

Геометрия проективных, инъективных и плоских банаховых модулей¹

Н. Т. Немеш

УДК 517.986.22

Ключевые слова: проективность, инъективность, плоскость, аннуляторный модуль, свойство Данфорда-Петтиса.

Аннотация: В данной статье изложены общие результаты о метрически и топологически проективных, инъективных и плоских банаховых модулях. Доказаны теоремы указывающие на тесную связь метрической и топологической банаховой гомологии с банаховой геометрией. Например, в геометрических терминах дано описание проективных, инъективных и плоских аннуляторных модулей. Доказано, что для алгебр являющихся \mathcal{L}_1 - или \mathcal{L}_∞ -пространством ее гомологически тривиальные модули обладают свойством Данфорда-Петтиса.

1 Введение

Понятия проективного, инъективного и плоского модуля являются тремя китами на которых покоится здание гомологической алгебры. Методы гомологической алгебры в функциональном анализе были внедрены и развиты Хелемским и его школой. Точнее, Хелемский рассматривал специальную версию относительной гомологии, связывающую воедино алгебру и топологию. Существовали и другие варианты гомологической алгебры в функциональном анализе, например метрическая и топологическая. Активно изучать их стали только сейчас. В данной статье мы докажем несколько теорем подтверждающих тесную связь метрической и топологической банаховой гомологии с геометрией банаховых пространств.

Несколько слов об обозначениях. Здесь и далее символ A будет обозначать не обязательно унитарную банахову алгебру со сжимающим билинейным оператором умножения. Через A_+ мы будем обозначать стандартную унитизацию A как банаховой алгебры. Символом A_\times мы будем обозначать условную унитизацию, то есть $A_\times = A$ если A унитарна и $A_\times = A_+$ в противном случае. Мы будем рассматривать только банаховы модули со сжимающим билинейным оператором внешнего умножения, обозначаемого точкой “ \cdot ”. Наконец, непрерывные морфизмы A -модулей мы будем называть A -морфизмами. Через **Ban** мы будем обозначать категорию банаховых пространств с ограниченными операторами в роли морфизмов. Если рассматривать в роли морфизмов только сжимающие операторы, то мы получим еще одну категорию обозначаемую **Ban**₁. Через $A - \mathbf{mod}$ мы обозначим категорию левых банаховых A -модулей с ограниченными A -морфизмами в роли морфизмов. Через $A - \mathbf{mod}_1$ мы обозначим подкатегорию $A - \mathbf{mod}$ с теми же объектами, но только лишь сжимающими морфизмами. В дальнейшем, в предложениях мы будем использовать сразу несколько фраз, последовательно перечисляя их и заключая в скобки таким образом: $\langle \dots / \dots \rangle$. Например: число x называется \langle положительным / неотрицательным \rangle если $\langle x > 0 / x \geq 0 \rangle$.

Напомним пару определений и фактов из относительной банаховой гомологии. Будем говорить, что морфизм $\xi : X \rightarrow Y$ левых A -модулей X и Y есть относительно допустимый

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант номер 15-01-08392).

эпиморфизм, если он имеет правый обратный ограниченный линейный оператор. Левый A -модуль P называется относительно проективным, если для любого относительно допустимого эпиморфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого A -морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует A -морфизм $\psi : P \rightarrow X$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \psi & \downarrow \xi \\ P & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

коммутативна, то есть $\xi\psi = \phi$. Аналогично, будем говорить, что морфизм $\xi : Y \rightarrow X$ правых A -модулей X и Y есть относительно допустимый мономорфизм, если он имеет левый обратный ограниченный линейный оператор. Правый A -модуль J называется относительно инъективным, если для любого относительно допустимого мономорфизма $\xi : Y \rightarrow X$ и любого A -морфизма $\phi : Y \rightarrow J$ существует A -морфизм $\psi : X \rightarrow J$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \psi & \uparrow \xi \\ J & \xleftarrow{\phi} & Y \end{array}$$

коммутативна, то есть $\psi\xi = \phi$.

Специальный класс относительно \langle проективных / инъективных \rangle A -модулей — это так называемые относительно \langle свободные / косвободные \rangle модули. Они имеют вид $\langle A_+ \hat{\otimes} E / \mathcal{B}(A_+, E) \rangle$ для некоторого банахова пространства E . Главное свойство таких модулей состоит в том, A -модуль относительно \langle проективен / инъективен \rangle тогда и только тогда, когда он является ретрактом некоторого относительно \langle свободного / косвободного \rangle A -модуля.

И метрическая и топологическая и относительная банахова гомология могут быть изложены с общекатегорных позиций. В работе [1] Хелемским была построена теория оснащенных категорий, позволившая единообразно доказывать многие утверждения о проективных и инъективных банаховых модулях. Мы дадим определения и кратко перечислим некоторые результаты об оснащенных категориях. Через **Set** мы будем обозначать категорию множеств. Тот факт что объекты X и Y категории **C** изоморфны мы будем записывать как $X \cong_C Y$. Пусть **C** и **D** — две фиксированные категории. Упорядоченная пара $(\mathbf{C}, \square : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D})$, где \square — верный ковариантный функтор, называется оснащенной категорией. Морфизм ξ в **C** называется \square -допустимым эпиморфизмом если $\square(\xi)$ — ретракция в **D**. Объект P в **C** называется \square -проективным, если для каждого \square -допустимого эпиморфизма ξ в **C** отображение $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(P, \xi)$ сюръективно. Объект F в **C** называется \square -свободным с базой M в **D**, если существует изоморфизм функторов $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(M, \square(-)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F, -)$. Оснащенная категория (\mathbf{C}, \square) называется свободолюбивой [[1], определение 2.10], если каждый объект в **D** является базой некоторого \square -свободного объекта из **C**. Резюме предложений 2.3, 2.11 и 2.12 из [1] выглядит следующим образом:

- (i) любой ретракт \square -проективного объекта \square -проективен;
- (ii) любой \square -допустимый эпиморфизм в \square -проективный объект есть ретракция;
- (iii) любой \square -свободный объект \square -проективен;
- (iv) если (\mathbf{C}, \square) — свободолюбивая оснащенная категория, то любой объект \square -проективен тогда и только тогда, когда он есть ретракт \square -свободного объекта;

(v) копроизведение семейства \square -проективных объектов \square -проективно.

Символом \mathbf{C}^o мы будем обозначать категорию противоположную к \mathbf{C} . Противоположной к оснащенной категории (\mathbf{C}, \square) будем называть оснащенную категорию $(\mathbf{C}^o, \square^o : \mathbf{C}^o \rightarrow \mathbf{D}^o)$. Здесь, \mathbf{C}^o и \mathbf{D}^o обозначают противоположные категории, то есть категории в которых те же объекты, но все стрелки направлены в противоположную сторону. Переходя к противоположной оснащенной категории, мы можем определить допустимые мономорфизмы, инъективность и косвободу. Морфизм ξ называется \square -допустимым мономорфизмом, если он \square^o -допустимый эпиморфизм. Объект J из \mathbf{C} называется \square -инъективным, если он \square^o -проективен. Объект F из \mathbf{C} называется \square -косвободным, если он \square^o -свободный. Наконец, категория (\mathbf{C}, \square) называется косвободолюбивой, если противоположная категория $(\mathbf{C}^o, \square^o)$ свобододолюбива. Таким образом, для инъективности и косвободы мы можем сформулировать результаты аналогичные тем, что были для проективности и свободы.

Теперь рассмотрим верный функтор $\square_{rel} : A - \mathbf{mod} \rightarrow \mathbf{Ban}$, который просто “забывает” модульную структуру. Легко видеть, что $(A - \mathbf{mod}, \square_{rel})$ — оснащенная категория, у которой \square_{rel} -допустимые \langle эпиморфизмы / мономорфизмы \rangle в точности относительно допустимые \langle эпиморфизмы / мономорфизмы \rangle и \langle \square_{rel} -проективные / \square_{rel} -инъективные \rangle объекты в точности относительно \langle проективные / инъективные \rangle A -модули. Более того, можно показать, что все \langle \square_{rel} -свободные / \square_{rel} -косвободные \rangle объекты изоморфны в $A - \mathbf{mod}$ модулям вида $\langle A_+ \hat{\otimes} E / \mathcal{B}(A_+, E) \rangle$ для некоторого банахова пространства E . Этот пример показывает, что относительная теория прекрасно вписывается в схему оснащенных категорий.

