Геометрия проективных, инъективных и плоских банаховых модулей[1]

Н. Т. Немеш

УДК 517.986.22

Ключевые слова: проективность, инъективность, плоскость, аннуляторный модуль, свойство Данфорда-Петтиса.

Аннотация: В данной статье изложены общие результаты о метрически и топологически проективных, инъективных и плоских банаховых модулях. Доказаны теоремы указывающие на тесную связь метрической и топологической банаховой гомологии с банаховой геометрией. Например, в геометрических терминах дано описание проективных, инъективных и плоских аннуляторных модулей. Доказано, что для алгебр являющихся $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством ее гомологически тривиальные модули обладают свойством Данфорда-Петтиса.

1 Введение

Понятия проективного, инъективного и плоского модуля являются тремя китами на которых покоится здание гомологической алгебры. Методы гомологической алгебры в функциональном анализе были внедрены и развиты Хелемским и его школой. Точнее, Хелемский рассматривал специальную версию относительной гомологии, связывающую воедино алгебру и топологию. Существовали и другие варианты гомологической алгебры в функциональном анализе, например метрическая и топологическая. Активно изучать их стали только сейчас. В данной статье мы докажем несколько теорем подтверждающих тесную связь метрической и топологической банаховой гомологии с геометрией банаховых пространств.

Несколько слов об обозначениях. Здесь и далее символ A будет обозначать не обязательно унитальную банахову алгебру со сжимающим билинейным оператором умножения. Через A_+ мы будем обозначать стандартную унитизацию A как банаховой алгебры. Символом $A_\times$ мы будем обозначать условную унитизацию, то есть $A_\times = A$ если A унитальна и $A_\times = A_+$ в противном случае. Мы будем рассматривать только банаховы модули со сжимающим билинейным оператором внешнего умножения, обозначаемого точкой "$\cdot$". Наконец, непрерывные морфизмы A-модулей мы будем называть A-морфизмами. Через **Ban** мы будем обозначать категорию банаховых пространств с ограниченными операторами в роли морфизмов. Если рассматривать в роли морфизмов только сжимающие операторы, то мы получим еще одну категорию обозначаемую $\mathbf{Ban}_1$. Через $A-\mathbf{mod}$ мы обозначим категорию левых банаховых A-модулей с ограниченными A-морфизмами в роли морфизмов. Через $A-\mathbf{mod}_1$ мы обозначим подкатегорию $A-\mathbf{mod}$ с теми же объектами, но только лишь сжимающими морфизмами. В дальнейшем, в предложениях мы будем использовать сразу несколько фраз, последовательно перечисляя их и заключая в скобки таким образом: $\langle$ ... / ... $\rangle$. Например: число x называется $\langle$ положительным / неотрицательным $\rangle$ если $\langle$ $x > 0$ / $x \geq 0$ $\rangle$.

Напомним пару определений и фактов из относительной банаховой гомологии. Будем говорить, что морфизм $\xi : X \to Y$ левых A-модулей X и Y есть относительно допустимый

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант номер 15–01–08392).

эпиморфизм, если он имеет правый обратный ограниченный линейный оператор. Левый A-модуль P называется относительно проективным, если для любого относительно допустимого эпиморфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\xi\psi = \phi$. Аналогично, будем говорить, что морфизм $\xi : Y \to X$ правых A-модулей X и Y есть относительно допустимый мономорфизм, если он имеет левый обратный ограниченный линейный оператор. Правый A-модуль J называется относительно инъективным, если для любого относительно допустимого мономорфизма $\xi : Y \to X$ и любого A-морфизма $\phi : Y \to J$ существует A-морфизм $\psi : X \to J$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\ J & Y \arrow[u, "\xi"'] \arrow[l, "\phi"] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\psi\xi = \phi$.

Специальный класс относительно $\langle$ проективных / инъективных $\rangle$ A-модулей — это так называемые относительно $\langle$ свободные / косвободные $\rangle$ модули. Они имеют вид $\langle\ A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} E\ /\ \mathcal{B}(A_+, E)\ \rangle$ для некоторого банахова пространства E. Главное свойство таких модулей состоит в том, A-модуль относительно $\langle$ проективен / инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он является ретрактом некоторого относительно $\langle$ свободного / косвободного $\rangle$ A-модуля.

И метрическая и топологическая и относительная банахова гомология могут быть изложены с общекатегорных позиций. В работе [1] Хелемским была построена теория оснащенных категорий, позволившая единообразно доказывать многие утверждения о проективных и инъективных банаховых модулях. Мы дадим определения и кратко перечислим некоторые результаты об оснащенных категориях. Через **Set** мы будем обозначать категорию множеств. Тот факт что объекты X и Y категории $\mathbf{C}$ изоморфны мы будем записывать как $X \underset{\mathbf{C}}{\cong} Y$. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две фиксированные категории. Упорядоченная пара $(\mathbf{C}, \Box : \mathbf{C} \to \mathbf{D})$, где $\Box$ — верный ковариантный функтор, называется оснащенной категорией. Морфизм ξ в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-допустимым эпиморфизмом если $\Box(\xi)$ — ретракция в $\mathbf{D}$. Объект P в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-проективным, если для каждого $\Box$-допустимого эпиморфизма ξ в $\mathbf{C}$ отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, \xi)$ сюръективно. Объект F в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-свободным с базой M в $\mathbf{D}$, если существует изоморфизм функторов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(M, \Box(-)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(F, -)$. Оснащенная категория $(\mathbf{C}, \Box)$ называется свободолюбивой [[1], определение 2.10], если каждый объект в $\mathbf{D}$ является базой некоторого $\Box$-свободного объекта из $\mathbf{C}$. Резюме предложений 2.3, 2.11 и 2.12 из [1] выглядит следующим образом:

(i) любой ретракт $\Box$-проективного объекта $\Box$-проективен;

(ii) любой $\Box$-допустимый эпиморфизм в $\Box$-проективный объект есть ретракция;

(iii) любой $\Box$-свободный объект $\Box$-проективен;

(iv) если $(\mathbf{C}, \Box)$ — свободолюбивая оснащенная категория, то любой объект $\Box$-проективен тогда и только тогда, когда он есть ретракт $\Box$-свободного объекта;

(v) копроизведение семейства $\Box$-проективных объектов $\Box$-проективно.

Символом $\mathbf{C}^o$ мы будем обозначать категорию противоположную к $\mathbf{C}$. Противоположной к оснащенной категории $(\mathbf{C}, \Box)$ будем называть оснащенную категорию $(\mathbf{C}^o, \Box^o : \mathbf{C}^o \to \mathbf{D}^o)$. Здесь, $\mathbf{C}^o$ и $\mathbf{D}^o$ обозначают противоположные категории, то есть категории в которых те же объекты, но все стрелки направлены в противоположную сторону. Переходя к противоположной оснащенной категории, мы можем определить допустимые мономорфизмы, инъективность и косвободу. Морфизм ξ называется $\Box$-допустимым мономорфизмом, если он $\Box^o$-допустимый эпиморфизм. Объект J из $\mathbf{C}$ называется $\Box$-инъективным, если он $\Box^o$-проективен. Объект F из $\mathbf{C}$ называется $\Box$-косвободным, если он $\Box^o$-свободный. Наконец, категория $(\mathbf{C}, \Box)$ называется косвободолюбивой, если противоположная категория $(\mathbf{C}^o, \Box^o)$ свободолюбива. Таким образом, для инъективности и косвободы мы можем сформулировать результаты аналогичные тем, что были для проективности и свободы.

