Метрическая и топологическая свобода для секвенциальных операторных пространств

Норберт Немеш, Сергей Штейнер

Аннотация

В 2002 году году Ансельм Ламберт в своей диссертации [1] ввел определение секвенциального операторного пространства и доказал аналоги многих фактов теории операторных пространств. Говоря неформально, категория секвенциальных операторных пространств находится «между» категориями нормированных и операторных пространств. Цель данной статьи — описание свободных и косвободных объектов для различных версий гомологии в категории секвенциальных операторных пространств. Сначала мы покажем, что в этой категории теория двойственности во многом аналогична таковой для нормированных пространств. Затем, основываясь на этих результатах, мы дадим полное описание метрически и топологически свободных и косвободных объектов.

1 Секвенциальные операторнве пространства.

1.1 Некоторые напоминания.

Далее все линейные пространства будут рассматриваться над полем комплексных чисел. Через B_E мы будем обозначать замкнутый единичный шар нормированного пространства E. Если E, F — два нормированных пространства, то $\mathcal{B}(E,F)$ — нормированное пространство ограниченных линейных операторов из E в F. Для заданного $1 \leq p \leq \infty$ через $\bigoplus_p^0\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ мы обозначаем $\bigoplus_p^0$ сумму семейства нормированных пространств $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Это нормированное пространство, у которого каждый вектор имеет лишь конечное число ненулевых координат. Аналогично $\bigoplus_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ обозначает $\bigoplus_p$-сумму банаховых пространств. Отметим, что $\bigoplus_\infty$-суммы являются произведениями, а $\bigoplus_1$-суммы — копроизведениями в категории нормированных простанств. Через $\mathbb{N}_n$ мы будем обозначать множество $\{1,\ldots,n\}$.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, тогда через $M_{n,k}$ мы будем обозначать линейное пространство комплекснозначных матриц размера $n \times k$. Пространство $M_{n,k}$ по умолчанию наделяется операторной нормой $\|\cdot\|$, но нам также понадобится норма Гильберта-Шмидта. Пусть $\alpha \in M_{n,k}$, тогда норму Гильберта-Шмидта определим равенством $\|\alpha\|_{hs} = \operatorname{trace}(|\alpha|^2)^{1/2}$ где $|\alpha| = (\alpha^*\alpha)^{1/2}$. Отметим, что всегда выполнены соотношения $\|\alpha\| \leq \|\alpha\|_{hs}$ и $\||\alpha|\|_{hs} = \||\alpha^*|\| = \|\alpha\|_{hs}$.

Для линейного пространства E через E^k будем обозначать пространство столбцов высоты k с элементами из E. Для $\alpha \in M_{n,k}$ и $x \in E^k$ через αx будем обозначать такой столбец из E^n, что $(\alpha x)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$. Эта формула является естественным обощением матричного умножения. Теперь мы готовы дать два основных определения: определение секвенциального операторного пространства и определение секвенциально ограниченного оператора.

Определение 1.1.1[[1], 1.1.7] Пусть E — линейное пространство, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ на пространстве E^n задана некоторая норма $\|\cdot\|_{\widehat{n}}$. Будем говорить, что семейство $X = (E^n, (\|\cdot\|_{\widehat{n}})_{n\in\mathbb{N}})$, задаёт на E структуру *секвенциального операторного* пространства, если выполнены следующие условия:

(i) $\|\alpha x\|_{\widehat{m}} \leq \|\alpha\| \|x\|_{\widehat{n}}$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E^{\widehat{n}}$, $\alpha \in M_{m,n}$.

(ii) $\left\|(x,y)^{tr}\right\|^2_{\widehat{n+m}} \le \|x\|^2_{\widehat{n}} + \|y\|^2_{\widehat{m}}$ для всех $m,n\in\mathbb{N}$, $x\in E^n$, $y\in E^m$

Пространство E^n с нормой $\|\cdot\|_{\widehat{n}}$ будем обозначать через $X^{\widehat{n}}$.

Легко заметить, что если X — секвенциальное операторное пространство, то каждое нормированное пространство $X^{\widehat{n}}$ наделено естественной структурой секвенциального операторного пространства: достаточно отождествить $(X^{\widehat{n}})^{\widehat{k}}$ с $X^{\widehat{nk}}$. Для любого нормированного пространства E можно задать семейство наименьших или наибольших норм, делающих E секвенциальным операторным пространством [[1], 2.1.1, 2.1.2]. Мы обозначим эти пространства $\min(E)$ и $\max(E)$ соответственно. Их нормы задаются равенствами

$$\|x\|_{\min(E)^{\widehat{n}}} = \sup_{\xi\in B_{l_2^n}} \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right\| \qquad \|x\|_{\max(E)^{\widehat{n}}} = \inf_{x=\alpha\tilde{x},\alpha\in M_{n,k},\tilde{x}\in E^{\widehat{k}}} \|\alpha\|_{M_{n,k}}\left(\sum_{i=1}^k \|\tilde{x}_i\|^2\right)^{1/2}$$

Мы будем использовать обозначения $t_2^n = \min(\mathbb{C}^n)$, $l_2^n = \max(\mathbb{C}^n)$, причем здесь $\mathbb{C}^n$ рассматривается как n-мерное гильбертово пространство. Отсюда, кстати, легко видеть, что $\mathcal{C}$ обладает единственной секвенциальной операторной структурой.

