

Относительная проективность модулей L_p

Н. Т. Немеш

В работе даны критерии относительной проективности L_p -пространств рассмотренных как левые банаховы модули над алгеброй ограниченных измеримых функций ($1 \leq p \leq +\infty$) и алгеброй непрерывных исчезающих в бесконечности функций ($1 \leq p < +\infty$).

Библиография: 12 названий.

1. Введение

Один из основных вопросов банаховой гомологии звучит следующим образом: какова гомологическая размерность данной банаховой алгебры A ? Последние результаты по этой теме можно найти в [1]. Для вычисления гомологических размерностей необходимо уметь отвечать на другой вопрос: является ли данный банахов A -модуль проективным? Для многих модулей функционального анализа ответы известны. При этом все еще есть примеры классических модулей анализа, для которых данный вопрос не решен, например L_p -пространства. Мы будем рассматривать пространства Лебега как левые банаховы модули над алгеброй исчезающих на бесконечности непрерывных функций, определенных на локально компактном хаусдорфовом пространстве, и как модули над алгеброй ограниченных измеримых функций. Для этих пространств мы дадим необходимые и достаточные условия их относительной проективности. Особый интерес представляет критерий относительной проективности модуля L_∞ . Дело в том, что один из основных результатов банаховой гомологии — теорема о глобальной размерности [[2], предложение V.2.21] основывается на том факте, что гомологическая размерность модуля ограниченных последовательностей на алгеброй сходящихся последовательностей равна 2. В частности этот модуль не проективен. Как мы увидим, это поведение типично для большинства модулей L_∞ . Перед тем, как перейти к основной части статьи, напомним несколько определений.

Пусть M — подмножество множества N , тогда χ_M будет обозначать индикаторную функцию множества M . Для произвольной функции $f : N \rightarrow L$ через $f|_M$ мы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00447).

будем обозначать ее ограничение на M . Символ 1_M будет обозначать тождественное отображение на M .

Пусть S — произвольное топологическое пространство и M — его подмножество. Тогда через $\text{cl}_S(M)$ и $\text{int}_S(M)$ мы будем обозначать замыкание и внутренность M в S .

Все банаховы пространства в этой статье рассматриваются над полем комплексных чисел. Для заданных банаховых пространств X и Y через $X \oplus_1 Y$ мы будем обозначать их ℓ_1 -сумму, а через $X \hat{\otimes} Y$ их проективное тензорное произведение. Будем говорить, что банахово пространство X дополняемо в Y , если X — подпространство в Y , и существует ограниченный линейный оператор $P : Y \rightarrow Y$ такой что $P|_X = 1_X$ и $\text{Im}(P) = X$. Для $1 \leq p \leq +\infty$ и заданного пространства с мерой (X, μ) через $L_p(X, \mu)$ мы будем обозначать банахово пространство классов эквивалентности p -интегрируемых (или существенно ограниченных, если $p = +\infty$) функций на X . Элементы $L_p(X, \mu)$ будут обозначаться через $[f]$. Отметим, что все L_p -пространства обладают свойством аппроксимации.

Для заданной банаховой алгебры A через $A_+ := A \oplus_1 \mathbb{C}$ мы будем обозначать ее стандартную унитизацию. Мы будем рассматривать только левые банаховы модули с сжимающим билинейным оператором внешнего умножения $\cdot : A \times X \rightarrow X$. Если A — банахова алгебра с единицей e , то банахов A -модуль X называется унитарным, если $e \cdot x = x$ для всех $x \in X$. Для заданного банахова A -модуля X его существенной частью X_{ess} называется замкнутая линейная оболочка множества $A \cdot X$. Мы будем называть модуль X существенным, если $X = X_{ess}$. Очевидно, любой унитарный банахов модуль существенный. Пусть X и Y — два банаховых A -модуля, тогда отображение $\phi : X \rightarrow Y$ будем называть A -морфизмом, если оно является непрерывным морфизмом A -модулей. Банаховы A -модули и A -морфизмы образуют категорию, которую мы будем обозначать через $A - \mathbf{mod}$.

Категория $A - \mathbf{mod}$ имеет свое понятие проективности. Произвольный A -морфизм $\xi : X \rightarrow Y$ будем называть допустимым если существует правый обратный ограниченный линейный оператор $\eta : Y \rightarrow X$, т.е., если $\xi\eta = 1_Y$. Банахов A -модуль P будем называть относительно проективным, если для любого допустимого A -морфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого A -морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует A -морфизм $\psi : P \rightarrow X$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \psi & \downarrow \xi \\ P & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

коммутативной. Вместо проверки по определению можно показать, что банахов A -модуль P относительно проективен, предъявив A -морфизм $\sigma : P \rightarrow A_+ \hat{\otimes} P$, являющийся правым обратным каноническому A -морфизму $\pi_P^+ : A_+ \hat{\otimes} P \rightarrow P : (a \oplus_1 z) \hat{\otimes} x \mapsto a \cdot x + zx$ [[2], предложение IV.1.1]. Если банахов A -модуль P существенный, то он проективен тогда и только тогда, когда A -морфизм $\pi_P : A \hat{\otimes} P \rightarrow P : a \hat{\otimes} x \mapsto a \cdot x$ обладает правым обратным A -морфизмом [[2], предложение IV.1.2].

2. Необходимые условия относительной проективности

В этом параграфе мы покажем, что для относительно проективного A -модуля X его существенная часть дополняема и A -значные A -морфизмы разделяют точки существенной части. Эти необходимые условия будут играть ключевую роль в статье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X — банахов A -модуль и E — банахово пространство. Пусть $j_E : A_+ \widehat{\otimes} E \rightarrow (A \widehat{\otimes} E) \oplus_1 E$ обозначает естественный изоморфизм. Тогда для любого A -морфизма $\sigma : X \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} E$ существуют ограниченные линейные операторы $\sigma_1 : X \rightarrow A \widehat{\otimes} E$, $\sigma_2 : X \rightarrow E$ такие, что

- (i) $j_E(\sigma(x)) = \sigma_1(x) \oplus_1 \sigma_2(x)$ для всех $x \in X$;
- (ii) $\sigma_1(a \cdot x) = a \cdot \sigma_1(x) + a \widehat{\otimes} \sigma_2(x)$ для всех $x \in X$ и $a \in A$;
- (iii) $\sigma_2(a \cdot x) = 0$ для всех $x \in X$ и $a \in A$.

