Фильтр Калмана

Немеш Н. Т.

1 Динамические системы

Существует много определений динамической системы. Мы будем рассматривать непрерывные и дискретные нелинейные динамические системы с неаддитивным шумом. Данная заметка основана на статье [1].

1.1 Непрерывный случай

Определение 1.1 *Динамической системой называется набор из вектор-функций нескольких переменных*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ h &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^l \end{aligned} \tag{1}$$

векторнозначных случайных процессов (функций со значениями в случайных векторах)

$$\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l \qquad \boldsymbol{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q \qquad \boldsymbol{\nu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \tag{2}$$

и одной вектор-функции

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \tag{3}$$

таких, что

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = f(t, \boldsymbol{x}(t), u(t), \boldsymbol{\mu}(t)), \qquad \boldsymbol{z}(t) = h(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\nu}(t)), \qquad (t \geq 0) \tag{4}$$

При этом

- $\boldsymbol{x}$ *называется вектором состояния системы;*
- $\boldsymbol{z}$ *называется вектором наблюдаемых системы или вектором измерений;*
- u *называется вектором управления системой;*
- $\boldsymbol{\mu}$ *называется шумом модели;*
- $\boldsymbol{\nu}$ *называется шумом измерений;*

При рассмотрении динамических систем основная задача состоит в нахождении состояния $\boldsymbol{x}(t)$ по известным наблюдениям $\boldsymbol{z}(t)$. Задача осложняется двумя факторами:

- наличием случайных шумов $\boldsymbol{\mu}(t)$ и $\boldsymbol{\nu}(t)$ про которые мы в лучшем знаем их распределение;
- нелинейностью дифференциального уравнения описывающего состояние системы;
- неявной зависимостью между состоянием и измерениями;

В более общих ситуациях состояние системы удовлетворяет ограничениям типа равентсв. Это приводит к тому что множество состояний системы надо рассматривать как многообразие. Это более правильный подход, но в данной заметке мы мы будем использовать инженерные упрощения, чтобы не усложнять суть дела. Более строгий подход с описанием фильтра Кламана для многообразий можно найти в [2].

Пример 1.2 *Пускай положение точки массой m в некоторой инерциальной системе координат задается вектором $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y, \boldsymbol{r}_z]^T$, а скорость вектором $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z]^T$. Движение происходит под действием внешней силы $\boldsymbol{F}$ и силы сопротивления пропорциональной квадрату скорости этой точки $\boldsymbol{F}_r = k\|\boldsymbol{v}\|[\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z]^T$. Точное значение силы $\overrightarrow{F} = [F_x, F_y, F_z]^T$ нам неизвестно, поэтому мы к нему добавим слагаемое $\delta\boldsymbol{F} = [\delta\boldsymbol{F}_x, \delta\boldsymbol{F}_y, \delta\boldsymbol{F}_z]^T$ с многомерным нормальным распределением из $\mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta F})$ При этом наблюдать мы можем только сферические координаты $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{\theta}$ материальной точки. Наблюдения не точные, а с некторым шумом $[\delta\boldsymbol{\rho}, \delta\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\theta}]^T$ имеющим нормальное распределение из $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.*

Уравнение движения в этом случае будет иметь вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} \qquad m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = k\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{v} + \overrightarrow{F} + \delta\boldsymbol{F} \tag{5}$$

а связь между состоянием и измерениями будет

$$\boldsymbol{\rho} = \sqrt{\boldsymbol{r}_x^2 + \boldsymbol{r}_y^2 + \boldsymbol{r}_z^2}, \qquad \boldsymbol{\phi} = \arccos\frac{\boldsymbol{r}_x}{\sqrt{\boldsymbol{r}_y^2 + \boldsymbol{r}_z^2}}, \qquad \boldsymbol{\theta} = \arccos\frac{\boldsymbol{r}_x}{\sqrt{\boldsymbol{r}_y^2 + \boldsymbol{r}_y^2 + \boldsymbol{r}_z^2}} \tag{6}$$

Эти уравенения задают динамическую систему. Достаточно положить

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x(t) \\ \boldsymbol{r}_y(t) \\ \boldsymbol{r}_z(t) \\ \boldsymbol{v}_x(t) \\ \boldsymbol{v}_y(t) \\ \boldsymbol{v}_z(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(t) \\ \boldsymbol{\phi}(t) \\ \boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{F}_x(t) \\ \delta\boldsymbol{F}_y(t) \\ \delta\boldsymbol{F}_z(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\rho}(t) \\ \delta\boldsymbol{\phi}(t) \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

$$f(t, \boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_x \\ \boldsymbol{v}_y \\ \boldsymbol{v}_z \\ \frac{1}{m}(k\boldsymbol{v}_x\sqrt{\boldsymbol{v}_x^2 + \boldsymbol{v}_y^2 + \boldsymbol{v}_z^2} + F_x + \delta\boldsymbol{F}_x) \\ \frac{1}{m}(k\boldsymbol{v}_y\sqrt{\boldsymbol{v}_x^2 + \boldsymbol{v}_y^2 + \boldsymbol{v}_z^2} + F_y + \delta\boldsymbol{F}_y) \\ \frac{1}{m}(k\boldsymbol{v}_z\sqrt{\boldsymbol{v}_x^2 + \boldsymbol{v}_y^2 + \boldsymbol{v}_z^2} + F_z + \delta\boldsymbol{F}_z) \end{bmatrix}, \qquad h(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\boldsymbol{r}_x^2 + \boldsymbol{r}_y^2 + \boldsymbol{r}_z^2} + \delta\boldsymbol{\rho} \\ \frac{\boldsymbol{r}_x}{\sqrt{\boldsymbol{v}_y^2 + \boldsymbol{v}_z^2}} + \delta\boldsymbol{\phi} \\ \frac{\boldsymbol{r}_z}{\sqrt{\boldsymbol{r}_x^2 + \boldsymbol{r}_y^2 + \boldsymbol{r}_z^2}} + \delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

1.2 Дискретный случай

На практике состояние динамической системы ищут не в виде функции непрерывного аргумента, а в виде последовательности значений в некоторые моменты времени.