Теперь рассмотрим верный функтор $\Box_{rel} : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ban}$, который просто "забывает" модульную структуру. Легко видеть, что $(A - \mathbf{mod}, \Box_{rel})$ — оснащенная категория, у которой $\Box_{rel}$-допустимые $\langle$ эпиморфизмы / мономорфизмы $\rangle$ в точности относительно допустимые $\langle$ эпиморфизмы / мономорфизмы $\rangle$ и $\langle$ $\Box_{rel}$-проективные / $\Box_{rel}$-инъективные $\rangle$ объекты в точности относительно $\langle$ проективные / инъективные $\rangle$ A-модули. Более того, можно показать, что все $\langle$ $\Box_{rel}$-свободные / $\Box_{rel}$-косвободные $\rangle$ объекты изоморфны в $A - \mathbf{mod}$ модулям вида $\langle$ $A_+ \widehat{\otimes} E$ / $\mathcal{B}(A_+, E)$ $\rangle$ для некоторого банахова пространства E. Этот пример показывает, что относительная теория прекрасно вписывается в схему оснащенных категорий.

В этой работе мы применим такой же общекатегорный подход к метрической и топологической теории. В этих теориях накладываются значительно более слабые ограничения на допустимые морфизмы.

2 Проективность, инъективность и плоскость

2.1 Метрическая и топологическая проективность

При изучении метрической и топологической проективности мы будем рассматривать два широких класса эпиморфизмов, а именно строго коизометрические и топологически сюръективные A-морфизмы. Через $\langle$ B_E / B_E° $\rangle$ мы будем обозначать $\langle$ замкнутый / открытый $\rangle$ единичный шар пространства E. Ограниченный линейный оператор $T : E \to F$ будем называть $\langle$ строго коизометрическим / топологически сюръективным $\rangle$ если $\langle$ $B_F = T(B_E)$ / $B_F^\circ \subset cT(B_E^\circ)$ для некоторого $c > 0$ $\rangle$. В дальнейшем A обозначает необязательно унитальную банахову алгебру.

Определение 2.1 ([1], определения 1.2, 1.4)**.** *A-модуль P называется $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективным, если для любого $\langle$ строго коизометрического / топологически сюръективного $\rangle$ A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$ такой, что $\langle$ $\xi\psi = \phi$ и $\|\psi\| = \|\phi\|$ / $\xi\psi = \phi$ $\rangle$.*

Теперь мы нацелены применить аппарат оснащенных категорий к этим типам проективности. В работах Хелемского [1] и Штейнера [2] были построены два верных функтора:

$$\Box_{met} : A - \mathbf{mod}_1 \to \mathbf{Set}, \qquad \Box_{top} : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{HNor}.$$

Здесь $\mathbf{HNor}$ — это категория так называемых полунормированных пространств, введенных Штейнером. Мы не будем подробно объяснять как действуют эти функторы. Нам достаточно их существования. В тех же статьях было доказано, что, во-первых, A-морфизм ξ

$\langle$ строго коизометричен / топологически сюръективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\square_{met}$-допустимый / $\square_{top}$-допустимый $\rangle$ эпиморфизм и, во-вторых, A-модуль P является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективным тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\square_{met}$-проективен / $\square_{top}$-проективен $\rangle$. Таким образом, мы немедленно получаем следующее предложение.

Предложение 2.2. *Всякий ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного модуля в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ снова $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен.*

Помимо этого в [1] и [2] было доказано, что оснащенная категория $\langle$ $(A-\mathbf{mod}_1, \square_{met})$ / $(A-\mathbf{mod}, \square_{top})$ $\rangle$ свободолюбива, и что $\langle$ $\square_{met}$-свободные / $\square_{top}$-свободные $\rangle$ модули изоморфны в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ модулям вида $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ. Более того, для любого A-модуля X существует $\langle$ $\square_{met}$-допустимый / $\square_{top}$-допустимый $\rangle$ эпиморфизм

$$\pi_X^+ : A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_X) : a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto a \cdot x.$$

Здесь, через δ_x мы обозначаем функцию из $\ell_1(B_X)$ равную 1 в точке x и 0 в остальных точках. Как следствие общих результатов об оснащенных категориях мы получаем следующий критерий $\langle$ метрической / топологической $\rangle$ проективности банахова модуля.

Предложение 2.3. *Модуль P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда π_P^+ — ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$.*

Так как $\langle$ $\square_{met}$-свободные / $\square_{top}$-свободные $\rangle$ модули совпадают с точностью до изоморфизма в $A - \mathbf{mod}$, то из предложения 2.2 мы видим, что любой метрически проективный A-модуль топологически проективен. Напомним, что каждый относительно проективный модуль есть ретракт в $A - \mathbf{mod}$ модуля вида $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ для некоторого банахова пространства E. Следовательно, каждый топологически проективный A-модуль будет относительно проективным. Мы резюмируем эти результаты в следующем предложении.

Предложение 2.4. *Каждый метрически проективный модуль топологически проективен, и каждый топологически проективный модуль относительно проективен.*

Заметим, что категория банаховых пространств может рассматриваться как категория левых банаховых модулей над нулевой алгеброй. Как следствие, мы получаем определение $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного банахова пространства. Все результаты полученные выше верны для этого типа проективности. Оба типа проективных банаховых пространств уже описаны. В [3] Кёте доказал, что все топологически проективные банаховы пространства топологически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ. Используя результат Гротендика из [4], Хелемский показал, что метрически проективные банаховы пространства изометрически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ [[1], предложение 3.2].

Теперь перейдем к обсуждению модулей. Легко доказать по определению, что A-модуль $A_\times$ метрически и топологически проективен, но чаще для доказательства проективности модуля решают задачу ретракции для морфизма π_P^+. Как показывают следующие два предложения, решение последней задачи иногда можно свести к более простой.

Предложение 2.5. *Пусть P — существенный A-модуль, то есть линейная оболочка $A \cdot P$ плотна в P. Тогда P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда отображение $\pi_P : A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) : a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto a \cdot x$ есть ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$.*

Доказательство. Доказательство такое же как и в [[5], предложение 7.1.14]. □

Предложение 2.6. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A, и P — банахов A-модуль, существенный как I-модуль. Тогда:*

(i) если I — левый идеал в A и P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как I-модуль, то P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль;

(ii) если I — $\langle$ 1-дополняемый / дополняемый $\rangle$ правый идеал A и P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль, то P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как I-модуль.

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждениям из [[6], предложение 2.3.3]. □

Приведем несколько конструкций сохраняющих проективность модулей. Здесь и далее через $\bigoplus_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ мы будем обозначать ℓ_p-сумму банаховых пространств $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. При $p = 0$ мы будем подразумевать c_0-суммы. Если все пространства E_λ являются банаховыми A-модулями, то на их ℓ_p-сумме можно задать структуру банахова A-модуля с помощью покоординатного умножения. Следует напомнить, что $\langle$ произвольное / лишь конечное $\rangle$ семейство модулей обладает категорным копроизведением в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$, которое на самом деле есть их ℓ_1-сумма. В этом и состоит причина почему мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.7. *Пусть $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда*

(i) A-модуль $\bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически проективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль P_λ метрически проективен;

(ii) если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\pi^+_{P_\lambda}$ имеет правый обратный морфизм нормы не более C, то A-модуль $\bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ топологически проективен.

Доказательство. Обозначим $P := \bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

(i) Если P метрически проективен, то по предложению 2.2 для каждого $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль P_λ метрически проективен как ретракт P посредством естественной проекции $p_\lambda : P \to P_\lambda$. Обратно, если все модули $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ метрически проективны, то по общекатегорной схеме метрически проективно их категорное копроизведение P в $A - \mathbf{mod}_1$.

