\infty(\Lambda))) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_P\times\Lambda))$. Итак, мы показали, что существует коретракция из $\mathcal{B}(P,\ell_\infty(\Lambda))$ в $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль. По предложению 2.1.20 банахов A-модуль $\mathcal{B}(P,\ell_\infty(\Lambda))$ является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным. Чтобы доказать последнее утверждение достаточно положить $\Lambda = \mathbb{N}_1$. $\square$

Как следствие предложений 2.1.33 и 2.1.39, мы получаем следующее.

Предложение 2.1.40. *Каждый $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный модуль является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоским.*

Позже мы убедимся, что $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ плоскость — это более слабое свойство, чем $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ проективность.

Предложение 2.1.41. *Пусть $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда:*

(i) A-модуль $\bigoplus_1\{F_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ метрически плоский тогда и только тогда, когда для всех $\lambda\in\Lambda$ банахов A-модуль F_λ метрически плоский;

(ii) A-модуль $\bigoplus_1\{F_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ C-топологически плоский тогда и только тогда, когда для всех $\lambda\in\Lambda$ банахов A-модуль F_λ C-топологически плоский.

Доказательство. По предложению $\langle$ 2.1.33 / 2.1.37 $\rangle$ A-модуль F $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ плоский тогда и только тогда, когда F^* $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен. Осталось применить предложение 2.1.28 с $J_\lambda = F_\lambda^*$ для всех $\lambda\in\Lambda$ и вспомнить, что $(\bigoplus_1\{F_\lambda : \lambda\in\Lambda\})^* \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \bigoplus_\infty\{F_\lambda^* : \lambda\in\Lambda\}$. $\square$

2.1.5 Метрическая и топологическая плоскость идеалов и циклических модулей

В этом параграфе мы обсудим условия, при которых идеалы и циклические модули будут метрически и топологически плоскими. Доказательства во многом схожи с подходами использованными при изучении относительной плоскости идеалов и циклических модулей.

Предложение 2.1.42. *Пусть I — левый идеал в $A_\times$ и I имеет правую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда A-модуль I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский.*

Доказательство. Пусть $\xi : X \to Y$ — $\langle$ изометрический / топологически инъективный $\rangle$ морфизм правых A-модулей. Так как I имеет правую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу, то из [[52], предложение 6.3.24] следует, что линейные операторы $i_{X,I} : X \widehat{\otimes}_A I \to \operatorname{cl}_X(XI) : x \widehat{\otimes}_A a \mapsto x \cdot a$, $i_{Y,I} : Y \widehat{\otimes}_A I \to \operatorname{cl}_Y(YI) : y \widehat{\otimes}_A a \mapsto y \cdot a$ суть $\langle$ изометрические изоморфизмы / топологические изоморфизмы $\rangle$ банаховых пространств. Очевидно, оператор $i_0 = i_{Y,I}(\xi \widehat{\otimes}_A 1_I) i_{X,I}^{-1}$, поточечно совпадает с ξ. Следовательно, i_0 — $\langle$ изометрически / топологически инъективный $\rangle$ оператор и таковым будет $\xi \widehat{\otimes}_A 1_I$, потому что он изометрически эквивалентен i_0. Поскольку морфизм ξ произволен, A-модуль I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский. $\square$

Отметим, что такое же достаточное условие относительной плоскости идеалов есть и в относительной теории [[52], предложение 7.1.45]. Теперь мы можем дать пример метрически плоского модуля, который не является даже топологически проективным. Очевидно, $\ell_\infty(\mathbb{N})$-модуль $c_0(\mathbb{N})$ не унитален как идеал алгебры $\ell_\infty(\mathbb{N})$, но имеет сжимающую аппроксимативную единицу. По теореме 2.1.16 этот модуль не является топологически проективным, но он метрически плоский по предложению 2.1.42.

“Метрическая” часть следующего предложения есть небольшая модификация и восполнение пробелов в [[33], предложение 4.11]. Случай топологической плоскости идеалов был изучен Хелемским в [[55], теорема VI.1.20].

Предложение 2.1.43. *Пусть I — левый собственный идеал в $A_\times$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A-модуль $A_\times/I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский;

(ii) I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$ $\langle$ такую, что $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\times} - e_\nu\| \leq 1$ / $\rangle$.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как $A_\times/I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский, то по предложению 2.1.33 правый A-модуль $(A_\times/I)^*$ является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным. Пусть $\pi : A_\times \to A_\times/I$ — естественная проекция, тогда $\pi^* : (A_\times/I)^* \to A_\times^*$

является изометрией. Поскольку $(A_\times/I)^*$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен, оператор π^* — коретракция, то есть существует $\langle$ строго коизометрический / топологически сюръективный $\rangle$ A-морфизм $\tau : A_\times^* \to (A_\times/I)^*$ такой, что $\tau\pi^* = 1_{(A_\times/I)^*}$. Рассмотрим элемент $p \in A^{**}$ такой, что $\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - p = \tau^*(\pi^{**}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times})))$. Рассмотрим произвольный $f \in I^\perp$. Так как $I^\perp = \pi^*((A_\times/I)^*)$, то существует $g \in (A_\times/I)^*$ со свойством $f = \pi^*(g)$. Значит,

$$(\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - p)(f) = \tau^*(\pi^{**}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times})))(\pi^*(g)) = \pi^{**}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times}))(\tau(\pi^*(g)))$$

$$= \pi^{**}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times}))(g) = \iota_{A_\times}(e_{A_\times})(\pi^*(g)) = \iota_{A_\times}(e_{A_\times})(f).$$

Следовательно, $p(f) = 0$ для всех $f \in I^\perp$, то есть $p \in I^{\perp\perp}$. Напомним, что $I^{\perp\perp}$ есть слабое* замыкание I в A^{**}, поэтому существует направленность $(e''_\nu)_{\nu\in N''} \subset I$ такая, что $(\iota_I(e''_\nu))_{\nu\in N''}$ сходится к p в слабой* топологии. Очевидно, $(\iota_{A_\times}(e_{A_\times} - e''_\nu))_{\nu\in N''}$ сходится к $\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - p$ в этой же топологии. Из [[63], лемма 1.1] следует, что существует направленность в выпуклой оболочке $\operatorname{conv}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times} - e''_\nu))_{\nu\in N''} = \iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - \operatorname{conv}(\iota_{A_\times}(e''_\nu))_{\nu\in N''}$ которая слабо* сходится к $\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - p$ и ограничена по норме числом $\|\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - p\|$. Обозначим эту направленность как $(\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - \iota_{A_\times}(e'_\nu))_{\nu\in N'}$, тогда $(\iota_{A_\times}(e'_\nu))_{\nu\in N'}$ слабо* сходится к p. Для любого $a \in I$ и $f \in I^*$ мы имеем

$$\lim_\nu f(ae'_\nu) = \lim_\nu \iota_{A_\times}(e'_\nu)(f\cdot a) = p(f\cdot a) = \iota_{A_\times}(e_{A_\times})(f\cdot a) - \tau^*(\pi^{**}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times})))(f\cdot a)$$

$$= f(a) - \iota_{A_\times}(e_{A_\times})(\pi^*(\tau(f\cdot a))) = f(a) - \pi^*(\tau(f)\cdot a)(e_{A_\times}) = f(a) - \tau(f)(\pi(a)) = f(a),$$

поэтому $(e'_\nu)_{\nu\in N'}$ — правая слабая ограниченная аппроксимативная единица для I. Из [[64], предложение 33.2] мы получаем, что существует направленность $(e_\nu)_{\nu\in N} \subset \operatorname{conv}(e'_\nu)_{\nu\in N'}$ которая является правой ограниченной аппроксимативной единицей для I. Для любого $\nu \in N$ мы имеем $e_{A_\times} - e_\nu \in \operatorname{conv}(e_{A_\times} - e'_\nu)_{\nu\in N'}$, поэтому учитывая ограничение на нормы элементов направленности $(\iota_{A_\times}(e_{A_\times} - e'_\nu))_{\nu\in N'}$ мы получаем

$$\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\times} - e_\nu\| \le \|\iota_{A_\times}(e_{A_\times}) - p\| \le \|\tau^*(\pi^{**}(\iota_{A_\times}(e_{A_\times})))\| \le \|\tau^*\|\|\pi^{**}\|\|\iota_{A_\times}(e_{A_\times})\| = \|\tau\|.$$

Так как τ $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ морфизм, то мы получаем желаемую оценку. По построению, $(e_\nu)_{\nu\in N}$ — правая ограниченная аппроксимативная единица для I.

$(ii) \implies (i)$ Обозначим $C = \sup_{\nu\in N}\|e_{A_\times} - e_\nu\|$. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр сечений на N и пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр содержащий $\mathfrak{F}$. Для фиксированного $f \in A_\times^*$ и $a \in A_\times$ выполнено $|f(a - ae_\nu)| = |f(a(e_{A_\times} - e_\nu))| \le \|f\|\|a\|\|e_{A_\times} - e_\nu\| \le C\|f\|\|a\|$, то есть $(f(a - ae_\nu))_{\nu\in N}$ — ограниченная направленность комплексных чисел. Следовательно, корректно определен предел $\lim_{\mathfrak{U}} f(a - ae_\nu)$ по ультрафильтру $\mathfrak{U}$. Так как $(e_\nu)_{\nu\in N}$ — правая аппроксимативная единица для I и $\mathfrak{U}$ содержит фильтр сечений, то для всех $a \in I$ выполнено $\lim_{\mathfrak{U}} f(a - ae_\nu) = \lim_\nu f(a - ae_\nu) = 0$. Таким образом, для каждого $f \in A_\times^*$ корректно определено отображение $\tau(f) : A_\times/I \to \mathbb{C} : a + I \mapsto \lim_{\mathfrak{U}} f(a - ae_\nu)$. Очевидно, это линейный функционал и из неравенств доказанных выше следует, что его норма не превосходит $C\|f\|$. Теперь легко проверить, что $\tau : A_\times^* \to (A_\times/I)^* : f \mapsto \tau(f)$ есть $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ A-морфизм. Для всех $g \in (A_\times/I)^*$ и $a + I \in A_\times/I$ имеем

$$\tau(\pi^*(g))(a+I) = \lim_{\mathfrak{U}} \pi^*(g)(a - ae_\nu) = \lim_{\mathfrak{U}} g(\pi(a - ae_\nu)) = \lim_{\mathfrak{U}} g(a+I) = g(a+I),$$

то есть $\tau : A_\times^* \to (A_\times/I)^*$ — ретракция. Правый A-модуль $A_\times^*$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен по предложению 2.1.26, поэтому его ретракт $(A_\times/I)^*$ также $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Теперь предложение 2.1.33 гарантирует $\langle$ метрическую / топологическую $\rangle$ плоскость A-модуля $A_\times/I$. $\square$

Следует сказать, что всякая операторная алгебра A (не обязательно самосопряженная) обладающая сжимающей аппроксимативной единицей имеет сжимающую аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$ со свойством $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\#} - e_\nu\| \leq 1$ и даже $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\#} - 2e_\nu\| \leq 1$. Здесь $A_\#$ — унитизация A как операторной алгебры. Подробности можно найти в [63], [65].

Снова мы попробуем сравнить наши результаты о метрической и топологической плоскости циклических модулей с их относительными аналогами. Хелемский и Шейнберг показали [[55], теорема VII.1.20], что циклический модуль будет относительно плоским если I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу. В случае когда $I^\perp$ дополняемо в $A_\times^*$ верна и обратная импликация. В топологической теории это требование излишне, поэтому удается получить критерий. Метрическая плоскость циклических модулей слишком сильное свойство из-за специфических ограничений на норму аппроксимативной единицы. Как мы увидим в следующем параграфе, оно настолько ограничительное, что не позволяет построить ни одного ненулевого аннуляторного метрически проективного, инъективного или плоского модуля над ненулевой банаховой алгеброй.

2.2 Влияние банаховой геометрии

2.2.1 Гомологически тривиальные аннуляторные модули

В этом параграфе мы сконцентрируем наше внимание на метрической и топологической проективности, инъективности и плоскости аннуляторных модулей. Если не оговорено иначе, все банаховы пространства в этом параграфе рассматриваются как аннуляторные модули. Отметим очевидный факт: всякий ограниченный линейный оператор между аннуляторными A-модулями является A-морфизмом.

Предложение 2.2.1. *Пусть X — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда $\mathbb{C}$ есть ретракт X в $A-\mathbf{mod}_1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \in X$ нормы 1. Используя теорему Хана-Банаха выберем функционал $f_0 \in X^*$ так, чтобы $\|f_0\| = f_0(x_0) = 1$. Рассмотрим линейные операторы $\pi : X \to \mathbb{C} : x \mapsto f_0(x)$, $\sigma : \mathbb{C} \to X : z \mapsto zx_0$. Легко проверить, что π и σ суть сжимающие A-морфизмы и, более того, $\pi\sigma = 1_{\mathbb{C}}$. Другими словами, $\mathbb{C}$ есть ретракт X в $A - \mathbf{mod}_1$. $\square$

Пришло время вспомнить, что любая банахова алгебра A может рассматриваться как собственный максимальный идеал в A_+, причем $\mathbb{C} \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} A_+/A$. Если рассматривать $\mathbb{C}$ как правый аннуляторный A-модуль, то имеет место еще один изоморфизм $\mathbb{C} \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} (A_+/A)^*$.

Предложение 2.2.2. *Аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую единицу $\rangle$.*

Доказательство. Достаточно исследовать $\langle$ метрическую / топологическую $\rangle$ проективность модуля A_+/A. Естественное фактор-отображение $\pi : A_+ \to A_+/A$ является строгой коизометрией, поэтому по предложению 2.1.17 $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ проективность A_+/A эквивалентна существованию $p \in A$ такого, что $A = A_+p$ $\langle$ и $\|e_{A_+} - p\| = 1$ / $\rangle$. $\langle$ Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - p\| = 1$ тогда и только тогда, когда $p = 0$, что эквивалентно $A = A_+p = \{0\}$ / $\rangle$. $\square$

Предложение 2.2.3. *Пусть P — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный A-модуль;*

(ii) *$\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую единицу $\rangle$ и P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективное банахово пространство, то есть $\langle$ $P \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ / $P \underset{\mathbf{Ban}}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ $\rangle$ для некоторого множества Λ.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Из предложений 2.1.3 и 2.2.1 следует, что A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного модуля P. Предложение 2.2.2 дает, что $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую единицу $\rangle$. По следствию 2.1.12 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C} \widehat{\otimes} \ell_1(B_P) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \ell_1(B_P)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. Рассмотрим строгую коизометрию $\pi : \ell_1(B_P) \to P$ корректно определенную равенством $\pi(\delta_x) = x$. Поскольку P и $\ell_1(B_P)$ — аннуляторные модули, то π — A-морфизм. Так как P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен, то A-морфизм π имеет правый обратный морфизм σ в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Таким образом, $\sigma\pi$ есть $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ проектор из $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного банахова пространства $\ell_1(B_P)$ на P, то есть P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективное банахово пространство. Теперь из $\langle$ [[11], предложение 3.2] / результатов [9] $\rangle$ следует, что пространство P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ изоморфно $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ.

$(ii) \implies (i)$ По предложению 2.2.2 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. По следствию 2.1.12 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C} \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ также $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. □

Предложение 2.2.4. *Правый аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$.*

Доказательство. Благодаря предложению 2.1.33 достаточно изучить $\langle$ метрическую / топологическую $\rangle$ плоскость модуля A_+/A. По предложению 2.1.43 это эквивалентно существованию правой ограниченной аппроксимативной единицы $(e_\nu)_{\nu \in N}$ в A $\langle$ со свойством $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_+} - e_\nu\| \leq 1$ / $\rangle$. $\langle$ Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - e_\nu\| \leq 1$ тогда и только тогда, когда $e_\nu = 0$, что эквивалентно $A = \{0\}$ / $\rangle$. □

Предложение 2.2.5. *Пусть J — ненулевой правый аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *J — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль;*

(ii) *$\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$ и J — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективное банахово пространство $\langle$ то есть $J \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C(K)$ для некоторого для стоунова пространства K / $\rangle$.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Из предложений 2.1.20 и 2.2.1 мы получаем, что A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного модуля J. Предложение 2.2.4 дает нам, что $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$. По предложению 2.1.30 аннуляторный A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}),\mathbb{C}) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \ell_\infty(B_{J^*})$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Рассмотрим изометрию $\rho : J \to \ell_\infty(B_{J^*})$ корректно определенную равенством $\rho(x)(f) = f(x)$. Так как J и $\ell_\infty(B_{J^*})$ — аннуляторные модули, то ρ является A-морфизмом. Поскольку J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен, ρ имеет левый обратный морфизм τ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Тогда $\rho\tau$ — $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ проектор из $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного банахова пространства $\ell_\infty(B_{J^*})$ на J, поэтому J также является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным банаховым пространством. $\langle$ Из [[61], теорема 3.11.6] мы знаем, что J изометрически изоморфно $C(K)$ для некоторого стоунова пространства K. / $\rangle$

$(ii) \implies (i)$ По предложению 2.2.4 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. По предложению 2.1.30 аннуляторный A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}),\mathbb{C}) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \ell_\infty(B_{J^*})$ также $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Так как J — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективное банахово пространство и существует изометрическое вложение $\rho : J \to \ell_\infty(B_{J^*})$, то J является $\langle$ 1-ретрактом / ретрактом $\rangle$ пространства

$\ell_\infty(B_{J^*})$. Напомним, что J и $\ell_\infty(B_{J^*})$ аннуляторные модули, поэтому данная ретракция также является ретракцией в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. По предложению 2.1.20 A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. $\square$

Предложение 2.2.6. *Пусть F — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) F — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский A-модуль;

(ii) $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$ и F — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоское банахово пространство, то есть $\langle$ $F \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Omega,\mu)$ для некоторого пространства с мерой (Ω, Σ, μ) / F есть $\mathscr{L}_1$-пространство $\rangle$.

Доказательство. Из $\langle$ [[8], теорема 1] / [[10], теорема VI.6] $\rangle$ мы знаем, что банахово пространство F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективно тогда и только тогда, когда $\langle$ $F \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Omega,\mu)$ для некоторого пространства с мерой (Ω, Σ, μ) / F есть $\mathscr{L}_1$-пространство $\rangle$. Теперь эквивалентность следует из предложений 2.2.5 и 2.1.33. $\square$

Следует сравнить эти результаты с аналогичными в относительной теории. Из $\langle$ [[66], предложение 2.1.7] / [[66], предложение 2.1.10] $\rangle$ мы знаем, что аннуляторный модуль над банаховой алгеброй A относительно $\langle$ проективный / плоский $\rangle$ тогда и только тогда, когда A имеет $\langle$ правую единицу / правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$. В метрической и топологической теории, в отличие от относительной, гомологическая тривиальность аннуляторных модулей налагает ограничения не только на алгебру, но и на геометрию самого модуля. Эти геометрические ограничения запрещают существование некоторых гомологически лучших банаховых алгебр. Одно из важных свойств относительно $\langle$ стягиваемых / аменабельных $\rangle$ банаховых алгебр — это $\langle$ проективность / плоскость $\rangle$ всех (и в частности аннуляторных) левых банаховых модулей над ней. Резкое отличие метрической и топологической теории в том, что в них подобных алгебр не может быть.

Предложение 2.2.7. *Не существует банаховой алгебры A такой, что все A-модули $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоские. Тем более, не существует банаховых алгебр таких, что все A-модули $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективны.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечномерное $\mathscr{L}_\infty$-пространство X (например $\ell_\infty(\mathbb{N})$) как аннуляторный A-модуль. Из [[67], параграф 23.3] мы знаем, что X не является $\mathscr{L}_1$-пространством. Следовательно, по предложению 2.2.6 модуль X не является топологически плоским. По предложению 2.1.35 он также и не метрически плоский. Наконец, из предложения 2.1.40 следует, что X не является ни метрически, ни топологически проективным. $\square$

2.2.2 Гомологически тривиальные модули над банаховыми алгебрами со специальной геометрией

Цель данного параграфа — убедиться в том, что гомологически тривиальные модули над некоторыми банаховыми алгебрами имеют с этими алгебрами схожие геометрические свойства.

Снова напомним, что под пространством с мерой мы понимаем строго локализуемое пространство с мерой. В следующем предложении мы несколько раз встретимся с произведением пространств с мерой. Произведение двух пространств с мерой $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ и $(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$ мы будем обозначать $\mu_1 \times \mu_2$. Произведение двух строго локализуемых пространств с мерой есть строго локализуемое пространство с мерой [[47], предложение 251N].

Результаты следующего предложения в случае метрической теории были получены Гравеном в [31].

Предложение 2.2.8. *Пусть A — банахова алгебра изометрически изоморфная, как банахово пространство, пространству $L_1(\Theta,\nu)$ для некоторого пространства с мерой (Θ,Σ,ν). Тогда:*

(i) если P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный A-модуль, то P — $\langle$ L_1-пространство / ретракт L_1-пространства $\rangle$;

(ii) если J — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль, то J — $\langle$ $C(K)$-пространство для некоторого стоунова пространства K / топологически инъективное банахово пространство $\rangle$;

(iii) если F — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский A-модуль, то F — $\langle$ L_1-пространство / $\mathscr{L}_1$-пространство $\rangle$.

Доказательство. Через (Θ',Σ',ν') обозначим пространство с мерой (Θ,Σ,ν) с одним добавленным атомом, тогда $A_+ \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta',\nu')$.

(i) Так как P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль, то по предложению 2.1.4 он является ретрактом $A_+ \widehat{\otimes}\, \ell_1(B_P)$ в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_P, тогда по теореме Гротендика [[40], теорема 2.7.5]

$$A_+ \widehat{\otimes}\, \ell_1(B_P) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta',\nu') \widehat{\otimes} L_1(B_P,\mu_c) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta' \times B_P,\nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, P — $\langle$ 1-ретракт / ретракт $\rangle$ L_1-пространства. Осталось заметить, что любой 1-ретракт L_1-пространства есть снова L_1-пространство [[61], теорема 6.17.3].

(ii) Так как J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль, то по предложению 2.1.21 он является ретрактом $\mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_{J^*}))$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Пусть μ_c —

считающая мера на B_{J^*}, тогда по теореме Гротендика [[40], теорема 2.7.5]

$$\mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} (A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*}))^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} (L_1(\Theta',\nu') \widehat{\otimes} L_1(B_P,\mu_c))^*$$

$$\underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta' \times B_P,\nu' \times \mu_c)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_\infty(\Theta' \times B_P,\nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, J — $\langle$ 1-ретракт / ретракт $\rangle$ L_∞-пространства. Поскольку L_∞-пространства $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективны, то таковы же и их ретракты J. Осталось напомнить, что каждое метрически инъективное банахово пространство суть $C(K)$-пространство для некоторого стоунова пространства K [[61], теорема 3.11.6].

iii) Из $\langle$ [[8], теорема 1] / [[10], теорема VI.6] $\rangle$ мы знаем, что банахово пространство F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективно тогда и только тогда, когда F является $\langle$ L_1-пространством / $\mathscr{L}_1$-пространством $\rangle$. Остается применить результаты пункта (*ii*) и предложение 2.1.33. □

Предложение 2.2.9. *Пусть A — банахова алгебра изоморфная, как банахово пространство, некоторому $\mathscr{L}_1$-пространству. Тогда любой топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ A-модуль является $\langle$ $\mathscr{L}_1$-пространством / $\mathscr{L}_\infty$-пространством / $\mathscr{L}_1$-пространством $\rangle$.*

Доказательство. Если алгебра A есть $\mathscr{L}_1$-пространство, то такова же и A_+.

Пусть P — топологически проективный A-модуль. Тогда по предложению 2.1.4 он есть ретракт $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ в $A-\mathbf{mod}$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. Поскольку $\ell_1(B_P)$ есть $\mathscr{L}_1$-пространство, то таково же $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ как проективное тензорное произведение $\mathscr{L}_1$-пространств [[68], предложение 1]. Следовательно, P есть $\mathscr{L}_1$-пространство как ретракт $\mathscr{L}_1$-пространства [[51], предложение 1.28].

Пусть J — топологически инъективный A-модуль. Тогда по предложению 2.1.21 он есть ретракт $\mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} (A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*}))^*$ в $\mathbf{mod}-A$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. Как мы показали выше, пространство $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*})$ является $\mathscr{L}_1$-пространством, тогда его сопряженное $\mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_{J^*}))$ есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство [[51], предложение 1.27]. Осталось заметить, что любой ретракт $\mathscr{L}_\infty$-пространства есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство [[51], предложение 1.28].

Наконец, пусть F — топологически плоский A-модуль, тогда F^* топологически инъективен по предложению 2.1.33. Из предыдущего абзаца следует, что F^* — это $\mathscr{L}_\infty$-пространство. По теореме VI.6 из [10] пространство F является $\mathscr{L}_1$-пространством. □

Перейдем к обсуждению свойства Данфорда-Петтиса для гомологически тривиальных банаховых модулей. Прежде напомним определение и перечислим основные факты о свойстве Данфорда-Петтиса. Ограниченный линейный оператор $T : E \to F$ называется слабо компактным, если он отправляет единичный шар пространства E в относительно слабо компактное подмножество в F. Ограниченный линейный оператор называется вполне непрерывным, если образ любого слабо компактного подмножества в E компактен в нормовой топологии F. Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если любой слабо компактный оператор из E в произвольное банахово пространство F вполне непрерывен. Существует простое внутреннее описание этого свойства [[43], теорема 5.4.4]: банахово пространство E обладает свойством Данфорда-Петтиса если $\lim_n f_n(x_n) = 0$ для любых слабо сходящихся к 0 последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ и $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$. Теперь легко доказать, что если банахово пространство E^* имеет свойство Данфорда-Петтиса, то его имеет и E. В своей новаторской работе [69] Гротендик показал, что все L_1-пространства и $C(K)$-пространства имеют это свойство. Более того любое $\mathscr{L}_1$-пространство и любое $\mathscr{L}_\infty$-пространство имеет свойство Данфорда-Петтиса [[51], предложение 1.30]. Поскольку единичный шар рефлексивного банахова пространства слабо компактен [[70], теорема 2.8.2], то у таких пространств со свойством Данфорда-Петтиса единичный шар компактен в нормовой топологии, и следовательно, такие пространства конечномерны. Свойство Данфорда-Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [[44], предложение 13.44].

Ключевым для нас будет результат Бургейна о банаховых пространствах со специальной локальной структурой. В [[71], теорема 5] он доказал, что первое, второе и так далее сопряженное пространство банахова пространства с E_p-локальной структурой обладает свойством Данфорда-Петтиса. Здесь, E_p обозначает класс всех $\bigoplus_\infty$-сумм p копий p-мерных ℓ_1-пространств для некоторого натурального p.

Предложение 2.2.10. *Пусть $\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство бесконечномерных L_1-пространств. Тогда банахово пространство $\bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет $(E_p,1+\epsilon)$-локальную структуру для всех $\epsilon > 0$.*

Доказательство. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через $L_1^0(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)$ обозначим плотное подпространство в $L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)$ натянутое на характеристические функции измеримых множеств из Σ_λ. Обозначим $E := \bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, пусть $E_0 := \bigoplus_{00}\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — не обязательно замкнутое подпространство в E, состоящее из векторов с конечным числом ненулевых координат.

Зафиксируем $\epsilon > 0$ и конечномерное подпространство F в E. Так как F конечномерно, то существует ограниченный проектор $Q : E \to E$ на F. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\|Q\| < 1$ и $(1+\delta\|Q\|)(1-\delta\|Q\|)^{-1} < 1+\epsilon$. Заметим, что B_F компактно, потому что F конечномерно. Следовательно, существует конечная $\delta/2$-сеть $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_n} \subset E_0$ для B_F. Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ имеем $x_k = \bigoplus_0\{x_{k,\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, где $x_{k,\lambda} = \sum_{j=1}^{m_{k,\lambda}} d_{k,j,\lambda}\chi_{D_{j,k,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(d_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ и измеримых множеств $(D_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ конечной меры. Пусть $(C_{i,\lambda})_{i\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$ — множество всех попарных пересечений элементов из $(D_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ исключая множества меры 0. Тогда $x_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{m_\lambda} c_{i,k,\lambda}\chi_{C_{i,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(c_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$. Обозначим $\Lambda_k = \{\lambda \in \lambda : x_{k,\lambda} \neq 0\}$. По определению пространства E_0 множество Λ_k конечно для каждого $k \in \mathbb{N}_n$. Рассмотрим конечное множество $\Lambda_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n}\Lambda_k$. Так как пространство $L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)$ бесконечномерно, то мы можем добавить к семейству $\{\chi_{C_{i,\lambda}} : i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}\}$ любое конечное число дизъюнктных множеств положительной конечной меры. Поэтому, далее считаем, что

$m_\lambda = \mathrm{Card}(\Lambda_0)$ для всех $\lambda \in \Lambda_0$. Для каждого $\lambda \in \Lambda_0$ корректно определен проектор

$$P_\lambda : L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) \to L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : x_\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{m_\lambda} \left(\mu(C_{i,\lambda})^{-1} \int_{C_{i,\lambda}} x_\lambda(\omega) d\mu_\lambda(\omega) \right) \chi_{C_{i,\lambda}}.$$

Легко проверить, что $P_\lambda(\chi_{C_{i,\lambda}}) = \chi_{C_{i,\lambda}}$ для всех $i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}$. Следовательно, $P_\lambda(x_{k,\lambda}) = x_{k,\lambda}$ для всех $k \in \mathbb{N}_n$. Так как множества $(C_{i,\lambda})_{i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}}$ не пересекаются и имеют положительную меру, то $\mathrm{Im}(P_\lambda) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda})$. Для $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ мы положим $P_\lambda = 0$ и рассмотрим проектор $P := \bigoplus_0 \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По построению он сжимающий с образом $\mathrm{Im}(P) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_0 \{\ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda}) : \lambda \in \Lambda_0\} \in E_p$. Рассмотрим произвольный вектор $x \in B_F$, тогда существует номер $k \in \mathbb{N}_n$ такой, что $\|x - x_k\| \leq \delta/2$. Тогда $\|P(x) - x\| = \|P(x) - P(x_k) + x_k - x\| \leq \|P\| \|x - x_k\| + \|x_k - x\| \leq \delta$.

Построив проекторы P и Q, рассмотрим оператор $I := 1_E + PQ - Q$. Очевидно, $\|1_E - I\| = \|PQ - Q\| \leq \delta \|Q\|$. Следовательно I — изоморфизм по стандартному трюку с рядами фон Ноймана [[43], предложение A.2]. Более того, $I^{-1} = \sum_{p=0}^\infty (1_E - I)^p$, поэтому

$$\|I^{-1}\| \leq \sum_{p=0}^\infty \|1_E - I\|^p \leq \sum_{p=0}^\infty (\delta \|Q\|)^p = (1 - \delta\|Q\|)^{-1}, \quad \|I\| \leq \|1_E\| + \|I - 1_E\| \leq 1 + \delta\|Q\|.$$

Заметим, что $PI = P + P^2 Q - PQ = P + PQ - PQ = P$, поэтому для всех $x \in F$ выполнено

$$I(x) = x + P(Q(x)) - Q(x) = x + P(x) - x = P(x) = P(P(x)) = P(I(x))$$

и $x = (I^{-1}PI)(x)$. Последнее означает, что F содержится в образе ограниченного проектора $R = I^{-1}PI$. Обозначим этот образ через F_0 и рассмотрим биограничение $I_0 = I|_{F_0}^{\mathrm{Im}(P)}$ изоморфизма I. Так как $\|I_0\| \|I_0^{-1}\| \leq \|I\| \|I^{-1}\| \leq (1 + \delta\|Q\|)(1 - \delta\|Q\|)^{-1} < 1 + \epsilon$, то $d_{BM}(F_0, \mathrm{Im}(P)) < 1 + \epsilon$. Таким образом, мы показали, что для любого конечномерного подпространства в E существует подпространство F_0 в E содержащее F такое, что $d_{BM}(F_0, U) < 1 + \epsilon$ для некоторого $U \in E_p$. Это значит, что E имеет $(E_p, 1 + \epsilon)$-локальную структуру. $\square$

Предложение 2.2.11. *Пусть $\{(\Omega_\lambda, \Sigma_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство пространств с мерой. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ обладает свойством Данфорда-Петтиса.*

Доказательство. Сначала предположим, что пространства $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ бесконечномерны для всех $\lambda \in \Lambda$. Из предложения 2.2.10 мы знаем, что банахово пространство $F := \bigoplus_0 \{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет E_p-локальную структуру. Тогда по теореме 5 из [71] первое, второе и так далее сопряженное пространство пространства F обладают свойством Данфорда-Петтиса. Как следствие, мы получаем, что $F^{**} = \left(\bigoplus_0 \{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}\right)^{**} \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)^{**} : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса. Из [[67], предложение B10] мы знаем, что каждое L_1-пространство 1-дополняемо в своем втором сопряженном. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через P_λ обозначим соответствующий проектор в $L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)^{**}$. Таким образом $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 1-дополняемо в $F^{**} \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)^{**} : \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Так как F^{**} имеет свойство Данфорда-Петтиса, то из [[44], предложение 13.44] следует, что это свойство имеет и дополняемое в F^{**} подпространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$.