Как следствие, $\sigma_1|_{X_{ess}}$ — A -морфизм и $\sigma_2|_{X_{ess}} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим ограниченные линейные операторы $q_1 : A_+ \widehat{\otimes} E \rightarrow A \widehat{\otimes} E : (a \oplus_1 z) \widehat{\otimes} x \mapsto a \widehat{\otimes} x$ и $q_2 : A_+ \widehat{\otimes} E \rightarrow E : (a \oplus_1 z) \widehat{\otimes} x \mapsto zx$. Определим отображения $\sigma_1 = q_1 \sigma$, $\sigma_2 = q_2 \sigma$. Очевидно, что $j_E = q_1 \oplus_1 q_2$, поэтому $j_E(\sigma(x)) = \sigma_1(x) \oplus_1 \sigma_2(x)$ для всех $x \in X$. Заметим, что $a \cdot u = a \cdot q_1(u) + a \widehat{\otimes} q_2(u)$ для всех $a \in A$ и $u \in A_+ \widehat{\otimes} E$. Поскольку σ — A -морфизм, легко проверить, что $\sigma_1(a \cdot x) = a \cdot \sigma_1(x) + a \widehat{\otimes} \sigma_2(x)$ и $\sigma_2(a \cdot x) = 0$ для всех $a \in A$, $x \in X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X — относительно проективный банахов A -модуль. Тогда X_{ess} дополняемо в X как банахово пространство.

Доказательство. Поскольку X относительно проективен, существует A -морфизм $\sigma : X \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} X$ такой, что $\pi_X^+ \sigma = 1_X$. Пусть σ_1 и σ_2 — ограниченные линейные операторы из предложения 1. Теперь рассмотрим A -морфизм $\pi_X : A \widehat{\otimes} X \rightarrow X : a \widehat{\otimes} x \mapsto a \cdot x$, тогда для всех $x \in X$ выполнено $x = \pi_X^+(\sigma(x)) = \pi_X(\sigma_1(x)) + \sigma_2(x)$. Рассмотрим ограниченный линейный оператор $\eta = \pi_X \sigma_1$. Так как $\sigma_2|_{X_{ess}} = 0$, то $\eta|_{X_{ess}} = 1_X$. Более того, $\text{Im}(\eta) \subset \text{Im}(\pi_X) \subset X_{ess}$, следовательно η — ограниченный линейный проектор X на X_{ess} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A — банахова алгебра и X — относительно проективный банахов A -модуль. Допустим, что A или X обладает свойством аппроксимации. Тогда

- (i) для любого ненулевого $x \in X$ существует A -морфизм $\phi : X \rightarrow A_+$ такой, что $\phi(x) \neq 0$;
- (ii) для любого ненулевого $x \in X_{ess}$ существует A -морфизм $\psi : X_{ess} \rightarrow A$ такой, что $\psi(x) \neq 0$.

Доказательство. (i) См. [[2], следствие IV.4.5].

(ii) Рассмотрим A -морфизм ϕ построенный в пункте (i). Очевидно, $\phi(X_{ess}) \subset A$, поэтому достаточно положить $\psi = \phi|_{X_{ess}}$.

3. Предварительные сведения по общей теории меры

Всестороннее изучение общих пространств с мерой можно найти в [4]. Мы будем использовать определения из этой монографии.

Пусть X — произвольное множество. Под мерой мы будем понимать счетно аддитивную функцию множеств со значениями в $[0, +\infty]$, определенную на σ -алгебре Σ измеримых подмножеств множества X . Если F — измеримое множество, то корректно определены меры $\mu^F : \Sigma \rightarrow [0, +\infty] : E \mapsto \mu(E \cap F)$ и $\mu_F : \Sigma_F \rightarrow [0, +\infty] : E \mapsto \mu(E)$, где $\Sigma_F = \{E \in \Sigma : E \subset F\}$. Измеримое множество A называется атомом, если $\mu(A) > 0$ и для каждого измеримого подмножества $B \subset A$ верно или $\mu(B) = 0$ или $\mu(A \setminus B) = 0$. Мера μ называется чисто атомической, если каждое измеримое подмножество положительной меры содержит атом. Мера μ называется полуконечной, если для любого измеримого множества A бесконечной меры существует измеримое подмножество в A конечной положительной меры. Семейство \mathcal{D} измеримых множеств конечной меры называется разложением X , если для любого измеримого множества E верно $\mu(E) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \mu(E \cap D)$ и множество F измеримо если $F \cap D$ измеримо для всех $D \in \mathcal{D}$. Наконец, мера μ называется разложимой, если она полуконечна и существует разложение X . На самом деле пространство с мерой разложимо тогда и только тогда, когда оно является дизъюнктивным объединением пространств конечной меры [4], упражнение 214X (i)]. Большинство мер встречающихся в функциональном анализе разложимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A — атом в пространстве с мерой (X, μ) , тогда измеримое множество $C \subset A$ называется ядром A , если C — атом и единственные измеримые подмножества в C — это \emptyset и C . Атом A называется твердым, если у него есть ядро. Очевидно, если ядро существует, то оно единственно, и в этом случае мы будем обозначать ядро через A^\bullet .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть (X, μ) — непустое пространство с конечной мерой такое, что единственное множество меры 0 в X — это пустое множество. Тогда (X, μ) — чисто атомическое пространство и каждый атом твердый.

Доказательство. Пусть E — измеримое подмножество положительной меры. Пусть $x \in E$, тогда рассмотрим величину $c := \inf\{\mu(F) : x \in F \in \Sigma, F \subset E\}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $E_n \in \Sigma$ такое, что $x \in E_n \subset E$ и $\mu(E_n) < c + 2^{-n}$. Определим $A = \bigcap\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$, тогда $x \in A \in \Sigma$ и $\mu(A) = c$. По построению A непусто, поэтому $\mu(A) > 0$. Пусть B — измеримое подмножество в A . Если $x \in A \setminus B$, то $c \leq \mu(A \setminus B) \leq \mu(A) = c$, т.е. $\mu(B) = 0$. Аналогично, если $x \in B$ мы получаем $\mu(A \setminus B) = 0$. Таким образом, $A \subset E$ — атом. Поскольку E произвольно, (X, μ) чисто атомическое пространство.

