Относительная проективность модулей L_p

Н. Т. Немеш

Аннотация: В работе даны критерии относительной проективности L_p-пространств рассмотренных как левые банаховы модули над алгеброй ограниченных измеримых функций ($1 \leq p \leq +\infty$) и алгеброй непрерывных исчезающих в бесконечности функций ($1 \leq p < +\infty$). Главный результат статьи: для локально компактного хаусдорфова пространства S и локально конечной внутренне компактно регулярной борелевской меры μ относительная проективность $C_0(S)$-модуля $L_\infty(S, \mu)$ влечет внутренне открытую регулярность меры и псевдокомпактность ее носителя.

Ключевые слова: проективный модуль, L_p-пространство, нормальная мера, псевдокомпактное пространство.

1 Введение

Основной вопрос банаховой гомологии звучит следующим образом: какова гомологическая размерность данной банаховой алгебры A? Для этого необходимо уметь отвечать на другой вопрос: является ли данный банахов A-модуль проективным? Для многих модулей функционального анализа ответы известны. При этом все еще есть примеры классических модулей анализа, для которых данный вопрос не решен, например L_p-пространства. Мы будем рассматривать пространства Лебега как левые банаховы модули над алгеброй исчезающих на бесконечности непрерывных функций, определенных на локально компактном хаусдорфовом пространстве, и как модули над алгеброй ограниченных измеримых функций. Для этих пространств мы дадим необходимые и достаточные условия их относительной проективности. Особый интерес представляет критерий относительной проективности модуля L_∞. Дело в том, что один из основных результатов банаховой гомологии — теорема о глобальной размерности [[1], предложение V.2.21] основывается на том факте, что гомологическая размерность модуля ограниченных последовательностей на алгеброй сходящихся последовательностей равна 2. В частности этот модуль не проективен. Как мы увидим, это поведение типично для большинства модулей L_∞. Перед тем, как перейти к основной части статьи, нам понадобится несколько определений.

Пусть M — подмножество множества N, тогда χ_M будет обозначать индикаторную функцию множества M. Для произвольной функции $f : N \to L$ через $f|_M$ мы будем обозначать ее ограничение на M. Символ 1_M будет обозначать тождественное отображение на M.

Пусть S — произвольное топологическое пространство и M — его подмножество. Тогда через $\mathrm{cl}_S(M)$ и $\mathrm{int}_S(M)$ мы будем обозначать замыкание и внутренность M в S.

Все банаховы пространства в этой статье рассматриваются над полем комплексных чисел. Для заданных банаховых пространств X и Y через $X \oplus_1 Y$ мы будем обозначать их ℓ_1-сумму, а через $X \widehat{\otimes} Y$ их проективное тензорное произведение. Будем говорить, что банахово пространство X дополняемо в Y, если X — подпространство в Y, и существует ограниченный линейный оператор $P : Y \to Y$ такой что $P|_X = 1_X$ и $\mathrm{Im}(P) = X$. Для $1 \leq p \leq +\infty$ и заданного пространства с мерой (X, μ) через $L_p(X, \mu)$ мы будем обозначать банахово пространство классов эквивалентности p-интегрируемых (или существенно ограниченных, если

$p = +\infty$) функций на X. Элементы $L_p(X, \mu)$ будут обозначаться через $[f]$. Отметим, что все L_p-пространства обладают свойством аппроксимации.

Для заданной банаховой алгебры A через $A_+ := A \oplus_1 \mathbb{C}$ мы будем обозначать ее стандартную унитизацию. Мы будем рассматривать только левые банаховы модули с сжимающим билинейным оператором внешнего умножения $\cdot : A \times X \to X$. Если A — банахова алгебра с единицей e, то банахов A-модуль X называется унитальным, если $e \cdot x = x$ для всех $x \in X$. Для заданного банахова A-модуля X его существенной частью X_{ess} называется замкнутая линейная оболочка множества $A \cdot X$. Мы будем называть модуль X существенным, если $X = X_{ess}$. Очевидно, любой унитальный банахов модуль существенный. Пусть X и Y — два банаховых A-модуля, тогда отображение $\phi : X \to Y$ будем называть A-морфизмом, если оно является непрерывным морфизмом A-модулей. Банаховы A-модули и A-морфизмы образуют категорию, которую мы будем обозначать через $A - \mathbf{mod}$.

Категория $A-\mathbf{mod}$ имеет свое понятие проективности. Произвольный A-морфизм $\xi : X \to Y$ будем называть допустимым если существует правый обратный ограниченный линейный оператор $\eta : Y \to X$, т.е., если $\xi\eta = 1_Y$. Банахов A-модуль P будем называть относительно проективным, если для любого допустимого A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует A-морфизм $\psi : P \to X$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной. Вместо проверки по определению можно показать, что банахов A-модуль P относительно проективен, предъявив A-морфизм $\sigma : P \to A_+ \widehat{\otimes} P$, являющийся правым обратным каноническому A-морфизму $\pi_P^+ : A_+ \widehat{\otimes} P \to P : (a \oplus_1 z) \widehat{\otimes} x \mapsto a \cdot x + zx$ [[1], предложение IV.1.1]. Если банахов A-модуль P существенный, то он проективен тогда и только тогда, когда A-морфизм $\pi_P : A \widehat{\otimes} P \to P : a \widehat{\otimes} x \mapsto a \cdot x$ обладает правым обратным A-морфизмом [[1], предложение IV.1.2].

2 Необходимые условия относительной проективности

В этом параграфе мы покажем, что для относительно проективного A-модуля X его существенная часть дополняема и A-значные A-морфизмы разделяют точки существенной части. Эти необходимые условия будут играть ключевую роль в статье.

Предложение 2.1. *Пусть X — банахов A-модуль и E — банахово пространство. Пусть $j_E : A_+ \widehat{\otimes} E \to (A \widehat{\otimes} E) \oplus_1 E$ обозначает естественный изоморфизм. Тогда для любого A-морфизма $\sigma : X \to A_+ \widehat{\otimes} E$ существуют ограниченные линейные операторы $\sigma_1 : X \to A \widehat{\otimes} E$, $\sigma_2 : X \to E$ такие, что*

(i) $j_E(\sigma(x)) = \sigma_1(x) \oplus_1 \sigma_2(x)$ для всех $x \in X$;

(ii) $\sigma_1(a \cdot x) = a \cdot \sigma_1(x) + a \widehat{\otimes} \sigma_2(x)$ для всех $x \in X$ и $a \in A$;

(iii) $\sigma_2(a \cdot x) = 0$ для всех $x \in X$ и $a \in A$.

