Об относительной инъективности $C_0(S)$-модулей $C_0(S)$

Н. Т. Немеш

Аннотация: В этой статье мы обсудим некоторые необходимые и некоторые достаточные условия относительной инъективности $C_0(S)$-модулей $C_0(S)$, где S — локально компактное хаусдорфово пространство. Также мы докажем версию теоремы Собчика для банаховых модулей. Основной результат статьи: если $C_0(S)$-модуль $C_0(S)$ относительно инъективен, то для любой предельной точки $s \in S$ выполнено $S = \beta(S \setminus \{s\})$.

Ключевые слова: инъективный банахов модуль, $C_0(S)$-пространство, почти компактное пространство.

Abstract: In this note we discuss some necessary and some sufficient conditions for relative injectivity of the $C_0(S)$-module $C_0(S)$, where S is a locally compact Hausdorff space. We also give a Banach module version of Sobczyk's theorem. The main result of the paper is as follows: if $C_0(S)$-module $C_0(S)$ is relatively injective then the equality $S = \beta(S \setminus \{s\})$ holds for any limit point $s \in S$.

Keywords: injective Banach module, $C_0(S)$-space, almost compact space.

1 Введение

Задачи продолжения отображений играли важную роль в функциональном анализе с самого его зарождения. Первый пример успешно решенной задачи подобного рода это теорема Хана-Банаха [1, 2, 3]. В современной терминологии эта теорема утверждает, что поле комплексных чисел является инъективным объектом в категории банаховых пространств. Все известные инъективные банаховы пространства изоморфны пространству непрерывных функций на некотором компактном пространстве [4]. Этот факт дает мотивировку нашему изучению инъективности пространств непрерывных функций, но в этот раз мы рассматриваем их как банаховы модули.

2 Предварительные сведения

Прежде чем мы перейдем к основной теме статьи нам нужно напомнить несколько определений и договориться об обозначениях.

Пусть M — подмножество множества N, тогда χ_M обозначает индикаторную функцию M. Если $f : N \to L$ — произвольная функция, то $f|_M$ обозначает ее ограничение на M.

Пусть S — хаусдорфово топологическое пространство. Пространство S называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого открытого множества в S открыто; *стоуновым*, если оно компактно и экстремально несвязно; *псевдокомпактным*, если любая непрерывная функция на S ограничена. Если S — хаусдорфово некомпактное локально компактное пространство, то через αS мы будем обозначать *александровскую компактификацию* S, а через βS мы будем обозначать *стоун-чеховскую компактификацию* S. *Стоун-чеховский нарост* $\beta S \setminus S$ мы будем обозначать через S^*. Хаусдорфово некомпактное топологическое пространство S называется *почти компактным*, если $\alpha S = \beta S$. Типичный пример почти компактного пространства это $[0,\omega_1)$, где ω_1 — первый несчетный ординал [6, глава 1.3]. Больше об экстремально несвязных, псевдокомпактных и почти компактных пространствах можно найти в [5, раздел 6.2], [5, раздел 3.10] и [6, глава 1.3] соответственно.

Для заданного некомпактного локально компактного хаусдорфова пространства S можно рассмотреть базу фильтра $\mathcal{B}_S$, состоящую из дополнений компактных подмножеств S. Фильтр $\mathcal{F}_S$, порожденный $\mathcal{B}_S$, называется *фильтром Фреше* на S. Теперь мы можем определить несколько функциональных пространств на S. Через $C(S)$ мы обозначим пространство непрерывных функций на S. Это пространство нормируемо, если S компактно. Через $C_b(S)$ мы обозначим банахово пространство непрерывных ограниченных функций на S. Символ $C_l(S)$ будет обозначать пространство непрерывных функций сходящихся по фильтру $\mathcal{F}_S$ к конечному пределу. Через $C_0(S)$ мы обозначим замкнутое подпространство $C_l(S)$, состоящее из функций, сходящихся по $\mathcal{F}_S$ к нулю (эти функции также называются исчезающими на бесконечности). Если S компактно, то все вышеперечисленные функциональные пространства совпадают с $C(S)$.