Теперь пусть A — атом в (X, μ) . Если $B \in \Sigma$ и $B \subset A$, то или $\mu(B)$ или $\mu(A \setminus B) = 0$. Из предположения на (X, μ) мы получаем, что или B или $A \setminus B$ пусто. Следовательно $A^\bullet = A$.

4. Относительная проективность $B(\Sigma)$ -модулей $L_p(X, \mu)$

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Через $B(\Sigma)$ мы будем обозначать алгебру измеримых ограниченных функций с \sup нормой. В этом параграфе мы дадим критерий относительной проективности левых $B(\Sigma)$ -модулей $L_p(X, \mu)$. Говоря неформально, все такие модули выглядят как $\ell_\infty(\Lambda)$ -модули $\ell_p(\Lambda)$ для некоторого индексного множества Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $L_p(X, \mu)$ — относительно проективный $B(\Sigma)$ -модуль. Тогда для любого измеримого множества $B \subset X$ банахов $B(\Sigma)$ -модуль $L_p(X, \mu^B)$ относительно проективен.

Доказательство. Для $B(\Sigma)$ -морфизмов $\pi : L_p(X, \mu) \rightarrow L_p(X, \mu^B) : [f] \mapsto [f]\chi_B$ и $\sigma : L_p(X, \mu^B) \rightarrow L_p(X, \mu) : [f] \mapsto [f]$ легко проверить, что выполнено $\pi\sigma = 1_{L_p(X, \mu^B)}$. Другими словами, $L_p(X, \mu^B)$ — ретракт $L_p(X, \mu)$ в $B(\Sigma)$ — **mod**. Теперь результат следует из [[7], предложение VII.1.6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть (X, μ) — разложимое пространство с мерой и пусть $L_p(X, \mu)$ — относительно проективный $B(\Sigma)$ -модуль. Тогда (X, μ) является дизъюнктивным объединением твердых атомов конечной меры.

Доказательство. Пусть \mathcal{D} — разложение X на измеримые подмножества конечной меры. Зафиксируем $D \in \mathcal{D}$ и введем обозначение $\nu := \mu^D$. По предложению 5 банахов $B(\Sigma)$ -модуль $L_p(X, \nu)$ относительно проективен. Рассмотрим произвольное множество $E \in \Sigma$ положительной меры ν . Так как мера ν конечна, то конечно и $\nu(E)$. Тогда $[f] := [\chi_E]$ — корректно определенный ненулевой элемент в $L_p(X, \nu)$. Так как $B(\Sigma)$ — унитарная алгебра, то модуль $L_p(X, \nu)$ существенный. Теперь из предложения 3 мы получаем $B(\Sigma)$ -морфизм $\psi : L_p(X, \nu) \rightarrow B(\Sigma)$ такой, что $a := \psi([f]) \neq 0$. Следовательно, множество $F := a^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \in \Sigma$ непусто. Отметим, что $[f] = [f]\chi_E$, поэтому $a = \psi([f]\chi_E) = \psi([f])\chi_E = a\chi_E$. Значит, $a|_{X \setminus E} = 0$ и $F \subset E$. Рассмотрим произвольное измеримое множество $A \subset F$ с нулевой ν мерой. Тогда $[\chi_A]$ — нулевой элемент в $L_p(X, \nu)$ и $[\chi_A] = [\chi_E]\chi_A$. Следовательно, $a\chi_A = \psi([\chi_E])\chi_A = \psi([\chi_E]\chi_A) = \psi([\chi_A]) = 0$. Так как $A \subset F$ и a не равно нулю ни в одной точке множества F , то $A = \emptyset$. Поскольку $F \neq \emptyset$, то из предложения 4 мы получаем, что пространство с мерой (F, ν_F) имеет твердый атом. Таким образом, мы показали, что любое измеримое множество E положительной ν меры содержит твердый атом. Тогда из стандартного приема с леммой Цорна мы получаем, что (X, μ^D) — дизъюнктивное объединение твердых атомов. Такой же вывод верен и для (X, μ_D) . Так как мера μ_D конечна, то конечен каждый ее атом. Поскольку D произвольно, то вывод теоремы следует из [[4], упражнение 214X (i)].

Пусть (X, μ) — пространство с мерой и A — измеримое подмножество конечной положительной меры. Тогда корректно определен ограниченный линейный функционал $m_A : B(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \mu(A)^{-1} \int_A a(x) d\mu(x)$ нормы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть (X, μ) — дизъюнктивное объединение семейства \mathcal{A} твердых атомов конечной меры. Тогда

- (i) множество $X^\bullet := \bigcup \{A^\bullet : A \in \mathcal{A}\}$ измеримо и $\mu(X \setminus X^\bullet) = 0$;
- (ii) для любого атома $A \in \mathcal{A}$ и любых функций $a, b \in B(\Sigma)$ выполнено $a|_{A^\bullet} = m_{A^\bullet}(a)$ и $m_{A^\bullet}(ab) = m_{A^\bullet}(a)m_{A^\bullet}(b)$;
- (iii) для любой функции $a \in B(\Sigma)$ существует функция $b \in B(\Sigma)$ такая, что $b|_{X^\bullet} = 0$ и выполнено поточечное равенство $a = \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(a)\chi_{A^\bullet} + b$;
- (iv) для любой функции $[f] \in L_p(X, \mu)$ верно $[f] = [\sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f)\chi_{A^\bullet}]$.

Доказательство. (i) Так как \mathcal{A} — разложение X , то (X, μ) — разложимое пространство с мерой и X^\bullet измеримо. Заметим, что дизъюнктивные множества $A \setminus A^\bullet$ для $A \in \mathcal{A}$ имеют нулевую меру, а значит и их объединение $X \setminus X^\bullet$ имеет нулевую меру.

(iii) Зафиксируем $a \in B(\Sigma)$ и $A \in \mathcal{A}$. Так как A^\bullet содержит только два измеримых подмножества, то a — константа на A^\bullet . Значит, $a|_{A^\bullet} = m_{A^\bullet}(a)$. Как следствие, для измеримой функции $b = a - \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(a) \chi_{A^\bullet}$ мы имеем $b|_{X^\bullet} = 0$.

(iv) Результат немедленно следует из пункта (iii).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и (X, μ) — дизъюнктное объединение семейства твердых атомов конечной меры. Тогда $B(\Sigma)$ -модуль $L_p(X, \mu)$ относительно проективен.

