

Преобразования кинематических величин при переходе между разными системами координат

Немеш Н. Т.

1 Справочные материалы

1.1 Некоторые свойства ортогональных матриц и векторного произведения

Пусть a , b и c – три вектора из \mathbb{R}^3 . Тогда, векторное произведение будем обозначать через $a \times b$, а скалярное через $\langle a, b \rangle$.

Напомним определение смешанного произведения

$$(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle$$

Поскольку,

$$(a, b, c) = \det[a, b, c],$$

то смешанное произведение (как и определитель) меняет знак при перестановке любых двух соседних аргументов.

Определение 1.1 Пусть a и b – два вектора из \mathbb{R}^3 . Поскольку векторное произведение линейно по каждому аргументу, то корректно определен линейный оператор

$$[a]_{\times} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto a \times x$$

Предложение 1.2 Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$(i) \quad [a]_{\times} b = -[b]_{\times} a$$

$$(ii) \quad ([a]_{\times})^T = -[a]_{\times}$$

$$(iii) \quad [a]_{\times} [b]_{\times} = ba^T - (a^T b) E$$

◁ (i) Непосредственно из определения

$$[a]_{\times} b = a \times b = -b \times a = -[b]_{\times} a$$

(ii) Пусть $x, y \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned} \langle y, [a]_{\times}^T x \rangle &= \langle [a]_{\times} y, x \rangle \\ &= \langle x, [a]_{\times} y \rangle \\ &= \langle x, a \times y \rangle \\ &= (x, a, y) \\ &= -(y, a, x) \\ &= -\langle y, a \times x \rangle \\ &= -\langle y, [a]_{\times} x \rangle \end{aligned}$$

Поскольку $x, y \in \mathbb{R}^3$ произвольны, то $([a]_{\times})^T = -[a]_{\times}$

(iii) Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned} [a]_{\times}[b]_{\times}x &= a \times (b \times x) \\ &= \langle a, x \rangle b - \langle a, b \rangle x \\ &= (a^T x)b - (a^T b)x \\ &= b(a^T x) - (a^T b)x \\ &= (ba^T)x - (a^T b)x \\ &= (ba^T - (a^T b)E)x \end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^3$ произвольно $[a]_{\times}[b]_{\times} = ba^T - (a^T b)E$. \triangleright

Предложение 1.3 Пусть M – произвольная матрица и $u, v \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$M^T(Mu \times Mv) = \det(M)(u \times v)$$

В частности, для любой ортогональной матрицы Q

$$Qu \times Qv = \det(Q)Q(u \times v)$$

Наконец, если R – матрица вращения \mathbb{R}^3 , то

$$Ru \times Rv = R(u \times v) \quad (1)$$

\triangleleft Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned} \det(M)\langle x, u \times v \rangle &= \det(M)(x, u, v) \\ &= \det(M) \det[x, u, v] \\ &= \det(M \cdot [x, u, v]) \\ &= \det[Mx, Mu, Mv] \\ &= (Mx, Mu, Mv) \\ &= \langle Mx, Mu \times Mv \rangle \\ &= \langle x, M^T(Mu \times Mv) \rangle \end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^3$ произвольно, то $\det(M)(u \times v) = M^T(Mu \times Mv)$.

Если в качестве M взять ортогональную матрицу Q , то так как $Q^T = Q^{-1}$, то $\det(Q)(u \times v) = Q^{-1}(Qu \times Qv)$. Откуда

$$Qu \times Qv = \det(Q)Q(u \times v).$$

Осталось напомнить, что у матриц вращения определитель равен 1. \triangleright

Предложение 1.4 Пусть R – матрица вращения и a – произвольный вектор в \mathbb{R}^3 , тогда

(i)

$$[a]_{\times}R = R[R^T a]_{\times}, \quad [Ra]_{\times} = R[a]_{\times}R^T \quad (2)$$

(ii)

$$(E + [a]_{\times})R = R(E + [R^T a]_{\times}) \quad (3)$$

(iii)

$$(R(E + [a]_{\times}))^T = R^T(E - [Ra]_{\times}) \quad (4)$$

(iv)

$$(R(E + [a]_{\times}))^{-1} = R^T(E - [Ra]_{\times}) + o(\|a\|^2)$$

◁ (i) Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned} [a]_{\times} Rx &= a \times Rx \\ &= RR^T a \times Rx \\ &= R(R^T a \times x) \\ &= R([R^T a]_{\times} x) \end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^3$ произвольно $[a]_{\times} R = R[R^T a]_{\times}$.