Как следствие, $\sigma_1|_{X_{ess}}$ — A-морфизм и $\sigma_2|_{X_{ess}} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим ограниченные линейные операторы $q_1 : A_+ \widehat{\otimes} X \to A \widehat{\otimes} X : (a \oplus_1 z) \widehat{\otimes} x \mapsto a \widehat{\otimes} x$ и $q_2 : A_+ \widehat{\otimes} X \to X : (a \oplus_1 z) \widehat{\otimes} x \mapsto zx$. Определим отображения $\sigma_1 = q_1\sigma$, $\sigma_2 = q_2\sigma$. Очевидно, что $j_E = q_1 \oplus_1 q_2$, поэтому $j_E(\sigma(x)) = \sigma_1(x) \oplus_1 \sigma_2(x)$ для всех $x \in X$. Заметим, что $a \cdot u = a \cdot q_1(u) + a \widehat{\otimes} q_2(u)$ для всех $a \in A$ и $u \in A_+ \widehat{\otimes} X$. Поскольку σ — A-морфизм, легко проверить, что $\sigma_1(a \cdot x) = a \cdot \sigma_1(x) + a \widehat{\otimes} \sigma_2(x)$ и $\sigma_2(a \cdot x) = 0$ для всех $a \in A$, $x \in X$. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть X — относительно проективный банахов A-модуль. Тогда X_{ess} дополняемо в X как банахово пространство.*

Доказательство. Поскольку X относительно проективен, существует A-морфизм $\sigma : X \to A_+ \widehat{\otimes} X$ такой, что $\pi_X^+ \sigma = 1_X$. Пусть σ_1 и σ_2 — ограниченные линейные операторы из предложения 2.1. Теперь рассмотрим A-морфизм $\pi_X : A \widehat{\otimes} X \to X : a \widehat{\otimes} x \mapsto a \cdot x$, тогда для всех $x \in X$ выполнено $x = \pi_X^+(\sigma(x)) = \pi_X(\sigma_1(x)) + \sigma_2(x)$. Рассмотрим ограниченный линейный оператор $\eta = \pi_X \sigma_1$. Так как $\sigma_2|_{X_{ess}} = 0$, то $\eta|_{X_{ess}} = 1_X$. Более того, $\mathrm{Im}(\eta) \subset \mathrm{Im}(\pi_X) = X_{ess}$, следовательно η — ограниченный линейный проектор X на X_{ess}. $\square$

Следующее предложение — простое обобщение [[2], лемма 1.4].

Предложение 2.3. *Пусть A — банахова алгебра и X — относительно проективный банахов A-модуль. Допустим, что A или X обладает свойством аппроксимации. Тогда*

(i) для любого ненулевого $x \in X$ существует A-морфизм $\phi : X \to A_+$ такой, что $\phi(x) \neq 0$;

(ii) для любого ненулевого $x \in X_{ess}$ существует A-морфизм $\psi : X_{ess} \to A$ такой, что $\psi(x) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $i_E : E \widehat{\otimes} \mathbb{C} \to E$ — естественный изоморфизм.

(i) Зафиксируем ненулевой $x \in X$. Так как X относительно проективен, то существует A-морфизм $\sigma : X \to A_+ \widehat{\otimes} X$ такой что $\pi_X^+ \sigma = 1_X$. Рассмотрим $u := \sigma(x) \in A_+ \widehat{\otimes} X$. Поскольку $\pi_X^+(u) = x \neq 0$, то $u \neq 0$. Так как A или X обладает свойством аппроксимации, то существует $f \in A_+^*$ и $g \in X^*$ такие, что $(f \widehat{\otimes} g)(u) \neq 0$ [[3], следствие I.5.1, стр. 168]. Рассмотрим $a := ((1_{A_+} \widehat{\otimes} g)(u)) \in A_+ \widehat{\otimes} \mathbb{C}$ и $F := (f \widehat{\otimes} 1_{\mathbb{C}}) \in A_+^* \widehat{\otimes} \mathbb{C}$. Так как $F(a) = (f \widehat{\otimes} g)(u) \neq 0$, то $a \neq 0$. Теперь легко проверить, что линейный оператор $\xi := (1_{A_+} \widehat{\otimes} g)\sigma$ является A-морфизмом. Очевидно, что $\xi(x) = a \neq 0$. Остается положить $\phi = i_{A_+}\xi$.

(ii) Зафиксируем ненулевой $x \in X_{ess}$. Пусть ξ — морфизм построенный в пункте (i). Рассмотрим морфизмы ξ_1 и ξ_2 из предложения 2.1. Так как $\xi(x) = j_{\mathbb{C}}(\xi_1(x) \oplus_1 \xi_2(x)) \neq 0$ и $\xi_2(x) = 0$, то $\xi_1(x) \neq 0$. Из того же предложения известно, что $\xi_1|_{X_{ess}}$ — A-морфизм, поэтому остается положить $\psi = i_A \xi_1|_{X_{ess}}$.

$\square$

——————————————————————————————- Preliminaries on general measure theory —— ——————————————————————————————-

3 Предварительные сведения по общей теории меры

Всестороннее изучение общих пространств с мерой можно найти в [4]. Мы будем использовать определения из этой монографии.

Пусть X — произвольное множество. Под мерой мы будем понимать счетно аддитивную функцию множеств со значениями в $[0,+\infty]$, определенную на σ-алгебре Σ измеримых подмножеств множества X. Если F — измеримое множество, то корректно определены меры $\mu^F : \Sigma \to [0,+\infty] : E \mapsto \mu(E \cap F)$ и $\mu_F : \Sigma_F \to [0,+\infty] : E \mapsto \mu(E)$, где $\Sigma_F = \{E \in \Sigma : E \subset F\}$. Измеримое множество E называется атомом, если $\mu(A) > 0$ и для каждого измеримого подмножества $B \subset A$ верно или $\mu(B) = 0$ или $\mu(A \backslash B) = 0$. Мера μ называется чисто атомической, если каждое измеримое подмножество положительной меры содержит атом. Мера μ называется полуконечной, если для любого измеримого множества A бесконечной меры существует измеримое подмножество в A конечной положительной меры. Семейство $\mathcal{D}$ измеримых множеств конечной меры называется разложением X, если для любого измеримого множества E верно $\mu(E) = \sum_{D\in\mathcal{D}} \mu(E \cap D)$ и множество F измеримо если $F \cap D$ измеримо для всех $D \in \mathcal{D}$. Наконец, мера μ называется разложимой, если она полуконечна и существует разложение X. На самом деле пространство с мерой разложимо тогда и только тогда, когда оно является дизъюнктным объединением пространств конечной меры [[4], упражнение 214X (i)]. Большинство мер встречающихся в функциональном анализе разложимы.