Доказательство. Пусть \mathcal{A} обозначает множество твердых атомов в X .

Рассмотрим случай $p = +\infty$. Определим ограниченный линейный оператор

$$\rho : L_\infty(X, \mu) \rightarrow B(\Sigma) : [f] \mapsto \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f) \chi_{A^\bullet}.$$

Из пункта (ii) предложения 7 следует, что ρ является $B(\Sigma)$ -морфизмом. Следовательно, $\sigma = \rho \hat{\otimes} 1_{L_\infty(X, \mu)}$ тоже является $B(\Sigma)$ -морфизмом. Из пункта (iv) предложения 7 мы получаем, что $\pi_{L_\infty(X, \mu)} \sigma = 1_{L_\infty(X, \mu)}$. Так как $B(\Sigma)$ -модуль $L_\infty(X, \mu)$ унитарный, то из [2], предложение IV.1.2] следует его относительная проективность.

Рассмотрим случай $1 \leq p < +\infty$. Пусть $[f] \in L_p(X, \mu)$, тогда из пункта (iv) предложения 7 мы имеем $[f] = [\sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f) \chi_{A^\bullet}]$. Более того, поскольку $p < +\infty$ выполнено $[f] = \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f) [\chi_{A^\bullet}]$ в $L_p(X, \mu)$. Заметим, что последняя сумма содержит не более чем счетное количество ненулевых слагаемых. Через \mathcal{A}_f мы обозначим индексы, для которых эти слагаемые ненулевые. Рассмотрим произвольное конечное подмножество $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}_f$, и введем обозначения $x_k = \chi_{A_k^\bullet}$, $y_k = m_{A_k^\bullet}(f) [\chi_{A_k^\bullet}]$ для $k \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $\omega \in \mathbb{C}$ — любой корень n -ой степени из 1. Так как \mathcal{F} — дизъюнктное семейство, то $\|\sum_{k=1}^n \omega^k x_k\|_{B(\Sigma)} \leq 1$ и $\|\sum_{k=1}^n \omega^k y_k\|_{L_p(X, \mu)} \leq \| [f] \|_{L_p(X, \mu)}$. Следовательно, из [2], предложение II.2.44] получаем, что для любой функции $[f] \in L_p(X, \mu)$ корректно определен элемент $\sigma_f = \sum_{A \in \mathcal{A}_f} x_k \hat{\otimes} y_k = \sum_{A \in \mathcal{A}} x_k \hat{\otimes} y_k \in B(\Sigma) \hat{\otimes} L_p(X, \mu)$ нормы не более $\|f\|_{L_p(X, \mu)}$. Используя пункт (ii) предложения 7, легко проверить, что отображение

$$\sigma : L_p(X, \mu) \rightarrow B(\Sigma) \hat{\otimes} L_p(X, \mu) : [f] \mapsto \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f) \chi_{A^\bullet} \hat{\otimes} [\chi_{A^\bullet}]$$

является корректно определенным $B(\Sigma)$ -морфизмом нормы не более 1. Из пункта (iv) предложения 7 мы получаем, что $\pi_{L_p(X, \mu)} \sigma = 1_{L_p(X, \mu)}$. Поскольку $B(\Sigma)$ -модуль $L_p(X, \mu)$ унитарный, то из [2], предложение IV.1.2] следует его относительная проективность.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, μ) — разложимое пространство с мерой и $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $L_p(X, \mu)$ — относительно проективный $B(\Sigma)$ -модуль;
- (ii) (X, μ) — дизъюнктное объединение твердых атомов конечной меры.

Доказательство. Результат следует из предложений 6 и 8.

5. Предварительные сведения по топологической теории меры

Подробное обсуждение мер на топологических пространствах можно найти в [5]. С этого момента мы рассматриваем меры μ , определенные на σ -алгебре $Bor(S)$

борелевских множеств топологического пространства S . Через $\text{supp}(\mu)$ мы будем обозначать носитель μ . Мера μ называется

- (i) строго положительной, если $\text{supp}(\mu) = S$;
- (ii) с полным носителем, если $\mu(S \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$;
- (iii) локально конечной, если каждая точка в S имеет окрестность конечной меры;
- (iv) внутренне компактно регулярной, если для всех $E \in \text{Bor}(S)$ выполнено равенство $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ компакт}\}$;
- (v) внешне открыто регулярной, если для всех $E \in \text{Bor}(S)$ выполнено равенство $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ открыто}\}$;
- (vi) внутренне открыто регулярной, если для всех $E \in \text{Bor}(S)$ выполнено равенство $\mu(E) = \sup\{\mu(U) : U \subset E, U \text{ открыто}\}$;
- (vii) остаточной, если $\mu(E) = 0$ для всех борелевских нигде не плотных множеств E ;
- (viii) нормальной, если она остаточная и с полным носителем.

Если мера μ локально конечна, то все компактные множества имеют конечную меру [[5], предложение 411G (a)]. Любая конечная внутренне компактно регулярная мера внешне открыто регулярна [[5], предложение 411X (a)]. Очевидно, что мера μ^B внутренне компактно регулярна для любого $B \in \text{Bor}(S)$, когда мера μ внутренне компактно регулярна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство и μ — борелевская мера на S . Тогда

- (i) мера μ внутренне открыто регулярна тогда и только тогда, когда $\mu(E) = \mu(\text{int}_S(E))$ для всех $E \in \text{Bor}(S)$;
- (ii) если мера μ конечна и внутренне открыто регулярна, то μ — остаточная мера и $\mu(E) = \mu(\text{int}_S(E)) = \mu(\text{cl}_S(E))$ для всех $E \in \text{Bor}(S)$;
- (iii) если мера μ конечна, внутренне компактно регулярна и внутренне открыто регулярна, то μ — нормальная мера.

Доказательство. (i) Достаточно заметить, что супремум в определении внутренне открыто регулярной меры достигается на максимальном открытом подмножестве E , то есть на $\text{int}_S(E)$.

(ii) Первое равенство было доказано в предыдущем пункте. Так как μ — конечная мера, то для всех $E \in \text{Bor}(S)$ выполнено $\mu(E) = \mu(S) - \mu(\text{int}_S(S \setminus E)) = \mu(S) - \mu(S \setminus \text{cl}_S(E)) = \mu(\text{cl}_S(E))$. Теперь рассмотрим нигде не плотное борелевское множество $E \subset S$, тогда $\mu(E) = \mu(\text{cl}_S(E)) = \mu(\text{cl}_S(\text{int}_S(E))) = \mu(\emptyset) = 0$. Так как E произвольно, то μ — остаточная мера.