(ii) Допустим P_λ топологически проективен для каждого $\lambda \in \Lambda$. Из предположения следует, что $\bigoplus_1\{\pi^+_{P_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ является ретракцией в $A - \mathbf{mod}$. Как следствие $\bigoplus_1\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ есть ретракт

$$\bigoplus\nolimits_1 \left\{A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{P_\lambda}) : \lambda \in \Lambda\right\} \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1 \left\{\bigoplus\nolimits_1\{A_+ : \lambda' \in B_{P_\lambda}\} : \lambda \in \Lambda\right\}$$

$$\underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1\{A_+ : \lambda \in \Lambda_0\}$$

в $A - \mathbf{mod}$, где $\Lambda_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_{P_\lambda}$. Тогда, по предположению 2.2 банахов A-модуль P топологически проективен как ретракт топологически проективного A-модуля. □

Следствие 2.8. *Пусть P — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $P \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен.*

Чтобы понять отличия метрической и топологической банаховой гомологии от относительной рассмотрим еще два примера касающиеся идеалов и циклических модулей.

Предложение 2.9. *Пусть I — идеал коммутативной банаховой алгебры A и I имеет $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль тогда и только тогда, когда I имеет $\langle$ единицу нормы 1 / единицу $\rangle$.*

Доказательство. См. [[7], теорема 1]. □

Этот результат показывает, что метрически или топологически проективные идеалы с ограниченной аппроксимативной единицей должны иметь компактный спектр. В то же время существует множество примеров относительно проективных идеалов со "всего лишь" паракомпактным спектором [[8], теорема 3.7].

Следующее предложение является очевидной модификацией описания алгебраически проективных циклических модулей.

Предложение 2.10. *Пусть I — левый идеал в $A_\times$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A-модуль $A_\times/I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен $\langle$ и естественное фактор-отображение $\pi : A_\times \to A_\times/I$ является строгой коизометрией / $\rangle$;

(ii) существует идемпотент $p \in I$ такой, что $I = A_\times p$ $\langle$ и $\|e_{A_\times} - p\| = 1$ / $\rangle$

Доказательство. С использованием несколько иной терминологии этот факт доказан в [[9], предложение 2.11]. □

2.2 Метрическая и топологическая инъективность

Как легко догадаться, при изучении метрической и топологической инъективности мы будем использовать два широких класса мономорфизмов, а именно топологически инъективные и изометрические A-морфизмы. Напомним, что ограниченный линейный оператор $T : E \to F$ называется топологически инъективным, если для некоторого $c > 0$ при всех $x \in E$ выполнено $c\|T(x)\| \geq \|x\|$. Далее, если не оговорено иначе, мы будем считать все модули правыми.

Определение 2.11 ([1], определение 4.3)**.** *A-модуль J называется $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным, если для любого $\langle$ изометрического / топологически инъективного $\rangle$ A-морфизма $\xi : Y \to X$ и любого A-морфизма $\phi : Y \to J$ существует A-морфизм $\psi : X \to J$ такой, что $\langle$ $\psi\xi = \phi$ и $\|\psi\| = \|\phi\|$ / $\psi\xi = \phi$ $\rangle$.*

В работах [1] и [2] были построены верные функторы:

$$\square^d_{met} : \mathbf{mod}_1 - A \to \mathbf{Set}, \quad \square^d_{top} : \mathbf{mod} - A \to \mathbf{HNor}.$$

Было доказано, что, во-первых, A-морфизм ξ $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$ тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\square^d_{met}$-допустимый / $\square^d_{top}$-допустимый $\rangle$ мономорфизм и, во-вторых, A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\square^d_{met}$-инъективен / $\square^d_{top}$-инъективен $\rangle$. Таким образом, мы немедленно получаем следующее утверждение.

Предложение 2.12. *Всякий ретракт ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективного модуля в ⟨ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ ⟩ снова ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективен.*

В [1] и [2] также было доказано, что оснащенная категория ⟨ $(\mathbf{mod}_1 - A, \Box^d_{met})$ / $(\mathbf{mod} - A, \Box^d_{top})$ ⟩ косвободолюбива, и что ⟨ $\Box^d_{met}$-косвободные / $\Box^d_{top}$-косвободные ⟩ модули изоморфны в ⟨ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ ⟩ модулям вида $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda))$ для некоторого множества Λ. Более того, для любого A-модуля X существует ⟨ $\Box^d_{met}$-допустимый / $\Box^d_{top}$-допустимый ⟩ мономорфизм

$$\rho^+_X : X \to \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{X^*})) : x \mapsto (a \mapsto (f \mapsto f(x \cdot a))).$$

Как следствие общих результатов об оснащенных категориях мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.13. *Модуль J ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективен тогда и только тогда, когда ρ^+_J — коретракция в ⟨ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ ⟩.*

Как и для проективных модулей легко доказать следующее предложение.

Предложение 2.14. *Каждый метрически инъективный модуль топологически инъективен, и каждый топологически инъективный модуль относительно инъективен.*

Отождествим банаховы пространства с правыми банаховыми модулями над нулевой алгеброй, тогда мы получим определение ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективного банахова пространства. Эквивалентное определение говорит, что банахово пространство ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективно, если оно ⟨ 1-дополняемо / дополняемо ⟩ в любом объемлющем банаховом пространстве. На данный момент полностью описаны только метрически инъективные банаховы пространства — эти пространства изометрически изоморфны $C(K)$-пространствам для некоторого экстремально несвязного компактного хаусдорфова пространства K [[10], теорема 3.11.6]. Обычно такие топологические пространства называются стоуновыми. В частности, метрически инъективно всякое L_∞-пространство. Самые последние достижения в изучении топологически инъективных банаховых пространств можно найти в [[11], глава 40].

Теперь перейдем к обсуждению модулей. И снова простой факт: A-модуль $A^*_\times$ метрически и топологически инъективен. Его легко доказать по определению с использованием теоремы Хана-Банаха. По аналогии с проективными модулями, проверку инъективности модулей часто можно свести к рассмотрению чуть более простых задач ретракции.

Предложение 2.15. *Пусть J — верный A-модуль, то есть равенство $x \cdot A = \{0\}$ влечет $x = 0$. Тогда J ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективен тогда и только тогда, когда отображение $\rho_J : J \to \mathcal{B}(A, \ell_\infty(B_{J^*})) : x \mapsto (a \mapsto (f \mapsto f(x \cdot a)))$ есть коретракция в ⟨ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ ⟩.*

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждениям из [[12], предложение 1.7]. □

Предложение 2.16. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A, и J — правый банахов A-модуль верный как I-модуль. Тогда:*

(i) если I — левый идеал в A и J ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективный I-модуль, то J ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективен как A-модуль;

(ii) если I — ⟨ 1-дополняемый / дополняемый ⟩ правый идеал A и J ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективен как A-модуль, то J ⟨ метрически / топологически ⟩ инъективен как I-модуль.

Доказательство. Доказательство незначительно отличается от [[6], предложение 2.3.4]. $\square$

Теперь обсудим конструкции которые сохраняют метрическую и топологическую инъективность. Следует напомнить, что $\langle$ произвольное / лишь конечное $\rangle$ семейство объектов в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$ обладает категорным произведением, которое на самом деле есть их ℓ_∞-сумма. Именно поэтому мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.17. *Пусть $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда:*

(i) A-модуль $\bigoplus_\infty\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически инъективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль J_λ метрически инъективен;

(ii) если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\rho^+_{J_\lambda}$ имеет левый обратный морфизм нормы не более C, то A-модуль $\bigoplus_\infty\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ топологически инъективен.