В этой работе мы применим такой же общекатегорный подход к метрической и топологической теории. В этих теориях накладываются значительно более слабые ограничения на допустимые морфизмы.

2 Проективность, инъективность и плоскость

2.1 Метрическая и топологическая проективность

При изучении метрической и топологической проективности мы будем рассматривать два широких класса эпиморфизмов, а именно строго коизометрические и топологически сюръективные A -морфизмы. Через $\langle B_E / B_E^o \rangle$ мы будем обозначать \langle замкнутый / открытый \rangle единичный шар пространства E . Ограниченный линейный оператор $T : E \rightarrow F$ будем называть \langle строго коизометрическим / топологически сюръективным \rangle если $\langle B_F = T(B_E) / B_F^o \subset cT(B_E^o) \rangle$ для некоторого $c > 0$. В дальнейшем A обозначает необязательно унитарную банахову алгебру.

Определение 2.1 ([1], определения 1.2, 1.4). A -модуль P называется \langle метрически / топологически \rangle проективным, если для любого \langle строго коизометрического / топологически сюръективного \rangle A -морфизма $\xi : X \rightarrow Y$ и любого A -морфизма $\phi : P \rightarrow Y$ существует A -морфизм $\psi : P \rightarrow X$ такой, что $\langle \xi\psi = \phi$ и $\|\psi\| = \|\phi\| / \xi\psi = \phi \rangle$.

Теперь мы нацелены применить аппарат оснащенных категорий к этим типам проективности. В работах Хелемского [1] и Штейнера [2] были построены два верных функтора:

$$\square_{met} : A - \mathbf{mod}_1 \rightarrow \mathbf{Set}, \quad \square_{top} : A - \mathbf{mod} \rightarrow \mathbf{HNor}.$$

Здесь \mathbf{HNor} — это категория так называемых полунормированных пространств, введенных Штейнером. Мы не будем подробно объяснять как действуют эти функторы. Нам достаточно их существования. В тех же статьях было доказано, что, во-первых, A -морфизм ξ

$\langle \text{строго коизометричен} / \text{топологически сюръективен} \rangle$ тогда и только тогда, когда он $\langle \square_{met}\text{-допустимый} / \square_{top}\text{-допустимый} \rangle$ эпиморфизм и, во-вторых, A -модуль P является $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективным тогда и только тогда, когда он $\langle \square_{met}\text{-проективен} / \square_{top}\text{-проективен} \rangle$. Таким образом, мы немедленно получаем следующее предложение.

Предложение 2.2. *Всякий ретракт $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективного модуля в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$ снова $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен.*

Помимо этого в [1] и [2] было доказано, что оснащенная категория $\langle (A - \mathbf{mod}_1, \square_{met}) / (A - \mathbf{mod}, \square_{top}) \rangle$ свободолюбива, и что $\langle \square_{met}\text{-свободные} / \square_{top}\text{-свободные} \rangle$ модули изоморфны в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$ модулям вида $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ . Более того, для любого A -модуля X существует $\langle \square_{met}\text{-допустимый} / \square_{top}\text{-допустимый} \rangle$ эпиморфизм

$$\pi_X^+ : A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_X) : a \widehat{\otimes} \delta_x \mapsto a \cdot x.$$

Здесь, через δ_x мы обозначаем функцию из $\ell_1(B_X)$ равную 1 в точке x и 0 в остальных точках. Как следствие общих результатов об оснащенных категориях мы получаем следующий критерий $\langle \text{метрической} / \text{топологической} \rangle$ проективности банахова модуля.

Предложение 2.3. *Модуль P $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен тогда и только тогда, когда π_P^+ — ретракция в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$.*

Так как $\langle \square_{met}\text{-свободные} / \square_{top}\text{-свободные} \rangle$ модули совпадают с точностью до изоморфизма в $A - \mathbf{mod}$, то из предложения 2.2 мы видим, что любой метрически проективный A -модуль топологически проективен. Напомним, что каждый относительно проективный модуль есть ретракт в $A - \mathbf{mod}$ модуля вида $A_+ \widehat{\otimes} E$ для некоторого банахова пространства E . Следовательно, каждый топологически проективный A -модуль будет относительно проективным. Мы резюмируем эти результаты в следующем предложении.

Предложение 2.4. *Каждый метрически проективный модуль топологически проективен, и каждый топологически проективный модуль относительно проективен.*

Заметим, что категория банаховых пространств может рассматриваться как категория левых банаховых модулей над нулевой алгеброй. Как следствие, мы получаем определение $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективного банахова пространства. Все результаты полученные выше верны для этого типа проективности. Оба типа проективных банаховых пространств уже описаны. В [3] Кёте доказал, что все топологически проективные банаховы пространства топологически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ . Используя результат Гротендика из [4], Хелемский показал, что метрически проективные банаховы пространства изометрически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ [[1], предложение 3.2].

Теперь перейдем к обсуждению модулей. Легко доказать по определению, что A -модуль A_X метрически и топологически проективен, но чаще для доказательства проективности модуля решают задачу ретракции для морфизма π_P^+ . Как показывают следующие два предложения, решение последней задачи иногда можно свести к более простой.

Предложение 2.5. *Пусть P — существенный A -модуль, то есть линейная оболочка $A \cdot P$ плотна в P . Тогда P $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен тогда и только тогда, когда отображение $\pi_P : A \widehat{\otimes} \ell_1(B_P) : a \widehat{\otimes} \delta_x \mapsto a \cdot x$ есть ретракция в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$.*

Доказательство. Доказательство такое же как и в [[5], предложение 7.1.14]. \square

Предложение 2.6. Пусть I — замкнутая подалгебра в A , и P — банахов A -модуль, существующий как I -модуль. Тогда:

- (i) если I — левый идеал в A и P \langle метрически / топологически \rangle проективен как I -модуль, то P \langle метрически / топологически \rangle проективен как A -модуль;
- (ii) если I — \langle 1-дополняемый / дополняемый \rangle правый идеал A и P \langle метрически / топологически \rangle проективен как A -модуль, то P \langle метрически / топологически \rangle проективен как I -модуль.

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждениям из [[6], предложение 2.3.3]. \square

Приведем несколько конструкций сохраняющих проективность модулей. Здесь и далее через $\bigoplus_p \{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ мы будем обозначать ℓ_p -сумму банаховых пространств $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. При $p = 0$ мы будем подразумевать c_0 -суммы. Если все пространства E_λ являются банаховыми A -модулями, то на их ℓ_p -сумме можно задать структуру банахова A -модуля с помощью покоординатного умножения. Следует напомнить, что \langle произвольное / лишь конечное \rangle семейство модулей обладает категорным копроизведением в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$, которое на самом деле есть их ℓ_1 -сумма. В этом и состоит причина почему мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.7. Пусть $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство банаховых A -модулей. Тогда

- (i) A -модуль $\bigoplus_1 \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически проективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A -модуль P_λ метрически проективен;
- (ii) если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\pi_{P_\lambda}^+$ имеет правый обратный морфизм нормы не более C , то A -модуль $\bigoplus_1 \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ топологически проективен.

Доказательство. Обозначим $P := \bigoplus_1 \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

(i) Если P метрически проективен, то по предложению 2.2 для каждого $\lambda \in \Lambda$ банахов A -модуль P_λ метрически проективен как ретракт P посредством естественной проекции $p_\lambda : P \rightarrow P_\lambda$. Обратно, если все модули $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ метрически проективны, то по общекатегорной схеме метрически проективно их категорное копроизведение P в $A - \mathbf{mod}_1$.

(ii) Допустим P_λ топологически проективен для каждого $\lambda \in \Lambda$. Из предположения следует, что $\bigoplus_1 \{\pi_{P_\lambda}^+ : \lambda \in \Lambda\}$ является ретракцией в $A - \mathbf{mod}$. Как следствие $\bigoplus_1 \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ есть ретракт

$$\begin{aligned} \bigoplus_1 \{A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{P_\lambda}) : \lambda \in \Lambda\} &\cong_{A - \mathbf{mod}_1} \bigoplus_1 \left\{ \bigoplus_1 \{A_+ : \lambda' \in B_{P_\lambda}\} : \lambda \in \Lambda \right\} \\ &\cong_{A - \mathbf{mod}_1} \bigoplus_1 \{A_+ : \lambda \in \Lambda_0\} \end{aligned}$$

в $A - \mathbf{mod}$, где $\Lambda_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_{P_\lambda}$. Тогда, по предположению 2.2 банахов A -модуль P топологически проективен как ретракт топологически проективного A -модуля. \square

Следствие 2.8. Пусть P — банахов A -модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A -модуль $P \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda)$ \langle метрически / топологически \rangle проективен тогда и только тогда, когда P \langle метрически / топологически \rangle проективен.