Представим, что измерения состояния происходит в моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. Будем считать что время между моментами времени мало, тогда уравнениия описывающие динамическую систему примут вид

$$\frac{\boldsymbol{x}(t_k) - \boldsymbol{x}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f(t_k, \boldsymbol{x}(t_{k-1}), u(t_k), \boldsymbol{\mu}(t_k)), \qquad \boldsymbol{z}(t_k) = h(t_k, \boldsymbol{x}(t_k), \boldsymbol{\nu}(t_k)) \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{9}$$

Если ввести обозначения

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(t_k), \quad u_k = u(t_k), \quad \boldsymbol{\mu}_k = \boldsymbol{\mu}(t_k), \quad \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}(t_k), \quad \boldsymbol{\nu}_k = \boldsymbol{\nu}(t_k), \tag{10}$$

$$f_k(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{x}_{k-1} + f(t_k, \boldsymbol{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k)(t_k - t_{k-1}), \qquad h_k(x, u, w) = h(t_k, \boldsymbol{z}_k, \boldsymbol{\nu}_k) \tag{11}$$

то мы получим систему рекуррентных уравнений

$$\boldsymbol{x}_k = f_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \qquad \boldsymbol{z}_k = h_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{12}$$

Определение 1.3 *Дискретной динамической системой называются последовательности из вектор-функций нескольких переменных*

$$\begin{aligned} f_k &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ h_k &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^l \end{aligned} \tag{13}$$

последовательности случайных векторов

$$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad (\boldsymbol{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad (\boldsymbol{\mu}_k)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad (\boldsymbol{\nu}_k)_{k\in\mathbb{N}}, \tag{14}$$

и одной числовой последовательности

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \tag{15}$$

такие, что

$$\boldsymbol{x}_k = f_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \qquad \boldsymbol{z}_k = h_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{16}$$

При этом

$\boldsymbol{x}$ *называется вектором состояния системы;*

$\boldsymbol{z}$ *называется вектором наблюдаемых системы или вектором измерений;*

u *называется вектором управления системой;*

$\boldsymbol{\mu}$ *называется шумом модели;*

$\boldsymbol{\nu}$ *называется шумом измерений;*

Далее наша основная задача состоит в нахождении последовательности состояний $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ дискретной динамической системы по известным наблюдениям $(\boldsymbol{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. При этом нам неизвестны шумы $(\boldsymbol{\mu}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(\boldsymbol{\nu}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, но мы знаем их распределение.

2 Фильтр Калмана

Определение 2.1 *Фильтр Калмана – это алгоритм построения оценки состояний динамической системы.*

Мы будем обсуждать фильтры Калмана только для дискретных динамических систем. Допустим нам дана дискретная динамическая система:

$$\boldsymbol{x}_k = f_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \qquad \boldsymbol{z}_k = h_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{17}$$

Мы будем предполагать, что шумы имеют распределение $\boldsymbol{\mu}_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ и $\boldsymbol{\nu}_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$. Оптимальной оценкой состояний $\boldsymbol{x}_k$ мы будем называть последовательность векторов $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такую что минимизируется величина

$$\mathbb{E}[\|\boldsymbol{x}_k - \hat{x}_k\|^2] \tag{18}$$

2.1 Расширенный фильтр Кламана

Определение 2.2 *Расширенный фильтр Калмана – это фильтр Кламана для нелинейных динамических систем, который сводит задачу к линейному случаю линеаризацией уравнений около текущей оценки состояния динамической системы.*

В английской литературе расширенный фильтр Кламана называется extended Kalman filter или коротко EKF.

Введем обозначения:

$x_{k|l}$ – апостериорная оценка состояния системы в момент k, полученная по результатам наблюдений вплоть до момента l включительно;

$P_{k|l}$ – апостериорная ковариационная матрица ошибок в момент k, задающая оценку точности полученной оценки вектора состояния по наблюдениям вплоть до момента l включительно; эта матрица включает в себя оценку дисперсий погрешности вычисленного состояния и ковариации, показывающие выявленные взаимосвязи между параметрами состояния системы;

Состояние фильтра Калмана задается двумя переменными $x_{k|k}$ и $P_{k|k}$. Начальное состояние фильтра ининциализацируется эвристикой. Далее итерации алгоритма идут до бесконечности. Каждая итерация фильтра Калмана делится на две фазы: экстраполяция и коррекция.

Во время экстраполяции фильтр находит предварительную оценку состояния системы $x_{k|k-1}$ на текущий шаг k по итоговой оценке состояния с предыдущего шага $k-1$. Эту предварительную оценку также называют априорной оценкой состояния, так как для её получения не используются наблюдения шага k. Также вычисляется априорная матрица ковариаций $P_{k|k-1}$.

В фазе коррекции априорная оценка $x_{k|k-1}$ корректируется с помощью текущих измерений. Скорректированная оценка $x_{k|k}$ также называется апостериорной оценкой состояния. Наряду с этим вычисляется апостериорная матрица ковариации состояния $P_{k|k}$.

Обычно фазы экстраполяции и коррекции чередуются: экстраполяция производится по результатам коррекции до следующего наблюдения, а коррекция производится совместно с доступными на следующем шаге наблюдениями, и т. д. Если по некоторой причине наблюдение оказалось недоступным, то этап коррекции может быть пропущен и выполнена экстраполяция по нескорректированной оценке. Аналогично, если независимые измерения доступны только в отдельные такты работы, всё равно возможны коррекции.

Далее рассмотрим работу классического оптимального фильтра Калмана.

Экстраполяция

$$\begin{aligned} x_{k|k-1} &= f_k(x_{k-1|k-1}, u_k, 0) && \text{априорная оценка состояния} \\ P_{k|k-1} &= F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + L_{k-1} Q_k L_{k-1}^T && \text{априорная оценка ковариаций} \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$F_{k-1} = \frac{\partial f_k}{\partial x}(x_{k-1|k-1}, u_k, 0), \qquad L_{k-1} = \frac{\partial f_k}{\partial \mu}(x_{k-1|k-1}, u_k, 0) \tag{20}$$

Коррекция

$$
\begin{aligned}
y_k =& z_k - h_k(x_{k|k-1}, 0) && \text{ошибка экстраполяции} \\
S_k =& H_k P_{k|k-1} H_k^T + M_k R_k M_k^T && \text{матрица ковариации для ошибок экстраполяции} \\
K_k =& P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} && \text{матрица коэффициентов усиления} \\
x_{k|k} =& x_{k|k-1} + K_k y_k && \text{коррекция экстраполяции} \\
P_{k|k} =& (I - K_k H_k) P_{k|k-1} && \text{расчёт ковариационной матрицы}
\end{aligned} \tag{21}
$$

где

$$
H_k = \frac{\partial h_k}{\partial x}(x_{k|k-1}, 0), \qquad M_k = \frac{\partial h_k}{\partial \nu}(x_{k|k-1}, 0) \tag{22}
$$

Отметим, что вычисление матрицы $P_{k|k}$ неустойчиво и лучше использовать эквивалентные формулы выражающие $P_{k|k}$ через симметричные матрицы

$$
\begin{aligned}
P_{k|k} =& P_{k|k-1} - K_k S_k^{-1} K_k^T && \text{симметричная форма} \\
P_{k|k} =& (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k M_k R_k M_k K_k^T && \text{форма Джосефа}
\end{aligned} \tag{23}
$$

2.2 Фильтр Калмана с состоянием ошибок

Определение 2.3 *Фильтр Калмана с состоянием ошибок – это фильтр Кламана, в котором состояние системы описывается двумя векторами. Первый вектор описывает номинальное состояние и шумы не влияют на его динамику, второй – ошибки определения состояния системы.*

В английской литературе расширенный фильтр Кламана с состоянием ошибок называется error state kalman filter или коротко ESKF.