Определение 3.1. *Пусть A — атом в пространстве с мерой (X, μ), тогда измеримое множество $C \subset A$ называется ядром A, если C — атом и единственные измеримые подмножества в C — это $\varnothing$ и C. Атом A называется твердым, если у него есть ядро. Очевидно, если ядро существует, то оно единственно, и в этом случае мы будем обозначать ядро через $A^\bullet$.*

Предложение 3.2. *Пусть (X, μ) — непустое пространство с конечной мерой такое, что единственное множество меры 0 в X — это пустое множество. Тогда (X, μ) — чисто атомическое пространство и каждый атом твердый.*

Доказательство. Пусть E — измеримое подмножество положительной меры. Пусть $x \in E$, тогда рассмотрим величину $c := \inf\{\mu(F) : x \in F \in \Sigma,\ F \subset E\}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $E_n \in \Sigma$ такое, что $x \in E_n \subset E$ и $\mu(E_n) < c + 2^{-n}$. Определим $A = \bigcap\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$, тогда $x \in A \in \Sigma$ и $\mu(A) = c$. По построению A непусто, поэтому $\mu(A) > 0$. Пусть B — измеримое подмножество в A. Если $x \in A \backslash B$, то $c \leq \mu(A \backslash B) \leq \mu(A) = c$, т.е. $\mu(B) = 0$. Аналогично, если $x \in B$ мы получаем $\mu(A \setminus B) = 0$. Таким образом, $A \subset E$ — атом. Поскольку E произвольно, (X, μ) чисто атомическое пространство.

Теперь пусть A — атом в (X, μ). Если $B \in \Sigma$ и $B \subset A$, то или $\mu(B)$ или $\mu(A \setminus B) = 0$. Из предположения на (X, μ) мы получаем, что или B или $A \backslash B$ пусто. Следовательно $A^\bullet = A$. □

4 Относительная проективность $B(\Sigma)$-модулей $L_p(X, \mu)$

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Через $B(\Sigma)$ мы будем обозначать алгебру измеримых ограниченных функций с sup нормой. В этом параграфе мы дадим критерий относительно проективности левых $B(\Sigma)$-модулей $L_p(X, \mu)$. Говоря неформально, все такие модули выглядят как $\ell_\infty(\Lambda)$-модули $\ell_p(\Lambda)$ для некоторого индексного множества Λ.

Предложение 4.1. *Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $L_p(X, \mu)$ — относительно проективный $B(\Sigma)$-модуль. Тогда для любого измеримого множества $B \subset X$ банахов $B(\Sigma)$-модуль $L_p(X, \mu^B)$ относительно проективен.*

Доказательство. Для $B(\Sigma)$-морфизмов

$$\pi : L_p(X,\mu) \to L_p(X,\mu^B) : [f] \mapsto [f]\chi_B,$$

$$\sigma : L_p(X,\mu^B) \to L_p(X,\mu) : [f] \mapsto [f].$$

легко проверить,что выполнено $\pi\sigma = 1_{L_p(X,\mu^B)}$. Другими словами, $L_p(X,\mu^B)$ — ретракт $L_p(X,\mu)$ в $B(\Sigma)-\mathbf{mod}$. Теперь результат следует из [[7], предложение VII.1.6]. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть (X,μ) — разложимое пространство с мерой и $L_p(X,\mu)$ — относительно проективный $B(\Sigma)$-модуль. Тогда (X,μ) является дизъюнктным объединением твердых атомов конечной меры.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — разложение X на измеримые подмножества конечной меры. Зафиксируем $D \in \mathcal{D}$ и введем обозначение $\nu := \mu^D$. По предложению 4.1 банахов $B(\Sigma)$-модуль $L_p(X,\nu)$ относительно проективен. Рассмотрим произвольное множество $E \in \Sigma$ положительной меры ν. Так как мера ν конечна, то конечно и $\nu(E)$. Тогда $[f] := [\chi_E]$ — корректно определенный ненулевой элемент в $L_p(X,\nu)$. Так как $B(\Sigma)$ — унитальная алгебра, то модуль $L_p(X,\nu)$ существенный. Теперь из предложения 2.3 мы получаем $B(\Sigma)$-морфизм $\psi : L_p(X,\nu) \to B(\Sigma)$ такой, что $\psi([f]) \neq 0$. Следовательно, множество $F := a^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \in \Sigma$ непусто. Отметим, что $[f] = [f]\chi_E$, поэтому $a = \psi([f]\chi_E) = \psi([f])\chi_E = a\chi_E$. Значит, $a|_{X\setminus E} = 0$ и $F \subset E$. Рассмотрим произвольное измеримое множество $A \subset F$ с нулевой ν мерой. Тогда $[\chi_A]$ — нулевой элемент в $L_p(X,\nu)$ и $[\chi_A] = [\chi_E]\chi_A$. Следовательно, $a\chi_A = \psi([\chi_E])\chi_A = \psi([\chi_E]\chi_A) = \psi([\chi_A]) = 0$. Так как $A \subset F$ и a не равно нулю ни в одной точке множества F, то $A = \varnothing$. Поскольку $F \neq \varnothing$, то из предложения 3.2 мы получаем, что пространство с мерой (F,ν_F) имеет твердый атом. Таким образом, мы показали, что любое измеримое множество E положительной ν меры содержит твердый атом. Тогда из стандартного приема с леммой Цорна мы получаем, что (X,μ^D) — дизъюнктное объединение твердых атомов. Такой же вывод верен и для (X,μ_D). Так как мера μ_D конечна, то конечен каждый ее атом. Поскольку D произвольно, то вывод теоремы следует из [[4], упражнение 214X (i)]. $\square$

Пусть (X,μ) — пространство с мерой и A — измеримое подмножество конечной положительной меры. Тогда корректно определен ограниченный линейный функционал $m_A : B(\Sigma) \to \mathbb{C} : a \mapsto \mu(A)^{-1}\int_A f(x)d\mu(x)$ нормы 1.

Предложение 4.3. *Пусть (X,μ) — дизъюнктное объединение семейства $\mathcal{A}$ твердых атомов конечной меры. Тогда*

(i) множество $X^\bullet := \bigcup\{A^\bullet : A \in \mathcal{A}\}$ измеримо и $\mu(X \setminus X^\bullet) = 0$;

(ii) для любого атома $A \in \mathcal{A}$ и любых функций $a,b \in B(\Sigma)$ выполнено $a|_{A^\bullet} = m_{A^\bullet}(a)$ и $m_{A^\bullet}(ab) = m_{A^\bullet}(a)m_{A^\bullet}(b)$;

(iii) для любой функции $a \in B(\Sigma)$ существует функция $b \in B(\Sigma)$ такая, что $b|_{X^\bullet} = 0$ и выполнено поточечное равенство $a = \sum_{A\in\mathcal{A}} m_{A^\bullet}(a)\chi_{A^\bullet} + b$;

(iv) для любой функции $[f] \in L_p(X,\mu)$ верно $[f] = [\sum_{A\in\mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f)\chi_{A^\bullet}]$.

