Метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость банаховых модулей

Немеш Норберт Тиборович

23 декабря 2016 г.

МГУ имени М.В. Ломоносова

Определения

Проективность

Банахов A-модуль P называется *проективным*, если для любого допустимого эпиморфизма $\xi : X \to Y$ и любого морфизма $\phi : P \to Y$ существует морфизм $\psi : P \to X$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Проективность

Банахов A-модуль P называется *проективным*, если для любого допустимого эпиморфизма $\xi : X \to Y$ и любого морфизма $\phi : P \to Y$ существует морфизм $\psi : P \to X$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \|\phi\| = \|\psi\|$$

коммутативной.

Какие эпиморфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — строгая коизометрия, т.е. $\xi(B_X) = B_Y$

Проективность

Банахов A-модуль P называется *проективным*, если для любого допустимого эпиморфизма $\xi : X \to Y$ и любого морфизма $\phi : P \to Y$ существует морфизм $\psi : P \to X$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Какие эпиморфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — строгая коизометрия, т.е. $\xi(B_X) = B_Y$
- Топологическая теория: ξ — открытое отображение

Проективность

Банахов A-модуль P называется *проективным*, если для любого допустимого эпиморфизма $\xi : X \to Y$ и любого морфизма $\phi : P \to Y$ существует морфизм $\psi : P \to X$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Какие эпиморфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — строгая коизометрия, т.е. $\xi(B_X) = B_Y$
- Топологическая теория: ξ — открытое отображение
- Относительная теория: ξ имеет дополняемое ядро

Инъективность

Банахов A-модуль J называется *инъективным*, если для любого допустимого мономорфизма $\xi : Y \to X$ и любого морфизма $\phi : Y \to J$ существует морфизм $\psi : X \to J$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\ J & Y \arrow[l, "\phi"'] \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Инъективность

Банахов A-модуль J называется *инъективным*, если для любого допустимого мономорфизма $\xi : Y \to X$ и любого морфизма $\phi : Y \to J$ существует морфизм $\psi : X \to J$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\ J & Y \arrow[l, "\phi"] \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd} \qquad \|\phi\| = \|\psi\|$$

коммутативной.

Какие мономорфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — изометрия

Инъективность

Банахов A-модуль J называется *инъективным*, если для любого допустимого мономорфизма $\xi : Y \to X$ и любого морфизма $\phi : Y \to J$ существует морфизм $\psi : X \to J$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\
J & Y \arrow[l, "\phi"'] \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Какие мономорфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — изометрия
- Топологическая теория: ξ — вложение с замкнутым образом

Инъективность

Банахов A-модуль J называется *инъективным*, если для любого допустимого мономорфизма $\xi : Y \to X$ и любого морфизма $\phi : Y \to J$ существует морфизм $\psi : X \to J$ делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\
J & Y \arrow[l, "\phi"'] \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Какие мономорфизмы считать допустимыми?

- Метрическая теория: ξ — изометрия
- Топологическая теория: ξ — вложение с замкнутым образом
- Относительная теория: ξ имеет дополняемый образ

Плоскость

Банахов A-модуль F называется *плоским*, если модуль F^* инъективен.

- Метрическая инъективность (Kelly, Nachbin, Goodner, Hasumi 1950–1958)
- Метрическая плоскость (Grothendieck, 1955)
- Топологическая проективность (Köthe, 1966)
- Топологическая плоскость (Retherford, 1972)

Основные результаты

Проективные идеалы

Теорема
Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.

Проективные идеалы

Теорема
Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.

Теорема
Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий сжимающей аппроксимативной единицей метрически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей нормы 1.

Проективные идеалы

Теорема
Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий ограниченной аппроксимативной единицей топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей.

Теорема
Замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры, обладающий сжимающей аппроксимативной единицей метрически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей нормы 1.

Теорема
Замкнутый левый идеал C^*-алгебры метрически или топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает самосопряженной правой единицей.

Определение (Lindenstrauss-Pełczyński, 1968)
Пространство E называется $\mathscr{L}_p$-пространством если существует константа $C > 0$ такая, что для любого конечномерного подпространства F в E существует конечномерное подпространство G в E C-изоморфное конечномерному ℓ_p пространству и содержащее F.

Пример

- $L_1 \in \mathscr{L}_1$
- $C(K) \in \mathscr{L}_\infty$

Определение
Банахова алгебра A называется аменабельной, если все её правые, левые и двусторонние модули *относительно* плоские.

Определение
Банахова алгебра A называется аменабельной, если все её правые, левые и двусторонние модули *относительно* плоские.