Для фильтра Калмана с состоянием ошибок дискретную динамическую систему удобнее записывать в виде

$$
\bar{x}_k = \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, u_k), \qquad \delta\boldsymbol{x}_k = \delta f_k(\bar{x}_{k-1}, \delta\boldsymbol{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \qquad \boldsymbol{z}_k = h_k(\bar{x}_k, \delta\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{24}
$$

Здесь $\bar{x}$ – это номинальное состояние системы, а $\delta\boldsymbol{x}$ – это ошибка определения истинного состояния системы. При этом вектор состояния системы имеет вид

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta\boldsymbol{x} \end{bmatrix} \tag{25}
$$

Введем обозначения:

$\bar{x}_k$ – номинальное состояние системы в момент k;

$\delta x_{k|l}$ – апостериорная оценка ошибки состояния системы в момент k, полученная по результатам наблюдений вплоть до момента l включительно;

$P_{k|l}$ – апостериорная ковариационная матрица ошибок в момент k, задающая показывающая точность полученной оценки ошибок состояния по наблюдениям вплоть до момента l включительно; эта матрица включаает в себя оценку дисперсий погрешности вычисленного состояния и ковариации, показывающие выявленные взаимосвязи между параметрами ошибок состояния системы;

Оценки $x_{k|k}$ состояния динамической системы на шаге k фильтра Калмана с состоянием ошибок будет некоторой функцией от номинального состояния $\bar{x}_{k|k}$ и оценки состояния ошибки $\delta x_{k|k}$:

$$x_{k|k} = s_k(\bar{x}_k, \delta x_{k|k}) \tag{26}$$

Состояние фильтра Калмана с состоянием ошибок задается тремя переменными: номинальным состоянием $\bar{x}_k$, оценкой ошибки $\delta x_{k|k}$ и оценкой матрицы ковариаций ошибки $P_{k|k}$. Начальное номинальное состояние $\bar{x}_0$ фильтра и матрица ковариаций ошибки $P_{0|0}$ ининциализацируются эвристикой. Начальная оценка ошибки $\delta x_{0|0}$ инициализируется нулем. Далее итерации алгоритма идут до бесконечности. Каждая итерация фильтра делится на четыре фазы: экстраполяция, коррекция, добавление и сброс.

Во время экстраполяции фильтр находит номинальное состояние $\bar{x}_k$ и предварительную оценку ошибки состояния системы $\delta x_{k|k-1}$ на текущий шаг k по итоговой оценке состояния ошибки с предыдущего шага $k-1$. Эту предварительную оценку также называют априорной оценкой ошибки состояния, так как для её получения не используются наблюдения соответствующего шага. Также вычисляется априорная матрица ковариаций $P_{k|k-1}$.

В фазе коррекции априорная оценка ошибки состояния $\delta x_{k|k-1}$ корректируется с помощью текущих измерений z_k. Скорректированная оценка ошибки $\delta x_{k|k}$ также называется апостериорной оценкой ошибки состояния. Наряду с этим вычисляется апостериорная матрица ковариации ошибки состояния $P_{k|k}$.

В фазе сброса оценка ошибки $\delta x_{k|k}$ приравнивается к нулю и пересчитывается матрица ковариаций $P_{k|k}$

Далее рассмотрим работу фильтра Калмана с состоянием ошибок.

Экстраполяция

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k =& \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, u_k) && \text{вычисление номинального состояния} \\
\delta x_{k|k-1} =& \delta f_k(\bar{x}_{k-1}, \delta x_{k-1|k-1}, u_k, 0) && \text{априорная оценка ошибки состояния} \\
P_{k|k-1} =& F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + L_{k-1} Q_k L_{k-1}^T && \text{априорная оценка ковариаций}
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$F_{k-1} = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \delta x}(\bar{x}_{k-1}, \delta x_{k-1|k-1}, u_k, 0), \qquad L_{k-1} = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \mu}(\bar{x}_{k-1|k-1}, \delta x_{k-1|k-1} u_k, 0) \tag{28}$$

Коррекция

$$\begin{aligned}
y_k =& z_k - h_k(\bar{x}_k, \delta x_{k|k-1}, 0) && \text{ошибка экстраполяции} \\
S_k =& H_k P_{k|k-1} H_k^T + M_k R_k M_k^T && \text{матрица ковариации для ошибок экстраполяции} \\
K_k =& P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} && \text{матрица коэффициентов усиления} \\
\delta x_{k|k} =& K_k y_k && \text{коррекция экстраполяции} \\
P_{k|k} =& (I - K_k H_k) P_{k|k-1} && \text{расчёт ковариационной матрицы}
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$H_k = \frac{\partial h_k}{\partial \delta x}(\bar{x}_{k-1}, \delta x_{k|k-1}, 0), \qquad M_k = \frac{\partial h_k}{\partial \nu}(\bar{x}_k, \delta x_{k|k-1}, 0) \tag{30}$$

Добавление

$$x_{k|k} = s_k(\bar{x}_k, \delta x_{k|k}) \qquad \text{добаляем ошибку к номинальному состоянию} \tag{31}$$

Сброс

$$\delta x_{k|k} = 0 \qquad \text{на следующей итерации оценка ошибки будет 0} \tag{32}$$

Отметим, что вычисление матрицы $P_{k|k}$ неустойчиво и лучше использовать эквивалентные формулы выражающие $P_{k|k}$ через симметричные матрицы

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k S_k^{-1} K_k^T && \text{симметричная форма} \\ P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k M_k R_k M_k K_k^T && \text{форма Джосефа} \end{aligned} \tag{33}$$

Более того на этапе сбороса также можно обновлять матрицу ковариации по формуле

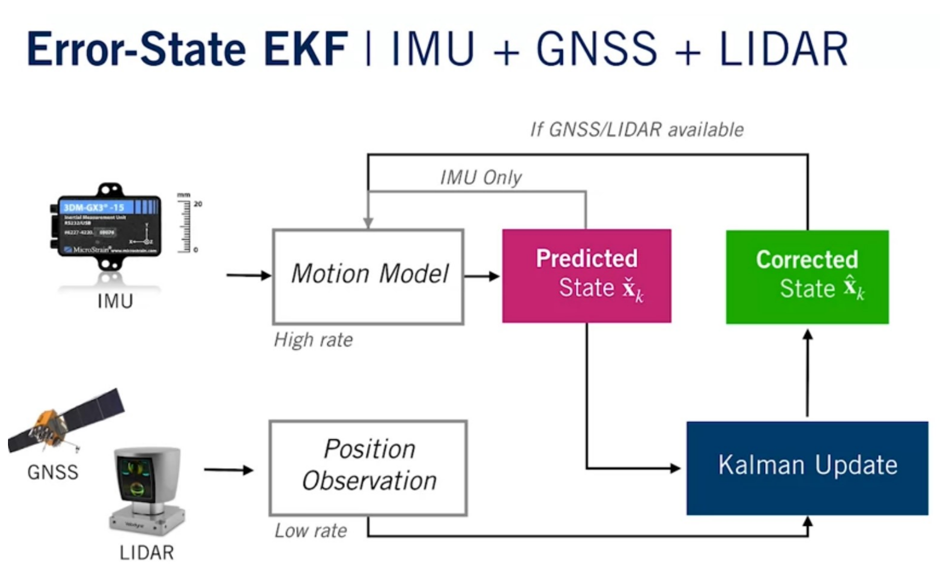
$$P_{k|k} = G_k P G_k^T, \qquad G_k = \frac{\partial g_k}{\partial \delta x}(\delta x_{k|k}) \tag{34}$$

где g_k – это функция удовлетворяющая уравенению $s_k(x_{k|k}, g_k(\delta x)) = s_k(\bar{x}_k, \delta x)$ относительно переменной δx.

