

УДК 517.986.225

Гомологическая тривиальность категории модулей  $L_p$ Н. Т. Немеш<sup>1</sup>

В статье дано полное описание топологически инъективных, топологически сюръективных, изометрических и коизометрических операторов умножения на функцию, действующих между  $L_p$ -пространствами  $\sigma$ -конечных пространств с мерой. Доказано, что все такие операторы обратимы слева или справа. Как следствие доказано, что в категории, состоящей из  $L_p$ -пространств для всех  $p \in [1, +\infty]$ , рассмотренных как левые банаховы модули над алгеброй ограниченных измеримых функций, все объекты являются метрически и топологически проективными, инъективными и плоскими модулями.

*Ключевые слова:* оператор умножения,  $L_p$ -пространства, проективность, инъективность, плоскость.

We prove that all objects of the category of  $L_p$ -spaces considered as Banach modules over the algebra of bounded measurable functions are projective, injective and flat.

*Key words:* multiplication operator,  $L_p$ -spaces, projectivity, injectivity, flatness.

**1. Введение.** В работе [1] А.Я. Хелемский дал определения метрически и топологически проективных и инъективных банаховых модулей над произвольной банаховой алгеброй. В работах [2, 3] дано прозрачное описание метрически проективных и плоских модулей над алгебрами последовательностей. Очевидно, дальнейшим развитием этой программы было бы решение аналогичных задач для алгебр измеримых функций. Уже в случае модулей, являющихся лебеговскими  $L_p$ -пространствами, мы сталкиваемся с проблемой отсутствия конкретного значения в точке у функции (точнее, у класса эквивалентности). Таким образом, уже класс лебеговских пространств представляет интерес. В данной работе мы покажем, что эти пространства, рассмотренные как банаховы модули над алгеброй ограниченных измеримых функций, гомологически тривиальны по отношению к категории, из этих пространств состоящей.

Пусть  $(\Omega, \Sigma)$  — измеримое пространство. Через  $B(\Omega)$  мы обозначаем банахову алгебру ограниченных комплекснозначных измеримых функций на  $\Omega$  с  $\sup$ -нормой. Через  $M(\Omega)$  мы обозначаем множество положительных  $\sigma$ -аддитивных  $\sigma$ -конечных мер на  $\Omega$ . Очевидно, что для каждой меры  $\mu \in M(\Omega)$  и каждого  $p \in [1, +\infty]$  пространство  $L_p(\Omega, \mu)$  является левым, правым и двусторонним банаховым  $B(\Omega)$ -модулем с поточечным внешним умножением. Так как алгебра  $B(\Omega)$  коммутативна, то без ограничения общности мы будем рассматривать только левые модули. Через  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}$  мы обозначим категорию левых банаховых  $B(\Omega)$ -модулей, состоящую из пространств  $L_p(\Omega, \mu)$  для некоторых мер  $\mu \in M(\Omega)$ . Морфизмы в  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}$  суть морфизмы банаховых  $B(\Omega)$ -модулей. Здесь и далее если  $\mathbf{C}$  — некоторая категория банаховых пространств или банаховых модулей с операторами в роли морфизмов, то  $\mathbf{C}_1$  — это категория с теми же объектами и лишь сжимающими морфизмами. Ключевым для нас будет следующий результат [4, теорема 4.1].

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  — локально компактное топологическое пространство,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $\mu, \nu \in M(\Omega)$ . Тогда существуют банахово пространство  $L_{p,q,\mu,\nu}(\Omega)$ , состоящее из некоторых борелевских комплекснозначных функций на  $\Omega$ , и изометрический изоморфизм

$$\mathcal{I}_{p,q,\mu,\nu} : L_{p,q,\mu,\nu}(\Omega) \rightarrow \text{Hom}_{B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu)), g \mapsto (f \mapsto g \cdot f).$$

Эта теорема была доказана для локально компактных пространств  $\Omega$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй, но сходное доказательство работает и для произвольных измеримых пространств. Итак, морфизмы категории  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}$  — это операторы умножения. Поэтому для описания метрически и топологически проективных, инъективных и плоских модулей достаточно знать строение допустимых эпиморфизмов и мономорфизмов в категориях  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}_1$  и  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}$ . Другими словами, нам требуется описание топологически сюръективных, топологически инъективных, коизометрических и изометрических операторов умножения между  $L_p$ -пространствами.

<sup>1</sup> Немеш Норберт Тиборович, e-mail: nemeshnorbert@yandex.ru.

Все стандартные факты и определения теории меры мы берем из монографии [5]. В дальнейшем мы будем рассматривать только  $\sigma$ -конечные положительные  $\sigma$ -аддитивные меры. Следовательно, мы можем считать, что все атомы имеют конечную меру и каждое атомическое пространство содержит не более чем счетное число атомов.

Все линейные пространства в настоящей работе рассматриваются над полем  $\mathbb{C}$ . Для заданного измеримого пространства  $(\Omega, \Sigma)$  через  $L_0(\Omega, \Sigma)$  мы обозначаем линейное пространство измеримых комплекснозначных функций на  $\Omega$ . Для  $p = \infty$  мы по определению полагаем  $1/p = 0$ . Все равенства и неравенства понимаются с точностью до множеств меры 0. Напомним, что каждое пространство с мерой имеет атомическую и неатомическую часть, т.е. существуют атомическая мера  $\mu_1 : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  и неатомическая мера  $\mu_2 : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ , такие, что  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  и  $\mu_1 \perp \mu_2$  (т.е. существуют такие дизъюнктные измеримые множества  $\Omega_a^\mu, \Omega_{na}^\mu \in \Sigma$ , что  $\mu_1(\Omega_{na}^\mu) = \mu_2(\Omega_a^\mu) = 0$  и  $\Omega = \Omega_a^\mu \cup \Omega_{na}^\mu$ ).

С позиций функционального анализа, точки в атоме неотличимы и ограничение любой функции из  $L_p$  на атом есть постоянная функция. Действительно, если  $\Omega'$  — атом, то для почти всех  $\omega' \in \Omega'$  имеем  $f(\omega') = \mu(\Omega')^{-1} \int_{\Omega'} f(\omega) d\mu(\omega)$ . Отсюда мы получаем изометрический изоморфизм:  $J_p : L_p(\Omega', \mu|_{\Omega'}) \rightarrow \ell_p(\{1\}) : f \mapsto \left(1 \mapsto \mu(\Omega')^{1/p-1} \int_{\Omega'} f(\omega) d\mu(\omega)\right)$ . Следовательно, если атомическое пространство представлено в виде дизъюнктного объединения своих атомов  $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ , то имеет место изометрический изоморфизм  $\tilde{I}_p : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow \ell_p(\Lambda) : f \mapsto (\lambda \mapsto J_p(f|_{\Omega_\lambda})(1))$ .