Доказательство. Доказательство мало отличается от рассуждений предложения 2.7. Нужно лишь использовать другой изоморфизм: $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda)) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \bigoplus_\infty\{A_+^* : \lambda \in \Lambda\}$ $\square$

Следствие 2.18. *Пусть J — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\bigoplus_\infty\{J : \lambda \in \Lambda\}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

В отличие от проективности имеется еще один способ конструирования инъективных модулей.

Предложение 2.19. *Пусть J — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

Доказательство. Допустим, $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим сжимающие A-морфизмы $i_\lambda : J \to \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) : x \mapsto (f \mapsto f(\lambda)x)$ и $p_\lambda : \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) \to J : T \mapsto T(\delta_\lambda)$. Очевидно, $p_\lambda i_\lambda = 1_J$, то есть J есть ретракт $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Из предложения 2.12 следует, что A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.

Обратно, поскольку J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен, то по предложению 2.13 морфизм ρ^+_J является коретракцией в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Применим функтор $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), -)$ к этой коретракции, чтобы получить другую коретракцию $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \rho^+_J)$. Заметим, что

$$\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \left(\ell_1(\Lambda) \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})\right)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda \times B_{J^*})^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}),$$

поэтому мы получаем изометрически изоморфизм банаховых модулей:

$$\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*}))) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*})).$$

Значит $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ — ретракт $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}))$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$, то есть ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного A-модуля. По предложению 2.12 A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. $\square$

2.3 Метрическая и топологическая плоскость

Чтобы сохранить единый стиль обозначений мы будем называть метрически плоскими A-модули статьи [13], где они были названы экстремально плоскими. Через $\widehat{\otimes}_A$ мы будем обозначать проективное модульное тензорное произведение банаховых модулей. Тем же символом мы будем обозначать и соответствующий функтор.

Определение 2.20 ([13], I)**.** *A-модуль F называется $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоским, если для каждого $\langle$ изометрического / топологически инъективного $\rangle$ A-морфизма $\xi : X \to Y$ правых A-модулей линейный оператор $\xi \widehat{\otimes}_A 1_F : X \widehat{\otimes}_A F \to Y \widehat{\otimes}_A F$ $\langle$ изометричен / топологически инъективен $\rangle$.*

Прежде чем переходить к примерам, нам потребуется дать определение $\mathscr{L}_1$-пространства. Пусть E и F — два изоморфных банаховых пространства. Тогда расстояние Банаха-Мазура между ними определяется по формуле

$$d_{BM}(E,F) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in \mathcal{B}(E,F) - \text{изоморфизм}\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство конечномерных банаховых пространств. Будем говорить, что банахово пространство E имеет $\mathcal{F}$-локальную структуру, если для некоторого $C \geq 1$ и для каждого конечномерного подпространства F в E существует содержащее F конечномерное подпространство G в E такое, что $d_{BM}(G,H) \leq C$ для некоторого H из $\mathcal{F}$. Один из самых важных примеров такого типа — это так называемые $\mathscr{L}_p$-пространства. Впервые они были определены в новаторской работе [14] и стали незаменимым инструментом в локальной теории банаховых пространств. Для заданного $1 \leq p \leq +\infty$ мы будем говорить, что банахово пространство E является $\mathscr{L}_p$-пространством, если оно имеет $\mathcal{F}$-локальную структуру для класса $\mathcal{F}$ конечномерных ℓ_p-пространств. Наибольший интерес для нас будут представлять $\mathscr{L}_1$- и $\mathscr{L}_\infty$-пространства.

И снова, в качестве примера мы рассмотрим категорию банаховых пространств как категорию модулей над нулевой алгеброй. Из работы Гротендика [4] следует, что любое метрически плоское банахово пространство есть L_1-пространство. Для топологически плоских банаховых пространств, в отличие от топологически инъективных, мы также имеем критерий [[15], теорема V.1]: банахово пространство топологически плоское тогда и только тогда, когда оно является $\mathscr{L}_1$-пространством.

Хорошо известно, что A-модуль F относительно плоский тогда и только тогда, когда F^* относительно инъективный [[5], теорема 7.1.42]. Следующее предложение есть очевидный аналог данного результата. Доказательство незначительно отличается от критерия относительной плоскости.

Предложение 2.21. *A-модуль F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский тогда и только тогда, когда F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен.*

Комбинируя предложение 2.21 с предложениями 2.12 и 2.14, мы получаем следующее.

Предложение 2.22. *Всякий ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоского модуля в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ снова $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский.*

Предложение 2.23. *Каждый метрически плоский модуль топологический плоский, каждый топологически плоский модуль относительно плоский.*

Отметим, еще одно полезное следствие предложения 2.21.

Предложение 2.24. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A, и F — банахов A-модуль существенный как I-модуль. Тогда:*

(i) если I — левый идеал в A и F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский I-модуль, то F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский A-модуль;

(ii) если I — $\langle$ 1-дополняемый / дополняемый $\rangle$ правый идеал A и F есть $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский A-модуль, то F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский I-модуль.

Доказательство. Заметим, что модуль, сопряженный к существенному модулю, будет верным. Теперь все результаты следуют из предложений 2.21 и 2.16. □

Предложение 2.25. *Пусть P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный A-модуль, и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\mathcal{B}(P, \ell_\infty(\Lambda))$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль. В частности, P^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как A-модуль.*

Доказательство. Из предложения 2.3 мы знаем, что π_P^+ — ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Тогда A-морфизм $\rho^+ = \mathcal{B}(\pi_P^+, \ell_\infty(\Lambda))$ есть коретракция в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Заметим, что $\mathcal{B}(A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P), \ell_\infty(\Lambda)) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \mathcal{B}(\ell_1(B_P), \ell_\infty(\Lambda))) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_P \times \Lambda))$. Итак, мы показали, что существует коретракция из $\mathcal{B}(P, \ell_\infty(\Lambda))$ в $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль. По предложению 2.12 банахов A-модуль $\mathcal{B}(P, \ell_\infty(\Lambda))$ является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным. Чтобы доказать последнее утверждение достаточно взять в качестве Λ одноточечное множество. □

Как следствие предложений 2.21 и 2.25, мы получаем следующий важный факт.

Предложение 2.26. *Каждый $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный модуль является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоским.*

Позже мы убедимся, что $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ плоскость — это более слабое свойство, чем $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ проективность.

По аналогии с проективностью, теперь легко показать, что копроизведения сохраняют метрическую, а иногда и топологическую плоскость модулей.

Предложение 2.27. *Пусть $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда:*

(i) A-модуль $\bigoplus_1 \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически плоский тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ модуль F_λ метрически плоский;

(ii) если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\rho_{F_\lambda^*}^+$ имеет левый обратный морфизм нормы не более C, то A-модуль $\bigoplus_1 \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ топологически плоский.

Доказательство. По предложению 2.21 A-модуль F $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский тогда и только тогда, когда F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Осталось применить предложение 2.17 с $J_\lambda = F_\lambda^*$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и вспомнить, что

$$\left(\bigoplus\nolimits_1 \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \right)^* \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty \{F_\lambda^* : \lambda \in \Lambda\}.$$

□

Теперь мы обсудим условия, при которых идеалы и циклические модули будут метрически и топологически плоскими. Доказательство, следующего предложения практически не отличается от своего “относительного аналога” в [[5], предложение 7.1.45].

Предложение 2.28. *Пусть I — левый идеал в $A_\times$ и I имеет правую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда A-модуль I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский.*

Теперь, кстати, мы можем дать пример метрически плоского модуля, который не является даже топологически проективным. Очевидно, $\ell_\infty(\mathbb{N})$-модуль $c_0(\mathbb{N})$ не унитален как идеал алгебры $\ell_\infty(\mathbb{N})$, но имеет сжимающую аппроксимативную единицу. По теореме 2.9 этот модуль не является топологически проективным, но он метрически плоский по предложению 2.28.