3 Локализация с использованием фильтра Калмана

В этой главе мы обсудим применение общей теории к задаче локализации автомобиля. Наш автомобиль будет снабжен тремя приборами: гиростабилизатор (inertial measurement unit, IMU), спутниковый навигатор (GNSS) и лидар (LIDAR). По показаниям этих приборов мы будем определять положение и ориентацию автомобиля.

Для локализации (определения положения и ориентации) автомобиля мы будем использовать фильтр Калмана с состоянием ошибок. В качетсве моментов времени когда мы будем находить положением и ориентацию мы будем считать моменты поступления данных от IMU, потому что этот прибор выдает измерения с наибольшей частотой. В эти моменты времени фильтр Калмана будет делать экстраполяцию. Когда в фильтр поступят данные от лидара или навигатора фильтр будет выполнять остальные фазы: коррекция добавление и сброс.



3.1 Физическая модель. Учебный пример

Допустим что у нас есть некоторая инерциальная система отсчета C в которой мы хотим определить координаты автомобиля $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$, скорость $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, ускорение $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ и ориентацию в виде кватерниона $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}$, Во время движения IMU будет измерять ускорение $\boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^3$ и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_m \in \mathbb{R}^3$ в своей системе координат (назовем ее A). Для удобства начальной локализации мы будем следить за вектором ускорения свободного падения $\boldsymbol{g}$. Мы будем считать что у IMU есть некоторая систематическая ошибка $\boldsymbol{a}_b$ определения ускорения и систематическая ошибка определения угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_b$. Скорости изменения $\boldsymbol{a}_b$ и $\boldsymbol{\omega}_b$ будут случайными нормально распределенными случайными величинами $\boldsymbol{a}_w$, $\boldsymbol{\omega}_w$ с нулевым средним. Уравнения движения автомобиля в этом случае примут вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} &= \boldsymbol{v}(t) & \frac{d\boldsymbol{a}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{a}_w(t) \\
\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} &= \boldsymbol{a}(t) & \frac{d\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_w(t) \\
\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}(t)\} & \frac{d\boldsymbol{g}(t)}{dt} &= 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

При этом измерения IMU будут

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_m(t) &= R\{\boldsymbol{q}(t)\}^T(\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{g}(t)) + \boldsymbol{a}_b(t) + \boldsymbol{a}_n(t) \\
\boldsymbol{\omega}_m(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\omega}_b(t) + \boldsymbol{\omega}_n(t)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} &= \boldsymbol{v}(t) & \frac{d\boldsymbol{a}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{a}_w(t) \\
\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} &= R\{\boldsymbol{q}(t)\}(\boldsymbol{a}_m(t) - \boldsymbol{a}_b(t) - \boldsymbol{a}_n(t)) + \boldsymbol{g}(t) & \frac{d\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_w(t) \\
\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_m(t) - \boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t)\} & \frac{d\boldsymbol{g}(t)}{dt} &= 0
\end{aligned}
\tag{37}
$$

3.1.1 Расширенный фильтр Калмана для локализации автомобиля

Во время движения автомобиля мы будем получать измерения от лидара и навигатора. Это будут либо позиция либо скорость либо ориентация. Теперь мы готовы описать движение автомобиля как динамической системы:

$$
\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \\ \boldsymbol{a}_b(t) \\ \boldsymbol{\omega}_b(t) \\ \boldsymbol{g}(t) \end{bmatrix}
\; \boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix}
\; u(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_m(t) - \boldsymbol{a}_n(t) \\ \boldsymbol{\omega}_m(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) \end{bmatrix}
\; \boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_w(t) \\ \boldsymbol{\omega}_w(t) \end{bmatrix}
\; \boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_r(t) \\ \boldsymbol{\nu}_v(t) \\ \boldsymbol{\nu}_q(t) \end{bmatrix}
\tag{38}
$$

$$
f(t, \boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ R\{\boldsymbol{q}\}(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_b - \boldsymbol{a}_n) + \boldsymbol{g} \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n\} \\ \boldsymbol{a}_w(t) \\ \boldsymbol{\omega}_w(t) \\ 0 \end{bmatrix}
\qquad h(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\nu}_r \\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nu}_v \\ \boldsymbol{q} \otimes \mathrm{Exp}(\boldsymbol{\nu}_q) \end{bmatrix}
\tag{39}
$$

Видно, что получающаяся динамическая система нелинейная и оценивать ее динамику лучше с помощью фильтра Калмана с состоянием ошибок.

Замечание 3.1 *Строго говоря это динамическая система не определена корректно, так как между некоторыми координатами вектора сосотояний существует неявная зависимость, а именно* $\|\boldsymbol{q}\| = 1$. *Но мы, к сожалению, тут пожертвуем математической строгостью.*

3.1.2 Расширенный фильтр Калмана с состоянием ошибок для локализации автомобиля

Для построения фильтра Калмана с состоянием ошибок мы будем определим номинальное состояние и состояние ошибок и реальное состояние следующим образом

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{r}(t) \\ \bar{v}(t) \\ \bar{q}(t) \\ \bar{a}_b(t) \\ \bar{\omega}_b(t) \\ \bar{g}(t) \end{bmatrix} \qquad \delta\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}(t) \\ \delta\boldsymbol{v}(t) \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t) \\ \delta\boldsymbol{a}_b(t) \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b(t) \\ \delta\boldsymbol{g}(t) \end{bmatrix} \tag{40}$$

При этом реальное состояние будет связано с номинальным и состоянием ошибок следующим образом

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t) \\ \bar{v}(t) + \delta\boldsymbol{v}(t) \\ \bar{q}(t) \otimes \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\ \bar{a}_b(t) + \delta\boldsymbol{a}_b(t) \\ \bar{\omega}_b(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_b(t) \\ \bar{g}(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) \end{bmatrix} \tag{41}$$