Классификация  $L_p$ -пространств неатомических мер несколько сложнее, но она нам не понадобится. Нам достаточно знать, что меры измеримых подмножеств в неатомических пространствах с мерой в некотором смысле меняются непрерывно, а именно если  $E$  — измеримое множество положительной меры, не содержащее атомов, то для любого  $t \in [0, \mu(E)]$  существует измеримое подмножество  $F \subset E$ , такое, что  $\mu(F) = t$ . Также напомним теорему Лебега о разложении мер: если  $(\Omega, \Sigma, \mu), (\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой, то существуют неотрицательная измеримая функция  $\rho_{\nu, \mu}$ ,  $\sigma$ -конечная мера  $\nu_s : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  и множество  $\Omega_s^{\nu, \mu} \in \Sigma$ , такие, что  $\nu = \rho_{\nu, \mu} \cdot \mu + \nu_s$  и  $\mu \perp \nu_s$  (т.е.  $\mu(\Omega_s^{\nu, \mu}) = \nu_s(\Omega_s^{\nu, \mu}) = 0$  для  $\Omega_s^{\nu, \mu} = \Omega \setminus \Omega_s^{\nu, \mu}$ ). Наконец, напомним, что для любой положительной функции  $\rho \in L_0(\Omega, \Sigma)$  на пространстве с мерой  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  имеет место изометрический изоморфизм  $\tilde{I}_p : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow L_p(\Omega, \rho \cdot \mu) : f \mapsto \rho^{-1/p} \cdot f$ .

**2. Классификация операторов умножения.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  и  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой и одной и той же  $\sigma$ -алгеброй измеримых множеств. Для заданной функции  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$  и чисел  $p, q \in [1, +\infty]$  мы определяем оператор умножения

$$M_g : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow L_q(\Omega, \nu), f \mapsto g \cdot f.$$

Конечно, требуются определенные ограничения на  $g, \mu$  и  $\nu$ , чтобы оператор  $M_g$  был корректно определен, но мы предполагаем, что это всегда выполнено. Для заданного  $E \in \Sigma$  через  $M_g^E$  мы обозначаем оператор

$$M_g^E : L_p(E, \mu|_E) \rightarrow L_q(E, \nu|_E), f \mapsto g|_E \cdot f.$$

Он корректно определен, так как равенство  $f|_{\Omega \setminus E} = 0$  влечет  $M_g(f)|_{\Omega \setminus E} = 0$ . Как простое следствие данной импликации мы получаем следующие утверждения:

- (i)  $\text{Ker}(M_g) = \{f \in L_p(\Omega, \mu) : f|_{\Omega \setminus Z_g} = 0\}$ , т.е. оператор  $M_g$  инъективен, если и только если  $\mu(Z_g) = 0$ ;
- (ii)  $\text{Im}(M_g) \subset \{h \in L_q(\Omega, \nu) : h|_{Z_g} = 0\}$ , поэтому если оператор  $M_g$  сюръективен, то  $\mu(Z_g) = 0$ .

Здесь мы использовали обозначение  $Z_g = g^{-1}(\{0\})$ . Мы хотим классифицировать операторы умножения в соответствии со следующим определением.

**Определение 1.** Если  $T : E \rightarrow F$  — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами  $E$  и  $F$ , то  $T$  называется:

- (i) *c-топологически инъективным*, если  $\|x\|_E \leq c\|T(x)\|_F$  для всех  $x \in E$ ;
- (ii) *строго c-топологически сюръективным*, если для любого  $y \in F$  существует вектор  $x \in E$ , такой, что  $T(x) = y$  и  $\|x\|_E \leq c\|y\|_F$ ;
- (iii) *c-топологически сюръективным*, если для любого  $c' > c$  и любого  $y \in F$  существует вектор  $x \in E$ , такой, что  $T(x) = y$  и  $\|x\|_E < c'\|y\|_F$ ;
- (iv) *(строго) коизометрическим*, если он (строго) 1-топологически сюръективен с нормой не более 1.

Если конкретное значение константы  $c$  для нас не важно, то мы будем просто говорить, что оператор топологически инъективен или топологически сюръективен. Для заданного измеримого множества  $E \in \Sigma$  и функции  $f \in L_0(E, \Sigma|_E)$  через  $\tilde{f}$  мы обозначим продолжение функции  $f$ , такое, что  $\tilde{f}|_E = f$  и  $\tilde{f}|_{\Omega \setminus E} = 0$ . Далее, нам пригодится следующее простое равенство:

$$\|f\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \left\| \left( \|f|_{\Omega_\lambda}\|_{L_p(\Omega_\lambda, \mu|_{\Omega_\lambda})} : \lambda \in \Lambda \right) \right\|_{\ell_p(\Lambda)},$$

верное для любого представления  $\Omega$  в виде дизъюнктного объединения измеримых подмножеств  $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ . Хотя мы и не нашли нижеследующего результата в литературе, мы не будем его доказывать, так как он является простой проверкой определений.

**Предложение 1.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой и  $p, q \in [1, +\infty]$ . Допустим, имеется представление  $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$  в виде конечного дизъюнктного объединения измеримых подмножеств. Тогда:

(i) оператор  $M_g$  топологически инъективен тогда и только тогда, когда операторы  $M_g^{\Omega_\lambda}$  топологически инъективны для всех  $\lambda \in \Lambda$ ;

(ii) оператор  $M_g$  топологически сюръективен тогда и только тогда, когда операторы  $M_g^{\Omega_\lambda}$  топологически сюръективны для всех  $\lambda \in \Lambda$ ;

(iii) если  $M_g$  изометричен, то таковы и  $M_g^{\Omega_\lambda}$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ ;

(iv) если  $M_g$  коизометричен, то таковы и  $M_g^{\Omega_\lambda}$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ .

**Предложение 2.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Если  $\mu \perp \nu$ , то  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  есть нулевой оператор.