Чтобы понять отличия метрической и топологической банаховой гомологии от относительной рассмотрим еще два примера касающиеся идеалов и циклических модулей.

Предложение 2.9. Пусть I — идеал коммутативной банаховой алгебры A и I имеет \langle сжимающую / ограниченную \rangle аппроксимативную единицу. Тогда I \langle метрически / топологически \rangle проективен как A -модуль тогда и только тогда, когда I имеет \langle единицу нормы 1 / единицу \rangle .

Доказательство. См. [[7], теорема 1]. □

Этот результат показывает, что метрически или топологически проективные идеалы с ограниченной аппроксимативной единицей должны иметь компактный спектр. В то же время существует множество примеров относительно проективных идеалов со “всего лишь” паракомпактным спектром [[8], теорема 3.7].

Следующее предложение является очевидной модификацией описания алгебраически проективных циклических модулей.

Предложение 2.10. Пусть I — левый идеал в A_\times . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) A -модуль A_\times/I \langle метрически / топологически \rangle проективен \langle и естественное факторотображение $\pi : A_\times \rightarrow A_\times/I$ является строгой коизометрией / \rangle ;
- (ii) существует идемпотент $p \in I$ такой, что $I = A_\times p$ \langle и $\|e_{A_\times} - p\| = 1$ / \rangle

Доказательство. С использованием несколько иной терминологии этот факт доказан в [[9], предложение 2.11]. □

2.2 Метрическая и топологическая инъективность

Как легко догадаться, при изучении метрической и топологической инъективности мы будем использовать два широких класса мономорфизмов, а именно топологически инъективные и изометрические A -морфизмы. Напомним, что ограниченный линейный оператор $T : E \rightarrow F$ называется топологически инъективным, если для некоторого $c > 0$ при всех $x \in E$ выполнено $c\|T(x)\| \geq \|x\|$. Далее, если не оговорено иначе, мы будем считать все модули правыми.

Определение 2.11 ([1], определение 4.3). A -модуль J называется \langle метрически / топологически \rangle инъективным, если для любого \langle изометрического / топологически инъективного \rangle A -морфизма $\xi : Y \rightarrow X$ и любого A -морфизма $\phi : Y \rightarrow J$ существует A -морфизм $\psi : X \rightarrow J$ такой, что $\langle \psi\xi = \phi$ и $\|\psi\| = \|\phi\|$ / $\psi\xi = \phi$ \rangle .

В работах [1] и [2] были построены верные функторы:

$$\square_{met}^d : \mathbf{mod}_1 - A \rightarrow \mathbf{Set}, \quad \square_{top}^d : \mathbf{mod} - A \rightarrow \mathbf{HNor}.$$

Было доказано, что, во-первых, A -морфизм ξ \langle изометричен / топологически инъективен \rangle тогда и только тогда, когда он $\langle \square_{met}^d$ -допустимый / \square_{top}^d -допустимый \rangle мономорфизм и, во-вторых, A -модуль J \langle метрически / топологически \rangle инъективен тогда и только тогда, когда он $\langle \square_{met}^d$ -инъективен / \square_{top}^d -инъективен \rangle . Таким образом, мы немедленно получаем следующее утверждение.

Предложение 2.12. *Всякий ретракт $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективного модуля в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$ снова $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен.*

В [1] и [2] также было доказано, что оснащенная категория $\langle (\mathbf{mod}_1 - A, \square_{met}^d) / (\mathbf{mod} - A, \square_{top}^d) \rangle$ косвободолюбива, и что $\langle \square_{met}^d\text{-косвободные} / \square_{top}^d\text{-косвободные} \rangle$ модули изоморфны в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$ модулям вида $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda))$ для некоторого множества Λ . Более того, для любого A -модуля X существует $\langle \square_{met}^d\text{-допустимый} / \square_{top}^d\text{-допустимый} \rangle$ мономорфизм

$$\rho_X^+ : X \rightarrow \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{X^*})) : x \mapsto (a \mapsto (f \mapsto f(x \cdot a))).$$

Как следствие общих результатов об оснащенных категориях мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.13. *Модуль J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда ρ_J^+ — коретракция в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$.*

Как и для проективных модулей легко доказать следующее предложение.

Предложение 2.14. *Каждый метрически инъективный модуль топологически инъективен, и каждый топологически инъективный модуль относительно инъективен.*

Отождествим банаховы пространства с правыми банаховыми модулями над нулевой алгеброй, тогда мы получим определение $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективного банахова пространства. Эквивалентное определение говорит, что банахово пространство $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективно, если оно $\langle 1\text{-дополняемо} / \text{дополняемо} \rangle$ в любом объемлющем банаховом пространстве. На данный момент полностью описаны только метрически инъективные банаховы пространства — эти пространства изометрически изоморфны $C(K)$ -пространствам для некоторого экстремально несвязного компактного хаусдорфова пространства K [[10], теорема 3.11.6]. Обычно такие топологические пространства называются стоуновыми. В частности, метрически инъективно всякое L_∞ -пространство. Самые последние достижения в изучении топологически инъективных банаховых пространств можно найти в [[11], глава 40].

Теперь перейдем к обсуждению модулей. И снова простой факт: A -модуль A_X^* метрически и топологически инъективен. Его легко доказать по определению с использованием теоремы Хана-Банаха. По аналогии с проективными модулями, проверку инъективности модулей часто можно свести к рассмотрению чуть более простых задач ретракции.

Предложение 2.15. *Пусть J — верный A -модуль, то есть равенство $x \cdot A = \{0\}$ влечет $x = 0$. Тогда J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда отображение $\rho_J : J \rightarrow \mathcal{B}(A, \ell_\infty(B_{J^*})) : x \mapsto (a \mapsto (f \mapsto f(x \cdot a)))$ есть коретракция в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$.*

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждениям из [[12], предложение 1.7]. \square

Предложение 2.16. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A , и J — правый банахов A -модуль верный как I -модуль. Тогда:*

- (i) *если I — левый идеал в A и J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективный I -модуль, то J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен как A -модуль;*
- (ii) *если I — $\langle 1\text{-дополняемый} / \text{дополняемый} \rangle$ правый идеал A и J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен как A -модуль, то J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен как I -модуль.*

Доказательство. Доказательство незначительно отличается от [[6], предложение 2.3.4]. \square

Теперь обсудим конструкции которые сохраняют метрическую и топологическую инъективность. Следует напомнить, что $\langle \text{произвольное} / \text{лишь конечное} \rangle$ семейство объектов в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$ обладает категорным произведением, которое на самом деле есть их ℓ_∞ -сумма. Именно поэтому мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.17. Пусть $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство банаховых A -модулей. Тогда:

- (i) A -модуль $\bigoplus_\infty \{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически инъективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A -модуль J_λ метрически инъективен;
- (ii) если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\rho_{J_\lambda}^+$ имеет левый обратный морфизм нормы не более C , то A -модуль $\bigoplus_\infty \{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ топологически инъективен.

Доказательство. Доказательство мало отличается от рассуждений предложения 2.7. Нужно лишь использовать другой изоморфизм: $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda)) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \bigoplus_\infty \{A_+^* : \lambda \in \Lambda\}$ \square

Следствие 2.18. Пусть J — банахов A -модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A -модуль $\bigoplus_\infty \{J : \lambda \in \Lambda\}$ $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен.

В отличие от проективности имеется еще один способ конструирования инъективных модулей.

Предложение 2.19. Пусть J — банахов A -модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A -модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен.

Доказательство. Допустим, $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим сжимающие A -морфизмы $i_\lambda : J \rightarrow \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) : x \mapsto (f \mapsto f(\lambda)x)$ и $p_\lambda : \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) \rightarrow J : T \mapsto T(\delta_\lambda)$. Очевидно, $p_\lambda i_\lambda = 1_J$, то есть J есть ретракт $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$. Из предложения 2.12 следует, что A -модуль J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен.

