

Фильтр Калмана

Немеш Н. Т.

1 Динамические системы

Существует много определений динамической системы. Мы будем рассматривать непрерывные и дискретные нелинейные динамические системы с неаддитивным шумом. Данная заметка основана на статье [1].

1.1 Непрерывный случай

Определение 1.1 *Динамической системой называется набор из вектор-функций нескольких переменных*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{R}^l \end{aligned} \quad (1)$$

векторнозначных случайных процессов (функций со значениями в случайных векторах)

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l \quad \boldsymbol{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q \quad \boldsymbol{\nu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p \quad (2)$$

и одной вектор-функции

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (3)$$

таких, что

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\mu}(t)), \quad \mathbf{z}(t) = h(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\nu}(t)), \quad (t \geq 0) \quad (4)$$

При этом

\mathbf{x} называется вектором состояния системы;

\mathbf{z} называется вектором наблюдаемых системы или вектором измерений;

u называется вектором управления системой;

$\boldsymbol{\mu}$ называется шумом модели;

$\boldsymbol{\nu}$ называется шумом измерений;

При рассмотрении динамических систем основная задача состоит в нахождении состояния $\mathbf{x}(t)$ по известным наблюдениям $\mathbf{z}(t)$. Задача осложняется двумя факторами:

наличием случайных шумов $\boldsymbol{\mu}(t)$ и $\boldsymbol{\nu}(t)$ про которые мы в лучшем знаем их распределение;

нелинейностью дифференциального уравнения описывающего состояние системы;

неявной зависимостью между состоянием и измерениями;

В более общих ситуациях состояние системы удовлетворяет ограничениям типа равенств. Это приводит к тому что множество состояний системы надо рассматривать как многообразие. Это более правильный подход, но в данной заметке мы будем использовать инженерные упрощения, чтобы не усложнять суть дела. Более строгий подход с описанием фильтра Калмана для многообразий можно найти в [2].

Пример 1.2 Пусть положение точки массой m в некоторой инерциальной системе координат задается вектором $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_z]^T$, а скорость вектором $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z]^T$. Движение происходит под действием внешней силы \mathbf{F} и силы сопротивления пропорциональной квадрату скорости этой точки $\mathbf{F}_r = k\|\mathbf{v}\|[\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z]^T$. Точное значение силы $\vec{F} = [F_x, F_y, F_z]^T$ нам неизвестно, поэтому мы к нему добавим слагаемое $\delta\mathbf{F} = [\delta F_x, \delta F_y, \delta F_z]^T$ с многомерным нормальным распределением из $\mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta F})$. При этом наблюдать мы можем только сферические координаты ρ , ϕ и θ материальной точки. Наблюдения не точные, а с некоторым шумом $[\delta\rho, \delta\phi, \delta\theta]^T$ имеющим нормальное распределение из $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Уравнение движения в этом случае будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = k\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} + \vec{F} + \delta\mathbf{F} \quad (5)$$

а связь между состоянием и измерениями будет

$$\rho = \sqrt{\mathbf{r}_x^2 + \mathbf{r}_y^2 + \mathbf{r}_z^2}, \quad \phi = \arccos \frac{\mathbf{r}_x}{\sqrt{\mathbf{r}_y^2 + \mathbf{r}_z^2}}, \quad \theta = \arccos \frac{\mathbf{r}_x}{\sqrt{\mathbf{r}_x^2 + \mathbf{r}_y^2 + \mathbf{r}_z^2}} \quad (6)$$

Эти уравнения задают динамическую систему. Достаточно положить

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x(t) \\ \mathbf{r}_y(t) \\ \mathbf{r}_z(t) \\ \mathbf{v}_x(t) \\ \mathbf{v}_y(t) \\ \mathbf{v}_z(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \rho(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \delta F_x(t) \\ \delta F_y(t) \\ \delta F_z(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} \delta\rho(t) \\ \delta\phi(t) \\ \delta\theta(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

$$f(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_z \\ \frac{1}{m}(k\mathbf{v}_x\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2} + F_x + \delta F_x) \\ \frac{1}{m}(k\mathbf{v}_y\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2} + F_y + \delta F_y) \\ \frac{1}{m}(k\mathbf{v}_z\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2} + F_z + \delta F_z) \end{bmatrix}, \quad h(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{r}_x^2 + \mathbf{r}_y^2 + \mathbf{r}_z^2} + \delta\rho \\ \frac{\mathbf{r}_x}{\sqrt{\mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}} + \delta\phi \\ \frac{\mathbf{r}_z}{\sqrt{\mathbf{r}_x^2 + \mathbf{r}_y^2 + \mathbf{r}_z^2}} + \delta\theta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

1.2 Дискретный случай

На практике состояние динамической системы ищут не в виде функции непрерывного аргумента, а в виде последовательности значений в некоторые моменты времени.

Представим, что измерения состояния происходит в моменты времени t_1, t_2, \dots . Будем считать что время между моментами времени мало, тогда уравнения описывающие динамическую систему примут вид

$$\frac{\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f(t_k, \mathbf{x}(t_{k-1}), u(t_k), \boldsymbol{\mu}(t_k)), \quad \mathbf{z}(t_k) = h(t_k, \mathbf{x}(t_k), \boldsymbol{\nu}(t_k)) \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (9)$$

Если ввести обозначения

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), \quad u_k = u(t_k), \quad \boldsymbol{\mu}_k = \boldsymbol{\mu}(t_k), \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{z}(t_k), \quad \boldsymbol{\nu}_k = \boldsymbol{\nu}(t_k), \quad (10)$$

$$f_k(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{x}_{k-1} + f(t_k, \mathbf{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k)(t_k - t_{k-1}), \quad h_k(x, u, w) = h(t_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\nu}_k) \quad (11)$$

то мы получим систему рекуррентных уравнений

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \quad \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (12)$$

Определение 1.3 *Дискретной динамической системой называются последовательности из вектор-функций нескольких переменных*

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ h_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{R}^l \end{aligned} \quad (13)$$

последовательности случайных векторов

$$(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad (\mathbf{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad (\boldsymbol{\mu}_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad (\boldsymbol{\nu}_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad (14)$$

и одной числовой последовательности

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad (15)$$

такие, что

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \quad \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (16)$$

При этом

\mathbf{x} называется вектором состояния системы;

\mathbf{z} называется вектором наблюдаемых системы или вектором измерений;

u называется вектором управления системой;

$\boldsymbol{\mu}$ называется шумом модели;

$\boldsymbol{\nu}$ называется шумом измерений;

Далее наша основная задача состоит в нахождении последовательности состояний $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ дискретной динамической системы по известным наблюдениям $(\mathbf{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. При этом нам неизвестны шумы $(\boldsymbol{\mu}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(\boldsymbol{\nu}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, но мы знаем их распределение.