Заменяя a на Ra получим $[Ra]_{\times} R = R[R^T Ra]_{\times}$. Откуда

$$[Ra]_{\times} = [Ra]_{\times} RR^T = ([Ra]_{\times} R)R^T = R[R^T Ra]_{\times} R^T = R[a]_{\times} R^T$$

(iii) Так как $[a]_{\times}^T = -[a]_{\times}$, то

$$\begin{aligned} (R(E + [a]_{\times}))^T &= (E + [a]_{\times})^T R^T \\ &= (E + [a]_{\times}^T) R^T \\ &= (E - [a]_{\times}) R^T \end{aligned}$$

(ii) Из (ii) следует, что

$$\begin{aligned} (E + [a]_{\times})R &= R + [a]_{\times}R \\ &= R + R[R^T a]_{\times} \\ &= R(E + [R^T a]_{\times}) \end{aligned}$$

(iii) Из пункта (ii) следует, что

$$\begin{aligned} R(E + [a]_{\times})R^T(E - [Ra]_{\times}) &= (R + R[a]_{\times})(R^T - R^T[Ra]_{\times}) \\ &= RR^T + R[a]_{\times}R^T - RR^T[Ra]_{\times} - R[a]_{\times}R^T[Ra]_{\times} \\ &= E + R[a]_{\times}R^T - [Ra]_{\times} - R[a]_{\times}R^T[Ra]_{\times} \\ &= E - R[a]_{\times}R^T[Ra]_{\times} \\ &= E - R[a]_{\times}R^T R[a]_{\times}R^T \\ &= E - R[a]_{\times}[a]_{\times}R^T \\ &= E + o(\|a\|^2) \end{aligned}$$

Откуда

$$(R(E + [a]_{\times}))^{-1} = R^T(E - [Ra]_{\times}) + o(\|a\|^2)$$

▷

1.2 Напоминания из теории многомерных нормальных распределений

Определение 1.5 Пусть $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор, и Σ – положительно определенная матрица размера $n \times n$. Тогда случайный вектор $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ имеет многомерное нормальное распределение если его плотность распределения имеет вид

$$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu}) \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right).$$

В этом случае мы будем писать $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$.

Замечание 1.6 Допустим, что случайный вектор \mathbf{X} имеет многомерное нормальное распределение с параметрами $\vec{\mu}$ и Σ , т.е. $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$. Пусть A – произвольная матрица размера $k \times n$ и $\vec{b} \in \mathbb{R}^k$ – произвольный k -мерный вектор, тогда случайный вектор $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \vec{b}$ имеет многомерное нормальное распределение, причем

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(A\vec{\mu} + \vec{b}, A\Sigma A^T)$$

2 Преобразования кинематических величин при замене системы координат

В этом параграфе мы выведем формулы преобразования координат векторов различных кинематических величин: поза, скорость, угловая скорость, ускорение. Напомним, что поза – это радиус-вектор и ориентация твердого тела. Во многих ситуациях мы будем считать, что эти величины имеют многомерное нормальное распределение и наша основная задача найти параметры этого распределения.

Большинство векторных величин (поза, скорость, угловая скорость, ускорение) в нашем случае имеют простую модель. Если \vec{x} некоторый вектор то мы будем считать, что к нему добавляется некоторый шум, т.е. случайный вектор с многомерным нормальным распределением с нулевым средним. Такой случайный вектор мы будем обозначать \mathbf{x} . Более подробно, пусть A некоторая система координат, тогда координаты \mathbf{x} в A будут иметь распределение $\mathcal{N}(x^A, \Sigma_x^A)$.

Мы также будем предполагать, что переходы между некоторыми системами координат нам точно не известны и имеют некоторый шум. Точнее пусть \mathbf{R} – случайная величина описывающая матрицу перехода между двумя системами координат. Будем считать, что существует фиксированная матрица перехода R и случайный вектор $\delta\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, такие, что $\mathbf{R} = R(E + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})$

Теперь рассмотрим различные сценарии преобразования между двумя системами координат. В этих сценариях системы координат могут быть

- неподвижными друг относительно друга
- двигаться с линейной или с угловой или с обеими скоростями друг относительно друга
- иметь нетривиальную матрицу поворота
- иметь матрицу поворота являющуюся случайной величиной

2.1 Преобразования позиции для константной замены координат относительно инерциальной системы отсчета

Допустим у нас есть три системы координат A , B и C , причем C – инерциальная система координат. Пусть нам известны поза системы координат A относительно C и B относительно A , надо найти позу системы координат B относительно C . Будем считать, что поза A в C является случайной величиной, а поза B в A доподлинно известна. За модельный пример здесь можно взять $A = \text{imu}$, $B = \text{base link}$ и $C = \text{map}$.