Определение 1.1.2[[1], 1.2.1] Пусть X и Y — секвенциальные операторные пространства, а $\varphi : X\to Y$ — линейный оператор. Его *размножением* называется семейство операторов $\varphi^{\widehat{n}} : X^{\widehat{n}}\to Y^{\widehat{n}}$, $n\in\mathbb{N}$, определённых равенством $\varphi^{\widehat{n}}(x) = (\varphi(x_i))_{i\in\mathbb{N}_k}$. Будем называть оператор φ *секвенциально ограниченным*, если

$$\|\varphi\|_{sb} := \sup\{\|\varphi^{\widehat{n}}\|_{\mathcal{B}(X^{\widehat{n}},Y^{\widehat{n}})} : n\in\mathbb{N}\} < \infty$$

Множество секвенциально ограниченных операторов между секвенциальными операторными пространствами X и Y будем обозначать через $\mathcal{SB}(X,Y)$. Это линейное подпространство в $\mathcal{B}(X,Y)$, которое также можно наделить структурой секвенциального операторного пространства [[1], 1.2.7] посредством отождествления $\mathcal{SB}(X,Y)^{\widehat{n}} = \mathcal{SB}(X,Y^{\widehat{n}})$. Теперь мы можем ввести две категории секвенциальных операторных пространств: $SQNor$ и $SQNor_1$. Объекты обеих категорий — секвенциальные операторные пространства. Морфизмы в $SQNor$ — секвенциально ограниченные операторы, а в $SQNor_1$ — секвенциально ограниченные операторы с sb-нормой, не превосходящей 1.

Теперь легко проверить что $\mathcal{SB}(-,-) : SQNor\times SQNor\to SQNor$ задает бифунктор, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму. Как и в случае нормированных пространств, логично рассмотреть действие этого функтора с пространством $\mathbb{C}$ в качестве второго аргумента. Мы получим функтор ${}^{\triangle} = \mathcal{SB}(-,\mathbb{C})$, который логично называть функтором сопряжения для секвенциальных операторных пространств. Он действительно ведет себя подобно функтору банаховой сопряженности [[1], 1.3]. Категория $SQNor_1$ (как и категория операторных пространств с вполне сжимающими операторами в качестве морфизмов) обладает категорными произведениями и копроизведениями.

Определение 1.1.3[[1], 1.1.28] Пусть $\{X_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ — произвольное семейство секвенциальных операторных пространств. Их $\bigoplus_\infty$-суммой называется секвенциальное операторное пространство $\bigoplus_\infty\{X_\lambda^{\widehat{1}} : \lambda\in\Lambda\}$, с семейством норм, задаваемых отождествлениями

$$\left(\bigoplus{}_\infty\{X_\lambda : \lambda\in\Lambda\}\right)^{\widehat{n}} = \bigoplus{}_\infty\{X_\lambda^{\widehat{n}} : \lambda\in\Lambda\}$$

Определение 1.1.4 Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство секвенциальных операторных пространств. Их $\bigoplus_1^0$-суммой называется секвенциальное операторное пространство $\bigoplus_1^0\{X_\lambda^{\widehat{1}} : \lambda \in \Lambda\}$, с нормами, индуцированными вложением

$$\bigoplus{}_1^0\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \hookrightarrow \left(\bigoplus{}_\infty\{X_\lambda^\triangle : \lambda \in \Lambda\}\right)^\triangle$$

Как и в случае операторных пространств, легко показать, что $\bigoplus_\infty$-суммы являются произведениями, а $\bigoplus_1^0$-суммы — копроизведениями в $SQNor_1$. Более того, имеет место изоморфизм в $SQNor_1$:

$$\left(\bigoplus{}_1^0\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^\triangle = \bigoplus{}_\infty\{X_\lambda^\triangle : \lambda \in \Lambda\}$$

1.2 Двойственность для секвенциально ограниченных операторов

Основные результаты этого раздела получены Н. Немешем. Для начала нам нужно напомнить некоторые определения и факты, касающиеся ограниченных линейных операторов.

Определение 1.2.1 Пусть $T : E \to F$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами, тогда T называется

(i) c-топологически инъективным, если для каждого $x \in E$ выполнено $\|x\| \leq c\|T(x)\|$. Если упоминание константы c не нужно, будем говорить, что T топологически инъективен.

(ii) (строго) c-топологически сюрьективным, если любого $c' > c$ и любого $y \in F$ существует такой $x \in E$, что ($\|x\| \leq c\|y\|$) $\|x\| < c'\|y\|$ и $T(x) = y$. Если упоминание константы c не нужно то будем говорить, что T (строго) топологически сюръективен.

(iii) (строго) коизометрическим, если он сжимающий и (строго) 1-топологически сюръективный

Предложение 1.2.2 Пусть $T : E \to F$ ограниченный оператор между нормированными пространствами и $c > 0$, тогда

(i) если T (строго) c-топологически сюръективен, то T^* c-топологически инъективен

(ii) если T c-топологически инъективен, то T^* строго c-топологически сюръективен

(iii) если T^* (строго) c-топологически сюръективен, то T c-топологически инъективен

(iv) если T^* c-топологически инъективен и E полно, то T c-топологически сюръективен

Аналогичные определения можно дать и для секвенциально ограниченных операторов. Например, оператор $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ между секвенциальными операторными пространствами X и Y называется секвенциально c-топологически инъективным, если для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен.

Далее мы докажем несколько технических предложений, необходимых для описания двойственности между секвенциально ограниченными операторами.

