# Метрическая и топологическая свобода для секвенциальных операторных пространств

Норберт Немеш, Сергей Штейнер

**Аннотация**

В 2002 году году Ансельм Ламберт в своей диссертации [1] ввел определение секвенциального операторного пространства и доказал аналоги многих фактов теории операторных пространств. Говоря неформально, категория секвенциальных операторных пространств находится «между» категориями нормированных и операторных пространств. Цель данной статьи — описание свободных и косвободных объектов для различных версий гомологии в категории секвенциальных операторных пространств. Сначала мы покажем, что в этой категории теория двойственности во многом аналогична таковой для нормированных пространств. Затем, основываясь на этих результатах, мы дадим полное описание метрически и топологически свободных и косвободных объектов.

# 1 Секвенциальные операторнве пространства.

## 1.1 Некоторые напоминания.

Далее все линейные пространства будут рассматриваться над полем комплексных чисел. Через $B_E$ мы будем обозначать замкнутый единичный шар нормированного пространства $E$. Если $E, F$ — два нормированных пространства, то $\mathcal{B}(E,F)$ — нормированное пространство ограниченных линейных операторов из $E$ в $F$. Для заданного $1 \leq p \leq \infty$ через $\bigoplus_p^0 \{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ мы обозначаем $\bigoplus_p^0$ сумму семейства нормированных пространств $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Это нормированное пространство, у которого каждый вектор имеет лишь конечное число ненулевых координат. Аналогично $\bigoplus_p \{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ обозначает $\bigoplus_p$-сумму банаховых пространств. Отметим, что $\bigoplus_\infty$-суммы являются произведениями, а $\bigoplus_1$-суммы — копроизведениями в категории нормированных простанств. Через $\mathbb{N}_n$ мы будем обозначать множество $\{1, \ldots, n\}$.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, тогда через $M_{n,k}$ мы будем обозначать линейное пространство комплекснозначных матриц размера $n \times k$. Пространство $M_{n,k}$ по умолчанию наделяется операторной нормой $\|\cdot\|$, но нам также понадобится норма Гильберта-Шмидта. Пусть $\alpha \in M_{n,k}$, тогда норму Гильберта-Шмидта определим равенством $\|\alpha\|_{hs} = \operatorname{trace}(|\alpha|^2)^{1/2}$ где $|\alpha| = (\alpha^*\alpha)^{1/2}$. Отметим, что всегда выполнены соотношения $\|\alpha\| \leq \|\alpha\|_{hs}$ и $\||\alpha|\|_{hs} = \||\alpha^*|\| = \|\alpha\|_{hs}$.

Для линейного пространства $E$ через $E^k$ будем обозначать пространство столбцов высоты $k$ с элементами из $E$. Для $\alpha \in M_{n,k}$ и $x \in E^k$ через $\alpha x$ будем обозначать такой столбец из $E^n$, что $(\alpha x)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$. Эта формула является естественным обощением матричного умножения. Теперь мы готовы дать два основных определения: определение секвенциального операторного пространства и определение секвенциально ограниченного оператора.

**Определение 1.1.1**[[1], 1.1.7] Пусть $E$ — линейное пространство, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ на пространстве $E^n$ задана некоторая норма $\|\cdot\|_{\widehat{n}}$. Будем говорить, что семейство $X = (E^n, (\|\cdot\|_{\widehat{n}})_{n \in \mathbb{N}})$, задаёт на $E$ структуру *секвенциального операторного* пространства, если выполнены следующие условия:

(i) $\|\alpha x\|_{\widehat{m}} \leq \|\alpha\| \|x\|_{\widehat{n}}$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E^{\widehat{n}}$, $\alpha \in M_{m,n}$.

(ii) $\left\|(x,y)^{tr}\right\|^2_{\widehat{n+m}} \leq \|x\|^2_{\widehat{n}} + \|y\|^2_{\widehat{m}}$ для всех $m,n \in \mathbb{N}$, $x \in E^n$, $y \in E^m$

Пространство $E^n$ с нормой $\|\cdot\|_{\widehat{n}}$ будем обозначать через $X^{\widehat{n}}$.

Легко заметить, что если $X$ — секвенциальное операторное пространство, то каждое нормированное пространство $X^{\widehat{n}}$ наделено естественной структурой секвенциального операторного пространства: достаточно отождествить $(X^{\widehat{n}})^{\widehat{k}}$ с $X^{\widehat{nk}}$. Для любого нормированного пространства $E$ можно задать семейство наименьших или наибольших норм, делающих $E$ секвенциальным операторным пространством [[1], 2.1.1, 2.1.2]. Мы обозначим эти пространства $\min(E)$ и $\max(E)$ соответственно. Их нормы задаются равенствами

$$\|x\|_{\min(E)^{\widehat{n}}} = \sup_{\xi \in B_{l_2^n}} \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right\| \qquad \|x\|_{\max(E)^{\widehat{n}}} = \inf_{x=\alpha\tilde{x}, \alpha \in M_{n,k}, \tilde{x} \in E^{\widehat{k}}} \|\alpha\|_{M_{n,k}} \left(\sum_{i=1}^k \|\tilde{x}_i\|^2\right)^{1/2}$$

Мы будем использовать обозначения $t_2^n = \min(\mathbb{C}^n)$, $l_2^n = \max(\mathbb{C}^n)$, причем здесь $\mathbb{C}^n$ рассматривается как $n$-мерное гильбертово пространство. Отсюда, кстати, легко видеть, что $\mathcal{C}$ обладает единственной секвенциальной операторной структурой.