Пусть (R_A^C, p_A^C) – поза A в C , тогда

$$\begin{aligned} R_A^C &= R_A^C(E + [\delta\theta_A^C]_{\times}), \quad \delta\theta_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta}^A) \\ p_A^C &= p_A^C + \delta p_A^C, \quad \delta p_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta p}^A), \end{aligned}$$

Поза B в C описывается формулами

$$\begin{aligned} R_B^C &= R_A^C R_B^A \\ &= R_A^C(E + [\delta\theta_A^C]_{\times}) R_B^A \\ &= R_A^C R_B^A(E + [(R_B^A)^T \delta\theta_A^C]_{\times}) \\ p_B^C &= p_A^C + R_{AP_B}^C \\ &= p_A^C + \delta p_A^C + R_A^C(E + [\delta\theta_A^C]_{\times}) p_B^A \\ &= p_A^C + R_A^C p_B^A + \delta p_A^C + R_A^C [\delta\theta_A^C]_{\times} p_B^A \\ &= p_A^C + R_A^C p_B^A + \delta p_A^C - R_A^C [p_B^A]_{\times} \delta\theta_A^C \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_B^C = R_A^C R_B^A(E + [\delta\theta_B^C]_{\times}), \quad \delta\theta_B^C \sim \mathcal{N}(0, (R_B^A)^T \Sigma_{\delta\theta}^A R_B^A) \quad (5)$$

$$p_B^C = p_A^C + R_A^C p_B^A + \delta p_A^C, \quad \delta p_B^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta p}^A + R_A^C [p_B^A]_{\times} \Sigma_{\delta\theta}^A (R_A^C [p_B^A]_{\times})^T) \quad (6)$$

2.2 Преобразования скорости, угловой скорости и ускорения для константной замены координат между инерциальными системами координат связанными с твердым телом

Допустим у нас есть две инерциальные системы координат A и B связанные с некоторым твердым телом. Пускай нам известна некоторая векторная величина \mathbf{x} в системе координат A , и поза системы координат A относительно B . Надо найти \mathbf{x} в системе координат B . Будем считать, что поза A в B доподлинно известна. За модельный пример здесь можно взять $A = \text{imu}$, $B = \text{base link}$.

Пусть

$$\mathbf{x}^A = x^A + \delta \mathbf{x}^A, \quad \delta x^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta x}^A)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^B &= R_A^B \mathbf{x}^A \\ &= R_A^B(x^A + \delta \mathbf{x}^A) \\ &= R_A^B x^A + R_A^B \delta \mathbf{x}^A \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}^B = R_A^B x^A + \delta \mathbf{x}^B, \quad \delta \mathbf{x}^B \sim \mathcal{N}(0, R_A^B \Sigma_{\delta x}^A (R_A^B)^T) \quad (7)$$

В последней формуле в качестве \mathbf{x} можно брать скорость \mathbf{v} , угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ или ускорение \mathbf{a} .

2.3 Преобразования скорости, угловой скорости и ускорения для неконстантной замены координат между инерциальными системами координат связанными с твердым телом

Допустим у нас есть две системы координат A и B связанные с некоторым твердым телом. Пускай нам известна некоторая векторная величина \mathbf{x} в системе координат A , и поза системы координат A относительно B . Надо найти \mathbf{x} в системе координат B . Будем считать, что поза A в B является случайной величиной. За модельный пример здесь можно взять $A = \text{imu}$, $B = \text{base link}$.

Пусть

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^A &= x^A + \delta\mathbf{x}^A, \quad \delta x^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta x}^A) \\ \mathbf{R}_A^B &= R_A^B(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^B]_{\times}), \quad \delta\boldsymbol{\theta}_A^B \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta})\end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^B &= \mathbf{R}_A^B \mathbf{x}^A \\ &= R_A^B(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^B]_{\times})(x^A + \delta\mathbf{x}^A) \\ &= R_A^B x^A + R_A^B \delta\mathbf{x}^A + R_A^B [\delta\boldsymbol{\theta}_A^B]_{\times} x^A + R_A^B [\delta\boldsymbol{\theta}_A^B]_{\times} \delta\mathbf{x}^A \\ &= R_A^B x^A + R_A^B \delta\mathbf{x}^A - R_A^B [x^A]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta}_A^B + o(\|\delta\mathbf{x}^A\|)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}^B = R_A^B x^A + \delta\mathbf{x}^B, \quad \delta\mathbf{x}^B \sim \mathcal{N}(0, R_A^B \Sigma_{\delta x}^A (R_A^B)^T + R_A^B [x^A]_{\times} \Sigma_{\delta\theta} (R_A^B [x^A]_{\times})^T) \quad (8)$$

В последней формуле в качестве \mathbf{x} можно брать скорость \mathbf{v} , угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ или ускорение \mathbf{a} .