Теперь рассмотрим общий случай. Любое L_1-пространство можно рассматривать как 1-дополняемое подпространство некоторого бесконечномерного L_1-пространства. Как следствие, пространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ будет 1-дополняемо в $\bigoplus_\infty$-сумме бесконечномерных L_1-пространств. Как было показано выше, такая сумма обладает свойством Данфорда-Петтиса, а значит, Осталось вспомнить, что это свойство Данфорда-Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [[44], предложение 13.44]. $\square$

Предложение 2.2.12. *Пусть E — $\mathscr{L}_\infty$-пространство и Λ — произвольное множество. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty\{E^* : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса.*

Доказательство. Поскольку E — это $\mathscr{L}_\infty$-пространство, то E^* дополняемо в некотором L_1-пространстве [[49], предложение 7.4]. То есть существует ограниченный линейный проектор $P : L_1(\Omega,\mu) \to L_1(\Omega,\mu)$ с образом топологически изоморфным пространству E^*. В этом случае $\bigoplus_\infty\{E^* : \lambda \in \Lambda\}$ дополняемо в $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega,\mu) : \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty\{P : \lambda \in \Lambda\}$. Пространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega,\mu) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса по предложению 2.2.11. Тогда из [[44], предложение 13.44] следует, что этим свойством обладает и его дополняемое подпространство $\bigoplus_\infty\{E^* : \lambda \in \Lambda\}$. $\square$

Теорема 2.2.13. *Пусть A — банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда топологически проективные, инъективные и плоские A-модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.*

Доказательство. Предположим A является $\mathscr{L}_1$-пространством. Заметим, что $\mathscr{L}_1$- и $\mathscr{L}_\infty$-пространства имеют свойство Данфорда-Петтиса [[51], предложение 1.30]. Теперь результат следует из предложения 2.2.9.

Предположим A является $\mathscr{L}_\infty$-пространством, тогда такова же и A_+. Пусть J — топологически инъективный A-модуль, тогда по предложению 2.1.21 он ретракт

$$\mathcal{B}(A_+,\ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} (A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*}))^* \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \left(\bigoplus\nolimits_1\{A_+ : \lambda \in B_{J^*}\}\right)^* \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty\{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\}$$

в $\mathbf{mod} - A$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. По предложению 2.2.12 последний модуль имеет свойство Данфорда-Петтиса. Так как J его ретракт, то он тоже обладает этим свойством [[44], предложение 13.44].

Если F топологически плоский A-модуль, то F^* топологически инъективен по предложению 2.1.33. Из предыдущего абзаца мы знаем, что тогда F^* имеет свойство Данфорда-Петтиса и, как следствие, этим свойством обладает сам модуль F.

Пусть P — топологически проективный A-модуль. По предположению 2.1.40 он топологически плоский и тогда из предыдущего абзаца мы видим, что P имеет свойство Данфорда-Петтиса. $\square$

Следствие 2.2.14. *Пусть A — банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда не существует топологически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A-модуля. Тем более не существует метрически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A-модуля.*

Доказательство. Из теоремы 2.2.13 мы знаем, что любой топологически инъективный A-модуль имеет свойство Данфорда-Петтиса. С другой стороны не существует бесконечномерного рефлексивного банахова пространства с этим свойством. Итак, мы получили желаемый результат в контексте топологической инъективности. Так как пространство, сопряженное к рефлексивному снова рефлексивно, то из предложения 2.1.33 следует результат для топологической плоскости. Осталось вспомнить что по предложению 2.1.40 каждый топологически проективный модуль является топологически плоским. Чтобы доказать последнее утверждение вспомним, что по предложению $\langle$ 2.1.5 / 2.1.22 / 2.1.35 $\rangle$ метрическая $\langle$ проективность / инъективность / плоскость $\rangle$ влечет топологическую $\langle$ проективность / инъективность / плоскость $\rangle$. $\square$

Стоит сказать, что в относительной теории существуют примеры рефлексивных бесконечномерных относительно проективных, инъективных и плоских модулей над банаховыми алгебрами, являющимися $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространствами. Приведем два примера. Первый связан с сверточной алгеброй $L_1(G)$ локально компактной группы G с мерой Хаара. Эта алгебра — $\mathscr{L}_1$-пространство. В [[72], §6] и [73] было доказано, что для для $1 < p < +\infty$ банахов $L_1(G)$-модуль $L_p(G)$ является относительно $\langle$ проективным / инъективным / плоским $\rangle$ тогда и только тогда, когда группа G $\langle$ компактна / аменабельна / аменабельна $\rangle$. Заметим, что любая компактная группа аменабельна [[74], предложение 3.12.1], и поэтому для компактной группы G модуль $L_p(G)$ будет относительно проективным инъективным и плоским для всех $1 < p < +\infty$. Второй пример будет про алгебры $c_0(\Lambda)$ и $\ell_\infty(\Lambda)$ для бесконечного множества Λ. Это $\mathscr{L}_\infty$-пространства. Как мы покажем в предложении 3.1.23, над этими алгебрами модули $\ell_p(\Lambda)$ для $1 < p < \infty$ всегда являются относительно проективными, инъективными и плоскими.

Чтобы обсудить еще одно банахово-геометрическое свойство, нам понадобятся долгие приготовления, а именно, определение банаховой решетки и безусловного базиса Шаудера.

Действительное пространство Риса E — это линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ со структурой частично упорядоченного множества, такой, что $x \leq y$ влечет $x + z \leq y + z$ для всех $x,y,z \in E$ и $ax \geq 0$ для всех $x \geq 0$, $a \in \mathbb{R}_+$. Частично упорядоченное множество называется решеткой, если любые два элемента x,y имеют точную верхнюю грань $x \vee y$ и точную нижнюю грань $x \wedge y$. Действительная векторная решетка — это действительное пространство Риса, которое, как частично упорядоченное множество, является решеткой. Если E — действительная векторная решетка, то для каждого вектора $x \in E$ мы определяем его модуль по формуле $|x| := x \vee (-x)$. Комплексная векторная решетка E — это линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, такое, что существует действительное линейное подпространство $\mathrm{Re}(E)$, являющееся действительной векторной решеткой, причем:

(i) для каждого $x \in E$ существуют единственные $\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x) \in \mathrm{Re}(E)$ такие, что $x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x)$;

(ii) для каждого $x \in E$ определено абсолютное значение $|x| := \sup\{\mathrm{Re}(e^{i\theta}x) : \theta \in \mathbb{R}\}$.

Банахова решетка — это банахово пространство со структурой комплексной векторной решетки такой, что $|x| \leq |y|$ влечет $\|x\| \leq \|y\|$. Классический пример банаховой решетки E — это L_p-пространство или $C(K)$-пространство. В обоих случаях $\mathrm{Re}(E)$ состоит из действительнозначных функций в E. Если $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство банаховых решеток, то для любого $1 \leq p \leq +\infty$ или $p = 0$ их $\bigoplus_p$-сумма есть банахова решетка, причем для $x,y \in \bigoplus_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ выполнено $x \leq y$ если $x_\lambda \leq y_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Сопряженное пространство E^* банаховой решетки E есть снова банахова решетка, причем для $f,g \in E^*$ выполнено $f \leq g$ если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \geq 0$. Хорошее введение в теорию банаховых решеток можно найти в [[61], параграф 1].

Свойство быть банаховой решеткой накладывает определенные ограничения на геометрию банахова пространства [75], [76]. Чтобы объяснить этот эффект, нам понадобится определение безусловного базиса Шаудера. Пусть E — банахово пространство. Набор функционалов $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в E^* называется биортогональной системой для векторов $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ из E, если $f_\lambda(x_{\lambda'}) = 1$ при $\lambda = \lambda'$, иначе 0. Набор векторов $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в E называется безусловным базисом Шаудера, если в E^* существует биортогональная система $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ для $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ такая, что ряд $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)x_\lambda$ безусловно сходится к x для любого $x \in E$. Все ℓ_p-пространства при $1 \leq p < +\infty$ имеют безусловный базис Шаудера, например, это $(\delta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Классический пример пространства без безусловного базиса Шаудера — это $C([0,1])$. Более того, это пространство не может быть даже подпространством банахова пространства с безусловным базисом Шаудера [[43], предложение 3.5.4]. Любой безусловный базис Шаудера $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в E удовлетворяет следующему свойству [[50], предложение 1.6]: существует константа $\kappa \geq 1$ такая, что

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda f_\lambda(x)x_\lambda\right\| \leq \kappa \left\|\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)x_\lambda\right\|$$

для всех $x \in E$ и $t \in \ell_\infty(\Lambda)$. Наименьшая из таких констант κ по всем безусловным базисам Шаудера пространства E обозначается через $\kappa(E)$. Аналогичная характеристика может быть определена и для банаховых пространств без безусловного базиса Шаудера. Локальная безусловная константа $\kappa_u(E)$ банахова пространства E определяется как инфимум всех чисел C

со следующим свойством: для каждого конечномерного подпространства F в E существует банахово пространство G с безусловным базисом Шаудера и ограниченные линейные операторы $S : F \to G$, $T : G \to E$ такие, что $TS|^F = 1_F$ и $\|T\|\|S\|\kappa(G) \leq C$. Говорят, что банахово пространство E имеет локально безусловную структуру если $\kappa_u(E)$ конечно. Изначально это свойство было определено на английском и называлось the **l**ocal **u**nconditional **st**ructure property. Для него использовали аббревиатуру l.u.st, и мы поступим так же. Очевидно, любое банахово пространство E с безусловным базисом Шаудера имеет свойство l.u.st, причем $\kappa_u(E) = \kappa(E)$. В частности, все конечномерные банаховы пространства имеют свойство l.u.st. Хотя произвольная банахова решетка E может и не обладать безусловным базисом Шаудера, она все равно имеет свойство l.u.st, и при этом $\kappa_u(E) = 1$ [[50], теорема 17.1]. Непосредственно из определения следует, что свойство l.u.st наследуется дополняемыми подпространствами. Точнее, если F — C-дополняемое подпространство в E, то $\kappa_u(F) \leq C\kappa_u(E)$. Следовательно, все дополняемые подпространства банаховых решеток обладают свойством l.u.st. Это необходимое условие не так уж далеко от критерия [[50], теорема 17.5]: банахово пространство E имеет свойство l.u.st тогда и только тогда, когда E^{**} топологически изоморфно, как банахово пространство, дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки. Как следствие, этого критерия мы получаем, что банахово пространство E имеет свойство l.u.st тогда и только тогда, когда его имеет E^* [[50], следствие 17.6].

Предложение 2.2.15. *Пусть A — банахова алгебра, обладающая свойством l.u.st. Тогда всякий топологически проективный, инъективный и плоский A-модуль тоже обладает этим свойством.*

Доказательство. Если J — топологически инъективный A-модуль, то по предложению 2.1.21 он является ретрактом $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \bigoplus_\infty \{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\}$ в $\mathbf{mod} - A$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. Если A обладает свойством l.u.st, то A^{**} дополняемо в некоторой банаховой решетке E [[50], теорема 17.5]. Как следствие A_+^{***} дополняемо в банаховой решетке $F := (E \bigoplus_1 \mathbb{C})^*$ посредством некоторого ограниченного проектора $P : F \to F$. Следовательно, $\bigoplus_\infty \{A_+^{***} : \lambda \in B_{J^*}\}$ дополняемо в банаховой решетке $\bigoplus_\infty \{F : \lambda \in B_{J^*}\}$ посредством ограниченного проектора $\bigoplus_\infty \{P : \lambda \in B_{J^*}\}$. Любая банахова решетка имеет свойство l.u.st [[50], теорема 17.1]. Это свойство наследуется дополняемыми подпространствами, поэтому $\bigoplus_\infty \{A_+^{***} : \lambda \in B_{J^*}\}$ тоже имеет свойство l.u.st. Заметим, что A_+^* 1-дополняемо в A_+^{***} посредством проектора Диксмье Q, значит $\bigoplus_\infty \{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\}$ 1-дополняемо в $\bigoplus_\infty \{A_+^{***} : \lambda \in B_{J^*}\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty \{Q : \lambda \in B_{J^*}\}$. Так как последнее пространство имеет свойство l.u.st, то им обладает и ретракт $\bigoplus_\infty \{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\}$. Наконец, J — это ретракт $\bigoplus_\infty \{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\}$, поэтому он тоже обладает этим свойством.

Если F — топологически плоский A-модуль, то F^* топологически инъективен по предложению 2.1.33. Из рассуждений предыдущего абзаца следует, что F^* имеет свойство l.u.st. Из [[50], следствие 17.6] мы заключаем, что этим свойством обладает и сам модуль F.

Наконец, если P — топологически проективный A-модуль, то он топологически плоский по предложению 2.1.40. Из предыдущего абзаца мы знаем, что в этом случае P имеет свойство l.u.st. $\square$

2.3 Дальнейшие свойства проективных, инъективных и плоских модулей

2.3.1 Гомологическая тривиальность модулей при замене алгебры

В дальнейшем при исследовании метрически и топологически гомологически тривиальных модулей над различными алгебрами анализа нам очень пригодятся следующие предложения. Они суть метрически и топологические версии предложений 2.3.2, 2.3.3 и 2.3.4 из [66].

Предложение 2.3.1. *Пусть X и Y — $\langle$ левые / правые $\rangle$ банаховы A-модули. Допустим, что выполнено одно из условий:*

(i) I — $\langle$ левый / правый $\rangle$ идеал в A, и X — существенный I-модуль;

(ii) I — $\langle$ правый / левый $\rangle$ идеал в A, и Y — верный I-модуль.

Тогда $\langle$ ${}_A\mathcal{B}(X,Y) = {}_I\mathcal{B}(X,Y)$ / $\mathcal{B}_A(X,Y) = \mathcal{B}_I(X,Y)$ $\rangle$.

Доказательство. Мы рассмотрим случай только левых модулей, так как для правых модулей доказательства аналогичны. Возьмем произвольный морфизм $\phi \in {}_I\mathcal{B}(X,Y)$.

(i) Рассмотрим $x \in I \cdot X$, тогда $x = a' \cdot x'$ для некоторых $a' \in I$, $x' \in X$. Для любого $a \in A$ выполнено $\phi(a \cdot x) = \phi(aa' \cdot x') = aa' \cdot \phi(x') = a \cdot \phi(a' \cdot x') = a \cdot \phi(x)$. Следовательно, $\phi(a \cdot x) = a \cdot \phi(x)$ для всех $a \in A$ и $x \in \operatorname{cl}_X(IX) = X$. Значит, $\phi \in {}_A\mathcal{B}(X,Y)$.

(ii) Для любых $a \in I$, $a' \in A$ и $x \in X$ выполнено $a\cdot(\phi(a'\cdot x) - a'\cdot\phi(x)) = \phi(aa'\cdot x) - aa'\cdot\phi(x) = 0$. Так как Y — верный I-модуль, то $\phi(a' \cdot x) = a' \cdot \phi(x)$ для всех $x \in X$, $a' \in A$. Значит, $\phi \in {}_A\mathcal{B}(X,Y)$.

В обоих случаях мы доказали, что $\phi \in {}_A\mathcal{B}(X,Y)$ для любого $\phi \in {}_I\mathcal{B}(X,Y)$, следовательно, ${}_I\mathcal{B}(X,Y) \subset {}_A\mathcal{B}(X,Y)$. Обратное включение очевидно. $\square$

Предложение 2.3.2. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A, и P — банахов A-модуль, существенный как I-модуль. Тогда:*

(i) если I — левый идеал в A и P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен как I-модуль, то P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен как A-модуль;

(ii) если I — $\langle$ 1-дополняемый / c-дополняемый $\rangle$ правый идеал A и P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен как A-модуль, то P $\langle$ метрически / cC-топологически $\rangle$ проективен как I-модуль.

Доказательство. Через $\widetilde{\pi}_P : I \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) \to P$ и $\pi_P : A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) \to P$ мы обозначим стандартные эпиморфизмы.

(i) По предложению 2.1.10 морфизм $\widetilde{\pi}_P$ имеет в $\langle\ I - \mathbf{mod}_1\ /\ I - \mathbf{mod}\ \rangle$ правый обратный морфизм $\widetilde{\sigma}$ нормы $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Пусть $i : I \to A$ — естественное вложение, тогда рассмотрим $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ I-морфизм $\sigma = (i \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)})\widetilde{\sigma}$. По предложению 2.3.1 оператор σ является A-морфизмом. Очевидно, σ имеет норму $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Для $\pi_P : A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) \to P$ выполнено $\pi_P(i \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)}) = \widetilde{\pi}_P$, следовательно, $\pi_P\sigma = \pi_P(i \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)})\widetilde{\sigma} = \widetilde{\pi}_P\widetilde{\sigma} = 1_P$. Таким образом, π_P есть $\langle$ 1-ретракция / C-ретракция $\rangle$ в $\langle\ A - \mathbf{mod}_1\ /\ A - \mathbf{mod}\ \rangle$. По предложению 2.1.10 банахов A-модуль P $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ проективен.

(ii) Поскольку P существенный I-модуль, он тем более будет существенным A-модулем. По предложению 2.1.10 морфизм π_P имеет правый обратный морфизм σ в $\langle\ A - \mathbf{mod}_1\ /\ A - \mathbf{mod}\ \rangle$ нормы $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Ясно,что σ является правым обратным морфизмом в π_P и в $\langle\ I - \mathbf{mod}_1\ /\ I - \mathbf{mod}\ \rangle$. Через $i : I \to A$ мы обозначим естественное вложение, а через $r : A \to I$ $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ левый обратный оператор. По предположению $\|r\| \leq c$. Рассмотрим $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ линейный оператор $\widetilde{\sigma} = (r \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)})\sigma$. Очевидно, его норма $\langle$ не превосходит 1 / не превосходит cC $\rangle$. Так как I — правый идеал в A и P является существенным I-модулем, то $\sigma(P) = \sigma(\mathrm{cl}_P(IP)) = \mathrm{cl}_{A\widehat{\otimes}\ell_1(B_P)}(I \cdot (A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P))) = I \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P)$, поэтому $\sigma = (ir \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)})\sigma$. Более того, так как $\sigma(P) \subset I \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P)$ и $r|_I = 1_I$, то σ является I-морфизмом. Очевидно, $\pi_P(i \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)}) = \widetilde{\pi}_P$, поэтому $\widetilde{\pi}_P\widetilde{\sigma} = \pi_P(i \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)})(r \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\ell_1(B_P)})\sigma = \pi_P(ir\widehat{\otimes}1_{\ell_1(B_P)})\sigma = \pi_P\sigma = 1_P$. Таким образом, $\widetilde{\pi}_P$ — $\langle$ 1-ретракция / cC-ретракция $\rangle$ в $\langle\ I - \mathbf{mod}_1\ /\ I - \mathbf{mod}\ \rangle$, поэтому из предложения 2.1.10 следует, что I-модуль P $\langle$ метрически / cC-топологически $\rangle$ проективен. $\square$

Предложение 2.3.3. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A, и J — правый банахов A-модуль верный как I-модуль. Тогда:*

- *(i) если I — левый идеал в A и J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективный I-модуль, то J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль;*
- *(ii) если I — $\langle$ 1-дополняемый / c-дополняемый $\rangle$ правый идеал A и J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль, то J $\langle$ метрически / cC-топологически $\rangle$ инъективен как I-модуль.*

Доказательство. Через $\widetilde{\rho}_J : J \to \mathcal{B}(I,\ell_\infty(B_{J^*}))$ и $\rho_J : J \to \mathcal{B}(A,\ell_\infty(B_{J^*}))$ мы обозначим стандартные мономорфизмы.

(i) По предложению 2.1.27 морфизм $\widetilde{\rho}_J : J \to \mathcal{B}(I,\ell_\infty(B_{J^*}))$ имеет левый обратный морфизм в $\langle\ \mathbf{mod}_1 - I\ /\ \mathbf{mod} - I\ \rangle$, скажем, $\widetilde{\tau}$ нормы $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Пусть $i : I \to A$ — естественное вложение, тогда рассмотрим I-морфизм $q = \mathcal{B}(i,\ell_\infty(B_{J^*}))$. Очевидно $\widetilde{\rho}_J = q\rho_J$. Рассмотрим I-морфизм $\tau = \widetilde{\tau}q$. По предложению 2.3.1 он также является A-морфизмом. Заметим, что $\|\tau\| \leq \|\widetilde{\tau}\|\|q\| \leq \|\widetilde{\tau}\|$, поэтому и τ имеет норму $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Ясно, что $\tau\rho_J = \widetilde{\tau}q\rho_J = \widetilde{\tau}\widetilde{\rho}_J = 1_J$. Таким образом, ρ_J есть $\langle$ 1-коретракция / C-коретракция $\rangle$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$, поэтому из предложения 2.1.27 следует, что A-модуль J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен.

(ii) Поскольку J $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль, то из предложения 2.1.27 морфизм ρ_J имеет левый обратный морфизм в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$, скажем, τ нормы $\langle$ не более 1 / не более C $\rangle$. Допустим, нам дан оператор $T \in \mathcal{B}(A,\ell_\infty(B_{J^*}))$ такой, что $T|_I = 0$. Зафиксируем $a \in I$, тогда $T \cdot a = 0$, и поэтому $\tau(T) \cdot a = \tau(T \cdot a) = 0$. Так как J является верным I-модулем и $a \in I$ произволен, то $\tau(T) = 0$. Через $r : A \to I$ мы обозначим оператор левый обратный к i. Он существует по предположению и его норма не превосходит c. Определим ограниченные линейные операторы $j = \mathcal{B}(r,\ell_\infty(B_{J^*}))$ и $\widetilde{\tau} = \tau j$. Для любого $a \in I$ и $T \in \mathcal{B}(I,\ell_\infty(B_{J^*}))$ выполнено $\widetilde{\tau}(T \cdot a) - \widetilde{\tau}(T) \cdot a = \tau(j(T \cdot a) - j(T) \cdot a) = 0$ потому, что $j(T \cdot a) - j(T) \cdot a|_I = 0$. Следовательно, $\widetilde{\tau}$ есть I-морфизм. Заметим, что $\|\widetilde{\tau}\| \leq \|\tau\|\|j\|$, поэтому $\widetilde{\tau}$ имеет норму $\langle$ не более 1 / не более cC $\rangle$. Очевидно, для всех $x \in J$ выполнено $\rho_J(x) - j(\widetilde{\rho}_J(x))|_I = 0$, поэтому $\tau(\rho_J(x) - j(\widetilde{\rho}_J(x))) = 0$. Как следствие, $\widetilde{\tau}(\widetilde{\rho}_J(x)) = \tau(j(\widetilde{\rho}_J(x))) = \tau(\rho_J(x)) = x$ для всех $x \in J$. Так как $\widetilde{\tau}\widetilde{\rho}_J = 1_J$, то $\widetilde{\rho}_J$ — $\langle$ 1-коретракция / cC-коретракция $\rangle$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - I$ / $\mathbf{mod} - I$ $\rangle$, поэтому из предложения 2.1.27 следует, что I-модуль J $\langle$ метрически / cC-топологически $\rangle$ инъективен. $\square$

Предложение 2.3.4. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A, и F — банахов A-модуль существенный как I-модуль. Тогда:*

(i) если I — левый идеал в A и F $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ плоский I-модуль, то F $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ плоский A-модуль;

(ii) если I — $\langle$ 1-дополняемый / c-дополняемый $\rangle$ правый идеал A и F есть $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ плоский A-модуль, то F $\langle$ метрически / cC-топологически $\rangle$ плоский I-модуль.

Доказательство. Заметим, что модуль, сопряженный к существенному модулю, будет верным. Теперь все результаты следуют из предложений 2.1.33 и 2.3.3. $\square$

Предложение 2.3.5. *Пусть $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых алгебр и для каждого $\lambda \in \Lambda$ пусть X_λ — $\langle$ существенный / верный / существенный $\rangle$ банахов A_λ-модуль. Обозначим $A = \bigoplus_p\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, где $1 \leq p \leq +\infty$ или $p = 0$. Пусть X обозначает $\langle$ $\bigoplus_1\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ / $\bigoplus_\infty\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ / $\bigoplus_1\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ $\rangle$. Тогда:*

(i) X метрически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ A-модуль тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A_λ-модуль X_λ метрически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$;

(ii) X C-топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ A-модуль тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A_λ-модуль X_λ C-топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$.

Доказательство. Заметим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ естественное вложение $i_\lambda : A_\lambda \to A$ позволяет рассматривать A_λ как 1-дополняемый двусторонний идеал в A.

(i) Доказательство дословно повторяет рассуждения из пункта (ii).

(ii) Допустим X_λ C-топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ банахов A_λ-модуль для всех $\lambda \in \Lambda$, тогда из пункта (i) предложения $\langle$ 2.3.2 / 2.3.3 / 2.3.4 $\rangle$ этот модуль C-топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ как A-модуль. Осталось применить предложение $\langle$ 2.1.11 / 2.1.28 / 2.1.41 $\rangle$.

Обратно, допустим, что X C-топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ A-модуль. Зафиксируем произвольный $\lambda \in \Lambda$. Очевидно, мы можем рассматривать X_λ как A-модуль и более того X_λ, очевидно, является 1-ретрактом X в $\langle$ $A-\mathbf{mod}_1$ / $\mathbf{mod}_1 - A$ / $A-\mathbf{mod}_1$ $\rangle$. По предложению $\langle$ 2.1.7 / 2.1.24 / 2.1.38 $\rangle$ модуль X_λ C-топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ как A-модуль. Осталось применить пункт (ii) предложения $\langle$ 2.3.2 / 2.3.3 / 2.3.4 $\rangle$. □

2.3.2 Плоские модули и инъективные идеалы

Используя результаты предыдущих параграфов, мы докажем еще несколько полезных фактов о метрической и топологической инъективности и плоскости банаховых модулей.

Предложение 2.3.6. *Пусть B — унитальная банахова алгебра, A — ее подалгебра с двусторонней ограниченной аппроксимативной единицей $(e_\nu)_{\nu\in N}$ и пусть X — унитальный левый B-модуль. Тогда:*

(i) $X^* \underset{\mathbf{mod}-A}{\cong} X^*_{ess} \bigoplus_\infty (X/X_{ess})^*$, где $X_{ess} := \mathrm{cl}_X(AX)$;

(ii) X^*_{ess} есть C_1-дополняемый A-подмодуль в X^* для $C_1 = \sup_{\nu\in N}\|e_\nu\|$;

(iii) $(X/X_{ess})^*$ есть C_2-дополняемый A-подмодуль в X^* для $C_2 = \sup_{\nu\in N}\|e_B - e_\nu\|$;

(iv) если X является $\mathscr{L}_1$-пространством, то X_{ess} и X/X_{ess} тоже $\mathscr{L}_1$-пространства.

Доказательство. Рассмотрим естественное вложение $\rho : X_{ess} \to X : x \mapsto x$ и фактор-отображение $\pi : X \to X/X_{ess} : x \mapsto x + X_{ess}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр сечений на N и пусть $\mathfrak{U}$ ультрафильтр содержащий $\mathfrak{F}$. Для заданного $f \in X^*$ и $x \in X$ выполнено $|f(x - e_\nu \cdot x)| \leq \|f\|\|e_B - e_\nu\|\|x\| \leq C_2\|f\|\|x\|$, то есть $(f(x - e_\nu\cdot x))_{\nu\in N}$ — ограниченная направленность комплексных чисел. Следовательно, корректно определен предел $\lim_{\mathfrak{U}} f(x - e_\nu \cdot x)$ вдоль ультрафильтра $\mathfrak{U}$. Поскольку $(e_\nu)_{\nu\in N}$ есть двусторонняя аппроксимативная единица для A и $\mathfrak{U}$ содержит фильтр сечений, то для всех $x \in X_{ess}$ выполнено $\lim_{\mathfrak{U}} f(x - e_\nu\cdot x) = \lim_\nu f(x - e_\nu \cdot x) = 0$. Следовательно, для каждого $f \in X^*$ мы имеем корректно определенное отображение $\tau(f) : X/X_{ess} \to \mathbb{C} : x + X_{ess} \mapsto \lim_{\mathfrak{U}} f(x - e_\nu \cdot x)$. Очевидно, это линейный функционал и из неравенств выше мы видим, что его норма ограничена сверху константой $C_2\|f\|$. Теперь легко проверить, что $\tau : X^* \to (X/X_{ess})^* : f \mapsto \tau(f)$ есть A-морфизм нормы не более C_2.

Аналогично можно показать, что $\sigma : X^*_{ess} \to X^* : h \mapsto (x \mapsto \lim_{\mathfrak{U}} h(e_\nu \cdot x))$ есть A-морфизм с нормой не превосходящей C_1. Для любых $f \in X^*$, $g \in (X/X_{ess})^*$, $h \in X^*_{ess}$ и $x \in X$, $y \in X_{ess}$ мы имеем

$$\sigma(h)(y) = \lim_{\mathfrak{U}} h(e_\nu \cdot y) = \lim_{\nu} h(e_\nu \cdot y) = h(y), \qquad (\rho^*\sigma)(h)(y) = \sigma(h)(\rho(y))\sigma(h)(y) = h(y),$$

$$(\tau\pi^*)(g)(x + X_{ess}) = \lim_{\mathfrak{U}} \pi^*(g)(x - e_\nu \cdot x) = \lim_{\mathfrak{U}} g(\pi(x - e_\nu \cdot x)) = \lim_{\mathfrak{U}} g(x + X_{ess}) = g(x + X_{ess}),$$

$$(\tau\sigma)(h)(x + X_{ess}) = \lim_{\mathfrak{U}} \sigma(h)(x - e_\nu \cdot x) = \lim_{\mathfrak{U}} (\sigma(h)(x) - h(e_\nu \cdot x)) = \sigma(h)(x) - \lim_{\mathfrak{U}} h(e_\nu \cdot x) = 0,$$

$$(\pi^*\tau + \sigma\rho^*)(f)(x) = \tau(f)(x + X_{ess}) + \lim_{\mathfrak{U}} \rho^*(f)(e_\nu \cdot x) = \lim_{\mathfrak{U}} f(x - e_\nu \cdot x) + \lim_{\mathfrak{U}} f(e_\nu \cdot x) = f(x).$$

Следовательно, $\tau\pi^* = 1_{(X/X_{ess})^*}$, $\rho^*\sigma = 1_{X^*_{ess}}$, $\rho^*\pi^* = 0$, $\tau\sigma = 0$ и $\pi^*\tau + \sigma\rho^* = 1_{X^*}$. Это эквивалентно тому, что $X^* \underset{\mathbf{mod}-A}{\cong} X^*_{ess} \bigoplus_\infty (X/X_{ess})^*$.

Теперь рассмотрим A-морфизмы $P_1 = \sigma\rho^*$, $P_2 = \pi^*\tau$. Их равенств выше следует, что $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ и $\operatorname{Im}(P_1) \underset{\mathbf{mod}-A}{\cong} X^*_{ess}$, $\operatorname{Im}(P_2) \underset{\mathbf{mod}-A}{\cong} (X/X_{ess})^*$. Нормы этих проекторов легко оценить: $\|P_1\| \leq \|\sigma\|\|\rho^*\| = C_1$ и $\|P_2\| \leq \|\pi^*\|\|\tau\| \leq C_2$.

Теперь рассмотрим случай, когда X является $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда X^* есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство [[51], предложение 1.27]. Так как X^*_{ess} и $(X/X_{ess})^*$ дополняемы в X^*, то они тоже являются $\mathscr{L}_\infty$-пространствами [[51], предложение 1.28]. Снова из [[51], предложение 1.27] мы получаем, что X_{ess} и X/X_{ess} являются $\mathscr{L}_1$-пространствами. $\square$

Следующее предложение является аналогом [[66], предложение 2.1.11] для топологической теории.

Предложение 2.3.7. *Пусть A — банахова алгебра с двусторонней ограниченной аппроксимативной единицей, и пусть F — левый A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) F — топологически плоский A-модуль;

(ii) F_{ess} — топологически плоский A-модуль и F/F_{ess} является $\mathscr{L}_1$-пространством.