Пусть A — банахова алгебра. Мы будем рассматривать только правые банаховы модули над A с сжимающим билинейным оператором внешнего умножения $\cdot : X \times A \to X$. Пусть X и Y — два правых банаховых A-модуля, тогда отображение $\phi : X \to Y$ называется A-*морфизмом*, если оно непрерывно и является морфизмом A-модулей. Правые банаховы A-модули и A-морфизмы образуют категорию, которую мы будем обозначать $\mathbf{mod} - A$.

Понятие инъективности в $\mathbf{mod} - A$ может быть определено несколькими способами. Пусть $\xi : X \to Y$ — A-морфизм. Он называется *относительно допустимым*, если $\eta \circ \xi = 1_X$ для некоторого ограниченного линейного оператора $\eta : Y \to X$; *топологически допустимым*, если ξ является линейным гомеоморфизмом на свой образ; *метрически допустимым*, если ξ изометричен. Банахов A-модуль J называется *относительно инъективным* (соотв. *топологически инъективным*, соотв. *метрически инъективным*) если для любого относительно (соотв. топологически, соотв. метрически) допустимого A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : X \to J$ существует непрерывный (соотв. непрерывный, соотв. непрерывный с такой же нормой, как ϕ) морфизм A-модулей $\psi : Y \to J$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[ld, dashed, "\psi"'] \\ J & X \arrow[l, "\phi"] \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Если $A = \{0\}$, то категория $\mathbf{mod} - A$ превращается в обычную категорию банаховых пространств. В этом случае все банаховы пространства относительно инъективны. Что касается топологически и метрически инъективных банаховых пространств, то в стандартной литературе они называются $\mathcal{P}_\lambda$-*пространствами* и $\mathcal{P}_1$-*пространствами* соответственно. До сих пор не найдено простого описания $\mathcal{P}_\lambda$-пространств [8, стр. vi], но для $\mathcal{P}_1$-пространств вопрос закрыт. Всякое $\mathcal{P}_1$-пространство изометрически изоморфно $C(S)$-пространству, где S — стоуново пространство [9].

3 Необходимые и достаточные условия инъективности

В этом параграфе мы обсудим необходимые и достаточные условия относительной инъективности $C_0(S)$-модулей $C_0(S)$, где S — локально компактное хаусдорфово пространство. Мы начнем с очень ограничительного достаточного условия.

Предложение 3.1. *Пусть S — стоуново пространство. Тогда $C(S)$-моудль $C(S)$ относительно инъективен.*

Доказательство. Обозначим $A = C(S)$. Поскольку S — стоуново пространство, то A является AW^*-алгеброй [10, глава 1, параграф 7]. В [11, теорема 2] было показано, что любая AW^*-алгебра метрически инъективна, как бимодуль над собой. Внимательное изучение доказательства этой теоремы показывает, что те же самые рассуждения верны и для правого A-модуля A. Осталось заметить, что всякий метрически инъективный модуль относительно инъективен. □

Чтобы дать достаточно обременительное необходимое условие относительной инъективности $C(S)$-модуля $C(S)$, мы начнем со специального случая.

Предложение 3.2. *Пусть S — некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство. Предположим, что $C(\alpha S)$-модуль $C(\alpha S)$ относительно инъективен. Тогда S — почти компактное пространство.*

Доказательство. Очевидно, банаховы алгебры $C(\alpha S)$ и $C_l(S)$ изометрически изоморфны, поэтому $C_l(S)$-модуль $C_l(S)$ относительно инъективен. Заметим, что $C_0(S)$ это двусторонний идеал в $C_l(S)$, состоящий из функций, исчезающих на бесконечности. Этот идеал дополняем посредством проекции $P : C_l(S) \to C_0(S) : x \mapsto x - (\lim_{\mathcal{F}_S} x(s))\chi_S$. Рассмотрим изометрическое вложение $\xi : C_0(S) \to C_l(S) : x \mapsto x$, которое является $C_l(S)$-морфизмом. Так как $P \circ \xi = 1_{C_0(S)}$, то ξ относительно допустим.