**Определение 1.1.2**[[1], 1.2.1] Пусть $X$ и $Y$ — секвенциальные операторные пространства, а $\varphi : X \to Y$ — линейный оператор. Его *размножением* называется семейство операторов $\varphi^{\widehat{n}} : X^{\widehat{n}} \to Y^{\widehat{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, определённых равенством $\varphi^{\widehat{n}}(x) = (\varphi(x_i))_{i \in \mathbb{N}_k}$. Будем называть оператор $\varphi$ *секвенциально ограниченным*, если

$$\|\varphi\|_{sb} := \sup\{\|\varphi^{\widehat{n}}\|_{\mathcal{B}(X^{\widehat{n}}, Y^{\widehat{n}})} : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Множество секвенциально ограниченных операторов между секвенциальными операторными пространствами $X$ и $Y$ будем обозначать через $\mathcal{SB}(X,Y)$. Это линейное подпространство в $\mathcal{B}(X,Y)$, которое также можно наделить структурой секвенциального операторного пространства [[1], 1.2.7] посредством отождествления $\mathcal{SB}(X,Y)^{\widehat{n}} = \mathcal{SB}(X, Y^{\widehat{n}})$. Теперь мы можем ввести две категории секвенциальных операторных пространств: $SQNor$ и $SQNor_1$. Объекты обеих категорий — секвенциальные операторные пространства. Морфизмы в $SQNor$ — секвенциально ограниченные операторы, а в $SQNor_1$ — секвенциально ограниченные операторы с $sb$-нормой, не превосходящей 1.

Теперь легко проверить что $\mathcal{SB}(-,-) : SQNor \times SQNor \to SQNor$ задает бифунктор, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму. Как и в случае нормированных пространств, логично рассмотреть действие этого функтора с пространством $\mathbb{C}$ в качестве второго аргумента. Мы получим функтор $^{\triangle} = \mathcal{SB}(-,\mathbb{C})$, который логично называть функтором сопряжения для секвенциальных операторных пространств. Он действительно ведет себя подобно функтору банаховой сопряженности [[1], 1.3]. Категория $SQNor_1$ (как и категория операторных пространств с вполне сжимающими операторами в качестве морфизмов) обладает категорными произведениями и копроизведениями.

**Определение 1.1.3**[[1], 1.1.28] Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство секвенциальных операторных пространств. Их $\bigoplus_\infty$-суммой называется секвенциальное операторное пространство $\bigoplus_\infty\{X_\lambda^{\widehat{1}} : \lambda \in \Lambda\}$, с семейством норм, задаваемых отождествлениями

$$\left(\bigoplus\nolimits_\infty \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^{\widehat{n}} = \bigoplus\nolimits_\infty \{X_\lambda^{\widehat{n}} : \lambda \in \Lambda\}$$

**Определение 1.1.4** Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство секвенциальных операторных пространств. Их $\bigoplus_1^0$-суммой называется секвенциальное операторное пространство $\bigoplus_1^0\{X_\lambda^{\widehat{1}} : \lambda \in \Lambda\}$, с нормами, индуцированными вложением

$$\bigoplus{}_1^0\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \hookrightarrow \left(\bigoplus{}_\infty\{X_\lambda^\triangle : \lambda \in \Lambda\}\right)^\triangle$$

Как и в случае операторных пространств, легко показать, что $\bigoplus_\infty$-суммы являются произведениями, а $\bigoplus_1^0$-суммы — копроизведениями в $SQNor_1$. Более того, имеет место изоморфизм в $SQNor_1$:

$$\left(\bigoplus{}_1^0\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^\triangle = \bigoplus{}_\infty\{X_\lambda^\triangle : \lambda \in \Lambda\}$$

## 1.2 Двойственность для секвенциально ограниченных операторов

Основные результаты этого раздела получены Н. Немешем. Для начала нам нужно напомнить некоторые определения и факты, касающиеся ограниченных линейных операторов.

**Определение 1.2.1** Пусть $T : E \to F$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами, тогда $T$ называется

(i) $c$-топологически инъективным, если для каждого $x \in E$ выполнено $\|x\| \leq c\|T(x)\|$. Если упоминание константы $c$ не нужно, будем говорить, что $T$ топологически инъективен.

(ii) (строго) $c$-топологически сюрьективным, если любого $c' > c$ и любого $y \in F$ существует такой $x \in E$, что ($\|x\| \leq c\|y\|$) $\|x\| < c'\|y\|$ и $T(x) = y$. Если упоминание константы $c$ не нужно то будем говорить, что $T$ (строго) топологически сюръективен.

(iii) (строго) коизометрическим, если он сжимающий и (строго) 1-топологически сюръективный

**Предложение 1.2.2** Пусть $T : E \to F$ ограниченный оператор между нормированными пространствами и $c > 0$, тогда

(i) если $T$ (строго) $c$-топологически сюръективен, то $T^*$ $c$-топологически инъективен

(ii) если $T$ $c$-топологически инъективен, то $T^*$ строго $c$-топологически сюръективен

(iii) если $T^*$ (строго) $c$-топологически сюръективен, то $T$ $c$-топологически инъективен

(iv) если $T^*$ $c$-топологически инъективен и $E$ полно, то $T$ $c$-топологически сюръективен

Аналогичные определения можно дать и для секвенциально ограниченных операторов. Например, оператор $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ между секвенциальными операторными пространствами $X$ и $Y$ называется секвенциально $c$-топологически инъективным, если для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически инъективен.

Далее мы докажем несколько технических предложений, необходимых для описания двойственности между секвенциально ограниченными операторами.

**Предложение 1.2.3**[[1], 1.3.14] Пусть $X, Y$ — секвенциальные операторные пространства и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$. Тогда $\varphi^\triangle \in \mathcal{SB}(Y^\triangle, X^\triangle)$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$. Как следствие, $\|\varphi^\triangle\|_{sb} = \|\varphi\|_{sb}$.