Динамика номинального состояния описывается уравнениями не учитывающими шум и ошибки.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}(t)}{dt} &= \bar{v}(t) & \frac{d\bar{a}_b(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\bar{v}(t)}{dt} &= R\{\bar{q}(t)\}(\boldsymbol{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)) + \bar{g}(t) & \frac{d\bar{\omega}_b(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\bar{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\bar{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\omega}_b(t)\} & \frac{d\bar{g}(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Динамика состояния ошибок выводится из уравнения для реального состояния, уравнений для номинального состояния и связи между реальным, номинальным и состоянием ошибок. Начнем с простых уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\boldsymbol{r}(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} - \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{v}(t) - \bar{v}(t) = \delta\boldsymbol{v}(t) \\ \frac{d\delta\boldsymbol{a}_b(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{a}_b(t)}{dt} - \frac{d\bar{a}_b(t)}{dt} = \boldsymbol{a}_w(t) - 0 = \boldsymbol{a}_w(t) \\ \frac{d\delta\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} - \frac{d\bar{\omega}_b(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}_w(t) - 0 = \boldsymbol{\omega}_w(t) \\ \frac{d\delta\boldsymbol{g}(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{g}(t)}{dt} - \frac{d\bar{g}(t)}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Выведем уравенение для ошибки скорости. Обозначим

$$\boldsymbol{a}_{mb}(t) = \boldsymbol{a}_m(t) - \bar{a}_b(t) \qquad \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t) = -\delta\boldsymbol{a}_b(t) - \boldsymbol{a}_n(t) \qquad \boldsymbol{R}(t) = R\{\boldsymbol{q}(t)\} \quad \bar{R}(t) = R\{\bar{q}(t)\} \tag{44}$$

Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \boldsymbol{R}(t)(\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t)) + \boldsymbol{g}(t) \qquad \frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \bar{R}(t)\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \bar{g}(t) \tag{45}$$

Учитывая, что

$$\boldsymbol{R}(t) = \bar{R}(t)(I + [\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))) \tag{46}$$

получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\boldsymbol{v}(t)}{dt} =& \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} - \frac{d\bar{v}(t)}{dt} \\
=& (\boldsymbol{R}(t)(\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t)) + \boldsymbol{g}(t)) \\
& - (\bar{R}(t)\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \bar{g}(t)) \\
=& \bar{R}(t)(I + [\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times + o(\delta\boldsymbol{\theta}))(\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t)) \\
& - \bar{R}(t)\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \boldsymbol{g}(t) - \bar{g}(t) \\
=& \bar{R}(t)(\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t)) + \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times(\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t)) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
& - \bar{R}(t)\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) \\
=& \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times(\boldsymbol{a}_{mb}(t) \\
& + \delta\boldsymbol{a}_{mb}(t)) + \delta\boldsymbol{g}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
=& \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times\boldsymbol{a}_{mb}(t) \\
& + \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times\delta\boldsymbol{a}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
=& - \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_b(t) - \bar{R}(t)\boldsymbol{a}_n(t) - \bar{R}(t)[\boldsymbol{a}_{mb}(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) - \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times\delta\boldsymbol{a}_b(t) \\
& - \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times\boldsymbol{a}_n(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
=& - \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_b(t) - \bar{R}(t)[\boldsymbol{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) - o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
& - \bar{R}(t)\boldsymbol{a}_n(t) - \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times\boldsymbol{a}_n(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
=& - \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_b(t) - \bar{R}(t)[\boldsymbol{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) \\
& - \bar{R}(t)(I + [\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times)\boldsymbol{a}_n(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))
\end{aligned} \tag{47}$$

Мы не будем выводить явные форумулы для членов второго порядка малости, поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\boldsymbol{v}(t)}{dt} =& - \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_b(t) - \bar{R}(t)[\boldsymbol{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) \\
& + o(\|\delta\boldsymbol{\theta}(t)\|) + o(\|\delta\boldsymbol{\theta}(t)\|) - \bar{R}(t)\boldsymbol{a}_n(t) - \bar{R}(t)[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times\boldsymbol{a}_n(t) + \delta\boldsymbol{g}(t) \\
=& - \bar{R}(t)[\boldsymbol{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) - \bar{R}(t)\delta\boldsymbol{a}_b(t) \\
& + \delta\boldsymbol{g}(t) - \bar{R}(t)(I + [\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times)\boldsymbol{a}_n(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))
\end{aligned} \tag{48}$$

Теперь выведем уравнение для ошибки угловой скорости. Обозначим

$$\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) = \boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\omega}_b(t) \qquad \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) = -\delta\boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) \tag{49}$$

Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \qquad \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\bar{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \qquad \boldsymbol{q}(t) = \bar{q}(t) \otimes \delta\boldsymbol{q}(t) \tag{50}$$

Находим

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{q}(t) \otimes \delta\boldsymbol{q}(t)) \\
\frac{1}{2}\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{d\bar{q}(t)}{dt} \otimes \delta\boldsymbol{q}(t) + \bar{q}(t) \otimes \frac{d\delta\boldsymbol{q}(t)}{dt} \\
\frac{1}{2}\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{1}{2}\bar{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\boldsymbol{q}(t) + \bar{q}(t) \otimes \frac{d\delta\boldsymbol{q}(t)}{dt} \\
\frac{1}{2}\bar{q}(t) \otimes \delta\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{1}{2}\bar{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\boldsymbol{q}(t) + \bar{q}(t) \otimes \frac{d\delta\boldsymbol{q}(t)}{dt} \\
\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{1}{2}q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\boldsymbol{q}(t) + \frac{d\delta\boldsymbol{q}(t)}{dt} \\
\frac{d\delta\boldsymbol{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} - q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\boldsymbol{q}(t)\right)
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Домножая на $\bar{q}^{-1}$ мы получим

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta\boldsymbol{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} - q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\boldsymbol{q}(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}([q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\}]_R\delta\boldsymbol{q}(t) - [q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\}]_L)\delta\boldsymbol{q}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) \end{bmatrix}\right]_R - \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) \end{bmatrix}\right]_L\right)\delta\boldsymbol{q}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & -[\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{m(t)b})^T \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & [\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times \end{bmatrix}\right)\delta\boldsymbol{q}(t) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & -[2\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times \end{bmatrix}\delta\boldsymbol{q}(t)
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Поскольку $\delta\boldsymbol{q}(t) = \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) = [1, \delta\boldsymbol{\theta}(t)/2]^T + o(\delta\boldsymbol{\theta})$, мы получаем равенства

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t)/2 \end{bmatrix} + o(\delta\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & -[2\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t)/2 \end{bmatrix} + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T\delta\boldsymbol{\theta}(t) \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) - \frac{1}{2}[2\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))
\end{aligned}
\tag{53}
$$

В частности

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} &= \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) - [\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) - \frac{1}{2}[\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
&= -\delta\boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) - [\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\omega}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
&= -[\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\omega}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t) - \delta\boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta\boldsymbol{r}(t)}{dt} =&\delta\boldsymbol{v}(t)\\
\frac{d\delta\boldsymbol{v}(t)}{dt} =&-R\{\bar{q}(t)\}[\boldsymbol{a}_m(t)-\bar{a}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t)-R\{\bar{q}(t)\}\delta\boldsymbol{a}_b(t)+\delta\boldsymbol{g}(t)\\
&-R\{\bar{q}(t)\}(I+[\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_\times)\boldsymbol{a}_n(t)+o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))\\
\frac{d\delta\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} =&-[\boldsymbol{\omega}_m(t)-\bar{\omega}_b(t)]_\times\delta\boldsymbol{\theta}(t)-\delta\boldsymbol{\omega}_b(t)-\boldsymbol{\omega}_n(t)+o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))\\
\frac{d\delta\boldsymbol{a}_b(t)}{dt} =&\boldsymbol{a}_w(t)\\
\frac{d\delta\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} =&\boldsymbol{\omega}_w(t)\\
\frac{d\delta\boldsymbol{g}(t)}{dt} =&0
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Дискретизация уравнений номинального сосотояния будет