Обратно, поскольку J $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен, то по предложению 2.13 морфизм ρ_J^+ является коретракцией в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$. Применим функтор $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), -)$ к этой коретракции, чтобы получить другую коретракцию $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \rho_J^+)$. Заметим, что

$$\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*})) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} (\ell_1(\Lambda) \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*}))^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda \times B_{J^*})^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}),$$

поэтому мы получаем изометрически изоморфизм банаховых модулей:

$$\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*}))) \underset{\mathbf{mod}_1 - A}{\cong} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*})).$$

Значит $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ — ретракт $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}))$ в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$, то есть ретракт $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективного A -модуля. По предложению 2.12 A -модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ инъективен. \square

2.3 Метрическая и топологическая плоскость

Чтобы сохранить единый стиль обозначений мы будем называть метрически плоскими A -модули статьи [13], где они были названы экстремально плоскими. Через $\widehat{\otimes}_A$ мы будем обозначать проективное модульное тензорное произведение банаховых модулей. Тем же символом мы будем обозначать и соответствующий функтор.

Определение 2.20 ([13], I). A -модуль F называется \langle метрически / топологически \rangle плоским, если для каждого \langle изометрического / топологически инъективного \rangle A -морфизма $\xi : X \rightarrow Y$ правых A -модулей линейный оператор $\xi \widehat{\otimes}_A 1_F : X \widehat{\otimes}_A F \rightarrow Y \widehat{\otimes}_A F$ \langle изометричен / топологически инъективен \rangle .

Прежде чем переходить к примерам, нам потребуется дать определение \mathcal{L}_1 -пространства. Пусть E и F — два изоморфных банаховых пространства. Тогда расстояние Банаха-Мазура между ними определяется по формуле

$$d_{BM}(E, F) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in \mathcal{B}(E, F) \text{ — изоморфизм}\}.$$

Пусть \mathcal{F} — некоторое семейство конечномерных банаховых пространств. Будем говорить, что банахово пространство E имеет \mathcal{F} -локальную структуру, если для некоторого $C \geq 1$ и для каждого конечномерного подпространства F в E существует содержащее F конечномерное подпространство G в E такое, что $d_{BM}(G, H) \leq C$ для некоторого H из \mathcal{F} . Один из самых важных примеров такого типа — это так называемые \mathcal{L}_p -пространства. Впервые они были определены в новаторской работе [14] и стали незаменимым инструментом в локальной теории банаховых пространств. Для заданного $1 \leq p \leq +\infty$ мы будем говорить, что банахово пространство E является \mathcal{L}_p -пространством, если оно имеет \mathcal{F} -локальную структуру для класса \mathcal{F} конечномерных ℓ_p -пространств. Наибольший интерес для нас будут представлять \mathcal{L}_1 - и \mathcal{L}_∞ -пространства.

И снова, в качестве примера мы рассмотрим категорию банаховых пространств как категорию модулей над нулевой алгеброй. Из работы Гротендика [4] следует, что любое метрически плоское банахово пространство есть L_1 -пространство. Для топологически плоских банаховых пространств, в отличие от топологически инъективных, мы также имеем критерий [[15], теорема V.1]: банахово пространство топологически плоское тогда и только тогда, когда оно является \mathcal{L}_1 -пространством.

Хорошо известно, что A -модуль F относительно плоский тогда и только тогда, когда F^* относительно инъективный [[5], теорема 7.1.42]. Следующее предложение есть очевидный аналог данного результата. Доказательство незначительно отличается от критерия относительной плоскости.

Предложение 2.21. A -модуль F \langle метрически / топологически \rangle плоский тогда и только тогда, когда F^* \langle метрически / топологически \rangle инъективен.

Комбинируя предложение 2.21 с предложениями 2.12 и 2.14, мы получаем следующее.

Предложение 2.22. Всякий ретракт \langle метрически / топологически \rangle плоского модуля в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$ снова \langle метрически / топологически \rangle плоский.

Предложение 2.23. Каждый метрически плоский модуль топологически плоский, каждый топологически плоский модуль относительно плоский.

Отметим, еще одно полезное следствие предложения 2.21.

Предложение 2.24. Пусть I — замкнутая подалгебра в A , и F — банахов A -модуль существенный как I -модуль. Тогда:

- (i) если I — левый идеал в A и F \langle метрически / топологически \rangle плоский I -модуль, то F \langle метрически / топологически \rangle плоский A -модуль;
- (ii) если I — \langle 1-дополняемый / дополняемый \rangle правый идеал A и F есть \langle метрически / топологически \rangle плоский A -модуль, то F \langle метрически / топологически \rangle плоский I -модуль.

Доказательство. Заметим, что модуль, сопряженный к существенному модулю, будет верным. Теперь все результаты следуют из предложений 2.21 и 2.16. \square

Предложение 2.25. Пусть P — \langle метрически / топологически \rangle проективный A -модуль, и Λ — произвольное множество. Тогда A -модуль $\mathcal{B}(P, \ell_\infty(\Lambda))$ \langle метрически / топологически \rangle инъективен как A -модуль. В частности, P^* \langle метрически / топологически \rangle инъективен как A -модуль.

Доказательство. Из предложения 2.3 мы знаем, что π_P^+ — ретракция в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$. Тогда A -морфизм $\rho^+ = \mathcal{B}(\pi_P^+, \ell_\infty(\Lambda))$ есть коретракция в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$. Заметим, что $\mathcal{B}(A_+ \otimes \ell_1(B_P), \ell_\infty(\Lambda)) \cong_{\mathbf{mod}_1 - A} \mathcal{B}(A_+, \mathcal{B}(\ell_1(B_P), \ell_\infty(\Lambda))) \cong_{\mathbf{mod}_1 - A} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_P \times \Lambda))$. Итак, мы показали, что существует коретракция из $\mathcal{B}(P, \ell_\infty(\Lambda))$ в \langle метрически / топологически \rangle инъективный A -модуль. По предложению 2.12 банахов A -модуль $\mathcal{B}(P, \ell_\infty(\Lambda))$ является \langle метрически / топологически \rangle инъективным. Чтобы доказать последнее утверждение достаточно взять в качестве Λ одноточечное множество. \square

Как следствие предложений 2.21 и 2.25, мы получаем следующий важный факт.

Предложение 2.26. Каждый \langle метрически / топологически \rangle проективный модуль является \langle метрически / топологически \rangle плоским.

Позже мы убедимся, что \langle метрическая / топологическая \rangle плоскость — это более слабое свойство, чем \langle метрическая / топологическая \rangle проективность.

По аналогии с проективностью, теперь легко показать, что копроизведения сохраняют метрическую, а иногда и топологическую плоскость модулей.

Предложение 2.27. Пусть $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство банаховых A -модулей. Тогда:

- (i) A -модуль $\bigoplus_1 \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ метрически плоский тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ модуль F_λ метрически плоский;
- (ii) если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\rho_{F_\lambda}^+$ имеет левый обратный морфизм нормы не более C , то A -модуль $\bigoplus_1 \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ топологически плоский.

Доказательство. По предложению 2.21 A -модуль F \langle метрически / топологически \rangle плоский тогда и только тогда, когда F^* \langle метрически / топологически \rangle инъективен. Осталось применить предложение 2.17 с $J_\lambda = F_\lambda^*$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и вспомнить, что

$$\left(\bigoplus_1 \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \right)^*_{\mathbf{mod}_1 - A} \cong \bigoplus_\infty \{F_\lambda^* : \lambda \in \Lambda\}.$$

□

Теперь мы обсудим условия, при которых идеалы и циклические модули будут метрически и топологически плоскими. Доказательство, следующего предложения практически не отличается от своего “относительного аналога” в [[5], предложение 7.1.45].

Предложение 2.28. *Пусть I — левый идеал в A_\times и I имеет правую \langle сжимающую / ограниченную \rangle аппроксимативную единицу. Тогда A -модуль $I \langle$ метрически / топологически \rangle плоский.*

Теперь, кстати, мы можем дать пример метрически плоского модуля, который не является даже топологически проективным. Очевидно, $\ell_\infty(\mathbb{N})$ -модуль $c_0(\mathbb{N})$ не унитален как идеал алгебры $\ell_\infty(\mathbb{N})$, но имеет сжимающую аппроксимативную единицу. По теореме 2.9 этот модуль не является топологически проективным, но он метрически плоский по предложению 2.28.

Вторая часть следующего предложения есть небольшая переформулировка [[9], предложение 4.11]. Случай топологической плоскости идеалов был изучен Хелемским в [[8], теорема VI.1.20].