**Определение 1.2.4**[[1], 1.3.15] Пусть $X$ — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда через $t_2^n(X)$ будем обозначть нормированное пространство $X^n$ с нормой

$$\|x\|_{t_2^n(X)} := \inf\left\{\|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} : x = \tilde{\alpha}\tilde{x}\right\}$$

где $\tilde{\alpha} \in M_{n,k}$, $x \in X^k$ и $k \in \mathbb{N}$. Если $Y$ — секвенциальное операторное пространство, и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$, то через $t_2^n(\varphi)$ будем обозначать линейный оператор

$$t_2^n(\varphi) : t_2^n(X) \to t_2^n(Y) : x \mapsto \varphi^{\widehat{n}}(x)$$

**Предложение 1.2.5** Пусть $X$ — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\|x\|_{t_2^n(X)} = \inf\left\{\|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{k}} : x = \alpha' x'\right\}$$

где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $x' \in X^n$.

**Доказательство.** Обозначим правую часть доказываемого равенства через $\|x\|'_{t_2^n(X)}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда существуют $\tilde{\alpha} \in M_{n,k}$ и $\tilde{x} \in X^k$, $k \in \mathbb{N}$ такие, что $x = \tilde{\alpha}\tilde{x}$ и $\|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} < \|x\|_{t_2^n(X)} + \varepsilon$. Рассмотрим полярное разложение $\tilde{\alpha} = |\tilde{\alpha}^*|\rho$ матрицы $\tilde{\alpha}$. Пусть $p$ — ортогональный проектор на $\operatorname{Im}(|\tilde{\alpha}^*|)^{\perp}$. Тогда для любого $\delta \in \mathbb{R}$ матрица $\alpha'_\delta = |\tilde{\alpha}^*| + \delta p$ обратима так как $\operatorname{Ker}(\alpha'_\delta) = \{0\}$. Так как $\alpha'_0 = |\tilde{\alpha}|$ и функция $\|\alpha'_\delta\|_{hs}$ непрерывна при $\delta \in \mathbb{R}$, то существует такое значение $\delta_0$, что $\|\alpha'_{\delta_0}\|_{hs} < \||\tilde{\alpha}^*|\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}}^{-1} = \|\tilde{\alpha}\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}}^{-1}$. Обозначим $\alpha' = \alpha'_{\delta_0} \in M_{n,n}$ и $x' = \rho\tilde{x} \in Y^n$, тогда

$$\alpha' x' = (|\tilde{\alpha}^*| + \delta_0 p)\rho\tilde{x} = |\tilde{\alpha}^*|\rho\tilde{x} + \delta_0 p\rho\tilde{x} = \tilde{\alpha}\tilde{x}$$

По построению полярного разложения $\|\rho\| \leq 1$, поэтому с учетом определения $\|x\|'_{t_2^n(X)}$ получаем

$$\|x\|'_{t_2^n(X)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leq (\|\tilde{\alpha}\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}})\|\rho\|\|\tilde{x}\|_{\widehat{n}} \leq \|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} + \varepsilon \leq \|x\|_{t_2^n(X)} + 2\varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|x\|'_{t_2^n(X)} \leq \|x\|_{t_2^n(X)}$. Обратное неравенство очевидно, поэтому $\|x\|_{t_2^n(X)} = \|x\|'_{t_2^n(X)}$.

**Предложение 1.2.5** Пусть $X$, $Y$ — секвенциальные операторные пространства, $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ и $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда

(i) Для любых $\alpha \in M_{n,k}$ и $x \in t_2^k(X)$ выполнено $t_2^n(\varphi)(\alpha x) = \alpha t_2^k(\varphi)(x)$

(ii) $t_2^n(\varphi) \in \mathcal{B}(t_2^n(X), t_2^n(Y))$, причем $\|t_2^n(\varphi)\| \leq \|\varphi^{\widehat{n}}\|$

(iii) если $\varphi^{\widehat{n}}$ (строго) $c$-топологически сюръективно, то $t_2^n(\varphi)$ так же (строго) $c$-топологически сюръективно

(iv) если $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически инъективно, то $t_2^n(\varphi)$ так же $c$-топологически инъективно

**Доказательство.** $(i)$ Проверяется непосредственно.

$(ii)$ Пусть $x \in t_2^n(X)$ и $x = \alpha' x'$, где $\alpha \in M_{n,n}$ — обратимая матрица и $x' \in X^n$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha'\varphi^{\widehat{n}}(x')$, поэтому из определения нормы в $t_2^n(Y)$ следует, что

$$\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|\varphi^{\widehat{n}}(x')\|_{\widehat{n}} \leq \|\alpha'\|_{hs}\|\varphi^{\widehat{n}}\|\|x'|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям $x$ описанным выше, тогда предложение 1.2 дает

$$\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \le \|\varphi^{\widehat{n}}\|\|x\|_{t_2^n(X)}$$

Следовательно $\|t_2^n(\varphi)\| \le \|\varphi^{\widehat{n}}\|$ и $t_2^n(\varphi) \in \mathcal{B}(t_2^n(X), t_2^n(Y))$.

$(iii)$ Пусть $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически сюръективен. Пусть $y \in t_2^n(Y)$ и $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Пусть $c < c'' < c'$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически сюръективно, то существует $x' \in X^n$ такое что $\varphi^{\widehat{n}}(x') = y'$ и $\|x'\|_{\widehat{n}} < c''\|y'\|_{\widehat{n}}$. Рассмотрим $x := \alpha' x'$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x') = \alpha' y' = y$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ получаем

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \le \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \le \|\alpha'\|_{hs} c'' \|y'\|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям $y$ описанным выше, тогда предложение 1.2 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \le c''\|y\|_{t_2^n(Y)} < c'\|y\|_{t_2^n(Y)}$ Таким образом, для любого $y \in t_2^n(Y)$ и любого $c' > c$ существует $x \in t_2^n(X)$ такой что $t_2^n(\varphi)(x) = y$ и $\|x\|_{t_2^n(X)} < c'\|y\|_{t_2^n(Y)}$. Следовательно $t_2^n(\varphi)$ $c$-топологически сюръективен.