Доказательство. Будем рассматривать A как подалгебру унитальной банаховой алгебры $B := A_+$. Тогда F — унитальный левый B-модуль. Из предложения 2.3.6 мы имеем $F^* \underset{\mathbf{mod}-A}{\cong} F^*_{ess} \bigoplus_\infty (F/F_{ess})^*$. Далее предложения 2.1.33 и 2.1.28 дают, что A-модуль F топологически плоский тогда и только тогда, когда таковы F_{ess} и F/F_{ess}. Осталось заметить, что по предложению 2.2.6 аннуляторный A-модуль F/F_{ess} является топологически плоским тогда и только тогда, когда он является $\mathscr{L}_1$-пространством. $\square$

Теперь нам необходимо более детально ознакомится с понятием аменабельной банаховой алгебры. Рассмотрим морфизм A-бимодулей $\Pi_A : A \widehat{\otimes} A \to A : a \widehat{\otimes} b \mapsto ab$. Банахова алгебра A называется относительно C-аменабельной если $\Pi^*_{A_+}$ является C-коретракцией A-бимодулей. Будем говорить, что банахова алгебра A относительно аменабельна, если она относительно C-аменабельна для некоторого $C \geq 1$. С небольшими изменениями в [[52], предложение

7.1.72] можно показать, что A относительно C-аменабельна тогда и только тогда, когда существует направленность $(d_\nu)_{\nu\in N}\subset A\mathbin{\widehat{\otimes}}A$ по норме не превосходящая C, причем для всех $a\in A$ выполнено $\lim_\nu(a\cdot d_\nu-d_\nu\cdot a)=0$ и $\lim_\nu a\Pi_A(d_\nu)=a$. Такая направленность называется аппроксимативной диагональю. С гомологической точки зрения, основное преимущество относительно аменабельной алгебры в том, что любой левый и правый банахов модуль над ней является относительно плоским [[52], теорема 7.1.60].

Предложение 2.3.8. *Пусть A —относительно $\langle$ 1-аменабельная / c-аменабельная $\rangle$ банахова алгебра и F — существенный банахов A-модуль, являющийся, как банахово пространство, $\langle$ L_1-пространством / $\mathscr{L}_{1,C}$-пространством $\rangle$. Тогда F — $\langle$ метрически / c^2C-топологически $\rangle$ плоский A-модуль.*

Доказательство. Мы можем считать, что A относительно c-аменабельна с $\langle\, c=1\ /\ c\geq 1\,\rangle$. Пусть $(d_\nu)_{\nu\in N}$ — аппроксимативная диагональ для A по норме не превосходящая c. Напомним, что $(\Pi_A(d_\nu))_{\nu\in N}$ есть двусторонняя $\langle$ сжимающая / ограниченная $\rangle$ аппроксимативная единица в A. Так как F — существенный A-модуль, то $\lim_\nu\Pi_A(d_\nu)\cdot x=x$ для всех $x\in F$ [[55], предложение 0.3.15]. Как следствие, множество $c\pi_F(B_{A\widehat{\otimes}\ell_1(B_F)})$ плотно в B_F. Тогда для любого $f\in F^*$ выполнено

$$\|\pi_F^*(f)\|=\sup\{|f(\pi_F(u))|:u\in B_{A\widehat{\otimes}\ell_1(B_F)}\}=\sup\{|f(x)|:x\in \operatorname{cl}_F(\pi_F(B_{A\widehat{\otimes}\ell_1(B_F)}))\}$$

$$\geq\sup\{c^{-1}|f(x)|:x\in B_F\}=c^{-1}\|f\|$$

Это означает, что π_F^* — c-топологически инъективный оператор. По предположению F является $\langle$ L_1-пространством / $\mathscr{L}_{1,C}$-пространством $\rangle$, тогда из $\langle$ [[8], теорема 1] / [[10], теорема VI.6] $\rangle$ следует, что банахово пространство F^* будет $\langle$ метрически / C-топологически $\rangle$ инъективным. Так как оператор π_F^* $\langle$ изометричен / c-топологически инъективен $\rangle$, то существует линейный оператор $R:(A\mathbin{\widehat{\otimes}}\ell_1(B_F))^*\to F^*$ нормы $\langle$ не более 1 / не более cC $\rangle$ такой, что $R\pi_F^*=1_{F^*}$.

Пусть $h\in(A\mathbin{\widehat{\otimes}}\ell_1(B_F))^*$ и $x\in F$. Рассмотрим билинейный функционал $M_{h,x}:A\times A\to\mathbb{C}:(a,b)\mapsto R(h\cdot a)(b\cdot x)$. Очевидно, $\|M_{h,x}\|\leq\|R\|\|h\|\|x\|$. По свойству универсальности проективного тензорного произведения мы получаем ограниченный линейный функционал $m_{h,x}:A\mathbin{\widehat{\otimes}}A\to\mathbb{C}:a\mathbin{\widehat{\otimes}}b\mapsto R(h\cdot a)(b\cdot x)$. Отметим, что $m_{h,x}$ линеен по h и x. Более того, для любых $u\in A\mathbin{\widehat{\otimes}}A$, $a\in A$ и $f\in F^*$ выполнено $m_{\pi_F^*(f),x}(u)=f(\Pi_A(u)\cdot x)$, $m_{h\cdot a,x}(u)=m_{h,x}(a\cdot u)$, $m_{h,a\cdot x}(u)=m_{h,x}(u\cdot a)$. Это легко проверить на элементарных тензорах. Далее остается заметить, что их линейная оболочка плотна в $A\mathbin{\widehat{\otimes}}A$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр сечений на N и пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр содержащий $\mathfrak{F}$. Для всех $h\in(A\mathbin{\widehat{\otimes}}\ell_1(B_F))^*$ и $x\in F$ мы имеем $|m_{h,x}(d_\nu)|\leq c\|R\|\|h\|\|x\|$, то есть $(m_{h,x}(d_\nu))_{\nu\in N}$ — ограниченная направленность комплексных чисел. Следовательно корректно определен предел $\lim_{\mathfrak{U}}m_{h,x}(d_\nu)$ вдоль ультрафильтра $\mathfrak{U}$. Рассмотрим линейный оператор $\tau:(A\mathbin{\widehat{\otimes}}\ell_1(B_F))^*\to$

$F^* : h \mapsto (x \mapsto \lim_{\mathfrak{U}} m_{h,x}(d_\nu))$. Из оценок на норму $m_{h,x}$ следует, что τ — ограниченный линейный оператор, причем $\|\tau\| \leq c\|R\|$. Для всех $a \in A$, $x \in F$ и $h \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_F))^*$ выполнено

$$\tau(h \cdot a)(x) - (\tau(h) \cdot a)(x) = \tau(h \cdot a)(x) - \tau(h)(a \cdot x) = \lim_{\mathfrak{U}} m_{h \cdot a,x}(d_\nu) - \lim_{\mathfrak{U}} m_{h,a \cdot x}(d_\nu).$$

$$= \lim_{\mathfrak{U}} m_{h,x}(a \cdot d_\nu) - m_{h,x}(d_\nu \cdot a) = m_{h,x}\left(\lim_{\mathfrak{U}}(a \cdot d_\nu - d_\nu \cdot a)\right)$$
$$= m_{h,x}\left(\lim_{\nu}(a \cdot d_\nu - d_\nu \cdot a)\right) = m_{h,x}(0) = 0.$$

Следовательно, τ — морфизм правых A-модулей. Далее, для всех $f \in F^*$ и $x \in F$ мы имеем

$$(\tau(\pi_F^*)(f))(x) = \lim_{\mathfrak{U}} m_{\pi_F^*(f),x}(d_\nu) = \lim_{\mathfrak{U}} f(\Pi_A(d_\nu) \cdot x) = \lim_{\nu} f(\Pi_A(d_\nu) \cdot x)$$

$$= f\left(\lim_{\nu} \Pi_A(d_\nu) \cdot x\right) = f(x).$$

Поэтому $\tau\pi_F^* = 1_{F^*}$. Это значит, что F^* — $\langle$ 1-ретракт / c^2C-ретракт $\rangle$ модуля $(A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_F))^*$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Последний модуль $\langle$ метрически / 1-топологически $\rangle$ инъективен, потому что $(A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_F))^* \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_F))$. По предложению $\langle$ 2.1.20 / 2.1.24 $\rangle$ модуль F^* также будет $\langle$ метрически / c^2C-топологически $\rangle$ инъективным. $\square$

Теорема 2.3.9. *Пусть A — относительно аменабельная банахова алгебра и F — левый банахов A-модуль, являющийся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда F — топологически плоский A-модуль.*

Доказательство. Так как A аменабельна, то она обладает двусторонней ограниченной аппроксимативной единицей. По предложению 2.3.6 существенный A-модуль F_{ess} и аннуляторный A-модуль F/F_{ess} являются $\mathscr{L}_1$-пространствами. Тогда из предложений 2.3.8, 2.2.6 мы получаем, что F_{ess} и F/F_{ess} — топологически плоские A-модули. Снова из предложению 2.3.6 мы имеем $F^* \underset{\mathbf{mod} - A}{\cong} F_{ess}^* \bigoplus_\infty (F/F_{ess})^*$. Учитывая вышесказанное, из предложений 2.1.33 и 2.1.28 мы заключаем, что F — топологически плоский A-модуль. $\square$

В топологической банаховой гомологии, в отличие от относительной, для некоторых алгебр можно дать полное описание плоских модулей.

Следствие 2.3.10. *Пусть A — относительно аменабельная банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда для банахова A-модуля F следующие условия эквивалентны:*

(i) F — топологически плоский A-модуль;

(ii) F является $\mathscr{L}_1$-пространством.

Доказательство. Эквивалентность следует из предложения 2.2.9 и теоремы 2.3.9. $\square$

Теперь мы можем дать пример относительно плоского, но не топологически плоского идеала в банаховой алгебре. Рассмотрим $A = L_1(\mathbb{T})$. Известно, что A имеет трансляционно инвариантное бесконечномерное замкнутое подпространство I изоморфное гильбертову пространству [[77], стр. 52]. Так как I трансляционно инвариантно, то из [[53], предложение 1.4.7] мы знаем, что I является двусторонним идеалом в A. Тогда из [[67], следствие 23.3(4)] этот идеал не может быть $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда по следствию 2.3.10 идеал I не является топологически плоским A-модулем. Мы утверждаем, что он все же относительно плоский. Так как $\mathbb{T}$ — компактная группа, то она аменабельна [[74], предложение 3.12.1]. Тогда A — относительно аменабельная банахова алгебра [[52], предложение VII.1.86], поэтому все ее левые идеалы, в частности I, являются относительно плоскими A-модулями [[52], предложение VII.1.60(I)].

Перейдем к обсуждению инъективных идеалов банаховых алгебр. Такие идеалы встретятся нам при изучении метрической и топологической инъективности C^*-алгебр.

Предложение 2.3.11. *Пусть I — правый идеал банаховой алгебры A. Допустим, I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль. Тогда I имеет $\langle$ левую единицу нормы 1 / левую единицу $\rangle$ и является ретрактом A в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим изометрическое вложение $\rho^+ : I \to A_+$. Ясно, что это A-морфизм. Поскольку I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен, то ρ^+ имеет $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ левый обратный A-морфизм $\tau^+ : A_+ \to I$. Теперь для всех $x \in I$ мы имеем $x = \tau^+(\rho^+(x)) = \tau^+(e_{A_+}\rho^+(x)) = \tau^+(e_{A_+})\rho^+(x) = \tau^+(e_{A_+})x$. Другими словами $p = \tau^+(e_{A_+}) \in I$ есть левая единица для I. Очевидно, $\|p\| \leq \|\tau^+\|\|e_{A_+}\| \leq \|\tau^+\|$, поэтому $\langle$ $\|p\| \leq 1$ / $\|p\| < \infty$ $\rangle$. Рассмотрим A-модульные операторы $\rho : I \to A : x \mapsto x$ и $\tau : A \to I : x \mapsto px$. Очевидно, они $\langle$ сжимающие / ограниченные $\rangle$ морфизмы правых A-модулей и $\tau\rho = 1_I$. Значит, I есть ретракт A в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. $\square$

Предложение 2.3.12. *Пусть I — двусторонний идеал банаховой алгебры A, являющийся правым верным I-модулем. Тогда I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль тогда и только тогда, когда он $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как I-модуль.*

Доказательство. Допустим, I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль, тогда по предложению 2.3.11 он является ретрактом A в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Из пункта (ii) предложения 2.3.3 мы получаем, что I-модуль I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.

Обратная импликация непосредственно следует из пункта (i) предложения 2.3.3. $\square$

Глава 3

Приложения к алгебрам анализа

Грубо говоря, среди конкретных банаховых модулей существует три типа: модули с поточечным умножением, модули с композицией операторов в роли внешнего умножения и модули со сверткой. Мы исследуем главные примеры модулей этих типов. Следуя подходу Дэйлса и Полякова из [72], мы систематизируем все результаты о классических модулях анализа, но в этот раз для метрической и топологической теории. Мы рассмотрим модули над C^*-алгебрами, модули над алгебрами последовательностей и, наконец, классические модули гармонического анализа.

3.1 Приложения к модулям над C^*-алгебрами

3.1.1 Пространственные модули

Мы начнем с простейшего примера модулей над операторными алгебрами. По теореме Гельфанда-Наймарка [[52], теорема 4.7.57] для любой C^*-алгебры A существует гильбертово пространство H и изометрический *-гомоморфизм $\varrho : A \to \mathcal{B}(H)$. Для гильбертовых пространств H, для которых существует такой гомоморфизм, мы можем рассмотреть левый A-модуль H_ϱ с внешним умножением определенным равенством $a \cdot x = \varrho(a)(x)$. Автоматически мы получаем структуру правого A-модуля на пространстве H^*, которое по теореме Рисса изометрически изоморфно H^{cc}. Этот изоморфизм позволяет определить структуру правого A-модуля на H^{cc} с помощью равенства $\overline{x} \cdot a = \overline{\varrho(a^*)(x)}$. Такие модули мы будем называть пространственными. Их подробное исследование можно найти в работах Головина [27], [28]. В дальнейшем, для фиксированных x_1,$x_2 \in H$ через $x_1 \bigcirc x_2$ мы будем обозначать одномерный оператор $x_1 \bigcirc x_2 : H \to H : x \mapsto \langle x, x_2 \rangle x_1$.

Предложение 3.1.1. *Пусть A — C^*-алгебра и пусть $\varrho : A \to \mathcal{B}(H)$ — изометрический *-гомоморфизм такой, что его образ содержит подпространство одномерных операторов вида $\{x \bigcirc x_0 : x \in H\}$ для некоторого ненулевого вектора $x_0 \in H$. Тогда левый A-модуль H_ϱ — метрически проективный и плоский, а правый A-модуль H_ϱ^{cc} — метрически инъективный.*

Доказательство. Не теряя общности, мы можем считать, что $\|x_0\| = 1$. Рассмотрим линейные операторы $\pi : A_+ \to H_\varrho : a \oplus_1 z \mapsto \varrho(a)(x_0) + zx_0$ и $\sigma : H_\varrho \to A_+ : x \mapsto \varrho^{-1}(x \bigcirc x_0)$. Прямая проверка показывает, что π и σ — сжимающие A-морфизмы причем $\pi\sigma = 1_{H_\varrho}$. Следовательно, H_ϱ есть ретракт A_+ в $A - \mathbf{mod}_1$. Из предложений 2.1.9 и 2.1.3 следует, что H_ϱ — метрически проективный A-модуль. По предложению 2.1.40 он также метрически плоский. Так как $H_\varrho^{cc} \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} H_\varrho^*$, предложение 2.1.39 дает метрическую инъективность H_ϱ^{cc}. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующее простое следствие предыдущего предложения.

Предложение 3.1.2. *Пусть H — конечномерное гильбертово пространство. Тогда $\mathcal{N}(H)$ топологически проективный и плоский $\mathcal{B}(H)$-модуль.*

Доказательство. Из теоремы Шаттена-фон Ноймана [[52], предложение 0.3.38] мы знаем, что $\mathcal{N}(H) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} H \mathbin{\widehat{\otimes}} H^*$. Пусть $\varrho = 1_{\mathcal{B}(H)}$, тогда можно утверждать чуть больше: $\mathcal{N}(H) \underset{\mathcal{B}(H)-\mathbf{mod}_1}{\cong} H_\varrho \mathbin{\widehat{\otimes}} H^*$. Так как H^* конечномерно, то $H^* \underset{\mathbf{Ban}}{\cong} \ell_1(\mathbb{N}_n)$ для $n = \dim(H)$ и, как следствие, $\mathcal{N}(H) \underset{\mathcal{B}(H)-\mathbf{mod}}{\cong} H_\varrho \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(\mathbb{N}_n)$. По предложению 3.1.1 модуль H_ϱ топологически проективен, поэтому из следствия 2.1.12 мы получаем, что $\mathcal{N}(H)$ топологически проективен как $\mathcal{B}(H)$-модуль. Утверждение о топологической плоскости следует из предложения 2.1.40.
$\square$

3.1.2 Проективные идеалы C^*-алгебр

Изучение гомологически тривиальных идеалов C^*-алгебр мы начнем с проективности, но перед тем, как сформулировать главный результат, нам нужна подготовительная лемма.

Лемма 3.1.3. *Пусть I — левый идеал унитальной C^*-алгебры A. Пусть $a \in I$ — самосопряженный элемент, и пусть E — действительное подпространство исчезающих в нуле действительнозначных функций из $C(\operatorname{sp}_A(a))$. Тогда существует изометрический гомоморфизм $\operatorname{RCont}_a^0 : E \to I$ корректно определенный равенством $\operatorname{RCont}_a^0(f) = a$, где $f : \operatorname{sp}_A(a) \to \mathbb{C} : t \mapsto t$.*

Доказательство. Через $\mathbb{R}_0[t]$ мы обозначим действительное линейное подпространство в E, состоящее из многочленов исчезающих в нуле. Так как I — левый идеал в A и многочлен $p \in \mathbb{R}_0[t]$ не имеет свободного члена, то $p(a) \in I$. Следовательно, корректно определен $\mathbb{R}$-линейный гомоморфизм алгебр $\operatorname{RPol}_a^0 : \mathbb{R}_0[t] \to I : p \mapsto p(a)$. Из непрерывного функционального исчисления для любого многочлена p выполнено $\|p(a)\| = \|p|_{\operatorname{sp}_A(a)}\|_\infty$, поэтому $\|\operatorname{RPol}_a^0(p)\| = \|p|_{\operatorname{sp}_A(a)}\|_\infty$. Значит, RPol_a^0 изометричен. Так как $\mathbb{R}_0[t]$ плотно в E и I полно, то RPol_a^0 имеет изометрическое продолжение $\operatorname{RCont}_a^0 : E \to I$, которое является $\mathbb{R}$-линейным гомоморфизмом. $\square$

Следующее доказательство основано на идеях Блечера и Кания. В [[78], лемма 2.1] они доказали, что любой алгебраически конечно порожденный левый идеал C^*-алгебры является главным.

Теорема 3.1.4. *Пусть I — левый идеал C^*-алгебры A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $I = Ap$ для некоторого самосопряженного идемпотента $p \in I$;

(ii) I — метрически проективный A-модуль;

(iii) I — топологически проективный A-модуль.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как p — самосопряженный идемпотент, то $\|p\| = 1$, поэтому из пункта (i) предложения 2.1.13 следует, что идеал I метрически проективен как A-модуль.

$(ii) \implies (iii)$ Импликация следует из предложения 2.1.5.

$(iii) \implies (i)$ По теореме 4.7.79 из [52] мы знаем, что I обладает некоторой правой сжимающей аппроксимативной единицей $(e_\nu)_{\nu \in N}$. Так как идеал I имеет правую аппроксимативную единицу, то он является существенным левым I-модулем, и тем более существенным левым A-модулем. По предложению 2.1.10 морфизм π_I имеет правый обратный A-морфизм $\sigma : I \to A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_I)$. Для каждого $d \in B_I$ рассмотрим A-морфизмы $p_d : A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_I) \to A : a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto \delta_x(d) a$ и $\sigma_d = p_d \sigma$. Тогда $\sigma(x) = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_d$ для всех $x \in I$. Из отождествления $A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_I) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_1 \{A : d \in B_I\}$, для всех $x \in I$ мы имеем $\|\sigma(x)\| = \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(x)\|$. Так как σ есть правый обратный морфизм к π_I, то $x = \pi_I(\sigma(x)) = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) d$ для всех $x \in I$.

Для всех $x \in I$ мы имеем $\|\sigma_d(x)\| = \|\sigma_d(\lim_\nu x e_\nu)\| = \lim_\nu \|x \sigma_d(e_\nu)\| \leq \|x\| \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|$, поэтому $\|\sigma_d\| \leq \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|$. Тогда для любого множества $S \in \mathcal{P}_0(B_I)$ выполнено

$$\sum_{d \in S} \|\sigma_d\| \leq \sum_{d \in S} \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\| \leq \liminf_\nu \sum_{d \in S} \|\sigma_d(e_\nu)\| \leq \liminf_\nu \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(e_\nu)\|$$

$$= \liminf_\nu \|\sigma(e_\nu)\| \leq \|\sigma\| \liminf_\nu \|e_\nu\| \leq \|\sigma\|.$$

Так как $S \in \mathcal{P}_0(B_I)$ произвольно, то сумма $\sum_{d \in B_I} \|\sigma_d\|$ конечна. Как следствие, сумма $\sum_{d \in B_I} \|\sigma_d\|^2$ тоже конечна.

Теперь будем рассматривать алгебру A как идеал в своей унитизации $A_\#$. Тогда I также идеал в $A_\#$. Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и действительное число $\epsilon > 0$. Тогда существует множество $S \in \mathcal{P}_0(B_I)$ такое, что $\sum_{d \in B_I \setminus S} \|\sigma_d\| < \epsilon$. Обозначим мощность этого множества через N. Рассмотрим положительный элемент $b = \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d\|^2 d^* d \in I$. Из леммы 3.1.3 мы знаем, что $b^{1/m} \in I$, поэтому $b^{1/m} = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(b^{1/m}) d$. Из непрерывного функционального исчисления следует, что $\|b^{1/m}\| = \sup_{t \in \mathrm{sp}_{A_\#}(b)} t^{1/m} \leq \|b\|^{1/m}$, тогда $\limsup_{m \to \infty} \|b^{1/m}\| \leq 1$. Следовательно, $\|b^{1/m}\| \leq 2$ для достаточно больших m. Положим $\varsigma_d := \sigma_d(b^{1/m})$, $u := \sum_{d \in S} \varsigma_d d$ и

$v := \sum_{d\in B_I\setminus S} \varsigma_d d$. Тогда

$$b^{2/m} = (b^{1/m})^* b^{1/m} = u^*u + u^*v + v^*u + v^*v.$$

Ясно, что $\varsigma_d^*\varsigma_d \le \|\varsigma_d\|^2 e_{A_\#} \le \|\sigma_d\|^2\|b^{1/m}\|^2 e_{A_\#} \le 4\|\sigma_d\|^2 e_{A_\#}$. Для любых $x,y \in A$ всегда выполнено $x^*x + y^*y - (x^*y + y^*x) = (x-y)^*(x-y) \ge 0$, и поэтому

$$d^*\varsigma_d^*\varsigma_c c + c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d \le d^*\varsigma_d^*\varsigma_d d + c^*\varsigma_c^*\varsigma_c c \le 4\|\sigma_d\|^2 d^*d + 4\|\sigma_c\|^2 c^*c$$

для всех $c,d \in B_I$. Просуммируем эти неравенства по $c \in S$ и $d \in S$, тогда

$$\begin{aligned}\sum_{c\in S}\sum_{d\in S} c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d &= \frac{1}{2}\left(\sum_{c\in S}\sum_{d\in S} d^*\varsigma_d^*\varsigma_c c + \sum_{c\in S}\sum_{d\in S} c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d\right)\\ &\le \frac{1}{2}\left(4N\sum_{d\in S}\|\sigma_d\|^2 d^*d + 4N\sum_{c\in S}\|\sigma_c\|^2 c^*c\right)\\ &= 4N\sum_{d\in S}\|\sigma_d\|^2 d^*d.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$u^*u = \left(\sum_{c\in S}\varsigma_c c\right)^*\left(\sum_{d\in S}\varsigma_d d\right) = \sum_{c\in S}\sum_{d\in S} c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d \le N\sum_{d\in S} 4\|\sigma_d\|^2 d^*d \le 4Nb.$$

Заметим, что

$$\|u\| \le \sum_{d\in S}\|\varsigma_d\|\|d\| \le \sum_{d\in S} 2\|\sigma_d\| \le 2\|\sigma\|, \qquad \|v\| \le \sum_{d\in B_I\setminus S}\|\varsigma_d\|\|d\| \le \sum_{d\in B_I\setminus S} 2\|\sigma_d\| \le 2\epsilon;$$

поэтому $\|u^*v + v^*u\| \le 8\|\sigma\|\epsilon$ и $\|v^*v\| \le 4\epsilon^2$. Так как $u^*v + v^*u$ и v^*v — самосопряженные элементы, то $u^*v + v^*u \le 8\|\sigma\|\epsilon e_{A_\#}$ и $v^*v \le 4\epsilon^2 e_{A_\#}$ Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ и достаточно большого m выполнено

$$b^{2/m} = u^*u + u^*v + v^*u + v^*v \le 4Nb + \epsilon(8\|\sigma\| + 4\epsilon)e_{A_\#}.$$

Другими словами, $g_m(b) \ge 0$ для непрерывной функции $g_m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : t \mapsto 4Nt + \epsilon(8\|\sigma\| + 4\epsilon) - t^{2/m}$. Теперь выберем $\epsilon > 0$ так, чтобы $M := \epsilon(8\|\sigma\| + 4\epsilon) < 1$. По теореме об отображении спектра [[40], теорема 6.4.2] мы получаем $g_m(\mathrm{sp}_{A_\#}(b)) = \mathrm{sp}_{A_\#}(g_m(b)) \subset \mathbb{R}_+$. Легко проверить, что g_m имеет только одну точку экстремума $t_{0,m} = (2Nm)^{\frac{m}{2-m}}$, где она достигает минимума. Так как $\lim_{m\to\infty} g_m(t_{0,m}) = M - 1 < 0$, $g_m(0) = M > 0$ и $\lim_{t\to\infty} g_m(t) = +\infty$, то для достаточно больших m функция g_m имеет ровно два корня: $t_{1,m} \in (0,t_{0,m})$ и $t_{2,m} \in (t_{0,m}, +\infty)$. Следовательно, решением неравенства $g_m(t) \ge 0$ будет $t \in [0,t_{1,m}] \cup [t_{2,m}, +\infty)$. Значит, $\mathrm{sp}_{A_\#}(b) \subset [0,t_{1,m}] \cup [t_{2,m}, +\infty)$ для всех достаточно больших m. Так как $\lim_m t_{0,m} = 0$, то так же $\lim_m t_{1,m} = 0$. Заметим, что $g_m(1) = 4N + M - 1 > 0$ для достаточно больших m, и поэтому $t_{2,m} \leq 1$. Следовательно, $\mathrm{sp}_{A_\#}(b) \subset \{0\} \cup [1, +\infty)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \min(1, t)$. Тогда по лемме 3.1.3 мы получаем идемпотент $p = h(b) = \mathrm{RCont}_b^0(h) \in I$, такой, что $\|p\| = \sup_{t \in \mathrm{sp}_{A_\#}(b)} |h(t)| \leq 1$. Следовательно, p — самосопряженный идемпотент. Так как $h(t)t = th(t) = t$ для всех $t \in \mathrm{sp}_{A_\#}(b)$, то $bp = pb = b$. Последнее равенство влечет

$$0 = (e_{A_\#} - p)b(e_{A_\#} - p) = \sum_{d \in B_I} (\|\sigma_d\| d(e_{A_\#} - p))^* \|\sigma_d\| d(e_{A_\#} - p).$$

Так как правая часть этого равенства неотрицательна, то $d = dp$ для всех $d \in B_I$, для которых $\sigma_d \neq 0$. Наконец, для всех $x \in I$ мы получаем $xp = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) dp = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) d = x$, то есть $I = Ap$ для некоторого самосопряженного идемпотента $p \in I$. $\square$

Следует отметить, что в относительной теории нет аналогичного описания относительной проективности левых идеалов C^*-алгебр. Правда, известно, что для случая сепарабельных C^*-алгебр (то есть для C^*-алгебр сепарабельных как банахово пространство) все левые идеалы относительно проективны. В [[79], параграф 6] можно найти хороший обзор последних результатов на эту тему.

Следствие 3.1.5. *Пусть I — двусторонний идеал C^*-алгебры A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) I унитален;

(ii) I метрически проективен как A-модуль;

(iii) I топологически проективен как A-модуль.

Доказательство. Идеал I имеет сжимающую аппроксимативную единицу [[52], теорема 4.7.79]. Следовательно, I имеет правую единицу тогда и только тогда, когда он унитален. Теперь все эквивалентности следуют из теоремы 3.1.4. $\square$

Следствие 3.1.6. *Пусть L — хаусдорфово локально компактное пространство, и пусть I — идеал в $C_0(L)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{Spec}(I)$ компактен;

(ii) I метрически проективный $C_0(L)$-модуль;

(iii) I топологически проективный $C_0(L)$-модуль.

Доказательство. По теореме Гельфанда-Наймарка $I \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C_0(\operatorname{Spec}(I))$; следовательно, идеал I полупрост. Отсюда, в силу теоремы Шилова об идемпотентах, идеал I унитален тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec}(I)$ компактен. Осталось применить следствие 3.1.5. □

Отметим, что класс относительно проективных идеалов в $C_0(L)$ намного шире. Известно, что идеал I в алгебре $C_0(L)$ относительно проективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec}(I)$ паракомпактен [[55], глава IV,§§2–3].

3.1.3 Инъективные идеалы C^*-алгебр

Перейдем к обсуждению инъективности двусторонних идеалов C^*-алгебр. К сожалению, мы не получим полного их описания, но приведем много примеров и некоторые необходимые условия.

Заметим, что двусторонний идеал I в C^*-алгебре A сам является C^*-алгеброй с сжимающей аппроксимативной единицей [[52], теорема 4.7.79]. Следовательно, I верен как I-модуль. Теперь из предложения 2.3.12 мы получаем, что I топологически инъективен как A-модуль тогда и только тогда, когда I топологически инъективен как I-модуль. Следовательно, при рассмотрении идеалов мы можем ограничиться рассмотрением C^*-алгебр $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективных над собой как правые модули.

Нам необходимо напомнить несколько фактов об AW^*-алгебрах, так как в этом параграфе они играют ключевую роль. В попытках дать чисто алгебраическое определение для W^*-алгебр в [80] Капланский определил этот класс C^*-алгебр. Алгебра A называется AW^*-алгеброй, если это C^*-алгебра, такая, что для любого подмножества $S \subset A$ правый алгебраический аннулятор $\operatorname{r.ann}_A(S) = \{y \in A : Sy = \{0\}\}$ имеет вид pA для некоторого самосопряженного идемпотента $p \in A$. Этот класс содержит все W^*-алгебры, но он строго больше. Заметим, что в случае коммутативных C^*-алгебр свойство быть AW^*-алгеброй эквивалентно тому, что $\operatorname{Spec}(A)$ является стоуновым пространством [[81], теорема 1.7.1]. Главные результаты об AW^*-алгебрах и более общих бэровских *-кольцах можно найти в [81].

Следующее предложение есть комбинация результатов Хаманы и Такесаки.

Предложение 3.1.7 (Хамана, Такесаки)**.** *C^*-алгебра метрически инъективна как правый модуль над собой тогда и только тогда, когда она является коммутативной AW^*-алгеброй.*

Доказательство. Если алгебра A метрически инъективна как A-модуль, то по предложению 2.3.11 она имеет левую единицу нормы 1. Так как A также обладает сжимающей аппроксимативной единицей [[52], теорема 4.7.79], то A унитальна. Теперь из результата Хаманы [[30], предложение 2] алгебра A есть коммутативная AW^*-алгебра. Хотя Хамана доказал этот факт для левых модулей, его доказательство легко модифицировать и для случая правых модулей.

Обратную импликацию доказал Такесаки в [[82], теорема 2]. Хотя в работе рассматривались двусторонние модули, рассуждение для правых модулей точно такое же. □

Осталось рассмотреть топологическую инъективность. Как показывает следующее предложение, топологически инъективные C^*-алгебры, говоря нестрого, не так уж далеки от коммутативных. Это предложение использует банахово-геометрическое свойство l.u.st. Его определение можно найти в параграфе 2.2.2.