Доказательство. (i) Так как $\mathcal{A}$ — разложение X, то (X,μ) — разложимое пространство с мерой и $X^\bullet$ измеримо. Заметим, что дизъюнктные множества $A \setminus A^\bullet$ для $A \in \mathcal{A}$ имеют нулевую меру, а значит и их объединение $X \setminus X^\bullet$ имеет нулевую меру.

(iii) Зафиксируем $a \in B(\Sigma)$ и $A \in \mathcal{A}$. Так как $A^\bullet$ содержит только два измеримых подмножества, то a — константа на $A^\bullet$. Значит, $a|_{A^\bullet} = m_{A^\bullet}(a)$. Как следствие, для измеримой функции $b = a - \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(a)\chi_{A^\bullet}$ мы имеем $b|_{X^\bullet} = 0$.

(iv) Результат немедленно следует из пункта (iii). □

Предложение 4.4. *Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и (X,μ) — дизъюнктное объединение семейства твердых атомов конечной меры. Тогда $B(\Sigma)$-модуль $L_p(X,\mu)$ относительно проективен.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает множество твердых атомов в X.

Рассмотрим случай $p = +\infty$. Определим ограниченный линейный оператор

$$\rho : L_\infty(X,\mu) \to B(\Sigma) : [f] \mapsto \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f)\chi_{A^\bullet}.$$

Из пункта (ii) предложения 4.3 следует, что ρ является $B(\Sigma)$-морфизмом. Следовательно, $\sigma = \rho \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{L_\infty(X,\mu)}$ тоже является $B(\Sigma)$-морфизмом. Из пункта (iv) предложения 4.3 мы получаем, что $\pi_{L_\infty(X,\mu)}\sigma = 1_{L_\infty(X,\mu)}$. Так как $B(\Sigma)$-модуль $L_\infty(X,\mu)$ унитальный, то из [[1], предложение IV.1.2] следует его относительная проективность.

Рассмотрим случай $1 \leq p < +\infty$. Пусть $[f] \in L_p(X,\mu)$, тогда из пункта (iv) предложения 4.3 мы имеем $[f] = [\sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f)\chi_{A^\bullet}]$. Более того, поскольку $p < +\infty$ выполнено $[f] = \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f)[\chi_{A^\bullet}]$ в $L_p(X,\mu)$. Заметим, что последняя сумма содержит не более чем счетное количество ненулевых слагаемых. Через $\mathcal{A}_f$ мы обозначим индексы, для которых эти слагаемые ненулевые. Рассмотрим произвольное конечное подмножество $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}_f$, и введем обозначения $x_k = \chi_{A_k^\bullet}$, $y_k = m_{A_k^\bullet}(f)[\chi_{A_k^\bullet}]$ для $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть $\omega \in \mathbb{C}$ — любой корень n-ой степени из 1. Так как $\mathcal{F}$ — дизъюнктное семейство, то $\|\sum_{k=1}^n \omega^k x_k\|_{B(\Sigma)} \leq 1$ и $\|\sum_{k=1}^n \omega^k y_k\|_{L_p(X,\mu)} \leq \|[f]\|_{L_p(X,\mu)}$. Следовательно, из [[1], предложение II.2.44] получаем, что для любой функции $[f] \in L_p(X,\mu)$ корректно определен элемент $\sigma_f = \sum_{A \in \mathcal{A}_f} x_k \mathbin{\widehat{\otimes}} y_k = \sum_{A \in \mathcal{A}} x_k \mathbin{\widehat{\otimes}} y_k \in B(\Sigma) \mathbin{\widehat{\otimes}} L_p(X,\mu)$ нормы не более $\|f\|_{L_p(X,\mu)}$. Используя пункт (ii) предложения 4.3, легко проверить, что отображение

$$\sigma : L_p(X,\mu) \to B(\Sigma) \mathbin{\widehat{\otimes}} L_p(X,\mu) : [f] \mapsto \sum_{A \in \mathcal{A}} m_{A^\bullet}(f)\chi_{A^\bullet} \mathbin{\widehat{\otimes}} [\chi_{A^\bullet}]$$

является корректно определенным $B(\Sigma)$-морфизмом нормы не более 1. Из пункта (iv) предложения 4.3 мы получаем, что $\pi_{L_p(X,\mu)}\sigma = 1_{L_p(X,\mu)}$. Поскольку $B(\Sigma)$-модуль $L_p(X,\mu)$ унитальный, то из [[1], предложение IV.1.2] следует его относительная проективность. □

Теорема 4.5. *Пусть (X,μ) — разложимое пространство с мерой и $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $L_p(X,\mu)$ — относительно проективный $B(\Sigma)$-модуль;

(ii) (X,μ) — дизъюнктное объединение твердых атомов конечной меры.

Доказательство. Результат следует из предложений 4.2 и 4.4. □

5 Предварительные сведения по топологической теории меры

Подробное обсуждение мер на топологических пространствах можно найти в [5]. С этого момента мы рассматриваем меры μ, определенные на σ-алгебре $Bor(S)$ борелевских множеств топологического пространства S. Через $\mathrm{supp}(\mu)$ мы будем обозначать носитель μ. Мера μ называется

(i) строго положительной, если $\mathrm{supp}(\mu) = S$;

(ii) с полным носителем, если $\mu(S \setminus \mathrm{supp}(\mu)) = 0$;

(iii) локально конечной, если каждая точка в S имеет окрестность конечной меры;

(iv) внутренне компактно регулярной, если $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K$ компактно$\}$ для всех $E \in Bor(S)$;

(v) внешне открыто регулярной, если $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U$ открыто$\}$ для всех $E \in Bor(S)$;

(vi) внутренне открыто регулярной, если $\mu(E) = \sup\{\mu(U) : U \subset E, U$ открыто$\}$ для всех $E \in Bor(S)$;

(vii) остаточной, если $\mu(E) = 0$ для всех борелевских нигде не плотных множеств E;

(viii) нормальной, если она остаточная и с полным носителем.

Если мера μ локально конечна, то все компактные множества имеют конечную меру [[5], предложение 411G (a)]. Любая конечная внутренне компактно регулярная мера внешне открыто регулярна [[5], предложение 411X (a)]. Очевидно, что мера μ^B внутренне компактно регулярна для любого $B \in Bor(S)$, когда мера μ внутренне компактно регулярна.