$$
\begin{aligned}
\bar{r}_k =&\bar{r}_{k-1}+\bar{v}_{k-1}\Delta t+(R\{\bar{q}_{k-1}\}(\boldsymbol{a}_{m,k}-\bar{a}_{b,k-1})+\bar{g}_{k-1})\frac{\Delta t^2}{2}\\
\bar{v}_k =&\bar{v}_{k-1}+(R\{\bar{q}_{k-1}\}(\boldsymbol{a}_{m,k}-\bar{a}_{b,k-1})+\bar{g}_{k-1})\Delta t\\
\bar{q}_k =&\bar{q}_{k-1}\otimes q\{(\boldsymbol{\omega}_{m,k}-\bar{\omega}_{b,k-1})\Delta t\}\\
\bar{a}_{b,k} =&\bar{a}_{b,k-1}\\
\bar{\omega}_{b,k} =&\bar{\omega}_{b,k-1}\\
\bar{g}_k =&\bar{g}_{k-1}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Дискретизация уравнений сосотояния ошибки имеет вид

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r}_k =&\delta\boldsymbol{r}_{k-1}+\delta\boldsymbol{v}_{k-1}\Delta t\\
\delta\boldsymbol{v}_k =&\delta\boldsymbol{v}_{k-1}-R\{\bar{q}_{k-1}\}[\boldsymbol{a}_{m,k}-\bar{a}_{b,k-1}]_\times\delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\Delta t\\
&-R\{\bar{q}_{k-1}\}\delta\boldsymbol{a}_{b,k-1}\Delta t+\delta\boldsymbol{g}_{k-1}\Delta t-R\{\bar{q}_{k-1}\}(I+[\delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}]_\times)\boldsymbol{a}_{n,k}\Delta t\\
\delta\boldsymbol{\theta}_k =&R\{-[\boldsymbol{\omega}_{m,k}-\bar{\omega}_{b,k-1}]_\times\Delta t\}\delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}-\delta\boldsymbol{\omega}_{b,k-1}\Delta t-\boldsymbol{\omega}_{n,k}\Delta t\\
\delta\boldsymbol{a}_{b,k} =&\delta\boldsymbol{a}_{b,k-1}+\boldsymbol{a}_{w,k}\Delta t\\
\delta\boldsymbol{\omega}_{b,k} =&\delta\boldsymbol{\omega}_{b,k-1}+\boldsymbol{\omega}_{w,k}\Delta t\\
\delta\boldsymbol{g}_k =&\delta\boldsymbol{g}_{k-1}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Полученным уравнениям соответствует динамическая система

$$
\bar{x}_k=\begin{bmatrix}\bar{r}_k\\ \bar{v}_k\\ \bar{q}_k\\ \bar{a}_{b,k}\\ \bar{\omega}_{b,k}\\ \bar{g}_k\end{bmatrix}\quad
\delta\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{r}_k\\ \delta\boldsymbol{v}_k\\ \delta\boldsymbol{\theta}_k\\ \delta\boldsymbol{a}_{b,k}\\ \delta\boldsymbol{\omega}_{b,k}\\ \delta\boldsymbol{g}_k\end{bmatrix}\quad
\boldsymbol{z}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_k\\ \boldsymbol{v}_k\\ \boldsymbol{q}_k\end{bmatrix}\quad
u_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{m,k}\\ \boldsymbol{\omega}_{m,k}\end{bmatrix}\quad
\boldsymbol{\mu}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{n,k}\\ \boldsymbol{\omega}_{n,k}\\ \boldsymbol{a}_{w,k}\\ \boldsymbol{\omega}_{w,k}\end{bmatrix}\quad
\boldsymbol{\nu}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}_{r,k}\\ \boldsymbol{\nu}_{v,k}\\ \boldsymbol{\nu}_{q,k}\end{bmatrix}
\tag{58}
$$

$$
\bar{f}_k(\bar{x},u)=\begin{bmatrix}\bar{r}+\bar{v}\Delta t+(R\{\bar{q}\}(\boldsymbol{a}_m-\bar{a}_b)+\bar{g})\frac{\Delta t^2}{2}\\ \bar{v}+R\{\bar{q}\}(\boldsymbol{a}_m-\bar{a}_b)\Delta t\\ \bar{q}\otimes q\{(\boldsymbol{\omega}_m-\bar{\omega}_b)\Delta t\}\\ \bar{a}_b\\ \bar{\omega}_b\\ \bar{g}\end{bmatrix}\quad
h_k(\bar{x},\delta\boldsymbol{x},\nu)=\begin{bmatrix}\bar{r}+\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\nu}_r\\ \bar{v}+\delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\nu}_v\\ \bar{q}\otimes\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})\otimes\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\nu}_q)\end{bmatrix}
\tag{59}
$$

$$\delta f_k(\bar{x}, \delta\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{v}\Delta t \\ \delta\boldsymbol{v} - R\{\bar{q}\}[\boldsymbol{a}_m - \bar{a}_b]_\times \delta\boldsymbol{\theta}\Delta t - R\{\bar{q}\}\delta\boldsymbol{a}_b\Delta t + \delta\boldsymbol{g}\Delta t - R\{\bar{q}\}(I + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)\boldsymbol{a}_n\Delta t \\ R\{-[\boldsymbol{\omega}_m - \bar{\omega}_b]_\times \Delta t\}\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b\Delta t - \boldsymbol{\omega}_n\Delta t \\ \delta\boldsymbol{a}_b + \boldsymbol{a}_w\Delta t \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_w\Delta t \\ \delta\boldsymbol{g} \end{bmatrix} \tag{60}$$

$$s_k(\bar{x}, \delta\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \bar{r} + \delta\boldsymbol{r} \\ \bar{v} + \delta\boldsymbol{v} \\ \bar{q} \otimes \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{a}_b + \delta\boldsymbol{a}_b \\ \bar{\omega}_b + \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \bar{g} + \delta\boldsymbol{g} \end{bmatrix} \tag{61}$$

Функция g_k определяемая из уравнения $s_k(x_{k|k}, g_k(\delta x)) = s_k(\bar{x}_k, \delta x)$ не имеет аналитической формулы, но есть преближенная:

$$g_k(\delta\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r} - \delta r_{k|k} \\ \delta\boldsymbol{v} - \delta v_{k|k} \\ \left(I - \frac{1}{2}[\delta\theta_{k|k}]_\times\right)\delta\theta - \delta\theta_{k|k} + o(\delta\theta^2) \\ \delta\boldsymbol{a}_b - \delta a_{b,k|k} \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b - \delta\omega_{b,k|k} \\ \delta\boldsymbol{g} - \delta g_{k|k} \end{bmatrix} \tag{62}$$