(iii) Всякая внутренне компактно регулярная мера имеет полный носитель [[5], предложение 411C, 411N (d)]. Все остальное следует из пунктов (i) и (ii).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство и μ — борелевская мера на S . Допустим, что любое компактное множество $K \subset S$ положительной меры содержит открытое множество $U \subset K$ положительной меры. Тогда

- (i) $\mu(K) = \mu(\text{int}_S(K))$ для любого компактного множества $K \subset S$;
- (ii) если мера μ внутренне компактно регулярна, то μ внутренне открыто регулярна.

Доказательство. (i) Обозначим $K' = K \setminus \text{int}_S(K)$. Это замкнутое подмножество компакта K , следовательно, K' — компакт. Допустим, что $\mu(K') > 0$, тогда существует открытое множество $U \subset K'$ положительной меры. Как следствие, $U \subset K$ — непустое открытое множество не пересекающееся с $\text{int}_S(K)$. Противоречие, значит $\mu(K') = 0$ и $\mu(K) = \mu(\text{int}_S(K))$.

(ii) Зафиксируем $c < \mu(B)$. Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $K \subset B$ такое, что $c < \mu(K)$. Из предыдущего пункта мы получаем $c < \mu(K) = \mu(\text{int}_S(K)) \leq \mu(\text{int}_S(B))$. Так как $c < \mu(B)$ произвольно, то мы заключаем, что $\mu(B) \leq \mu(\text{int}_S(B))$. Обратное неравенство очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство и μ — локально конечная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S . Пусть A — атом меры μ . Тогда

(i) $\mu(A)$ конечно;

(ii) существует точка $s \in A$ такая, что $\mu(A) = \mu(\{s\})$.

Доказательство. (i) Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $K \subset A$ положительной меры. Так как мера μ локально конечна, то $\mu(K)$ конечно. Поскольку A — атом и $\mu(K) > 0$, мы получаем $\mu(A) = \mu(K) < +\infty$.

(ii) По предыдущему пункту $0 < \mu(A) < +\infty$. Пусть \mathcal{K} обозначает семейство компактных подмножества A той же самой меры что и A . Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $K \subset A$ положительной меры. Так как A — атом, то $\mu(K) = \mu(A)$, значит $K \in \mathcal{K}$. Таким образом \mathcal{K} непусто. Теперь рассмотрим два произвольных множества $K', K'' \in \mathcal{K}$. Очевидно, $C := K' \cap K''$ — компактное подмножество в A . Допустим, что $\mu(C) = 0$, и рассмотрим $L' = K' \setminus C$, $L'' = K'' \setminus C$. Это два дизъюнктивных подмножества A , таких, что $\mu(L') = \mu(L'') = \mu(A)$, поэтому $\mu(A) \geq \mu(L' \cup L'') = 2\mu(A)$. Противоречие, значит $\mu(C) > 0$ и, как следствие, $C \in \mathcal{K}$. Поскольку $K', K'' \in \mathcal{K}$ произвольны мы показали, что \mathcal{K} — семейство компактных множеств со свойством конечного пересечения. Следовательно, $K^* = \bigcap \mathcal{K}$ непусто. Очевидно, что K^* компактно как пересечение компактных множеств. Допустим, K^* содержит две различные точки s' и s'' . Рассмотрим одноточечные множества $C' = \{s'\}$ и $C'' = \{s''\}$. Допустим, $\mu(C') > 0$, тогда $\mu(C') = \mu(A)$ и $C' \in \mathcal{K}$, так как A — атом. Это противоречит минимальности K^* так как C' — собственное подмножество K^* , поэтому $\mu(C') = 0$. Аналогично, $\mu(C'') = 0$. Рассмотрим $L = K^* \setminus (C' \cup C'')$, тогда $\mu(L) = \mu(K^*) = \mu(A) > 0$. Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $\hat{K} \subset L \subset A$ положительной меры, значит $\mu(\hat{K}) = \mu(A)$. По построению $\hat{K} \in \mathcal{K}$ — собственное подмножество \mathcal{K} . Это противоречит минимальности K^* , значит K^* непустое множество без двух различных точек, а значит одноточечное. Таким образом, $\mu(A) = \mu(K^*) = \mu(\{s\})$ для некоторого $s \in A$.

6. Относительная проективность $C_0(S)$ -модулей $L_p(S, \mu)$

Результаты этого параграфа в некотором смысле аналогичны тем, что получены для модулей над алгеброй ограниченных измеримых функций, но случай $p = +\infty$, похоже, не имеет простого критерия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная борелевская мера на S и $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда

- (i) $[f] \in L_p(S, \mu)_{ess}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset S$ такое, что $\|[f]\chi_{S \setminus K}\|_{L_p(S, \mu)} < \varepsilon$;
- (ii) если $p < +\infty$ и мера μ внутренне компактно регулярна, то $L_p(S, \mu)_{ess} = L_p(S, \mu)$.

В частности, для любого компактного множества $K \subset S$ и $[f] \in L_p(S, \mu)$ верно $[f]\chi_K \in L_p(S, \mu)_{ess}$.

Доказательство. Стандартное рассмотрение плотных подпространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная борелевская мера на S . Допустим, что заданы $C_0(S)$ -морфизм $\psi : L_p(S, \mu)_{ess} \rightarrow C_0(S)$ где $1 \leq p \leq +\infty$, функция $[f] \in L_p(S, \mu)$ и компактное множество $K \subset S$. Тогда

- (i) если $[f] = [f]\chi_K$, то $\psi(f)|_{S \setminus K} = 0$;
- (ii) если $[f] = [f]\chi_K$ и $\psi(f) \neq 0$, то существует открытое множество $U \subset K$ положительной меры.