Пусть $\varphi^{\widehat{n}}$ строго $c$-топологически сюръективен. Пусть $y \in t_2^n(Y)$ и $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически сюръективно, то существует $x' \in X^n$ такое что $\varphi^{\widehat{n}}(x') = y'$ и $\|x'\|_{\widehat{n}} \le c\|y'\|_{\widehat{n}}$. Рассмотрим $x := \alpha' x'$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x') = \alpha' y' = y$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ получаем

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \le \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \le \|\alpha'\|_{hs} c \|y'\|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям $y$, описанным выше, тогда предложение 1.2 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \le c\|y\|_{t_2^n(Y)}$ Таким образом, для любого $y \in t_2^n(Y)$ существует $x \in t_2^n(X)$ такой что $t_2^n(\varphi)(x) = y$ и $\|x\|_{t_2^n(X)} \le c\|y\|_{t_2^n(Y)}$. Следовательно $t_2^n(\varphi)$ строго $c$-топологически сюръективен.

$(iv)$ Пусть $x \in t_2^n(X)$, обозначим $y := t_2^n(\varphi)(x)$. Пусть имеется представление $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Тогда $y' = (\alpha')^{-1} y = (\alpha')^{-1} t_2^n(\varphi)(x) = t_2^n(\varphi)((\alpha')^{-1} x) \in \operatorname{Im}(t_n^2(\varphi))$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически инъективен, то он инъективен, поэтому для $y' \in \operatorname{Im}(t_2^n(\varphi))$ существует $x' \in X^n$ такой что $y' = t_2^n(\varphi)(x') = \varphi^{\widehat{n}}(x')$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ $c$-топологически инъективен, то $\|x'\|_{\widehat{n}} \le c\|y'\|$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ следует, что

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \le \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \le c\|\alpha'\|_{hs}\|y'\|_{\widehat{n}}$$

Теперь возьмем инфимум по всем представлениям $y$, описанным выше, тогда предложение 1.2 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \le c\|y\|_{t_2^n(Y)} = c\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)}$. Таким образом, для любого $x \in t_2^n(X)$ выполнено $\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \ge c^{-1}\|x\|_{t_2^n(X)}$. Следовательно, $t_2^n(\varphi)$ $c$-топологически инъективен.

**Предложение 1.2.6**[[1], 1.3.16] Пусть $X$ — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место изометрические изоморфизмы

$$\alpha_X^n : t_2^n(X^{\triangle}) \to (X^{\widehat{n}})^* : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i)\right) \qquad \beta_X^n : (X^{\triangle})^{\widehat{n}} \to t_2^n(X)^* : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i)\right)$$

**Предложение 1.2.7** Пусть $X$, $Y$ — секвенциальные операторные пространства, $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда

(i) $(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}$ $c$-топологически инъективен (сюръективен) тогда и только тогда когда $t_2^n(\varphi)^*$ $c$-топологически инъективен (сюръективен)

(ii) $t_2^n(\varphi^\triangle)$ $c$-топологически инъективен (сюръективен) тогда и только тогда когда $(\varphi^{\widehat{n}})^*$ $c$-топологически инъективен (сюръективен)

(iii) верны равенства $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\|$ и $\|t_2^n(\varphi^\triangle)\| = \|(\varphi^{\widehat{n}})^*\|$ и $\|t_2^n(\varphi)\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$

**Доказательство.** Пусть $g \in (Y^\triangle)^{\widehat{n}}$ и $x \in t_2^n(X)$, тогда

$$(\alpha_X^n(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}})(g)(x) = \alpha_X^n((\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}(g))(x) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}(g)_k(x_k) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)(g_k)(x_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

$$(t_2^n(\varphi)^*\alpha_Y^n)(g)(x) = t_2^n(\varphi)^*(\alpha_Y^n(g))(x) = \alpha_Y^n(g)(t_2^n(\varphi)(x)) = \sum_{k=1}^n g_k(t_2^n(\varphi)(x)_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

Так как $g$ и $x$ произвольны, то $\alpha_X^n(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}} = t_2^n(\varphi)^*\alpha_Y^n$. Так как $\alpha_Y^n$ и $\alpha_X^n$ изометрические изоморфизмы, то мы получаем утверждение $(i)$ и равенство $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\|$. Пусть $g \in t_2^n(Y^\triangle)$ и $x \in X^{\widehat{n}}$, тогда

$$(\beta_X^n t_2^n(\varphi^\triangle))(g)(x) = \beta_X^n(t_2^n(\varphi^\triangle)(g))(x) = \sum_{k=1}^n t_2^n(\varphi^\triangle)(g)_k(x_k) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)(g_k)(x_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

$$((\varphi^{\widehat{n}})^*\beta_Y^n)(g)(x) = (\varphi^{\widehat{n}})^*(\beta_Y^n(g))(x) = \beta_Y^n(g)(\varphi^{\widehat{n}})(x) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi^{\widehat{n}})(x)_k = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k))$$

Так как $g$ и $x$ произвольны, то $\beta_X^n t_2^n(\varphi^\triangle) = (\varphi^{\widehat{n}})^*\beta_Y^n$. Так как $\beta_Y^n$ и $\beta_X^n$ изометрические изоморфизмы, то мы получаем утверждение $(ii)$ и равенство $\|t_2^n(\varphi^\triangle)\| = \|(\varphi^{\widehat{n}})^*\|$.

