

Метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость банаховых модулей

Немеш Норберт Тиборович

23 декабря 2016 г.

МГУ имени М.В. Ломоносова

Определения

Банахов A -модуль P называется *проективным*, если для любого **допустимого** эпиморфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует морфизм $\psi : P \rightarrow X$ делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \psi & \downarrow \xi \\ P & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

коммутативной.

Банахов A -модуль P называется *проективным*, если для любого **допустимого** эпиморфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует морфизм $\psi : P \rightarrow X$ делающий диаграмму

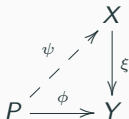
$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi \nearrow & \downarrow \xi & \\ P & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array} \quad \|\phi\| = \|\psi\|$$

коммутативной.

Какие эпиморфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — строгая коизометрия, т.е. $\xi(B_X) = B_Y$

Банахов A -модуль P называется *проективным*, если для любого **допустимого** эпиморфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует морфизм $\psi : P \rightarrow X$ делающий диаграмму

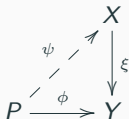


коммутативной.

Какие эпиморфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — строгая коизометрия, т.е. $\xi(B_X) = B_Y$
- Топологическая теория: ξ — открытое отображение

Банахов A -модуль P называется *проективным*, если для любого **допустимого** эпиморфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует морфизм $\psi : P \rightarrow X$ делающий диаграмму



коммутативной.

Какие эпиморфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — строгая коизометрия, т.е. $\xi(B_X) = B_Y$
- Топологическая теория: ξ — открытое отображение
- **Относительная теория: ξ имеет дополняемое ядро**

Банахов A -модуль J называется *инъективным*, если для любого **допустимого** мономорфизма $\xi : Y \rightarrow X$ и любого морфизма $\phi : Y \rightarrow J$ существует морфизм $\psi : X \rightarrow J$ делающий диаграмму



коммутативной.

Банахов A -модуль J называется *инъективным*, если для любого **допустимого** мономорфизма $\xi : Y \rightarrow X$ и любого морфизма $\phi : Y \rightarrow J$ существует морфизм $\psi : X \rightarrow J$ делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi \swarrow & \uparrow \xi & \\ J & \xleftarrow{\phi} & Y \end{array} \quad \|\phi\| = \|\psi\|$$

коммутативной.

Какие мономорфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — изометрия

Банахов A -модуль J называется *инъективным*, если для любого **допустимого** мономорфизма $\xi : Y \rightarrow X$ и любого морфизма $\phi : Y \rightarrow J$ существует морфизм $\psi : X \rightarrow J$ делающий диаграмму

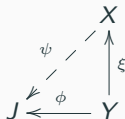


коммутативной.

Какие мономорфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — изометрия
- Топологическая теория: ξ — вложение с замкнутым образом

Банахов A -модуль J называется *инъективным*, если для любого **допустимого** мономорфизма $\xi : Y \rightarrow X$ и любого морфизма $\phi : Y \rightarrow J$ существует морфизм $\psi : X \rightarrow J$ делающий диаграмму



коммутативной.

Какие мономорфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — изометрия
- Топологическая теория: ξ — вложение с замкнутым образом
- **Относительная теория: ξ имеет дополняемый образ**

Банахов A -модуль F называется *плоским*, если модуль F^* инъективен.

- Метрическая инъективность (Kelly, Nachbin, Goodner, Hasumi 1950–1958)
- Метрическая плоскость (Grothendieck, 1955)
- Топологическая проективность (Köthe, 1966)
- Топологическая плоскость (Retherford, 1972)

Основные результаты

Теорема

Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.

Теорема

Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.

Теорема

Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий **сжимающей** аппроксимативной единицей **метрически** проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей **нормы 1**.

Теорема

Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.

Теорема

Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий сжимающей аппроксимативной единицей метрически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей нормы 1.

Теорема

Замкнутый левый идеал C^* -алгебры метрически или топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает самосопряженной правой единицей.

Определение (Lindenstrauss-Pełczyński, 1968)

Пространство E называется \mathcal{L}_p -пространством если существует константа $C > 0$ такая, что для любого конечномерного подпространства F в E существует конечномерное подпространство G в E C -изоморфное конечномерному ℓ_p пространству и содержащее F .