Предложение 2.29. *Пусть I — левый собственный идеал в A_\times . Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) A -модуль $A_\times/I \langle$ метрически / топологически \rangle плоский;
- (ii) идеал I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu \in N} \langle$ такую, что $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_\times} - e_\nu\| \leq 1 \rangle$

Следует сказать, что всякая операторная алгебра A (не обязательно самосопряженная) обладающая сжимающей аппроксимативной единицей имеет сжимающую аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu \in N}$ со свойством $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_\#} - e_\nu\| \leq 1$ и даже $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_\#} - 2e_\nu\| \leq 1$. Здесь $A_\#$ — унитизация A как операторной алгебры. Подробности можно найти в [16], [17].

Сравним эти результаты о метрической и топологической плоскости циклических модулей с их относительными аналогами. Хелемский и Шейнберг показали [[8], теорема VII.1.20], что циклический модуль будет относительно плоским если I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу. В случае когда I^\perp дополняемо в A_\times^* верна и обратная импликация. В топологической теории это требование излишне, поэтому удастся получить критерий. Метрическая плоскость циклических модулей слишком сильное свойство из-за специфических ограничений на норму аппроксимативной единицы. Как мы увидим в следующем параграфе, оно настолько ограничительное, что не позволяет построить ни одного ненулевого аннуляторного метрически проективного, инъективного или плоского модуля над ненулевой банаховой алгеброй.

3 Влияние банаховой геометрии

3.1 Гомологически тривиальные аннуляторные модули

В этом параграфе мы сконцентрируем наше внимание на метрической и топологической проективности, инъективности и плоскости аннуляторных модулей, то есть модулей с нулевым внешним умножением. Если не оговорено иначе, все банаховы пространства в этом параграфе рассматриваются как аннуляторные модули. Отметим очевидный факт: всякий ограниченный линейный оператор между аннуляторными A -модулями является A -морфизмом.

Предложение 3.1. Пусть X — ненулевой аннуляторный A -модуль. Тогда \mathbb{C} есть ретракт X в $A - \mathbf{mod}_1$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \in X$ нормы 1. Используя теорему Хана-Банаха выберем функционал $f_0 \in X^*$ так, чтобы $\|f_0\| = f_0(x_0) = 1$. Рассмотрим линейные операторы $\pi : X \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto f_0(x)$, $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow X : z \mapsto zx_0$. Легко проверить, что π и σ суть сжимающие A -морфизмы и, более того, $\pi\sigma = 1_{\mathbb{C}}$. Другими словами, \mathbb{C} есть ретракт X в $A - \mathbf{mod}_1$. \square

Пришло время вспомнить, что любая банахова алгебра A может рассматриваться как собственный максимальный идеал в A_+ , причем $\mathbb{C} \cong_{A - \mathbf{mod}_1} A_+/A$. Если рассматривать \mathbb{C} как правый аннуляторный A -модуль, то имеет место еще один изоморфизм $\mathbb{C} \cong_{\mathbf{mod}_1 - A} (A_+/A)^*$.

Предложение 3.2. Аннуляторный A -модуль $\mathbb{C} \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен тогда и только тогда, когда $\langle A = \{0\} / A \text{ имеет правую единицу} \rangle$.

Доказательство. Достаточно исследовать $\langle \text{метрическую} / \text{топологическую} \rangle$ проективность модуля A_+/A . Естественное фактор-отображение $\pi : A_+ \rightarrow A_+/A$ является строгой коизометрией, поэтому по предложению 2.10 $\langle \text{метрическая} / \text{топологическая} \rangle$ проективность A_+/A эквивалентна существованию $p \in A$ такого, что $A = A_+p \langle \text{и } \|e_{A_+} - p\| = 1 \rangle$. $\langle \text{Осталось заметить, что } \|e_{A_+} - p\| = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } p = 0, \text{ что эквивалентно } A = A_+p = \{0\} \rangle$. \square

Предложение 3.3. Пусть P — ненулевой аннуляторный A -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $P - \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективный A -модуль;
- (ii) $\langle A = \{0\} / A \text{ имеет правую единицу} \rangle$ и $P - \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективное банахово пространство, то есть $\langle P \cong_{\mathbf{Ban}_1} \ell_1(\Lambda) / P \cong_{\mathbf{Ban}} \ell_1(\Lambda) \rangle$ для некоторого множества Λ .

Доказательство. (i) \implies (ii) Из предложений 2.2 и 3.1 следует, что A -модуль $\mathbb{C} \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен как ретракт $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективного модуля P . Предложение 3.2 дает, что $\langle A = \{0\} / A \text{ имеет правую единицу} \rangle$. По следствию 2.8 аннуляторный A -модуль $\mathbb{C} \hat{\otimes}_{A - \mathbf{mod}_1} \ell_1(B_P) \cong_{A - \mathbf{mod}_1} \ell_1(B_P) \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен. Рассмотрим строгую коизометрию $\pi : \ell_1(B_P) \rightarrow P$ корректно определенную равенством $\pi(\delta_x) = x$. Так как $P \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен, то A -морфизм π имеет правый обратный морфизм σ в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$. Таким образом, $\sigma\pi$ есть $\langle \text{сжимающий} / \text{ограниченный} \rangle$ проектор из $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективного банахова пространства $\ell_1(B_P)$ на P , то есть $P - \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективное банахово пространство. Теперь из $\langle [1], \text{предложение 3.2} \rangle / \text{результатов [3]} \rangle$ следует, что P изоморфно $\ell_1(\Lambda)$ в $\langle \mathbf{Ban}_1 / \mathbf{Ban} \rangle$ для некоторого множества Λ .

(ii) \implies (i) По предложению 3.2 аннуляторный A -модуль $\mathbb{C} \langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен. По следствию 2.8 аннуляторный A -модуль $\mathbb{C} \hat{\otimes}_{A - \mathbf{mod}_1} \ell_1(\Lambda) \cong_{A - \mathbf{mod}_1} \ell_1(\Lambda)$ также $\langle \text{метрически} / \text{топологически} \rangle$ проективен. \square

Предложение 3.4. Правый аннуляторный A -модуль \mathbb{C} \langle метрически / топологически \rangle инъективен тогда и только тогда, когда $\langle A = \{0\} / A$ имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу \rangle .

Доказательство. Благодаря предложению 2.21 достаточно изучить \langle метрическую / топологическую \rangle плоскость модуля A_+/A . По предложению 2.29 это эквивалентно существованию правой ограниченной аппроксимативной единицы $(e_\nu)_{\nu \in N}$ в A \langle со свойством $\sup_{\nu \in N} \|e_{A_+} - e_\nu\| \leq 1$ \rangle . \langle Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - e_\nu\| \leq 1$ тогда и только тогда, когда $e_\nu = 0$, что эквивалентно $A = \{0\}$ \rangle . \square

Предложение 3.5. Пусть J — ненулевой правый аннуляторный A -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) J — \langle метрически / топологически \rangle инъективный A -модуль;
- (ii) $\langle A = \{0\} / A$ имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу \rangle и J — \langle метрически / топологически \rangle инъективное банахово пространство \langle то есть $J \cong_{\mathbf{Ban}_1} C(K)$ для некоторого для стоунова пространства K \rangle .

Доказательство. (i) \implies (ii) Из предложений 2.12 и 3.1 мы получаем, что A -модуль \mathbb{C} \langle метрически / топологически \rangle инъективен как ретракт \langle метрически / топологически \rangle инъективного модуля J . Предложение 3.4 дает нам, что $\langle A = \{0\} / A$ имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу \rangle . Из предложения 2.19 следует, что аннуляторный A -модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}), \mathbb{C}) \cong_{\mathbf{mod}_1 - A} \ell_\infty(B_{J^*})$ \langle метрически / топологически \rangle инъективен. Рассмотрим изометрию $\rho : J \rightarrow \ell_\infty(B_{J^*})$ корректно определенную равенством $\rho(x)(f) = f(x)$. Поскольку J \langle метрически / топологически \rangle инъективен, ρ имеет левый обратный морфизм τ в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$. Тогда $\rho\tau$ — \langle сжимающий / ограниченный \rangle проектор из \langle метрически / топологически \rangle инъективного банахова пространства $\ell_\infty(B_{J^*})$ на J , поэтому J также является \langle метрически / топологически \rangle инъективным банаховым пространством. \langle Из [10], теорема 3.11.6] мы знаем, что J изометрически изоморфно $C(K)$ для некоторого стоунова пространства K . \rangle

(ii) \implies (i) По предложению 3.4 аннуляторный A -модуль \mathbb{C} \langle метрически / топологически \rangle инъективен. По предложению 2.19 аннуляторный A -модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}), \mathbb{C}) \cong_{\mathbf{mod}_1 - A} \ell_\infty(B_{J^*})$ также \langle метрически / топологически \rangle инъективен. Так как J — \langle метрически / топологически \rangle инъективное банахово пространство и существует изометрическое вложение $\rho : J \rightarrow \ell_\infty(B_{J^*})$, то J является ретрактом $\ell_\infty(B_{J^*})$ в $\langle \mathbf{Ban}_1 / \mathbf{Ban} \rangle$. Напомним, что J и $\ell_\infty(B_{J^*})$ аннуляторные модули, поэтому данная ретракция также является ретракцией в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$. По предложению 2.12 A -модуль J \langle метрически / топологически \rangle инъективен. \square

Предложение 3.6. Пусть F — ненулевой аннуляторный A -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) F — \langle метрически / топологически \rangle плоский A -модуль;
- (ii) $\langle A = \{0\} / A$ имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу \rangle и F — \langle метрически / топологически \rangle плоское банахово пространство, то есть F является $\langle L_1$ -пространством / \mathcal{L}_1 -пространством \rangle .