Вторая часть следующего предложения есть небольшая переформулировка [[9], предложение 4.11]. Случай топологической плоскости идеалов был изучен Хелемским в [[8], теорема VI.1.20].

Предложение 2.29. *Пусть I — левый собственный идеал в $A_\times$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *A-модуль $A_\times/I$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский;*

(ii) *идеал I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$ $\langle$ такую, что $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\times}-e_\nu\|\leq 1$ / $\rangle$*

Следует сказать, что всякая операторная алгебра A (не обязательно самосопряженная) обладающая сжимающей аппроксимативной единицей имеет сжимающую аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$ со свойством $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\#}-e_\nu\|\leq 1$ и даже $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\#}-2e_\nu\|\leq 1$. Здесь $A_\#$ — унитизация A как операторной алгебры. Подробности можно найти в [16], [17].

Сравним эти результаты о метрической и топологической плоскости циклических модулей с их относительными аналогами. Хелемский и Шейнберг показали [[8], теорема VII.1.20], что циклический модуль будет относительно плоским если I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу. В случае когда $I^\perp$ дополняемо в $A_\times^*$ верна и обратная импликация. В топологической теории это требование излишне, поэтому удается получить критерий. Метрическая плоскость циклических модулей слишком сильное свойство из-за специфических ограничений на норму аппроксимативной единицы. Как мы увидим в следующем параграфе, оно настолько ограничительное, что не позволяет построить ни одного ненулевого аннуляторного метрически проективного, инъективного или плоского модуля над ненулевой банаховой алгеброй.

3 Влияние банаховой геометрии

3.1 Гомологически тривиальные аннуляторные модули

В этом параграфе мы сконцентрируем наше внимание на метрической и топологической проективности, инъективности и плоскости аннуляторных модулей, то есть модулей с нулевым внешним умножением. Если не оговорено иначе, все банаховы пространства в этом параграфе рассматриваются как аннуляторные модули. Отметим очевидный факт: всякий ограниченный линейный оператор между аннуляторными A-модулями является A-морфизмом.

Предложение 3.1. *Пусть X — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда $\mathbb{C}$ есть ретракт X в $A - \mathbf{mod}_1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \in X$ нормы 1. Используя теорему Хана-Банаха выберем функционал $f_0 \in X^*$ так, чтобы $\|f_0\| = f_0(x_0) = 1$. Рассмотрим линейные операторы $\pi : X \to \mathbb{C} : x \mapsto f_0(x)$, $\sigma : \mathbb{C} \to X : z \mapsto zx_0$. Легко проверить, что π и σ суть сжимающие A-морфизмы и, более того, $\pi\sigma = 1_{\mathbb{C}}$. Другими словами, $\mathbb{C}$ есть ретракт X в $A - \mathbf{mod}_1$. ☐

Пришло время вспомнить, что любая банахова алгебра A может рассматриваться как собственный максимальный идеал в A_+, причем $\mathbb{C} \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} A_+/A$. Если рассматривать $\mathbb{C}$ как правый аннуляторный A-модуль, то имеет место еще один изоморфизм $\mathbb{C} \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} (A_+/A)^*$.

Предложение 3.2. *Аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую единицу $\rangle$.*

Доказательство. Достаточно исследовать $\langle$ метрическую / топологическую $\rangle$ проективность модуля A_+/A. Естественное фактор-отображение $\pi : A_+ \to A_+/A$ является строгой коизометрией, поэтому по предложению 2.10 $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ проективность A_+/A эквивалентна существованию $p \in A$ такого, что $A = A_+p$ $\langle$ и $\|e_{A_+} - p\| = 1$ / $\rangle$. $\langle$ Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - p\| = 1$ тогда и только тогда, когда $p = 0$, что эквивалентно $A = A_+p = \{0\}$ / $\rangle$. ☐

Предложение 3.3. *Пусть P — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный A-модуль;*

(ii) *$\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую единицу $\rangle$ и P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективное банахово пространство, то есть $\langle$ $P \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ / $P \underset{\mathbf{Ban}}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ $\rangle$ для некоторого множества Λ.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Из предложений 2.2 и 3.1 следует, что A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного модуля P. Предложение 3.2 дает, что $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую единицу $\rangle$. По следствию 2.8 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C} \widehat{\otimes} \ell_1(B_P) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \ell_1(B_P)$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. Рассмотрим строгую коизометрию $\pi : \ell_1(B_P) \to P$ корректно определенную равенством $\pi(\delta_x) = x$. Так как P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен, то A-морфизм π имеет правый обратный морфизм σ в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Таким образом, $\sigma\pi$ есть $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ проектор из $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективного банахова пространства $\ell_1(B_P)$ на P, то есть P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективное банахово пространство. Теперь из $\langle$ [[1], предложение 3.2] / результатов [3] $\rangle$ следует, что P изоморфно $\ell_1(\Lambda)$ в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$ для некоторого множества Λ.

$(ii) \implies (i)$ По предложению 3.2 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. По следствию 2.8 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C} \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda) \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ также $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен. ☐

Предложение 3.4. *Правый аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$.*

Доказательство. Благодаря предложению 2.21 достаточно изучить $\langle$ метрическую / топологическую $\rangle$ плоскость модуля A_+/A. По предложению 2.29 это эквивалентно существованию правой ограниченной аппроксимативной единицы $(e_\nu)_{\nu \in N}$ в A $\langle$ со свойством $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_+} - e_\nu\| \leq 1$ / $\rangle$. $\langle$ Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - e_\nu\| \leq 1$ тогда и только тогда, когда $e_\nu = 0$, что эквивалентно $A = \{0\}$ / $\rangle$. $\square$

Предложение 3.5. *Пусть J — ненулевой правый аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) J — $\langle$ *метрически / топологически* $\rangle$ *инъективный A-модуль;*

(ii) $\langle$ $A = \{0\}$ / *A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу* $\rangle$ *и J —* $\langle$ *метрически / топологически* $\rangle$ *инъективное банахово пространство* $\langle$ *то есть $J \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C(K)$ для некоторого для стоунова пространства K* / $\rangle$.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Из предложений 2.12 и 3.1 мы получаем, что A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен как ретракт $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного модуля J. Предложение 3.4 дает нам, что $\langle$ $A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$. Из предложения 2.19 следует, что аннуляторный A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}), \mathbb{C}) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \ell_\infty(B_{J^*})$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Рассмотрим изометрию $\rho : J \to \ell_\infty(B_{J^*})$ корректно определенную равенством $\rho(x)(f) = f(x)$. Поскольку J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен, ρ имеет левый обратный морфизм τ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Тогда $\rho\tau$ — $\langle$ сжимающий / ограниченный $\rangle$ проектор из $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективного банахова пространства $\ell_\infty(B_{J^*})$ на J, поэтому J также является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективным банаховым пространством. $\langle$ Из [[10], теорема 3.11.6] мы знаем, что J изометрически изоморфно $C(K)$ для некоторого стоунова пространства K. / $\rangle$

$(ii) \implies (i)$ По предложению 3.4 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. По предложению 2.19 аннуляторный A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}), \mathbb{C}) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \ell_\infty(B_{J^*})$ также $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. Так как J — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективное банахово пространство и существует изометрическое вложение $\rho : J \to \ell_\infty(B_{J^*})$, то J является ретрактом $\ell_\infty(B_{J^*})$ в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$. Напомним, что J и $\ell_\infty(B_{J^*})$ аннуляторные модули, поэтому данная ретракция также является ретракцией в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. По предложению 2.12 A-модуль J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективен. $\square$

Предложение 3.6. *Пусть F — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) F — $\langle$ *метрически / топологически* $\rangle$ *плоский A-модуль;*

(ii) $\langle$ $A = \{0\}$ / *A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу* $\rangle$ *и F —* $\langle$ *метрически / топологически* $\rangle$ *плоское банахово пространство, то есть F является* $\langle$ *L_1-пространством / $\mathscr{L}_1$-пространством* $\rangle$.