**Доказательство.** В силу того, что  $\mu \perp \nu$ , существует множество  $\Omega_s^{\nu, \mu} \in \Sigma$ , такое, что  $\mu(\Omega_s^{\nu, \mu}) = \nu(\Omega_c^{\nu, \mu}) = 0$ , где  $\Omega_c^{\nu, \mu} = \Omega \setminus \Omega_s^{\nu, \mu}$ . Так как  $\mu(\Omega_s^{\nu, \mu}) = 0$ , то  $\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = \chi_\Omega$  в  $L_p(\Omega, \mu)$  и  $\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = 0$  в  $L_q(\Omega, \nu)$ . Следовательно, для любого  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  мы имеем  $M_g(f) = M_g(f \cdot \chi_\Omega) = M_g(f \cdot \chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}) = g \cdot f \cdot \chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = 0$ . Отметим, что равенство  $M_g = 0$  не влечет  $g = 0$ .

Напомним следующий простой факт: линейный оператор  $M_g : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow L_p(\Omega, \mu)$  ограничен и корректно определен тогда и только тогда, когда  $g \in L_\infty(\Omega, \mu)$ . Как следствие оператор  $M_g$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $C \geq |g| \geq c$  для некоторых  $C, c > 0$ .

Легко проверить, что для атомического пространства с мерой  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  оператор  $\widetilde{M}_{\widetilde{g}} := \widetilde{I}_q M_g \widetilde{I}_p^{-1} \in \mathcal{B}(\ell_p(\Lambda), \ell_q(\Lambda))$  есть оператор умножения на функцию  $\widetilde{g} : \Lambda \rightarrow \mathbb{C} : \lambda \mapsto \mu(\Omega_\lambda)^{1/q-1/p-1} \int_{\Omega_\lambda} g(\omega) d\mu(\omega)$ , где  $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  есть не более чем счетное семейство непересекающихся атомов в  $\Omega$ . Поскольку  $\widetilde{I}_p$  и  $\widetilde{I}_q$  являются изометрическими изоморфизмами, оператор  $M_g$  топологически инъективен тогда и только тогда, когда  $\widetilde{M}_{\widetilde{g}}$  топологически инъективен.

**Предложение 3.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — атомическое пространство с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \mu))$  — топологически инъективный оператор;

(ii)  $|g| \geq c$  для некоторого  $c > 0$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  имеет конечное число атомов.

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). Из предположения получаем, что оператор  $\widetilde{M}_{\widetilde{g}}$  топологически инъективен, т.е.  $\|\widetilde{M}_{\widetilde{g}}(x)\|_{\ell_q(\Lambda)} \geq c\|x\|_{\ell_p(\Lambda)}$  для всех  $x \in \ell_p(\Lambda)$  и некоторого  $c > 0$ . Пусть  $\{\Omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  — не более чем счетное разложение  $\Omega$  на непересекающиеся атомы. Мы рассмотрим два случая.

(1) Пусть  $p \neq q$ . Допустим, что множество  $\Lambda$  счетно. Если  $p, q < +\infty$ , то мы приходим к противоречию, так как по теореме Питта [6, следствие 2.1.6] не существует вложения между пространствами  $\ell_p(\Lambda)$  и  $\ell_q(\Lambda)$  для счетного  $\Lambda$  и  $1 \leq p, q < +\infty$ ,  $p \neq q$ .

Если  $1 \leq p < +\infty$  и  $q = +\infty$ , то рассмотрим произвольное конечное подмножество  $F \subset \Lambda$ . Тогда мы имеем неравенства  $\sup_{\lambda \in \Lambda} |\widetilde{g}(\lambda)| \geq \|\widetilde{M}_{\widetilde{g}}(\sum_{\lambda \in F} e_\lambda)\|_{\ell_\infty(\Lambda)} \geq c \|\sum_{\lambda \in F} e_\lambda\|_{\ell_p(\Lambda)} = c \text{Card}(F)^{1/p}$ . Так как множество  $\Lambda$  счетно, то  $\sup_{\lambda \in \Lambda} |\widetilde{g}(\lambda)| \geq c \sup_{F \subset \Lambda} \text{Card}(F)^{1/p} = +\infty$ . С другой стороны, поскольку  $\widetilde{M}_{\widetilde{g}}$  — ограниченный оператор, мы получаем, что  $\sup_{\lambda \in \Lambda} |\widetilde{g}(\lambda)| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\widetilde{M}_{\widetilde{g}}\| \|e_\lambda\|_{\ell_p(\Lambda)} = \|\widetilde{M}_{\widetilde{g}}\| < +\infty$ . Противоречие.

Если  $1 \leq q < +\infty$  и  $p = +\infty$ , то из топологической инъективности  $\widetilde{M}_{\widetilde{g}}$  следует наличие вложения несепарабельного пространства  $l_\infty(\Lambda) \cong \text{Im}(\widetilde{M}_{\widetilde{g}})$  в сепарабельное пространство  $\ell_q(\Lambda)$ . Противоречие. Во всех случаях мы получили противоречие, значит, пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  имеет лишь конечное число атомов. Мы знаем, что  $g$  однозначно определяется своими значениями  $k_\lambda \in \mathbb{C}$  на атомах. Для того чтобы оператор  $M_g$  был по крайней мере инъективным, все эти значения должны быть ненулевыми. Так как множество  $\Lambda$  конечно, то мы получаем, что  $|g| \geq c := \min_{\lambda \in \Lambda} |k_\lambda| > 0$ .

(2) Пусть  $p = q$ , тогда для всех  $\lambda \in \Lambda$  и  $\omega \in \Omega_\lambda$  мы имеем  $|g(\omega)| = |\widetilde{g}(\lambda)| = \|\widetilde{M}_{\widetilde{g}}(e_\lambda)\|_{\ell_q(\Lambda)} \geq c \|e_\lambda\|_{\ell_p(\Lambda)} = c$ . Поскольку  $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ , мы получаем  $|g| \geq c$ .

(ii)  $\implies$  (i). Из предположения легко получить, что  $|g| \geq c$ . Если  $p \neq q$ , то мы дополнительно предполагаем, что  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  имеет конечное число атомов. Следовательно, пространство  $L_p(\Omega, \mu)$  конечномерно и оператор  $M_g$  топологически инъективен, так как  $g$  не принимает нулевых значений на атомах. Если

$p = q$ , то тогда, очевидно, из ограничений на  $g$  получаем, что  $M_g$  топологически инъективен.

**Предложение 4.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — пространство с мерой, не содержащее атомов,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \mu))$  — топологически инъективный оператор;
- (ii)  $|g| \geq c$  для некоторого  $c > 0$ , и  $p = q$ .

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). Согласно условию  $\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \mu)} \geq c\|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$  для всех  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  и некоторого  $c > 0$ . Мы рассмотрим три случая.