Доказательство. Из $\langle [4], \text{теорема 1} \rangle / \langle [15], \text{теорема VI.6} \rangle$ мы знаем, что банахово пространство F^* \langle метрически / топологически \rangle инъективно тогда и только тогда, когда F есть $\langle L_1\text{-пространство} / \mathcal{L}_1\text{-пространство} \rangle$. Теперь эквивалентность следует из предложений 3.5 и 2.21. \square

Сравним эти результаты с их аналогами из относительной теории. Из $\langle [6], \text{предложение 2.1.7} \rangle / \langle [6], \text{предложение 2.1.10} \rangle$ мы знаем, что аннуляторный модуль над банаховой алгеброй A относительно \langle проективный / плоский \rangle тогда и только тогда, когда A имеет \langle правую единицу / правую ограниченную аппроксимативную единицу \rangle . В метрической и топологической теории, в отличие от относительной, гомологическая тривиальность аннуляторных модулей налагает ограничения не только на алгебру, но и на геометрию самого модуля. Эти геометрические ограничения запрещают существование некоторых гомологически лучших банаховых алгебр. Одно из важных свойств относительно \langle стягиваемых / аменабельных \rangle банаховых алгебр — это \langle проективность / плоскость \rangle всех (и в частности аннуляторных) левых банаховых модулей над ней. Резкое отличие метрической и топологической теории в том, что в них подобных алгебр не может быть.

Предложение 3.7. *Не существует банаховой алгебры A такой, что все A -модули \langle метрически / топологически \rangle плоские. Тем более, не существует банаховых алгебр таких, что все A -модули \langle метрически / топологически \rangle проективны.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечномерное \mathcal{L}_∞ -пространство X (например $\ell_\infty(\mathbb{N})$) как аннуляторный A -модуль. Из $\langle [18], \text{следствие 23.3(4)} \rangle$ мы знаем, что пространство X не является \mathcal{L}_1 -пространством. Следовательно, по предложению 3.6 модуль X не является топологически плоским. По предложению 2.23 он также и не метрически плоский. Наконец, из предложения 2.26 следует, что X не является ни метрически, ни топологически проективным. \square

3.2 Гомологически тривиальные модули над банаховыми алгебрами со специальной геометрией

Цель данного параграфа — убедить читателя в том, что гомологически тривиальные модули над некоторыми банаховыми алгебрами имеют с этими алгебрами схожие геометрические свойства. Результаты следующего предложения в случае метрической теории были получены Гравеном в [19].

Предложение 3.8. *Пусть A — банахова алгебра изометрически изоморфная как банахово некоторому L_1 -пространству. Тогда:*

- (i) *если P — \langle метрически / топологически \rangle проективный A -модуль, то P — $\langle L_1\text{-пространство} / \text{ретракт } L_1\text{-пространства} \rangle$;*
- (ii) *если J — \langle метрически / топологически \rangle инъективный A -модуль, то J — $\langle C(K)\text{-пространство для некоторого стоунова пространства } K / \text{топологически инъективное банахово пространство} \rangle$;*
- (iii) *если F — \langle метрически / топологически \rangle плоский A -модуль, то F является $\langle L_1\text{-пространством} / \mathcal{L}_1\text{-пространством} \rangle$.*

Доказательство. Пусть (Θ', Σ', ν') такое пространство с мерой что $A_+ \cong_{\mathbf{Ban}_1} L_1(\Theta', \nu')$.

(i) Так как P \langle метрически / топологически \rangle проективен как A -модуль, то по предложению 2.3 он является ретрактом $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ в $\langle A - \mathbf{mod}_1 / A - \mathbf{mod} \rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_P , тогда по теореме Гротендика [[20], теорема 2.7.5]

$$A_+ \widehat{\otimes}_{\mathbf{Ban}_1} \ell_1(B_P) \cong_{\mathbf{Ban}_1} L_1(\Theta', \nu') \widehat{\otimes}_{\mathbf{Ban}_1} L_1(B_P, \mu_c) \cong_{\mathbf{Ban}_1} L_1(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, P — ретракт L_1 -пространства в $\langle \mathbf{Ban}_1 / \mathbf{Ban} \rangle$. Осталось заметить, что любой ретракт L_1 -пространства в \mathbf{Ban}_1 есть снова L_1 -пространство [[10], теорема 6.17.3].

(ii) Так как J \langle метрически / топологически \rangle инъективный A -модуль, то по предложению 2.13 он является ретрактом $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))$ в $\langle \mathbf{mod}_1 - A / \mathbf{mod} - A \rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_{J^*} , тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})) &\cong_{\mathbf{Ban}_1} (A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*}))^*_{\mathbf{Ban}_1} \cong_{\mathbf{Ban}_1} (L_1(\Theta', \nu') \widehat{\otimes} L_1(B_P, \mu_c))^* \\ &\cong_{\mathbf{Ban}_1} L_1(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c)^*_{\mathbf{Ban}_1} \cong_{\mathbf{Ban}_1} L_\infty(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c). \end{aligned}$$

Следовательно, J — ретракт L_∞ -пространства в $\langle \mathbf{Ban}_1 / \mathbf{Ban} \rangle$. Поскольку L_∞ -пространства \langle метрически / топологически \rangle инъективны, то таковы же и их ретракты J . Осталось напомнить, что каждое метрически инъективное банахово пространство суть $C(K)$ -пространство для некоторого стоунова пространства K [[10], теорема 3.11.6].

(iii) Из \langle [[4], теорема 1] / [[15], теорема VI.6] \rangle мы знаем, что банахово пространство F^* инъективно в $\langle \mathbf{Ban}_1 / \mathbf{Ban} \rangle$ тогда и только тогда, когда F является $\langle L_1$ -пространством / \mathcal{L}_1 -пространством \rangle . Остается применить результаты пункта (ii) и предложение 2.21. \square

Предложение 3.9. Пусть A — банахова алгебра являющаяся \mathcal{L}_1 -пространством. Тогда любой топологически \langle проективный / инъективный / плоский \rangle A -модуль является $\langle \mathcal{L}_1$ -пространством / \mathcal{L}_∞ -пространством / \mathcal{L}_1 -пространством \rangle .

Доказательство. Если алгебра A есть \mathcal{L}_1 -пространство, то такова же и A_+ .

Пусть P — топологически проективный A -модуль. Тогда по предложению 2.3 он есть ретракт $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ в $A - \mathbf{mod}$ и тем более в \mathbf{Ban} . Поскольку $\ell_1(B_P)$ есть \mathcal{L}_1 -пространство, то таково же $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_P)$ как проективное тензорное произведение \mathcal{L}_1 -пространств [[21], предложение 1]. Следовательно, P есть \mathcal{L}_1 -пространство как ретракт \mathcal{L}_1 -пространства [[22], предложение 1.28].

Пусть J — топологически инъективный A -модуль. Тогда по предложению 2.13 он есть ретракт $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})) \cong_{\mathbf{mod}_1 - A} (A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*}))^*$ в $\mathbf{mod} - A$ и тем более в \mathbf{Ban} . Как мы показали выше, пространство $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_{J^*})$ является \mathcal{L}_1 -пространством, тогда его сопряженное $\mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))$ есть \mathcal{L}_∞ -пространство [[22], предложение 1.27]. Осталось заметить, что любой ретракт \mathcal{L}_∞ -пространства есть \mathcal{L}_∞ -пространство [[22], предложение 1.28].