2 Фильтр Калмана

Определение 2.1 *Фильтр Калмана – это алгоритм построения оценки состояний динамической системы.*

Мы будем обсуждать фильтры Калмана только для дискретных динамических систем. Допустим нам дана дискретная динамическая система:

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \quad \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (17)$$

Мы будем предполагать, что шумы имеют распределение $\boldsymbol{\mu}_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ и $\boldsymbol{\nu}_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$. Оптимальной оценкой состояний \mathbf{x}_k мы будем называть последовательность векторов $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такую что минимизируется величина

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_k - \hat{x}_k\|^2] \quad (18)$$

2.1 Расширенный фильтр Калмана

Определение 2.2 *Расширенный фильтр Калмана – это фильтр Калмана для нелинейных динамических систем, который сводит задачу к линейному случаю линеаризацией уравнений около текущей оценки состояния динамической системы.*

В английской литературе расширенный фильтр Калмана называется extended Kalman filter или коротко ЕКФ.

Введем обозначения:

$x_{k|l}$ – апостериорная оценка состояния системы в момент k , полученная по результатам наблюдений вплоть до момента l включительно;

$P_{k|l}$ – апостериорная ковариационная матрица ошибок в момент k , задающая оценку точности полученной оценки вектора состояния по наблюдениям вплоть до момента l включительно; эта матрица включает в себя оценку дисперсий погрешности вычисленного состояния и ковариации, показывающие выявленные взаимосвязи между параметрами состояния системы;

Состояние фильтра Калмана задается двумя переменными $x_{k|k}$ и $P_{k|k}$. Начальное состояние фильтра инициализируется эвристикой. Далее итерации алгоритма идут до бесконечности. Каждая итерация фильтра Калмана делится на две фазы: экстраполяция и коррекция.

Во время экстраполяции фильтр находит предварительную оценку состояния системы $x_{k|k-1}$ на текущий шаг k по итоговой оценке состояния с предыдущего шага $k-1$. Эту предварительную оценку также называют априорной оценкой состояния, так как для её получения не используются наблюдения шага k . Также вычисляется априорная матрица ковариаций $P_{k|k-1}$.

В фазе коррекции априорная оценка $x_{k|k-1}$ корректируется с помощью текущих измерений. Скорректированная оценка $x_{k|k}$ также называется апостериорной оценкой состояния. Наряду с этим вычисляется апостериорная матрица ковариации состояния $P_{k|k}$.

Обычно фазы экстраполяции и коррекции чередуются: экстраполяция производится по результатам коррекции до следующего наблюдения, а коррекция производится совместно с доступными на следующем шаге наблюдениями, и т. д. Если по некоторой причине наблюдение оказалось недоступным, то этап коррекции может быть пропущен и выполнена экстраполяция по нескорректированной оценке. Аналогично, если независимые измерения доступны только в отдельные такты работы, всё равно возможны коррекции.

Далее рассмотрим работу классического оптимального фильтра Калмана.

Экстраполяция

$$\begin{aligned} x_{k|k-1} &= f_k(x_{k-1|k-1}, u_k, 0) && \text{априорная оценка состояния} \\ P_{k|k-1} &= F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + L_{k-1}Q_kL_{k-1}^T && \text{априорная оценка ковариаций} \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$F_{k-1} = \frac{\partial f_k}{\partial x}(x_{k-1|k-1}, u_k, 0), \quad L_{k-1} = \frac{\partial f_k}{\partial \mu}(x_{k-1|k-1}, u_k, 0) \quad (20)$$

Коррекция

$$\begin{aligned}
y_k &= z_k - h_k(x_{k|k-1}, 0) && \text{ошибка экстраполяции} \\
S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + M_k R_k M_k^T && \text{матрица ковариации для ошибок экстраполяции} \\
K_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} && \text{матрица коэффициентов усиления} \\
x_{k|k} &= x_{k|k-1} + K_k y_k && \text{коррекция экстраполяции} \\
P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} && \text{расчёт ковариационной матрицы}
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$H_k = \frac{\partial h_k}{\partial x}(x_{k|k-1}, 0), \quad M_k = \frac{\partial h_k}{\partial \nu}(x_{k|k-1}, 0) \tag{22}$$

Отметим, что вычисление матрицы $P_{k|k}$ неустойчиво и лучше использовать эквивалентные формулы выражающие $P_{k|k}$ через симметричные матрицы

$$\begin{aligned}
P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k S_k^{-1} K_k^T && \text{симметричная форма} \\
P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k M_k R_k M_k^T K_k^T && \text{форма Джосефа}
\end{aligned} \tag{23}$$

2.2 Фильтр Калмана с состоянием ошибок

Определение 2.3 *Фильтр Калмана с состоянием ошибок – это фильтр Калмана, в котором состояние системы описывается двумя векторами. Первый вектор описывает номинальное состояние и шумы не влияют на его динамику, второй – ошибки определения состояния системы.*

В английской литературе расширенный фильтр Калмана с состоянием ошибок называется error state kalman filter или коротко ESKF.

Для фильтра Калмана с состоянием ошибок дискретную динамическую систему удобнее записывать в виде

$$\bar{x}_k = \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, u_k), \quad \delta \mathbf{x}_k = \delta f_k(\bar{x}_{k-1}, \delta \mathbf{x}_{k-1}, u_k, \boldsymbol{\mu}_k), \quad \mathbf{z}_k = h_k(\bar{x}_k, \delta \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\nu}_k), \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{24}$$

Здесь \bar{x} – это номинальное состояние системы, а $\delta \mathbf{x}$ – это ошибка определения истинного состояния системы. При этом вектор состояния системы имеет вид

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \delta \mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Введем обозначения:

\bar{x}_k – номинальное состояние системы в момент k ;

$\delta x_{k|l}$ – апостериорная оценка ошибки состояния системы в момент k , полученная по результатам наблюдений вплоть до момента l включительно;

$P_{k|l}$ – апостериорная ковариационная матрица ошибок в момент k , задающая показывающая точность полученной оценки ошибок состояния по наблюдениям вплоть до момента l включительно; эта матрица включает в себя оценку дисперсий погрешности вычисленного состояния и ковариации, показывающие выявленные взаимосвязи между параметрами ошибок состояния системы;

Оценки $x_{k|k}$ состояния динамической системы на шаге k фильтра Калмана с состоянием ошибок будет некоторой функцией от номинального состояния $\bar{x}_{k|k}$ и оценки состояния ошибки $\delta x_{k|k}$:

$$x_{k|k} = s_k(\bar{x}_k, \delta x_{k|k}) \quad (26)$$

Состояние фильтра Калмана с состоянием ошибок задается тремя переменными: номинальным состоянием \bar{x}_k , оценкой ошибки $\delta x_{k|k}$ и оценкой матрицы ковариаций ошибки $P_{k|k}$. Начальное номинальное состояние \bar{x}_0 фильтра и матрица ковариаций ошибки $P_{0|0}$ инициализируются эвристикой. Начальная оценка ошибки $\delta x_{0|0}$ инициализируется нулем. Далее итерации алгоритма идут до бесконечности. Каждая итерация фильтра делится на четыре фазы: экстраполяция, коррекция, добавление и сброс.