Предложение 5.1. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство и μ — борелевская мера на S. Тогда*

(i) мера μ внутренне открыто регулярна тогда и только тогда, когда $\mu(E) = \mu(\mathrm{int}_S(E))$ для всех $E \in Bor(S)$;

(ii) если мера μ конечна и внутренне открыто регулярна, то μ — остаточная мера и $\mu(E) = \mu(\mathrm{int}_S(E)) = \mu(\mathrm{cl}_S(E))$ для всех $E \in Bor(S)$;

(iii) если мера μ конечна, внутренне компактно регулярна и внутренне открыто регулярна, то μ — нормальная мера.

Доказательство. (i) Достаточно заметить, что супремум в определении внутренне открыто регулярной меры достигается на максимальном открытом подмножестве E, то есть на $\mathrm{int}_S(E)$.

(ii) Первое равенство было доказано в предыдущем пункте. Так как μ — конечная мера, то для всех $E \in Bor(S)$ выполнено $\mu(E) = \mu(S) - \mu(\mathrm{int}_S(S \setminus E)) = \mu(S) - \mu(S \setminus \mathrm{cl}_S(E)) = \mu(\mathrm{cl}_S(E))$. Теперь рассмотрим нигде не плотное борелевское множество $E \subset S$, тогда $\mu(E) = \mu(\mathrm{cl}_S(E)) = \mu(\mathrm{cl}_S(\mathrm{int}_S(E))) = \mu(\varnothing) = 0$. Так как E произвольно, то μ — остаточная мера.

(iii) Всякая внутренне компактно регулярная мера имеет полный носитель [[5], предложение 411C, 411N (d)]. Все остальное следует из пунктов (i) и (ii). $\square$

Предложение 5.2. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство и μ — борелевская мера на S. Допустим, что любое компактное множество $K \subset S$ положительной меры содержит открытое множество $U \subset K$ положительной меры. Тогда* *(i)* $\mu(K) = \mu(\mathrm{int}_S(K))$ *для любого компактного множества* $K \subset S$*;*

(ii) *если мера* μ *внутренне компактно регулярная, то* μ *внутренне открыто регулярна.*

Доказательство. Обозначим $K' = K \setminus \mathrm{int}_S(K)$. Это замкнутое подмножество компакта K, следовательно, K' — компакт. Допустим, что $\mu(K') > 0$, тогда существует открытое множество $U \subset K'$ положительной меры. Как следствие, $U \subset K$ — непустое открытое множество не пересекающееся с $\mathrm{int}_S(K)$. Противоречие, значит $\mu(K') = 0$ и $\mu(K) = \mu(\mathrm{int}_S(K))$.

(ii) Зафиксируем $c < \mu(B)$. Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $K \subset B$ такое, что $c < \mu(K)$. Из предыдущего пункта мы получаем $c < \mu(K) = \mu(\mathrm{int}_S(K)) \leq \mu(\mathrm{int}_S(B))$. Так как $c < \mu(B)$ произвольно, то мы заключаем $\mu(B) \leq \mu(\mathrm{int}_S(B))$. Обратное неравенство очевидно. □

Предложение 5.3. *Пусть* S *— локально компактное хаусдорфово пространство и* μ *— локально конечная внутренне компактно регулярная борелевская мера на* S*. Пусть* A *— атом меры* μ*. Тогда*

(i) $\mu(A)$ *конечно;*

(ii) *существует точка* $s \in A$ *такая, что* $\mu(A) = \mu(\{s\})$*.*

Доказательство. (i) Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $K \subset A$ положительной меры. Так как мера μ локально конечна, то $\mu(K)$ конечно. Поскольку A — атом и $\mu(K) > 0$, мы получаем $\mu(A) = \mu(K) < +\infty$.

(ii) По предыдущему пункту $0 < \mu(A) < +\infty$. Пусть $\mathcal{K}$ обозначает компактные подмножества A той же самой меры что и A. Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $K \subset A$ положительной меры. Так как A — атом, то $\mu(K) = \mu(A)$, значит $K \in \mathcal{K}$. Таким образом $\mathcal{K}$ непусто. Теперь рассмотрим два произвольных множества $K', K'' \in \mathcal{K}$. Очевидно, $C := K' \cap K''$ — компактное подмножество в A. Допустим, что $\mu(C) = 0$, и рассмотрим $L' = K' \setminus C$, $L'' = K'' \setminus C$. Это два дизъюнктных подмножества A, таких, что $\mu(L') = \mu(L'') = \mu(A)$, поэтому $\mu(A) \geq \mu(L' \cup L'') = 2\mu(A)$. Противоречие, значит $\mu(C) > 0$ и, как следствие, $C \in \mathcal{K}$. Поскольку $K', K'' \in \mathcal{K}$ произвольны мы показали, что $\mathcal{K}$ — семейство компактных множеств со свойством конечного пересечения. Следовательно, $K^* = \bigcap \mathcal{K}$ непусто. Очевидно, что K^* компактно как пересечение компактных множеств. Допустим, K^* содержит две различные точки s' и s''. Рассмотрим одноточечные множества $C' = \{s'\}$ и $C'' = \{s''\}$. Допустим, $\mu(C') > 0$, тогда $\mu(C') = \mu(A)$ и $C' \in \mathcal{K}$, так как A — атом. Это противоречит минимальности K^* так как C' — собственное подмножество K^*, поэтому $\mu(C') = 0$. Аналогично, $\mu(C'') = 0$. Рассмотрим $L = K^* \setminus (C' \cup C'')$, тогда $\mu(L) = \mu(K^*) = \mu(A) > 0$. Так как мера μ внутренне компактно регулярна, то существует компактное множество $\hat{K} \subset L \subset A$ положительной меры, значит $\mu(\hat{K}) = \mu(A)$. По построению $\hat{K} \in \mathcal{K}$ — собственное подмножество $\mathcal{K}$. Это противоречит минимальности K^*, значит K^* непустое множество без двух различных точек, а значит одноточечное. Таким образом, $\mu(A) = \mu(K^*) = \mu(\{s\})$ для некоторого $s \in A$. □

6 Относительная проективность $C_0(S)$-модулей $L_p(S, \mu)$

Результаты этого параграфа в некотором смысле аналогичны тем, что получены для модулей над алгеброй ограниченных измеримых функций, но случай $p = +\infty$, похоже, не имеет простого критерия.

Предложение 6.1. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная борелевская мера на S и $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда*

(i) $[f] \in L_p(S,\mu)_{ess}$ *тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset S$ такое, что $\|[f\chi_{S\setminus K}]\|_{L_p(S,\mu)} < \varepsilon$;*

(ii) если $p < +\infty$ и мера μ внутренне компактно регулярна, то $L_p(S,\mu)_{ess} = L_p(S,\mu)$.

В частности, для любого компактного множества $K \subset S$ и $[f] \in L_p(S,\mu)$ верно $[f]\chi_K \in L_p(S,\mu)_{ess}$.