Зафиксируем $f \in C_b(S)$ и рассмотрим $C_l(S)$-морфизм $\phi : C_0(S) \to C_l(S) : x \mapsto f \cdot x$. Поскольку $C_l(S)$ — относительно инъективный $C_l(S)$-модуль, то существует $C_l(S)$-морфизм $\psi : C_l(S) \to C_l(S)$ такой, что $\phi = \psi \circ \xi$. В частности, для всех $x \in C_0(S)$ мы имеем $f \cdot x = \phi(x) = \psi(\xi(x)) = \psi(x) = \psi(x \cdot \chi_S) = x \cdot \psi(\chi_S)$. Рассмотрим произвольную точку $s \in S$. Так как пространство S хаусдорфово и локально компактно, то существует непрерывная функция $e \in C_0(S)$ такая, что $e(s) = 1$ [5, следствие 3.3.3]. Значит, $f(s) = f(s)e(s) = (f \cdot e)(s) = (e \cdot \psi(\chi_S))(s) = e(s)\psi(\chi_S)(s) = \psi(\chi_S)(s)$. Поскольку $s \in S$ произвольно $f = \psi(\chi_S)$. По построению $\psi(\chi_S) \in C_l(S)$, поэтому $f \in C_l(S)$. Так как функция $f \in C_b(S)$ была выбрана произвольно, то $C_b(S) \subset C_l(S)$. Это возможно только, если $C_b(S) = C_l(S)$.

Вспомним, что в категории банаховых пространств $C_b(S)$ изометрически изоморфно $C(\beta S)$ и $C_l(S)$ изометрически изоморфно $C(\alpha S)$. Отсюда мы заключаем, что банаховы пространства $C(\beta S)$ и $C(\alpha S)$ изометрически изоморфны. По теореме Банаха-Стоуна [12, теорема 83] пространства αS и βS гомеоморфны. Следовательно, S почти компактно. □

Настало время определить еще одно понятие компактности.

Определение 3.3. *Компактное хаусдорфово пространство S называется равномерно компактным, если для каждой предельной точки $s \in S$ пространство $S \setminus \{s\}$ почти компактно.*

Другими словами компактное хаусдорфово пространство S равномерно компактно если для каждой предельной точки $s \in S$ выполнено $S = \beta(S \setminus \{s\})$.

Предложение 3.4. *Стоуновы пространства равномерно компактны.*

Доказательство. Пусть S — стоуново пространство и $s \in S$ его предельная точка. Обозначим $S_\circ = S \setminus \{s\}$. Так как пространство S компактно и $S_\circ$ его открытое подмножество, то $S_\circ$ локально компактно. Поскольку s — предельная точка в S, то пространство $S_\circ$ некомпактно и $\alpha S_\circ = S$. Рассмотрим два функционально отделимых множества $A, B \subset S_\circ$. По определению это значит, что существует непрерывная функция $f : S_\circ \to [0,1]$ такая, что $f(A) = \{0\}$ и $f(B) = \{1\}$. Рассмотрим непересекающиеся множества $U = f^{-1}([0,1/3)) \subset S_\circ$ и $V = f^{-1}((1/2,1]) \subset S_\circ$. Очевидно, U и V открыты в S. Так как S экстремально несвязно, то U и V имеют непересекающиеся замыкания в S. Так как $A \subset U$, $B \subset V$, то множества A и B так же имеют непересекающиеся замыкания в S. По теореме [5, теорема 3.6.2] мы получаем, что $\beta S_\circ = \alpha S_\circ = S$. □

Следствие 3.5. *Метризуемое пространство равномерно компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.*

Доказательство. Пусть S — метризуемое пространство с топологией индуцированной метрикой d. Предположим, что S равномерно компактно. Допустим, что S имеет предельную точку $s \in S$. Тогда пространство $S_\circ = S \setminus \{s\}$ почти компактно и как следствие псевдокомпактно [6, предложение 1.3.10]. Рассмотрим непрерывную функцию $f : S_\circ \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x,s)^{-1}$. Эта функция неограниченна потому, что $s \in S$ передельная точка. Таким образом, $S_\circ$ не псевдокомпактно. Противоречие, значит S — компактное метризуемое пространство без предельных точек, т.е. S конечно.

Обратно, если пространство S конечно, то оно по тривиальным причинам равномерно компактно. □

Следующий пример принадлежит К.П. Харту.