Доказательство. (i) Из пункта (i) предложения 12 мы имеем равенство $[f] = [f]\chi_K \in L_p(S, \mu)_{ess}$, поэтому можно говорить о функции $a = \psi(f) \in C_0(S)$. Пусть V — открытое множество, содержащее K , тогда существует непрерывная функция $b \in C_0(S)$ такая, что $b|_K = 1$ и $b|_{S \setminus V} = 0$ [[6], теорема 1.4.25]. По построению $\chi_K = b\chi_K$, поэтому $a = \psi([f]) = \psi([f]\chi_K) = \psi(b[f]\chi_K) = b\psi([f]\chi_K) = b\psi([f]) = ba$. Поскольку $b|_{S \setminus V} = 0$, то мы получаем $a|_{S \setminus V} = 0$. Так как пространство S хаусдорфово и V — произвольное открытое множество, содержащее K , то $a|_{S \setminus K} = 0$.

(ii) Используя обозначения предыдущего пункта, мы имеем $a \neq 0$ и $a|_{S \setminus K} = 0$. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $c = |a|$, тогда $c \neq 0$ и $c|_{S \setminus K} = 0$. Так как $c \neq 0$, то открытое множество $U = c^{-1}((0, +\infty))$ непусто. Более того, $U \subset K$ так как $c|_{S \setminus K} = 0$. Теперь рассмотрим произвольную точку $s \in U$. По построению $a(s) \neq 0$. Поскольку $\{s\}$ компактно, то существует непрерывная функция $e \in C_0(S)$ такая, что $e(s) = 1$ и $e|_{S \setminus U} = 0$ [[6], теорема 1.4.25]. Рассмотрим функцию $[g] = e[f] \in L_p(S, \mu)_{ess}$, тогда $\psi([g]) \neq 0$, так как $\psi([g])(s) = \psi(e[f])(s) = (e\psi([f]))(s) = e(s)\psi([f])(s) = a(s) \neq 0$. Поскольку $\psi([g]) \neq 0$, то мы имеем $[g] \neq 0$ в $L_p(S, \mu)_{ess}$. Следовательно, $\mu(U) > 0$, так как по построению $[g]\chi_{S \setminus U} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S . Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $L_p(S, \mu)$ — относительно проективный $C_0(S)$ -модуль. Тогда

- (i) мера μ внутренне открыто регулярна;
- (ii) любой атом меры μ является изолированной точкой в S ;
- (iii) если $p < +\infty$ и мера μ внешне открыто регулярна, то мера μ чисто атомическая.

Доказательство. (i) Пусть $K \subset S$ — компактное множество положительной меры. Из пункта (i) предложения 12 следует, что функция $[f] := [\chi_K]$ не равна нулю в $L_p(S, \mu)_{ess}$. Так как $C_0(S)$ -модуль $L_p(S, \mu)$ относительно проективен, то по пункту (ii) предложения 3 существует $C_0(S)$ -морфизм $\psi : L_p(S, \mu) \rightarrow C_0(S)$ такой, что

$\psi([f]) \neq 0$. Теперь из пункта (ii) предложения 13 мы получаем, что существует открытое множество $U \subset K$ положительной меры. Поскольку $K \subset S$ произвольно, мы можем применить пункт (ii) предложения 10. Тогда $\mu(B) = \mu(\text{int}_S(B))$ для любого борелевского множества $B \subset S$. Осталось применить предложение 9.

(ii) Пусть A — атом меры μ . Из пункта (ii) предложения 11 следует существование точки $s \in A$ такой, что $\mu(\{s\}) = \mu(A) > 0$. Из пункта (i) следует, что $\mu(\text{int}_S(\{s\})) = \mu(\{s\}) > 0$. Следовательно, $\{s\}$ — открытое множество, т.е. s — изолированная точка.

(iii) Пусть S_a^μ — множество одноточечных атомов меры μ и $S_c^\mu = S \setminus S_a^\mu$. Из пункта (ii) мы знаем, что все атомы — суть изолированные точки, поэтому S_c^μ замкнутое, а значит и борелевское множество. Рассмотрим произвольное компактное подмножество $K \subset S_c^\mu$. Допустим, что $\mu(K) > 0$, тогда из пункта (i) предложения 12 функция $[f] := [\chi_K]$ не равна нулю в $L_p(S, \mu)_{ess}$. Так как $C_0(S)$ -модуль $L_p(S, \mu)$ относительно проективен, то из пункта (ii) предложения 3 и предложения 13 мы получаем $C_0(S)$ -морфизм $\psi : L_p(S, \mu)_{ess} \rightarrow C_0(S)$ такой, что $\psi([f]) \neq 0$ и $\psi([f])|_{S \setminus K} = 0$. Обозначим $a := \psi([f]) \neq 0$. Так как $a|_{S \setminus K} = 0$, то существует точка $s \in K$ такая, что $a(s) \neq 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Заметим, что s не является атомом, так как $s \in K \subset S_c^\mu$, значит, из внешней открытой регулярности меры μ мы получаем открытое множество $W \subset S$ такое, что $s \in W$ и $\mu(W) < \varepsilon$. Так как $\{s\}$ компактно, то существует непрерывная функция $b \in C_0(S)$ такая, что $b(s) = 1$, $0 \leq b \leq 1$ и $b|_{S \setminus W} = 0$ [[6], теорема 1.4.25]. Так как $p < +\infty$, то мы получаем $\|b[f]\|_{L_p(S, \mu)} \leq \mu(W \cap K)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. Наконец,

$$\begin{aligned} |a(s)| &= |a(s)b(s)| = |(ba)(s)| = |(b\psi([f]))(s)| = |\psi(b[f])(s)| \leq \|\psi(b[f])\|_{C_0(S)} \leq \\ &\leq \|\psi\| \|b[f]\|_{L_p(S, \mu)} \leq \|\psi\| \varepsilon^{1/p}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно $|a(s)| = 0$, но $a(s) \neq 0$ по выбору s . Противоречие, значит, $\mu(K) = 0$. Так как $K \subset S_c^\mu$ произвольно, то из внутренней компактной регулярности μ следует $\mu(S_c^\mu) = 0$. Другими словами, мера μ чисто атомическая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера на S . Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $L_p(S, \mu)$ — относительно проективный $C_0(S)$ -модуль. Тогда для любого борелевского множества $B \subset S$ банахов $C_0(S)$ -модуль $L_p(S, \mu^B)$ относительно проективен.

Доказательство. Доказательство такое же как и в предложении 5.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — разложимая внутренне компактно регулярная борелевская мера на S . Пусть $1 \leq p < +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $L_p(S, \mu)$ — относительно проективный $C_0(S)$ -модуль;
- (ii) мера μ чисто атомическая, и все атомы являются изолированными точками.