Доказательство. Стандартное рассмотрение плотных подпространств. □

Предложение 6.2. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная борелевская мера на S. Допустим, задан $C_0(S)$-морфизм $\psi : L_p(S,\mu)_{ess} \to C_0(S)$ где $1 \leq p \leq +\infty$, функция $[f] \in L_p(S,\mu)$ и компактное множество $K \subset S$. Тогда*

(i) если $[f] = [f]\chi_K$, то $\psi(f)|_{S\setminus K} = 0$;

(ii) если $[f] = [f]\chi_K$ и $\psi(f) \neq 0$, то существует открытое множество $U \subset K$ положительной меры.

Доказательство. (i) Из пункта (i) предложения 6.1 мы имеем $[f] = [f]\chi_K \in L_p(S,\mu)_{ess}$, поэтому можно говорить о функции $a = \psi(f) \in C_0(S)$. Пусть V — открытое множество, содержащее K, тогда существует непрерывная функция $b \in C_0(S)$ такая, что $b|_K = 1$ и $b|_{S\setminus V} = 0$ [[6], теорема 1.4.25]. По построению $\chi_K = b\chi_K$, поэтому $a = \psi([f]) = \psi([f]\chi_K) = \psi(b[f]\chi_K) = b\psi([f]\chi_K) = b\psi([f]) = ba$. Поскольку $b|_{S\setminus V} = 0$, то мы получаем $a|_{S\setminus V} = 0$. Так как пространство S хаусдорфово и V — произвольное открытое множество, содержащее K, то $a|_{S\setminus K} = 0$.

(ii) Используя обозначения предыдущего пункта, мы имеем $a \neq 0$ и $a|_{S\setminus K} = 0$. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $c = |a|$, тогда $c \neq 0$ и $c|_{S\setminus K} = 0$. Так как $c \neq 0$, то открытое множество $U = c^{-1}((0,+\infty))$ непусто. Более того, $U \subset K$ так как $c|_{S\setminus K} = 0$. Теперь рассмотрим произвольную точку $s \in U$. По построению $a(s) \neq 0$. Поскольку $\{s\}$ компактно, то существует непрерывная функция $e \in C_0(S)$ такая, что $e(s) = 1$ и $e|_{S\setminus U} = 0$ [[6], теорема 1.4.25]. Рассмотрим функцию $[g] = e[f] \in L_p(S,\mu)_{ess}$, тогда $\psi([g]) \neq 0$, так как $\psi([g])(s) = \psi(e[f])(s) = (e\psi([f]))(s) = e(s)\psi([f])(s) = a(s) \neq 0$. Поскольку $\psi([g]) \neq 0$, то мы имеем $[g] \neq 0$ в $L_p(S,\mu)_{ess}$. Следовательно, $\mu(U) > 0$, так как по построению $[g]\chi_{S\setminus U} = 0$. □

Предложение 6.3. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $L_p(S,\mu)$ — относительно проективный $C_0(S)$-модуль. Тогда*

(i) мера μ внутренне открыто регулярна;

(ii) любой атом меры μ является изолированной точкой в S;

(iii) если $p < +\infty$ и мера μ внешне открыто регулярна, то мера μ чисто атомическая.

Доказательство. (i) Пусть $K \subset S$ — компактное множество положительной меры. Из пункта (i) предложения 6.1 следует, что функция $[f] := [\chi_K]$ не равна нулю в $L_p(S,\mu)_{ess}$. Так как $C_0(S)$-модуль $L_p(S,\mu)$ относительно проективен, то по пункту (ii) предложения 2.3 существует $C_0(S)$-морфизм $\psi : L_p(S,\mu) \to C_0(S)$ такой, что $\psi([f]) \neq 0$. Теперь из пункта (ii) предложения 6.2 мы получаем, что существует открытое множество $U \subset K$ положительной меры. Поскольку $K \subset S$ произвольно, мы можем применить пункт (ii) предложения 5.2. Тогда $\mu(B) = \mu(\mathrm{int}_S(B))$ для любого борелевского множества $B \subset S$. Осталось применить предложение 5.1.

(ii) Пусть A — атом меры μ. Из пункта (ii) предложения 5.3 следует существование точки $s \in A$ такой, что $\mu(\{s\}) = \mu(A) > 0$. Из пункта (i) следует, что $\mu(\mathrm{int}_S(\{s\})) = \mu(\{s\}) > 0$. Следовательно, $\{s\}$ — открытое множество, т.е. s — изолированная точка.

(iii) Пусть S_a^μ — множество одноточечных атомов меры μ и $S_c^\mu = S \setminus S_a^\mu$. Из пункта (ii) мы знаем, что все атомы — суть изолированные точки, поэтому S_c^μ замкнутое, а значит и борелевское множество. Рассмотрим произвольное компактное подмножество $K \subset S_c^\mu$. Допустим, что $\mu(K) > 0$, тогда из пункта (i) предложения 6.1 функция $[f] := [\chi_K]$ не равна нулю в $L_p(S,\mu)_{ess}$. Так как $C_0(S)$-модуль $L_p(S,\mu)$ относительно проективен, то из пункта (ii) предложения 2.3 и предложения 6.2 мы получаем $C_0(S)$-морфизм $\psi : L_p(S,\mu)_{ess} \to C_0(S)$ такой, что $\psi([f]) \neq 0$ и $\psi([f])|_{S\setminus K} = 0$. Обозначим $a := \psi([f]) \neq 0$. Так как $a|_{S\setminus K} = 0$, то существует точка $s \in K$ такая, что $a(s) \neq 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Заметим, что s не является атомом, так как $s \in K \subset S_c^\mu$, значит, из внешней открытой регулярности меры μ мы получаем открытое множество $W \subset S$ такое, что $s \in W$ и $\mu(W) < \varepsilon$. Так как $\{s\}$ компактно, то существует непрерывная функция $b \in C_0(S)$ такая, что $b(s) = 1$, $0 \leq b \leq 1$ и $b|_{S\setminus W} = 0$ [[6], теорема 1.4.25]. Так как $p < +\infty$, то мы получаем $\|b[f]\|_{L_p(S,\mu)} \leq \mu(W \cap K)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. Наконец,

$$|a(s)| = |a(s)b(s)| = |(ba)(s)| = |(b\psi([f]))(s)| = |\psi(b[f])(s)| \leq \|\psi(b[f])\|_{C_0(S)} \leq$$

$$\leq \|\psi\|\|b[f]\|_{L_p(S,\mu)} \leq \|\psi\|\varepsilon^{1/p}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно $|a(s)| = 0$, но $a(s) \neq 0$ по выбору s. Противоречие, значит, $\mu(K) = 0$. Так как $K \subset S_c^\mu$ произвольно, то из внутренней компактной регулярности μ следует $\mu(S_c^\mu) = 0$. Другим словами, мера μ чисто атомическая. □