Во время экстраполяции фильтр находит номинальное состояние \bar{x}_k и предварительную оценку ошибки состояния системы $\delta x_{k|k-1}$ на текущий шаг k по итоговой оценке состояния ошибки с предыдущего шага $k-1$. Эту предварительную оценку также называют априорной оценкой ошибки состояния, так как для её получения не используются наблюдения соответствующего шага. Также вычисляется априорная матрица ковариаций $P_{k|k-1}$.

В фазе коррекции априорная оценка ошибки состояния $\delta x_{k|k-1}$ корректируется с помощью текущих измерений z_k . Скорректированная оценка ошибки $\delta x_{k|k}$ также называется апостериорной оценкой ошибки состояния. Наряду с этим вычисляется апостериорная матрица ковариации ошибки состояния $P_{k|k}$.

В фазе сброса оценка ошибки $\delta x_{k|k}$ приравняется к нулю и пересчитывается матрица ковариаций $P_{k|k}$.

Далее рассмотрим работу фильтра Калмана с состоянием ошибок.

Экстраполяция

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \bar{f}_k(\bar{x}_{k-1}, u_k) && \text{вычисление номинального состояния} \\ \delta x_{k|k-1} &= \delta f_k(\bar{x}_{k-1}, \delta x_{k-1|k-1}, u_k, 0) && \text{априорная оценка ошибки состояния} \\ P_{k|k-1} &= F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + L_{k-1} Q_k L_{k-1}^T && \text{априорная оценка ковариаций} \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$F_{k-1} = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \delta x}(\bar{x}_{k-1}, \delta x_{k-1|k-1}, u_k, 0), \quad L_{k-1} = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \mu}(\bar{x}_{k-1|k-1}, \delta x_{k-1|k-1}, u_k, 0) \quad (28)$$

Коррекция

$$\begin{aligned} y_k &= z_k - h_k(\bar{x}_k, \delta x_{k|k-1}, 0) && \text{ошибка экстраполяции} \\ S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + M_k R_k M_k^T && \text{матрица ковариации для ошибок экстраполяции} \\ K_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} && \text{матрица коэффициентов усиления} \\ \delta x_{k|k} &= K_k y_k && \text{корреция экстраполяции} \\ P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} && \text{расчёт ковариационной матрицы} \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$H_k = \frac{\partial h_k}{\partial \delta x}(\bar{x}_{k-1}, \delta x_{k|k-1}, 0), \quad M_k = \frac{\partial h_k}{\partial \nu}(\bar{x}_k, \delta x_{k|k-1}, 0) \quad (30)$$

Добавление

$$x_{k|k} = s_k(\bar{x}_k, \delta x_{k|k}) \quad \text{добавляем ошибку к номинальному состоянию} \quad (31)$$

Сброс

$$\delta x_{k|k} = 0 \quad \text{на следующей итерации оценка ошибки будет 0} \quad (32)$$

Отметим, что вычисление матрицы $P_{k|k}$ неустойчиво и лучше использовать эквивалентные формулы выражающие $P_{k|k}$ через симметричные матрицы

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k S_k^{-1} K_k^T && \text{симметричная форма} \\ P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k M_k R_k M_k^T K_k^T && \text{форма Джосефа} \end{aligned} \quad (33)$$

Более того на этапе сброса также можно обновлять матрицу ковариации по формуле

$$P_{k|k} = G_k P G_k^T, \quad G_k = \frac{\partial g_k}{\partial \delta x}(\delta x_{k|k}) \quad (34)$$

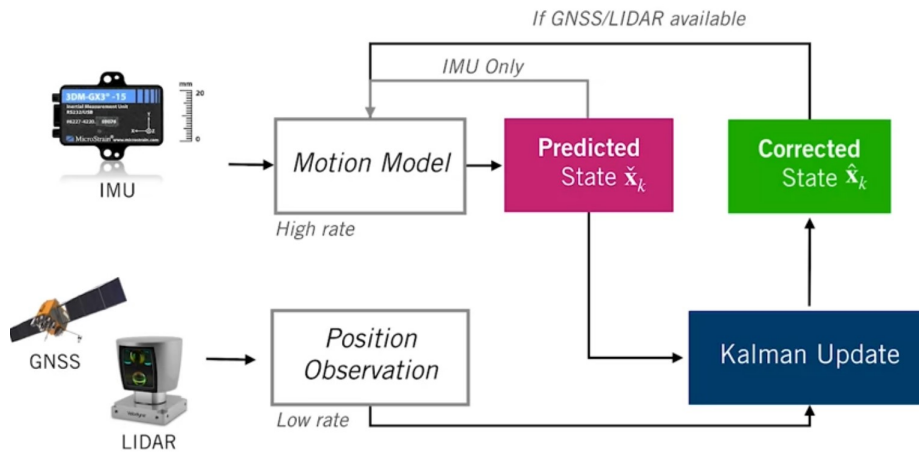
где g_k – это функция удовлетворяющая уравнению $s_k(x_{k|k}, g_k(\delta x)) = s_k(\bar{x}_k, \delta x)$ относительно переменной δx .

3 Локализация с использованием фильтра Калмана

В этой главе мы обсудим применение общей теории к задаче локализации автомобиля. Наш автомобиль будет снабжен тремя приборами: гиростабилизатор (inertial measurement unit, IMU), спутниковый навигатор (GNSS) и лидар (LIDAR). По показаниям этих приборов мы будем определять положение и ориентацию автомобиля.

Для локализации (определения положения и ориентации) автомобиля мы будем использовать фильтр Калмана с состоянием ошибок. В качестве моментов времени когда мы будем находить положение и ориентацию мы будем считать моменты поступления данных от IMU, потому что этот прибор выдает измерения с наибольшей частотой. В эти моменты времени фильтр Калмана будет делать экстраполяцию. Когда в фильтр поступят данные от лидара или навигатора фильтр будет выполнять остальные фазы: коррекция добавление и сброс.