Наконец, пусть F — топологически плоский A -модуль, тогда F^* топологически инъективен по предложению 2.21. Из предыдущего абзаца следует, что F^* — это \mathcal{L}_∞ -пространство. По теореме VI.6 из [15] пространство F является \mathcal{L}_1 -пространством. \square

Перейдем к обсуждению свойства Данфорда-Петтиса для гомологически тривиальных банаховых модулей. Прежде напомним, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если любой слабо компактный оператор из E в произвольное банахово пространство

F вполне непрерывен. Существует простое внутреннее описание этого свойства [[23], теорема 5.4.4]: банахово пространство E обладает свойством Данфорда-Петтиса если $\lim_n f_n(x_n) = 0$ для любых слабо сходящихся к 0 последовательностей $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ и $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$. Отсюда легко доказать, что если банахово пространство E^* имеет свойство Данфорда-Петтиса, то его имеет и E . Любое \mathcal{L}_1 -пространство и любое \mathcal{L}_∞ -пространство имеет свойство Данфорда-Петтиса [[22], предложение 1.30]. В частности, все L_1 -пространства и $C(K)$ -пространства имеют это свойство. Свойство Данфорда-Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [[24], предложение 13.44].

Ключевым для нас будет результат Бургейна о банаховых пространствах со специальной локальной структурой. В [[25], теорема 5] он доказал, что первое, второе и так далее сопряженное пространство банахова пространства с E_p -локальной структурой обладает свойством Данфорда-Петтиса. Здесь, E_p обозначает класс всех ℓ_∞ -сумм p копий p -мерных ℓ_1 -пространств для некоторого натурального p .

Предложение 3.10. Пусть $\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство бесконечномерных банаховых L_1 -пространств. Тогда банахово пространство $\bigoplus_0 \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет $(E_p, 1 + \epsilon)$ -локальную структуру для всех $\epsilon > 0$.

Доказательство. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через $L_1^0(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ обозначим плотное подпространство в $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ натянутое на характеристические функции измеримых множеств из Σ_λ . Обозначим $E := \bigoplus_0 \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, пусть $E_0 := \bigoplus_{00} \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — не обязательно замкнутое подпространство в E , состоящее из векторов с конечным числом ненулевых координат.

Зафиксируем $\epsilon > 0$ и конечномерное подпространство F в E . Так как F конечномерно, то существует ограниченный проектор $Q : E \rightarrow E$ на F . Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta \|Q\| < 1$ и $(1 + \delta \|Q\|)(1 - \delta \|Q\|)^{-1} < 1 + \epsilon$. Заметим, что B_F компактно, потому что F конечномерно. Следовательно, существует конечная $\delta/2$ -сеть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_n} \subset E_0$ для B_F . Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ имеем $x_k = \bigoplus_0 \{x_{k,\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, где $x_{k,\lambda} = \sum_{j=1}^{m_{k,\lambda}} d_{j,k,\lambda} \chi_{D_{j,k,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(d_{j,k,\lambda})_{j \in \mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ и измеримых множеств $(D_{j,k,\lambda})_{j \in \mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ конечной меры. Пусть $(C_{i,\lambda})_{i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}}$ — множество всех попарных пересечений элементов из $(D_{j,k,\lambda})_{j \in \mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ исключая множества меры 0. Тогда $x_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{m_\lambda} c_{i,k,\lambda} \chi_{C_{i,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(c_{j,k,\lambda})_{j \in \mathbb{N}_{m_\lambda}}$. Обозначим $\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda : x_{k,\lambda} \neq 0\}$. По определению пространства E_0 множество Λ_k конечно для каждого $k \in \mathbb{N}_n$. Рассмотрим конечное множество $\Lambda_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_n} \Lambda_k$. Так как пространство $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ бесконечномерно, то мы можем добавить к семейству $\{\chi_{C_{i,\lambda}} : i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}\}$ любое конечное число дизъюнктивных множеств положительной конечной меры. Поэтому, далее считаем, что $m_\lambda = \text{Card}(\Lambda_0)$ для всех $\lambda \in \Lambda_0$. Для каждого $\lambda \in \Lambda_0$ корректно определен проектор

$$P_\lambda : L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) \rightarrow L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : x_\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{m_\lambda} \left(\mu(C_{i,\lambda})^{-1} \int_{C_{i,\lambda}} x_\lambda(\omega) d\mu_\lambda(\omega) \right) \chi_{C_{i,\lambda}}.$$

Легко проверить, что $P_\lambda(\chi_{C_{i,\lambda}}) = \chi_{C_{i,\lambda}}$ для всех $i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}$. Следовательно, $P_\lambda(x_{k,\lambda}) = x_{k,\lambda}$ для всех $k \in \mathbb{N}_n$. Так как множества $(C_{i,\lambda})_{i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}}$ не пересекаются и имеют положительную меру, то $\text{Im}(P_\lambda) \cong \ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda})$. Для $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ мы положим $P_\lambda = 0$ и рассмотрим проектор $P := \bigoplus_0 \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По построению он сжимающий с образом $\text{Im}(P) \cong \bigoplus_0 \{\ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda}) : \lambda \in \Lambda_0\} \in E_p$. Рассмотрим произвольный вектор $x \in B_F$, тогда существует номер $k \in \mathbb{N}_n$ такой, что $\|x - x_k\| \leq \delta/2$. Тогда $\|P(x) - x\| = \|P(x) - P(x_k) + x_k - x\| \leq \|P\| \|x - x_k\| + \|x_k - x\| \leq \delta$.

Построив проекторы P и Q , рассмотрим оператор $I := 1_E + PQ - Q$. Очевидно, $\|1_E - I\| = \|PQ - Q\| \leq \delta\|Q\|$. Следовательно I — изоморфизм по стандартному трюку с рядами фон Нойманна [[23], предложение A.2]. Более того, $I^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (1_E - I)^p$, поэтому

$$\|I^{-1}\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \|1_E - I\|^p \leq \sum_{p=0}^{\infty} (\delta\|Q\|)^p = (1 - \delta\|Q\|)^{-1}, \quad \|I\| \leq \|1_E\| + \|I - 1_E\| \leq 1 + \delta\|Q\|.$$

Заметим, что $PI = P + P^2Q - PQ = P + PQ - PQ = P$, поэтому для всех $x \in F$ выполнено

$$I(x) = x + P(Q(x)) - Q(x) = x + P(x) - x = P(x) = P(P(x)) = P(I(x))$$

и $x = (I^{-1}PI)(x)$. Последнее означает, что F содержится в образе ограниченного проектора $R = I^{-1}PI$. Обозначим этот образ через F_0 и рассмотрим биоограничение $I_0 = I|_{F_0}^{\text{Im}(P)}$ изоморфизма I . Так как $\|I_0\|\|I_0^{-1}\| \leq \|I\|\|I^{-1}\| \leq (1 + \delta\|Q\|)(1 - \delta\|Q\|)^{-1} < 1 + \epsilon$, то $d_{BM}(F_0, \text{Im}(P)) < 1 + \epsilon$. Таким образом, мы показали, что для любого конечномерного подпространства в E существует подпространство F_0 в E содержащее F такое, что $d_{BM}(F_0, U) < 1 + \epsilon$ для некоторого $U \in E_p$. Это значит, что E имеет $(E_p, 1 + \epsilon)$ -локальную структуру. \square

Предложение 3.11. Пусть $\{(\Omega_\lambda, \Sigma_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство пространств с мерой. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ обладает свойством Данфорда-Петтиса.

Доказательство. Сначала предположим, что пространства $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ бесконечномерны для всех $\lambda \in \Lambda$. В этом случае из предложения 3.10 мы знаем, что банахово пространство $F := \bigoplus_0 \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет E_p -локальную структуру. Тогда по теореме 5 из [25] первое, второе и так далее сопряженное пространство пространства F обладают свойством Данфорда-Петтиса. Как следствие, мы получаем, что

$$F^{**} = \left(\bigoplus_0 \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \right)^{**} \cong_{\text{Ban}_1} \bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**} : \lambda \in \Lambda\}$$

имеет свойство Данфорда-Петтиса. Из [[18], предложение B10] мы знаем, что каждое L_1 -пространство 1-дополняемо в своем втором сопряженном. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через P_λ обозначим соответствующий проектор в $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**}$. Таким образом $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 1-дополняемо в $F^{**} \cong \bigoplus_{\text{Ban}_1} \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**} : \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty \{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Так как F^{**} имеет свойство Данфорда-Петтиса, то из [[24], предложение 13.44] следует, что это свойство имеет и дополняемое в F^{**} подпространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$.