Предложение 6.4. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера на S. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$ и $L_p(S,\mu)$ — относительно проективный $C_0(S)$-модуль. Тогда для любого борелевского множества $B \subset S$ банахов $C_0(S)$-модуль $L_p(S,\mu^B)$ относительно проективен.*

Доказательство. Доказательство такое же как и в предложении 4.1. □

Теорема 6.5. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — разложимая внутренне компактно регулярная борелевская мера на S. Пусть $1 \leq p < +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $L_p(S,\mu)$ — относительно проективный $C_0(S)$-модуль;

(ii) мера μ чисто атомическая, и все атомы являются изолированными точками.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Пусть $\mathcal{D}$ разложение S на борелевские множества конечной меры. Зафиксируем $D \in \mathcal{D}$ и рассмотрим $C_0(S)$-модуль $L_p(S,\mu^D)$. Так как множество D имеет конечную меру, то μ^D — конечная, внутренне компактно регулярная и внешне открыто регулярная мера. По предложению 6.4 банахов $C_0(S)$-модуль $L_p(S,\mu^D)$ относительно проективен. Из пункта (iii) предложения 6.3 мы получаем, что μ^D (и тем более μ_D) — чисто атомическая мера, и все ее атомы являются изолированными точками. Так как $D \in \mathcal{D}$ произвольно, то по предложению [[4], упражнение 214X (i)] мера μ чисто атомическая мера, и все ее атомы являются изолированными точками.

$(ii) \implies (i)$ Пусть S_a^μ обозначает множество одноточечных атомов меры μ. Так как все точки в S_a^μ изолированы, то пространство S_a^μ дискретно и $C_0(S_a^\mu)$ — бипроективная алгебра [[1], теорема 4.5.26]. Так как $p < +\infty$, мера μ атомическая мера и все ее атомы являются изолированными точками, то $C_0(S_a^\mu)$-модуль $L_p(S,\mu)$ существенный. Учитывая все вышесказанное, из [[7], предложение VII.1.60(II)] мы получаем, что $C_0(S_a^\mu)$-модуль $L_p(S,\mu)$ относительно проективен. Так как S_a^μ — открытое подмножество S, то $C_0(S_a^\mu)$ является двусторонним замкнутым идеалом $C_0(S)$. Теперь из [[8], предложение 2.3.3(i)] следует, что $C_0(S)$-модуль $L_p(S,\mu)$ относительно проективен. □

Случай $C_0(S)$-модуля $L_\infty(S,\mu)$ намного сложнее. Мы дадим два необходимых, но достаточно ограничительных условия относительно проективности.

Определение 6.6. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера на S. Семейство $\mathcal{F}$ борелевских подмножеств S называется широким, если*

(i) каждый элемент F имеет конечную положительную меру и содержится в некотором компактном подмножестве;

(ii) каждое компактное подмножество S пересекает лишь конечное число множеств из $\mathcal{F}$;

(iii) любые два различных множества в $\mathcal{F}$ не пересекаются.

Предложение 6.7. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера на S. Если S содержит широкое семейство $\mathcal{F}$, то существенная часть $C_0(S)$-модуля $L_\infty(S,\mu)$ не дополняема в $L_\infty(S,\mu)$.*

Доказательство. Допустим, что $L_\infty(S,\mu)_{ess}$ дополняемо в $L_\infty(S,\mu)$, тогда существует ограниченный линейный оператор $P : L_\infty(S,\mu) \to L_\infty(S,\mu)_{ess}$ такой, что $P([f]) = [f]$ для всех $[f] \in L_\infty(S,\mu)_{ess}$. Теперь для данного широкого семейства $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ мы определим ограниченный линейный оператор

$$I : \ell_\infty(\Lambda) \to L_\infty(S,\mu) : x \mapsto \left[\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \chi_{F_\lambda}\right]$$

который корректно определен так как семейство $\mathcal{F}$ дизъюнктное. Рассмотрим $x \in c_0(\Lambda)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда существует конечное подмножество $\Lambda_0 \subset \Lambda$ такое, что $|x_\lambda| < \varepsilon$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$. Пусть K_λ обозначает компактное множество содержащее F_λ для $\lambda \in \Lambda$. Тогда $K_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} K_\lambda$ — компакт. Если $s \in S \setminus K$, то $\chi_{F_\lambda}(s) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$. Следовательно, $\|I(x)\chi_{S\setminus K}\|_{L_\infty(S,\mu)} = \|[\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0} x_\lambda\chi_{F_\lambda}]\|_{L_\infty(S,\mu)} = \sup_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0}|x_\lambda| < \varepsilon$. Теперь из пункта (i) предложения 6.1 мы получаем, что $I(x) \in L_\infty(S,\mu)_{ess}$. Далее мы определим ограниченный линейный оператор

$$R : L_\infty(S,\mu) \to c_0(\Lambda) : [f] \mapsto \left(\lambda \mapsto \mu(F_\lambda)^{-1}\int_{F_\lambda} f(s)d\mu(s)\right).$$

Единственная вещь, которая требует пояснения — это тот факт, что образ R содержится в $c_0(\Lambda)$. Зафиксируем $[f] \in L_\infty(S,\mu)_{ess}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Из пункта (i) предложения 6.1 следует, что существует компакт $K \subset S$ такой, что $\|[f]\chi_K\|_{L_\infty(S,\mu)} < \varepsilon$. Рассмотрим множество $\Lambda_K = \{\lambda \in \Lambda : K \cap F_\lambda \neq \varnothing\}$. По определению семейства $\mathcal{F}$ множество Λ_K конечно. Для любого $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_K$

выполнено $F_\lambda \cap K = \varnothing$, поэтому $|R(f)_\lambda| \leq \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно $R([f]) \in c_0(\Lambda)$. Теперь рассмотрим ограниченный линейный оператор $Q = RPI$. Напомним, что $P([f]) = [f]$ для всех $[f] \in L_\infty(S,\mu)_{ess}$. Тогда легко проверить, что для всех $x \in c_0(\Lambda)$ и $\lambda \in \Lambda$ верно $Q(x)_\lambda = x_\lambda$. Таким образом, $Q : \ell_\infty(\Lambda) \to c_0(\Lambda)$ — ограниченный линейный оператор такой, что $Q(x) = x$ для всех $x \in c_0(\Lambda)$. Так как Λ бесконечно мы получаем противоречие с теоремой Филлипса [9]. Следовательно, $L_\infty(S,\mu)_{ess}$ недополняемо в $L_\infty(S,\mu)$. □

Теперь нам нужно напомнить некоторые понятия из общей топологии. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств в топологическом пространстве S называется локально конечным, если каждая точка S имеет открытую окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом множеств из $\mathcal{F}$. Топологическое пространство S называется псевдокомпактным, если каждое локально конечное дизъюнктное семейство непустых открытых множеств конечно.