Наконец, из предложений 1.2, 1.2 следует что $\|t_2^n(\varphi)\| \le \|\varphi^{\widehat{n}}\| = \|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\| = \|t_2^n(\varphi)\|$, т.е. $\|t_2^n(\varphi)\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$.

**Теорема 1.2.8** Пусть $X, Y$ — секвенциальные операторные пространства и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$, тогда

$(i)$ $\varphi$ (строго) секвенциально $c$-топологически сюръективен $\Longrightarrow$ $\varphi^\triangle$ секвенциально $c$-топологически инъективен

$(ii)$ $\varphi$ секвенциально $c$-топологически инъективен $\Longrightarrow$ строго $\varphi^\triangle$ строго секвенциально $c$-топологически сюръективен

$(iii)$ $\varphi^\triangle$ (строго) секвенциально $c$-топологически сюръективен $\Longrightarrow$ $\varphi$ секвенциально $c$-топологически инъективен

$(iv)$ $\varphi^\triangle$ секвенциально $c$-топологически инъективен $\Longrightarrow$ $\varphi$ строго секвенциально $c$-топологически сюръективен

$(v)$ $\varphi$ секвенциально коизометричен $\Longrightarrow$ $\varphi^\triangle$ секвенциально изометричен, если $X$ полно, то верно и обратное

$(vi)$ $\varphi$ секвенциально изометричен $\Longleftrightarrow$ $\varphi^\triangle$ секвенциально строго коизометричен

**Доказательство.** Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ имеем цепочку импликаций

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi^{\widehat{n}}$ | $c$-топологически инъективен | $\Longrightarrow$ | $t_2^n(\varphi)$ | $c$-топологически инъективен | 1.2 |
| | | $\Longrightarrow$ | $t_2^n(\varphi)^*$ | строго $c$-топологически сюръективен | 1.2 |
| | | $\Longrightarrow$ | $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}$ | строго $c$-топологически сюръективен | 1.2 |
| | | $\Longrightarrow$ | $t_2^n(\varphi^\triangle)$ | строго $c$-топологически сюръективен | 1.2 |
| | | $\Longrightarrow$ | $(\varphi^{\widehat{n}})^*$ | строго $c$-топологически сюръективен | 1.2 |
| | | $\Longrightarrow$ | $\varphi^{\widehat{n}}$ | $c$-топологически инъективен | 1.2 |

Откуда мы получаем $(ii)$ и $(iii)$. Снова для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем цепочку ипликаций

$$\begin{array}{llll}
\varphi^{\widehat{n}} \ \text{(строго) } c\text{-топологически сюръективен} & \Longrightarrow & t_2^n(\varphi) & c\text{-топологически сюръективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & t_2^n(\varphi)^* & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & (\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}} & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & t_2^n(\varphi^{\triangle}) & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \Longrightarrow & (\varphi^{\widehat{n}})^* & c\text{-топологически инъективен } 1.2 \\
& \overset{X \text{ полно}}{\Longrightarrow} & \varphi^{\widehat{n}} & c\text{-топологически сюръективен } 1.2
\end{array}$$

Откуда мы получаем $(i)$ и $(iv)$. Пункты $(v)$ и $(vi)$ являются прямым следствием $(i)$—$(iv)$ при $c = 1$ если учесть что $\varphi$ секвенциально сжимающий тогда и только тогда $\varphi^{\triangle}$ секвенцильно сжимающий (см. предложение 1.2).

# 2 Свободные и косвободные объекты

Основные результаты этого раздела получены С. Штейнером. Все необходимые определения, связанные с общекатегорным подходом к проективности, можно найти в работе [2]. Категория полулинейных нормированных пространств описана в [3].

## 2.1 Метрически свободные секвенциальные пространства

Начнём с рассмотрения метрической версии свободы для секвенциальных операторных пространств. Рассмотрим функтор

$$\begin{aligned}
\square_{sqMet} : SQNor_1 \to Set : X &\mapsto \prod \{B_{X^{\widehat{n}}} : n \in \mathbb{N}\} \\
\varphi &\mapsto \prod \left\{\varphi^{\widehat{n}}|_{B_{X^{\widehat{n}}}}^{B_{Y^{\widehat{n}}}} : n \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

отправляющий секвенциальное операторное пространство $X$ в декартово произведение единичных шаров каждого из пространств $X^{\widehat{n}}$. Легко заметить, что справедливо

**Предложение 2.1.1** $\square_{sqMet}$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности секвенциально строго коизометрические операторы.

*Метрически свободными* секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqMet}$-свободные объекты. Обозначим через $I_n$ элемент из $(t_2^n)^{\widehat{n}} = \mathcal{B}(l_2^n, l_2^n)$, соответствующий тождественному оператору.

**Предложение 2.1.2** Пусть $X$ — произвольное секвенциальное операторное пространство и $x \in B_{X^{\widehat{n}}}$. Тогда существует единственный секвенциально сжимающий оператор $\psi_n \in \mathcal{SB}(t_2^n, X)$, такой что $\psi_n^{\widehat{n}}(I_n) = x$.

**Доказательство.** Итак, $I_n = (e_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, где $e_i$ — $i$-й орт подлежащего пространства $t_2^n$. Ясно, что есть только один линейный оператор $\psi_n$, удовлетворяющий условиям $\psi_n(e_i) = x_i$, $i \in \mathbb{N}_n$. Осталось проверить, что $\psi_n$ является секвенциально сжимающим. Итак, пусть $k \in \mathbb{N}$ и $y \in B_{(t_2^n)^{\widehat{k}}}$, тогда $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $i \in \mathbb{N}_k$ для некоторой матрицы $\alpha \in M_{k,n}$. Тогда

$$\|\psi_n^{\widehat{k}}(y)\|_{\widehat{k}} = \left\|(\psi_n(y_i))_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}} = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\psi_n(e_j)\right)_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}} = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j\right)_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}}$$

$$= \|\alpha x\|_{\widehat{k}} \leq \|\alpha\|\|x\|_{\widehat{n}} = \|y\|_{(t_2^n)^{\widehat{k}}}\|x\|_{\widehat{n}} \leq 1$$

Предложение доказано.