Предложение 1.2.3[[1], 1.3.14] Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$. Тогда $\varphi^\triangle \in \mathcal{SB}(Y^\triangle, X^\triangle)$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$. Как следствие, $\|\varphi^\triangle\|_{sb} = \|\varphi\|_{sb}$.

Определение 1.2.4[[1], 1.3.15] Пусть X — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда через $t_2^n(X)$ будем обозначть нормированное пространство X^n с нормой

$$\|x\|_{t_2^n(X)} := \inf\left\{\|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} : x = \tilde{\alpha}\tilde{x}\right\}$$

где $\tilde{\alpha} \in M_{n,k}$, $x \in X^k$ и $k \in \mathbb{N}$. Если Y — секвенциальное операторное пространство, и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$, то через $t_2^n(\varphi)$ будем обозначать линейный оператор

$$t_2^n(\varphi) : t_2^n(X) \to t_2^n(Y) : x \mapsto \varphi^{\widehat{n}}(x)$$

Предложение 1.2.5 Пусть X — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\|x\|_{t_2^n(X)} = \inf\left\{\|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{k}} : x = \alpha' x'\right\}$$

где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $x' \in X^n$.

Доказательство. Обозначим правую часть доказываемого равенства через $\|x\|'_{t_2^n(X)}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда существуют $\tilde{\alpha} \in M_{n,k}$ и $\tilde{x} \in X^k$, $k \in \mathbb{N}$ такие, что $x = \tilde{\alpha}\tilde{x}$ и $\|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} < \|x\|_{t_2^n(X)} + \varepsilon$. Рассмотрим полярное разложение $\tilde{\alpha} = |\tilde{\alpha}^*|\rho$ матрицы $\tilde{\alpha}$. Пусть p — ортогональный проектор на $\operatorname{Im}(|\tilde{\alpha}^*|)^{\perp}$. Тогда для любого $\delta \in \mathbb{R}$ матрица $\alpha'_\delta = |\tilde{\alpha}^*| + \delta p$ обратима так как $\operatorname{Ker}(\alpha'_\delta) = \{0\}$. Так как $\alpha'_0 = |\tilde{\alpha}|$ и функция $\|\alpha'_\delta\|_{hs}$ непрерывна при $\delta \in \mathbb{R}$, то существует такое значение δ_0, что $\|\alpha'_{\delta_0}\|_{hs} < \||\tilde{\alpha}^*|\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}}^{-1} = \|\tilde{\alpha}\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}}^{-1}$. Обозначим $\alpha' = \alpha'_{\delta_0} \in M_{n,n}$ и $x' = \rho\tilde{x} \in Y^n$, тогда

$$\alpha' x' = (|\tilde{\alpha}^*| + \delta_0 p)\rho\tilde{x} = |\tilde{\alpha}^*|\rho\tilde{x} + \delta_0 p\rho\tilde{x} = \tilde{\alpha}\tilde{x}$$

По построению полярного разложения $\|\rho\| \leq 1$, поэтому с учетом определения $\|x\|'_{t_2^n(X)}$ получаем

$$\|x\|'_{t_2^n(X)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leq (\|\tilde{\alpha}\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}})\|\rho\|\|\tilde{x}\|_{\widehat{n}} \leq \|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} + \varepsilon \leq \|x\|_{t_2^n(X)} + 2\varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|x\|'_{t_2^n(X)} \leq \|x\|_{t_2^n(X)}$. Обратное неравенство очевидно, поэтому $\|x\|_{t_2^n(X)} = \|x\|'_{t_2^n(X)}$.

Предложение 1.2.5 Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства, $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ и $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда

(i) Для любых $\alpha \in M_{n,k}$ и $x \in t_2^k(X)$ выполнено $t_2^n(\varphi)(\alpha x) = \alpha t_2^k(\varphi)(x)$

(ii) $t_2^n(\varphi) \in \mathcal{B}(t_2^n(X), t_2^n(Y))$, причем $\|t_2^n(\varphi)\| \leq \|\varphi^{\widehat{n}}\|$

(iii) если $\varphi^{\widehat{n}}$ (строго) c-топологически сюръективно, то $t_2^n(\varphi)$ так же (строго) c-топологически сюръективно

(iv) если $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективно, то $t_2^n(\varphi)$ так же c-топологически инъективно

Доказательство. (i) Проверяется непосредственно.

(ii) Пусть $x \in t_2^n(X)$ и $x = \alpha' x'$, где $\alpha \in M_{n,n}$ — обратимая матрица и $x' \in X^n$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha'\varphi^{\widehat{n}}(x')$, поэтому из определения нормы в $t_2^n(Y)$ следует, что

$$\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|\varphi^{\widehat{n}}(x')\|_{\widehat{n}} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|\varphi^{\widehat{n}}\|\|x'|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям x описанным выше, тогда предложение 1.2 дает

$$\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \leq \|\varphi^{\widehat{n}}\|\|x\|_{t_2^n(X)}$$

Следовательно $\|t_2^n(\varphi)\| \leq \|\varphi^{\widehat{n}}\|$ и $t_2^n(\varphi) \in \mathcal{B}(t_2^n(X), t_2^n(Y))$.