Предложение 3.1.8. *Пусть A — C^*-алгебра, топологически инъективная как A-модуль. Тогда A обладает свойством l.u.st и, как следствие, не может содержать $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ как *-подалгебру для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. По теореме Гельфанда-Наймарка [[52], теорема 4.7.57] существует гильбертово пространство H и изометрический *-гомоморфизм $\varrho : A \to \mathcal{B}(H)$. Обозначим $\Lambda := B_{H_\varrho^{cc}}$. Легко проверить, что оператор

$$\rho : A \to \bigoplus\nolimits_\infty \{H_\varrho^{cc} : \overline{x} \in \Lambda\} : a \mapsto \bigoplus\nolimits_\infty \{\overline{x} \cdot a : \overline{x} \in \Lambda\}$$

является изометрическим морфизмом правых A-модулей. Так как A топологически инъективна как A-модуль, то ρ имеет правый обратный A-морфизм τ. Следовательно, A дополняемо в $E := \bigoplus_\infty \{H_\varrho^{cc} : \overline{x} \in \Lambda\}$ посредством проектора $\rho\tau$. Заметим, что H_ϱ^{cc}, как любое гильбертово пространство, является банаховой решеткой, поэтому E тоже банахова решетка. Как любая банахова решетка E имеет свойство l.u.st [[50], теорема 17.1], и, следовательно, это свойство имеет A, так как свойство l.u.st наследуется дополняемыми подпространствами.

Допустим, A содержит $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ как *-подалгебру для произвольного $n \in \mathbb{N}$. На самом деле, такая копия алгебры $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ необходимо 1-дополняема в A [[83], лемма 2.1]. Следовательно, для локальных безусловных констант выполнено неравенство $\kappa_u(\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))) \leq \kappa_u(A)$. По теореме 5.1 из [84] мы знаем, что $\lim_n \kappa_u(\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))) = +\infty$, поэтому $\kappa_u(A) = +\infty$. Это противоречит тому, что A обладает свойством l.u.st. Значит, A не может содержать $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ как *-подалгебру для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Напомним важную в теории C^*-алгебр конструкцию матричной алгебры. Для заданной C^*-алгебры A через $M_n(A)$ мы обозначим линейное пространство матриц размера $n \times n$ со значениями в A. Это линейное пространство можно наделить структурой *-алгебры с инволюцией и умножением с помощью равенств

$$(ab)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}, \qquad (a^*)_{i,j} = (a_{j,i}^*)$$

для всех $a,b \in M_n(A)$ и $i,j \in \mathbb{N}_n$. Существует единственная норма на $M_n(A)$, которая превращает ее в C^*-алгебру [[85], теорема 3.4.2]. Очевидно, $M_n(\mathbb{C})$ изометрически изоморфна как *-алгебра алгебре $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$. Из [[85], замечание 3.4.1] следует, что естественные вложения $i_{k,l} : A \to M_n(A) : a \mapsto (a\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ и проекции $\pi_{k,l} : M_n(A) \to A : a \mapsto a_{k,l}$ непрерывны. Следовательно, для заданного непрерывного оператора $\phi : A \to B$ между C^*-алгебрами A и

B линейный оператор

$$M_n(\phi) : M_n(A) \to M_n(B) : a \mapsto (\phi(a_{i,j}))_{i,j \in \mathbb{N}_n}$$

также непрерывен. Более того, если ϕ — A-морфизм, то $M_n(\phi)$ есть $M_n(A)$-морфизм. Наконец, упомянем два изометрических изоморфизма связанных с матричными алгебрами:

$$M_n\left(\bigoplus\nolimits_\infty \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty \{M_n\left(A_\lambda\right) : \lambda \in \Lambda\}, \qquad M_n(C(K)) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C(K, M_n(\mathbb{C})).$$

Как показывает предложение 3.1.8, топологически инъективные над собой C^*-алгебры не могут содержать $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ как *-подалгебру для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$. C^*-алгебры не содержащие $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ как *-подалгебру для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ называются субоднородными. Они являются замкнутыми *-подалгебрами [[54], предложение IV.1.4.3] алгебр $M_n(C(K))$ для некоторого компактного хаусдорфова пространства K и некоторого натурального числа n. Больше подробностей о субоднородных C^*-алгебрах можно найти в [[54], параграф IV.1.4].

Приведем два важных примера некоммутативных C^*-алгебр топологически инъективных над собой.

Предложение 3.1.9. *Пусть H — конечномерное гильбертово пространство. Тогда пространство $\mathcal{B}(H)$ — топологически инъективный $\mathcal{B}(H)$-модуль.*

Доказательство. Напомним, что $\mathcal{B}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-\mathcal{B}(H)}{\cong} \mathcal{N}(H)^*$. Теперь результат немедленно следует из предложений 3.1.2 и 2.1.39. □

Предложение 3.1.10. *Пусть K — стоуново пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда пространство $M_n(C(K))$ — топологически инъективный $M_n(C(K))$-модуль.*

Доказательство. Для заданного $s \in K$ через $\mathbb{C}_s$ мы будем обозначать правый $C(K)$-модуль $\mathbb{C}$ с внешним умножением определенным равенством $z \cdot a = a(s)z$ для всех $a \in C(K)$ и $z \in \mathbb{C}_s$. Аналогично, через $M_n(\mathbb{C}_s)$ мы обозначим правый банахов $M_n(C(K))$-модуль $M_n(\mathbb{C})$ с внешним умножением определенным равенством

$$(x \cdot a)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} a_{k,j}$$

для каждого $a \in M_n(C(K))$ и $x \in M_n(\mathbb{C}_s)$. Известно, что C^*-алгебра $M_n(C(K))$ ядерна [[86], следствие 2.4.4], тогда из [[87], теорема 3.1] следует, что она относительно аменабельна и даже 1-аменабельна [[88], пример 2]. Так как пространство $M_n(\mathbb{C}_s)$ конечномерно, то оно является $\mathscr{L}_{1,C}$-пространством для некоторой константы $C \geq 1$ не зависящей от s. Тогда по предложению 2.3.8 банахов $M_n(C(K))$-модуль $M_n(\mathbb{C}_s)^*$ C-топологически плоский. Так как этот модуль существенный, то по предложению 2.1.37 правый $M_n(C(K))$-модуль $M_n(\mathbb{C}_s)^{**}$ C-топологически инъективен. Так как $M_n(\mathbb{C}_s)^{**}$ изометрически изоморфен $M_n(\mathbb{C}_s)$ как правый $M_n(C(K))$-модуль, то из предложения 2.1.28 мы получаем, что $\bigoplus_\infty\{M_n(\mathbb{C}_s) : s \in K\}$ — топологически инъективный $M_n(C(K))$-модуль.

Заметим, что по предложению 3.1.7 банахов $C(K)$-модуль $C(K)$ метрически инъективен, поэтому изометрический $C(K)$-морфизм $\widetilde{\rho} : C(K) \to \bigoplus_\infty\{\mathbb{C}_s : s \in K\} : x \mapsto \bigoplus_\infty\{x(s) : s \in K\}$ имеет левый обратный сжимающий $C(K)$-морфизм $\widetilde{\tau} : \bigoplus_\infty\{\mathbb{C}_s : s \in K\} \to C(K)$. Теперь легко проверить, что линеные операторы

$$\rho : M_n(C(K)) \to \bigoplus_\infty\{M_n(\mathbb{C}_s) : s \in K\} : x \mapsto \bigoplus_\infty\{(x_{i,j}(s))_{i,j\in\mathbb{N}_n} : s \in K\}$$

$$\tau : \bigoplus_\infty\{M_n(\mathbb{C}_s) : s \in K\} \to M_n(C(K)) : y \mapsto \left(\widetilde{\tau}\left(\bigoplus_\infty\{y_{s,i,j} : s \in K\}\right)\right)_{i,j\in\mathbb{N}_n}$$

являются $M_n(C(K))$-морфизмами, причем $\tau\rho = 1_{M_n(C(K))}$. Следовательно, $M_n(C(K))$ является ретрактом топологически инъективного $M_n(C(K))$-модуля $\bigoplus_\infty\{M_n(\mathbb{C}_s) : s \in K\}$ в $\mathbf{mod}_1 - M_n(C(K))$. Наконец, из предложения 2.1.20 мы получаем, что $M_n(C(K))$ топологически инъективен как $M_n(C(K))$-модуль. $\square$

Теорема 3.1.11. *Пусть A — C^*-алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A — топологически инъективная как A-модуль AW^*-алгебра;

(ii) A изоморфна как C^*-алгебра алгебре $\bigoplus_\infty\{M_{n_\lambda}(C(K_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ для некоторого конечного набора стоуновых пространств $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и натуральных чисел $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Из предложения 6.6 в [89] мы знаем, что AW^*-алгебра либо изоморфна как C^*-алгебра алгебре $\bigoplus_\infty\{M_{n_\lambda}(C(K_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ для некоторого конечного набора натуральных чисел $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и стоуновых пространств $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, либо содержит $\bigoplus \infty\{\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n)) : n \in \mathbb{N}\}$ как *-подалгебру. Последняя возможность исключается предложением 3.1.8.

$(ii) \implies (i)$ Для каждого $\lambda \in \Lambda$ алгебра $M_{n_\lambda}(C(K_\lambda))$ унитальна, так как K_λ компактно. Следовательно, $M_{n_\lambda}(C(K_\lambda))$ — верный $M_{n_\lambda}(C(K_\lambda))$-модуль. По предложению 3.1.10 это еще и топологически инъективный $M_{n_\lambda}(C(K_\lambda))$-модуль. Теперь топологическая инъективность A как A-модуля следует из пункта (ii) предложения 2.3.5. Достаточно положить $p = \infty$ и $X_\lambda = A_\lambda = M_{n_\lambda}(C(K_\lambda))$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Для всех $\lambda \in \Lambda$ алгебра $C(K_\lambda)$ является AW^*-алгеброй потому, что K_λ — стоуново пространство [[81], теорема 1.7.1]. Следовательно, $M_{n_\lambda}(C(K_\lambda))$ также является AW^*-алгеброй [[81], следствие 9.62.1]. Наконец, A есть AW^*-алгебра как $\bigoplus_\infty$-сумма AW^*-алгебр [[81], предложение 1.10.1]. $\square$

Хотелось бы доказать, что топологически инъективные над собой C^*-алгебры являются AW^*-алгебрами, но, похоже, это очень сложная задача даже в коммутативном случае.

3.1.4 Плоские идеалы C^*-алгебр

Рассмотрением метрической и топологической плоскости мы завершим это длинное изучение идеалов C^*-алгебр.

Предложение 3.1.12. *Пусть I — левый идеал C^*-алгебры A. Тогда I — метрически и топологически плоский A-модуль.*

Доказательство. По предложению 4.7.78 из [52] идеал I имеет сжимающую аппроксимативную единицу. Остается применить предложение 2.1.42. □

Для доказательства следующего предложения нам понадобится определение слабо секвенциально полного банахова пространства. Будем говорить, что банахово пространство E слабо секвенциально полно, если для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ такой, что последовательность $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ фундаментальна для всех $f \in E^*$, существует вектор $x \in E$ такой, что $\lim_n f(x_n) = f(x)$ для всех $f \in E^*$. Другими словами: всякая последовательность, фундаментальная в слабой топологии, сходится в слабой топологии. Стандартный пример слабо секвенциально полного банахова пространства — это любое L_1-пространство [[90], следствие III.C.14]. Это свойство наследуется замкнутыми подпространствами. Стандартный пример банахова пространства, не являющегося слабо секвенциально полным, — это $c_0(\mathbb{N})$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть последовательность $(\sum_{k=1}^n \delta_k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Предложение 3.1.13. *Пусть I — собственный двусторонний идеал C^*-алгебры A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *A является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоским I-модулем;*

(ii) $\langle$ $\dim(A) = 1$, $I = \{0\}$ / *факторалгебра A/I конечномерна* $\rangle$.

Доказательство. Мы можем рассматривать I как идеал в унитизации $A_\#$ алгебры A. Так как I — двусторонний идеал, то он имеет сжимающую двустороннюю аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$ такую, что $0 \leq e_\nu \leq e_{A_\#}$ [[52], предложение 4.7.79]. Как следствие, $\sup_{\nu\in N} \|e_{A_\#} - e_\nu\| \leq 1$. Снова из-за наличия аппроксимативной единицы в I мы имеем $A_{ess} := \operatorname{cl}_A(IA) = I$.

Для начала рассмотрим случай топологической плоскости. По предложению 2.3.7 банахов I-модуль A будет топологически плоским тогда и только тогда, когда $A_{ess} = I$ и $A/A_{ess} = A/I$ будут топологически плоскими I-модулями. По предложению 3.1.12 идеал I топологически плоский как I-модуль. По предложению 2.2.6 аннуляторный I-модуль A/I топологически плоский тогда и только тогда, когда он является $\mathscr{L}_1$-пространством. Мы утверждаем, что модуль A/I есть $\mathscr{L}_1$-пространство тогда и только тогда, когда он конечномерен. Допустим, модуль A/I является $\mathscr{L}_1$-пространством, тогда он слабо секвенциально полон [[51], предложение 1.29]. Так как I — двусторонний идеал, то A/I есть C^*-алгебра [[52], теорема 4.7.81].

По предложению 2 из [91] каждая слабо секвенциально полная C^*-алгебра конечномерна, поэтому A/I конечномерно. Обратно, если алгебра A/I конечномерна, то она является $\mathscr{L}_1$-пространством, как и любое конечномерное банахово пространство.

Перейдем к рассмотрению метрической плоскости. Допустим, A — метрически плоский I-модуль. Из предложения 2.1.35 следует, что A — топологически плоский I-модуль, поэтому из рассуждений предыдущего абзаца мы знаем, что A/I — конечномерная C^*-алгебра. Как мы сказали ранее, $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_\#} - e_\nu\| \leq 1$, поэтому из пункта (iii) предложения 2.3.6 следует, что $(A/A_{ess})^* = (A/I)^*$ есть ретракт A^* в $\mathbf{mod}_1 - I$. Теперь из предложений 2.1.33 и 2.1.20 следует, что A/I есть метрически плоский I-модуль. Так как это аннуляторный I-модуль, то из предложения 2.2.6 следует, что $I = \{0\}$ и A/I есть L_1-пространство. Как мы показали, ранее пространство A/I конечномерно, поэтому $A/I \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\mathbb{N}_n)$ для $n = \dim(A/I)$. С другой стороны, A/I — конечномерная C^*-алгебра, поэтому она изометрически изоморфна пространству $\bigoplus_\infty \{\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_{n_k})) : k \in \mathbb{N}_m\}$ для некоторых натуральных чисел $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ [[92], теорема III.1.1]. Допустим, что $\dim(A/I) > 1$, тогда A содержит изометрическую копию $\ell_\infty(\mathbb{N}_2)$. Следовательно, имеется изометрическое вложение $\ell_\infty(\mathbb{N}_2)$ в $\ell_1(\mathbb{N}_n)$. Это невозможно по теореме 1 из [93]. Следовательно, $\dim(A/I) = 1$. Так как $I = \{0\}$, то $\dim(A) = 1$. Обратно, если $I = \{0\}$ и $\dim(A) = 1$, то мы имеем аннуляторный I-модуль A который изометрически изоморфен $\ell_1(\mathbb{N}_1)$. По предложению 2.2.6 он является метрически плоским. □

3.1.5 $\mathcal{K}(H)$- и $\mathcal{B}(H)$-модули

В этом параграфе мы применим результаты об идеалах C^*-алгебр к изучению классических модулей над алгеброй компактных и алгеброй ограниченных операторов на гильбертовом пространстве. Для произвольного гильбертова пространства H рассмотрим $\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{K}(H)$ и $\mathcal{N}(H)$ как левые и правые банаховы модули над $\mathcal{B}(H)$ и $\mathcal{K}(H)$. Для всех этих модулей внешнее умножение — это композиция операторов. Нам также пригодятся изоморфизмы Шаттена-фон Нойманна $\mathcal{N}(H) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{K}(H)^*$, $\mathcal{B}(H) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \mathcal{N}(H)^*$ [[94], теоремы II.1.6, II.1.8]. На самом деле, это изоморфизмы левых и правых $\mathcal{B}(H)$- и, тем более, $\mathcal{K}(H)$-модулей.

Предложение 3.1.14. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда:*

(i) *$\mathcal{B}(H)$ метрически и топологически проективный и плоский как $\mathcal{B}(H)$-модуль;*

(ii) *$\mathcal{B}(H)$ метрически или топологически проективный или плоский как $\mathcal{K}(H)$-модуль тогда и только тогда, когда H конечномерно;*

(iii) *$\mathcal{B}(H)$ топологически инъективен как $\mathcal{B}(H)$- или $\mathcal{K}(H)$-модуль тогда и только тогда, когда H конечномерно;*

(iv) *$\mathcal{B}(H)$ метрически инъективен как $\mathcal{B}(H)$- или $\mathcal{K}(H)$-модуль тогда и только тогда, когда* $\dim(H) \leq 1$.

Доказательство. (i) Так как $\mathcal{B}(H)$ унитальная алгебра, то по предложению 2.1.9 она метрически и топологически проективна как $\mathcal{B}(H)$-модуль. Оба результата о плоскости следуют из предложения 2.1.40.

(ii) Для бесконечномерного H банахово пространство $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ бесконечномерно, поэтому из предложения 3.1.13 следует, что модуль $\mathcal{B}(H)$ не является ни метрически ни топологически плоским как $\mathcal{K}(H)$-модуль. Оба утверждения о проективности следуют из предложения 2.1.40. Если H конечномерно, то $\mathcal{K}(H) = \mathcal{B}(H)$, поэтому утверждение следует из пункта (i).

(iii) Если H бесконечномерно, то $\mathcal{B}(H)$ содержит $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}_n))$ как *-подалгебру для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из предложения 3.1.8 следует, что $\mathcal{B}(H)$ не является топологически инъективным $\mathcal{B}(H)$-модулем. Все остальное следует из пункта (i) предложения 2.3.3. Если H конечномерно, то $\mathcal{K}(H) = \mathcal{B}(H)$, поэтому утверждение следует из предложения 3.1.9.

(iv) Если $\dim(H) > 1$, то $\mathcal{B}(H)$ некоммутативная C^*-алгебра. По предложению 3.1.7 она не будет метрически инъективной как $\mathcal{B}(H)$-модуль. Теперь из пункта (i) предложения 2.3.3 мы получаем, что $\mathcal{B}(H)$ не является метрически инъективным как $\mathcal{K}(H)$-модуль. Если $\dim(H) \leq 1$, оба утверждения, очевидно, следуют из предложения 3.1.7. □

Предложение 3.1.15. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда:*

(i) $\mathcal{K}(H)$ *метрически и топологически плоский как* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль;*

(ii) $\mathcal{K}(H)$ *метрически или топологически проективный как* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль тогда и только тогда, когда* H *конечномерно;*

(iii) $\mathcal{K}(H)$ *топологически инъективный как* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль тогда и только тогда, когда* H *конечномерно;*

(iv) $\mathcal{K}(H)$ *метрически инъективный как* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль тогда и только тогда, когда* $\dim(H) \leq 1$.

Доказательство. Через A мы обозначим одну из алгебр $\mathcal{B}(H)$ или $\mathcal{K}(H)$. Отметим, что $\mathcal{K}(H)$ — это двусторонний идеал в A.

(i) Напомним, что $\mathcal{K}(H)$ имеет сжимающую аппроксимативную единицу состоящую из конечномерных проекторов на все конечномерные подпространства в H. Так как $\mathcal{K}(H)$ — это двусторонний идеал в A, то утверждение следует из предложения 3.1.12.

(ii), (iii), (iv) Если H бесконечномерно, то $\mathcal{K}(H)$ не является унитальной банаховой алгеброй. Из следствия 3.1.5 и предложения 2.3.11 банахов A-модуль $\mathcal{K}(H)$ не является ни метрически ни топологически проективным или инъективным. Если H конечномерно, то $\mathcal{K}(H) = \mathcal{B}(H)$, поэтому оба результата следуют из пунктов (i), (iii) и (iv) предложения 3.1.14.
□

Предложение 3.1.16. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда:*

(i) $\mathcal{N}(H)$ *метрически и топологически инъективен как* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль;*

(ii) $\mathcal{N}(H)$ *топологически проективный или плоский* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль тогда и только тогда, когда* H *конечномерно;*

(iii) $\mathcal{N}(H)$ *метрически проективный или плоский как* $\mathcal{B}(H)$*- или* $\mathcal{K}(H)$*-модуль тогда и только тогда, когда* $\dim(H) \leq 1$.

Доказательство. Через A мы обозначим одну из алгебр $\mathcal{B}(H)$ или $\mathcal{K}(H)$.

(i) Заметим, что $\mathcal{N}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \mathcal{K}(H)^*$, поэтому утверждение следует из предложения 2.1.33 и пункта (i) предложения 3.1.15.

(ii) Допустим, H бесконечномерно. Так как $\mathcal{B}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \mathcal{N}(H)^*$, то из предложения 2.1.39 и пункта (iii) предложения 3.1.14 мы получаем, что $\mathcal{N}(H)$ не является топологически проективным как A-модуль. Оба результата о плоскости следуют из предложения 2.1.40. Если H конечномерно, то результат следует из предложения 3.1.2.

(iii) Допустим, что $\dim(H) > 1$, тогда из пункта (iv) предложения 3.1.14 банахов A-модуль $\mathcal{B}(H)$ не является метрически инъективным. Так как $\mathcal{B}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \mathcal{N}(H)^*$, то из предложения 2.1.33 мы получаем, что $\mathcal{N}(H)$ не является метрическим плоским A-модулем. По предложению 2.1.40, он не будет метрически проективным A-модулем. Если $\dim(H) \leq 1$, тогда $\mathcal{N}(H) = \mathcal{K}(H) = \mathcal{B}(H)$, поэтому утверждение следует из пункта (i) предложения 3.1.14. □

Предложение 3.1.17. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда:*

(i) как $\mathcal{K}(H)$*-модуль* $\mathcal{N}(H)$ *является относительно проективным, инъективным и плоским,* $\mathcal{K}(H)$ *является относительно проективным и плоским, но относительно инъективным только для конечномерного* H*,* $\mathcal{B}(H)$ *является относительно инъективным и плоским, но относительно проективным только для конечномерного* H*;*

(ii) как $\mathcal{B}(H)$*-модуль* $\mathcal{N}(H)$ *является относительно проективным, инъективным и плоским,* $\mathcal{K}(H)$ *является относительно проективным и плоским,* $\mathcal{B}(H)$ *является относительно проективным, инъективным и плоским.*

Доказательство. (i) Заметим, что H есть относительно проективный $\mathcal{K}(H)$-модуль [[52], теорема 7.1.27], поэтому из предложения 7.1.13 в [52] мы получаем, что $\mathcal{N}(H) \underset{\mathcal{K}(H)-\mathbf{mod}_1}{\cong} H \widehat{\otimes} H^*$ относительно проективен как $\mathcal{K}(H)$-модуль. По теореме IV.2.16 из [55] банахов $\mathcal{K}(H)$-модуль $\mathcal{K}(H)$ относительно проективен. Тем более $\mathcal{N}(H)$ и $\mathcal{K}(H)$ относительно плоские $\mathcal{K}(H)$-модули [[52], предложение 7.1.40], поэтому $\mathcal{N}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-\mathcal{K}(H)}{\cong} \mathcal{K}(H)^*$ и $\mathcal{B}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-\mathcal{K}(H)}{\cong} \mathcal{N}(H)^*$ есть относительно инъективные $\mathcal{K}(H)$-модули. Из [[66], предложение 2.2.8 (i)] мы знаем, что банахова алгебра, относительно инъективная над собой, как правый модуль, обязана иметь левую единицу. Следовательно, $\mathcal{K}(H)$ не является относительно инъективным $\mathcal{K}(H)$-модулем для бесконечномерного H. Если H конечномерно, то $\mathcal{K}(H)$-модуль $\mathcal{K}(H)$ относительно инъективен потому, что $\mathcal{K}(H) = \mathcal{B}(H)$, и как мы показали ранее, $\mathcal{B}(H)$ относительно инъективен как $\mathcal{K}(H)$-модуль. По следствию 5.5.64 из [56] алгебра $\mathcal{K}(H)$ относительно аменабельна, поэтому все ее левые модули относительно плоские [[52], теорема 7.1.60]. В частности, $\mathcal{B}(H)$ относительно плоский $\mathcal{K}(H)$-модуль. Из [[55], упражнение V.2.20] мы знаем, что $\mathcal{B}(H)$ не является относительно проективным $\mathcal{K}(H)$-модулем для бесконечномерного H. Если H конечномерно, то $\mathcal{B}(H)$ относительно проективен как $\mathcal{K}(H)$-модуль потому, что $\mathcal{B}(H) = \mathcal{K}(H)$, и как мы показали ранее, $\mathcal{K}(H)$ относительно проективный $\mathcal{K}(H)$-модуль.

(ii) Из пункта (i) предложения 3.1.14 и предложения 2.1.5 следует, что $\mathcal{B}(H)$ — относительно проективный $\mathcal{B}(H)$-модуль. Из [[66], предложения 2.3.3, 2.3.4] мы знаем, что $\langle$ существенный относительно проективный / верный относительно инъективный $\rangle$ модуль над идеалом банаховой алгебры будет $\langle$ относительно проективным / относительно инъективным $\rangle$ над самой алгеброй. Так как $\mathcal{K}(H)$ и $\mathcal{N}(H)$ — существенные и верные $\mathcal{K}(H)$-модули, то из результатов предыдущего пункта мы получаем, что $\mathcal{N}(H)$ является относительно проективным и плоским, а $\mathcal{K}(H)$ является относительно проективным $\mathcal{B}(H)$-модулем. Теперь, из [[52], предложение 7.1.40] следует, что все вышеупомянутые модули относительно плоские как $\mathcal{B}(H)$-модули. В частности, $\mathcal{B}(H) \underset{\mathbf{mod}_1-\mathcal{B}(H)}{\cong} \mathcal{N}(H)^*$ относительно инъективен как $\mathcal{B}(H)$-модуль. □

Результаты этого параграфа собраны в следующих трех таблицах. Каждая ячейка таблицы содержит условие, при котором соответствующий модуль имеет соответствующее свойство, и предложение, в котором это доказано. Мы используем символ ??? для случаев где ответ нам не известен. Из таблиц видно, что для некоммутативных алгебр гомологическая тривиальность встречается в метрической и топологической теории очень редко. Проще указать случаи, в которых метрические и топологические свойства совпадают с относительными: плоскость $\mathcal{K}(H)$ как $\mathcal{B}(H)$- или $\mathcal{K}(H)$-модуля, инъективность $\mathcal{N}(H)$ как $\mathcal{B}(H)$- или $\mathcal{K}(H)$-модуля, проективность и плоскость $\mathcal{B}(H)$-модуля $\mathcal{B}(H)$. В остальных случаях H должно быть хотя бы конечномерно, чтобы эти свойства оказались эквивалентны в метрической, топологической и относительной теории.

Гомологически тривиальные $\mathcal{K}(H)$- и $\mathcal{B}(H)$-модули в метрической теории

	$\mathcal{K}(H)$-модули			$\mathcal{B}(H)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$\mathcal{N}(H)$	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.16	H любое 3.1.16	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.16	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.16	H любое 3.1.16	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.16
$\mathcal{B}(H)$	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.14	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.14	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.14	H любое 3.1.14	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.14	H любое 3.1.14
$\mathcal{K}(H)$	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.15	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.15	H любое 3.1.15	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.15	$\dim(H) \leq 1$ 3.1.15	H любое 3.1.15

Гомологически тривиальные $\mathcal{K}(H)$- и $\mathcal{B}(H)$-модули в топологической теории

	$\mathcal{K}(H)$-модули			$\mathcal{B}(H)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость

$\mathcal{N}(H)$	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.16	H любое 3.1.16	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.16	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.16	H любое 3.1.16	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.16
$\mathcal{B}(H)$	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.14	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.14	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.14	H любое 3.1.14	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.14	H любое 3.1.14
$\mathcal{K}(H)$	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.15	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.15	H любое 3.1.15	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.15	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.15	H любое 3.1.15

Гомологически тривиальные $\mathcal{K}(H)$- и $\mathcal{B}(H)$-модули в относительной теории

	$\mathcal{K}(H)$-модули			$\mathcal{B}(H)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$\mathcal{N}(H)$	H любое 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (ii)	H любое 3.1.17, (ii)	H любое 3.1.17, (ii)
$\mathcal{B}(H)$	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (ii)	H любое 3.1.17, (ii)	H любое 3.1.17, (ii)
$\mathcal{K}(H)$	H любое 3.1.17, (i)	$\dim(H) < \aleph_0$ 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (i)	H любое 3.1.17, (ii)	???	H любое 3.1.17, (ii)

3.1.6 $c_0(\Lambda)$- и $\ell_\infty(\Lambda)$-модули

Мы продолжим наше изучение модулей над C^*-алгебрами и перейдем к коммутативным примерам. Для заданного индексного множества Λ мы рассмотрим пространства $c_0(\Lambda)$ и $\ell_p(\Lambda)$ при $1 \leq p \leq +\infty$ как левые и правые модули над алгебрами $c_0(\Lambda)$ и $\ell_\infty(\Lambda)$. Для всех этих модулей внешнее умножение — это поточечное умножение. Хорошо известно, что $c_0(\Lambda)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ и $\ell_p(\Lambda)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_{p^*}(\Lambda)$ для $1 \leq p < +\infty$. На самом деле, эти изоморфизмы являются изоморфизмами $\ell_\infty(\Lambda)$- и $c_0(\Lambda)$-модулей.

Для заданного $\lambda \in \Lambda$ мы определим $\mathbb{C}_\lambda$ как левый или правый $\ell_\infty(\Lambda)$- или $c_0(\Lambda)$-модуль $\mathbb{C}$ с внешним умножением определенным равенствами

$$a \cdot_\lambda z = a(\lambda) z, \qquad z \cdot_\lambda a = a(\lambda) z.$$

Предложение 3.1.18. *Пусть Λ — произвольное множество и $\lambda \in \Lambda$. Тогда $\mathbb{C}_\lambda$ метрически и топологически проективный, инъективный и плоский $\ell_\infty(\Lambda)$- или $c_0(\Lambda)$-модуль.*

Доказательство. Пусть A обозначает одну из алгебр $\ell_\infty(\Lambda)$ или $c_0(\Lambda)$. Легко проверить, что отображения $\pi : A_+ \to \mathbb{C}_\lambda : a \oplus_1 z \mapsto a(\lambda) + z$ и $\sigma : \mathbb{C}_\lambda \to A_+ : z \mapsto z\delta_\lambda \oplus_1 0$ являются сжимающими A-морфизмами левых A-модулей. Так как $\pi\sigma = 1_{\mathbb{C}_\lambda}$, то $\mathbb{C}_\lambda$ есть ретракт A_+ в $A-\mathbf{mod}_1$. Из предложений 2.1.9 и 2.1.3 следует, что $\mathbb{C}_\lambda$ метрически и топологически проективен как A-модуль и, тем более, метрически и топологически плоский по предложению 2.1.40. Из предложения 2.1.39 мы знаем, что $\mathbb{C}_\lambda^*$ метрически и топологически инъективен как A-модуль. Теперь метрическая и топологическая инъективность $\mathbb{C}_\lambda$ следует из изоморфизма $\mathbb{C}_\lambda \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \mathbb{C}_\lambda^*$. □

Предложение 3.1.19. *Пусть Λ — произвольное множество. Тогда:*

(i) $\ell_\infty(\Lambda)$ метрически и топологически плоский $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль;

(ii) $\ell_\infty(\Lambda)$ *метрически или топологически проективный или плоский как* $c_0(\Lambda)$*-модуль тогда и только тогда, когда* Λ *конечно;*

(iii) $\ell_\infty(\Lambda)$ *метрически и топологически инъективен как* $\ell_\infty(\Lambda)$*- и* $c_0(\Lambda)$*-модуль.*

Доказательство. (i) Так как $\ell_\infty(\Lambda)$ — унитальная алгебра, то она метрически и топологически проективна как $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль по предложению 2.1.9. Оба результата о плоскости следуют из предложения 2.1.40.

(ii) Для бесконечного Λ банахово пространство $\ell_\infty(\Lambda)/c_0(\Lambda)$ бесконечномерно, поэтому по предложению 3.1.13 модуль $\ell_\infty(\Lambda)$ не является ни метрически, ни топологически плоским как $c_0(\Lambda)$-модуль. Оба утверждения о проективности следуют из предложения 2.1.40. Если Λ конечно, то $c_0(\Lambda) = \ell_\infty(\Lambda)$, поэтому результат следует из пункта (i).