Теперь рассмотрим общий случай. Очевидно, любое L_1 -пространство можно рассматривать как 1-дополняемое подпространство некоторого бесконечномерного L_1 -пространства. Как следствие, пространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ будет 1-дополняемо в \bigoplus_∞ -сумме бесконечномерных L_1 -пространств. Как было показано выше, такая сумма обладает свойством Данфорда-Петтиса, а значит, Осталось вспомнить, что это свойство Данфорда-Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [[24], предложение 13.44]. \square

Предложение 3.12. Пусть E — \mathcal{L}_∞ -пространство и Λ — произвольное множество. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty \{E^* : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса.

Доказательство. Поскольку E — это \mathcal{L}_∞ -пространство, то E^* дополняемо в некотором L_1 -пространстве [[14], предложение 7.4]. То есть существует ограниченный линейный проектор $P : L_1(\Omega, \mu) \rightarrow L_1(\Omega, \mu)$ с образом изоморфным в **Ban** пространству E . В этом случае $\bigoplus_\infty \{E^* : \lambda \in \Lambda\}$ дополняемо в $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega, \mu) : \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty \{P : \lambda \in \Lambda\}$. Пространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega, \mu) : \lambda \in \Lambda\}$ имеет свойство Данфорда-Петтиса по предложению 3.11. Тогда из [[24], предложение 13.44] следует, что этим свойством обладает и его дополняемое подпространство $\bigoplus_\infty \{E^* : \lambda \in \Lambda\}$. \square

Теорема 3.13. Пусть A — банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, \mathcal{L}_1 - или \mathcal{L}_∞ -пространством. Тогда топологически проективные, инъективные и плоские A -модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.

Доказательство. Предположим, что A является \mathcal{L}_1 -пространством. Заметим, что \mathcal{L}_1 - и \mathcal{L}_∞ -пространства имеют свойство Данфорда-Петтиса [[22], предложение 1.30]. Теперь результат следует из предложения 3.9.

Предположим A является \mathcal{L}_∞ -пространством, тогда такова же и A_+ . Пусть J — топологически инъективный A -модуль, тогда по предложению 2.13 он ретракт

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(A_+, \ell_\infty(B_{J^*}))_{\mathbf{mod}_1-A} &\cong (A_+ \hat{\otimes} \ell_1(B_{J^*}))^*_{\mathbf{mod}_1-A} \cong \left(\bigoplus_1 \{A_+ : \lambda \in B_{J^*}\} \right)^* \\ &\cong \bigoplus_\infty \{A_+^* : \lambda \in B_{J^*}\} \end{aligned}$$

в $\mathbf{mod} - A$ и тем более в **Ban**. По предложению 3.12 последний модуль имеет свойство Данфорда-Петтиса. Так как J его ретракт, то он тоже обладает этим свойством [[24], предложение 13.44].

Если F топологически плоский A -модуль, то F^* топологически инъективен по предложению 2.21. Из предыдущего абзаца мы знаем, что тогда F^* имеет свойство Данфорда-Петтиса и, как следствие, этим свойством обладает сам модуль F .

Пусть P — топологически проективный A -модуль. По предположению 2.26 он топологически плоский и тогда из предыдущего абзаца мы видим, что P имеет свойство Данфорда-Петтиса. \square

Следствие 3.14. Пусть A — банахова алгебра, являющаяся, как банахово пространство, \mathcal{L}_1 - или \mathcal{L}_∞ -пространством. Тогда не существует топологически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A -модуля. Тем более не существует метрически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A -модуля.

Доказательство. Из теоремы 3.13 мы знаем, что любой топологически инъективный A -модуль имеет свойство Данфорда-Петтиса. С другой стороны не существует бесконечномерного рефлексивного банахова пространства с этим свойством [[24], примечание после предложения 13.42]. Итак, мы получили желаемый результат в контексте топологической инъективности. Так как пространство, сопряженное к рефлексивному снова рефлексивно, то из предложения 2.21 следует результат для топологической плоскости. Осталось вспомнить, что по предложению 2.26 каждый топологически проективный модуль является топологически плоским. Чтобы доказать последнее утверждение вспомним, что по предложению < 2.4 / 2.14

/ 2.23 > метрическая < проективность / инъективность / плоскость > влечет топологическую < проективность / инъективность / плоскость >. \square

Стоит сказать, что в относительной теории существуют примеры рефлексивных бесконечномерных относительно проективных, инъективных и плоских модулей над банаховыми алгебрами, являющимися \mathcal{L}_1 - или \mathcal{L}_∞ -пространствами. Приведем два примера. Первый связан с сверточной алгеброй $L_1(G)$ локально компактной группы G с мерой Хаара. Эта алгебра является \mathcal{L}_1 -пространством. В [[12], §6] и [26] было доказано, что для $1 < p < +\infty$ банахов $L_1(G)$ -модуль $L_p(G)$ является относительно < проективным / инъективным / плоским > тогда и только тогда, когда группа G < компактна / аменабельна / аменабельна >. Заметим, что любая компактная группа аменабельна [[27], предложение 3.12.1], и поэтому для компактной группы G модуль $L_p(G)$ будет относительно проективным, инъективным и плоским для всех $1 < p < +\infty$. Второй пример связан с алгеброй $c_0(\Lambda)$ для бесконечного множества Λ . Это \mathcal{L}_∞ -пространство. Алгебра $c_0(\Lambda)$ относительно бипроективна и аменабельна, поэтому $c_0(\Lambda)$ -модули $\ell_p(\Lambda)$ для $1 < p < \infty$ всегда являются относительно проективными, инъективными и плоскими.

Список литературы

- [1] А.Я. Хелемский. Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей. *Матем. сб.*, 204(7), 2013.
- [2] С.М. Штейнер. Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей. *Вестник Самарского государственного университета*, 9/1(110):49–57, 2013.
- [3] G. Köthe. Hebbare lokalkonvexe räume. *Mathematische Annalen*, 165(3):181–195, 1966.
- [4] A. Grothendieck. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L_1 . *Canad. J. Math*, 7:552–561, 1955.
- [5] А.Я. Хелемский. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*. М.:Наука, 1989.
- [6] P. Ramsden. *Homological properties of semigroup algebras*. PhD thesis, The University of Leeds, 2009.
- [7] Немеш Н. Т. Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр. *Математические заметки*, 99(4):526–536, 2016.
- [8] А.Я. Хелемский. *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*. М.:изд-во МГУ, 1986.
- [9] M.C. White. Injective modules for uniform algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):155–184, 1996.
- [10] H.E. Lacey. *The isometric theory of classical Banach spaces*. Springer, 1974.
- [11] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. *Handbook of the geometry of Banach spaces*, volume 2. Elsevier, 2001.

- [12] H.G. Dales and M.E. Polyakov. Homological properties of modules over group algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 89(2):390–426, 2004.
- [13] A.Ya. Helemskii. Metric version of flatness and hahn-banach type theorems for normed modules over sequence algebras. *Studia mathematica*, 206(2):135–160, 2011.
- [14] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski. Absolutely summing operators in \mathcal{L}_p -spaces and their applications. *Studia Mathematica*, 29(3):275–326, 1968.
- [15] C.P. Stegall and J.R. Retherford. Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to \mathcal{L}_1 -and \mathcal{L}_∞ -spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 163:457–492, 1972.
- [16] Ozawa N. Blecher D. P. Real positivity and approximate identities in banach algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 277(1):1–59, 2015.
- [17] D.P. Blecher and C.J. Read. Operator algebras with contractive approximate identities. *Journal of Functional Analysis*, 261(1):188–217, 2011.
- [18] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176. Elsevier, 1992.
- [19] A.W.M. Graven. Injective and projective banach modules. In *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, volume 82, pages 253–272. Elsevier, 1979.
- [20] А.Я. Хелемский. *Лекции по функциональному анализу*. МЦНМО, 2015.
- [21] M. González and J. Gutiérrez. The dunford–pettis property on tensor products. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 131, pages 185–192. Cambridge Univ Press, 2001.
- [22] J. Bourgain. *New classes of \mathcal{L}_p -spaces*. Springer, 1981.
- [23] F. Albiac and N.J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233. Springer, 2006.
- [24] M. Fabian and P. Habala. *Banach space theory*. Springer, 2011.
- [25] J. Bourgain. On the dunford-pettis property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 81(2):265–272, 1981.
- [26] G. Racher. Injective modules and amenable groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88(4):1023–1031, 2013.
- [27] J.-P. Pier. *Amenable locally compact groups*. Wiley-Interscience, 1984.