(iii) Пусть $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективен. Пусть $y \in t_2^n(Y)$ и $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Пусть $c < c'' < c'$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективно, то существует $x' \in X^n$ такое что $\varphi^{\widehat{n}}(x') = y'$ и $\|x'\|_{\widehat{n}} < c''\|y'\|_{\widehat{n}}$. Рассмотрим $x := \alpha' x'$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x') = \alpha' y' = y$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ получаем

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leq \|\alpha'\|_{hs} c'' \|y'\|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям y описанным выше, тогда предложение 1.2 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \leq c''\|y\|_{t_2^n(Y)} < c'\|y\|_{t_2^n(Y)}$ Таким образом, для любого $y \in t_2^n(Y)$ и любого $c' > c$ существует $x \in t_2^n(X)$ такой что $t_2^n(\varphi)(x) = y$ и $\|x\|_{t_2^n(X)} < c'\|y\|_{t_2^n(Y)}$. Следовательно $t_2^n(\varphi)$ c-топологически сюръективен.

Пусть $\varphi^{\widehat{n}}$ строго c-топологически сюръективен. Пусть $y \in t_2^n(Y)$ и $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективно, то существует $x' \in X^n$ такое что $\varphi^{\widehat{n}}(x') = y'$ и $\|x'\|_{\widehat{n}} \leq c\|y'\|_{\widehat{n}}$. Рассмотрим $x := \alpha' x'$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x') = \alpha' y' = y$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ получаем

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leq \|\alpha'\|_{hs} c \|y'\|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям y, описанным выше, тогда предложение 1.2 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \leq c\|y\|_{t_2^n(Y)}$ Таким образом, для любого $y \in t_2^n(Y)$ существует $x \in t_2^n(X)$ такой что $t_2^n(\varphi)(x) = y$ и $\|x\|_{t_2^n(X)} \leq c\|y\|_{t_2^n(Y)}$. Следовательно $t_2^n(\varphi)$ строго c-топологически сюръективен.

(iv) Пусть $x \in t_2^n(X)$, обозначим $y := t_2^n(\varphi)(x)$. Пусть имеется представление $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Тогда $y' = (\alpha')^{-1} y = (\alpha')^{-1} t_2^n(\varphi)(x) = t_2^n(\varphi)((\alpha')^{-1} x) \in \operatorname{Im}(t_n^2(\varphi))$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен, то он инъективен, поэтому для $y' \in \operatorname{Im}(t_2^n(\varphi))$ существует $x' \in X^n$ такой что $y' = t_2^n(\varphi)(x') = \varphi^{\widehat{n}}(x')$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен, то $\|x'\|_{\widehat{n}} \leq c\|y'\|$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ следует, что

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leq c\|\alpha'\|_{hs}\|y'\|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям y, описанным выше, тогда предложение 1.2 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \leq c\|y\|_{t_2^n(Y)} = c\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)}$. Таким образом, для любого $x \in t_2^n(X)$ выполнено $\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \geq c^{-1}\|x\|_{t_2^n(X)}$. Следовательно, $t_2^n(\varphi)$ c-топологически инъективен.

Предложение 1.2.6[[1], 1.3.16] Пусть X — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место изометрические изоморфизмы

$$\alpha_X^n : t_2^n(X^\triangle) \to (X^{\widehat{n}})^* : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \right) \qquad \beta_X^n : (X^\triangle)^{\widehat{n}} \to t_2^n(X)^* : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \right)$$

Предложение 1.2.7 Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства, $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда

(i) $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен (сюръективен) тогда и только тогда когда $t_2^n(\varphi)^*$ c-топологически инъективен (сюръективен)

(ii) $t_2^n(\varphi^\triangle)$ c-топологически инъективен (сюръективен) тогда и только тогда когда $(\varphi^{\widehat{n}})^*$ c-топологически инъективен (сюръективен)

(iii) верны равенства $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\|$ и $\|t_2^n(\varphi^\triangle)\| = \|(\varphi^{\widehat{n}})^*\|$ и $\|t_2^n(\varphi)\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$

Доказательство. Пусть $g \in (Y^\triangle)^{\widehat{n}}$ и $x \in t_2^n(X)$, тогда

$$(\alpha_X^n(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}})(g)(x) = \alpha_X^n((\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}(g))(x) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}(g)_k(x_k) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)(g_k)(x_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

$$(t_2^n(\varphi)^*\alpha_Y^n)(g)(x) = t_2^n(\varphi)^*(\alpha_Y^n(g))(x) = \alpha_Y^n(g)(t_2^n(\varphi)(x)) = \sum_{k=1}^n g_k(t_2^n(\varphi)(x)_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

Так как g и x произвольны, то $\alpha_X^n(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}} = t_2^n(\varphi)^*\alpha_Y^n$. Так как α_Y^n и α_X^n изометрические изоморфизмы, то мы получаем утверждение (i) и равенство $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\|$. Пусть $g \in t_2^n(Y^\triangle)$ и $x \in X^{\widehat{n}}$, тогда

$$(\beta_X^n t_2^n(\varphi^\triangle))(g)(x) = \beta_X^n(t_2^n(\varphi^\triangle)(g))(x) = \sum_{k=1}^n t_2^n(\varphi^\triangle)(g)_k(x_k) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)(g_k)(x_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

$$((\varphi^{\widehat{n}})^*\beta_Y^n)(g)(x) = (\varphi^{\widehat{n}})^*(\beta_Y^n(g))(x) = \beta_Y^n(g)(\varphi^{\widehat{n}})(x) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi^{\widehat{n}})(x)_k = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

Так как g и x произвольны, то $\beta_X^n t_2^n(\varphi^\triangle) = (\varphi^{\widehat{n}})^*\beta_Y^n$. Так как β_Y^n и β_X^n изометрические изоморфизмы, то мы получаем утверждение (ii) и равенство $\|t_2^n(\varphi^\triangle)\| = \|(\varphi^{\widehat{n}})^*\|$.