2.4 Нахождение скорости точек твердого тела в различных системах координат

Допустим, у нас есть две системы координат A и B связанные с твердым телом. Пусть в некоторой инерциальной системе координат C твердое тело имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Пусть \mathbf{v}_A линейная скорость начала системы координат A относительно системы координат C . Аналогично \mathbf{v}_B линейная скорость начала системы координат B относительно системы координат C .

Так как A и B связаны с одним и тем же твердым телом, то A и B будет иметь в системе координат C ту же самую угловую скорость. Тогда

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB} \quad (9)$$

Мы выведем параметры распределения вектора \mathbf{v}_B в базисах A и C .

За модельный пример здесь можно взять $A = \text{imu}$, $B = \text{base link}$ и $C = \text{map}$.

Пусть координаты \mathbf{v}_A^A вектора \mathbf{v}_A в системе координат A имеют распределение

$$\mathbf{v}_A^A = v_A^A + \delta\mathbf{v}_A^A, \quad \delta\mathbf{v}_A^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v}^A)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta\boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\omega}^A)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B^A &= \mathbf{v}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A \\
&= \mathbf{v}_A^A + \delta \mathbf{v}_A^A + (\boldsymbol{\omega}^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A \\
&= \mathbf{v}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A + \delta \mathbf{v}_A^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A \\
&= \mathbf{v}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A + \delta \mathbf{v}_A^A - [p_B^A]_{\times} \delta \boldsymbol{\omega}^A
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_B^A = \mathbf{v}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A + \delta \mathbf{v}_B^A, \quad \delta \mathbf{v}_B^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v}^A + [p_B^A]_{\times} \Sigma_{\delta \omega} ([p_B^A]_{\times})^T) \quad (10)$$

Пусть координаты \mathbf{v}_A^C вектора \mathbf{v}_A в системе координат C имеют распределение

$$\mathbf{v}_A^C = v_A^C + \delta \mathbf{v}_A^C, \quad \delta \mathbf{v}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v_A}^C)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta \boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta \omega}^A)$$

Будем считать, что матрица перехода от A к C сама является случайной величиной с распределением

$$\mathbf{R}_A^C = R_A^C(E + [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}), \quad \delta \boldsymbol{\theta}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta \theta})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B^C &= \mathbf{v}_A^C + \boldsymbol{\omega}^C \times \overrightarrow{AB}^C \\
&= \mathbf{v}_A^C + \mathbf{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{R}_A^C p_B^A \\
&= \mathbf{v}_A^C + \mathbf{R}_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= v_A^C + \delta v_A^C + R_A^C (E + [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}) ((\boldsymbol{\omega}^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A) \\
&= v_A^C + \delta v_A^C + (R_A^C + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}) (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= v_A^C + \delta v_A^C + R_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times} (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + R_A^C (\delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times} (\delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= v_A^C + R_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta v_A^C - R_A^C [\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta}_A^C - R_A^C [p_B^A]_{\times} \delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B^C &= v_A^C + R_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta \mathbf{v}_B^C, \\
\delta \mathbf{v}_B^C &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v_A}^C + R_A^C [\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} \Sigma_{\delta \theta} (R_A^C [\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times})^T + R_A^C [p_B^A]_{\times} \Sigma_{\delta \omega}^A (R_A^C [p_B^A]_{\times})^T)
\end{aligned} \quad (11)$$

2.5 Нахождение ускорений точек твердого тела в различных системах координат

Допустим, у нас есть две системы координат A и B связанные с твердым телом. Пусть в некоторой инерциальной системе координат C твердое тело имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\epsilon}$. Пусть \mathbf{a}_A линейное ускорение начала системы координат A относительно системы координат C . Аналогично \mathbf{a}_B линейное ускорение начала системы координат B относительно системы координат C .

Поскольку $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B &= \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \\
&= \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \\
&= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\epsilon} \times \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB})
\end{aligned} \tag{12}$$

Мы выведем параметры распределения вектора \mathbf{a}_B в базисах A и C .