Error-State EKF | IMU + GNSS + LIDAR



3.1 Физическая модель. Учебный пример

Допустим что у нас есть некоторая инерциальная система отсчета C в которой мы хотим определить координаты автомобиля $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, скорость $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ускорение $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ и ориентацию в виде кватерниона $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$. Во время движения IMU будет измерять ускорение $\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^3$ и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_m \in \mathbb{R}^3$ в своей системе координат (назовем ее A). Для удобства начальной локализации мы будем следить за вектором ускорения свободного падения \mathbf{g} . Мы будем считать что у IMU есть некоторая систематическая ошибка \mathbf{a}_b определения ускорения и систематическая ошибка определения угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_b$. Скорости изменения \mathbf{a}_b и $\boldsymbol{\omega}_b$ будут случайными нормально распределенными случайными величинами \mathbf{a}_w , $\boldsymbol{\omega}_w$ с нулевым средним. Уравнения движения автомобиля в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \mathbf{v}(t) & \frac{d\mathbf{a}_b(t)}{dt} &= \mathbf{a}_w(t) \\ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} &= \mathbf{a}(t) & \frac{d\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_w(t) \\ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\mathbf{q}(t) \otimes \mathbf{q}\{\boldsymbol{\omega}(t)\} & \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

При этом измерения IMU будут

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m(t) &= R\{\mathbf{q}(t)\}^T (\mathbf{a}(t) - \mathbf{g}(t)) + \mathbf{a}_b(t) + \mathbf{a}_n(t) \\ \boldsymbol{\omega}_m(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\omega}_b(t) + \boldsymbol{\omega}_n(t) \end{aligned} \quad (36)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \mathbf{v}(t) & \frac{d\mathbf{a}_b(t)}{dt} &= \mathbf{a}_w(t) \\ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} &= R\{\mathbf{q}(t)\}(\mathbf{a}_m(t) - \mathbf{a}_b(t) - \mathbf{a}_n(t)) + \mathbf{g}(t) & \frac{d\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_w(t) \\ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\mathbf{q}(t) \otimes \mathbf{q}\{\boldsymbol{\omega}_m(t) - \boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t)\} & \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

3.1.1 Расширенный фильтр Калмана для локализации автомобиля

Во время движения автомобиля мы будем получать измерения от лидара и навигатора. Это будут либо позиция либо скорость либо ориентация. Теперь мы готовы описать движение автомобиля как динамической системы:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{a}_b(t) \\ \boldsymbol{\omega}_b(t) \\ \mathbf{g}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m(t) - \mathbf{a}_n(t) \\ \boldsymbol{\omega}_m(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_w(t) \\ \boldsymbol{\omega}_w(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_r(t) \\ \boldsymbol{\nu}_v(t) \\ \boldsymbol{\nu}_q(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$f(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ R\{\mathbf{q}\}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g} \\ \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n\} \\ \mathbf{a}_w(t) \\ \boldsymbol{\omega}_w(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad h(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r} + \boldsymbol{\nu}_r \\ \mathbf{v} + \boldsymbol{\nu}_v \\ \mathbf{q} \otimes \text{Exp}(\boldsymbol{\nu}_q) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Видно, что получающаяся динамическая система нелинейная и оценивать ее динамику лучше с помощью фильтра Калмана с состоянием ошибок.

Замечание 3.1 *Строго говоря это динамическая система не определена корректно, так как между некоторыми координатами вектора состояний существует неявная зависимость, а именно $\|\mathbf{q}\| = 1$. Но мы, к сожалению, тут пожертвуем математической строгостью.*

3.1.2 Расширенный фильтр Калмана с состоянием ошибок для локализации автомобиля

Для построения фильтра Калмана с состоянием ошибок мы будем определим номинальное состояние и состояние ошибок и реальное состояние следующим образом

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{r}(t) \\ \bar{v}(t) \\ \bar{q}(t) \\ \bar{a}_b(t) \\ \bar{\omega}_b(t) \\ \bar{g}(t) \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t) \\ \delta \mathbf{v}(t) \\ \delta \boldsymbol{\theta}(t) \\ \delta \mathbf{a}_b(t) \\ \delta \boldsymbol{\omega}_b(t) \\ \delta \mathbf{g}(t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

При этом реальное состояние будет связано с номинальным и состоянием ошибок следующим образом

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{r}(t) + \delta \mathbf{r}(t) \\ \bar{v}(t) + \delta \mathbf{v}(t) \\ \bar{q}(t) \otimes \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ \bar{a}_b(t) + \delta \mathbf{a}_b(t) \\ \bar{\omega}_b(t) + \delta \boldsymbol{\omega}_b(t) \\ \bar{g}(t) + \delta \mathbf{g}(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

Динамика номинального состояния описывается уравнениями не учитывающими шум и ошибки.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}(t)}{dt} &= \bar{v}(t) & \frac{d\bar{a}_b(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\bar{v}(t)}{dt} &= R\{\bar{q}(t)\}(\mathbf{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)) + \bar{g}(t) & \frac{d\bar{\omega}_b(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\bar{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}\bar{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\omega}_b(t)\} & \frac{d\bar{g}(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Динамика состояния ошибок выводится из уравнения для реального состояния, уравнений для номинального состояния и связи между реальным, номинальным и состоянием ошибок. Начнем с простых уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \mathbf{r}(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} - \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) - \bar{v}(t) = \delta \mathbf{v}(t) \\ \frac{d\delta \mathbf{a}_b(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}_b(t)}{dt} - \frac{d\bar{a}_b(t)}{dt} = \mathbf{a}_w(t) - 0 = \mathbf{a}_w(t) \\ \frac{d\delta \boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} - \frac{d\bar{\omega}_b(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}_w(t) - 0 = \boldsymbol{\omega}_w(t) \\ \frac{d\delta \mathbf{g}(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt} - \frac{d\bar{g}(t)}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Выведем уравнение для ошибки скорости. Обозначим