Наконец, из предложений 1.2, 1.2 следует что $\|t_2^n(\varphi)\| \leq \|\varphi^{\widehat{n}}\| = \|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\| = \|t_2^n(\varphi)\|$, т.е. $\|t_2^n(\varphi)\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$.

Теорема 1.2.8 Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$, тогда

(i) φ (строго) секвенциально c-топологически сюръективен $\Longrightarrow$ $\varphi^\triangle$ секвенциально c-топологически инъективен

(ii) φ секвенциально c-топологически инъективен $\Longrightarrow$ строго $\varphi^\triangle$ строго секвенциально c-топологически сюръективен

(iii) $\varphi^\triangle$ (строго) секвенциально c-топологически сюръективен $\Longrightarrow$ φ секвенциально c-топологически инъективен

(iv) $\varphi^\triangle$ секвенциально c-топологически инъективен $\Longrightarrow$ φ строго секвенциально c-топологически сюръективен

(v) φ секвенциально коизометричен $\Longrightarrow$ $\varphi^\triangle$ секвенциально изометричен, если X полно, то верно и обратное

(vi) φ секвенциально изометричен $\Longleftrightarrow$ $\varphi^\triangle$ секвенциально строго коизометричен

Доказательство. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ имеем цепочку импликаций

$\varphi^{\widehat{n}}$	c-топологически инъективен	$\Longrightarrow$	$t_2^n(\varphi)$	c-топологически инъективен	1.2
		$\Longrightarrow$	$t_2^n(\varphi)^*$	строго c-топологически сюръективен	1.2
		$\Longrightarrow$	$(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}$	строго c-топологически сюръективен	1.2
		$\Longrightarrow$	$t_2^n(\varphi^\triangle)$	строго c-топологически сюръективен	1.2
		$\Longrightarrow$	$(\varphi^{\widehat{n}})^*$	строго c-топологически сюръективен	1.2
		$\Longrightarrow$	$\varphi^{\widehat{n}}$	c-топологически инъективен	1.2

Откуда мы получаем (ii) и (iii). Снова для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем цепочку ипликаций

$$\begin{array}{llll}
\varphi^{\widehat{n}} \ \text{(строго) } c\text{-топологически сюръективен} & \Longrightarrow & t_2^n(\varphi) & c\text{-топологически сюръективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & t_2^n(\varphi)^* & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & (\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}} & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & t_2^n(\varphi^{\triangle}) & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & (\varphi^{\widehat{n}})^* & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \overset{X \text{ полно}}{\Longrightarrow} & \varphi^{\widehat{n}} & c\text{-топологически сюръективен } 1.2
\end{array}$$

Откуда мы получаем (i) и (iv). Пункты (v) и (vi) являются прямым следствием (i)—(iv) при $c = 1$ если учесть что φ секвенциально сжимающий тогда и только тогда $\varphi^{\triangle}$ секвенцильно сжимающий (см. предложение 1.2).

2 Свободные и косвободные объекты

Основные результаты этого раздела получены С. Штейнером. Все необходимые определения, связанные с общекатегорным подходом к проективности, можно найти в работе [2]. Категория полулинейных нормированных пространств описана в [3].

2.1 Метрически свободные секвенциальные пространства

Начнём с рассмотрения метрической версии свободы для секвенциальных операторных пространств. Рассмотрим функтор

$$\begin{aligned}
\square_{sqMet} : SQNor_1 \to Set : X &\mapsto \prod \{B_{X^{\widehat{n}}} : n \in \mathbb{N}\} \\
\varphi &\mapsto \prod \left\{\varphi^{\widehat{n}}|_{B_{X^{\widehat{n}}}}^{B_{Y^{\widehat{n}}}} : n \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

отправляющий секвенциальное операторное пространство X в декартово произведение единичных шаров каждого из пространств $X^{\widehat{n}}$. Легко заметить, что справедливо

Предложение 2.1.1 $\square_{sqMet}$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности секвенциально строго коизометрические операторы.

Метрически свободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqMet}$-свободные объекты. Обозначим через I_n элемент из $(t_2^n)^{\widehat{n}} = \mathcal{B}(l_2^n, l_2^n)$, соответствующий тождественному оператору.

Предложение 2.1.2 Пусть X — произвольное секвенциальное операторное пространство и $x \in B_{X^{\widehat{n}}}$. Тогда существует единственный секвенциально сжимающий оператор $\psi_n \in \mathcal{SB}(t_2^n, X)$, такой что $\psi_n^{\widehat{n}}(I_n) = x$.

Доказательство. Итак, $I_n = (e_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, где e_i — i-й орт подлежащего пространства t_2^n. Ясно, что есть только один линейный оператор ψ_n, удовлетворяющий условиям $\psi_n(e_i) = x_i$, $i \in \mathbb{N}_n$. Осталось проверить, что ψ_n является секвенциально сжимающим. Итак, пусть $k \in \mathbb{N}$ и $y \in B_{(t_2^n)^{\widehat{k}}}$, тогда $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $i \in \mathbb{N}_k$ для некоторой матрицы $\alpha \in M_{k,n}$. Тогда

$$\|\psi_n^{\widehat{k}}(y)\|_{\widehat{k}} = \left\|(\psi_n(y_i))_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}} = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\psi_n(e_j)\right)_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}} = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j\right)_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}}$$

$$= \|\alpha x\|_{\widehat{k}} \leq \|\alpha\| \|x\|_{\widehat{n}} = \|y\|_{(t_2^n)^{\widehat{k}}} \|x\|_{\widehat{n}} \leq 1$$

Предложение доказано.