**Предложение 2.1.3** Метрически свободным секвенциальным операторным пространством с базой из одноточечного множества является пространство $t_2^\infty := \bigoplus_1^0\{t_2^n : n \in \mathbb{N}\}$.

**Доказательство.** Универсальную стрелку определим следующим образом $j : \{\lambda\} \to t_2^\infty : \lambda \mapsto (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$. Пусть $X$ — произвольное секвенциальное операторное пространство, и $\varphi : \{\lambda\} \to \prod_{n\in\mathbb{N}} B_{X^{\widehat{n}}}$. Обозначим $x = \varphi(\lambda)$. Тогда из предложения 2.1 и свойств копроизведения ясно, что существует единственный секвенциально сжимающий морфизм $\psi = \bigoplus_1^0\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{SB}\left(\bigoplus_1^0\{t_2^n : n \in \mathbb{N}\}, X\right)$, такой что $\psi^{\widehat{n}}(i_n(I_n)) = x$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Здесь $i_n : t_2^n \to t_2^\infty$ — стандартное вложение.

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqMet}(t_2^\infty) \arrow[dr, dashed, "\square_{sqMet}(\psi)"] & \\
\{\lambda\} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"] & \square_{sqMet}(X)
\end{tikzcd}$$

В этом случае $\varphi = \square_{sqMet}(\psi)j$. Так как $X$ и $\varphi$ произвольны то $t_2^\infty$ метрически свободен и имеет одноточечную базу.

Итак, теперь мы готовы сформулировать итоговый результат, справедливость которого мгновенно вытекает из доказанного выше предложения.

**Теорема 2.1.4** Метрически свободным секвенциальным операторным пространством с базой $\Lambda$ является, с точностью до секвенциального изометрического изоморфизма, $\bigoplus{}_1^0$-сумма копий пространства $t_2^\infty$, заиндексированных элементами множества $\Lambda$.

## 2.2 Топологически свободные секвенциальные пространства

Перейдём теперь к рассмотрению секвенциальной операторной версии топологической свободы. Рассмотрим функтор

$$\square_{sqTop} : SQNor \to Nor_0 : X \mapsto \bigoplus{}_\infty\{X^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\varphi \mapsto \bigoplus{}_\infty\{\varphi^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\},$$

то есть секвенциальное операторное пространство $X$ отображается в $\bigoplus{}_\infty$-сумму своих размножений без аддитивной структуры.

**Предложение 2.2.1** Пусть $\varphi : X \to Y$ — ограниченный оператор между нормиированными пространствами $X$ и $Y$, тогда он $c$-топологически сюръективен тогда и только тогда когда существует ограниченный полулинейный оператор $\rho : Y \to X$ такой что $\|\rho\| \leq c$ и $\varphi\rho = 1_Y$.

**Доказательство.** Допустим, что $\varphi$ $c$-топологически сюръективен. Рассcмотрим отношение $\sim$ на $S_Y$ определенное следующим образом: $e_1 \sim e_2$ тогда и только тогда когда существует $\alpha \in \mathbb{T}$ такое, что $e_1 = \alpha e_2$. Очевидно, $\sim$ есть отношение эквивалентности, поэтому рассмотрим множество ненулевых представителей классов эквивалентностей, которое обозначим $\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По построению, для каждого $e \in S_Y$ сущетсвует единственные $\alpha(e) \in \mathbb{T}$ и $\lambda(e) \in \Lambda$ такие, что $e = \alpha(e)r_{\lambda(e)}$. Ясно, что для любых $z \in \mathbb{T}$ и $e \in S_Y$ выполнено $\alpha(ze) = z\alpha(e)$ и $\lambda(ze) = \lambda(e)$. Так как $\varphi$ $c$-топологически сюръективен, то, в частности, для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует $x(\lambda) \in X$ такой что $\|x(\lambda)\| \leq c\|r_\lambda\|$ и $\varphi(x(\lambda)) = r_\lambda$. Рассмотрим, отображение $\tilde{\rho} : S_Y \to X : e \mapsto \alpha(e)x(\lambda(e))$. Легко видеть, что для всех $z \in \mathbb{T}$ и $e \in S_Y$ выполнено $\tilde{\rho}(ze) = z\tilde{\rho}(e)$, $\|\tilde{\rho}(e)\| \leq C$ и $\varphi(\tilde{\rho}(e)) = e$. Теперь рассмотрим отображение $\rho : Y \to X : y \mapsto \|y\|\tilde{\rho}(\|y\|^{-1}y)$ и $\rho(0) = 0$. Используя свойства $\tilde{\rho}$ легко проверить, что $\rho$ — полулинейный оператор такой, что $\|\rho\| \leq C$ и $\varphi\rho = 1_Y$.

Обратно, допустим, что существует ограниченный полулинейный оператор $\rho : Y \to X$ такой, что $\|\rho\| \leq c$ и $\varphi\rho = 1_Y$. Возьмем произвольный $y \in Y$ и рассмотрим $x = \rho(y)$, тогда $\|x\| \leq C\|y\|$ и $\varphi(x) = y$. Следовательно $\varphi$ $c$-топологически сюръективен.

**Предложение 2.2.2** $\square_{sqTop}$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности секвенциальные топологически сюрьективные операторы.