$$\mathbf{a}_{mb}(t) = \mathbf{a}_m(t) - \bar{\mathbf{a}}_b(t) \quad \delta \mathbf{a}_{mb}(t) = -\delta \mathbf{a}_b(t) - \mathbf{a}_n(t) \quad \mathbf{R}(t) = R\{\mathbf{q}(t)\} \quad \bar{\mathbf{R}}(t) = R\{\bar{\mathbf{q}}(t)\} \quad (44)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{R}(t)(\mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{a}_{mb}(t)) + \mathbf{g}(t) \quad \frac{d\bar{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_{mb}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t) \quad (45)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{R}(t) = \bar{\mathbf{R}}(t)(I + [\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times} + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t))) \quad (46)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \mathbf{v}(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} - \frac{d\bar{\mathbf{v}}(t)}{dt} \\ &= (\mathbf{R}(t)(\mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{a}_{mb}(t)) + \mathbf{g}(t)) \\ &\quad - (\bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_{mb}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t)) \\ &= \bar{\mathbf{R}}(t)(I + [\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times} + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)))(\mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{a}_{mb}(t)) \\ &\quad - \bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_{mb}(t) + \mathbf{g}(t) - \bar{\mathbf{g}}(t) \\ &= \bar{\mathbf{R}}(t)(\mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{a}_{mb}(t)) + \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}(\mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{a}_{mb}(t)) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ &\quad - \bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{g}(t) \\ &= \bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_{mb}(t) + \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}(\mathbf{a}_{mb}(t) \\ &\quad + \delta \mathbf{a}_{mb}(t)) + \delta \mathbf{g}(t) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ &= \bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_{mb}(t) + \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}\mathbf{a}_{mb}(t) \\ &\quad + \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}\delta \mathbf{a}_{mb}(t) + \delta \mathbf{g}(t) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ &= -\bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_b(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_n(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{a}_{mb}(t)]_{\times}\delta \boldsymbol{\theta}(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}\delta \mathbf{a}_b(t) \\ &\quad - \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}\mathbf{a}_n(t) + \delta \mathbf{g}(t) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ &= -\bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_b(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{a}_m(t) - \bar{\mathbf{a}}_b(t)]_{\times}\delta \boldsymbol{\theta}(t) - o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ &\quad - \bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_n(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}\mathbf{a}_n(t) + \delta \mathbf{g}(t) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \\ &= -\bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_b(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{a}_m(t) - \bar{\mathbf{a}}_b(t)]_{\times}\delta \boldsymbol{\theta}(t) \\ &\quad - \bar{\mathbf{R}}(t)(I + [\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times})\mathbf{a}_n(t) + \delta \mathbf{g}(t) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (47)$$

Мы не будем выводить явные формулы для членов второго порядка малости, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \mathbf{v}(t)}{dt} &= -\bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_b(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{a}_m(t) - \bar{\mathbf{a}}_b(t)]_{\times}\delta \boldsymbol{\theta}(t) \\ &\quad + o(\|\delta \boldsymbol{\theta}(t)\|) + o(\|\delta \boldsymbol{\theta}(t)\|) - \bar{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}_n(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)[\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}\mathbf{a}_n(t) + \delta \mathbf{g}(t) \\ &= -\bar{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{a}_m(t) - \bar{\mathbf{a}}_b(t)]_{\times}\delta \boldsymbol{\theta}(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)\delta \mathbf{a}_b(t) \\ &\quad + \delta \mathbf{g}(t) - \bar{\mathbf{R}}(t)(I + [\delta \boldsymbol{\theta}(t)]_{\times})\mathbf{a}_n(t) + o(\delta \boldsymbol{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (48)$$

Теперь выведем уравнение для ошибки угловой скорости. Обозначим

$$\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) = \boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\boldsymbol{\omega}}_b(t) \quad \delta \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) = -\delta \boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) \quad (49)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{q}(t) \otimes \mathbf{q}\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \quad \frac{d\bar{\mathbf{q}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \mathbf{q}\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta \boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \quad \mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \delta \mathbf{q}(t) \quad (50)$$

Находим

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \delta\mathbf{q}(t)) \\
\frac{1}{2}\mathbf{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{d\bar{\mathbf{q}}(t)}{dt} \otimes \delta\mathbf{q}(t) + \bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \frac{d\delta\mathbf{q}(t)}{dt} \\
\frac{1}{2}\mathbf{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\mathbf{q}(t) + \bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \frac{d\delta\mathbf{q}(t)}{dt} \\
\frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \delta\mathbf{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\mathbf{q}(t) + \bar{\mathbf{q}}(t) \otimes \frac{d\delta\mathbf{q}(t)}{dt} \\
\frac{1}{2}\delta\mathbf{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} &= \frac{1}{2}q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\mathbf{q}(t) + \frac{d\delta\mathbf{q}(t)}{dt} \\
\frac{d\delta\mathbf{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}(\delta\mathbf{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} - q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\mathbf{q}(t))
\end{aligned} \tag{51}$$

Домножая на $\bar{\mathbf{q}}^{-1}$ мы получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\mathbf{q}(t)}{dt} &= \frac{1}{2}(\delta\mathbf{q}(t) \otimes q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} - q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\} \otimes \delta\mathbf{q}(t)) \\
&= \frac{1}{2}([q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\}]_R \delta\mathbf{q}(t) - [q\{\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)\}]_L \delta\mathbf{q}(t)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) \end{bmatrix} \right]_R - \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) \end{bmatrix} \right]_L \right) \delta\mathbf{q}(t) \\
&= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & -[\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t))^T \\ \boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & [\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \end{bmatrix} \right) \delta\mathbf{q}(t) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & -[2\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \end{bmatrix} \delta\mathbf{q}(t)
\end{aligned} \tag{52}$$

Поскольку $\delta\mathbf{q}(t) = \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) = [1, \delta\boldsymbol{\theta}(t)/2]^T + o(\delta\boldsymbol{\theta})$, мы получаем равенства

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t)/2 \end{bmatrix} + o(\delta\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) & -[2\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t)/2 \end{bmatrix} + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)^T \delta\boldsymbol{\theta}(t) \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) - \frac{1}{2}[2\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))
\end{aligned} \tag{53}$$

В частности

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} &= \delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t) - [\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta}(t) - \frac{1}{2}[\delta\boldsymbol{\omega}_{mb}(t)]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
&= -\delta\boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) - [\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\boldsymbol{\omega}}_b(t)]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta}(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
&= -[\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\boldsymbol{\omega}}_b(t)]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta}(t) - \delta\boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t))
\end{aligned} \tag{54}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\mathbf{r}(t)}{dt} &= \delta\mathbf{v}(t) \\
\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} &= -R\{\bar{q}(t)\}[\mathbf{a}_m(t) - \bar{a}_b(t)]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta}(t) - R\{\bar{q}(t)\}\delta\mathbf{a}_b(t) + \delta\mathbf{g}(t) \\
&\quad - R\{\bar{q}(t)\}(I + [\delta\boldsymbol{\theta}(t)]_{\times})\mathbf{a}_n(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
\frac{d\delta\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} &= -[\boldsymbol{\omega}_m(t) - \bar{\boldsymbol{\omega}}_b(t)]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta}(t) - \delta\boldsymbol{\omega}_b(t) - \boldsymbol{\omega}_n(t) + o(\delta\boldsymbol{\theta}(t)) \\
\frac{d\delta\mathbf{a}_b(t)}{dt} &= \mathbf{a}_w(t) \\
\frac{d\delta\boldsymbol{\omega}_b(t)}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_w(t) \\
\frac{d\delta\mathbf{g}(t)}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{55}$$