Чтобы применить алгоритм параграфа 2.2 достаточно найти несколько матриц

$$\begin{gathered}
F = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \delta x}(\bar{x}, \delta\boldsymbol{x}, u, 0) = \begin{bmatrix} I & I\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -R\{\bar{q}\}\Delta t[\boldsymbol{a}_m - \bar{a}_b]_\times & -R\{\bar{q}\}\Delta t & 0 & I\Delta t \\ 0 & 0 & R\{-[\boldsymbol{\omega}_m - \bar{\omega}_b]_\times \Delta t\} & 0 & -I\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
L = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \delta \mu}(\bar{x}, \delta\boldsymbol{x}, u, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R\{\bar{q}\}(I + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
H = \frac{\partial h_k}{\partial \delta x}(x, \delta\boldsymbol{x}, 0) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\{\bar{q}\}^T J_r(\delta\boldsymbol{\theta}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
M = \frac{\partial h_k}{\partial \nu}(x, \delta\boldsymbol{x}, 0) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
G = \frac{\partial g_k}{\partial \delta x}(\delta x_{k|k}) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - \frac{1}{2}[\delta\theta_{k|k}]_\times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{63}$$

4 Справочные материалы и обозначения

4.1 Кватернионы

Кватернион q это пара из числа и вектора $[w, \vec{v}]^T$. Множество всех кватеринионов будем обозначать $\mathbb{H}$. Пусть нам заданы два кватерниона $q_1 = [w_1, \vec{v}_1]^T$ и $q_2 = [w_2, \vec{v}_2]^T$ и числа $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, тогда определим линейные операции над кватеринионами

$$t_1 q_1 + t_2 q_2 = \begin{bmatrix} t_1 w_1 + t_2 w_2 \\ t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 \end{bmatrix} \tag{64}$$

Умножение кватернионов определяется по формуле

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vec{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} w_2 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 w_2 - \vec{v}_1^T \vec{v}_2 \\ w_1 \vec{v}_2 + w_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{bmatrix}, \tag{65}$$

Умножение кватернионов некоммутативно (то есть зависит от порядка множителей). Для любых кватернионов $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ выполнены законы ассоциативности и дистрибутивности

$$(q_1 + q_2) \otimes q_3 = q_1 \otimes q_3 + q_2 \otimes q_3 \quad q_3 \otimes (q_1 + q_2) = q_3 \otimes q_1 + q_3 \otimes q_2 \quad (q_1 \otimes q_2) \otimes q_3 = q_1 \otimes (q_2 \otimes q_3) \tag{66}$$

Кватернои вида $e = [1, 0]^T$ называется единичным и обладает тем свойством, что $e \otimes q = q \otimes e = q$ для любого кватерниона $q \in \mathbb{H}$.

Каждый из множителей в формуле произведения кватернионов можно расматривать как линейный оператор над четырехмерными векторами

$$[q_1]_L q_2 = q_1 \otimes q_2 = [q_2]_R q_1 \tag{67}$$

Откуда можно вывести, что

$$[q]_L = wI + \begin{bmatrix} 0 & -\vec{v}^T \\ \vec{v} & [\vec{v}]_\times \end{bmatrix} \qquad [q]_R = wI + \begin{bmatrix} 0 & -\vec{v}^T \\ \vec{v} & -[\vec{v}]_\times \end{bmatrix} \tag{68}$$

где

$$[\vec{v}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{69}$$

Норма кватерниона определяется по формуле

$$\|q\| = \sqrt{w^2 + \vec{v}^T \vec{v}} \tag{70}$$

Для заданного кватерниона его опряженный кватернион определеятся по формуле

$$q^* = [w, -\vec{v}]^T \tag{71}$$

Для любого ненулевого кватерниона $q \in \mathbb{H}$ существует обратный кватернион $q^{-1} \in \mathbb{H}$ такой, что $q \otimes q^{-1} = q \otimes q^{-1} = e$. Более того

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \tag{72}$$

Действительная и мнимая часть кватерниона $q = [w, \vec{v}]$ определяется формулами

$$\Re q = w \qquad \Im q = \vec{v} \tag{73}$$

Легко проверить, что

$$\|q\| = \sqrt{\Re(q \otimes q^*)} \qquad \|p \otimes q\| = \|p\|\|q\| \tag{74}$$

Кватернионы у которых первая компонента равна 0 называются чистыми. Для заданного числа $w \in \mathbb{R}$ и вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ введем обозначения

$$q\{w\} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \qquad q\{\vec{v}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix} \tag{75}$$

Множество чистых кватернионов мы будем обозначать через $\mathbb{H}_p$.

Кватернионы нормы 1 называются единичными. Если q – единичный кватернион, то

$$q = \begin{bmatrix} \cos t \\ \vec{u}\sin t \end{bmatrix} = \cos t \cdot e + \sin t \cdot q\{\vec{u}\} \tag{76}$$

где $\vec{u}$ – вектор единичной длины и $t \in \mathbb{R}$. Для такого кватерниона обратный находится очень просто

$$q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\vec{u}\sin\theta \end{bmatrix} \tag{77}$$

Множество единичных кватернионов мы будем обозначать S^3.

Для кватернионов можно определить аналоги стандартных функций. Пусть $q = [w, \vec{v}]^T$ – некоторый кватернион, тогда положим по определению

$$\exp : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q \mapsto e^w \begin{bmatrix} \cos\|\vec{v}\| \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\sin\|\vec{v}\| \end{bmatrix} \qquad \log : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q \mapsto \begin{bmatrix} \log\sqrt{w^2 + \vec{v}^T\vec{v}} \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\arctan\frac{\|\vec{v}\|}{w} \end{bmatrix} \tag{78}$$

Можно показать, что эти функции взаимно обратные друг к другу.

Аналогично можно определить экспоненту от вектора и логарифм от единичного кватерниона

$$\begin{aligned} \exp :& \mathbb{R}^3 \to S^3 : \vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\|\vec{v}\| \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\sin\|\vec{v}\| \end{bmatrix} \\ \log :& S^3 \to \mathbb{H}_p : q \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\arctan\frac{\|\vec{v}\|}{w} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{79}$$

Легко проверить, что

$$\exp(\vec{v}) = \exp(q\{\vec{v}\}) \qquad \exp(q)^{-1} = \exp(q^*) \qquad \exp(\vec{v})^{-1} = \exp(-\vec{v}) \tag{80}$$

Нам будет полезен еще один вид экспоненты и логарифма

$$\operatorname{Exp} : \mathbb{R}^3 \to S^3 : \vec{v} \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right) \qquad \operatorname{Log} : S^3 \to \mathbb{R}^3 : q \mapsto 2\log(q) \tag{81}$$

Позже нам понадобится следующая формула

$$q \otimes p \otimes q^{-1} = \exp(R\{q\}\log(p)) = \operatorname{Exp}(R\{q\}\operatorname{Log}(p)) \tag{82}$$

где $p \in \mathbb{H}$ и $q \in S^3$. Действительно, так как $p \in \mathbb{H}$, то $p = \exp(t\vec{u})$ и $t\vec{u} = \log(p)$, для некоторого $t \in \mathbb{R}$ и единичного вектора $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. В этом случае

$$\begin{aligned} q \otimes p \otimes q^{-1} &= q \otimes \exp(t\vec{u}) \otimes q^{-1} \\ &= \cos t \cdot (q \otimes e \otimes q^{-1}) + \sin t \cdot (q \otimes q\{\vec{u}\} \otimes q^{-1}) \\ &= \cos t \cdot e + \sin t \cdot q\{R\{q\}\vec{u}\} \\ &= \exp(tR\{q\}\vec{u}) \\ &= \exp(R\{q\}\log(p)) \\ &= \operatorname{Exp}(R\{q\}\operatorname{Log}(p)) \end{aligned} \tag{83}$$

4.2 Связь кватернионов, ортогональных матриц и вращений

Множество всех вращений трехмерного пространства образуют группу (композиция двух вращений есть вращение; существует вращение, которое оставляет все точки на месте; у каждого вращения есть обратное). Эту группу обозначают $SO(3)$. Для описания вращений можно использовать единичные кватернионы.