Предложение 6.8. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная борелевская мера на S. Если $C_0(S)$-модуль $L_\infty(S,\mu)$ относительно проективен, то носитель меры $\operatorname{supp}(\mu)$ псевдокомпактен.*

Доказательство. Обозначим $M := \operatorname{supp}(\mu)$. Допустим, что M не псевдокомпактно, тогда существует бесконечное дизъюнктное локально конечное семейство $\mathcal{U}$ непустых открытых множеств в M. Так как S локально компактно, то для каждого $U \in \mathcal{U}$ мы можем выбрать непустое открытое множество V_U и компакт K_U такие, что $V_U \subset K_U \subset U$. Так как мера μ локально конечна, то мы можем выбрать V так, чтобы $\mu(V)$ было конечно. Более того, $\mu(V) > 0$ так как V открытое подмножество M. Очевидно, что семейство $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ бесконечно, дизъюнктно и локально конечно. Таким образом, для любого $s \in S$ существует открытое множество W_s такое, что $s \in W_s$ и множество $\{V \in \mathcal{V} : V \cap W_s \neq \varnothing\}$ конечно.

По построению $\mathcal{V}$ — дизъюнктное семейство открытых множеств положительной меры, и каждое множество семейства содержится в своем компакте. Пусть $K \subset S$ — произвольный компакт. Тогда $\{W_s : s \in K\}$ — открытое покрытие K. Поскольку K компактно, то существует конечное множество S_0 такое, что $\{W_s : s \in S_0\}$ — покрытие K. Так как каждое множество W_s пересекает лишь конечное число множеств из $\mathcal{V}$, то этим же свойством обладает $\bigcup_{s \in S_0} W_s$ и тем более K. Таким образом, $\mathcal{V}$ — широкое семейство. По предложению 6.7 существенная часть $C_0(S)$-модуля $L_\infty(S,\mu)$ не дополняема в $L_\infty(S,\mu)$. Теперь из предложения 2.2 следует, что $L_\infty(S,\mu)$ не является относительно проективным $C_0(S)$-модулем. Противоречие, значит, пространство M псевдокомпактно. □

Теорема 6.9. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — локально конечная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S. Если $C_0(S)$-модуль $L_\infty(S,\mu)$ относительно проективен, то мера μ внутренне открыто регулярна и ее носитель $\operatorname{supp}(\mu)$ псевдокомпактен.*

Доказательство. Результат следует из предложений 6.3 и 6.8. □

Хотя последняя теорема и не является критерием, следует сказать несколько слов о том, как этот гипотетический критерий мог бы выглядеть. Последняя теорема накладывает ограничения на топологию пространства S, но эта теорема не может описать ее полностью. Действительно, рассмотрим произвольное локально компактное хаусдорфово пространство S, в котором есть хотя бы одна изолированная точка $\{s\}$. Пусть μ — мера сосредоточенная в точке $\{s\}$. Легко проверить, что получающийся $C_0(S)$-модуль $L_\infty(S,\mu)$ относительно проективен. Таким образом, нам следует ограничиться рассмотрением строго положительных мер.

Если мера μ строго положительна, то в предположениях предложения 6.9 пространство S псевдокомпактно. Напомним, что каждая непрерывная функция на псевдокомпактном пространстве ограничена [[10], теорема 1.1.3(3)]. Теперь заметим, что любая конечная внутренне открыто регулярная мера является остаточной, тогда по результату [[11], следствие 2.7] каждая измеримая функция на S непрерывна на открытом плотном множестве. Эти факты позволяют предположить, что S обладает своеобразной топологией. Действительно, если пространство S не имеет изолированных точек и обладает ненулевой конечной нормальной мерой, то S не может быть сепарабельным локально компактным хаусдорфовым [[6], предложение 4.7.20], локально связным локально компактным хаусдорфовым [[6], предложение 4.7.23], связным локально компактным хаусдорфовым F-пространством [[6], предложение 4.7.24], сепарабельным метризуемым [[12], пример 1].

Из предыдущего обсуждения заманчиво предположить, что пространство $C_0(S)$ "похоже" на $L_\infty(S,\mu)$, когда мера μ строго положительна и модуль $L_\infty(S,\mu)$ относительно проективен. В этом направлении есть следующий результат.

Предложение 6.10. *Пусть S — гиперстоуново пространство и μ — конечная строго положительная нормальная внутренне компактно регулярная борелевская мера на S. Тогда $C_0(S)$-модуль $L_\infty(S,\mu)$ относительно проективен.*

Доказательство. Из [[6], следствие 4.7.6] следует, что пространства $L_\infty(S,\mu)$ и $C_0(S)$ изоморфны как C^*-алгебры. В частности, $L_\infty(S,\mu)$ изоморфно $C_0(S)$ как $C_0(S)$-модуль. Так как S компактно, то $C_0(S)$ — унитальная алгебра и поэтому она относительно проективна как $C_0(S)$-модуль [[7], пример VII.1.1]. □

Для строго положительных мер последнее предложение является единственным известным примером относительно проективного $C_0(S)$-модуля $L_\infty(S,\mu)$.

7 Финансирование

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант No. 19–01–00447).

Список литературы

[1] *A. Ya. Helemskii* The homology of Banach and topological algebras, Springer, 41 (1989)

[2] *Yu. V. Selivanov* Biprojective Banach algebras, Math. USSR-Izv., 15:2 (1980), 387–399

[3] *A. Grothendieck* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., №16 (1955)

[4] , *D. H. Fremlin* Measure Theory, Vol. 2, 2003, Torres Fremlin

[5] , *D. H. Fremlin* Measure Theory, Vol. 4(1), 2003, Torres Fremlin

[6] *H. G. Dales, F. K. Dashiel Jr., A.T.-M. Lau, D. Strauss* Banach spaces of continuous functions as dual spaces, Berlin, Springer (2016)

[7] *A.Ya. Helemskii*, Banach and locally convex algebras. Oxford University Press, (1993)

[8] *P. Ramsden* Homological properties of semigroup algebras, The University of Leeds, PhD thesis (2009)

[9] *R. S. Phillips* On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 516–541

[10] *M. Hrusak, A. Tamariz-Mascarua, M. Tkachenko* Pseudocompact topological spaces. Springer (2018)

[11] *O. Zindulka* Residual measures in locally compact spaces. Topology and its Applications 108, no. 3 (2000), 253–265.

[12] *J. Flachsmeyer* Normal and category measures on topological spaces. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (1972), 109–116.

Норберт Немеш, Факультет механики и математики, Московский Государственный Университет, Москва 119991 Россия

E-mail address: nemeshnorbert@yandex.ru