Предложение 3.6. *Тихоновское произведение несчетного семейства компактных хаусдорфовых пространств, состоящих из более чем одной точки, равномерно компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = (S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство нетривиальных компактных хаусдорфовых пространств. По теореме Тихонова их произведение S компактно [5, теорема 3.2.4]. Пусть $s \in S$ — предельная точка в S. Поскольку пространства S_λ состоят из более чем одной точки для всех $\lambda \in \Lambda$, то существует точка $s' \in S$ такая, что $s_\lambda \neq s'_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\Sigma(s')$ — Σ-произведение $\mathcal{S}$ в точке s', то есть $\Sigma(s')$ состоит из всех точек S, отличающихся от s' в не более чем счетном числе координат. Из упражнения [5, упражнение 3.12.23(c)] следует, что $S = \beta(\Sigma(s'))$. Так как $\Sigma(s') \subset S \setminus \{s\} \subset S = \beta(\Sigma(s'))$, то по следствию [5, следствие 3.6.9] получаем $\beta(S \setminus \{s\}) = \beta(\Sigma(s')) = S$. Так как $s \in S$ произвольная предельная точка, то S равномерно компактно. □

В некоторых случаях свойство равномерной компактности зависит от выбранных аксиом теории множеств. Обозначим через ZFC стандартную теорию множеств Цермело-Френкеля с добавленной аксиомой выбора. Через CH_n мы обозначим аксиому о том, что мощность континуума равняется n-му несчетному кардиналу. Наконец, MA будет обозначать аксиому Мартина (см. [13]). С одной стороны, $\mathbb{N}^*$ не равномерно компактно в ZFC + CH_1 [14]. С другой стороны, утверждение, что $\mathbb{N}^*$ равномерно компактно совместно с ZFC + MA + CH_2 [15].

Мы готовы сформулировать основной результат статьи.

Теорема 3.7. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство. Если $C_0(S)$-модуль $C_0(S)$ относительно инъективен, то S равномерно компактно.*

Доказательство. Так как $C_0(S)$-модуль $C_0(S)$ относительно инъективен, то из [16, следствие 2.2.8 (i)] мы знаем, что $C_0(S)$ обладает левой единицей. Таким образом, $\chi_S \in C_0(S)$, значит S компактно. Пусть s — предельная точка в S и $S_\circ = S \setminus \{s\}$. Так как $\alpha S_\circ = S$, мы видим, что $C(\alpha S_\circ)$-модуль $C(\alpha S_\circ)$ относительно инъективен. По предложению 3.2 пространство $S_\circ$ почти компактно. Так как предельная точка $s \in S$ выбрана произвольно, то пространство S равномерно компактно. □

Следствие 3.8. *Пусть S — компактное метризуемое пространство. Если $C(S)$-модуль $C(S)$ относительно инъективен, то S конечно.*

Доказательство. Результат непосредственно следует из теоремы 3.7 и следствия 3.5. □

На данный момент все известные примеры локально компактных пространств S, для которых $C_0(S)$-модуль $C_0(S)$ относительно инъективен, являются экстремально несвязными. Было бы интересно построить примеры, не являющиеся экстремально несвязными, если таковые вообще есть. Первый кандидат — это пространство $\mathbb{N}^*$. Оно не является экстремально несвязным [5, пример 6.2.31], но оно равномерно компактно при некоторых теоретико-множественных предположениях. Однако, следует помнить, что пространство $C(\mathbb{N}^*)$ не является инъективным банаховым пространством [17, следствие 2]. Благодаря предложению 3.6, есть еще один возможный кандидат — это несчетная степень дискретного пространства $\{0, 1\}$.

4 Теорема Собчика для банаховых модулей

В классической теории все бесконечномерные инъективные банаховы пространства несепарабельны, поскольку содержат копию $\ell_\infty(\mathbb{N})$ [18, следствие 1.1.4]. Собчик показал, что пространство c_0 инъективно, но в категории сепарабельных банаховых пространств [19, теорема 5]. Позже Зиппин доказал [20], что все пространства инъективные в категории сепарабельных банаховых пространств изоморфны c_0. Мы докажем, что $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль $c_0(\Lambda)$ относительно инъективен для любого множества Λ. Заметим, что по теореме 3.7 банахов $c_0(\Lambda)$-модуль $c_0(\Lambda)$ не является относительно инъективным для бесконечного Λ.