Доказательство. Из $\langle$ [[4], теорема 1] / [[15], теорема VI.6] $\rangle$ мы знаем, что банахово пространство F^* $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективно тогда и только тогда, когда F есть $\langle$ L_1-пространство / $\mathscr{L}_1$-пространство $\rangle$. Теперь эквивалентность следует из предложений 3.5 и 2.21. $\square$

Сравним эти результаты с их аналогами из относительной теории. Из $\langle$ [[6], предложение 2.1.7] / [[6], предложение 2.1.10] $\rangle$ мы знаем, что аннуляторный модуль над банаховой алгеброй A относительно $\langle$ проективный / плоский $\rangle$ тогда и только тогда, когда A имеет $\langle$ правую единицу / правую ограниченную аппроксимативную единицу $\rangle$. В метрической и топологической теории, в отличие от относительной, гомологическая тривиальность аннуляторных модулей налагает ограничения не только на алгебру, но и на геометрию самого модуля. Эти геометрические ограничения запрещают существование некоторых гомологически лучших банаховых алгебр. Одно из важных свойств относительно $\langle$ стягиваемых / аменабельных $\rangle$ банаховых алгебр — это $\langle$ проективность / плоскость $\rangle$ всех (и в частности аннуляторных) левых банаховых модулей над ней. Резкое отличие метрической и топологической теории в том, что в них подобных алгебр не может быть.

Предложение 3.7. *Не существует банаховой алгебры A такой, что все A-модули $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоские. Тем более, не существует банаховых алгебр таких, что все A-модули $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективны.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечномерное $\mathscr{L}_\infty$-пространство X (например $\ell_\infty(\mathbb{N})$) как аннуляторный A-модуль. Из [[18], следствие 23.3(4)] мы знаем, что пространство X не является $\mathscr{L}_1$-пространством. Следовательно, по предложению 3.6 модуль X не является топологически плоским. По предложению 2.23 он также и не метрически плоский. Наконец, из предложения 2.26 следует, что X не является ни метрически, ни топологически проективным. $\square$

3.2 Гомологически тривиальные модули над банаховыми алгебрами со специальной геометрией

Цель данного параграфа — убедить читателя в том, что гомологически тривиальные модули над некоторыми банаховыми алгебрами имеют с этими алгебрами схожие геометрические свойства. Результаты следующего предложения в случае метрической теории были получены Гравеном в [19].

Предложение 3.8. *Пусть A — банахова алгебра изометрически изоморфная как банахово некоторому L_1-пространству. Тогда:*

(i) если P — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный A-модуль, то P — $\langle$ L_1-пространство / ретракт L_1-пространства $\rangle$;

(ii) если J — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль, то J — $\langle$ $C(K)$-пространство для некоторого стоунова пространства K / топологически инъективное банахово пространство $\rangle$;

(iii) если F — $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоский A-модуль, то F является $\langle$ L_1-пространством / $\mathscr{L}_1$-пространством $\rangle$.

Доказательство. Пусть (Θ', Σ', ν') такое пространство с мерой что $A_+ \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta', \nu')$.

(i) Так как P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль, то по предложению 2.3 он является ретрактом $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ в $\langle$ $A-\mathbf{mod}_1$ / $A-\mathbf{mod}$ $\rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_P, тогда по теореме Гротендика [[20], теорема 2.7.5]

$$A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta', \nu') \widehat{\otimes} L_1(B_P, \mu_c) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, P — ретракт L_1-пространства в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$. Осталось заметить, что любой ретракт L_1-пространства в $\mathbf{Ban}_1$ есть снова L_1-пространство [[10], теорема 6.17.3].

(ii) Так как J $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективный A-модуль, то по предложению 2.13 он является ретрактом $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))$ в $\langle$ $\mathbf{mod}_1 - A$ / $\mathbf{mod} - A$ $\rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_{J^*}, тогда

$$\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \left(A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*})\right)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \left(L_1(\Theta', \nu') \widehat{\otimes} L_1(B_P, \mu_c)\right)^*$$

$$\underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_\infty(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, J — ретракт L_∞-пространства в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$. Поскольку L_∞-пространства $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ инъективны, то таковы же и их ретракты J. Осталось напомнить, что каждое метрически инъективное банахово пространство суть $C(K)$-пространство для некоторого стоунова пространства K [[10], теорема 3.11.6].

(iii) Из $\langle$ [[4], теорема 1] / [[15], теорема VI.6] $\rangle$ мы знаем, что банахово пространство F^* инъективно в $\langle$ $\mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}$ $\rangle$ тогда и только тогда, когда F является $\langle$ L_1-пространством / $\mathscr{L}_1$-пространством $\rangle$. Остается применить результаты пункта (ii) и предложение 2.21. $\square$

Предложение 3.9. *Пусть A — банахова алгебра являющаяся $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда любой топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ A-модуль является $\langle$ $\mathscr{L}_1$-пространством / $\mathscr{L}_\infty$-пространством / $\mathscr{L}_1$-пространством $\rangle$.*

Доказательство. Если алгебра A есть $\mathscr{L}_1$-пространство, то такова же и A_+.

Пусть P — топологически проективный A-модуль. Тогда по предложению 2.3 он есть ретракт $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ в $A-\mathbf{mod}$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. Поскольку $\ell_1(B_P)$ есть $\mathscr{L}_1$-пространство, то таково же $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ как проективное тензорное произведение $\mathscr{L}_1$-пространств [[21], предложение 1]. Следовательно, P есть $\mathscr{L}_1$-пространство как ретракт $\mathscr{L}_1$-пространства [[22], предложение 1.28].

Пусть J — топологически инъективный A-модуль. Тогда по предложению 2.13 он есть ретракт $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{mod}_1-A}{\cong} \left(A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*})\right)^*$ в $\mathbf{mod} - A$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. Как мы показали выше, пространство $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*})$ является $\mathscr{L}_1$-пространством, тогда его сопряженное $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))$ есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство [[22], предложение 1.27]. Осталось заметить, что любой ретракт $\mathscr{L}_\infty$-пространства есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство [[22], предложение 1.28].

Наконец, пусть F — топологически плоский A-модуль, тогда F^* топологически инъективен по предложению 2.21. Из предыдущего абзаца следует, что F^* — это $\mathscr{L}_\infty$-пространство. По теореме VI.6 из [15] пространство F является $\mathscr{L}_1$-пространством. $\square$

Перейдем к обсуждению свойства Данфорда-Петтиса для гомологически тривиальных банаховых модулей. Прежде напомним, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если любой слабо компактный оператор из E в произвольное банахово пространство

F вполне непрерывен. Существует простое внутреннее описание этого свойства [[23], теорема 5.4.4]: банахово пространство E обладает свойством Данфорда-Петтиса если $\lim_n f_n(x_n) = 0$ для любых слабо сходящихся к 0 последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ и $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$. Отсюда легко доказать, что если банахово пространство E^* имеет свойство Данфорда-Петтиса, то его имеет и E. Любое $\mathscr{L}_1$-пространство и любое $\mathscr{L}_\infty$-пространство имеет свойство Данфорда-Петтиса [[22], предложение 1.30]. В частности, все L_1-пространства и $C(K)$-пространства имеют это свойство. Свойство Данфорда-Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [[24], предложение 13.44].