Пусть  $p > q$ , тогда существуют  $C > 0$  и множество  $E \in \Sigma$  положительной меры, такие, что  $|g|_E \leq C$ , иначе  $M_g$  не определен корректно. Возьмем произвольную последовательность  $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$  подмножеств  $E$ , такую, что  $\mu(E_n) = 2^{-n}$ . Заметим, что

$$c \leq \|M_g(\chi_{E_n})\|_{L_q(\Omega, \mu)} / \|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega, \mu)} \leq C \|\chi_{E_n}\|_{L_q(\Omega, \mu)} / \|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega, \mu)} \leq C \mu(E_n)^{1/q-1/p}.$$

Поэтому из неравенства  $p > q$  мы получим противоречие, так как

$$c \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} C \mu(E_n)^{1/q-1/p} = C \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^{n(1/p-1/q)} = 0.$$

Теперь пусть  $p < q$ , тогда существуют  $c' > 0$  и множество  $E \in \Sigma$  положительной меры, такие, что  $|g|_E > c'$ , иначе  $g = 0$  и оператор  $M_g$  не будет топологически инъективным. Возьмем произвольную последовательность  $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$  подмножеств  $E$ , такую, что  $\mu(E_n) = 2^{-n}$ . Заметим, что

$$\|M_g\| \geq \|M_g(\chi_{E_n})\|_{L_q(\Omega, \mu)} / \|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega, \mu)} \geq c' \|\chi_{E_n}\|_{L_q(\Omega, \mu)} / \|\chi_{E_n}\|_{L_p(\Omega, \mu)} \geq c' \mu(E_n)^{1/q-1/p}.$$

Поэтому из неравенства  $p < q$  мы получим противоречие, так как

$$\|M_g\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} c' \mu(E_n)^{1/q-1/p} \geq c' \sup_{n \in \mathbb{N}} 2^{n(1/p-1/q)} = +\infty.$$

Наконец, пусть  $p = q$ . Фиксируем  $c' < c$ . Допустим, что найдется множество  $E \in \Sigma$  положительной меры, такое, что  $|g|_E < c'$ . Тогда  $\|M_g(\chi_E)\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|g \cdot \chi_E\|_{L_p(\Omega, \mu)} \leq c' \|\chi_E\|_{L_p(\Omega, \mu)} < c \|\chi_E\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ . Противоречие. Так как  $c' < c$  произвольно, то мы заключаем, что  $|g|_E \geq c$  для любого множества  $E \in \Sigma$  положительной меры. Значит,  $|g| \geq c$ .

(ii)  $\implies$  (i). Импликация очевидна.

**Предложение 5.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — произвольное пространство с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g, \rho \in L_0(\Omega, \Sigma)$ , причем  $\rho$  — неотрицательная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \rho \cdot \mu))$  — топологически инъективный оператор;
- (ii)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \rho \cdot \mu))$  — топологический изоморфизм;

(iii) функция  $\rho$  положительна,  $|g \cdot \rho^{1/q}| \geq c$  для некоторого  $c > 0$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из конечного числа атомов.

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (iii). Так как  $M_g(\chi_{\rho^{-1}(\{0\})}) = 0$  в  $L_q(\Omega, \rho \cdot \mu)$  и оператор  $M_g$  топологически инъективен, то функция  $\rho$  должна быть положительной. Следовательно, корректно определен изометрический изоморфизм  $\bar{I}_q : L_q(\Omega, \mu) \rightarrow L_q(\Omega, \rho \cdot \mu), f \mapsto \rho^{-1/q} \cdot f$ . Тогда оператор  $M_{g \cdot \rho^{1/q}} = \bar{I}_q^{-1} M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \mu))$  также топологически инъективен. Рассмотрим представление  $\Omega = \Omega_a^\mu \cup \Omega_{na}^\mu$  пространства  $\Omega$  в виде объединения атомической и неатомической части. По предложению 1 оператор  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  топологически инъективен тогда и только тогда, когда топологически инъективны операторы  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}^{\Omega_a^\mu}$  и  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}^{\Omega_{na}^\mu}$ . Осталось воспользоваться предложениями 3, 4.

(iii)  $\implies$  (i). Используя предложения 3, 4, мы видим, что оператор  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  топологически инъективен. Так как функция  $\rho$  положительна, то существует изометрический изоморфизм  $\bar{I}_q$ . Следовательно, оператор  $M_g = \bar{I}_q M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  также топологически инъективен.

(i)  $\implies$  (ii). Как мы показали ранее, оператор  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  топологически инъективен и  $\bar{I}_q$  является изометрическим изоморфизмом. Если  $p = q$ , то из предыдущих рассуждений следует, что  $|g \cdot \rho^{1/q}| \geq c > 0$ . Также мы имеем неравенство  $C \geq |g \cdot \rho^{1/q}|$  для некоторого  $C > 0$ , поскольку  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  ограничен. Таким образом,  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  является топологическим изоморфизмом. Если  $p \neq q$ , то по предыдущим рассуждениям пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из конечного числа атомов и функция  $g \cdot \rho^{1/q}$  не принимает нулевых значений ни на

одном атоме. Следовательно,  $M_{g,\rho^{1/q}}$  — инъективный оператор между конечномерными пространствами одинаковой размерности  $\text{Card}(\Lambda)$ , поэтому он является изоморфизмом. Значит,  $M_g = \bar{I}_q M_{g,\rho^{1/q}}$  является топологическим изоморфизмом как композиция топологических изоморфизмов.

(ii)  $\implies$  (i). Импликация очевидна.

**Теорема 2.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — топологически инъективный оператор;

(ii)  $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$  — топологически инъективный оператор;

(iii) функция  $\rho_{\nu,\mu}|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}$  положительна,  $|g \cdot \rho_{\nu,\mu}^{1/q}|_{\Omega_c^{\nu,\mu}} \geq c$  для некоторого  $c > 0$ , если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из конечного числа атомов.