Дискретизация уравнений номинального сосотояния будет

$$\begin{aligned}
\bar{r}_k &= \bar{r}_{k-1} + \bar{v}_{k-1}\Delta t + (R\{\bar{q}_{k-1}\}(\mathbf{a}_{m,k} - \bar{a}_{b,k-1}) + \bar{g}_{k-1})\frac{\Delta t^2}{2} \\
\bar{v}_k &= \bar{v}_{k-1} + (R\{\bar{q}_{k-1}\}(\mathbf{a}_{m,k} - \bar{a}_{b,k-1}) + \bar{g}_{k-1})\Delta t \\
\bar{q}_k &= \bar{q}_{k-1} \otimes q\{(\boldsymbol{\omega}_{m,k} - \bar{\boldsymbol{\omega}}_{b,k-1})\Delta t\} \\
\bar{a}_{b,k} &= \bar{a}_{b,k-1} \\
\bar{\boldsymbol{\omega}}_{b,k} &= \bar{\boldsymbol{\omega}}_{b,k-1} \\
\bar{g}_k &= \bar{g}_{k-1}
\end{aligned} \tag{56}$$

Дискретизация уравнений сосотояния ошибки имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{r}_k &= \delta\mathbf{r}_{k-1} + \delta\mathbf{v}_{k-1}\Delta t \\
\delta\mathbf{v}_k &= \delta\mathbf{v}_{k-1} - R\{\bar{q}_{k-1}\}[\mathbf{a}_{m,k} - \bar{a}_{b,k-1}]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\Delta t \\
&\quad - R\{\bar{q}_{k-1}\}\delta\mathbf{a}_{b,k-1}\Delta t + \delta\mathbf{g}_{k-1}\Delta t - R\{\bar{q}_{k-1}\}(I + [\delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}]_{\times})\mathbf{a}_{n,k}\Delta t \\
\delta\boldsymbol{\theta}_k &= R\{ -[\boldsymbol{\omega}_{m,k} - \bar{\boldsymbol{\omega}}_{b,k-1}]_{\times}\Delta t\}\delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} - \delta\boldsymbol{\omega}_{b,k-1}\Delta t - \boldsymbol{\omega}_{n,k}\Delta t \\
\delta\mathbf{a}_{b,k} &= \delta\mathbf{a}_{b,k-1} + \mathbf{a}_{w,k}\Delta t \\
\delta\boldsymbol{\omega}_{b,k} &= \delta\boldsymbol{\omega}_{b,k-1} + \boldsymbol{\omega}_{w,k}\Delta t \\
\delta\mathbf{g}_k &= \delta\mathbf{g}_{k-1}
\end{aligned} \tag{57}$$

Полученным уравнениям соответствует динамическая система

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} \bar{r}_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{q}_k \\ \bar{a}_{b,k} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_{b,k} \\ \bar{g}_k \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}_k \\ \delta\mathbf{v}_k \\ \delta\boldsymbol{\theta}_k \\ \delta\mathbf{a}_{b,k} \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{b,k} \\ \delta\mathbf{g}_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \quad u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m,k} \\ \boldsymbol{\omega}_{m,k} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n,k} \\ \boldsymbol{\omega}_{n,k} \\ \mathbf{a}_{w,k} \\ \boldsymbol{\omega}_{w,k} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\nu}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{r,k} \\ \boldsymbol{\nu}_{v,k} \\ \boldsymbol{\nu}_{q,k} \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$\bar{f}_k(\bar{x}, u) = \begin{bmatrix} \bar{r} + \bar{v}\Delta t + (R\{\bar{q}\}(\mathbf{a}_m - \bar{a}_b) + \bar{g})\frac{\Delta t^2}{2} \\ \bar{v} + R\{\bar{q}\}(\mathbf{a}_m - \bar{a}_b)\Delta t \\ \bar{q} \otimes q\{(\boldsymbol{\omega}_m - \bar{\boldsymbol{\omega}}_b)\Delta t\} \\ \bar{a}_b \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_b \\ \bar{g} \end{bmatrix} \quad h_k(\bar{x}, \delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \bar{r} + \delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\nu}_r \\ \bar{v} + \delta\mathbf{v} + \boldsymbol{\nu}_v \\ \bar{q} \otimes \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) \otimes \text{Exp}(\boldsymbol{\nu}_q) \end{bmatrix} \tag{59}$$

$$\delta f_k(\bar{x}, \delta \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{v} \Delta t \\ \delta \mathbf{v} - R\{\bar{q}\}[\mathbf{a}_m - \bar{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} \Delta t - R\{\bar{q}\} \delta \mathbf{a}_b \Delta t + \delta \mathbf{g} \Delta t - R\{\bar{q}\}(I + [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times}) \mathbf{a}_n \Delta t \\ R\{ -[\boldsymbol{\omega}_m - \bar{\omega}_b]_{\times} \Delta t \} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\omega}_b \Delta t - \boldsymbol{\omega}_n \Delta t \\ \delta \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_w \Delta t \\ \delta \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_w \Delta t \\ \delta \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$s_k(\bar{x}, \delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{r} + \delta \mathbf{r} \\ \bar{v} + \delta \mathbf{v} \\ \bar{q} \otimes \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta}) \\ \bar{a}_b + \delta \mathbf{a}_b \\ \bar{\omega}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b \\ \bar{g} + \delta \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Функция g_k определяемая из уравнения $s_k(x_{k|k}, g_k(\delta x)) = s_k(\bar{x}_k, \delta x)$ не имеет аналитической формулы, но есть приближенная:

$$g_k(\delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r} - \delta r_{k|k} \\ \delta \mathbf{v} - \delta v_{k|k} \\ (I - \frac{1}{2}[\delta \theta_{k|k}]_{\times}) \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \theta_{k|k} + o(\delta \theta^2) \\ \delta \mathbf{a}_b - \delta a_{b,k|k} \\ \delta \boldsymbol{\omega}_b - \delta \omega_{b,k|k} \\ \delta \mathbf{g} - \delta g_{k|k} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Чтобы применить алгоритм параграфа 2.2 достаточно найти несколько матриц

$$\begin{aligned} F = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \delta x}(\bar{x}, \delta \mathbf{x}, u, 0) &= \begin{bmatrix} I & I \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -R\{\bar{q}\} \Delta t [\mathbf{a}_m - \bar{a}_b]_{\times} & -R\{\bar{q}\} \Delta t & 0 & I \Delta t \\ 0 & 0 & R\{ -[\boldsymbol{\omega}_m - \bar{\omega}_b]_{\times} \Delta t \} & 0 & -I \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ L = \frac{\partial \delta f_k}{\partial \delta \mu}(\bar{x}, \delta \mathbf{x}, u, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R\{\bar{q}\}(I + [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times}) \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H = \frac{\partial h_k}{\partial \delta x}(x, \delta \mathbf{x}, 0) &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\{\bar{q}\}^T J_r(\delta \boldsymbol{\theta}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M = \frac{\partial h_k}{\partial \nu}(x, \delta \mathbf{x}, 0) &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ G = \frac{\partial g_k}{\partial \delta x}(\delta x_{k|k}) &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - \frac{1}{2}[\delta \theta_{k|k}]_{\times} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