(iii) Пусть A обозначает одну из алгебр $\ell_\infty(\Lambda)$ или $c_0(\Lambda)$. Заметим, что $\ell_\infty(\Lambda) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus_\infty \{\mathbb{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, поэтому из предложений 3.1.18 и 2.1.28 следует, что $\ell_\infty(\Lambda)$ метрически инъективный A-модуль. Утверждение о топологической инъективности следует из предложения 2.1.22. □

Предложение 3.1.20. *Пусть* Λ *— произвольное множество. Тогда:*

(i) $c_0(\Lambda)$ *метрически и топологически плоский* $\ell_\infty(\Lambda)$*- и* $c_0(\Lambda)$*-модуль;*

(ii) $c_0(\Lambda)$ *метрически или топологически проективный* $\ell_\infty(\Lambda)$*- или* $c_0(\Lambda)$*-модуль тогда и только тогда, когда* Λ *конечно;*

(iii) $c_0(\Lambda)$ *метрически или топологически инъективный* $\ell_\infty(\Lambda)$*- или* $c_0(\Lambda)$*-модуль тогда и только тогда, когда* Λ *конечно.*

Доказательство. Пусть A обозначает одну из алгебр $\ell_\infty(\Lambda)$ или $c_0(\Lambda)$. Отметим, что $c_0(\Lambda)$ — двусторонний идеал в A.

(i) Напомним, что $c_0(\Lambda)$ имеет сжимающую аппроксимативную единицу вида $\left(\sum_{\lambda \in S} \delta_\lambda\right)_{S \in \mathcal{P}_0(\Lambda)}$. Так как $c_0(\Lambda)$ есть двусторонний идеал в A, то результат следует из предложения 3.1.12.

(ii), (iii) Если Λ бесконечно, то $c_0(\Lambda)$ не унитальная банахова алгебра. Из следствия 3.1.5 и предложения 2.3.11 банахов A-модуль $c_0(\Lambda)$ не является ни метрически ни топологически проективным или инъективным. Если Λ конечно, то $c_0(\Lambda) = \ell_\infty(\Lambda)$, поэтому оба результата следуют из пунктов (i) и (iii) предложения 3.1.19. □

Предложение 3.1.21. *Пусть* Λ *— произвольное множество. Тогда:*

(i) $\ell_1(\Lambda)$ *метрически и топологически инъективный* $\ell_\infty(\Lambda)$*- или* $c_0(\Lambda)$*-модуль;*

(ii) $\ell_1(\Lambda)$ *метрически и топологически проективный и плоский* $\ell_\infty(\Lambda)$*- или* $c_0(\Lambda)$*-модуль;*

Доказательство. Пусть A обозначает одну из алгебр $\ell_\infty(\Lambda)$ или $c_0(\Lambda)$.

(i) Заметим, что $\ell_1(\Lambda) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} c_0(\Lambda)^*$, поэтому утверждение следует из предложения 2.1.33 и пункта (i) предложения 3.1.20.

(ii) Так как $\ell_1(\Lambda) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus_1\{\mathbb{C}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, то из предложений 3.1.18 и 2.1.11 следует, что $\ell_1(\Lambda)$ метрически проективен как A-модуль. Топологическая проективность следует из предложения 2.1.5. Утверждение о метрической и топологической плоскости теперь следуют из предложения 2.1.40. $\square$

Предложение 3.1.22. *Пусть Λ — произвольное множество и $1 < p < +\infty$. Тогда:*

(i) $\ell_p(\Lambda)$ топологически проективный, инъективный и плоский $\ell_\infty(\Lambda)$- или $c_0(\Lambda)$-модуль тогда и только тогда, когда Λ конечно;

(ii) если $\ell_p(\Lambda)$ метрически проективный, инъективный или плоский $\ell_\infty(\Lambda)$- или $c_0(\Lambda)$-модуль, то Λ конечно.

Доказательство. Пусть A обозначает одну из алгебр $\ell_\infty(\Lambda)$ или $c_0(\Lambda)$, тогда A есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство.

(i), (ii) Так как банахово пространство $\ell_p(\Lambda)$ рефлексивно при $1 < p < +\infty$, то из следствия 2.2.14 следует, что пространство $\ell_p(\Lambda)$ необходимо конечномерно если оно является метрически или топологически проективным, инъективным или плоским $\ell_\infty(\Lambda)$- или $c_0(\Lambda)$-модулем. Это эквивалентно тому, что Λ конечно. Если Λ конечно, то $\ell_p(\Lambda) \underset{A-\mathbf{mod}}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ и $\ell_p(\Lambda) \underset{\mathbf{mod}-A}{\cong} \ell_1(\Lambda)$, поэтому топологическая проективность, инъективность и плоскость следуют из предложения 3.1.21. $\square$

Предложение 3.1.23. *Пусть Λ — произвольное множество. Тогда:*

(i) как $c_0(\Lambda)$-модули $\ell_p(\Lambda)$ для $1 \leq p < +\infty$ и $\mathbb{C}_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda$ являются относительно проективными, инъективными и плоскими, $c_0(\Lambda)$ является относительно проективным и плоским, но относительно инъективным только для конечного Λ, $\ell_\infty(\Lambda)$ является относительно инъективным и плоским, но относительно проективным только для конечного Λ;

(ii) как $\ell_\infty(\Lambda)$-модули $\ell_p(\Lambda)$ для $1 \leq p \leq +\infty$ и $\mathbb{C}_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda$ являются относительно проективными, инъективными и плоскими, $c_0(\Lambda)$ является относительно проективным и плоским.

Доказательство. (i) Алгебра $c_0(\Lambda)$ относительно бипроективна [[55], теорема IV.5.26] и имеет сжимающую аппроксимативную единицу, поэтому по теореме 7.1.60 из [52] все существенные $c_0(\Lambda)$-модули проективны. Тогда $c_0(\Lambda)$ и $\ell_p(\Lambda)$ при $1 \leq p < +\infty$ являются относительно проективными $c_0(\Lambda)$-модулями. Тем более, они являются относительно плоскими $c_0(\Lambda)$-модулями [[52], предложение 7.1.40]. Из того же предложения $c_0(\Lambda)$-модули $\ell_1(\Lambda) \underset{\mathbf{mod}_1-c_0(\Lambda)}{\cong} c_0(\Lambda)^*$ и $\ell_{p^*}(\Lambda) \underset{\mathbf{mod}_1-c_0(\Lambda)}{\cong} \ell_p(\Lambda)^*$ для $1 \leq p < +\infty$ относительно инъективны. Из [[66], предложение 2.2.8 (i)] мы знаем, что банахова алгебра относительно инъективная над собой как правый модуль, обязана иметь левую единицу. Следовательно, $c_0(\Lambda)$ не является относительно инъективным $c_0(\Lambda)$-модулем для бесконечного Λ. Если Λ конечно, то $c_0(\Lambda)$-модуль $c_0(\Lambda)$ относительно инъективен потому, что $c_0(\Lambda) = \ell_\infty(\Lambda)$, и, как было доказано выше, $\ell_\infty(\Lambda)$ есть относительно инъективный $c_0(\Lambda)$-модуль. Из [[55], следствие V.2.16(II)] мы знаем, что $\ell_\infty(\Lambda)$ не может быть относительно проективным $c_0(\Lambda)$-модулем для бесконечного Λ. Если же Λ конечно, то $\ell_\infty(\Lambda)$ относительно проективен как $c_0(\Lambda)$-модуль потому, что $\ell_\infty(\Lambda) = c_0(\Lambda)$ и как было показано выше $c_0(\Lambda)$ есть относительно проективный $c_0(\Lambda)$-модуль. Из предложений 3.1.18, 2.1.5, 2.1.22 и 2.1.35 следуют утверждения о модулях $\mathbb{C}_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$ произвольно.

(ii) Пункт (i) предложения 3.1.19 и предложение 2.1.5 показывают, что $\ell_\infty(\Lambda)$ есть относительно проективный $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль. Из [[66], предложения 2.3.3, 2.3.4] мы знаем, что $\langle$ существенный относительно проективный / верный относительно инъективный $\rangle$ модуль над идеалом банаховой алгебры $\langle$ относительно проективен / относительно инъективен $\rangle$ над самой алгеброй. Так как $c_0(\Lambda)$ и $\ell_p(\Lambda)$ для $1 \leq p < +\infty$ есть существенные и верные $c_0(\Lambda)$-модули, то из результатов предыдущего пункта мы получаем, что $\ell_p(\Lambda)$ для $1 \leq p < +\infty$ относительно проективны и инъективны как $\ell_\infty(\Lambda)$-модули. Также мы получаем, что $c_0(\Lambda)$ относительно проективен как $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль. Таким образом, все эти $\ell_\infty(\Lambda)$-модули также будут относительно плоскими [[52], предложение 7.1.40]. Как следствие, $\ell_\infty(\Lambda) \underset{\mathbf{mod}_1-\ell_\infty(\Lambda)}{\cong} \ell_1(\Lambda)^*$ является относительно инъективным $\ell_\infty(\Lambda)$-модулем. Из предложений 3.1.18, 2.1.5, 2.1.22 и 2.1.35 следуют утверждения о модулях $\mathbb{C}_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$ произвольно. $\square$

Результаты этого параграфа собраны в следующих трех таблицах. Каждая ячейка таблицы содержит условие, при котором соответствующий модуль имеет соответствующее свойство, и предложение, в котором это доказано. Для случая $\ell_\infty(\Lambda)$- и $c_0(\Lambda)$-модулей $\ell_p(\Lambda)$ при $1 < p < +\infty$ мы не имеем критерия гомологической тривиальности в метрической теории, только необходимое условие. Чтобы это подчеркнуть, мы используем символ $\Longrightarrow$. Сомнительно, что $\ell_p(\Lambda)$ при $1 < p < +\infty$ будет метрически проективным инъективным или плоским при $\mathrm{Card}(\Lambda) > 1$. К сожалению, мы также не знаем является ли $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль $c_0(\Lambda)$ относительно инъективным, поэтому мы пишем ??? в соответствующей ячейке.

Гомологическая тривиальность $c_0(\Lambda)$- и $\ell_\infty(\Lambda)$-модулей в метрической теории

	$c_0(\Lambda)$-модули			$\ell_\infty(\Lambda)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$\ell_1(\Lambda)$	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21
$\ell_p(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ $(\Longrightarrow)$3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ $(\Longrightarrow)$3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ $(\Longrightarrow)$3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ $(\Longrightarrow)$3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ $(\Longrightarrow)$3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ $(\Longrightarrow)$3.1.22
$\ell_\infty(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.19	Λ любое 3.1.19	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.19	Λ любое 3.1.19	Λ любое 3.1.19	Λ любое 3.1.19

$c_0(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	Λ любое 3.1.20	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	Λ любое 3.1.20
$\mathbb{C}_\lambda$	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18

Гомологическая тривиальность $c_0(\Lambda)$- и $\ell_\infty(\Lambda)$-модулей в топологической теории

	$c_0(\Lambda)$-модули			$\ell_\infty(\Lambda)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$\ell_1(\Lambda)$	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21	Λ любое 3.1.21
$\ell_p(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.22	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.22
$\ell_\infty(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.19	Λ любое 3.1.19	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.19	Λ любое 3.1.19	Λ любое 3.1.19	Λ любое 3.1.19
$c_0(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	Λ любое 3.1.20	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.20	Λ любое 3.1.20
$\mathbb{C}_\lambda$	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18	λ любое 3.1.18

Гомологическая тривиальность $c_0(\Lambda)$- и $\ell_\infty(\Lambda)$-модулей в относительной теории

	$c_0(\Lambda)$-модули			$\ell_\infty(\Lambda)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$\ell_1(\Lambda)$	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (ii)	Λ любое 3.1.23, (ii)	Λ любое 3.1.19, (ii)
$\ell_p(\Lambda)$	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (ii)	Λ любое 3.1.23, (ii)	Λ любое 3.1.19, (ii)
$\ell_\infty(\Lambda)$	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (ii)	Λ любое 3.1.23, (ii)	Λ любое 3.1.19, (ii)
$c_0(\Lambda)$	Λ любое 3.1.23, (i)	$\mathrm{Card}(\Lambda) < \aleph_0$ 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (i)	Λ любое 3.1.23, (ii)	???	Λ любое 3.1.19, (ii)
$\mathbb{C}_\lambda$	λ любое 3.1.23, (i)	λ любое 3.1.23, (i)	λ любое 3.1.23, (i)	λ любое 3.1.23, (ii)	λ любое 3.1.23, (ii)	λ любое 3.1.19, (ii)

Из этих таблиц легко видеть, что для модулей над коммутативными C^*-алгебрами, есть много общего между относительной, метрической и топологической теориями. Например, $\ell_1(\Lambda)$ — проективный, инъективный и плоский $\ell_\infty(\Lambda)$- или $c_0(\Lambda)$-модуль во всех трех теориях.

3.2 Приложения к гармоническому анализу

3.2.1 Предварительные сведения по гармоническому анализу

Пусть G — локально компактная группа. Ее единицу мы будем обозначать через e_G. По хорошо известной теореме Хаара [[95], параграф 15.8] существует единственная с точностью до положительной константы регулярная по Борелю мера m_G, которая конечна на всех компактных множествах, положительна на всех открытых множествах и инвариантна относительно левых сдвигов, то есть $m_G(sE) = m_G(E)$ для всех $s \in G$ и $E \in Bor(G)$. Здесь, через $Bor(G)$ мы обозначаем борелевскую σ-алгебру открытых множеств в G. Мера обладающая вышеперечисленными свойствами, называется левой мерой Хаара G. Если G компактно, то мы предполагаем, что $m_G(G) = 1$. Если G бесконечно и дискретно, то в роли m_G мы берем считающую меру. Для каждого $s \in G$ отображение $m : Bor(G) \to [0, +\infty] : E \mapsto m_G(Es)$ также является левой мерой Хаара, поэтому из единственности мы получаем, что $m(E) = \Delta(s) m_G(E)$

для некоторого $\Delta(s) > 0$. Функция $\Delta : G \to (0, +\infty)$ называется модулярной функцией группы G. Ясно, что $\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t)$ для всех $s,t \in G$. Если модулярная функция тождественно равна единице, то соответствующая группа называется модулярной. В частности, модулярными являются компактные, коммутативные и дискретные группы. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $L_p(G)$ для $L_p(G,m_G)$ при всех $1 \leq p \leq +\infty$. Для фиксированного $s \in G$ мы определим оператор левого сдвига $L_s : L_1(G) \to L_1(G) : f \mapsto (t \mapsto f(s^{-1}t))$ и оператор правого сдвига $R_s : L_1(G) \to L_1(G) : f \mapsto (t \mapsto f(ts))$.

Структура группы на G позволяет задать на $L_1(G)$ структуру банаховой алгебры. Для заданных $f,g \in L_1(G)$ мы определим их свертку по формуле

$$(f * g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)dm_G(t) = \int_G f(st)g(t^{-1})dm_G(t) = \int_G f(st^{-1})g(t)\Delta(t^{-1})dm_G(t)$$

для почти всех $s \in G$. В этом случае $L_1(G)$ с операцией свертки в качестве умножения становится банаховой алгеброй. Банахова алгебра $L_1(G)$ имеет сжимающую двустороннюю аппроксимативную единицу состоящую из положительных непрерывных функций с компактным носителем. Банахова алгебра $L_1(G)$ унитальна тогда и только тогда, когда G дискретно, и в этом случае δ_{e_G} есть единица в $L_1(G)$. Структура группы на G также позволяет сделать банахово пространство комплексных конечных борелевских мер $M(G)$ банаховой алгеброй. Свертку двух мер $\mu,\nu \in M(G)$ мы определим по формуле

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \nu(s^{-1}E)d\mu(s) = \int_G \mu(Es^{-1})d\nu(s)$$

для всех $E \in Bor(G)$. Банахово пространство $M(G)$ вместе с такой сверткой есть унитальная банахова алгебра. Роль единицы играет мера Дирака δ_{e_G} сосредоточенная в e_G. На самом деле, $M(G)$ есть копроизведение в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$ (но не в $M(G) - \mathbf{mod}_1$) своего двустороннего идеала $M_a(G)$ мер, абсолютно непрерывных по отношению к m_G, и подалгебры $M_s(G)$, состоящей из мер, сингулярных по отношению к m_G. Напомним, что $M_a(G) \underset{M(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} L_1(G)$ и $M_s(G)$ есть аннуляторный $L_1(G)$-модуль. Наконец, $M(G) = M_a(G)$ тогда и только тогда, когда G дискретна.

Перейдем к обсуждению классических левых и правых модулей над алгебрами $L_1(G)$ и $M(G)$. Так как $L_1(G)$ можно рассматривать как двусторонний идеал в $M(G)$ с помощью изометрического $M(G)$-морфизма $i : L_1(G) \to M(G) : f \mapsto fm_G$, то нам будет достаточно задавать структуру $M(G)$-модуля. Для $1 \leq p < +\infty$ и любых $f \in L_p(G)$, $\mu \in M(G)$ положим по определению

$$(\mu *_p f)(s) = \int_G f(t^{-1}s)d\mu(t), \qquad (f *_p \mu)(s) = \int_G f(st^{-1})\Delta(t^{-1})^{1/p}d\mu(t).$$

Эти внешние умножения превращают банаховы пространства $L_p(G)$ для $1 \leq p < +\infty$ в левые и правые $M(G)$-модули. Заметим, что при $p = 1$ и $\mu \in M_a(G)$ мы получаем обычное определение свертки. Для $1 < p \leq +\infty$ и любых $f \in L_p(G)$, $\mu \in M(G)$ положим по определению,

$$(\mu \cdot_p f)(s) = \int_G \Delta(t)^{1/p} f(st) d\mu(t), \qquad (f \cdot_p \mu)(s) = \int_G f(ts) d\mu(t).$$

Эти внешние умножения также превращают банаховы пространства $L_p(G)$ для $1 < p \leq +\infty$ в левые и правые $M(G)$-модули. Этот специальный выбор внешних умножений хорошо взаимодействует с двойственностью. Действительно, $(L_p(G), *_p)^* \underset{\mathbf{mod}_1-M(G)}{\cong} (L_{p^*}(G), \cdot_{p^*})$ для всех $1 \leq p < +\infty$. Более того, банахово пространство $C_0(G)$ также можно наделить структурой левого и правого $M(G)$-модуля с помощью внешнего умножения $\cdot_\infty$. Более того, $(C_0(G), \cdot_\infty)^* \underset{M(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} (M(G), *)$ и также $C_0(G)$ есть замкнутый левый и правый $M(G)$-подмодуль в $L_\infty(G)$.

Характером локально компактно группы G называется непрерывный гомоморфизм из G в $\mathbb{T}$. Множество характеров группы G есть группа. Следуя Понтрягину, мы будем ее обозначать $\widehat{G}$. Она становится локально компактной группой, если на ней рассмотреть компактно-открытую топологию. Для любого характера $\gamma \in \widehat{G}$ можно определить непрерывный характер $\varkappa_\gamma^L : L_1(G) \to \mathbb{C} : f \mapsto \int_G f(s)\overline{\gamma(s)} dm_G(s)$ на $L_1(G)$. Все характеры на $L_1(G)$ устроены таким образом. Этот результат доказан Гельфандом [[53], теоремы 2.7.2, 2.7.5]. Аналогично, для каждого $\gamma \in \widehat{G}$ можно таким же образом $\varkappa_\gamma^M : M(G) \to \mathbb{C} : \mu \mapsto \int_G \overline{\gamma(s)} d\mu(s)$ определить характер $M(G)$. Через $\mathbb{C}_\gamma$ мы будем обозначать так называемый аугментационный левый и правый $L_1(G)$- или $M(G)$-модуль. Его внешние умножения определяются по формуле

$$f \cdot_\gamma z = z \cdot_\gamma f = \varkappa_\gamma^L(f) z, \qquad \mu \cdot_\gamma z = z \cdot_\gamma \mu = \varkappa_\gamma^M(\mu) z$$

для всех $f \in L_1(G)$, $\mu \in M(G)$ и $z \in \mathbb{C}$.

Одно из многочисленных эквивалентных определений аменабельной группы говорит, что локально компактная группа G аменабельна, если существует $L_1(G)$-морфизм правых модулей $M : L_\infty(G) \to \mathbb{C}_{e_{\widehat{G}}}$ такой, что $M(\chi_G) = 1$ [[52], параграф VII.2.5]. Можно даже предполагать, что M — сжимающий [[52], замечание 7.1.54].

Большинство результатов перечисленных в этом параграфе, но не снабженных ссылкой, можно найти в [[56], параграф 3.3].

3.2.2 $L_1(G)$-модули

В метрической теории гомологически тривиальные $L_1(G)$-модули гармонического анализа были изучены в [31]. Мы используем идеи этой работы, чтобы объединить подходы к изучению гомологически тривиальных модулей в метрической и топологической теории.

Предложение 3.2.1. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда $L_1(G)$ метрически и топологически плоский $L_1(G)$-модуль, то есть $L_1(G)$-модуль $L_\infty(G)$ метрически и топологически инъективен.*

Доказательство. Так как $L_1(G)$ имеет сжимающую аппроксимативную единицу, то $L_1(G)$ метрически и топологически плоский $L_1(G)$-модуль по предложению 2.1.42. Так как $L_\infty(G) \underset{\mathbf{mod}_1-L_1(G)}{\cong} L_1(G)^*$, то по предложению 2.1.33 этот $L_1(G)$-модуль метрически и топологически инъективен. $\square$

Предложение 3.2.2. *Пусть G — локально компактная группа, и $\gamma \in \widehat{G}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G компактна;

(ii) $\mathbb{C}_\gamma$ метрически проективный $L_1(G)$-модуль;

(iii) $\mathbb{C}_\gamma$ топологически проективный $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Рассмотрим $L_1(G)$-морфизмы $\sigma^+ : \mathbb{C}_\gamma \to L_1(G)_+ : z \mapsto z\gamma \oplus_1 0$ и $\pi^+ : L_1(G)_+ \to \mathbb{C}_\gamma : f \oplus_1 w \to f \cdot_\gamma 1 + w$. Легко проверить, что $\|\pi^+\| = \|\sigma^+\| = 1$ и $\pi^+\sigma^+ = 1_{\mathbb{C}_\gamma}$. Следовательно, $\mathbb{C}_\gamma$ есть ретракт $L_1(G)_+$ в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$. Из предложений 2.1.9 и 2.1.3 следует, что $\mathbb{C}_\gamma$ метрически проективен.

$(ii) \implies (iii)$ Импликация следует из предложения 2.1.5.

$(iii) \implies (i)$ Рассмотрим $L_1(G)$-морфизм $\pi : L_1(G) \to \mathbb{C}_\gamma : f \mapsto f \cdot_\gamma 1$. Легко видеть, что π строго коизометричен. Так как $\mathbb{C}_\gamma$ топологически проективен, то существует $L_1(G)$-морфизм $\sigma : \mathbb{C}_\gamma \to L_1(G)$ такой, что $\pi\sigma = 1_{\mathbb{C}_\gamma}$. Пусть $f = \sigma(1) \in L_1(G)$ и $(e_\nu)_{\nu \in N}$ — стандартная аппроксимативная единица $L_1(G)$. Так как σ является $L_1(G)$-морфизмом, то для всех $s,t \in G$ выполнено

$$f(s^{-1}t) = L_s(f)(t) = \lim_\nu L_s(e_\nu * \sigma(1))(t) = \lim_\nu((\delta_s * e_\nu) * \sigma(1))(t) = \lim_\nu \sigma((\delta_s * e_\nu) \cdot_\gamma 1)(t)$$

$$= \lim_\nu \sigma(\varkappa_\gamma^L(\delta_s * e_\nu))(t) = \lim_\nu \varkappa_\gamma^L(\delta_s * e_\nu)\sigma(1)(t) = \lim_\nu (e_\nu * \gamma)(s^{-1}) f(t) = \gamma(s^{-1}) f(t).$$

Значит, для функции $g(t) := \gamma(t^{-1}) f(t)$ из $L_1(G)$ выполнено $g(st) = g(t)$ для всех $s,t \in G$. Тогда g является константной функцией в $L_1(G)$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда G компактна. $\square$

Предложение 3.2.3. *Пусть G — локально компактная группа, и $\gamma \in \widehat{G}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G аменабельна;

(ii) $\mathbb{C}_\gamma$ метрически инъективный $L_1(G)$-модуль;

(iii) $\mathbb{C}_\gamma$ топологически инъективный и плоский $L_1(G)$-модуль.

(iv) $\mathbb{C}_\gamma$ метрически плоский $L_1(G)$-модуль;

(v) $\mathbb{C}_\gamma$ топологически плоский $L_1(G)$-модуль;

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как G аменабельна, то существует сжимающий $L_1(G)$-морфизм $M : L_\infty(G) \to \mathbb{C}_{e_{\widehat{G}}}$ со свойством $M(\chi_G) = 1$. Рассмотрим линейные операторы $\rho : \mathbb{C}_\gamma \to L_\infty(G) : z \mapsto z\overline{\gamma}$ и $\tau : L_\infty(G) \to \mathbb{C}_\gamma : f \mapsto M(f\gamma)$. Это $L_1(G)$-морфизмы правых $L_1(G)$-модулей. Проверим это для оператора τ: для всех $f \in L_\infty(G)$ и $g \in L_1(G)$ выполнено

$$\tau(f \cdot_\infty g) = M((f \cdot_\infty g)\gamma) = M(f\gamma \cdot_\infty g\overline{\gamma}) = M(f\gamma) \cdot_{e_{\widehat{G}}} g\overline{\gamma} = M(f\gamma)\varkappa_\gamma^L(g) = \tau(f) \cdot_\gamma g.$$

Легко проверить, что ρ и τ сжимающие и $\tau\rho = 1_{\mathbb{C}_\gamma}$. Следовательно, $\mathbb{C}_\gamma$ — ретракт $L_\infty(G)$ в $\mathbf{mod}_1 - L_1(G)$. Из предложений 3.2.1 и 2.1.20 следует, что $\mathbb{C}_\gamma$ метрически инъективен как $L_1(G)$-модуль.

$(ii) \implies (iii)$ Импликация следует из предложения 2.1.22.

$(iii) \implies (i)$ Так как ρ есть изометрический $L_1(G)$-морфизм правых $L_1(G)$-модулей, и $\mathbb{C}_\gamma$ топологически инъективен как $L_1(G)$-модуль, то ρ является коретракцией в $\mathbf{mod} - L_1(G)$. Обозначим его левый обратный морфизм через π, тогда $\pi(\overline{\gamma}) = \pi(\rho(1)) = 1$. Рассмотрим ограниченный линейный функционал $M : L_\infty(G) \to \mathbb{C}_\gamma : f \mapsto \pi(f\overline{\gamma})$. Для всех $f \in L_\infty(G)$ и $g \in L_1(G)$ выполнено

$$M(f \cdot_\infty g) = \pi((f \cdot_\infty g)\overline{\gamma}) = \pi(f\overline{\gamma} \cdot_\infty g\gamma) = \pi(f\overline{\gamma}) \cdot_\gamma g\gamma = M(f)\varkappa_\gamma^L(g\gamma) = M(f) \cdot_{e_{\widehat{G}}} g.$$

Следовательно, M является $L_1(G)$-морфизмом, причем $M(\chi_G) = \pi(\overline{\gamma}) = 1$. Значит, G аменабельна.

$(ii) \iff (iv)$, $(iii) \iff (v)$ Заметим, что $\mathbb{C}_\gamma^* \underset{\mathbf{mod}_1 - L_1(G)}{\cong} \mathbb{C}_\gamma$, поэтому все эквивалентности следуют из трех предыдущих пунктов и предложения 2.1.33. □

В следующем предложении мы рассмотрим некоторый специфический тип идеалов алгебры $L_1(G)$. Они имеют вид $L_1(G) * \mu$ для некоторой идемпотентной меры μ. На самом деле, этот тип идеалов, в случае коммутативной компактной группы G, совпадает с классом левых идеалов в $L_1(G)$, имеющих правую ограниченную аппроксимативную единицу [[53], следствие 5.6.2].

Предложение 3.2.4. *Пусть G — локально компактная группа, и $\mu \in M(G)$ — идемпотентная мера, то есть $\mu * \mu = \mu$. Если левый идеал $I = L_1(G) * \mu$ банаховой алгебры $L_1(G)$ топологически проективен как $L_1(G)$-модуль, то $\mu = pm_G$, для некоторого $p \in I$.*

Доказательство. Пусть $\phi : I \to L_1(G)$ — произвольный морфизм левых $L_1(G)$-модулей. Рассмотрим $L_1(G)$-морфизм $\phi' : L_1(G) \to L_1(G) : x \mapsto \phi(x * \mu)$. По теореме Венделя [[96], теорема 1], существует мера $\nu \in M(G)$ такая, что $\phi'(x) = x * \nu$ для всех $x \in L_1(G)$. В частности, $\phi(x) = \phi(x * \mu) = \phi'(x) = x * \nu$ для всех $x \in I$. Теперь ясно, что оператор $\psi : I \to I : x \mapsto \nu * x$ является морфизмом правых I-модулей, причем $\phi(x)y = x\psi(y)$ для всех $x,y \in I$. Теперь мы видим, что выполнено условие $(**)$ леммы 2.1.15, поэтому I имеет правую единицу, назовем ее $e \in I$. Тогда $x * \mu = x * \mu * e$ для всех $x \in L_1(G)$. Две меры равны, если их свертки со всеми функциями из $L_1(G)$ совпадают [[56], следствие 3.3.24], поэтому $\mu = \mu * em_G$. Так как $e \in I \subset L_1(G)$, то $\mu = \mu * em_G \in M_a(G)$. Положим $p = \mu * e \in I$, тогда $\mu = pm_G$. $\square$

Мы предполагаем, что левый идеал $L_1(G) * \mu$ для идемпотентной меры μ метрически проективен как $L_1(G)$-модуль тогда и только тогда, когда $\mu = pm_G$ для $p \in I$ нормы 1.

Теорема 3.2.5. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G дискретно;

(ii) $L_1(G)$ метрически проективный $L_1(G)$-модуль;

(iii) $L_1(G)$ топологически проективный $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Если G дискретно, то $L_1(G)$ — унитальная банахова алгебра с единицей нормы 1. Из предложения 2.1.13 следует, что $L_1(G)$ метрически проективен как $L_1(G)$-модуль.

$(ii) \implies (iii)$ Импликация следует из предложения 2.1.5.

$(iii) \implies (i)$ Очевидно, что δ_{e_G} — идемпотентная мера. Так как идеал $L_1(G) = L_1(G) * \delta_{e_G}$ топологически проективен как $L_1(G)$-модуль, то из предложения 3.2.4 мы получаем, что $\delta_{e_G} = fm_G$ для некоторой функции $f \in L_1(G)$. Это возможно только если G дискретна. $\square$

Стоит отметить, что $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$ относительно проективен для любой локально компактной группы G [[52], упражнение 7.1.17].

Предложение 3.2.6. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) G дискретна;

(ii) $M(G)$ метрически проективный $L_1(G)$-модуль;

(iii) $M(G)$ топологически проективный $L_1(G)$-модуль;

(iv) $M(G)$ метрически плоский $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как $M(G) \underset{L_1(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} L_1(G)$ для дискретной группы G, то утверждение следует из теоремы 3.2.5.

$(ii) \implies (iii)$ Импликация следует из предложения 2.1.5.

$(ii) \implies (iv)$ Импликация следует из предложения 2.1.40.

$(iii) \implies (i)$ Напомним, что $M(G) \underset{L_1(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} L_1(G) \bigoplus_1 M_s(G)$, поэтому по предложению 2.1.11 банахов $L_1(G)$-модуль $M_s(G)$ топологически проективен. Так как $M_s(G)$ есть аннуляторный $L_1(G)$-модуль, то из предложения 2.2.3 мы получаем, что $L_1(G)$ имеет правую единицу. Так как $L_1(G)$ также имеет двустороннюю ограниченную аппроксимативную единицу, то $L_1(G)$ унитальна. Последнее возможно только если G дискретно.