Теперь нам нужно напомнить несколько понятий из теории банаховых пространств. Ограниченный линейный оператор T называется *слабо компактным*, если он переводит ограниченные множества в относительно слабо компактные. Ограниченный линейный оператор T называется *вполне непрерывным*, если он переводит слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся по норме.

Банахово пространство E называется *пространством Гротендика*, если каждая слабо* сходящаяся последовательность в E^* сходится слабо. Очевидно все рефлексивные пространства суть пространства Гротендика. Банахово пространство E называется *слабо компактно порожденным*, если существует слабо компактное множество $K \subset E$, линейная оболочка которого плотна в E. Типичные примеры слабо компактно порожденных пространств — это рефлексивные и сепарабельные пространства [21, параграф 13.1]. Наконец, мы будем говорить, что банахово пространство E имеет *свойство Данфорда-Петтиса*, если для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ и любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ выполнено $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$. Для любого компактного пространства S банахово пространство $C(S)$ имеет свойство Данфорда-Петтиса [23].

Предложение 4.1. *Любой ограниченный линейный оператор $T : \ell_\infty(\Lambda) \to c_0(\Lambda)$ слабо компактен и вполне непрерывен.*

Доказательство. Заметим, что пространство $\ell_\infty(\Lambda)$ изометрически изоморфно $C(\beta\Lambda)$. Так как $\beta\Lambda$ является стоуновым пространством, то $\ell_\infty(\Lambda)$ — пространство Гротендика [22, теорема

9, стр. 168]. Пространство $c_0(\Lambda)$ слабо компактно порождено [21, параграф 13.1 пример (iii)]. Тогда оператор T слабо компактен [21, пример 13.33]. Снова, поскольку $\ell_\infty(\Lambda)$ есть $C(S)$-пространство для $S = \beta\Lambda$, то $\ell_\infty(\Lambda)$ обладает свойством Данфорда-Петтиса [21, теорема 13.43]. Таким образом, всякий слабо компактный оператор с областью определения $\ell_\infty(\Lambda)$ вполне непрерывен [21, предложение 13.42]. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть Λ — бесконечное множество, $x : \Lambda \to \mathbb{C}$ — функция такая, что $\lim_{n\to\infty} x(\lambda_n) = 0$ для всех последовательностей $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных элементов в Λ. Тогда $\lim_{\mathcal{F}_\Lambda} x(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Допустим, это не так. Тогда найдется $\epsilon > 0$ такое, что для любого $L \in \mathcal{F}_\Lambda$ существует $\lambda \in L$ со свойством $|x(\lambda)| > \epsilon$. По индукции мы можем построить последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ различных элементов в Λ такую, что $|x(\lambda_n)| \geq \epsilon$. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} x(\lambda_k) \neq 0$. Противоречие. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть Λ — бесконечное множество. Тогда для любого ограниченного линейного оператора $T : \ell_\infty(\Lambda) \to c_0(\Lambda)$ выполнено $\lim_{\mathcal{F}_\Lambda} T(\chi_{\{\lambda\}})(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных элементов Λ. Тогда $(\chi_{\{\lambda_n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к 0 в $c_0(\Lambda)$, и тем более в $\ell_\infty(\Lambda)$. По предложению 4.1 оператор T вполне непрерывен, поэтому $T(\chi_{\{\lambda_n\}})$ сходится к 0 по норме. В частности, $\lim_{n\to\infty} T(\chi_{\{\lambda_n\}})(\lambda_n) = 0$. Теперь из предложения 4.2 мы получаем нужное равенство. $\square$

Теорема 4.4. *Для любого множества Λ правый $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль $c_0(\Lambda)$ относительно инъективен.*

Доказательство. Допустим, что множество Λ бесконечно. Из [7, предложение IV.1.39] следует, что достаточно предъявить морфизм правых $\ell_\infty(\Lambda)$-модулей правый обратный к $\rho : c_0(\Lambda) \to \mathcal{B}(\ell_\infty(\Lambda), c_0(\Lambda)) : x \mapsto (a \mapsto x \cdot a)$. Он действительно существует. Рассмотрим линейный оператор $\tau : \mathcal{B}(\ell_\infty(\Lambda), c_0(\Lambda)) \to c_0(\Lambda) : T \mapsto (\lambda \to T(\chi_{\{\lambda\}})(\lambda))$. По предложению 4.3 он корректно определен. Легко показать, что τ — сжимающий морфизм правых $\ell_\infty(\Lambda)$-модулей.