**Доказательство.** По предложению 1, оператор  $M_g$  топологически инъективен тогда и только тогда, когда операторы  $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}} : L_p(\Omega_c^{\nu,\mu}, \mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}) \rightarrow L_q(\Omega_c^{\nu,\mu}, \rho_{\nu,\mu} \cdot \mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})$  и  $M_g^{\Omega_s^{\nu,\mu}} : L_p(\Omega_s^{\nu,\mu}, \mu|_{\Omega_s^{\nu,\mu}}) \rightarrow L_q(\Omega_s^{\nu,\mu}, \nu_s|_{\Omega_s^{\nu,\mu}})$  топологически инъективны. По предложению 2, оператор  $M_g^{\Omega_s^{\nu,\mu}}$  нулевой. Так как  $\mu(\Omega_s^{\nu,\mu}) = 0$ , то пространство  $L_p(\Omega_s^{\nu,\mu}, \mu|_{\Omega_s^{\nu,\mu}}) = \{0\}$ , поэтому оператор  $M_g^{\Omega_s^{\nu,\mu}}$  топологически инъективен. Следовательно, топологическая инъективность  $M_g$  эквивалентна топологической инъективности оператора  $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ . Осталось применить предложение 5.

**Теорема 3.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — топологически инъективный оператор;

(ii)  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega, \nu), L_p(\Omega, \mu))$  — топологически сюръективный левый обратный оператор к  $M_g$ .

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). Из условия следует, что оператор  $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$  топологически инъективен. По предложению 5 оператор  $M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$  обратим и, очевидно,  $(M_g^{\Omega_c^{\nu,\mu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}$ . Оператор  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}$  ограничен, поскольку для любого  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  мы имеем

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}(h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\nu,\mu}, \mu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} \leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}\| \|h|_{\Omega_c^{\nu,\mu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\nu,\mu}, \nu|_{\Omega_c^{\nu,\mu}})} \leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu,\mu}}\| \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}.$$

Так как  $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu,\mu}) = 0$ , то  $\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = \chi_\Omega$  в  $L_p(\Omega, \mu)$ , поэтому для всех  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  выполнено  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(M_g(f)) = f \cdot \chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}} = f \cdot \chi_\Omega = f$ . Это означает, что  $M_g$  имеет левый обратный оператор умножения. Он топологически сюръективен, так как для любого  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  мы можем рассмотреть функцию  $h = M_g(f)$  и получить, что  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu,\mu}}/g}(h) = f$  и  $\|h\|_{L_q(\Omega, \nu)} \leq \|M_g\| \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ .

(ii)  $\implies$  (i). Импликация очевидна.

**Предложение 6.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — пространство с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g, \rho \in L_0(\Omega, \Sigma)$ , причем  $\rho$  — неотрицательная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \rho \cdot \mu))$  — изометрический оператор;

(ii)  $M_g$  — изометрический изоморфизм;

(iii) функция  $\rho$  положительна,  $|g \cdot \rho^{1/q}| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из одного атома.

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (iii). Согласно условию, оператор  $M_g$  топологически инъективен. Тогда по теореме 2 функция  $\rho$  положительна, и поэтому имеет место изометрический изоморфизм  $\bar{I}_q : L_q(\Omega, \mu) \rightarrow L_q(\Omega, \rho \cdot \mu)$ ,  $f \mapsto \rho^{-1/q} \cdot f$ . Следовательно, оператор  $M_{g,\rho^{1/q}} = \bar{I}_q^{-1} M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \mu))$  изометричен как композиция изометрий. Введем обозначение  $\bar{g} = g \cdot \rho^{1/q}$ . Мы рассмотрим два случая.

Пусть  $p = q$ . Допустим, существует множество  $E \in \Sigma$  положительной меры, такое, что  $|\bar{g}|_E < 1$ , тогда  $\|M_{\bar{g}}(\chi_E)\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|\bar{g} \cdot \chi_E\|_{L_p(\Omega, \mu)} < \|\chi_E\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|M_{\bar{g}}(\chi_E)\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ . Противоречие, следовательно,  $|\bar{g}| \geq 1$ . Аналогично можно показать, что  $|\bar{g}| \leq 1$ , значит,  $|g \cdot \rho^{1/q}| = 1 = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$ .

Пусть  $p \neq q$ . По теореме 2, пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из конечного числа атомов. Предположим, что есть, по крайней мере, два различных атома  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Рассмотрим функции  $h_\lambda = \|\chi_{\Omega_\lambda}\|_{L_p(\Omega, \mu)}^{-1} \chi_{\Omega_\lambda}$ , где  $\lambda \in \{1, 2\}$ . Так как  $h_1 h_2 = 0$ , то  $\|M_{\bar{g}}(h_1) + M_{\bar{g}}(h_2)\|_{L_q(\Omega, \mu)} = \|h_1 + h_2\|_{L_p(\Omega, \mu)} = 2^{1/p}$ . Аналогично  $\|M_{\bar{g}}(h_1) + M_{\bar{g}}(h_2)\|_{L_q(\Omega, \mu)} = \|(\|M_{\bar{g}}(h_\lambda)\|_{L_q(\Omega, \mu)} : \lambda \in \{1, 2\})\|_{\ell_q(\{1, 2\})} = 2^{1/q}$ . Мы получили противоречие, так как  $p \neq q$ . Таким образом, пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из одного атома. Через  $c$  мы обозначим константное значение функции  $\bar{g}$ , тогда легко проверить, что  $\|M_{\bar{g}}(f)\|_{L_q(\Omega, \mu)} = \mu(\Omega)^{1/q-1/p} |c| \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ .

Следовательно  $|g \cdot \rho^{1/q}| = |\bar{g}| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$ .

(iii)  $\implies$  (i). Проверяется непосредственно.

(i)  $\implies$  (ii). В силу предположения оператор  $M_g$  топологически инъективен, и по предложению 5 он является изоморфизмом, который согласно условию изометричен.

(ii)  $\implies$  (i). Импликация очевидна.

**Теорема 4.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — изометрический оператор;

(ii)  $M_g^{\Omega_c^{\nu, \mu}}$  — изометрический оператор;

(iii) функция  $\rho_{\nu, \mu}|_{\Omega_c^{\nu, \mu}}$  положительна,  $|g \cdot \rho_{\nu, \mu}|_{\Omega_c^{\nu, \mu}}^{1/q} = \mu(\Omega_c^{\nu, \mu})^{1/p-1/q}$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из одного атома.

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). Следует из предложения 1.

(ii)  $\implies$  (i). Рассмотрим произвольную функцию  $f \in L_p(\Omega, \mu)$ . Так как  $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu, \mu}) = 0$ , то  $\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = \chi_\Omega$  в  $L_p(\Omega, \mu)$ . Как следствие  $f = f\chi_\Omega = f\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = f\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}$  и

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|M_g(f\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}})\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|M_g^{\Omega_c^{\nu, \mu}}(f|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})\|_{L_q(\Omega_c^{\nu, \mu}, \nu|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})} = \|f|_{\Omega_c^{\nu, \mu}}\|_{L_p(\Omega_c^{\nu, \mu}, \mu|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})}.$$

Так как  $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu, \mu}) = 0$ , то  $\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|f|_{\Omega_c^{\nu, \mu}}\|_{L_p(\Omega_c^{\nu, \mu}, \mu|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})} = \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ , значит оператор  $M_g$  изометричен.