$(iv) \implies (i)$ Так как $M(G) \underset{L_1(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} L_1(G) \bigoplus_1 M_s(G)$, то из предложения 2.1.41 банахов $L_1(G)$-модуль $M_s(G)$ является метрически плоским. Так как $M_s(G)$ есть аннуляторный $L_1(G)$-модуль, то из предложения 2.2.6 следует, что $M_s(G) = \{0\}$. Последнее означает, что G дискретно. $\square$

Предложение 3.2.7. *Пусть G — локально компактна группа. Тогда $M(G)$ топологически плоский $L_1(G)$-модуль.*

Доказательство. Так как $M(G)$ есть L_1-пространство, то, тем более, это $\mathscr{L}_1$-пространство. Так как $M_s(G)$ дополняемо в $M(G)$, то $M_s(G)$ есть $\mathscr{L}_1$-пространство [[51], предложение 1.28]. Так как $M_s(G)$ — аннуляторный $L_1(G)$-модуль, то из предложения 2.2.6 мы имеем, что $L_1(G)$-модуль $M_s(G)$ топологически плоский. Напомним, что по предложению 3.2.1 банахов $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$ является топологически плоским. Так как $M(G) \underset{L_1(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} L_1(G) \bigoplus_1 M_s(G)$, то из предложения 2.1.41, мы получаем, что $L_1(G)$-модуль $M(G)$ топологически плоский. $\square$

3.2.3 $M(G)$-модули

Мы переходим к обсуждению классических $M(G)$-модулей в гармоническом анализе. Как мы сейчас увидим, большинство результатов можно вывести из результатов об $L_1(G)$-модулях.

Предложение 3.2.8. *Пусть G — локально компактная группа, и пусть X — $\langle$ существенный / верный / существенный $\rangle$ $L_1(G)$-модуль. Тогда:*

(i) X — метрически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ $M(G)$-модуль тогда и только тогда, когда он метрически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ $L_1(G)$-модуль;

(ii) X — топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ $M(G)$-модуль тогда и только тогда, когда он топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. Напомним, что $L_1(G) \underset{L_1(G)-\mathbf{mod}_1}{\cong} M_a(G)$ является двусторонним 1-дополняемым идеалом алгебры $M(G)$. Теперь пункты (i) и (ii) следуют из предложения $\langle$ 2.3.2 / 2.3.3 / 2.3.4 $\rangle$. $\square$

Следует напомнить, что $L_1(G)$-модули $C_0(G)$, $L_p(G)$ для $1 \leq p < \infty$ и $\mathbb{C}_\gamma$ для $\gamma \in \widehat{G}$ существенны, и $L_1(G)$-модули $C_0(G)$, $M(G)$, $L_p(G)$ для $1 \leq p \leq \infty$ и $\mathbb{C}_\gamma$ для $\gamma \in \widehat{G}$ верны.

Предложение 3.2.9. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда $M(G)$ метрически и топологически проективный $M(G)$-модуль. Как следствие, он метрически и топологически плоский $M(G)$-модуль.*

Доказательство. Так как $M(G)$ — унитальная алгебра, то метрическая и топологическая проективность следуют из предложения 2.1.9. Теперь остается применить предложение 2.1.40. □

3.2.4 Банахово-геометрические ограничения

В этом параграфе мы покажем, что многие модули гармонического анализа не являются ни метрически, ни топологически проективными, инъективными или плоскими по причинам "плохой" банаховой геометрии.

Предложение 3.2.10. *Пусть G — бесконечная локально компактная группа. Тогда:*

(i) $L_1(G)$, $C_0(G)$, $M(G)$, $L_\infty(G)^*$ не являются топологически инъективными банаховыми пространствами;

(ii) $C_0(G)$, $L_\infty(G)$ не дополняемы ни в одном L_1-пространстве.

Доказательство. Так как G бесконечно, то все рассматриваемые модули бесконечномерны.

(i) Если бесконечномерное банахово пространство топологически инъективно, то оно содержит копию $\ell_\infty(\mathbb{N})$ [[97], следствие 1.1.4], и, следовательно, копию $c_0(\mathbb{N})$. Банахово пространство $L_1(G)$ слабо секвенциально полно [[90], следствие III.C.14], поэтому по следствию 5.2.11 из [43] оно не может содержать копию $c_0(\mathbb{N})$. Значит, $L_1(G)$ не может быть топологически инъективным банаховым пространством. Если $M(G)$ топологически инъективно, то таково же и его дополняемое пространство $M_a(G) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(G)$. Из рассуждений выше мы знаем, что это невозможно, значит $M(G)$ не может быть топологически инъективным банаховым пространством. Из следствия 3 в [98] пространство $C_0(G)$ не дополняемо в $L_\infty(G)$. Значит, и $C_0(G)$ не может быть топологически инъективным банаховым пространством. Далее, банахово пространство $L_1(G)$ дополняемо в $L_\infty(G)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(G)^{**}$ [[67], предложение B10]. Значит, если бы банахово пространство $L_\infty(G)^*$ было бы топологически инъективно, то таково же было бы и $L_1(G)$. Как мы показали ранее, это невозможно, значит, $L_\infty(G)^*$ не является топологически инъективным банаховым пространством.

(ii) Если $C_0(G)$ — ретракт L_1-пространства, то $M(G) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C_0(G)^*$ будет ретрактом L_∞-пространства, и, как следствие, будет топологически инъективным банаховым пространством. Это противоречит пункту (i), поэтому $C_0(G)$ не может быть ретрактом L_1-пространства. Заметим, что $\ell_\infty(\mathbb{N})$ вкладывается в $L_\infty(G)$, и, как следствие, мы имеем вложение $c_0(\mathbb{N})$ в $L_\infty(G)$. Если бы $L_\infty(G)$ было бы ретрактом L_1-пространства, то нашлось бы L_1-пространство содержащее копию $c_0(\mathbb{N})$. Как мы показали в пункте (i) это невозможно. □

Начиная с этого момента и до конца параграфа, через A мы будем обозначать одну из алгебр $L_1(G)$ или $M(G)$. Напомним, что $L_1(G)$ и $M(G)$ являются L_1-пространствами.

Предложение 3.2.11. *Пусть G — бесконечная локально компактная группа. Тогда:*

(i) $C_0(G)$, $L_\infty(G)$ не являются ни метрически, ни топологически проективными A-модулями;

(ii) $L_1(G)$, $C_0(G)$, $M(G)$, $L_\infty(G)^*$ не являются ни метрически, ни топологически проективными A-модулями;

(iii) $L_\infty(G)$, $C_0(G)$ не являются ни метрически, ни топологически плоскими A-модулями.

Доказательство. (i) Утверждение следует из пункта (i) предложения 2.2.8 и предложения 3.2.10.

(ii) Утверждение следует из пункта (ii) предложения 2.2.8 и предложения 3.2.10.

(iii) Напомним, что $C_0(G)^* \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} M(G)$. Значит утверждение следует из пункта (i) и предложения 2.1.33. □

Осталось рассмотреть гомологическую тривиальность A-модулей в метрической и топологической теории для конечной группы G.

Предложение 3.2.12. *Пусть G — нетривиальная конечная группа и пусть $1 \leq p \leq \infty$. Тогда A-модуль $L_p(G)$ метрически $\langle$ проективен / инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle\ p = 1\ /\ p = \infty\ \rangle$*

Доказательство. Допустим, $L_p(G)$ метрически $\langle$ проективен / инъективен $\rangle$ как A-модуль. Так как $L_p(G)$ конечномерно, то из пунктов (i) и (ii) предложения 2.2.8 мы получаем, что $\langle\ L_p(G) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\mathbb{N}_n)\ /\ L_p(G) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C(\mathbb{N}_n) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_\infty(\mathbb{N}_n)\ \rangle$, для $n = \operatorname{Card}(G) > 1$. Теперь мы воспользуемся теоремой 1 из [93] для банаховых пространств над полем $\mathbb{C}$. Она гласит, что если для $2 \leq m \leq k$ и $1 \leq r,s \leq \infty$ существует изометрическое вложение из $\ell_r(\mathbb{N}_m)$ в $\ell_s(\mathbb{N}_k)$, то либо $r = 2$, $s \in 2\mathbb{N}$ либо $r = s$. Следовательно, $\langle\ p = 1\ /\ p = \infty\ \rangle$. Обратная импликация легко следует из $\langle$ теоремы 3.2.5 / предложения 3.2.1 $\rangle$ □

Предложение 3.2.13. *Пусть G — конечная группа. Тогда:*

(i) $C_0(G)$, $L_\infty(G)$ метрически инъективны как A-модули;

(ii) $C_0(G)$, $L_p(G)$ для $1 < p \leq \infty$ метрически проективны как A-модули тогда и только тогда, когда G тривиальна;

(iii) $M(G)$, $L_p(G)$ *для* $1 \leq p < \infty$ *метрически инъективны как* A*-модули тогда и только тогда, когда* G *тривиальна;*

(iv) $C_0(G)$, $L_p(G)$ *для* $1 < p \leq \infty$ *метрически плоские как* A*-модули тогда и только тогда, когда* G *тривиальна.*

Доказательство. (i) Так как G конечна,то $C_0(G) = L_\infty(G)$. Теперь утверждение следует из предложения 3.2.1.

(ii) Если G тривиальна, то есть $G = \{e_G\}$, то $L_p(G) = C_0(G) = L_1(G)$ и утверждение следует из пункта (i). Если G нетривиальна, то заметим, что $C_0(G) = L_\infty(G)$ и воспользуемся предложением 3.2.12.

(iii) Если $G = \{e_G\}$, то $M(G) = L_p(G) = L_\infty(G)$ и тогда утверждение следует из пункта (i). Если G нетривиальна, то заметим, что $M(G) = L_1(G)$ и воспользуемся предложением 3.2.12.

(iv) Из пункта (iii) следует, что $L_p(G)$ для $1 \leq p < \infty$ является метрически инъективным A-модулей тогда и только тогда, когда G тривиальна. Теперь утверждение следует из предложения 2.1.33 и изоморфизмов $C_0(G)^* \underset{\mathbf{mod}_1 - L_1(G)}{\cong} M(G) \underset{\mathbf{mod}_1 - L_1(G)}{\cong} L_1(G)$, $L_p(G)^* \underset{\mathbf{mod}_1 - L_1(G)}{\cong} L_{p^*}(G)$ при $1 \leq p^* < \infty$. $\square$

Здесь следует сказать, что если бы мы рассматривали банаховы пространства над полем действительных чисел, то $L_\infty(G)$ и $L_1(G)$ были бы, соответственно, метрически проективны и инъективны, еще в одном случае, когда G состоит из двух элементов. Причина этого эффекта в том, что $L_\infty(\mathbb{Z}_2) \underset{L_1(\mathbb{Z}_2) - \mathbf{mod}_1}{\cong} \mathbb{R}_{\gamma_0} \bigoplus_1 \mathbb{R}_{\gamma_1}$ и $L_1(\mathbb{Z}_2) \underset{L_1(\mathbb{Z}_2) - \mathbf{mod}_1}{\cong} \mathbb{R}_{\gamma_0} \bigoplus_\infty \mathbb{R}_{\gamma_1}$ для $\gamma_0, \gamma_1 \in \widehat{\mathbb{Z}_2}$ определенных равенствами $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = -\gamma_1(1) = 1$.

Предложение 3.2.14. *Пусть* G *— конечная группа. Тогда* A*-модули* $C_0(G)$, $M(G)$, $L_p(G)$ *для* $1 \leq p \leq \infty$ *являются топологически проективными, инъективными и плоскими.*

Доказательство. Так как G конечна, то $M(G) = L_1(G)$ и $C_0(G) = L_\infty(G)$ и, как следствие, эти модули не требуют отдельного рассмотрения. Так как $M(G) = L_1(G)$, мы ограничимся случаем $A = L_1(G)$. Тождественное отображение $i : L_1(G) \to L_p(G) : f \mapsto f$ является топологическим изоморфизмом банаховых пространств потому, что $L_1(G)$ и $L_p(G)$ для $1 \leq p < \infty$ имеют одинаковую конечную размерность. Так как G конечна, то она унимодулярна. Следовательно, внешние умножения в модулях $(L_1(G), *)$ и $(L_p(G), *_p)$ совпадают при $1 \leq p < \infty$. Значит, i — изоморфизм в $L_1(G) - \mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod} - L_1(G)$. Аналогично можно показать, что $(L_\infty(G), \cdot_\infty)$ и $(L_p(G), \cdot_p)$ при $1 < p \leq \infty$ изоморфны в $L_1(G) - \mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod} - L_1(G)$. Наконец, легко проверить, что $(L_1(G), *)$ и $(L_\infty(G), \cdot_\infty)$ изоморфны в $L_1(G) - \mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod} - L_1(G)$ посредством морфизма $j : L_1(G) \to L_\infty(G) : f \mapsto (s \mapsto f(s^{-1}))$. Таким образом, все рассматриваемые модули изоморфны. Осталось заметить, что по предложению 3.2.1 банахов $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$ топологически проективный и плоский по теореме 3.2.5 и предложению 3.2.1, а $L_\infty(G)$ топологически инъективный A-модуль по предложению 3.2.1. $\square$

Результаты этого параграфа собраны в первых двух таблицах. В третьей таблице мы приводим известные результаты из относительной теории. Каждая ячейка таблицы содержит условие, при котором соответствующий модуль имеет соответствующее свойство, и предложения в которых это доказано. Формулировки и доказательства теорем, описывающих гомологически тривиальные модули $\mathbb{C}_\gamma$ в относительной теории такие же, как и в предложениях 3.2.2, 3.2.3 и 3.2.3. Как обычно, стрелка $\implies$ обозначает, что известно только необходимое условие.

Гомологически тривиальные $L_1(G)$- и $M(G)$-модули в метрической теории

	$L_1(G)$-модули			$M(G)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$L_1(G)$	G дискретна 3.2.5	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	G любая 3.2.1	G дискретна 3.2.5, 3.2.8	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	G любая 3.2.1, 3.2.8
$L_p(G)$	$G=\{e_G\}$ 2.2.14, 3.2.12	$G=\{e_G\}$ 2.2.14, 3.2.12	$G=\{e_G\}$ 2.2.14, 3.2.13	$G=\{e_G\}$ 2.2.14, 3.2.12	$G=\{e_G\}$ 2.2.14, 3.2.12	$G=\{e_G\}$ 2.2.14, 3.2.13
$L_\infty(G)$	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.12	G любая 3.2.1	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.12	G любая 3.2.1, 3.2.8	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13
$M(G)$	G дискретна 3.2.6	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	G дискретна 3.2.7	G любая 3.2.9	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	G любая 3.2.9
$C_0(G)$	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	G конечна 3.2.11, 3.2.13	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13	G конечна 3.2.11, 3.2.13	$G=\{e_G\}$ 3.2.11, 3.2.13
$\mathbb{C}_\gamma$	G компактна 3.2.2	G аменабельна 3.2.3	G аменабельна 3.2.3	G компактна 3.2.2, 3.2.8	G аменабельна 3.2.3, 3.2.8	G аменабельна 3.2.3, 3.2.8

Гомологически тривиальные $L_1(G)$- и $M(G)$-модули в топологической теории

	$L_1(G)$-модули			$M(G)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$L_1(G)$	G дискретна 3.2.5	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G любая 3.2.1	G дискретна 3.2.5, 3.2.8	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G любая 3.2.1, 3.2.8
$L_p(G)$	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G конечна 2.2.14, 3.2.14
$L_\infty(G)$	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G любая 3.2.1	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G любая 3.2.1, 3.2.8	G конечна 3.2.11, 3.2.14
$M(G)$	G дискретна 3.2.6	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G любая 3.2.7	G любая 3.2.9	G конечна 2.2.14, 3.2.14	G любая 3.2.9
$C_0(G)$	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G конечна 3.2.11, 3.2.14	G конечна 3.2.11, 3.2.14
$\mathbb{C}_\gamma$	G компактна 3.2.2	G аменабельна 3.2.3	G аменабельна 3.2.3	G компактна 3.2.2, 3.2.8	G аменабельна 3.2.3, 3.2.8	G аменабельна 3.2.3, 3.2.8

Гомологически тривиальные $L_1(G)$- и $M(G)$-модули в относительной теории

	$L_1(G)$-модули			$M(G)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
$L_1(G)$	G любая [72], §6	G аменабельна и дискретна [72], §6	G любая [72], §6	G любая [66], §3.5	G аменабельна и дискретна [66], §3.5	G любая [66], §3.5
$L_p(G)$	G компактна [72], §6	G аменабельна [73]	G аменабельна [73]	G компактна [66], §3.5	G аменабельна [66], §3.5 ,[73]	G аменабельна [66], §3.5
$L_\infty(G)$	G конечна [72], §6	G любая [72], §6	G аменабельна [72], §6	G конечна [66], §3.5	G любая [66], §3.5	G аменабельна ($\implies$) [66], §3.5
$M(G)$	G дискретна [72], §6	G аменабельна [72], §6	G любая [66], §3.5	G любая [66], §3.5	G аменабельна [66], §3.5	G любая [66], §3.5
$C_0(G)$	G компактна [72], §6	G конечна [72], §6	G аменабельна [72], §6	G компактна [66], §3.5	G конечна [66], §3.5	G аменабельна [66], §3.5
$\mathbb{C}_\gamma$	G компактна 3.2.2	G аменабельна 3.2.3	G аменабельна 3.2.3	G компактна 3.2.2, 3.2.8	G аменабельна 3.2.3, 3.2.8	G аменабельна 3.2.3, 3.2.8

Следует сказать, что результаты о модулях $L_p(G)$ верны для обоих видов внешнего умножения $*_p$ и $\cdot_p$. Наиболее интересный результат параграфа состоит в том, что $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$ метрически или топологически проективен только для дискретной группы G. Для метрического случая это было доказано в [[31], теорема 4.14(ii)].

3.3 Пример “маленькой” категории

Как мы видели по многим примерам, большинство стандартных модулей анализа оказываются гомологически нетривиальными по отношению к большим категориям, таким, например, как категория всех банаховых модулей. Ситуация может кардинально измениться для сравнительно “маленьких” категорий. Данный параграф посвящен построению содержательного примера такого рода.

3.3.1 Предварительные сведения по теории меры и L_p-пространствам

Прежде чем переходить к основной теме, мы напомним некоторые основные факты из теории меры и договоримся об обозначениях. Все эти предварительные сведения можно найти в первых двух томах [47]. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой. Будем говорить, что измеримое множество E является атомом, если $\mu(E) > 0$ и для любого измеримого подмножества F в E либо F либо $E \setminus F$ имеют меру 0. Непосредственно из определения следует, что атомы в строго локализуемых пространствах с мерой имеют конечную меру. Вообще говоря, атом может и не быть одноточечным множеством.

Пространство с мерой называется неатомическим, если его мера не имеет ни одного атома. Пространство с мерой называется атомическим, если каждое измеримое множество положительной меры содержит атом. С помощью леммы Цорна легко показать, что атомическое пространство с мерой можно представить в виде объединения непересекающихся атомов. Это семейство счетно, если пространство с мерой σ-конечно. Эти факты позволяют сказать, что структура атомических пространств с мерой полностью изучена.

Структура строго локализуемых неатомических пространств с мерой описана Дороти Махарам [[47], теорема 332B], но нам понадобится лишь следующее свойство таких пространств с мерой [[47], предложение 215D]: если E — измеримое множество положительной меры в неатомическом пространстве с мерой, то для всех $0 \leq t \leq \mu(E)$ существует измеримое подмножество F в E такое, что $\mu(F) = t$.

Допустим, (Ω,Σ,μ) является σ-конечным пространством с мерой, тогда существуют атомическая мера $\mu_1 : \Sigma \to [0, +\infty]$ и неатомическая мера $\mu_2 : \Sigma \to [0, +\infty]$ такие, что $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Более того, существуют измеримые множества Ω_a^μ и $\Omega_{na}^\mu = \Omega \setminus \Omega_a^\mu$ такие, что $\mu_1(\Omega_{na}^\mu) = \mu_2(\Omega_a^\mu) = 0$. Множества Ω_a^μ и Ω_{na}^μ называются соответственно атомической и неатомической частью пространства с мерой (Ω,Σ,μ).

Вообще говоря, две меры могут быть ни абсолютно непрерывны, ни сингулярны по отношению друг к другу. На этот случай есть теорема Лебега о разложении мер. Для двух заданных σ-конечных мер μ и ν, заданных на измеримом пространстве (Ω,Σ), существует измеримая функция $\rho_{\nu,\mu} : \Omega \to \mathbb{R}$, σ-конечная мера $\nu_s : \Sigma \to [0, +\infty]$ и два измеримых множества $\Omega_s^{\nu,\mu}$, $\Omega_c^{\nu,\mu} = \Omega \setminus \Omega_s^{\nu,\mu}$ таких, что $\nu = \rho_{\nu,\mu}\mu + \nu_s$ и $\mu(\Omega_s^{\nu,\mu}) = \nu_s(\Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$, то есть $\mu \perp \nu_s$.

Перейдем к обсуждению L_p-пространств. Пусть $1 \le p \le +\infty$ и (Ω,Σ,μ) — пространство с мерой. Если все пространство Ω является атомом, то его L_p-пространство одномерно и существует изометрический изоморфизм

$$J_p : L_p(\Omega,\mu) \to \ell_p(\mathbb{N}_1) : f \mapsto \left(1 \mapsto \mu(\Omega)^{1/p-1} \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)\right).$$

Если $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ есть представление Ω как объединения непересекающихся измеримых множеств, то для всех $1 \le p \le +\infty$ мы имеем изометрический изоморфизм

$$I_p : L_p(\Omega,\mu) \to \bigoplus_p \{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda}) : \lambda \in \Lambda\} : f \mapsto (\lambda \mapsto f|_{\Omega_\lambda}).$$

Если каждое множество Ω_λ является атомом, то Ω — атомическое пространство с мерой, и мы получаем еще один изометрический изоморфизм

$$\widetilde{I}_p : L_p(\Omega,\mu) \to \ell_p(\Lambda) : f \mapsto \left(\lambda \mapsto \mu(\Omega_\lambda)^{1/p-1} \int_{\Omega_\lambda} f(\omega) d\mu(\omega)\right).$$

Замечание: работая с индексами p, мы будем полагать по определению, что $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$. Еще один полезный прием в изучении L_p-пространств — это так называемая замена плотности: если $\rho : \Omega \to (0, +\infty)$ — измеримая функция, то оператор

$$\bar{I}_p : L_p(\Omega,\mu) \to L_p(\Omega,\rho\mu) : f \mapsto \rho^{-1/p} f$$

является изометрическим изоморфизмом. Для различных значений p бесконечномерные L_p-пространства не топологически изоморфны. Это можно доказать с использованием понятий котипа и типа [[43], теорема 6.2.14]. Очевидно, в конечномерном случае изоморфизм существует только для пространств одинаковой размерности. Более точно: если Λ — конечное множество и $1 \le p,q \le +\infty$, то существует константа $C_{p,q} > 0$ такая, что $\|x\|_{\ell_p(\Lambda)} \le C_{p,q}\|x\|_{\ell_q(\Lambda)}$ для всех $x \in \mathbb{C}^\Lambda$.

3.3.2 Категория $B(\Omega,\Sigma)$-модулей L_p

“Маленькая” категория, которую мы будем изучать — это категория $B(\Omega,\Sigma)$-модулей вида $L_p(\Omega,\mu)$ на некотором измеримом пространстве (Ω,Σ) для различных σ-конечных положительных мер μ и различных $1 \le p \le +\infty$. Мы обозначим эту категорию как $B(\Omega,\Sigma)-\mathbf{mod}(\mathbf{L})$.

Мы покажем, что все ее модули являются метрически и топологически проективными, инъективными и плоскими. По пути мы дадим полное описание топологически сюръективных, топологически инъективных, коизометрических и изометрических операторов умножения между L_p-пространствами. В [99] Хелемский полностью описал морфизмы $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$, но только для случая локально компактного пространства Ω с борелевской σ-алгеброй. Внимательное изучение его доказательства показывает, что это описание верно для всех σ-конечных пространств с мерой. Чтобы правильно сформулировать результат, нам понадобится несколько обозначений. Через $L_0(\Omega,\Sigma)$ мы обозначим линейное пространство измеримых функций на Ω. Для $1 \leq p,q \leq +\infty$ и положительных σ-конечных мер μ,ν на измеримом пространстве (Ω,Σ) мы обозначим $\Omega_+ := \{\omega \in \Omega_c^{\nu,\mu} : \rho_{\nu,\mu}(\omega) > 0\}$ и

$$L_{p,q,\mu,\nu}(\Omega) := \begin{cases} \{g \in L_0(\Omega,\Sigma) : g \in L_{pq/(p-q)}(\Omega,\rho_{\nu,\mu}^{p/(p-q)}\mu), \quad g|_{\Omega\setminus\Omega_+} = 0\} & \text{если} \quad p > q \\ \{g \in L_0(\Omega,\Sigma) : g\rho_{\nu,\mu}^{1/p} \in L_\infty(\Omega,\mu), \quad g|_{\Omega\setminus\Omega_+} = 0\} & \text{если} \quad p = q \\ \{g \in L_0(\Omega,\Sigma) : g\rho_{\nu,\mu}^{1/p}\mu^{pq/(p-q)} \in L_\infty(\Omega,\mu), \quad g|_{\Omega\setminus\Omega_a^\mu} = 0\} & \text{если} \quad p < q, \end{cases}$$

$$\|g\|_{L_{p,q,\mu,\nu}(\Omega)} := \begin{cases} \|g\|_{L_{pq/(p-q)}(\Omega,\rho_{\nu,\mu}^{p/(p-q)}\mu)} & \text{если} \quad p > q \\ \|g\rho_{\nu,\mu}^{1/p}\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} & \text{если} \quad p = q \\ \|g\rho_{\nu,\mu}^{1/p}\mu^{pq/(p-q)}\|_{L_\infty(\Omega,\mu)} & \text{если} \quad p < q. \end{cases}$$

Теорема 3.3.1 ([99], теорема 4.1)**.** *Пусть (Ω,Σ) — измеримое пространство, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и μ,ν — две σ-конечные меры на (Ω,Σ). Тогда существует изометрический изоморфизм*

$$\mathcal{I}_{p,q,\mu,\nu} : L_{p,q,\mu,\nu}(\Omega) \to \mathrm{Hom}_{B(\Omega,\Sigma)-\mathbf{mod}(\mathbf{L})}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\nu)) : g \mapsto (f \mapsto gf).$$

Проще говоря, все морфизмы в $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$ являются операторами умножения.

3.3.3 Операторы умножения

Пусть (Ω,Σ,μ) и (Ω,Σ,ν) — два пространства с мерой с одной и той же σ-алгеброй измеримых множеств. Для заданной функции $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$ и чисел $1 \leq p,q \leq +\infty$ мы определим оператор умножения

$$M_g : L_p(\Omega,\mu) \to L_q(\Omega,\nu) : f \mapsto gf.$$

Конечно, требуются некоторые ограничения на g, μ и ν чтобы оператор M_g был корректно определен. Для заданного множества $E \in \Sigma$ через M_g^E мы обозначим линейный оператор

$$M_g^E : L_p(E,\mu|_E) \to L_q(E,\nu|_E) : f \mapsto g|_E f.$$

Он корректно определен, так как равенство $f|_{\Omega\setminus E} = 0$ влечет $M_g(f)|_{\Omega\setminus E} = 0$.

Предложение 3.3.2. *Пусть* (Ω,Σ,μ) *— пространство с мерой и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. *Обозначим* $Z_g := g^{-1}(\{0\})$. *Тогда для оператора* $M_g : L_p(\Omega,\mu) \to L_q(\Omega,\mu)$ *выполнено:*

(i) $\mathrm{Ker}(M_g) = \{f \in L_p(\Omega,\mu) : f|_{\Omega\setminus Z_g} = 0\}$, *то есть оператор* M_g *инъективен тогда и только тогда, когда* $\mu(Z_g) = 0$;

(ii) $\mathrm{Im}(M_g) \subset \{h \in L_q(\Omega,\mu) : h|_{Z_g} = 0\}$, *поэтому если* M_g *сюръективен, то* $\mu(Z_g) = 0$.

Доказательство. (i) Желаемое равенство следует из цепочки эквивалентностей:

$$f \in \mathrm{Ker}(M_g) \Longleftrightarrow gf = 0 \Longleftrightarrow f|_{\Omega\setminus Z_g} = 0.$$

(ii) Так как $g|_{Z_g} = 0$, то для всех функций $f \in L_p(\Omega,\mu)$ выполнено $M_g(f)|_{Z_g} = (gf)|_{Z_g} = 0$ и мы получаем нужное включение. Если оператор M_g сюръективен, то, очевидно, $\mu(Z_g) = 0$.
□

Для заданного измеримого множества $E \in \Sigma$ и функции $f \in L_0(E,\Sigma|_E)$ через $\widetilde{f}$ мы будем обозначать функцию из $L_0(\Omega, \Sigma)$ такую, что $\widetilde{f}|_E = f$ и $\widetilde{f}|_{\Omega\setminus E} = 0$.

Предложение 3.3.3. *Пусть* (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) *— два пространства с мерой и* $1 \le p,q \le +\infty$. *Допустим, имеется представление* $\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$ *множества* Ω *в виде конечного объединения непересекающихся измеримых множеств. Тогда*

(i) оператор M_g *топологически инъективен тогда и только тогда, когда операторы* $M_g^{\Omega_\lambda}$ *топологически инъективны для всех* $\lambda \in \Lambda$;

(ii) оператор M_g *топологически сюръективен тогда и только тогда, когда операторы* $M_g^{\Omega_\lambda}$ *топологически сюръективны для всех* $\lambda \in \Lambda$;

(iii) если оператор M_g *изометричен, то таковы и операторы* $M_g^{\Omega_\lambda}$ *для всех* $\lambda \in \Lambda$;

(iv) если оператор M_g *коизометричен, то таковы и операторы* $M_g^{\Omega_\lambda}$ *для всех* $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. (i) Пусть оператор M_g c-топологически инъективен. Зафиксируем индекс $\lambda \in \Lambda$ и функцию $f \in L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})$. Тогда

$$\|M_g^{\Omega_\lambda}(f)\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})} = \|g\widetilde{f}\|_{L_q(\Omega,\nu)} \ge c^{-1}\|\widetilde{f}\|_{L_p(\Omega,\mu)} = c^{-1}\|f\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})}.$$

Следовательно, операторы $M_g^{\Omega_\lambda}$ c-топологически инъективны для всех $\lambda \in \Lambda$.

Обратно, допустим, что операторы $M_g^{\Omega_\lambda}$ c'-топологически инъективны для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любой функции $f \in L_p(\Omega,\mu)$ мы имеем

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \left\| \left(\|M_g^{\Omega_\lambda}(f|_{\Omega_\lambda})\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda \in \Lambda \right) \right\|_{\ell_q(\Lambda)}$$

$$\geq (c')^{-1}\left\|\Big(\|f|_{\Omega_\lambda}\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda\in\Lambda\Big)\right\|_{\ell_q(\Lambda)}$$

$$\geq (c')^{-1}C_{p,q}^{-1}\left\|\Big(\|f|_{\Omega_\lambda}\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda\in\Lambda\Big)\right\|_{\ell_p(\Lambda)} = (c')^{-1}C_{p,q}^{-1}\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Следовательно, оператор M_g c-топологически инъективен для $c = c'C_{p,q} > 0$.

(ii) Допустим, оператор M_g c-топологически сюръективен. Зафиксируем индекс $\lambda\in\Lambda$ и функцию $h\in L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})$. Тогда существует функция $f\in L_p(\Omega,\mu)$ такая, что $M_g(f) = \widetilde{h}$ и $\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq c\|\widetilde{h}\|_{L_q(\Omega,\nu)}$. Следовательно, $M_g^{\Omega_\lambda}(f|_{\Omega_\lambda}) = \widetilde{h}|_{\Omega_\lambda} = h$ и $\|f|_{\Omega_\lambda}\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})} \leq \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq c\|\widetilde{h}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = c\|h\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})}$. Так как функция h произвольна, то операторы $M_g^{\Omega_\lambda}$ c-топологически сюръективны.

Обратно, допустим операторы $M_g^{\Omega_\lambda}$ c'-топологически сюръективны для всех $\lambda\in\Lambda$. Пусть h — произвольная функция из $L_q(\Omega,\nu)$. Из предположения мы получаем, что для каждого $\lambda\in\Lambda$ существует функция $f_\lambda\in L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})$ такая, что $M_g^{\Omega_\lambda}(f_\lambda) = h|_{\Omega_\lambda}$ и $\|f_\lambda\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})} \leq c'\|h|_{\Omega_\lambda}\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})}$. Определим функцию $f\in L_0(\Omega,\Sigma)$ так, что $f|_{\Omega_\lambda} = f_\lambda$. Тогда

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \left\|\Big(\|f_\lambda\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda\in\Lambda\Big)\right\|_{\ell_p(\Lambda)} \leq c'\left\|\Big(\|h|_{\Omega_\lambda}\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda\in\Lambda\Big)\right\|_{\ell_p(\Lambda)}$$

$$\leq c'C_{p,q}\left\|\Big(\|h|_{\Omega_\lambda}\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda\in\Lambda\Big)\right\|_{\ell_q(\Lambda)} = c'C_{p,q}\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

Очевидно, $M_g(f) = h$. Так как функция h произвольна, то оператор M_g c-топологически сюръективен для $c = c'C_{p,q} > 0$.