Предложение 2.1.3 Метрически свободным секвенциальным операторным пространством с базой из одноточечного множества является пространство $t_2^\infty := \bigoplus_1^0 \{t_2^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Универсальную стрелку определим следующим образом $j : \{\lambda\} \to t_2^\infty : \lambda \mapsto (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$. Пусть X — произвольное секвенциальное операторное пространство, и $\varphi : \{\lambda\} \to \prod_{n \in \mathbb{N}} B_{X^{\widehat{n}}}$. Обозначим $x = \varphi(\lambda)$. Тогда из предложения 2.1 и свойств копроизведения ясно, что существует единственный секвенциально сжимающий морфизм $\psi = \bigoplus_1^0 \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{SB}\left(\bigoplus_1^0 \{t_2^n : n \in \mathbb{N}\}, X\right)$, такой что $\psi^{\widehat{n}}(i_n(I_n)) = x$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Здесь $i_n : t_2^n \to t_2^\infty$ — стандартное вложение.

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqMet}(t_2^\infty) \arrow[dr, dashed, "\square_{sqMet}(\psi)"] & \\
\{\lambda\} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"] & \square_{sqMet}(X)
\end{tikzcd}$$

В этом случае $\varphi = \square_{sqMet}(\psi) j$. Так как X и φ произвольны то t_2^∞ метрически свободен и имеет одноточечную базу.

Итак, теперь мы готовы сформулировать итоговый результат, справедливость которого мгновенно вытекает из доказанного выше предложения.

Теорема 2.1.4 Метрически свободным секвенциальным операторным пространством с базой Λ является, с точностью до секвенциального изометрического изоморфизма, $\bigoplus{}_1^0$-сумма копий пространства t_2^∞, заиндексированных элементами множества Λ.

2.2 Топологически свободные секвенциальные пространства

Перейдём теперь к рассмотрению секвенциальной операторной версии топологической свободы. Рассмотрим функтор

$$\begin{aligned} \square_{sqTop} : SQNor \to Nor_0 : X &\mapsto \bigoplus{}_\infty \{X^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} \\ \varphi &\mapsto \bigoplus{}_\infty \{\varphi^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

то есть секвенциальное операторное пространство X отображается в $\bigoplus{}_\infty$-сумму своих размножений без аддитивной структуры.

Предложение 2.2.1 Пусть $\varphi : X \to Y$ — ограниченный оператор между нормиированными пространствами X и Y, тогда он c-топологически сюръективен тогда и только тогда когда существует ограниченный полулинейный оператор $\rho : Y \to X$ такой что $\|\rho\| \leq c$ и $\varphi\rho = 1_Y$.

Доказательство. Допустим, что φ c-топологически сюръективен. Расссмотрим отношение $\sim$ на S_Y определенное следующим образом: $e_1 \sim e_2$ тогда и только тогда когда существует $\alpha \in \mathbb{T}$ такое, что $e_1 = \alpha e_2$. Очевидно, $\sim$ есть отношение эквивалентности, поэтому рассмотрим множество ненулевых представителей классов эквивалентностей, которое обозначим $\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По построению, для каждого $e \in S_Y$ сущетсвует единственные $\alpha(e) \in \mathbb{T}$ и $\lambda(e) \in \Lambda$ такие, что $e = \alpha(e) r_{\lambda(e)}$. Ясно, что для любых $z \in \mathbb{T}$ и $e \in S_Y$ выполнено $\alpha(ze) = z\alpha(e)$ и $\lambda(ze) = \lambda(e)$. Так как φ c-топологически сюръективен, то, в частности, для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует $x(\lambda) \in X$ такой что $\|x(\lambda)\| \leq c\|r_\lambda\|$ и $\varphi(x(\lambda)) = r_\lambda$. Рассмотрим, отображение $\tilde{\rho} : S_Y \to X : e \mapsto \alpha(e)x(\lambda(e))$. Легко видеть, что для всех $z \in \mathbb{T}$ и $e \in S_Y$ выполнено $\tilde{\rho}(ze) = z\tilde{\rho}(e)$, $\|\tilde{\rho}(e)\| \leq C$ и $\varphi(\tilde{\rho}(e)) = e$. Теперь рассмотрим отображение $\rho : Y \to X : y \mapsto \|y\|\tilde{\rho}(\|y\|^{-1}y)$ и $\rho(0) = 0$. Используя свойства $\tilde{\rho}$ легко проверить, что ρ — полулинейный оператор такой, что $\|\rho\| \leq C$ и $\varphi\rho = 1_Y$.

Обратно, допустим, что существует ограниченный полулинейный оператор $\rho : Y \to X$ такой, что $\|\rho\| \leq c$ и $\varphi\rho = 1_Y$. Возьмем произвольный $y \in Y$ и рассмотрим $x = \rho(y)$, тогда $\|x\| \leq C\|y\|$ и $\varphi(x) = y$. Следовательно φ c-топологически сюръективен.

Предложение 2.2.2 $\square_{sqTop}$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности секвенциальные топологически сюрьективные операторы.