4 Справочные материалы и обозначения

4.1 Кватернионы

Кватернион q это пара из числа и вектора $[w, \vec{v}]^T$. Множество всех кватернионов будем обозначать \mathbb{H} . Пусть нам заданы два кватерниона $q_1 = [w_1, \vec{v}_1]^T$ и $q_2 = [w_2, \vec{v}_2]^T$ и числа $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, тогда определим линейные операции над кватернионами

$$t_1 q_1 + t_2 q_2 = \begin{bmatrix} t_1 w_1 + t_2 w_2 \\ t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Умножение кватернионов определяется по формуле

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vec{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} w_2 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 w_2 - \vec{v}_1^T \vec{v}_2 \\ w_1 \vec{v}_2 + w_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

Умножение кватернионов некоммутативно (то есть зависит от порядка множителей). Для любых кватернионов $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ выполнены законы ассоциативности и дистрибутивности

$$(q_1 + q_2) \otimes q_3 = q_1 \otimes q_3 + q_2 \otimes q_3 \quad q_3 \otimes (q_1 + q_2) = q_3 \otimes q_1 + q_3 \otimes q_2 \quad (q_1 \otimes q_2) \otimes q_3 = q_1 \otimes (q_2 \otimes q_3) \quad (66)$$

Кватернион вида $e = [1, 0]^T$ называется единичным и обладает тем свойством, что $e \otimes q = q \otimes e = q$ для любого кватерниона $q \in \mathbb{H}$.

Каждый из множителей в формуле произведения кватернионов можно рассматривать как линейный оператор над четырехмерными векторами

$$[q_1]_L q_2 = q_1 \otimes q_2 = [q_2]_R q_1 \quad (67)$$

Откуда можно вывести, что

$$[q]_L = wI + \begin{bmatrix} 0 & -\vec{v}^T \\ \vec{v} & [\vec{v}]_{\times} \end{bmatrix} \quad [q]_R = wI + \begin{bmatrix} 0 & -\vec{v}^T \\ \vec{v} & -[\vec{v}]_{\times} \end{bmatrix} \quad (68)$$

где

$$[\vec{v}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Норма кватерниона определяется по формуле

$$\|q\| = \sqrt{w^2 + \vec{v}^T \vec{v}} \quad (70)$$

Для заданного кватерниона его сопряженный кватернион определяется по формуле

$$q^* = [w, -\vec{v}]^T \quad (71)$$

Для любого ненулевого кватерниона $q \in \mathbb{H}$ существует обратный кватернион $q^{-1} \in \mathbb{H}$ такой, что $q \otimes q^{-1} = q \otimes q^{-1} = e$. Более того

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \quad (72)$$

Действительная и мнимая часть кватерниона $q = [w, \vec{v}]$ определяется формулами

$$\Re q = w \quad \Im q = \vec{v} \quad (73)$$

Легко проверить, что

$$\|q\| = \sqrt{\Re(q \otimes q^*)} \quad \|p \otimes q\| = \|p\| \|q\| \quad (74)$$

Кватернионы у которых первая компонента равна 0 называются чистыми. Для заданного числа $w \in \mathbb{R}$ и вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ введем обозначения

$$q\{w\} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \quad q\{\vec{v}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad (75)$$

Множество чистых кватернионов мы будем обозначать через \mathbb{H}_p .

Кватернионы нормы 1 называются единичными. Если q – единичный кватернион, то

$$q = \begin{bmatrix} \cos t \\ \vec{u} \sin t \end{bmatrix} = \cos t \cdot e + \sin t \cdot q\{\vec{u}\} \quad (76)$$

где \vec{u} – вектор единичной длины и $t \in \mathbb{R}$. Для такого кватерниона обратный находится очень просто

$$q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\vec{u} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (77)$$

Множество единичных кватернионов мы будем обозначать S^3 .

Для кватернионов можно определить аналоги стандартных функций. Пусть $q = [w, \vec{v}]^T$ – некоторый кватернион, тогда положим по определению

$$\exp : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : q \mapsto e^w \begin{bmatrix} \cos \|\vec{v}\| \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \sin \|\vec{v}\| \end{bmatrix} \quad \log : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : q \mapsto \begin{bmatrix} \log \sqrt{w^2 + \vec{v}^T \vec{v}} \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \arctan \frac{\|\vec{v}\|}{w} \end{bmatrix} \quad (78)$$

Можно показать, что эти функции взаимно обратные друг к другу.

Аналогично можно определить экспоненту от вектора и логарифм от единичного кватерниона

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 : \vec{v} &\mapsto \begin{bmatrix} \cos \|\vec{v}\| \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \sin \|\vec{v}\| \end{bmatrix} \\ \log : S^3 \rightarrow \mathbb{H}_p : q &\mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \arctan \frac{\|\vec{v}\|}{w} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (79)$$

Легко проверить, что

$$\exp(\vec{v}) = \exp(q\{\vec{v}\}) \quad \exp(q)^{-1} = \exp(q^*) \quad \exp(\vec{v})^{-1} = \exp(-\vec{v}) \quad (80)$$

Нам будет полезен еще один вид экспоненты и логарифма

$$\text{Exp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 : \vec{v} \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \vec{v}\right) \quad \text{Log} : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : q \mapsto 2 \log(q) \quad (81)$$

Позже нам понадобится следующая формула

$$q \otimes p \otimes q^{-1} = \exp(R\{q\} \log(p)) = \text{Exp}(R\{q\} \text{Log}(p)) \quad (82)$$

где $p \in \mathbb{H}$ и $q \in S^3$. Действительно, так как $p \in \mathbb{H}$, то $p = \exp(t\vec{u})$ и $t\vec{u} = \log(p)$, для некоторого $t \in \mathbb{R}$ и единичного вектора $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. В этом случае

$$\begin{aligned}
q \otimes p \otimes q^{-1} &= q \otimes \exp(t\vec{u}) \otimes q^{-1} \\
&= \cos t \cdot (q \otimes e \otimes q^{-1}) + \sin t \cdot (q \otimes q\{\vec{u}\} \otimes q^{-1}) \\
&= \cos t \cdot e + \sin t \cdot q\{R\{q\}\vec{u}\} \\
&= \exp(tR\{q\}\vec{u}) \\
&= \exp(R\{q\} \log(p)) \\
&= \text{Exp}(R\{q\} \text{Log}(p))
\end{aligned} \tag{83}$$

4.2 Связь кватернионов, ортогональных матриц и вращений

Множество всех вращений трехмерного пространства образуют группу (композиция двух вращений есть вращение; существует вращение, которое оставляет все точки на месте; у каждого вращения есть обратное). Эту группу обозначают $SO(3)$. Для описания вращений можно использовать единичные кватернионы.