Если множество Λ конечно, то оно является стоуновым пространством. Тогда $c_0(\Lambda) = \ell_\infty(\Lambda) = C(\Lambda)$ и по предложению 3.1 банахов $\ell_\infty(\Lambda)$-модуль $c_0(\Lambda)$ относительно инъективен. $\square$

5 Финансирование

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №19–01–00447).

Список литературы

[1] *Hahn, H.*, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen., J. Reine Angew. Math., 157, 214–229, 1927.

[2] *Banach, S.*, Sur les fonctionnelles linéaires, Stud. Math., 1(1), 211–216, 1929.

[3] *Banach, S.*, Sur les fonctionnelles linéaires II, Stud. Math., 1(1), 223–239, 1929.

[4] *Blasco, J.L. and Ivorra, C.*, On constructing injective spaces of type $C(K)$, Indagationes Mathematicae, 9(12), 161–172, 1998.

[5] *Энгелькинг, Р.*, Общая топология, 1986.

[6] *Hrušák, M. and Tamariz-Mascarúa, A. and Tkachenko, M.*, Pseudocompact topological spaces, Springer, 2018.

[7] *Helemskii, A. Ya.*, The homology of Banach and topological algebras, Springer, 1989.

[8] *Avilés, A. and Sánchez, F. C. and Castillo, J. MF. and González, M. and Moreno, Y.*, Separably injective Banach spaces, 17–65, 2016.

[9] *Hasumi, M.*, The extension property of complex Banach spaces, Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 10(2), 135–142, 1958.

[10] *Berberian, S. K.* Baer *-rings, 195, 2010.

[11] *Takesaki, M.*, On the Hahn-Banach type theorem and the Jordan decomposition of module linear mapping over some operator algebras, Kodai Mathematical Seminar Reports, 12, 1–10, 1960.

[12] *Stone, M. H.*, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Transactions of the American Mathematical Society, 41(3), 375–481, 1937.

[13] *Kunen, K.*, Set theory: an introduction to independence proofs, Elsevier, 2014.

[14] *Fine, N. J. and Gillman, L.* Extension of continuous functions in $\beta\mathbf{N}$ Bull. Amer. Math. Soc., 66, 376–381, 1960.

[15] *van Douwen, E. and Kunen, K. and van Mill, J.* There can be C^*-embedded dense proper subspaces in $\beta\omega - \omega$, Proc. Amer. Math. Soc., 105(2), 462—470, 1989.

[16] *Ramsden, P.*, Homological properties of semigroup algebras, The University of Leeds, 2009.

[17] *Amir, D.*, Projections onto continuous function spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 15(3), 396–402, 1964.

[18] *Rosenthal, H.*, On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory Stud. Math., 37(1), 13–36, 1970.

[19] *Sobczyk, A.*, Projection of the space (m) on its subspace (c_0), Bulletin of the American Mathematical Society, 47(12), 938–947, 1941.

[20] *Zippin, M.*, The separable extension problem, Israel Journal of Mathematics, 26(3–4), 372–387, 1977.

[21] *Fabian, M. and Habala, P. and Hajek, P. and Montesinos, V. and Zizler, V.* Banach space theory. The basis for linear and non-linear analysis. Springer, 2011.

[22] *Grothendieck, A.*, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Canadian Journal of Mathematics, 5, 129–173, 1953.

[23] *Dunford, N. and Pettis, B. J.*, Linear operations on summable functions, Transactions of the American Mathematical Society, 47(3), 323–392, 1940.

Норберт Немеш, Факультет механики и математики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва 119991 Россия
E-mail: nemeshnorbert@yandex.ru