Доказательство. Для произвольного секвенциального операторного пространства Z через $i_n^Z : Z^{\widehat{n}} \to \square_{sqTop}(Z)$ обозначим стандартное вложение, а через $p_n^Z : \square_{sqTop}(Z) \to Z^{\widehat{n}}$ обозначим стандартную проекцию. Допустим что $\varphi : X \to Y$ c-секвенциально топологически сюръективен. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, тогда по предложению 2.2 существует ограниченный полулинейный оператор ρ^n такой, что $\varphi^{\widehat{n}}\rho^n = 1_{Y^{\widehat{n}}}$ и $\|\rho^n\| \leq c$. Рассмотрим отображение $\rho = \bigoplus_\infty\{\rho^n : n \in \mathbb{N}\}$. Для любого $y \in \square_{sqTop}(Y)$ имеем

$$\|\rho(y)\| = \sup\{\|\rho^n(p_n^Y(y))\|_{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} \leq c\sup\{\|p_n^Y(y)\|_{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} = c\|y\|$$

следовательно ρ — полулинейный ограниченый оператор. Более того, $\square_{sqTop}(\varphi)\rho = 1_{\square_{sqTop}(Y)}$, значит φ $\square_{sqTop}$-допустимый эпиморфизм. Обратно, если φ $\square_{sqTop}$-допустимый эпиморфизм, то существует ограниченный правый обратный полулинейный оператор ρ к $\square_{sqTop}(\varphi)$. Тогда для любого $y \in Y^{\widehat{n}}$ выполнено $\square_{sqTop}(\varphi)\rho(i_n^Y(y)) = i_n^Y(y)$. В частности $\varphi^{\widehat{n}}(p_n^X(\rho(i_n^Y(y)))) = y$. Положим $x = p_n^X(\rho(i_n^Y(y)))$ и $c = \|\rho\|$, тогда $\varphi^{\widehat{n}}(x) = y$ и $\|x\|_{\widehat{n}} \leq \|\rho(i_n^Y(y))\| \leq c\|i_n^Y(y)\| = c\|y\|_{\widehat{n}}$. Следовательно, φ секвенциально топологически сюръективен.

Топологически свободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqTop}$-свободные объекты. Сформулируем и докажем основное утверждение раздела.

Предложение 2.2.3 Пусть F — секвенциальное метрически свободное пространство с базой Λ. Тогда F является секвенциальным операторным топологически свободным с базой $\mathbb{C}^\Lambda$.

Доказательство. Пусть $j' : \Lambda \to \square_{sqMet}(F)$ — универсальная стрелка в диаграмме для секвенциальной метрической свободы. Определим полулинейный ограниченный оператор $j : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_{sqTop}(F) : z_\lambda \mapsto z_\lambda j(\lambda)$. Рассмотрим произвольный ораниченный полулинейный оператор $\varphi : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_{sqTop}(X)$, где X — произвольное секвенциальное операторное пространство. Тогда для $\varphi' := \|\varphi\|_{sb}^{-1}\varphi$ существует единственный морфизм ψ', такой что $\varphi' = \square_{sqMet}(\psi')j$. Теперь, легко видеть что для морфизма $\psi := \|\varphi\|_{sb}\psi'$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqTop}(F) \arrow[dr, dashed, "\square_{sqTop}(\psi)"] & \\
\mathbb{C}^\Lambda \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"'] & \square_{sqTop}(X)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Единственность ψ доказывается следующим образом. Пусть для диаграммы выше есть два различных подходящих морфизма ψ_1 и ψ_2. Обозначим $C = \max(\|\varphi\|_{sb}, \|\psi_1\|_{sb}, \|\psi_2\|_{sb})$, тогда ясно что морфизмы $C^{-1}\psi_1$ и $C^{-1}\psi_2$ подходят для следующей диаграммы, соответствующей секвенциальной метрической проективности:

$$\begin{tikzcd} \square_{sqMet}(F) \arrow[dr, dashed, "?"] & \\ \mathbb{C}^{\Lambda} \arrow[u, "j'"] \arrow[r, "C^{-1}\varphi'"'] & \square_{sqMet}(X) \end{tikzcd}$$

Это противоречит единственности морфизма ψ', значит ψ единственен.

Как следствие мы получаем описание топологически свободных секвенциальных операторных пространств.

Теорема 2.2.4 Секвенциальное операторное пространство является топологически свободным тогда и только тогда, когда оно секвенциально топологически изоморфно $\bigoplus_1^0$-сумме пространств t_2^∞, заиндексированных элементами некоторого множества Λ.

2.3 Метрически косвободные секвенциальные пространства

Рассмотрим функтор

$$\begin{aligned} \square_{sqMet}^d : SQNor_1 \to Set^o : X &\mapsto \prod \left\{ B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}} : n \in \mathbb{N} \right\} \\ \varphi &\mapsto \prod \left\{ (\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}|_{B_{(Y^\triangle)^{\widehat{n}}}}^{B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}}} : n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Предложение 2.3.1 $\square_{sqMet}^d$-допустимыми мономорфизмами являются в точности секвенциально изометрические операторы.

Доказательство. Морфизм φ является $\square_{sqMet}^d$-допустмым мономорфизмом только если $\square_{sqMet}^d(\varphi)$ обратим слева как морфизм в Set^o. Это равносильно тому что $\square_{sqMet}^d(\varphi^\triangle)$ сюръективно. Последнее эквивалентно сюръективности $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}|_{B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}}}^{B_{(Y^\triangle)^{\widehat{n}}}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}$ строго коизометрично для каждого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\varphi^\triangle$ секвенциально строго коизометричен. По теореме 1.2.8 это равносильно тому, что φ секвенциально изометричен.