По теореме Эйлера каждое вращение $r \in SO(3)$ задается углом поворота ϕ и осью поворота \vec{u} . Для описания оси поворота будем использовать вектор единичной длины. Тогда вращение можно описать единичным кватернионом

$$q = \text{Exp}(\phi\vec{u}) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \vec{u} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \tag{84}$$

Если $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ – произвольный вектор, то результат его вращения можно найти по формуле

$$r(\vec{x}) = \Im(q \otimes q\{\vec{x}\} \otimes q^{-1}) \tag{85}$$

Стоит отметить, что для описания одного и того же вращения r подойдут кватернионы

$$q = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \vec{u} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \text{ и } q = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi-\phi}{2} \\ -\vec{u} \sin \frac{2\pi-\phi}{2} \end{bmatrix} \tag{86}$$

С другой стороны для описания вращений можно использовать ортогональные матрицы с определителем 1. Матрица R называется ортогональной если $R^T R = R R^T = I$. Для таких матриц $R^{-1} = R^T$. Теперь допустим, что вращение r описывается матрицей R , тогда для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ выполнено

$$r(\vec{x}) = R\vec{x} \tag{87}$$

Пусть вращение $r \in SO(3)$ описывается кватернионом $q = [w, \vec{v}]^T$, тогда соответствующая ортогональная матрица R будет иметь вид

$$R\{q\} = (w^2 - \vec{v}^T \vec{v})I + 2\vec{v} \vec{v}^T + 2w[\vec{v}]_{\times} \tag{88}$$

Данное сопоставление имеет много полезных свойств (является гомоморфизмом)

$$\begin{aligned}
R\{-q\} &= R\{q\} & R\{e\} &= I \\
R\{q^{-1}\} &= R\{q\}^{-1} = R\{q\}^T & R\{q_1 \otimes q_2\} &= R\{q_1\} R\{q_2\}
\end{aligned} \tag{89}$$

4.3 Дифференциальное исчисление для вращений

Пусть A – произвольная матрица размера 3×3 . Ее матричной экспонентой будем называть сумму ряда

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad (90)$$

Эта сумма всегда существует. Матричная экспонента обладает некоторыми вполне ожидаемыми свойствами

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \exp(A)\exp(B) & \text{если } AB &= BA \\ \exp(A)^{-1} &= \exp(-A) & \exp(O) &= I \end{aligned} \quad (91)$$

Основное применение матричных экспонент – в решении дифференциальных уравнений. Пусть нам дано векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) \quad (92)$$

Тогда его решение можно записать в виде $\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{x}(0)$.

Допустим, что в каждый момент времени ориентация твердого тела описывается кватернионом $q(t)$ и матрицей $R(t)$. Если $\vec{\omega}$ – это мгновенная угловая скорость тела, то

$$\frac{dR(t)}{dt} = R(t)[\omega]_{\times} \quad \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2}q(t) \otimes q\{\vec{\omega}\} \quad (93)$$

Решения этих дифференциальных уравнений имеют вид

$$R(t) = R(0) \exp([\vec{\omega}]_{\times} t) \quad q(t) = q(0) \otimes \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\omega} t\right) \quad (94)$$

Иногда возникает задача дифференцирования функций со значениями в ортогональных матрицах или единичных кватернионах. Основная сложность состоит в том, что нельзя использовать классическое определение производной, так как классическое определение подразумевает, что нет никаких ограничений на множество значений функции для которой мы хотим найти производную.

Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ – некоторая функция. Здесь мы определяем $SO(3)$ через кватернионы, поэтому можно считать, что f принимает значения в единичных кватернионах. Мы будем говорить, что f дифференцируема справа в точке θ если для малых $\Delta\theta \in \mathbb{R}^3$ выполнено

$$f(\theta + \Delta\theta) = f(\theta) \otimes \text{Exp}(A\Delta\theta) \otimes \text{Exp}(o(\Delta\theta)) \quad (95)$$

для некоторой матрицы A размера 3×3 . Эту матрицу мы будем называть правой производной функции f в точке θ и будем обозначать

$$A = \frac{\partial_r f(\theta)}{\partial \theta} \quad (96)$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial_r f(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho)) \Big|_{\rho=0} \quad (97)$$

Самой полезной для нас будет формула

$$J_r(\theta) = \frac{\partial_r \text{Exp}(\theta)}{\partial \theta} = I - \frac{1 - \cos \|\theta\|}{\|\theta\|^2} [\theta]_{\times} + \frac{\|\theta\| - \sin \|\theta\|}{\|\theta\|^3} [\theta]_{\times}^2 \quad (98)$$

Для векторов с θ малой нормы получим

$$J_r(\theta) = I + \frac{1}{2} [\theta]_{\times} - \frac{1}{6} [\theta]_{\times}^2 + o(\theta) \quad (99)$$

Выведем еще несколько формул дифференцирования. Пусть $q \in S^3$ – произвольный константный единичный кватернион, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r(q \otimes f(\theta))}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}((q \otimes f(\theta))^{-1} \otimes (q \otimes f(\theta + \rho))) \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes q^{-1} \otimes q \otimes f(\theta + \rho)) \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho)) \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{\partial_r f(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial_r(f(\theta) \otimes q)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}((f(\theta) \otimes q)^{-1} \otimes (f(\theta + \rho) \otimes q)) \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}(q^{-1} \otimes f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho) \otimes q) \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}(\text{Exp}(R\{q^{-1}\} \text{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho)))) \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} R\{q^{-1}\} \text{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho)) \Big|_{\rho=0} \\ &= R\{q^{-1}\} \frac{\partial}{\partial \rho} \text{Log}(f(\theta)^{-1} \otimes f(\theta + \rho)) \Big|_{\rho=0} \\ &= R\{q\}^T \frac{\partial_r f(\theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (100)$$

Список литературы

- [1] *Joan Solà*. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter, (2017), arXiv:1711.02508
- [2] *Dongjiao He, Wei Xu, Fu Zhang M.* Kalman Filters on Differentiable Manifolds, (2021), arXiv:2102.03804