(iii) Зафиксируем индекс $\lambda\in\Lambda$ и функцию $f\in L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})$. Тогда

$$\|M_g^{\Omega_\lambda}(f)\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})} = \|g\widetilde{f}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|\widetilde{f}\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|f\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})}.$$

Значит, операторы $M_g^{\Omega_\lambda}$ изометричны для всех $\lambda\in\Lambda$.

(iv) Зафиксируем индекс $\lambda\in\Lambda$. Так как оператор M_g коизометричен, то он сжимающий и 1-топологически сюръективный. Из доказательства пункта (ii) мы получаем, что оператор $M_g^{\Omega_\lambda}$ 1-топологически сюръективен. Пусть f — произвольная функция из $L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})$. Так как M_g сжимающий, то

$$\|M_g^{\Omega_\lambda}(f)\|_{L_q(\Omega_\lambda,\nu|_{\Omega_\lambda})} = \|M_g(\widetilde{f})\chi_{\Omega_\lambda}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|M_g(\widetilde{f}\chi_{\Omega_\lambda})\|_{L_q(\Omega,\nu)} \leq \|\widetilde{f}\chi_{\Omega_\lambda}\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|f\|_{L_p(\Omega_\lambda,\mu|_{\Omega_\lambda})}.$$

Следовательно, оператор $M_g^{\Omega_\lambda}$ сжимающий и 1-топологически сюръективный, то есть коизометрический. □

Предложение 3.3.4. *Пусть (Ω,Σ,μ) и (Ω,Σ,ν) — два σ-конечных пространства с мерой. Пусть $1\leq p,q\leq +\infty$ и $g\in L_0(\Omega,\Sigma)$. Если $\mu\perp\nu$, то оператор $M_g : L_p(\Omega,\mu)\to L_q(\Omega,\nu)$ нулевой.*

Доказательство. В силу того, что $\mu \perp \nu$ существует множество $\Omega_s^{\nu,\mu} \in \Sigma$ такое, что $\mu(\Omega_s^{\nu,\mu}) = \nu(\Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$, где $\Omega_c^{\nu,\mu} = \Omega \setminus \Omega_s^{\nu,\mu}$. Так как $\mu(\Omega_s^{\nu,\mu}) = 0$, то $\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = \chi_\Omega$ в $L_p(\Omega,\mu)$ и $\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = 0$ в $L_q(\Omega,\nu)$. Теперь для всех функций $f \in L_p(\Omega,\mu)$ мы имеем $M_g(f) = M_g(f\chi_\Omega) = M_g(f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}) = gf\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = 0$. Следовательно, $M_g = 0$. □

С этого момента начинается главная часть нашего исследования операторов умножения. Мы покажем, что $\langle$ изометрические / топологически инъективные $\rangle$ морфизмы в $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$ являются коретракциями. Аналогично, $\langle$ строго коизометрические / топологически сюръективные $\rangle$ морфизмы в $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$ являются ретракциями. Позже, используя эти описания, мы легко опишем, все метрически и топологически проективные, инъективные и плоские модули категории $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$.

Предложение 3.3.5. *Пусть (Ω,Σ,μ) — пространство с мерой и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда*

(i) оператор $M_g : L_p(\Omega,\mu) \to L_p(\Omega,\mu)$ ограничен тогда и только тогда, когда $g \in L_\infty(\Omega,\mu)$;

(ii) оператор M_g — топологический изоморфизм тогда и только тогда, когда $c \leq |g| \leq C$ для некоторых $C,c > 0$.

Доказательство. (i) Допустим существует множество $E \in \Sigma$ положительной меры такое, что $|g|_E| > \|M_g\|$. Тогда

$$\|M_g(\chi_E)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|g\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)} > \|M_g\|\|\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Противоречие, значит, для всех множеств $E \in \Sigma$ положительной меры выполнено $|g|_E| \leq \|M_g\|$, то есть $|g| \leq \|M_g\|$ и $g \in L_\infty(\Omega,\mu)$. Обратно, пусть $g \in L_\infty(\Omega,\mu)$, тогда $|g| \leq C$ для некоторого $C > 0$. Для произвольной функции $f \in L_p(\Omega,\mu)$ мы имеем

$$\|M_g(f)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|gf\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq C\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Значит, $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu))$.

(ii) Заметим, что $M_g^{-1} = M_{1/g}$ при условии, что функция $1/g$ корректно определена. Оператор M_g является топологическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда M_g и M_g^{-1} суть ограниченные операторы. Из предыдущего пункта и равенства $M_g^{-1} = M_{1/g}$ мы видим, что это эквивалентно ограниченности g и $1/g$. Значит, $c \leq |g| \leq C$ для некоторых $C,c > 0$. □

Предложение 3.3.6. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное атомическое пространство с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда оператор $\widetilde{M_{\widetilde{g}}} := \widetilde{I}_q M_g \widetilde{I}_p^{-1} \in \mathcal{B}(\ell_p(\Lambda),\ell_q(\Lambda))$ является оператором умножения на функцию $\widetilde{g} : \Lambda \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto \mu(\Omega_\lambda)^{1/q-1/p-1}\int_{\Omega_\lambda} f(\omega)d\mu(\omega)$, где $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — не более чем счетное разложение Ω на семейство непересекающихся атомов.*

Доказательство. Пусть $1 \le p,q \le +\infty$. Для любого $x \in \ell_p(\Lambda)$ мы имеем

$$\widetilde{M_{\widetilde{g}}}(x)(\lambda) = (\widetilde{I}_q((M_g\widetilde{I}_p^{-1})(x))(\lambda) = J_q(M_g(\widetilde{I}_p^{-1}(x))|_{\Omega_\lambda})(1)$$

$$= J_q((g\widetilde{I}_p^{-1}(x))|_{\Omega_\lambda})(1) = \mu(\Omega_\lambda)^{1/q-1}\int_{\Omega_\lambda}(g|_{\Omega_\lambda}\widetilde{I}_p^{-1}(x)|_{\Omega_\lambda})(\omega)d\mu(\omega)$$

$$= \mu(\Omega_\lambda)^{1/q-1}\int_{\Omega_\lambda}(g\mu(\Omega)^{-1/p}x(\lambda)\chi_{\Omega_\lambda})(\omega)d\mu(\omega) = x(\lambda)\mu(\Omega_\lambda)^{1/q-1/p-1}\int_{\Omega_\lambda}g(\omega)d\mu(\omega).$$

Значит, $\widetilde{M_{\widetilde{g}}}$ — оператор умножения, причем $\widetilde{g}(\lambda) = \mu(\Omega_\lambda)^{1/q-1/p-1}\int_{\Omega_\lambda}g(\omega)d\mu(\omega)$. □

Так как $\widetilde{I}_p$ и $\widetilde{I}_q$ — изометрические изоморфизмы, то оператор M_g топологически инъективен тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{M_{\widetilde{g}}}$ топологически инъективен.

Предложение 3.3.7. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное атомическое пространство с мерой, $1 \le p,q \le +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$ — топологически инъективный оператор;

(ii) $|g| \ge c$ для некоторого $c > 0$, при этом если $p \ne q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ По предположению, оператор M_g топологически инъективен, тогда таков же и $\widetilde{M_{\widetilde{g}}}$, то есть $\|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}(x)\|_{\ell_q(\Lambda)} \ge c'\|x\|_{\ell_p(\Lambda)}$ для некоторого $c' > 0$ и всех $x \in \ell_p(\Lambda)$. Через $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ мы обозначим не более, чем счетное разбиение Ω на семейство непересекающихся атомов. Мы рассмотрим два случая.

Пусть $p \ne q$. Допустим, что множество Λ счетно. Если $p,q < +\infty$, то мы приходим к противоречию так как по теореме Питта [[43], предложение 2.1.6] не существует вложения $\ell_p(\Lambda)$ в $\ell_q(\Lambda)$ для счетного Λ и $1 \le p,q < +\infty$, $p \ne q$.

Если $1 \le p < +\infty$ и $q = +\infty$, то рассмотрим произвольное конечное множество $F \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$. Тогда

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|\widetilde{g}(\lambda)| \ge \max_{\lambda\in F}|\widetilde{g}(\lambda)| = \left\|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}\left(\sum_{\lambda\in F}\delta_\lambda\right)\right\|_{\ell_\infty(\Lambda)} \ge c'\left\|\sum_{\lambda\in F}\delta_\lambda\right\|_{\ell_p(\Lambda)} = c'\mathrm{Card}(F)^{1/p}.$$

Так как множество Λ счетно, то $\sup_{\lambda\in\Lambda}|\widetilde{g}(\lambda)| \ge c'\sup_{F\in\mathcal{P}_0(\Lambda)}\mathrm{Card}(F)^{1/p} = +\infty$. С другой стороны, поскольку $\widetilde{M_{\widetilde{g}}}$ — ограниченный оператор, мы получаем, что

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|\widetilde{g}(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\Lambda}\|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}(\delta_\lambda)\|_{\ell_\infty(\Lambda)} \le \|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}\|\|\delta_\lambda\|_{\ell_p(\Lambda)} = \|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}\| < +\infty.$$

Противоречие.

Если $1 \le q < +\infty$ и $p = +\infty$ то мы снова приходим к противоречию. Действительно, так как множество Λ счетно, то пространство $\ell_\infty(\Lambda)$ несепарабельно, а $\ell_q(\Lambda)$ сепарабельно.

Поскольку оператор $\widetilde{M_{\widetilde{g}}}$ топологически инъективен, то $\mathrm{Im}(\widetilde{M_{\widetilde{g}}})$ — несепарабельное подпространство в $\ell_q(\Lambda)$. Противоречие.

Во всех случаях мы пришли к противоречию, значит, множество Λ конечно и пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов. Очевидно, функция g однозначно определяется своими значениями $k_\lambda \in \mathbb{C}$ на атомах $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По предложению 3.3.2 функция g равна нулю только на множествах меры 0, поэтому $k_\lambda \neq 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Поскольку множество Λ конечно, то $|g| \geq c$ для $c = \min_{\lambda\in\Lambda} |k_\lambda| > 0$.

Пусть $p = q$. Для любого $\lambda \in \Lambda$ мы имеем

$$|\widetilde{g}(\lambda)| = \|\widetilde{g}\delta_\lambda\|_{\ell_q(\Lambda)} = \|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}(\delta_\lambda)\|_{\ell_q(\Lambda)} \geq c'\|\delta_\lambda\|_{\ell_p(\Lambda)} = c'.$$

Поэтому для всех $\omega \in \Omega_\lambda$ выполнено

$$|g(\omega)| = \left|\mu(\Omega_\lambda)^{-1}\int_{\Omega_\lambda} g(\omega)d\mu(\omega)\right| = \left|\mu(\Omega_\lambda)^{-1}\mu(\Omega_\lambda)^{1+1/p-1/p}\widetilde{g}(\lambda)\right| = |\widetilde{g}(\lambda)| \geq c'.$$

Так как $\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda$, то в итоге мы получаем, что $|g| \geq c'$.

$(ii) \implies i)$ Допустим $|g| \geq c$ для $c > 0$. Тогда из предложения 3.3.6 следует, что $|\widetilde{g}| \geq c$. Если $p \neq q$, то мы дополнительно предполагаем, что пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов. В этом случае пространство $L_p(\Omega,\mu)$ конечномерно. По предположению функция g не принимает нулевых значений, поэтому оператор M_g топологически инъективен. Если же $p = q$, то для всех $x \in \ell_p(\Lambda)$ мы имеем

$$\|\widetilde{M_{\widetilde{g}}}(x)\|_{\ell_p(\Lambda)} = \|gx\|_{\ell_p(\Lambda)} \geq c\|x\|_{\ell_p(\Lambda)},$$

поэтому оператор $\widetilde{M_{\widetilde{g}}}$ топологически инъективен, а вместе с ним и M_g. □

Предложение 3.3.8. *Пусть (Ω,Σ,μ) — неатомическое пространство с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$ — топологически инъективный оператор;

(ii) $|g| \geq c$ для некоторого $c > 0$, и $p = q$.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Согласно условию $\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\mu)} \geq c\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$ для некоторого $c > 0$ и всех функций $f \in L_p(\Omega,\mu)$. Мы рассмотрим три случая.

Пусть $p > q$. Существуют константа $C > 0$ и множество $E \in \Sigma$ положительной меры такие, что $|g|_E| \leq C$, иначе M_g не определен корректно. Так как (Ω,Σ,μ) — неатомическое пространство с мерой, то существует последовательность $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$ подмножеств E такая, что $\mu(E_n) = 2^{-n}$. Поскольку $p > q$, мы получаем

$$c \leq \frac{\|M_g(\chi_{E_n})\|_{L_q(\Omega,\mu)}}{\|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega,\mu)}} \leq \frac{C\|\chi_{E_n}\|_{L_q(\Omega,\mu)}}{\|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega,\mu)}} \leq C\mu(E_n)^{1/q-1/p},$$

$$c \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} C\mu(E_n)^{1/q-1/p} = C\inf_{n\in\mathbb{N}} 2^{n(1/p-1/q)} = 0.$$

Противоречие.

Пусть $p = q$. Зафиксируем число $c' < c$. Допустим, найдется множество $E \in \Sigma$ положительной меры такое, что $|g|_E| < c'$, тогда

$$\|M_g(\chi_E)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|g\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq c'\|\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)} < c\|\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Противоречие. Так как $c' < c$ произвольно, то мы заключаем, что $|g|_E| \geq c$ для всех множеств $E \in \Sigma$ положительной меры. Следовательно, $|g| \geq c$.

Теперь пусть $p < q$. Допустим, нашлись число $c' > 0$ и множество $E \in \Sigma$ положительной меры такие, что $|g|_E| > c'$. Снова рассмотрим последовательность $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$ подмножеств в E такую, что $\mu(E_n) = 2^{-n}$. Из неравенства $p < q$ следует, что

$$\|M_g\| \geq \frac{\|M_g(\chi_{E_n})\|_{L_q(\Omega,\mu)}}{\|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega,\mu)}} \geq \frac{c'\|\chi_{E_n}\|_{L_q(\Omega,\mu)}}{\|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega,\mu)}} \geq c'\mu(E_n)^{1/q-1/p}$$

$$\|M_g\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} c'\mu(E_n)^{1/q-1/p} \geq c'\sup_{n\in\mathbb{N}} 2^{n(1/p-1/q)} = +\infty.$$

Противоречие, значит, $g = 0$. В этом случае по предложению 3.3.2 оператор M_g не топологически инъективен.

$(ii) \implies (i)$ Обратно, допустим $|g| \geq c > 0$ и пусть $p = q$. Тогда для любой функции $f \in L_p(\Omega,\mu)$ выполнено

$$\|M_g(f)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|gf\|_{L_p(\Omega,\mu)} \geq c\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Значит, оператор M_g топологически инъективен. □

Предложение 3.3.9. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное пространство с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$ *— топологически инъективный оператор;*

(ii) M_g *— топологический изоморфизм;*

(iii) $|g| \geq c$ *для некоторого* $c > 0$, *при этом если* $p \neq q$ *то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из конечного числа атомов.*

Доказательство. $(i) \iff (iii)$ Рассмотрим разложение $\Omega = \Omega_a^\mu \cup \Omega_{na}^\mu$, где $(\Omega_{na}^\mu,\Sigma|_{\Omega_{na}^\mu},\mu|_{\Omega_{na}^\mu})$ — неатомическое пространство с мерой и $(\Omega_a^\mu,\Sigma|_{\Omega_a^\mu},\mu|_{\Omega_a^\mu})$ — атомическое пространство с мерой. По предложению 3.3.3 оператор M_g топологически инъективен тогда и только тогда, когда таковы $M_g^{\Omega_a^\mu}$ и $M_g^{\Omega_{na}^\mu}$. Предложения 3.3.7, 3.3.8 дают для этого необходимые и достаточные условия.

$(i) \implies (ii)$ Допустим, оператор M_g топологически инъективен. Если $p = q$, то из рассуждений выше следует, что $|g| \geq c$ для некоторого $c > 0$. Поскольку оператор M_g ограничен, то из предложения 3.3.5 мы также получаем, что $C \geq |g|$ для некоторого $C > 0$. Теперь из того же самого предложения мы заключаем, что M_g есть топологический изоморфизм. Если $p \neq q$, то из предыдущего пункта известно, что пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов и функция g не равна нулю. Следовательно, $\dim(L_p(\Omega,\Sigma,\mu)) = \dim(\ell_p(\Lambda)) = \mathrm{Card}(\Lambda) < +\infty$. Аналогично, $\dim(L_q(\Omega,\Sigma,\mu)) = \mathrm{Card}(\Lambda) < +\infty$. Так как функция g не равна нулю, то по предложению 3.3.2 оператор M_g инъективен. Итак, M_g — инъективный оператор между конечномерными пространствами равной размерности. Следовательно, он является топологическим изоморфизмом.

$(ii) \implies (i)$ Обратно, если M_g — топологический изоморфизм, то, очевидно, он топологически инъективен. □

Предложение 3.3.10. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное пространство с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$. Допустим, $g,\rho \in L_0(\Omega,\Sigma)$ и функция ρ неотрицательна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\rho\mu))$ *— топологически инъективный оператор;*

(ii) M_g *— топологический изоморфизм;*

(iii) функция ρ положительна, $|g\rho^{1/q}| \geq c$ для некоторого $c > 0$, при этом если $p \neq q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов.

Доказательство. $(i) \implies (iii)$ Рассмотрим множество $E = \rho^{-1}(\{0\})$. Предположим, что $\mu(E) > 0$, тогда $\chi_E \neq 0$ в $L_p(\Omega,\mu)$. С другой стороны, $(\rho\mu)(E) = \int_E \rho(\omega) d\mu(\omega) = 0$, поэтому $\chi_E = 0$ в $L_q(\Omega,\rho\mu)$ и $M_g(\chi_E) = g\chi_E = 0$ в $L_q(\Omega,\rho\mu)$. Таким образом, мы получили, что оператор M_g не инъективен и, как следствие, не топологически инъективен. Противоречие, поэтому $\mu(E) = 0$ и функция ρ положительна. Следовательно, корректно определен изометрический изоморфизм $\bar{I}_q : L_q(\Omega,\mu) \to L_q(\Omega,\rho\mu) : f \mapsto \rho^{-1/q} f$. Очевидно, $M_{g\rho^{1/q}} = \bar{I}_q^{-1} M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$. Поскольку $\bar{I}_q$ — изометрический изоморфизм и оператор M_g топологически инъективен, то $M_{g\rho^{1/q}}$ также топологически инъективен. Из предложения 3.3.9 мы получаем, что $|g\rho^{1/q}| \geq c$ для некоторого $c > 0$ и если $p \neq q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов.

$(iii) \implies (i)$ Из предложения 3.3.9 следует, что оператор $M_{g\rho^{1/q}}$ топологически инъективен. Так как функция ρ положительна, то мы имеем изометрический изоморфизм $\bar{I}_q$. Теперь из равенства $M_g = \bar{I}_q M_{g\rho^{1/q}}$ следует, что оператор M_g также топологически инъективен.

$(i) \implies (ii)$ Как мы доказали ранее оператор $M_{g\rho^{1/q}}$ топологически инъективен и $\bar{I}_q$ — изометрический изоморфизм. По предложению 3.3.9 оператор $M_{g\rho^{1/q}}$ является топологическим изоморфизмом. Так как $M_g = \bar{I}_q M_{g\rho^{1/q}}$ и $\bar{I}_q$ есть изометрический изоморфизм, то M_g является топологическим изоморфизмом.

$(ii) \implies (i)$ Если M_g — топологический изоморфизм, тогда, очевидно, он топологически инъективен. $\square$

Предложение 3.3.11. *Пусть (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) — два σ-конечных пространства с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu), L_q(\Omega,\nu))$ *— топологически инъективный оператор;*

(ii) $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ *— топологический изоморфизм;*

(iii) функция $\rho_{\nu,\mu}|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ *положительна,* $|g\rho_{\nu,\mu}^{1/q}|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}| \geq c$ *для некоторого* $c > 0$*, при этом если* $p \neq q$*, то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из конечного числа атомов.*

Доказательство. По предложению 3.3.3 оператор M_g топологически инъективен тогда и только тогда, когда операторы $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}} : L_p(\Omega_c^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}) \to L_q(\Omega_c^{\nu,\mu},\rho_{\nu,\mu}\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})$ и $M_g^{\Omega_s^{\nu,\mu}} : L_p(\Omega_s^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_s^{\nu,\mu}}) \to L_q(\Omega_s^{\nu,\mu},\nu_s|_{\Omega_s^{\nu,\mu}})$ топологически инъективны. По предложению 3.3.4 оператор $M_g^{\Omega_s^{\nu,\mu}}$ нулевой. Так как $\mu(\Omega_s^{\nu,\mu}) = 0$, то $L_p(\Omega_s^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_s^{\nu,\mu}}) = \{0\}$. Отсюда мы заключаем, что оператор $M_g^{\Omega_s^{\nu,\mu}}$ топологически инъективен. Значит, топологическая инъективность M_g эквивалентна топологической инъективности $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$. Остается применить предложение 3.3.10. $\square$

Предложение 3.3.12. *Пусть (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) — два σ-конечных пространства с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\nu))$ *— топологически инъективный оператор;*

(ii) $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega,\nu), L_p(\Omega,\mu))$ *— топологически сюръективный левый обратный оператор к* M_g.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ По предложению 3.3.3 оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ топологически инъективен. По предложению 3.3.10 оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ обратим и $(M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$. Тогда для любой функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ выполнено

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{1/g}(h)\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}(h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})}$$

$$\leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|\|h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\nu,\mu},\nu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} \leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

Поэтому оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$ ограничен. Теперь заметим, что для любой функции $f \in L_p(\Omega,\mu)$ выполнено

$$M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f)) = M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(gf) = (\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g)gf = f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}.$$

Так как $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$, то $\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = \chi_\Omega$, поэтому $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f)) = f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = f\chi_\Omega = f$. Это означает, что $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$ — левый обратный оператор умножения к M_g. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_p(\Omega,\mu)$, тогда для $h = M_g(f)$ выполнено $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h) = f$ и

$\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)} \le \|M_g\|\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$. Так как функция f произвольна, то оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$ топологически сюръективен.

Обратно, если M_g имеет левый обратный оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$, то для всех $f \in L_p(\Omega,\mu)$ выполнено

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} \ge \|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}\|^{-1}\|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \ge \|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}\|^{-1}\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Следовательно, оператор M_g топологически инъективен. □

Предложение 3.3.13. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное пространство с мерой, $1 \le p,q \le +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$ *— изометрический оператор;*

(ii) $|g| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$*, при этом если $p \ne q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из одного атома.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Пусть $p = q$. Допустим существует множество $E \in \Sigma$ положительной меры такое, что $|g|_E| < 1$, тогда

$$\|M_g(\chi_E)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|g\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)} < \|\chi_E\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_g(\chi_E)\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Противоречие, значит для любого множества $E \in \Sigma$ положительной меры выполнено $|g|_E| \ge 1$, то есть $|g| \ge 1$. Аналогично доказывается, что $|g| \le 1$. Следовательно, $|g| = 1 = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$. Пусть $p \ne q$, тогда так как оператор M_g — изометрия, то он топологически инъективен. По предложению 3.3.9 пространство (Ω,Σ,μ) состоит из конечного числа атомов. Допустим, что имеется хотя бы два атома, назовем их Ω_1 и Ω_2. Они оба конечной меры, поэтому мы можем рассмотреть функции $h_k = \|\chi_{\Omega_k}\|^{-1}_{L_p(\Omega,\mu)}\chi_{\Omega_k}$ для $k \in \mathbb{N}_2$. Так как эти атомы не пересекаются, то $h_1h_2 = 0$ и как результат $M_g(h_1)M_g(h_2) = 0$. Заметим, что для любого $1 \le r \le +\infty$ и любых функций $f_1,f_2 \in L_r(\Omega,\mu)$ со свойством $f_1f_2 = 0$ верно

$$\|f_1 + f_2\|_{L_r(\Omega,\mu)} = \left\|\left(\|f_\lambda\|_{L_r(\Omega,\mu)} : \lambda \in \mathbb{N}_2\right)\right\|_{\ell_r(\mathbb{N}_2)}.$$

Значит,

$$\|M_g(h_1 + h_2)\|_{L_q(\Omega,\mu)} = \|h_1 + h_2\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|(1 : \lambda \in \mathbb{N}_2)\|_{\ell_p(\mathbb{N}_2)} = 2^{1/p}.$$

С другой стороны

$$\|M_g(h_1 + h_2)\|_{L_q(\Omega,\mu)} = \|M_g(h_1) + M_g(h_2)\|_{L_q(\Omega,\mu)}$$
$$= \left\|\left(\|M_g(h_\lambda)\|_{L_q(\Omega,\mu)} : \lambda \in \mathbb{N}_2\right)\right\|_{\ell_q(\mathbb{N}_2)} = \left\|\left(\|h_\lambda\|_{L_p(\Omega,\mu)} : \lambda \in \mathbb{N}_2\right)\right\|_{\ell_q(\mathbb{N}_2)} = 2^{1/q}.$$

Поэтому $2^{1/p} = 2^{1/q}$. Противоречие, значит, (Ω,Σ,μ) состоит из одного атома. В этом случае для любой функции $f \in L_p(\Omega,\mu)$ выполнено

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\mu)} = \|J_q(M_g(f))\|_{\ell_q(\mathbb{N}_1)} = \|J_q(gf)\|_{\ell_q(\mathbb{N}_1)} = \mu(\Omega)^{1/q-1}\left|\int_\Omega g(\omega)f(\omega)d\mu(\omega)\right|$$

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|J_p(f)\|_{\ell_p(\mathbb{N}_1)} = \mu(\Omega)^{1/p-1}\left|\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)\right|.$$

Через c мы обозначим константное значение функции g, тогда

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\mu)} = \mu(\Omega)^{1/q-1}\left|\int_\Omega g(\omega)f(\omega)d\mu(\omega)\right| = \mu(\Omega)^{1/q-1}|c|\left|\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)\right|.$$

Из этого равенства следует, что оператор M_g будет изометрией, если $|g| = |c| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$.

$(ii) \implies (i)$. Пусть $p = q$, тогда $|g| = 1$. Поэтому для произвольной функции $f \in L_p(\Omega,\mu)$ выполнено

$$\|M_g(f)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|gf\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \||g|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)},$$

значит, оператор M_g — изометрия. Пусть $p \neq q$, тогда по предположению (Ω,Σ,μ) состоит из одного атома, и тогда

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\mu)} = \mu(\Omega)^{1/q-1}\left|\int_\Omega g(\omega)f(\omega)d\mu(\omega)\right| = \mu(\Omega)^{1/q-1}|c|\left|\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)\right|$$

$$= \mu(\Omega)^{1/p-1}\left|\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)\right| = \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Следовательно, оператор M_g изометричен. □

Предложение 3.3.14. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное пространство с мерой и $1 \leq p,q \leq +\infty$. Допустим, $g,\rho \in L_0(\Omega,\Sigma)$ и функция ρ неотрицательна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) оператор $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu), L_q(\Omega,\rho\mu))$ изометричен;

(ii) M_g — изометрический изоморфизм;

(iii) функция ρ положительна, $|g\rho^{1/q}| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$, при этом если $p \neq q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из одного атома.

Доказательство. $(i) \implies (iii)$ Так как оператор M_g изометричен, то он топологически инъективен и из предложения 3.3.11 следует, что функция ρ положительна. Таким образом, мы имеем изометрический изоморфизм $\bar{I}_q : L_q(\Omega,\mu) \to L_q(\Omega,\rho\mu) : f \mapsto \rho^{-1/q}f$. Очевидно, $M_{g\rho^{1/q}} = \bar{I}_q^{-1}M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$. Так как $\bar{I}_q$ — изометрический изоморфизм и оператор M_g изометричен, то таков же и $M_{g\rho^{1/q}}$. Осталось применить предложение 3.3.13.

$(iii) \implies (i)$ По предложению 3.3.13 оператор $M_{g\rho^{1/q}}$ изометричен. Так как функция ρ положительна, то корректно определен изометрически изоморфизм $\bar{I}_q$. Тогда из равенства $M_g = \bar{I}_q M_{g\rho^{1/q}}$ следует, что оператор M_g также изометричен.

$(i) \implies (ii)$ Поскольку оператор M_g изометричен, он топологически инъективен, и по предложению 3.3.10 он является изоморфизмом, причем, по предположению, изометрическим.

$(ii) \implies (i)$ Очевидно. □

Предложение 3.3.15. *Пусть* (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) *— два* σ*-конечных пространства с мерой,* $1 \leq p,q \leq +\infty$ *и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) M_g *— изометрический оператор;*

(ii) $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ *— изометрический оператор;*

(iii) функция $\rho_{\nu,\mu}|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ *положительна,* $|g\rho_{\nu,\mu}^{1/q}|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}| = \mu(\Omega_c^{\nu,\mu})^{1/p-1/q}$, *при этом если* $p \neq q$ *то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из одного атома.*

Доказательство. $(i) \implies (ii) \implies (iii)$ Так как оператор M_g изометричен, то по предложению 3.3.3 оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ также изометричен. Осталось применить предложение 3.3.14.

$(iii) \implies (i)$ По предложению 3.3.14 оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ изометричен. Теперь рассмотрим произвольную функцию $f \in L_p(\Omega,\mu)$. Так как $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$, то $\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = \chi_\Omega$ в $L_p(\Omega,\mu)$. Как следствие, $f = f\chi_\Omega = f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ в $L_p(\Omega,\mu)$ и $M_g(f) = M_g(f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}$. Учитывая, что оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ изометричен, мы получаем

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|M_g(f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|M_g(f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\|_{L_q(\Omega_c^{\nu,\mu},\nu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})}$$

$$= \|M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}(f|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\|_{L_q(\Omega_c^{\nu,\mu},\nu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} = \|f|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_p(\Omega_c^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})}.$$

Поскольку $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$, то $\|f|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_p(\Omega_c^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} = \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$, и поэтому $\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$. Значит, оператор M_g изометричен. □

Предложение 3.3.16. *Пусть* (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) *— два* σ*-конечных пространства с мерой,* $1 \leq p,q \leq +\infty$ *и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\nu))$ *— изометрический оператор;*

(ii) $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega,\nu), L_p(\Omega,\mu))$ *— строго коизометрический левый обратный оператор к* M_g.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ По предложению 3.3.3 оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ изометричен, и по предложению 3.3.14 он обратим, причем, очевидно, что $(M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$. Так как оператор $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ изометричен, то таков же и его левый обратный. Тогда для любой функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ выполнено

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{1/g}(h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}(h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\nu,\mu},\mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})}$$

$$= \|h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\nu,\mu},\nu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} \leq \|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

Поэтому оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$ сжимающий. Далее для всех функций $f \in L_p(\Omega,\mu)$ мы имеем

$$M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f)) = M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(gf) = (\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g)gf = f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}.$$

Так как $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$, то $\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = \chi_\Omega$, и поэтому $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f)) = f\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = f\chi_\Omega = f$. Последнее означает, что оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$ является левым обратным оператором умножения к M_g. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_p(\Omega,\mu)$, тогда для $h = M_g(f)$ выполнено $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h) = f$ и $\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$. Следовательно, $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}}/g$ есть строго 1-топологически сюръективный оператор, но он еще и сжимающий, а, значит, строго коизометрический.

$(ii) \implies (i)$ Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_p(\Omega,\mu)$, тогда существует функция $h \in L_q(\Omega,\nu)$ такая, что $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h) = f$ и $\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$. Следовательно,

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h))\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}h\|_{L_q(\Omega,\nu)} \leq \|h\|_{L_q(\Omega,\nu|)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Поскольку оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$ сжимающий и левый обратный к M_g, то

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f))\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq \|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)}$$

и, значит, $\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}$. Так как функция f произвольна, то оператор M_g изометричен. □

Теперь мы обсудим топологически сюръективные и коизометрические операторы умножения. Их описание получить проще и большинство доказательств схожи (но не идентичны) с рассуждениями для топологически инъективных и изометрических операторов.