**Доказательство.** Для произвольного секвенциального операторного пространства $Z$ через $i_n^Z : Z^{\widehat{n}} \to \square_{sqTop}(Z)$ обозначим стандартное вложение, а через $p_n^Z : \square_{sqTop}(Z) \to Z^{\widehat{n}}$ обозначим стандартную проекцию. Допустим что $\varphi : X \to Y$ $c$-секвенциально топологически сюръективен. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, тогда по предложению 2.2 существует ограниченный полулинейный оператор $\rho^n$ такой, что $\varphi^{\widehat{n}}\rho^n = 1_{Y^{\widehat{n}}}$ и $\|\rho^n\| \leq c$. Рассмотрим отображение $\rho = \bigoplus_\infty\{\rho^n : n \in \mathbb{N}\}$. Для любого $y \in \square_{sqTop}(Y)$ имеем

$$\|\rho(y)\| = \sup\{\|\rho^n(p_n^Y(y))\|_{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} \leq c\sup\{\|p_n^Y(y)\|_{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} = c\|y\|$$

следовательно $\rho$ — полулинейный ограниченый оператор. Более того, $\square_{sqTop}(\varphi)\rho = 1_{\square_{sqTop}(Y)}$, значит $\varphi$ $\square_{sqTop}$-допустимый эпиморфизм. Обратно, если $\varphi$ $\square_{sqTop}$-допустимый эпиморфизм, то существует ограниченный правый обратный полулинейный оператор $\rho$ к $\square_{sqTop}(\varphi)$. Тогда для любого $y \in Y^{\widehat{n}}$ выполнено $\square_{sqTop}(\varphi)\rho(i_n^Y(y)) = i_n^Y(y)$. В частности $\varphi^{\widehat{n}}(p_n^X(\rho(i_n^Y(y)))) = y$. Положим $x = p_n^X(\rho(i_n^Y(y)))$ и $c = \|\rho\|$, тогда $\varphi^{\widehat{n}}(x) = y$ и $\|x\|_{\widehat{n}} \leq \|\rho(i_n^Y(y))\| \leq c\|i_n^Y(y)\| = c\|y\|_{\widehat{n}}$. Следовательно, $\varphi$ секвенциально топологически сюръективен.

*Топологически свободными* секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqTop}$-свободные объекты. Сформулируем и докажем основное утверждение раздела.

**Предложение 2.2.3** Пусть $F$ — секвенциальное метрически свободное пространство с базой $\Lambda$. Тогда $F$ является секвенциальным операторным топологически свободным с базой $\mathbb{C}^\Lambda$.

**Доказательство.** Пусть $j' : \Lambda \to \square_{sqMet}(F)$ — универсальная стрелка в диаграмме для секвенциальной метрической свободы. Определим полулинейный ограниченный оператор $j : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_{sqTop}(F) : z_\lambda \mapsto z_\lambda j(\lambda)$. Рассмотрим произвольный ораниченный полулинейный оператор $\varphi : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_{sqTop}(X)$, где $X$ — произвольное секвенциальное операторное пространство. Тогда для $\varphi' := \|\varphi\|_{sb}^{-1}\varphi$ существует единственный морфизм $\psi'$, такой что $\varphi' = \square_{sqMet}(\psi')j$. Теперь, легко видеть что для морфизма $\psi := \|\varphi\|_{sb}\psi'$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqTop}(F) \arrow[dr, dashed, "\square_{sqTop}(\psi)"] & \\
\mathbb{C}^\Lambda \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"'] & \square_{sqTop}(X)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Единственность $\psi$ доказывается следующим образом. Пусть для диаграммы выше есть два различных подходящих морфизма $\psi_1$ и $\psi_2$. Обозначим $C = \max(\|\varphi\|_{sb}, \|\psi_1\|_{sb}, \|\psi_2\|_{sb})$, тогда ясно что морфизмы $C^{-1}\psi_1$ и $C^{-1}\psi_2$ подходят для следующей диаграммы, соответствующей секвенциальной метрической проективности:

$$\begin{tikzcd} \square_{sqMet}(F) \arrow[dr, dashed, "?"] & \\ \mathbb{C}^{\Lambda} \arrow[u, "j'"] \arrow[r, "C^{-1}\varphi'"'] & \square_{sqMet}(X) \end{tikzcd}$$

Это противоречит единственности морфизма $\psi'$, значит $\psi$ единственен.

Как следствие мы получаем описание топологически свободных секвенциальных операторных пространств.

**Теорема 2.2.4** Секвенциальное операторное пространство является топологически свободным тогда и только тогда, когда оно секвенциально топологически изоморфно $\bigoplus_1^0$-сумме пространств $t_2^\infty$, заиндексированных элементами некоторого множества $\Lambda$.

## 2.3 Метрически косвободные секвенциальные пространства

Рассмотрим функтор

$$\begin{aligned} \square_{sqMet}^d : SQNor_1 \to Set^o : X &\mapsto \prod\left\{B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}} : n \in \mathbb{N}\right\} \\ \varphi &\mapsto \prod\left\{(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\big|_{B_{(Y^\triangle)^{\widehat{n}}}}^{B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}}} : n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

**Предложение 2.3.1** $\square_{sqMet}^d$-допустимыми мономорфизмами являются в точности секвенциально изометрические операторы.

**Доказательство.** Морфизм $\varphi$ является $\square_{sqMet}^d$-допустмым мономорфизмом только если $\square_{sqMet}^d(\varphi)$ обратим слева как морфизм в $Set^o$. Это равносильно тому что $\square_{sqMet}^d(\varphi^\triangle)$ сюръективно. Последнее эквивалентно сюръективности $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\big|_{B_{(X^\triangle)^{\widehat{n}}}}^{B_{(Y^\triangle)^{\widehat{n}}}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}$ строго коизометрично для каждого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\varphi^\triangle$ секвенциально строго коизометричен. По теореме 1.2.8 это равносильно тому, что $\varphi$ секвенциально изометричен.