Теорема
Над аменабельной банаховой алгеброй всякий банахов модуль, являющийся $\mathscr{L}_1$-пространством, топологически плоский.

Определение
Банахова алгебра A называется аменабельной, если все её правые, левые и двусторонние модули *относительно* плоские.

Теорема
Над аменабельной банаховой алгеброй всякий банахов модуль, являющийся $\mathscr{L}_1$-пространством, топологически плоский.

Теорема (J.R. Retherford, 1972)
$\mathscr{L}_1$-пространства — это в точности топологически плоские банаховы *пространства*.

Инъективные C^*-алгебры

Определение (Dubinsky-Pełczyński-Rosenthal, 1972)
Говорят, что банахово пространство E имеет свойство l.u.st. если E^{**} изоморфно дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки.

Определение (Dubinsky-Pełczyński-Rosenthal, 1972)
Говорят, что банахово пространство E имеет свойство l.u.st. если E^{**} изоморфно дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки.

Теорема
Если C^*-алгебра топологически инъективна как правый модуль над собой, то

- A имеет свойство l.u.st;
- A — субоднородная C^*-алгебра;
- A — есть $*$-подалгебра в $M_n(C(K))$

Определение
AW^* алгебра — это C^*-алгебра в которой у любого подмножества правый алгебраический аннулятор порожден некоторой проекцией.

Определение
AW^* алгебра — это C^*-алгебра в которой у любого подмножества правый алгебраический аннулятор порожден некоторой проекцией.

$$W^* \subset AW^* \subset C^*$$

Инъективные AW^*-алгебры

Определение
AW^* алгебра — это C^*-алгебра в которой у любого подмножества правый алгебраический аннулятор порожден некоторой проекцией.

$$W^* \subset AW^* \subset C^*$$

Теорема
AW^*-алгебра A топологически инъективна как правый модуль над собой тогда и только тогда, когда

$$A = \bigoplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(C(K_i)),$$

где K_i — стоуновы пространства.

Свойство Данфорда-Петтиса

Определение (Grothendieck, 1953)
Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если для любого банахова пространства F всякий слабо компактный оператор $T : E \to F$ будет вполне непрерывным.

Свойство Данфорда-Петтиса

Определение (Grothendieck, 1953)
Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если для любого банахова пространства F всякий слабо компактный оператор $T : E \to F$ будет вполне непрерывным.

Пример

Обладают	Не обладают
L_1, $C(K)$	рефлексивные пространства

Определение (Grothendieck, 1953)
Говорят, что банахово пространство E имеет свойство Данфорда-Петтиса, если для любого банахова пространства F всякий слабо компактный оператор $T : E \to F$ будет вполне непрерывным.

Пример

Обладают	Не обладают
L_1, $C(K)$	рефлексивные пространства

Теорема
Если банахова алгебра является $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством, то все её топологически проективные, инъективные и плоские модули имеют свойство Данфорда-Петтиса.

Маленькая категория

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Маленькая категория

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Маленькая категория

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

Маленькая категория

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{C}) = \{L_p(\Omega, \mu) : 1 \leq p \leq \infty, \mu \text{ — } \sigma\text{-аддитивная мера}\}$$

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

$$\mathrm{Ob}(C) = \{L_p(\Omega, \mu) : 1 \leq p \leq \infty, \mu \text{ — } \sigma\text{-аддитивная мера}\}$$

$$\mathrm{Hom}(C) = \{M_g : L_p(\Omega, \mu) \to L_q(\Omega, \nu) : f \mapsto gf\}$$

Маленькая категория

Итог: большинство модулей гомологически нетривиальны.

Причина: категория банаховых модулей очень большая.

Пример маленькой категории

$$A = B(\Omega, \Sigma)$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{C}) = \{L_p(\Omega, \mu) : 1 \leq p \leq \infty, \mu \text{ — } \sigma\text{-аддитивная мера}\}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{C}) = \{M_g : L_p(\Omega, \mu) \to L_q(\Omega, \nu) : f \mapsto gf\}$$

Теорема
В категории C все модули являются проективными, инъективными и плоскими в смысле метрической, топологической и относительной теории.

Ссылки

- Немеш Н. Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр // Матем. Заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 526–533.
- Немеш Н. Топологически инъективные C^*-алгебры // Функц. анал. и прил. — 2016. — Т. 50, № 2. — С. 88–91.
- Немеш Н. Гомологическая тривиальность категории модулей L_p // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2016. Т. 71, № 4. — С. 3–12.