Доказательство. (i) \implies (ii) Пусть \mathcal{D} разложение S на борелевские множества конечной меры. Зафиксируем $D \in \mathcal{D}$ и рассмотрим $C_0(S)$ -модуль $L_p(S, \mu^D)$. Так как множество D имеет конечную меру, то μ^D — конечная, внутренне компактно регулярная и внешне открыто регулярная мера. По предложению 15 банахов $C_0(S)$ -модуль $L_p(S, \mu^D)$ относительно проективен. Из пункта (iii) предложения 14

мы получаем, что μ^D (и тем более μ_D) — чисто атомическая мера, и все ее атомы являются изолированными точками. Так как $D \in \mathcal{D}$ произвольно, то по предложению [[4], упражнение 214X (i)] мера μ чисто атомическая мера, и все ее атомы являются изолированными точками.

(ii) \implies (i) Пусть S_a^μ обозначает множество одноточечных атомов меры μ . Так как все точки в S_a^μ изолированы, то пространство S_a^μ дискретно и $C_0(S_a^\mu)$ — бипроективная алгебра [[2], теорема 4.5.26]. Так как $p < +\infty$, мера μ атомическая мера и все ее атомы являются изолированными точками, то $C_0(S_a^\mu)$ -модуль $L_p(S, \mu)$ существенный. Учитывая все вышесказанное, из [[7], предложение VII.1.60(II)] мы получаем, что $C_0(S_a^\mu)$ -модуль $L_p(S, \mu)$ относительно проективен. Так как S_a^μ — открытое подмножество S , то $C_0(S_a^\mu)$ является двусторонним замкнутым идеалом $C_0(S)$. Теперь из [[8], предложение 2.3.3(i)] следует, что $C_0(S)$ -модуль $L_p(S, \mu)$ относительно проективен.

Случай $C_0(S)$ -модуля $L_\infty(S, \mu)$ намного сложнее. Мы дадим два необходимых, но достаточно ограничительных условия относительной проективности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера на S . Бесконечное семейство \mathcal{F} борелевских подмножеств S называется широким, если

- (i) каждый элемент \mathcal{F} имеет конечную положительную меру и содержится в некотором компактном подмножестве;
- (ii) каждое компактное подмножество S пересекает лишь конечное число множеств из \mathcal{F} ;
- (iii) любые два различных множества в \mathcal{F} не пересекаются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера на S . Если S содержит широкое семейство \mathcal{F} , то существенная часть $C_0(S)$ -модуля $L_\infty(S, \mu)$ не дополняема в $L_\infty(S, \mu)$.

Доказательство. Допустим, что $L_\infty(S, \mu)_{ess}$ дополняемо в $L_\infty(S, \mu)$, тогда существует ограниченный линейный оператор $P : L_\infty(S, \mu) \rightarrow L_\infty(S, \mu)_{ess}$ такой, что $P([f]) = [f]$ для всех $[f] \in L_\infty(S, \mu)_{ess}$. Теперь для данного широкого семейства $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ мы определим ограниченный линейный оператор

$$I : \ell_\infty(\Lambda) \rightarrow L_\infty(S, \mu) : x \mapsto \left[\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \chi_{F_\lambda} \right]$$

который корректно определен так как семейство \mathcal{F} дизъюнктное. Рассмотрим $x \in c_0(\Lambda)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда существует конечное подмножество $\Lambda_0 \subset \Lambda$ такое, что $|x_\lambda| < \varepsilon$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$. Пусть K_λ обозначает компактное множество содержащее F_λ для $\lambda \in \Lambda$. Тогда $K_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda$ — компакт. Если $s \in S \setminus K$, то $\chi_{F_\lambda}(s) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$. Следовательно, $\|I(x)\chi_{S \setminus K}\|_{L_\infty(S, \mu)} = \|[\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} x_\lambda \chi_{F_\lambda}]\|_{L_\infty(S, \mu)} = \sup_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} |x_\lambda| < \varepsilon$. Теперь из пункта (i) предложения 12 мы получаем, что $I(x) \in L_\infty(S, \mu)_{ess}$. Далее мы определим ограниченный линейный оператор

$$R : L_\infty(S, \mu) \rightarrow c_0(\Lambda) : [f] \mapsto \left(\lambda \mapsto \mu(F_\lambda)^{-1} \int_{F_\lambda} f(s) d\mu(s) \right).$$

Единственная вещь, которая требует пояснения — это тот факт, что образ R содержится в $c_0(\Lambda)$. Зафиксируем $[f] \in L_\infty(S, \mu)_{ess}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Из пункта (i) предложения 12 следует, что существует компакт $K \subset S$ такой, что $\|[f]\chi_K\|_{L_\infty(S, \mu)} < \varepsilon$. Рассмотрим множество $\Lambda_K = \{\lambda \in \Lambda : K \cap F_\lambda \neq \emptyset\}$. По определению семейства \mathcal{F} множество Λ_K конечно. Для любого $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_K$ выполнено $F_\lambda \cap K = \emptyset$, поэтому $|R(f)_\lambda| \leq \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно $R([f]) \in c_0(\Lambda)$. Теперь рассмотрим ограниченный линейный оператор $Q = RPI$. Напомним, что $P([f]) = [f]$ для всех $[f] \in L_\infty(S, \mu)_{ess}$. Тогда легко проверить, что для всех $x \in c_0(\Lambda)$ и $\lambda \in \Lambda$ верно $Q(x)_\lambda = x_\lambda$. Таким образом, $Q : \ell_\infty(\Lambda) \rightarrow c_0(\Lambda)$ — ограниченный линейный оператор такой, что $Q(x) = x$ для всех $x \in c_0(\Lambda)$. Так как Λ бесконечно мы получаем противоречие с теоремой Филлипса [9]. Следовательно, $L_\infty(S, \mu)_{ess}$ недополняемо в $L_\infty(S, \mu)$.

Теперь нам нужно напомнить некоторые понятия из общей топологии. Семейство \mathcal{F} подмножеств в топологическом пространстве S называется локально конечным, если каждая точка S имеет открытую окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом множеств из \mathcal{F} . Топологическое пространство S называется псевдокомпактным, если каждое локально конечное дизъюнктное семейство непустых открытых множеств конечно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная борелевская мера на S . Если $C_0(S)$ -модуль $L_\infty(S, \mu)$ относительно проективен, то носитель меры $\text{supp}(\mu)$ псевдокомпактен.