Пример

- $L_1 \in \mathcal{L}_1$
- $C(K) \in \mathcal{L}_\infty$

Определение

Банахова алгебра A называется аменабельной, если все её правые, левые и двусторонние модули *относительно* плоские.

Определение

Банахова алгебра A называется аменабельной, если все её правые, левые и двусторонние модули *относительно* плоские.

Теорема

Над аменабельной банаховой алгеброй всякий банахов модуль, являющийся \mathcal{L}_1 -пространством, топологически плоский.

Определение

Банахова алгебра A называется аменабельной, если все её правые, левые и двусторонние модули *относительно* плоские.

Теорема

Над аменабельной банаховой алгеброй всякий банахов модуль, являющийся \mathcal{L}_1 -пространством, топологически плоский.

Теорема (J.R. Retherford, 1972)

\mathcal{L}_1 -пространства — это в точности топологически плоские банаховы пространства.

Определение (Dubinsky-Pełczyński-Rosenthal, 1972)

Говорят, что банахово пространство E имеет свойство l.u.st. если E^{**} изоморфно дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки.

Определение (Dubinsky-Pełczyński-Rosenthal, 1972)

Говорят, что банахово пространство E имеет свойство l.u.st. если E^{**} изоморфно дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки.

Теорема

Если C^* -алгебра топологически инъективна как правый модуль над собой, то

- A имеет свойство l.u.st;
- A — субоднородная C^* -алгебра;
- A — есть $*$ -подалгебра в $M_n(C(K))$

Определение

AW^* алгебра — это C^* -алгебра в которой у любого подмножества правый алгебраический аннулятор порожден некоторой проекцией.

Определение

AW^* алгебра — это C^* -алгебра в которой у любого подмножества правый алгебраический аннулятор порожден некоторой проекцией.

$$W^* \subset AW^* \subset C^*$$

Определение

AW^* алгебра — это C^* -алгебра в которой у любого подмножества правый алгебраический аннулятор порожден некоторой проекцией.

$$W^* \subset AW^* \subset C^*$$

Теорема

AW^* -алгебра A топологически инъективна как правый модуль над собой тогда и только тогда, когда

$$A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(C(K_i)),$$

где K_i — стоуновы пространства.

Определение (Grothendieck, 1953)

Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если для любого банахова пространства F всякий слабо компактный оператор $T : E \rightarrow F$ будет вполне непрерывным.

Определение (Grothendieck, 1953)

Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если для любого банахова пространства F всякий слабо компактный оператор $T : E \rightarrow F$ будет вполне непрерывным.

Пример

Обладают	Не обладают
$L_1, C(K)$	рефлексивные пространства

Определение (Grothendieck, 1953)

Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если для любого банахова пространства F всякий слабо компактный оператор $T : E \rightarrow F$ будет вполне непрерывным.

Пример

Обладают	Не обладают
$L_1, C(K)$	рефлексивные пространства

Теорема

Если банахова алгебра является \mathcal{L}_1 - или \mathcal{L}_∞ -пространством, то все её топологически проективные, инъективные и плоские модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{L_p(\Omega, \mu) : 1 \leq p \leq \infty, \mu - \sigma\text{-аддитивная мера}\}$$

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

$$\text{Ob}(C) = \{L_p(\Omega, \mu) : 1 \leq p \leq \infty, \mu - \sigma\text{-аддитивная мера}\}$$

$$\text{Hom}(C) = \{M_g : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow L_q(\Omega, \nu) : f \mapsto gf\}$$

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

$$\text{Ob}(C) = \{L_p(\Omega, \mu) : 1 \leq p \leq \infty, \mu - \sigma\text{-аддитивная мера}\}$$

$$\text{Hom}(C) = \{M_g : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow L_q(\Omega, \nu) : f \mapsto gf\}$$

Теорема

В категории C все модули являются проективными, инъективными и плоскими в смысле метрической, топологической и относительной теории.

- Немеш Н. Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр // Матем. Заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 526–533.
- Немеш Н. Топологически инъективные C^* -алгебры // Функц. анализ. и прил. — 2016. — Т. 50, № 2. — С. 88–91.
- Немеш Н. Гомологическая тривиальность категории модулей L_p // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2016. Т. 71, № 4. — С. 3–12.