Предложение 3.3.17. *Пусть* (Ω,Σ,μ) *— σ-конечное пространство с мерой,* $1 \leq p,q \leq +\infty$ *и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$ *— топологически сюръективный оператор;*

(ii) M_g *— топологический изоморфизм;*

(iii) $|g| \geq c$ *для некоторого* $c > 0$, *при этом если* $p \neq q$, *то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из конечного числа атомов.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как оператор M_g топологически сюръективен, то он сюръективен и по предложению 3.3.2 он инъективен. Следовательно, оператор M_g биективен. Так как L_p пространства полны, то из теоремы об открытом отображении мы получаем, что M_g — топологический изоморфизм.

$(ii) \implies (i)$ Если M_g — топологический изоморфизм, то он, очевидно, топологически сюръективен.

$(ii) \iff (iii)$ Эквивалентность следует из предложения 3.3.9. □

Предложение 3.3.18. *Пусть* (Ω,Σ,ν) *— σ-конечное пространство с мерой,* $1 \le p,q \le +\infty$ *и* $g,\rho \in L_0(\Omega,\Sigma)$ *причем функция ρ неотрицательна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\rho\nu),L_q(\Omega,\nu))$ *— топологически сюръективный оператор;*

(ii) M_g *— топологический изоморфизм;*

(iii) функция ρ положительна, $|g\rho^{-1/p}| \ge c$ *для некоторого* $c > 0$*, при этом если* $p \ne q$*, то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из конечного числа атомов.*

Доказательство. $(i) \implies (iii)$ Рассмотрим множество $E = \rho^{-1}(\{0\})$. Допустим, $\nu(E) > 0$, тогда $\chi_E \ne 0$ в $L_q(\Omega,\nu)$. С другой стороны, $(\rho\nu)(E) = \int_E \rho(\omega)d\nu(\omega) = 0$, поэтому $\chi_E = 0$ в $L_p(\Omega,\rho\nu)$. Тогда для всех функций $f \in L_p(\Omega,\rho\nu)$ выполнено $M_g(f)\chi_E = M_g(f\chi_E) = M_g(0) = 0$ в $L_q(\Omega,\nu)$. Последнее равенство означает, что $\mathrm{Im}(M_g) \subset \{h \in L_q(\Omega,\nu) : h|_E = 0\}$. Поскольку $\nu(E) \ne 0$, оператор M_g не сюръективен и, как следствие, не является топологически сюръективным. Противоречие, значит, $\nu(E) = 0$ и ρ — положительная функция. Значит, корректно определен изометрический изоморфизм $\bar{I}_p : L_p(\Omega,\nu) \to L_p(\Omega,\rho\nu) : f \mapsto \rho^{-1/p}f$. Очевидно, $M_{g\rho^{-1/p}} = M_g\bar{I}_p \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\nu),L_q(\Omega,\nu))$. Так как $\bar{I}_p$ — изометрический изоморфизм и оператор M_g топологически сюръективен, то таков же и $M_{g\rho^{-1/p}}$. Осталось применить предложение 3.3.17.

$(iii) \implies (i)$ По предложению 3.3.17 оператор $M_{g\rho^{-1/p}}$ топологически сюръективен. Так как функция ρ положительна, то корректно определен изометрический изоморфизм $\bar{I}_p$. Из равенства $M_g = M_{g\rho^{-1/p}}\bar{I}_p^{-1}$ следует, что оператор M_g также топологически сюръективен.

$(i) \implies (ii)$ Как мы доказали выше, оператор $M_{g\rho^{1/q}}$ топологически инъективен и $\bar{I}_q$ — изометрический изоморфизм. Тогда по предложению 3.3.17 оператор $M_{g\rho^{1/q}}$ является топологическим изоморфизмом. Так как $M_g = \bar{I}_q M_{g\rho^{1/q}}$ то оператор M_g тоже является топологическим изоморфизмом.

$(ii) \implies (i)$. Если M_g — топологический изоморфизм, то он, очевидно, топологически сюръективен. □

Предложение 3.3.19. *Пусть* (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) *— два σ-конечных пространства с мерой,* $1 \le p,q \le +\infty$ *и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu), L_q(\Omega,\nu))$ — *топологически сюръективный оператор;*

(ii) $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ — *топологически сюръективный оператор;*

(iii) *функция* $\rho_{\mu,\nu}|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ *положительна,* $|g\rho_{\mu,\nu}^{-1/p}|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}| \geq c$ *для некоторого* $c > 0$*, при этом если* $p \neq q$*, то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из конечного числа атомов.*

Доказательство. По предложению 3.3.3 оператор M_g топологически сюръективен тогда и только тогда, когда таковы же операторы $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}} : L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\rho_{\mu,\nu}\nu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}) \to L_q(\Omega_c^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})$ и $M_g^{\Omega_s^{\mu,\nu}} : L_p(\Omega_s^{\mu,\nu},\mu_s|_{\Omega_s^{\mu,\nu}}) \to L_q(\Omega_s^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_s^{\mu,\nu}})$. По предложению 3.3.4 оператор $M_g^{\Omega_s^{\mu,\nu}}$ нулевой. Так как $\nu(\Omega_s^{\mu,\nu}) = 0$, то $L_p(\Omega_s^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_s^{\mu,\nu}}) = \{0\}$. Отсюда мы заключаем, что $M_g^{\Omega_s^{\mu,\nu}}$ топологически сюръективен. Значит, топологическая сюръективность оператора M_g эквивалентна топологической сюръективности оператора $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$. Осталось применить предложение 3.3.18. □

Предложение 3.3.20. *Пусть* (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) — *два* σ*-конечных пространства с мерой,* $1 \leq p,q \leq +\infty$ *и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\nu))$ — *топологически сюръективный оператор;*

(ii) $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega,\nu), L_p(\Omega,\mu))$ — *топологически инъективный правый обратный оператор к* M_g*.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ По предложению 3.3.3 оператор $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ топологически сюръективен. По предложению 3.3.18 он обратим, причем, очевидно, $(M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$. Тогда для любой функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ выполнено

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{1/g}(h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})}$$

$$\leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|\|h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} \leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

Следовательно, оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ ограничен. Теперь заметим, что для любой функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ также выполнено

$$M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)) = M_g(\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/gh) = g(\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g)h = h\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}.$$

Так как $\nu(\Omega \setminus \Omega_c^{\mu,\nu}) = 0$, то $\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}} = \chi_\Omega$ и поэтому $M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)) = h\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}} = h\chi_\Omega = h$. Последнее означает, что $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ является правым обратным оператором умножения к M_g. Наконец, заметим, что

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega,\mu)} \geq \|M_g\|\|M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h))\|_{L_q(\Omega,\nu)} \geq \|M_g\|\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

для всех функций $h \in L_q(\Omega,\nu)$. Значит, оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ топологически инъективен.

$(ii) \implies (i)$ Для произвольной функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ рассмотрим функцию $f = M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)$. Тогда $M_g(f) = M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)) = h$ и $\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq \|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}\|\|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}$. Так как h произвольна, то оператор M_g топологически сюръективен. $\square$

Предложение 3.3.21. *Пусть (Ω,Σ,μ) — σ-конечное пространство с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\mu))$ *— коизометрический оператор;*

(ii) M_g *— изометрический изоморфизм;*

(iii) $|g| = \mu(\Omega)^{1/q-1/p}$, *при этом если $p \neq q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из одного атома.*

Доказательство. Так как оператор M_g коизометричен, то он топологически сюръективен и поэтому из предложения 3.3.17 мы получаем, что он топологический изоморфизм. Как следствие, он инъективен, но инъективный коизометрический оператор есть изометрический изоморфизм. Осталось заметить, что всякий изометрический изоморфизм является строгой коизометрией. Таким образом, оператор M_g коизометричен тогда и только тогда, когда он строго коизометричен тогда и только тогда, когда он изометрический изоморфизм. Осталось применить предложение 3.3.13. $\square$

Предложение 3.3.22. *Пусть (Ω,Σ,ν) — σ-конечное пространство с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g,\rho \in L_0(\Omega,\Sigma)$ причем функция ρ неотрицательна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\rho\nu),L_q(\Omega,\nu))$ *— коизометрический оператор;*

(ii) M_g *— изометрический изоморфизм;*

(iii) функция ρ положительна, $|g\rho^{-1/p}| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$, при этом если $p \neq q$, то пространство (Ω,Σ,μ) состоит из одного атома.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Допустим, оператор M_g коизометричен, тогда он топологически сюръективен. По предложению 3.3.18 оператор M_g является топологический изоморфизмом, и, как следствие, он биективен. Осталось заметить, что биективная коизометрия есть изометрический изоморфизм.

$(ii) \implies (i)$ Если оператор M_g — изометрический изоморфизм, то он, конечно, коизометрия и даже строгая коизометрия.

$(ii) \iff (iii)$ Эквивалентность следует из предложения 3.3.14. $\square$

Предложение 3.3.23. *Пусть (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) — два σ-конечных пространства с мерой, $1 \leq p,q \leq +\infty$ и $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu), L_q(\Omega,\nu))$ — *коизометрический оператор;*

(ii) $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ — *изометрический изоморфизм;*

(iii) *функция* $\rho_{\mu,\nu}|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ *положительна,* $|g\rho_{\mu,\nu}^{-1/p}|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}| = \mu(\Omega_c^{\mu,\nu})^{1/p-1/q}$, *при этом если* $p \neq q$, *то пространство* (Ω,Σ,μ) *состоит из одного атома.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как оператор M_g коизометричен, то из предложения 3.3.3 мы знаем, что оператор $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ также коизометричен. Из предложения 3.3.22 мы получаем, что он также является изометрическим изоморфизмом.

$(ii) \implies (i)$ Рассмотрим произвольную функцию $h \in L_q(\Omega,\nu)$, тогда существует функция $f \in L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})$ такая, что $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(f) = h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}$. По предложению 3.3.4 оператор $M_g^{\Omega_s^{\mu,\nu}}$ нулевой, поэтому

$$M_g(\widetilde{f}) = \widetilde{M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(\widetilde{f}|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} + \widetilde{M_g^{\Omega_s^{\mu,\nu}}(\widetilde{f}|_{\Omega_s^{\mu,\nu}})} = \widetilde{h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}}.$$

Так как $\nu(\Omega_s^{\mu,\nu}) = 0$, то $\|h - \widetilde{h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|h\chi_{\Omega_s^{\mu,\nu}}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = 0$, и мы заключаем, что $h = \widetilde{h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}}$. Итак, мы построили функцию $\widetilde{f} \in L_p(\Omega,\mu)$ такую, что $M_g(\widetilde{f}) = h$ и $\|\widetilde{f}\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|f\|_{L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} = \|h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} \leq \|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}$. Так как функция h произвольна, то оператор M_g 1-топологически сюръективен. Заметим, что

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|\widetilde{M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(f|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} + \widetilde{M_g^{\Omega_s^{\mu,\nu}}(f|_{\Omega_s^{\mu,\nu}})}\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|\widetilde{M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(f|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})}\|_{L_q(\Omega,\nu)}$$

$$= \|M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(f|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})\|_{L_q(\Omega_c^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} = \|f|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|_{L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} \leq \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

для всех функций $f \in L_p(\Omega,\mu)$, значит оператор M_g сжимающий, но от также 1-топологически сюръективный. Следовательно, оператор M_g коизометрический.

$(ii) \iff (iii)$ Эквивалентность следует из предложения 3.3.22. □

Предложение 3.3.24. *Пусть* (Ω,Σ,μ), (Ω,Σ,ν) — *два* σ*-конечных пространства с мерой,* $1 \leq p,q \leq +\infty$ *и* $g \in L_0(\Omega,\Sigma)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega,\mu),L_q(\Omega,\nu))$ — *коизометрический оператор;*

(ii) $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega,\nu), L_p(\Omega,\mu))$ *изометрический правый обратный оператор к* M_g.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ По предложению 3.3.3 оператор $M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$ коизометричен и по предложению 3.3.22 он изометричен и обратим. При этом, очевидно, $(M_g^{\Omega_c^{\mu,\nu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu,\nu}}$. Тогда для любой функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ мы имеем

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{1/g}(h)\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|M_{1/g}(h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})}$$

$$= \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu,\nu}}(h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\mu,\nu},\mu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} = \|h|_{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\mu,\nu},\nu|_{\Omega_c^{\mu,\nu}})} \leq \|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

Значит, $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ — сжимающий оператор. Теперь заметим, что для всех функций $h \in L_q(\Omega,\nu)$ выполнено

$$M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)) = M_g(\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/gh) = g(\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g)h = h\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}.$$

Так как $\nu(\Omega \setminus \Omega_c^{\mu,\nu}) = 0$, то $\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}} = \chi_\Omega$ и поэтому $M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)) = h\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}} = h\chi_\Omega = h$. Последнее означает, что $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ правый обратный оператор умножения к M_g. Наконец, для произвольной функции $h \in L_q(\Omega,\nu)$ мы имеем

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega,\mu)} \geq \|M_g\|\|M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h))\|_{L_q(\Omega,\nu)} \geq \|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}.$$

Значит, оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ 1-топологически инъективен, но также сжимающий. Следовательно, оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ изометрический.

$(ii) \implies (i)$ Рассмотрим произвольную функцию $h \in L_q(\Omega,\nu)$ и функцию $f = M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)$. Тогда $M_g(f) = M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(h)) = h$ и $\|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq \|h\|_{L_q(\Omega,\nu)}$. Так как h произвольна, то оператор M_g строго 1-топологически сюръективен. Пусть $f \in L_p(\Omega,\mu)$. По предположению оператор $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}$ изометричен, поэтому

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega,\nu)} = \|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}/g}(M_g(f))\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|f\chi_{\Omega_c^{\mu,\nu}}\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Так как f произвольна, то оператор M_g сжимающий, но он еще и 1-топологически сюръективен, а значит строго коизометричен. □

Это доказательство также показывает, что каждый коизометрический оператор умножения строго коизометричен.

3.3.4 Гомологическая тривиальность категории $B(\Omega,\Sigma)$-модулей L_p

Теперь мы готовы доказать, что категория рассмотренная в начале параграфа гомологически тривиальна, то есть все ее модули являются проективными, инъективными и плоскими.

Предложение 3.3.25. *Пусть* (Ω,Σ) *измеримое пространство и* μ *—* σ*-конечная мера на* Ω*. Тогда* $B(\Omega,\Sigma)$*-модуль* $L_p(\Omega,\mu)$ $\langle$ *метрически* / *топологически* $\rangle$ *проективный, инъективный и плоский по отношению к категории* $\langle$ $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})_1$ / $B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$ $\rangle$.

Доказательство. Обозначим $X := L_p(\Omega,\mu)$ и $\langle$ $\mathbf{C} := B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})_1$ / $\mathbf{C} := B(\Omega,\Sigma) - \mathbf{mod}(\mathbf{L})$ $\rangle$.

Рассмотрим ковариантный функтор $\langle$ $F_{proj} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}_1$ / $F_{proj} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ $\rangle$. По предложению $\langle$ 3.3.24 / 3.3.19 $\rangle$ любой $\langle$ коизометрический / топологически сюръективный $\rangle$ морфизм ξ в $\mathbf{C}$ есть ретракция, значит, оператор $F_{proj}(\xi)$ — ретракция в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$, и, как следствие, $\langle$ строго коизометричен / сюръективен $\rangle$. Так как морфизм ξ произволен, то модуль X $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен.

Рассмотрим контравариантный функтор $\langle$ $F_{inj} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}_1$ / $F_{inj} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ $\rangle$. Из предложения $\langle$ 3.3.16 / 3.3.12 $\rangle$ любой $\langle$ изометрический / топологически инъективный $\rangle$ морфизм ξ из $\mathbf{C}$ является коретракцией, значит, оператор $F_{inj}(\xi)$ — ретракция в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$, и, как следствие, $\langle$ строго коизометричен / сюръективен $\rangle$. Так как морфизм ξ произволен, то модуль X $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.

Рассмотрим ковариантный функтор $\langle$ $F_{flat} := - \widehat{\otimes}_{B(\Omega,\Sigma)} X : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}_1$ / $F_{flat} := - \widehat{\otimes}_{B(\Omega,\Sigma)} X : \mathbf{C} \to \mathbf{Ban}$ $\rangle$. Снова, по предложению $\langle$ 3.3.16 / 3.3.12 $\rangle$ любой $\langle$ изометрический / топологически инъективный $\rangle$ морфизм ξ в $\mathbf{C}$ является коретракцией, значит, оператор $F_{flat}(\xi)$ — коретракция в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$, и, как следствие, он $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$. Так как морфизм ξ произволен, то модуль X $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский. $\square$

Заключение

Подведем итоги. В диссертации была построена общая теория метрически и топологически проективных, инъективных и плоских модулей. Было дано описание широкого класса топологически проективных идеалов банаховых алгебр. На примере свойств Данфорда-Петтиса и свойства l.u.st. была указана тесная взаимосвязь банаховой геометрии и гомологической алгебры. В работе получены необходимые условия для топологической плоскости банаховых модулей над относительно аменабельными алгебрами и дан критерий топологической инъективности AW^*-алгебр. На основе доказанных теорем были изучены гомологические свойства классических модулей над алгебрами последовательностей, алгебрами операторов и групповыми алгебрами.

Скажем несколько слов о нерешенных проблемах и возможных направлениях дальнейшего исследования. Среди нерешенных задач стоит отметить следующие две.

Проблема. *Существует ли необходимое условие топологической проективности идеала коммутативной банаховой алгебры более сильное, чем паракомпактность спектра?*

Всякий топологически проективный идеал коммутативной банаховой алгебры относительно проективен и поэтому обладает паракомпактным спектром. Как показывает пример алгебры $A_0(\mathbb{D})$, компактность необходимым условием не является.

Проблема. *Верно ли, что C^*-алгебры топологически инъективные над собой как правые модули являются AW^*-алгебрами?*

В случае метрической инъективности это было доказано Хамановой в [30]. В случае топологической инъективности это, похоже, будет сложной задачей даже в коммутативном случае. На данный момент не известно ни одного примера содержательной категории функционального анализа, где было бы получено полное описание топологически инъективных объектов.

Направлений для дальнейшего исследования достаточно много. Например, в работе не рассматриваются гомологические свойства бимодулей. Данное исследование ограничивается только случаем банаховых модулей, а более общие нормированные модули не рассматриваются. Похоже, что утверждение о важной роли банаховой геометрии для метрической и топологической гомологии нормированных модулей останется верным, но подтвердить его будет намного сложнее, так как результатов о геометрии нормированных пространств не так уж много. Здесь следует упомянуть две работы. В [11] Хелемский доказал, что все метрически проективные нормированные пространства изометрически изоморфны ℓ_1^0-пространствам, то есть пространствам финитных функции с ℓ_1-нормой. После этого в [100] Грюнбек доказал, что все топологически проективные нормированные пространства топологически изоморфны ℓ_1^0-пространствам.

Наконец, отметим, что в работе рассматриваются только гомологически тривиальные модули. Было бы интересно увидеть как резольвенты, когомологии и глобальные размерности в топологической теории отличаются от своих "относительных" аналогов. Первые шаги в этом направлении для модулей над нулевой алгеброй, то есть для банаховых пространств, можно найти в [[101], проблема 1.14]. Для метрической теории вместо стандартной техники резольвент, скорее всего, придется применять расширения Йонеды.

Список литературы

1. *Hahn H.* Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. // J. Reine Angew. Math. — 1927. — т. 157. — с. 214—229.
2. *Banach S.* Sur les fonctionnelles linéaires // Stud. Math. — 1929. — т. 1, № 1. — с. 211—216.
3. *Banach S.* Sur les fonctionnelles linéaires II // Stud. Math. — 1929. — т. 1, № 1. — с. 223—239.
4. *Nachbin L.* A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1950. — с. 28—46.
5. *Goodner D.* Projections in normed linear spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1950. — с. 89—108.
6. *Kelley J.* Banach spaces with the extension property // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — с. 323—326.
7. *Hasumi M.* The extension property of complex Banach spaces // Tohoku Math. J. (2). — 1958. — т. 10, № 2. — с. 135—142.
8. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L_1 // Canad. J. Math. — 1955. — т. 7. — с. 552—561.
9. *Köthe G.* Hebbare lokalkonvexe Räume // Math. Ann. — 1966. — т. 165, № 3. — с. 181—195.
10. *Stegall C.*, *Retherford J.* Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to $\mathscr{L}_1$-and $\mathscr{L}_\infty$-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — т. 163. — с. 457—492.
11. *Хелемский А.* Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей // Матем. сборник. — 2013. — т. 204, № 7.
12. On separably injective Banach spaces / A. Avilés [и др.] // Adv. Math. — 2013. — т. 234. — с. 192—216.
13. *Dunford N.* Spectral operators // Pacific J. Math. — 1954. — т. 4, № 3. — с. 321—354.
14. *Kamowitz H.* Cohomology groups of commutative Banach algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — т. 102, № 2. — с. 352—372.
15. *Guichardet A.* Sur l'homologie et la cohomologie des algébres de Banach // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. — 1966. — т. 265. — с. 38—41.

16. *Johnson B.* The Wedderburn decomposition of Banach algebras with finite dimensional radical // Amer. J. Math. — 1968. — с. 866—876.

17. *Хелемский А.* О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами // Матем. сборник. — 1970. — т. 81, № 3. — с. 430—444.

18. *Eilenberg S.*, *Moore J.* Foundations of relative homological algebra. т. 55. — American Mathematical Society, 1965.

19. *Пугач Л.* Проективные и плоские идеалы функциональных алгебр, их связь с аналитической структурой // Матем. заметки. — 1982. — т. 31, № 2. — с. 223—229.

20. *Пугач Л.* Гомологические свойства функциональных алгебр и аналитические полидиски в их пространствах максимальных идеалов // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1986. — т. 31. — с. 347—356.

21. *Хелемский А.* Описание относительно проективных идеалов в алгебрах $C(\Omega)$ // Докл. АН СССР. т. 195. — 1970. — с. 1286—1289.

22. *Курмакаева Е.* Зависимость строгой гомологической размерности $C(\Omega)$ от топологии Ω // Матем. заметки. — 1994. — т. 55, № 3. — с. 76—83.

23. *Селиванов Ю.* Гомологическая размерность циклических банаховых модулей и гомологическая характеризация метризуемых компактов // Матем. заметки. — 1975. — т. 17, № 2. — с. 301—305.

24. *Хелемский А.* Гомологическая сущность аменабельности по Конну: инъективность предуального бимодуля // Матем. сборник. — 1989. — т. 180, № 12. — с. 1680—1690.

25. *Helemskii A.* Projective homological classification of C^*-algebras // Comm. Algebra. — 1998. — т. 26, № 3. — с. 977—996.

26. *Helemskii A.* Wedderburn-type theorems for operator algebras and modules: traditional and “quantized” homological approaches // Topological Homology: Helemskii’s Moscow Seminar. — 2000. — с. 57—92.

27. *Головин Ю.* Гомологические свойства гильбертовых модулей над гнездовыми операторными алгебрами // Матем. заметки. — 1987. — т. 41, № 6. — с. 769—775.

28. *Головин Ю.* Свойство пространственной проективности в классе *CSL-алгебр с атомным коммутантом* // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — т. 1, № 1. — с. 147—159.

29. *Johnson B.* Cohomology in Banach algebras. т. 127. — American Mathematical Society, 1972.

30. *Hamana M.* Injective envelopes of Banach modules // Tohoku Math. J. — 1978. — т. 30, № 3. — с. 439—453.

31. *Graven A.* Injective and projective Banach modules // Indag. Math. (Proceedings). т. 82. вып. 1. — Elsevier. 1979. — с. 253—272.

32. *Хелемский А.* Плоские банаховы модули и аменабельные алгебры // Труды Моск. матем. об-ва. — 1984. — т. 47. — с. 179—218.

33. *White M.* Injective modules for uniform algebras // Proc. Lond. Math. Soc. — 1996. — т. 3, № 1. — с. 155—184.

34. *Хелемский А.* Безматричная версия принципа продолжения Арвесона-Виттстока и ее обобщение // Функц. анал. и прил. — 2008. — т. 42, № 3. — с. 63—70.

35. *Helemskii A.* Metric version of flatness and Hahn-Banach type theorems for normed modules over sequence algebras // Stud. Math. — 2011. — т. 206, № 2. — с. 135—160.

36. *Helemskii A.* Extreme version of projectivity for normed modules over sequence algebras // Canad. J. Math. — 2013. — т. 65, № 3. — с. 559—574.

37. *Немеш Н.* Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр // Матем. заметки. — 2016. — т. 99, № 4. — с. 526—533.

38. *Немеш Н.* Топологически инъективные C^*-алгебры // Функц. анал. и прил. — 2016. — т. 50, № 1. — с. 88—91.

39. *Немеш Н.* Гомологическая тривиальность категории модулей L_p // Вест. Моск. ун-та. Сер 1. Математика. Механика. — 2016. — т. 71, № 4. — с. 3—12.

40. *Хелемский А.* Лекции по функциональному анализу. — МЦНМО, 2015.

41. *Conway J.* A course in functional analysis. — Springer-Verlag, 1985.

42. *Carothers N.* A short course on Banach space theory. т. 64. — Cambridge University Press, 2005.

43. *Albiac F.*, *Kalton N.* Topics in Banach space theory. т. 233. — Springer, 2006.

44. *Fabian M.*, *Habala P.* Banach space theory. — Springer, 2011.

45. *Phillips R.* On linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — т. 48, № 3. — с. 516—541.

46. *Diestel J.*, *Fourie J.*, *Swart J.* The metric theory of tensor products: Grothendieck's résumé revisited. — American Mathematical Society, 2008.

47. *Fremlin D.* Measure Theory, Vol. 1-5. — Torres Fremlin, 2003.

48. *Dales H.*, *Lau A.-M.*, *Strauss D.* Second duals of measure algebras // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) — 2012. — т. 481. — с. 1—121.

49. *Lindenstrauss J.*, *Pelczynski A.* Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications // Stud. Math. — 1968. — т. 29, № 3. — с. 275—326.

50. *Diestel J.*, *Jarchow H.*, *Tonge A.* Absolutely summing operators. т. 43. — Cambridge University Press, 1995.

51. *Bourgain J.* New classes of $\mathscr{L}_p$-spaces. — Springer, 1981.

52. *Хелемский А.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — Наука, 1989.

53. *Kaniuth E.* A course in commutative Banach algebras. т. 246. — Springer, 2009.

54. *Blackadar B.* Operator algebras // Encyclopaedia Math. Sci. — 2006. — т. 122.

55. *Хелемский А.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — МГУ, 1986.

56. *Dales H.* Banach algebras and automatic continuity. — Clarendon Press, 2000.

57. *Kashiwara M.*, *Schapira P.* Categories and sheaves. т. 332. — Springer, 2006.

58. *Semadeni Z.* Projectivity, injectivity and duality. — Warszawa : IMPAN, 1963.

59. *Штейнер С.* Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. — 2013. — т. 9/1(110). — с. 49—57.

60. *Dales H. G.* Introduction to Banach algebras, operators, and harmonic analysis. т. 57. — Cambridge University Press, 2003.

61. *Lacey H.* The isometric theory of classical Banach spaces. — Springer, 1974.

62. *Johnson W.*, *Lindenstrauss J.* Handbook of the geometry of Banach spaces. т. 2. — Elsevier, 2001.

63. *Blecher D.P. O. N.* Real positivity and approximate identities in Banach algebras // Pacific J. Math. — 2015. — т. 277, № 1. — с. 1—59.

64. *Doran R.*, *Wichmann J.* Approximate identities and factorization in Banach modules. — Springer, 1979.

65. *Blecher D.*, *Read C.* Operator algebras with contractive approximate identities // J. Funct. Anal. — 2011. — т. 261, № 1. — с. 188—217.

66. *Ramsden P.* Homological properties of semigroup algebras : дис. … канд. / Ramsden P. — The University of Leeds, 2009.

67. *Defant A.*, *Floret K.* Tensor norms and operator ideals. т. 176. — Elsevier, 1992.

68. *González M.*, *Gutiérrez J.* The Dunford–Pettis property on tensor products // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. т. 131. — Cambridge University Press. 2001. — с. 185—192.

69. *Grothendieck A.* Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$ // Canad. J. Math. — 1953. — т. 5, № 1953. — с. 129—173.

70. *Megginson R.* An introduction to Banach space theory. т. 183. — Springer, 1998.

71. *Bourgain J.* On the Dunford-Pettis property // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — т. 81, № 2. — с. 265—272.

72. *Dales H.*, *Polyakov M.* Homological properties of modules over group algebras // Proc. Lond. Math. Soc. — 2004. — т. 89, № 2. — с. 390—426.

73. *Racher G.* Injective modules and amenable groups // Comment. Math. Helv. — 2013. — т. 88, № 4. — с. 1023—1031.

74. *Pier J.-P.* Amenable locally compact groups. — Wiley-Interscience, 1984.

75. *Sherman S.* Order in operator algebras // Amer. J. Math. — 1951. — с. 227—232.

76. *Kadison R.* Order properties of bounded self-adjoint operators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1951. — т. 2, № 3. — с. 505—510.

77. *Rosenthal H.* Projections onto translation-invariant subspaces of $L_p(G)$. — American Mathematical Society, 1966.

78. *Blecher D.*, *Kania T.* Finite generation in C^*-algebras and Hilbert C^*-modules // Stud. Math. — 2014. — т. 224, № 2. — с. 143—151.

79. *Cushing D.*, *Lykova Z.* Projectivity of Banach and C^*-algebras of continuous fields // Q. J. Math. — 2013. — т. 64, № 2. — с. 341—371.

80. *Kaplansky I.* Projections in Banach algebras // Ann. Math. — 1951. — с. 235—249.

81. *Berberian S.* Baer $*$-Rings: Reprint of the 1972 Edition with Errata List and Later Developments Indicated. т. 195. — Springer Science & Business Media, 1972.

82. *Takesaki M.* On the Hahn-Banach type theorem and the Jordan decomposition of module linear mapping over some operator algebras // Kodai Mathematical Seminar Reports. т. 12. — Tokyo Institute of Technology, Department of Mathematics. 1960. — с. 1—10.

83. *Lau A.-M.*, *Loy R.*, *Willis G.* Amenability of Banach and C^*-algebras on locally compact groups // Stud. Math. — 1996. — т. 119, № 2. — с. 161—178.

84. *Gordon Y.*, *Lewis D.* Absolutely summing operators and local unconditional structures // Acta Math. — 1974. — т. 133, № 1. — с. 27—48.

85. *Murphy G.* C^*-algebras and operator theory. — Academic Press, 2014.

86. *Brown N.*, *Ozawa N.* C^*-algebras and finite-dimensional approximations. т. 88. — American Mathematical Society, 2008.

87. *Haagerup U.* All nuclear C^*-algebras are amenable // Invent. Math. — 1983. — т. 74, № 2. — с. 305—319.

88. *Runde V.* The amenability constant of the Fourier algebra // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — т. 134, № 5. — с. 1473—1481.

89. *Smith R.*, *Williams D.* The decomposition property for C^*-algebras // J. Operator Theory. — 1986. — т. 16. — с. 51—74.

90. *Wojtaszczyk P.* Banach spaces for analysts. т. 25. — Cambridge University Press, 1996.

91. *Sakai S.* Weakly compact operators on operator algebras // Pacific J. Math. — 1964. — т. 14, № 2. — с. 659—664.

92. *Davidson K.* C^*-algebras by example. т. 6. — American Mathematical Society, 1996.

93. *Lyubich Y.*, *Shatalova O.* Isometric embeddings of finite-dimensional ℓ_p-spaces over the quaternions // St. Petersburg Math. J. — 2005. — т. 16, № 1. — с. 9—24.

94. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. т. I. — Springer-Verlag, 1979.

95. *Hewit E.*, *Ross K.* Abstract harmonic analysis. т. 1. — Springer-Verlag, 1979.

96. *Wendel J.* Left centralizers and isomorphisms of group algebras // Pacific J. Math. — 1952. — т. 2, № 3. — с. 251—261.

97. *Rosenthal H.* On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory // Stud. Math. — 1970. — т. 37, № 1. — с. 13—36.

98. *Lau A.*, *Losert V.* Complementation of certain subspaces of $L_\infty(G)$ of a locally compact group // Pacific J. Math. — 1990. — т. 141, № 2. — с. 295—310.

99. *Хелемский А.* Тензорные произведения и мультипликаторы модулей L_p на локально компактных пространствах с мерой // Матем. заметки. — 2014. — т. 96, № 3. — с. 450—469.

100. *Grønbæk N.* Lifting Problems for Normed Spaces // Ann. Funct. Anal. — 2016. — т. 7, № 1. — с. 118—126.

101. Linear and complex analysis problem book / V. Havin [и др.]. — Springer, 1984.