Метрически косвободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqMet}^d$-косвободные объекты.

Теорема 2.3.2 Метрически косвободным секвенциальным операторным пространством с базой Λ является, с точностью до секвенциального изометрического изоморфизма, $\bigoplus_\infty$-сумма копий пространства $l_2^\infty := \bigoplus_\infty\{l_2^n : n \in \mathbb{N}\}$, заиндексированных элементами множества Λ.

Доказательство. Пусть Λ — произвольное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} SQNor_1^o \arrow[r, "(\square_{sqMet}^d)^o"] \arrow[d, "\nabla"'] & Set \arrow[d, "1_{Set}"] \\ SQNor_1 \arrow[r, "\square_{sqMet}"] & Set \end{tikzcd}$$

Здесь $^\nabla$ есть ковариантная версия функтора $^\triangle$. Эта диаграмма коммутативна так как для произвольных секвенциальных операторных пространств X, Y и любого $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$

выполнено

$$1_{Set}((\square^d_{sqMet})^o(\varphi)) = \prod_{n\in\mathbb{N}} (\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}|^{B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}}}_{B_{(Y^\triangle)^{\widehat{n}}}} = \square_{sqMet}(^\nabla(\varphi))$$

Заметим, что функтор $^\nabla$ имеет левый сопряженный функтор, а именно $^\triangle$. Аналогично 1_{Set} сопряжен слева к самому себе. По теореме 2.1.4 объект $\bigoplus{}_1^0\{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ $\square_{sqMet}$-свободен, поэтому по предложению [[2], 4.5] объект $(\bigoplus{}_1^0\{t_2^\infty : \lambda\in\Lambda\})^\triangle = \bigoplus{}_\infty\{l_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ является $(\square^d_{sqMet})^o$ свободным, или что то же самое $\square^d_{sqMet}$-косвободным. Так как множество Λ произвольно, получаем, что все $\square_{sqMet}$-косвободные объекты с базой Λ секвенциально изометрически изоморфны пространствам указанного вида.

2.4 Топологически косвободные секвенциальные пространства

Рассмотрим функтор

$$\square^d_{sqTop} : SQNor \to Nor_0^o, X \mapsto \bigoplus{}_\infty\{(X^\triangle)^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\varphi \mapsto \bigoplus{}_\infty\{(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}$$

Предложение 2.4.1 $\square^d_{sqTop}$-допустимыми мономорфизмами являются в точности секвенциально топологически инъективные операторы.

Доказательство. Морфизм φ является $\square^d_{sqTop}$-допустмым мономорфизмом только если $\square^d_{sqTop}(\varphi)$ обратим слева как морфизм в Nor_0^o. Это равносильно тому что $\square^d_{sqTop}(\varphi) = \square_{sqTop}(\varphi^\triangle)$ обратим справа в как морфизм в Nor_0. По предложению 2.2.2 это эквивалентно секвенциальной топологической сюръективности $\varphi^\triangle$. По теореме 1.2.8 это равносильно тому, что φ секвенциально топологически инъективен.

Топологически косвободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square^d_{sqTop}$-косвободные объекты.

Теорема 2.4.2 Секвенциальное операторное пространство является топологически косвободным тогда и только тогда, когда оно секвенциально топологически изоморфно $\bigoplus{}_\infty$ сумме пространств l_2^∞ заиндексированных элементами множества Λ.

Доказательство. Пусть Λ произвольное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} SQNor^o & \xrightarrow{(\square^d_{sqTop})^o} & Nor_0 \\ {\scriptstyle\nabla}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{Nor_0}} \\ SQNor & \xrightarrow{\square_{sqTop}} & Nor_0 \end{array}$$

Здесь ∇ есть ковариантная версия функтора $\triangle$. Эта диаграмма коммутативна, так как для произвольных секвенциальных операторных пространств X, Y и любого $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ выполнено

$$1_{Nor_0}((\square^d_{sqTop})^o(\varphi)) = \bigoplus{}_\infty\{(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} = \square_{sqTop}(^\nabla(\varphi))$$

Функтор $^\nabla$ имеет левый сопряженный функтор, а именно $^\triangle$. Аналогично 1_{Nor_0} сопряжен слева к самому себе. По теореме 2.2.4 объект $\bigoplus{}_1^0\{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ $\square_{sqTop}$-свободен, поэтому по предложению [[2], 4.5] объект $(\bigoplus{}_1^0\{t_2^\infty : \lambda\in\Lambda\})^\triangle = \bigoplus{}_\infty\{l_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ является $(\square^d_{sqTop})^o$-свободным, или что то же самое $\square^d_{sqTop}$-косвободным. Получаем, что все $\square_{sqTop}$-косвободные объекты с базой $\mathbb{C}^\Lambda$ секвенциально топологически изоморфны пространствам указанного вида.

Список литературы

[1] *Lambert A.* Operatorfolgenräume. Eine Kategorie auf dem Weg von den Banach-Räumen zu den Operatorräumen. Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I der Universität des Saarlandes. Saarbrücken, 2002.

[2] *Хелемский А. Я.* Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей,, Матем. сб., 204:7 (2013), 127–158

[3] *Штейнер С. М.* Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей // Вестник СамГУ. 2013. № 9/1 (110). С.49–57.