По теореме Эйлера каждое вращение $r \in SO(3)$ задается углом поворота ϕ и осью поворота $\vec{u}$. Для описания оси поворота будем использовть вектор единичной длины. Тогда вращение можно описать единичным кватернионом

$$q = \operatorname{Exp}(\phi\vec{u}) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \vec{u}\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \tag{84}$$

Если $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ – произвольный вектор, то результат его вращения можно найти по формуле

$$r(\vec{x}) = \Im(q \otimes q\{\vec{x}\} \otimes q^{-1}) \tag{85}$$

Стоит отметить, что для описания одного и того же вращения r подойдут кватернионы

$$q = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \vec{u}\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \text{ и } q = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi-\phi}{2} \\ -\vec{u}\sin\frac{2\pi-\phi}{2} \end{bmatrix} \tag{86}$$

С другой стороны для описания вращений можно использовать ортогональные матрицы с определителем 1. Матрица R называется ортогональной если $R^T R = RR^T = I$. Для таких матриц $R^{-1} = R^T$. Теперь допустим, что вращение r описывается матрицей R, тогда для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ выполнено

$$r(\vec{x}) = R\vec{x} \tag{87}$$

Пусть вращение $r \in SO(3)$ описывается кватернионом $q = [w, \vec{v}]^T$, тогда соответствующая ортогональная матрица R будет иметь вид

$$R\{q\} = (w^2 - \vec{v}^T\vec{v})I + 2\vec{v}\vec{v}^T + 2w[\vec{v}]_\times \tag{88}$$

Данное сопоставление имеет много полезных свойств (является гомоморфизмом)

$$\begin{aligned} &R\{-q\} = R\{q\} && R\{e\} = I \\ &R\{q^{-1}\} = R\{q\}^{-1} = R\{q\}^T && R\{q_1 \otimes q_2\} = R\{q_1\}R\{q_2\} \end{aligned} \tag{89}$$

4.3 Дифференциальное исчисление для вращений

Пусть A – произвольная матрица размера 3×3. Ее матричной экспонентой будем называть сумму ряда

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \tag{90}$$

Эта сумма всегда существует. Матричная экспонента обладает некоторыми вполне ожидаемыми свойствами

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \exp(A)\exp(B) \qquad && \text{если } AB = BA \\ \exp(A)^{-1} &= \exp(-A) && \exp(O) = I \end{aligned} \tag{91}$$

Основное применение матричных экспонент – в решении дифференциальных уравенений. Пусть нам дано векторное дифференциальное уравенение

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) \tag{92}$$

Тогда его решение можно записать в виде $\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{x}(0)$.

Допустим, что в каждый момент времени ориентация твердого тела описывается кватернионом $q(t)$ и матрицей $R(t)$. Если $\vec{\omega}$ – это мгновенная угловая скорость тела, то

$$\frac{dR(t)}{dt} = R(t)[\omega]_\times \qquad \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2} q(t) \otimes q\{\vec{\omega}\} \tag{93}$$

Решения этих дифференциальных уравнений имеют вид

$$R(t) = R(0)\exp([\vec{\omega}]_\times t) \qquad q(t) = q(0) \otimes \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\omega} t\right) \tag{94}$$

Иногда возникает задача дифференцирования функциий со значениями в ортогональных матрицах или единичных кватернионах. Основная сложность состоит в том, что нельзя использовать классическое определение производной, так как классическое определение подразумевает, что нет никакх ограничений на множество значений функции для которой мы хотим найти производную.

Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to SO(3)$ – некоторая функция. Здесь мы определяем $SO(3)$ через кватернионы, поэтому можно считать, что f принимает значения в единичных кватернионах. Мы будем говорить, что f диффееренцируема справа в точке θ если для малых $\Delta\theta \in \mathbb{R}^3$ выполнено

$$f(\theta + \Delta\theta) = f(\theta) \otimes \mathrm{Exp}(A\Delta\theta) \otimes \mathrm{Exp}(o(\Delta\theta)) \tag{95}$$

для некоторой матрицы A размера 3×3. Эту матрицу мы будем называть правой производной функции f в точке θ и будем обозначать

$$A = \frac{\partial_r f(\theta)}{\partial\theta} \tag{96}$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial_r f(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\rho} \mathrm{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta+\rho))\Bigg|_{\rho=0} \tag{97}$$

Самой полезной для нас будет формула

$$J_r(\theta) = \frac{\partial_r \operatorname{Exp}(\theta)}{\partial \theta} = I - \frac{1 - \cos\|\theta\|}{\|\theta\|^2}[\theta]_\times + \frac{\|\theta\| - \sin\|\theta\|}{\|\theta\|^3}[\theta]_\times^2 \tag{98}$$

Для векторов с θ малой нормы получим

$$J_r(\theta) = I + \frac{1}{2}[\theta]_\times - \frac{1}{6}[\theta]_\times^2 + o(\theta) \tag{99}$$

Выведем еще несколько формул дифференцирования. Пусть $q \in S^3$ – произвольный константный единичный кватернион, тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r (q \otimes f(\theta))}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}((q \otimes f(\theta))^{-1} \otimes (q \otimes f(\theta + \rho)))\Big|_{\rho=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes q^{-1} \otimes q \otimes f(\theta + \rho))\Big|_{\rho=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho))\Big|_{\rho=0} \\
&= \frac{\partial_r f(\theta)}{\partial \theta} \\
\frac{\partial_r (f(\theta) \otimes q)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}((f(\theta) \otimes q)^{-1} \otimes (f(\theta + \rho) \otimes q))\Big|_{\rho=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}(q^{-1} \otimes f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho) \otimes q)\Big|_{\rho=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}(\operatorname{Exp}(R\{q^{-1}\} \operatorname{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho))))\Big|_{\rho=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} R\{q^{-1}\} \operatorname{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho))\Big|_{\rho=0} \\
&= R\{q^{-1}\} \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho))\Big|_{\rho=0} \\
&= R\{q\}^T \frac{\partial_r f(\theta)}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{100}$$

Список литературы

[1] *Joan Solà.* Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter, (2017), arXiv:1711.02508

[2] *Dongjiao He, Wei Xu, Fu Zhang M.* Kalman Filters on Differentiable Manifolds, (2021), arXiv:2102.03804