(ii)  $\iff$  (iii). Следует из предложения 6.

**Теорема 5.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — изометрический оператор;

(ii)  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega, \nu), L_p(\Omega, \mu))$  — строго коизометрический левый обратный оператор к  $M_g$ .

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). По предложению 1 оператор  $M_g^{\Omega_c^{\nu, \mu}}$  изометричен, и тогда по предложению 6 он обратим, причем, очевидно, что  $(M_g^{\Omega_c^{\nu, \mu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu, \mu}}$ . Так как оператор  $M_g^{\Omega_c^{\nu, \mu}}$  изометричен, то таков же и его обратный. Оператор  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}$  сжимающий, поскольку для всех  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  выполнено  $\|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\nu, \mu}}(h|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\nu, \mu}, \mu|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})} = \|h|_{\Omega_c^{\nu, \mu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\nu, \mu}, \nu|_{\Omega_c^{\nu, \mu}})} \leq \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ . Так как  $\mu(\Omega \setminus \Omega_c^{\nu, \mu}) = 0$ , то  $\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = \chi_\Omega$  в  $L_p(\Omega, \mu)$ , поэтому для любой функции  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  мы имеем  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}(M_g(f)) = f \cdot \chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}} = f \cdot \chi_\Omega = f$ . Это значит, что  $M_g$  имеет левый обратный оператор умножения. Рассмотрим произвольную функцию  $f \in L_p(\Omega, \mu)$ , тогда для  $h = M_g(f)$  выполнено  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}(h) = f$  и  $\|h\|_{L_q(\Omega, \nu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ . Следовательно, оператор  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}$  строго 1-топологически сюръективный, но он также сжимающий и, значит, строго коизометрический.

(ii)  $\implies$  (i). Для произвольной функции  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  найдется функция  $h \in L_q(\Omega, \nu)$ , такая, что  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}(h) = f$  и  $\|h\|_{L_q(\Omega, \nu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ . Следовательно, выполнено неравенство

$$\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}(h))\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}h\|_{L_q(\Omega, \nu)} \leq \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}.$$

С другой стороны,  $M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}$  сжимающий оператор и левый обратный оператор к  $M_g$ , поэтому  $\|f\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|M_{\chi_{\Omega_c^{\nu, \mu}}/g}(M_g(f))\|_{L_p(\Omega, \mu)} \leq \|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ . Так как функция  $f$  произвольна, то из обоих неравенств мы заключаем, что оператор  $M_g$  изометричен.

Описание топологически сюръективных операторов умножения получить несколько проще. Мы покажем, что все такие операторы обратимы справа. Большинство доказательств аналогичны доказательствам для топологически инъективных операторов.

**Предложение 7.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — пространство с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g, \rho \in L_0(\Omega, \Sigma)$ , причем  $\rho$  — неотрицательная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \rho \cdot \nu), L_q(\Omega, \nu))$  — топологически сюръективный оператор;

(ii)  $M_g$  — топологический изоморфизм;

(iii) функция  $\rho$  положительна,  $|g \cdot \rho^{-1/p}| \geq c$  для некоторого  $c > 0$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из конечного числа атомов.

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (iii). Рассмотрим множество  $E = \rho^{-1}(\{0\})$ , тогда, очевидно,  $\chi_E = 0$  в  $L_q(\Omega, \rho \cdot \mu)$ . Теперь для любой функции  $f \in L_p(\Omega, \rho \cdot \nu)$  имеем  $M_g(f)\chi_E = M_g(f \cdot \chi_E) = 0$  в  $L_q(\Omega, \nu)$ , следова-

тельно,  $\text{Im}(M_g) \subset \{h \in L_q(\Omega, \nu) : h|_E = 0\}$ . Так как оператор  $M_g$  сюръективен, то  $\nu(E) = 0$ . Значит,  $\rho$  — положительная функция и корректно определен изометрический изоморфизм  $\bar{I}_p : L_p(\Omega, \nu) \rightarrow L_p(\Omega, \rho \cdot \nu)$ ,  $f \mapsto \rho^{-1/p} \cdot f$ . Поскольку  $M_g$  топологически сюръективен, то таков же и  $M_{g \cdot \rho^{-1/p}} = M_g \bar{I}_p \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \nu), L_q(\Omega, \nu))$ . В частности, оператор  $M_{g \cdot \rho^{-1/p}}$  сюръективен и, как было отмечено в начале статьи, инъективен. Таким образом,  $M_{g \cdot \rho^{-1/p}}$  биективен, и по теореме Банаха об обратном операторе  $M_g$  — изоморфизм. Осталось применить предложение 5.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Из предложения 5 следует, что оператор  $M_{g \cdot \rho^{-1/p}}$  топологически сюръективен и корректно определен изометрический изоморфизм  $\bar{I}_p$ . Таким образом,  $M_g = M_{g \cdot \rho^{-1/p}} \bar{I}_p^{-1}$  также топологически сюръективен.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Как мы показали ранее, оператор  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  топологически сюръективен и  $\bar{I}_q$  является изометрическим изоморфизмом. По предложению 5 оператор  $M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  — топологический изоморфизм. Таким образом,  $M_g = \bar{I}_q M_{g \cdot \rho^{1/q}}$  тоже является топологическим изоморфизмом как композиция топологических изоморфизмов.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Импликация очевидна.

**Теорема 6.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — топологически сюръективный оператор;

(ii)  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  — топологический изоморфизм;

(iii) функция  $\rho_{\mu, \nu}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  неотрицательна,  $|g \cdot \rho_{\mu, \nu}^{-1/p}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}} \geq c$  для некоторого  $c > 0$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из конечного числа атомов.