Доказательство. Обозначим $M := \text{supp}(\mu)$. Допустим, что M не псевдокомпактно, тогда существует бесконечное дизъюнктное локально конечное семейство \mathcal{U} непустых открытых множеств в M . Так как S локально компактно, то для каждого $U \in \mathcal{U}$ мы можем выбрать непустое открытое множество V_U и компакт K_U такие, что $V_U \subset K_U \subset U$. Так как мера μ локально конечна, то мы можем выбрать V так, чтобы $\mu(V)$ было конечно. Более того, $\mu(V) > 0$ так как V открытое подмножество M . Очевидно, что семейство $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ бесконечно, дизъюктно и локально конечно. Таким образом, для любого $s \in S$ существует открытое множество W_s такое, что $s \in W_s$ и множество $\{V \in \mathcal{V} : V \cap W_s \neq \emptyset\}$ конечно.

По построению \mathcal{V} — дизъюнктное семейство открытых множеств положительной меры, и каждое множество семейства содержится в своем компакте. Пусть $K \subset S$ — произвольный компакт. Тогда $\{W_s : s \in K\}$ — открытое покрытие K . Поскольку K компактно, то существует конечное множество S_0 такое, что $\{W_s : s \in S_0\}$ — покрытие K . Так как каждое множество W_s пересекает лишь конечное число множеств из \mathcal{V} , то этим же свойством обладает $\bigcup_{s \in S_0} W_s$ и тем более K . Таким образом, \mathcal{V} — широкое семейство. По предложению 16 существенная часть $C_0(S)$ -модуля $L_\infty(S, \mu)$ не дополняема в $L_\infty(S, \mu)$. Теперь из предложения 2 следует, что $L_\infty(S, \mu)$ не является относительно проективным $C_0(S)$ -модулем. Противоречие, значит, пространство M псевдокомпактно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S . Если $C_0(S)$ -модуль $L_\infty(S, \mu)$ относительно проективен, то мера μ внутренне открыто регулярна и ее носитель $\text{supp}(\mu)$ псевдокомпактен.

Доказательство. Результат следует из предложений 14 и 17.

Хотя последняя теорема и не является критерием, следует сказать несколько слов о том, как этот гипотетический критерий мог бы выглядеть. Последняя теорема накладывает ограничения на топологию пространства S , но эта теорема не может описать ее полностью. Действительно, рассмотрим произвольное локально компактное хаусдорфово пространство S , в котором есть хотя бы одна изолированная точка $\{s\}$. Пусть μ — мера сосредоточенная в точке $\{s\}$. Легко проверить, что получающийся $C_0(S)$ -модуль $L_\infty(S, \mu)$ относительно проективен. Таким образом, нам следует ограничиться рассмотрением строго положительных мер.

Если мера μ строго положительна, то в предположениях теоремы 3 пространство S псевдокомпактно. Напомним, что каждая непрерывная функция на псевдокомпактном пространстве ограничена [[10], теорема 1.1.3(3)]. Теперь заметим, что любая конечная внутренне открыто регулярная мера является остаточной, тогда по результату [[11], следствие 2.7] каждая измеримая функция на S непрерывна на открытом плотном множестве. Эти факты позволяют предположить, что S обладает своеобразной топологией. Действительно, если пространство S не имеет изолированных точек и обладает ненулевой конечной нормальной мерой, то S не может быть сепарабельным локально компактным хаусдорфовым [[6], предложение 4.7.20], локально связным локально компактным хаусдорфовым [[6], предложение 4.7.23], связным локально компактным хаусдорфовым F -пространством [[6], предложение 4.7.24], сепарабельным метризуемым [[12], пример 1].

Из предыдущего обсуждения заманчиво предположить, что пространство $C_0(S)$ "похоже" на $L_\infty(S, \mu)$, когда мера μ строго положительна и модуль $L_\infty(S, \mu)$ относительно проективен. В этом направлении есть следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. Пусть S — гиперстоуново пространство и μ — конечная строго положительная нормальная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S . Тогда $C_0(S)$ -модуль $L_\infty(S, \mu)$ относительно проективен.

Доказательство. Из [[6], следствие 4.7.6] следует, что отображение $i : C_0(S) \rightarrow L_\infty(S, \mu) : f \mapsto [f]$ есть изоморфизм C^* -алгебр. Из вида этого изоморфизма, в частности следует, что $L_\infty(S, \mu)$ изоморфно $C_0(S)$ как $C_0(S)$ -модуль. Так как S компактно, то $C_0(S)$ — унитарная алгебра и поэтому она относительно проективна как $C_0(S)$ -модуль [[7], пример VII.1.1].

Для строго положительных мер последнее предложение является единственным известным примером относительно проективного $C_0(S)$ -модуля $L_\infty(S, \mu)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Селиванов, "О глобальной гомологической размерности радикальных банаховых алгебр степенных рядов", *Матем. заметки*, **104**:5 (2018), 737–744.
- [2] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, МГУ, 1986.
- [3] A. Grothendieck, "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **16** (1955).
- [4] D. H. Fremlin, *Measure Theory*, **2**, Torres Fremlin, 2003.
- [5] D. H. Fremlin, *Measure Theory*, **4(1)**, Torres Fremlin, 2003.

- [6] H. G. Dales, F. K. Dashiell Jr., A. T.-M. Lau, D. Strauss, *Banach spaces of continuous functions as dual spaces*, Springer, Berlin, 2016.
- [7] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, 1989.
- [8] P. Ramsden, *Homological properties of semigroup algebras*, The University of Leeds, 2009.
- [9] R. S. Phillips, “On linear transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 516–541.
- [10] M. Hrusak, A. Tamariz-Mascarua, M. Tkachenko, *Pseudocompact topological spaces*, Springer, 2018.
- [11] O. Zindulka, “Residual measures in locally compact spaces”, *Topology and its Applications*, **108 3** (2000), 253–265.
- [12] J. Flachsmeier, “Normal and category measures on topological spaces”, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, 1972, 109–116.

Н. Т. Немеш

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nemeshnorbert@yandex.ru

Поступило

???.???.???

Исправленный

вариант

???.???.???