Ключевым для нас будет результат Бургейна о банаховых пространствах со специальной локальной структурой. В [[25], теорема 5] он доказал, что первое, второе и так далее сопряженное пространство банахова пространства с E_p-локальной структурой обладает свойством Данфорда-Петтиса. Здесь, E_p обозначает класс всех ℓ_∞-сумм p копий p-мерных ℓ_1-пространств для некоторого натурального p.

Предложение 3.10. *Пусть $\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство бесконечномерных банаховых L_1-пространств. Тогда банахово пространство $\bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет $(E_p, 1+\epsilon)$-локальную структуру для всех $\epsilon > 0$.*

Доказательство. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через $L_1^0(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)$ обозначим плотное подпространство в $L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)$ натянутое на характеристические функции измеримых множеств из Σ_λ. Обозначим $E := \bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, пусть $E_0 := \bigoplus_{00}\{L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — не обязательно замкнутое подпространство в E, состоящее из векторов с конечным числом ненулевых координат.

Зафиксируем $\epsilon > 0$ и конечномерное подпространство F в E. Так как F конечномерно, то существует ограниченный проектор $Q : E \to E$ на F. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\|Q\| < 1$ и $(1+\delta\|Q\|)(1-\delta\|Q\|)^{-1} < 1+\epsilon$. Заметим, что B_F компактно, потому что F конечномерно. Следовательно, существует конечная $\delta/2$-сеть $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_n} \subset E_0$ для B_F. Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ имеем $x_k = \bigoplus_0\{x_{k,\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, где $x_{k,\lambda} = \sum_{j=1}^{m_{k,\lambda}} d_{k,j,\lambda}\chi_{D_{j,k,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(d_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ и измеримых множеств $(D_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ конечной меры. Пусть $(C_{i,\lambda})_{i\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$ — множество всех попарных пересечений элементов из $(D_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ исключая множества меры 0. Тогда $x_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{m_\lambda} c_{i,k,\lambda}\chi_{C_{i,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(c_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$. Обозначим $\Lambda_k = \{\lambda \in \lambda : x_{k,\lambda} \neq 0\}$. По определению пространства E_0 множество Λ_k конечно для каждого $k \in \mathbb{N}_n$. Рассмотрим конечное множество $\Lambda_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n}\Lambda_k$. Так как пространство $L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda)$ бесконечномерно, то мы можем добавить к семейству $\{\chi_{C_{i,\lambda}} : i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}\}$ любое конечное число дизъюнктных множеств положительной конечной меры. Поэтому, далее считаем, что $m_\lambda = \operatorname{Card}(\Lambda_0)$ для всех $\lambda \in \Lambda_0$. Для каждого $\lambda \in \Lambda_0$ корректно определен проектор

$$P_\lambda : L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) \to L_1(\Omega_\lambda,\mu_\lambda) : x_\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{m_\lambda}\left(\mu(C_{i,\lambda})^{-1}\int_{C_{i,\lambda}} x_\lambda(\omega)d\mu_\lambda(\omega)\right)\chi_{C_{i,\lambda}}.$$

Легко проверить, что $P_\lambda(\chi_{C_{i,\lambda}}) = \chi_{C_{i,\lambda}}$ для всех $i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}$. Следовательно, $P_\lambda(x_{k,\lambda}) = x_{k,\lambda}$ для всех $k \in \mathbb{N}_n$. Так как множества $(C_{i,\lambda})_{i\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$ не пересекаются и имеют положительную меру, то $\operatorname{Im}(P_\lambda) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda})$. Для $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ мы положим $P_\lambda = 0$ и рассмотрим проектор $P := \bigoplus_0\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По построению он сжимающий с образом $\operatorname{Im}(P) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_0\{\ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda}) : \lambda \in \Lambda_0\} \in E_p$. Рассмотрим произвольный вектор $x \in B_F$, тогда существует номер $k \in \mathbb{N}_n$ такой, что $\|x - x_k\| \leq \delta/2$. Тогда $\|P(x) - x\| = \|P(x) - P(x_k) + x_k - x\| \leq \|P\|\|x - x_k\| + \|x_k - x\| \leq \delta$.

Построив проекторы P и Q, рассмотрим оператор $I := 1_E + PQ - Q$. Очевидно, $\|1_E - I\| = \|PQ - Q\| \leq \delta\|Q\|$. Следовательно I — изоморфизм по стандартному трюку с рядами фон Ноймана [[23], предложение A.2]. Более того, $I^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty}(1_E - I)^p$, поэтому

$$\|I^{-1}\| \leq \sum_{p=0}^{\infty}\|1_E - I\|^p \leq \sum_{p=0}^{\infty}(\delta\|Q\|)^p = (1 - \delta\|Q\|)^{-1}, \quad \|I\| \leq \|1_E\| + \|I - 1_E\| \leq 1 + \delta\|Q\|.$$

Заметим, что $PI = P + P^2Q - PQ = P + PQ - PQ = P$, поэтому для всех $x \in F$ выполнено

$$I(x) = x + P(Q(x)) - Q(x) = x + P(x) - x = P(x) = P(P(x)) = P(I(x))$$

и $x = (I^{-1}PI)(x)$. Последнее означает, что F содержится в образе ограниченного проектора $R = I^{-1}PI$. Обозначим этот образ через F_0 и рассмотрим биограничение $I_0 = I|_{F_0}^{\mathrm{Im}(P)}$ изоморфизма I. Так как $\|I_0\|\|I_0^{-1}\| \leq \|I\|\|I^{-1}\| \leq (1+\delta\|Q\|)(1-\delta\|Q\|)^{-1} < 1+\epsilon$, то $d_{BM}(F_0, \mathrm{Im}(P)) < 1+\epsilon$. Таким образом, мы показали, что для любого конечномерного подпространства в E существует подпространство F_0 в E содержащее F такое, что $d_{BM}(F_0, U) < 1+\epsilon$ для некоторого $U \in E_p$. Это значит, что E имеет $(E_p, 1+\epsilon)$-локальную структуру. □

Предложение 3.11. *Пусть $\{(\Omega_\lambda, \Sigma_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство пространств с мерой. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ обладает свойством Данфорда-Петтиса.*

Доказательство. Сначала предположим, что пространства $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ бесконечномерны для всех $\lambda \in \Lambda$. В этом случае из предложения 3.10 мы знаем, что банахово пространство $F := \bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет E_p-локальную структуру. Тогда по теореме 5 из [25] первое, второе и так далее сопряженное пространство пространства F обладают свойством Данфорда-Петтиса. Как следствие, мы получаем, что

$$F^{**} = \left(\bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}\right)^{**} \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**} : \lambda \in \Lambda\}$$

имеет свойство Данфорда-Петтиса. Из [[18], предложение B10] мы знаем, что каждое L_1-пространство 1-дополняемо в своем втором сопряженном. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через P_λ обозначим соответствующий проектор в $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**}$. Таким образом $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 1-дополняемо в $F^{**} \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**} : \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Так как F^{**} имеет свойство Данфорда-Петтиса, то из [[24], предложение 13.44] следует, что это свойство имеет и дополняемое в F^{**} подпространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$.