*Метрически косвободными* секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqMet}^d$-косвободные объекты.

**Теорема 2.3.2** Метрически косвободным секвенциальным операторным пространством с базой $\Lambda$ является, с точностью до секвенциального изометрического изоморфизма, $\bigoplus_\infty$-сумма копий пространства $l_2^\infty := \bigoplus_\infty\{l_2^n : n \in \mathbb{N}\}$, заиндексированных элементами множества $\Lambda$.

**Доказательство.** Пусть $\Lambda$ — произвольное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} SQNor_1^o \arrow[r, "(\square_{sqMet}^d)^o"] \arrow[d, "\nabla"'] & Set \arrow[d, "1_{Set}"] \\ SQNor_1 \arrow[r, "\square_{sqMet}"] & Set \end{tikzcd}$$

Здесь $^\nabla$ есть ковариантная версия функтора $^\triangle$. Эта диаграмма коммутативна так как для произвольных секвенциальных операторных пространств $X$, $Y$ и любого $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$

выполнено

$$1_{Set}((\Box^d_{sqMet})^o(\varphi)) = \prod_{n\in\mathbb{N}} (\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}|^{B_{(X^{\triangle})^{\widehat{n}}}}_{B_{(Y^{\triangle})^{\widehat{n}}}} = \Box_{sqMet}(^{\nabla}(\varphi))$$

Заметим, что функтор $^{\nabla}$ имеет левый сопряженный функтор, а именно $^{\triangle}$. Аналогично $1_{Set}$ сопряжен слева к самому себе. По теореме 2.1.4 объект $\bigoplus{}^0_1\{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ $\Box_{sqMet}$-свободен, поэтому по предложению [[2], 4.5] объект $(\bigoplus{}^0_1\{t_2^\infty : \lambda\in\Lambda\})^{\triangle} = \bigoplus{}_\infty\{l_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ является $(\Box^d_{sqMet})^o$ свободным, или что то же самое $\Box^d_{sqMet}$-косвободным. Так как множество $\Lambda$ произвольно, получаем, что все $\Box_{sqMet}$-косвободные объекты с базой $\Lambda$ секвенциально изометрически изоморфны пространствам указанного вида.

## 2.4 Топологически косвободные секвенциальные пространства

Рассмотрим функтор

$$\Box^d_{sqTop} : SQNor \to Nor^o_0, X \mapsto \bigoplus{}_\infty\{(X^{\triangle})^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\varphi \mapsto \bigoplus{}_\infty\{(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}$$

**Предложение 2.4.1** $\Box^d_{sqTop}$-допустимыми мономорфизмами являются в точности секвенциально топологически инъективные операторы.

**Доказательство.** Морфизм $\varphi$ является $\Box^d_{sqTop}$-допустмым мономорфизмом только если $\Box^d_{sqTop}(\varphi)$ обратим слева как морфизм в $Nor^o_0$. Это равносильно тому что $\Box^d_{sqTop}(\varphi) = \Box_{sqTop}(\varphi^{\triangle})$ обратим справа в как морфизм в $Nor_0$. По предложению 2.2.2 это эквивалентно секвенциальной топологической сюръективности $\varphi^{\triangle}$. По теореме 1.2.8 это равносильно тому, что $\varphi$ секвенциально топологически инъективен.

*Топологически косвободными* секвенциальными пространствами естественно называть $\Box^d_{sqTop}$-косвободные объекты.

**Теорема 2.4.2** Секвенциальное операторное пространство является топологически косвободным тогда и только тогда, когда оно секвенциально топологически изоморфно $\bigoplus_\infty$ сумме пространств $l_2^\infty$ заиндексированных элементами множества $\Lambda$.

**Доказательство.** Пусть $\Lambda$ произвольное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} SQNor^o \arrow[r, "(\Box^d_{sqTop})^o"] \arrow[d, "\nabla"'] & Nor_0 \arrow[d, "1_{Nor_0}"] \\ SQNor \arrow[r, "\Box_{sqTop}"] & Nor_0 \end{tikzcd}$$

Здесь $\nabla$ есть ковариантная версия функтора $\triangle$. Эта диаграмма коммутативна, так как для произвольных секвенциальных операторных пространств $X$, $Y$ и любого $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$ выполнено

$$1_{Nor_0}((\Box^d_{sqTop})^o(\varphi)) = \bigoplus{}_\infty\{(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} = \Box_{sqTop}(^{\nabla}(\varphi))$$

Функтор $^{\nabla}$ имеет левый сопряженный функтор, а именно $^{\triangle}$. Аналогично $1_{Nor_0}$ сопряжен слева к самому себе. По теореме 2.2.4 объект $\bigoplus{}^0_1\{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ $\Box_{sqTop}$-свободен, поэтому по предложению [[2], 4.5] объект $(\bigoplus{}^0_1\{t_2^\infty : \lambda\in\Lambda\})^{\triangle} = \bigoplus{}_\infty\{l_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ является $(\Box^d_{sqTop})^o$-свободным, или что то же самое $\Box^d_{sqTop}$-косвободным. Получаем, что все $\Box_{sqTop}$-косвободные объекты с базой $\mathbb{C}^\Lambda$ секвенциально топологически изоморфны пространствам указанного вида.

# Список литературы


[1] *Lambert A.* Operatorfolgenräume. Eine Kategorie auf dem Weg von den Banach-Räumen zu den Operatorräumen. Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I der Universität des Saarlandes. Saarbrücken, 2002.

[2] *Хелемский А. Я.* Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей,, Матем. сб., 204:7 (2013), 127–158

[3] *Штейнер С. М.* Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей // Вестник СамГУ. 2013. № 9/1 (110). С.49–57.