За модельный пример здесь можно взять $A = \text{imu}$, $B = \text{base link}$ и $C = \text{map}$.

Пусть координаты \mathbf{a}_A^A вектора \mathbf{a}_A в системе координат A имеют распределение

$$\mathbf{a}_A^A = a_A^A + \delta\mathbf{a}_A^A, \quad \delta\mathbf{a}_A^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta a}^A)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta\boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\omega}^A)$$

Угловое ускорение будем считать пренебрежимо малым, тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B^A &= \mathbf{a}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \delta\mathbf{a}_A^A + (\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times ((\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \delta\mathbf{a}_A^A + (\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times (\omega^A \times p_B^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \delta\mathbf{a}_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \omega^A \times (\delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times (\delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\mathbf{a}_A^A - (\omega^A \times p_B^A) \times \delta\boldsymbol{\omega}^A - \omega^A \times (p_B^A \times \delta\boldsymbol{\omega}^A) + o(\|\delta\boldsymbol{\omega}^A\|^2) \\
&= a_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\mathbf{a}_A^A - [\omega^A \times p_B^A]_{\times} \delta\boldsymbol{\omega}^A - [\omega^A]_{\times} [p_B^A]_{\times} \delta\boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta\boldsymbol{\omega}^A\|^2) \\
&= a_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\mathbf{a}_A^A - ([\omega^A \times p_B^A]_{\times} + [\omega^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}) \delta\boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta\boldsymbol{\omega}^A\|^2)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B^A &= \mathbf{a}_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\mathbf{a}_B^A \\
\delta\mathbf{a}_B^A &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta a}^A + ([\omega^A \times p_B^A]_{\times} + [\omega^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}) \Sigma_{\delta\omega}^A ([\omega^A \times p_B^A]_{\times} + [\omega^A]_{\times} [p_B^A]_{\times})^T)
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть координаты \mathbf{a}_A^C вектора \mathbf{a}_A в системе координат C имеют распределение

$$\mathbf{a}_A^C = a_A^C + \delta\mathbf{a}_A^C, \quad \delta\mathbf{a}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta a}^C)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta\boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\omega}^A)$$

Будем считать, что матрица перехода от A к C сама является случайной величиной с распределением

$$\mathbf{R}_A^C = \mathbf{R}_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}), \quad \delta\boldsymbol{\theta}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta})$$

Угловое ускорение будем считать пренебрежимо малым, тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B^C &= \mathbf{a}_A^C + \boldsymbol{\omega}^C \times (\boldsymbol{\omega}^C \times \overrightarrow{AB}^C) \\
&= \mathbf{a}_A^C + \mathbf{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times (\mathbf{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{R}_{Ap_B}^C) \\
&= \mathbf{a}_A^C + \mathbf{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{R}_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= \mathbf{a}_A^C + \mathbf{R}_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) \\
&= \mathbf{a}_A^C + R_A^C (E + [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}) ((\boldsymbol{\omega}^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A) \times ((\boldsymbol{\omega}^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A)) \\
&= \mathbf{a}_A^C + R_A^C (E + [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}) (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta \boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \boldsymbol{\omega}^A \times (\delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta \boldsymbol{\omega}^A \times (\delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) \\
&= \mathbf{a}_A^C + (R_A^C + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times}) (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) - ([\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} + [\boldsymbol{\omega}^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}) \delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|^2)) \\
&= \mathbf{a}_A^C + R_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_{\times} (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) - R_A^C ([\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} + [\boldsymbol{\omega}^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}) \delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|) \\
&= \mathbf{a}_A^C + R_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) - R_A^C [\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta}_A^C - R_A^C ([\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} + [\boldsymbol{\omega}^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}) \delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B^C &= \mathbf{a}_A^C + R_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) + \delta \mathbf{a}_B^C, \\
\delta \mathbf{a}_B^C &\sim \mathcal{N}(0, \tilde{\Sigma}_{\delta \theta} + \tilde{\Sigma}_{\delta \omega}^A) \\
\tilde{\Sigma}_{\delta \theta} &= R_A^C [\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)]_{\times} \Sigma_{\delta \theta} (R_A^C [\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)]_{\times})^T \\
\tilde{\Sigma}_{\delta \omega}^A &= R_A^C ([\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} + [\boldsymbol{\omega}^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}) \Sigma_{\delta \omega}^A (R_A^C ([\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A]_{\times} + [\boldsymbol{\omega}^A]_{\times} [p_B^A]_{\times}))^T
\end{aligned} \tag{14}$$