Теперь рассмотрим общий случай. Очевидно, любое L_1-пространство можно рассматривать как 1-дополняемое подпространство некоторого бесконечномерного L_1-пространства. Как следствие, пространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ будет 1-дополняемо в $\bigoplus_\infty$-сумме бесконечномерных L_1-пространств. Как было показано выше, такая сумма обладает свойством Данфорда-Петтиса, а значит, Осталось вспомнить, что это свойство Данфорда-Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [[24], предложение 13.44]. □

Предложение 3.12. *Пусть E — $\mathscr{L}_\infty$-пространство и Λ — произвольное множество. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty\{E^* : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса.*

Доказательство. Поскольку E — это $\mathscr{L}_\infty$-пространство, то E^* дополняемо в некотором L_1-пространстве [[14], предложение 7.4]. То есть существует ограниченный линейный проектор $P : L_1(\Omega, \mu) \to L_1(\Omega, \mu)$ с образом изоморфным в **Ban** пространству E. В этом случае $\bigoplus_\infty\{E^* : \lambda \in \Lambda\}$ дополняемо в $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega, \mu) : \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty\{P : \lambda \in \Lambda\}$. Пространство $\bigoplus_\infty\{L_1(\Omega, \mu) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса по предложению 3.11. Тогда из [[24], предложение 13.44] следует, что этим свойством обладает и его дополняемое подпространство $\bigoplus_\infty\{E^* : \lambda \in \Lambda\}$. □

Теорема 3.13. *Пусть A — банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда топологически проективные, инъективные и плоские A-модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.*

Доказательство. Предположим, что A является $\mathscr{L}_1$-пространством. Заметим, что $\mathscr{L}_1$- и $\mathscr{L}_\infty$-пространства имеют свойство Данфорда-Петтиса [[22], предложение 1.30]. Теперь результат следует из предложения 3.9.

Предположим A является $\mathscr{L}_\infty$-пространством, тогда такова же и A_+. Пусть J — топологически инъективный A-модуль, тогда по предложению 2.13 он ретракт

$$\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \left(A_+ \widehat{\otimes}\, \ell_1(B_{J^*})\right)^* \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \left(\bigoplus\nolimits_1 \{A_+ : \lambda \in B_{J^*}\}\right)^*$$

$$\underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty \{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\}$$

в $\mathbf{mod} - A$ и тем более в **Ban**. По предложению 3.12 последний модуль имеет свойство Данфорда-Петтиса. Так как J его ретракт, то он тоже обладает этим свойством [[24], предложение 13.44].

Если F топологически плоский A-модуль, то F^* топологически инъективен по предложению 2.21. Из предыдущего абзаца мы знаем, что тогда F^* имеет свойство Данфорда-Петтиса и, как следствие, этим свойством обладает сам модуль F.

Пусть P — топологически проективный A-модуль. По предположению 2.26 он топологически плоский и тогда из предыдущего абзаца мы видим, что P имеет свойство Данфорда-Петтиса. □

Следствие 3.14. *Пусть A — банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда не существует топологически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A-модуля. Тем более не существует метрически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A-модуля.*

Доказательство. Из теоремы 3.13 мы знаем, что любой топологически инъективный A-модуль имеет свойство Данфорда-Петтиса. С другой стороны не существует бесконечномерного рефлексивного банахова пространства с этим свойством [[24], примечание после предложения 13.42]. Итак, мы получили желаемый результат в контексте топологической инъективности. Так как пространство, сопряженное к рефлексивному снова рефлексивно, то из предложения 2.21 следует результат для топологической плоскости. Осталось вспомнить, что по предложению 2.26 каждый топологически проективный модуль является топологически плоским. Чтобы доказать последнее утверждение вспомним, что по предложению ⟨ 2.4 / 2.14

/ 2.23 $\rangle$ метрическая $\langle$ проективность / инъективность / плоскость $\rangle$ влечет топологическую $\langle$ проективность / инъективность / плоскость $\rangle$. $\square$

Стоит сказать, что в относительной теории существуют примеры рефлексивных бесконечномерных относительно проективных, инъективных и плоских модулей над банаховыми алгебрами, являющимися $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространствами. Приведем два примера. Первый связан с сверточной алгеброй $L_1(G)$ локально компактной группы G с мерой Хаара. Эта алгебра является $\mathscr{L}_1$-пространством. В [[12], §6] и [26] было доказано, что для для $1 < p < +\infty$ банахов $L_1(G)$-модуль $L_p(G)$ является относительно $\langle$ проективным / инъективным / плоским $\rangle$ тогда и только тогда, когда группа G $\langle$ компактна / аменабельна / аменабельна $\rangle$. Заметим, что любая компактная группа аменабельна [[27], предложение 3.12.1], и поэтому для компактной группы G модуль $L_p(G)$ будет относительно проективным инъективным и плоским для всех $1 < p < +\infty$. Второй пример связан с алгеброй $c_0(\Lambda)$ для бесконечного множества Λ. Это $\mathscr{L}_\infty$-пространство. Алгебра $c_0(\Lambda)$ относительно бипроективна и аменабельна, поэтому $c_0(\Lambda)$-модули $\ell_p(\Lambda)$ для $1 < p < \infty$ всегда являются относительно проективными, инъективными и плоскими.

Список литературы

[1] А.Я. Хелемский. Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей. *Матем. сб.*, 204(7), 2013.

[2] С.М. Штейнер. Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей. *Вестник Самарского государственного университета*, 9/1(110):49–57, 2013.

[3] G. Köthe. Hebbare lokalkonvexe räume. *Mathematische Annalen*, 165(3):181–195, 1966.

[4] A. Grothendieck. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L_1. *Canad. J. Math*, 7:552–561, 1955.

[5] А.Я. Хелемский. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* М.:Наука, 1989.

[6] P. Ramsden. *Homological properties of semigroup algebras.* PhD thesis, The University of Leeds, 2009.

[7] Немеш Н. Т. Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр. *Математические заметки*, 99(4):526–536, 2016.

[8] А.Я. Хелемский. *Гомология в банаховых и топологических алгебрах.* М.:изд-во МГУ, 1986.

[9] M.C. White. Injective modules for uniform algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):155–184, 1996.

[10] H.E. Lacey. *The isometric theory of classical Banach spaces.* Springer, 1974.

[11] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. *Handbook of the geometry of Banach spaces*, volume 2. Elsevier, 2001.

[12] H.G. Dales and M.E. Polyakov. Homological properties of modules over group algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 89(2):390–426, 2004.

[13] A.Ya. Helemskii. Metric version of flatness and hahn-banach type theorems for normed modules over sequence algebras. *Studia mathematica*, 206(2):135–160, 2011.

[14] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski. Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications. *Studia Mathematica*, 29(3):275–326, 1968.

[15] C.P. Stegall and J.R. Retherford. Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to $\mathscr{L}_1$-and $\mathscr{L}_\infty$-spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 163:457–492, 1972.

[16] Ozawa N. Blecher D. P. Real positivity and approximate identities in banach algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 277(1):1–59, 2015.

[17] D.P. Blecher and C.J. Read. Operator algebras with contractive approximate identities. *Journal of Functional Analysis*, 261(1):188–217, 2011.

[18] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176. Elsevier, 1992.

[19] A.W.M. Graven. Injective and projective banach modules. In *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, volume 82, pages 253–272. Elsevier, 1979.

[20] А.Я. Хелемский. *Лекции по функциональному анализу.* МЦНМО, 2015.

[21] M. González and J. Gutiérrez. The dunford–pettis property on tensor products. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 131, pages 185–192. Cambridge Univ Press, 2001.

[22] J. Bourgain. *New classes of $\mathscr{L}_p$-spaces.* Springer, 1981.

[23] F. Albiac and N.J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233. Springer, 2006.

[24] M. Fabian and P. Habala. *Banach space theory.* Springer, 2011.

[25] J. Bourgain. On the dunford-pettis property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 81(2):265–272, 1981.

[26] G. Racher. Injective modules and amenable groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88(4):1023–1031, 2013.

[27] J.-P. Pier. *Amenable locally compact groups.* Wiley-Interscience, 1984.