**Доказательство.** По предложению 1 оператор  $M_g$  топологически сюръективен тогда и только тогда, когда операторы  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}} : L_p(\Omega_c^{\mu, \nu}, \rho_{\mu, \nu} \cdot \nu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}) \rightarrow L_q(\Omega_c^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})$  и  $M_g^{\Omega_s^{\mu, \nu}} : L_p(\Omega_s^{\mu, \nu}, \mu_s|_{\Omega_s^{\mu, \nu}}) \rightarrow L_q(\Omega_s^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_s^{\mu, \nu}})$  топологически сюръективны. По предложению 2 оператор  $M_g^{\Omega_s^{\mu, \nu}}$  нулевой. Так как  $\nu(\Omega_s^{\mu, \nu}) = 0$ , то пространство  $L_p(\Omega_s^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_s^{\mu, \nu}}) = \{0\}$ , следовательно,  $M_g^{\Omega_s^{\mu, \nu}}$  топологически сюръективен. Таким образом, топологическая сюръективность оператора  $M_g$  эквивалентна топологической сюръективности  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$ . Теперь остается применить предложение 7.

**Теорема 7.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — топологически сюръективный оператор;

(ii)  $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega, \nu), L_p(\Omega, \mu))$  — топологически инъективный правый обратный оператор к  $M_g$ .

**Доказательство.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Из условия следует, что оператор  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  топологически сюръективен. По предложению 7 оператор  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  обратим, причем, очевидно,  $(M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$ . Оператор  $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}$  ограничен, поскольку для любого  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  выполнено

$$\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\mu, \nu}, \mu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} \leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu, \nu}}\| \|h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} \leq \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu, \nu}}\| \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}.$$

Так как  $\nu(\Omega \setminus \Omega_c^{\mu, \nu}) = 0$ , то  $\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}} = \chi_\Omega$ , поэтому  $M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)) = h \cdot \chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}} = h \cdot \chi_\Omega = h$ . Это означает, что  $M_g$  имеет правый обратный оператор умножения. Он топологически инъективен, поскольку для любой функции  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  выполнено неравенство  $\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega, \mu)} \geq \|M_g\| \|M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h))\|_{L_q(\Omega, \nu)} \geq \|M_g\| \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Импликация очевидна.

**Предложение 8.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — пространство с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g, \rho \in L_0(\Omega, \Sigma)$ , причем  $\rho$  — неотрицательная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \rho \cdot \nu), L_q(\Omega, \nu))$  — коизометрический оператор;

(ii)  $M_g$  — изометрический изоморфизм;

(iii) функция  $\rho$  неотрицательна,  $|g \cdot \rho^{-1/p}| = \mu(\Omega)^{1/p-1/q}$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из одного атома.

**Доказательство.** (i)  $\Rightarrow$  (iii). По условию оператор  $M_g$  топологически сюръективен, и по предложению 7 функция  $\rho$  положительна. Таким образом, имеет место изометрический изоморфизм  $\bar{I}_p : L_p(\Omega, \nu) \rightarrow L_p(\Omega, \rho \cdot \nu)$ ,  $f \mapsto \rho^{-1/p} \cdot f$ . Так как оператор  $M_g$  коизометричен, то таков же и оператор  $M_{g \cdot \rho^{-1/p}} = M_g \bar{I}_p \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \nu), L_q(\Omega, \nu))$ . В частности, оператор  $M_{g \cdot \rho^{-1/p}}$  сюръективен, следовательно, как

отмечалось выше, инъективен. Заметим, что инъективные коизометрические операторы изометричны. Осталось применить предложение 6.

(iii)  $\implies$  (i). Проверяется непосредственно.

(i)  $\implies$  (ii). Ввиду предположения оператор  $M_g$  топологически сюръективен. По предложению 7 он изоморфизм, следовательно, биективен. Осталось напомнить, что всякая биективная коизометрия есть изометрический изоморфизм.

(ii)  $\implies$  (i). Импликация очевидна.

**Теорема 8.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — коизометрический оператор;

(ii)  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  — изометрический изоморфизм;

(iii) функция  $\rho_{\mu, \nu}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  положительна,  $|g \cdot \rho_{\mu, \nu}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}^{-1/p} = \mu(\Omega_c^{\mu, \nu})^{1/p-1/q}$ , при этом если  $p \neq q$ , то пространство  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  состоит из одного атома.

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). Следует из предложений 1 и 8.

(ii)  $\implies$  (i). Рассмотрим произвольную функцию  $h \in L_q(\Omega, \nu)$ , тогда существует функция  $\tilde{f} \in L_p(\Omega_c^{\mu, \nu}, \mu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})$ , такая, что  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(\tilde{f}) = h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}$ . По предложению 2 оператор  $M_g^{\Omega_s^{\mu, \nu}}$  нулевой, поэтому  $M_g(\tilde{f}) = M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(\tilde{f}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}) + M_g^{\Omega_s^{\mu, \nu}}(\tilde{f}|_{\Omega_s^{\mu, \nu}}) = \widetilde{h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}}$ . Так как  $\nu(\Omega_s^{\mu, \nu}) = 0$ , то  $h = \widetilde{h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}}$ . Таким образом, мы нашли функцию  $\tilde{f} \in L_p(\Omega, \mu)$ , такую, что  $M_g(\tilde{f}) = h$  и  $\|\tilde{f}\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|f\|_{L_p(\Omega_c^{\mu, \nu}, \mu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} = \|h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} \leq \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ . Поскольку функция  $h$  произвольна, то оператор  $M_g$  является 1-топологически сюръективным. Для любой функции  $f \in L_p(\Omega, \mu)$  выполнено

$$\begin{aligned} \|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \nu)} &= \|M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(\tilde{f}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}) + M_g^{\Omega_s^{\mu, \nu}}(\tilde{f}|_{\Omega_s^{\mu, \nu}})\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(\tilde{f}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \\ &= \|M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(\tilde{f}|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})\|_{L_q(\Omega_c^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} = \|f\|_{L_p(\Omega_c^{\mu, \nu}, \mu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} \leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}. \end{aligned}$$

Так как  $f$  — произвольная функция, то  $M_g$  сжимающий оператор, но он также 1-топологически сюръективен. Таким образом,  $M_g$  коизометричен.

(ii)  $\iff$  (iii). Следует из предложения 8.

**Теорема 9.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — два пространства с мерой,  $p, q \in [1, +\infty]$  и  $g \in L_0(\Omega, \Sigma)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)  $M_g \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mu), L_q(\Omega, \nu))$  — коизометрический оператор;

(ii)  $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g} \in \mathcal{B}(L_q(\Omega, \nu), L_p(\Omega, \mu))$  — изометрический правый обратный оператор к  $M_g$ .

**Доказательство.** (i)  $\implies$  (ii). Из предложения 1 следует, что оператор  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  коизометричен. По предложению 8 оператор  $M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$  изометричен, обратим и, очевидно,  $(M_g^{\Omega_c^{\mu, \nu}})^{-1} = M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu, \nu}}$ . Оператор  $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}$  сжимающий, так как для любой функции  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  выполнено неравенство  $\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|M_{1/g}^{\Omega_c^{\mu, \nu}}(h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})\|_{L_p(\Omega_c^{\mu, \nu}, \mu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} = \|h|_{\Omega_c^{\mu, \nu}}\|_{L_q(\Omega_c^{\mu, \nu}, \nu|_{\Omega_c^{\mu, \nu}})} \leq \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ . Поскольку  $\nu(\Omega \setminus \Omega_c^{\mu, \nu}) = 0$ , то  $\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}} = \chi_\Omega$ , поэтому для любой функции  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  выполнено  $M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)) = h \cdot \chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}} = h \cdot \chi_\Omega = h$ . Это означает, что  $M_g$  имеет правый обратный оператор умножения. Рассмотрим произвольную функцию  $h \in L_q(\Omega, \nu)$ , тогда  $\|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)\|_{L_p(\Omega, \mu)} \geq \|M_g\| \|M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h))\|_{L_q(\Omega, \nu)} \geq \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ . Так как  $h$  — произвольная функция, то оператор  $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}$  является 1-топологически инъективным, но он также сжимающий, следовательно, изометрический.

(ii)  $\implies$  (i). Рассмотрим произвольную функцию  $h \in L_q(\Omega, \nu)$  и функцию  $f = M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)$ . Тогда  $M_g(f) = M_g(M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(h)) = h$  и  $\|f\|_{L_p(\Omega, \mu)} \leq \|h\|_{L_q(\Omega, \nu)}$ . Так как  $h$  — произвольная функция, то  $M_g$  строго 1-топологически сюръективен. Пусть  $f \in L_p(\Omega, \mu)$ . Ввиду изометричности оператора  $M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}$  имеем  $\|M_g(f)\|_{L_q(\Omega, \nu)} = \|M_{\chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}/g}(M_g(f))\|_{L_p(\Omega, \mu)} = \|f \chi_{\Omega_c^{\mu, \nu}}\|_{L_p(\Omega, \mu)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)}$ . Раз  $f$  — произвольная функция, то  $M_g$  — сжимающий оператор, но он также строго 1-топологически сюръективен, следовательно, строго коизометричен.

Из доказательства видно, что каждый коизометрический оператор умножения строго коизометричен.

**3. Гомологическая тривиальность категории  $B(\Omega)$ -модулей  $L_p$ .** Результаты пп. 1, 2 могут быть сформулированы следующим образом:



- (i) все строго коизометрические и изометрические морфизмы в  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}_1$  суть в точности ретракции и коретракции соответственно;
- (ii) все топологически сюръективные и топологически инъективные морфизмы в  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}$  суть в точности ретракции и коретракции соответственно.

Теперь напомним определения проективности, инъективности и плоскости из работ [1 — 3]. Через  $\mathbf{Set}$  мы обозначаем категорию множеств, а через  $\mathbf{Ban}$  категорию банаховых пространств.

**Определение 2.** Пусть  $\mathbf{C}$  — некоторая категория левых  $A$ -модулей над банаховой алгеброй  $A$ . Тогда  $A$ -модуль  $X$  в  $\mathbf{C}$  называется

- (i) *метрически (топологически) проективным*, если ковариантный функтор  $F_p := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ban}_1$  ( $F_p := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ban}$ ) переводит всякий строго коизометрический (топологически сюръективный) морфизм  $\xi$  в строго коизометрический (топологически сюръективный);
- (ii) *метрически (топологически) инъективным*, если контравариантный функтор  $F_i := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ban}_1$  ( $F_i := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ban}$ ) переводит всякий изометрический (топологически инъективный) морфизм  $\xi$  в строго коизометрический (топологически сюръективный);
- (iii) *метрически (топологически) плоским*, если ковариантный функтор  $F_f := -\widehat{\otimes}_{B(\Omega)} X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ban}_1$  ( $F_f := -\widehat{\otimes}_{B(\Omega)} X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ban}$ ) переводит всякий изометрический (топологически инъективный) морфизм  $\xi$  в изометрию (топологически инъективный оператор).

**Теорема 10.** Пусть  $(\Omega, \Sigma)$  — измеримое пространство и  $\mu \in M(\Omega)$ , тогда  $L_p(\Omega, \mu)$  — метрически (топологически) проективный, инъективный и плоский модуль в  $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}_1$  ( $B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}$ ).

**Доказательство.** Мы проведем доказательство лишь для первого случая, поскольку для второго случая доказательства аналогичны. Обозначим  $X = L_p(\Omega, \mu)$  и  $\mathbf{C} = B(\Omega)\text{-mod}\mathbf{Lp}_1$ .

Так как любой строго коизометрический морфизм  $\xi$  в  $\mathbf{C}$  есть ретракция, то морфизм  $F_p(\xi)$  — ретракция в  $\mathbf{Ban}_1$ , а значит, строго коизометричен. Поскольку морфизм  $\xi$  произволен, то модуль  $X$  метрически проективен.

Так как любой изометрический морфизм  $\xi$  в  $\mathbf{C}$  есть коретракция, то морфизм  $F_i(\xi)$  — ретракция в  $\mathbf{Ban}_1$ , а значит, строго коизометричен. Поскольку морфизм  $\xi$  произволен, то модуль  $X$  метрически инъективен.

Так как любой изометрический морфизм  $\xi$  в  $\mathbf{C}$  есть коретракция, то морфизм  $F_f(\xi)$  — коретракция в  $\mathbf{Ban}_1$ , и в частности изометрия. Поскольку морфизм  $\xi$  произволен, то модуль  $X$  метрически плоский.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хелемский А.Я. Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей // Матем. сб. 2013. **204**, №7. 127–158.
2. Helemskii A.Ya. Extreme version of projectivity for normed modules over sequence algebras // Can. J. Math. 2013. **65**. 559–574.
3. Helemskii A.Ya. Metric version of flatness and Hahn-Banach type theorems for normed modules over sequence algebras // Stud. Math. 2011. **206**, №2. 135–160.
4. Хелемский А.Я. Тензорные произведения и мультипликаторы модулей  $L_p$  на локально компактных пространствах с мерой // Матем. зам. 2014. **96**, №3. 450–469.
5. Богачев В.И. Основы теории меры. 2-е изд. М.; Ижевск: РХД, 2006.
6. Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach space theory. Springer Inc. New-York, 2006.

Поступила в редакцию  
13.02.2015

---