Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 517.986.22

Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр

Н. Т. Немеш

В данной статье даются необходимые условия метрической и топологической проективности замкнутых идеалов банаховых алгебр. В случае коммутативных банаховых алгебр получен критерий метрической и топологической проективности идеалов, обладающих ограниченной аппроксимативной единицей. Основной результат работы: замкнутый идеал произвольной C^*-алгебры метрически или топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает самосопряженной правой единицей.

Библиография: 13 названий.

1. Введение

Понятия проективного, инъективного и плоского модуля играют фундаментальную роль в гомологической алгебре. Первые функционально-аналитические версии этих понятий появились 45 лет назад [1] и были успешно применены для исследования дифференцирований и расширений банаховых алгебр и изучения аменабельных алгебр. В последнее время с ростом интереса к теории операторных пространств [2], [3], [4], началось активное исследование новых типов гомологически тривиальных объектов — метрически и топологически проективных, инъективных и плоских модулей. В этой работе на примере идеалов банаховых алгебр мы покажем, что метрическая и топологическая проективность тесно связаны и являются значительно более сильными свойствами, чем относительная проективность.

Для формулировки точных определений нам понадобится небольшая подготовка. Через B_E мы будем обозначать замкнутый единичный шар пространства E. Пусть E и F — банаховы пространства. Ограниченный линейный оператор $T : E \to F$ будем называть топологически сюръективным если $B_F \subset cT(B_E)$ для некоторого

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15–01–08392).

$c > 0$. По теореме Банаха об открытом отображении топологическая сюръективность оператора эквивалентна сюръективности. Если же $T(B_E) = B_F$, то оператор T будем называть строго коизометрическим.

Здесь и далее символ A будет обозначать не обязательно унитальную банахову алгебру со сжимающим билинейным оператором умножения. Мы будем рассматривать только левые банаховы модули со сжимающим билинейным оператором внешнего умножения, обозначаемого точкой "$\cdot$". Наконец, непрерывные морфизмы левых A-модулей мы будем называть A-морфизмами.

Сформулируем три, пожалуй, самых важных для нас определения проективного банахова модуля. Пусть P, X и Y — банаховы модули, а $\phi : P \to Y$ и $\xi : X \to Y$ — A-морфизмы. Напомним, что A-морфизм $\psi : P \to X$ называется продолжением ϕ вдоль ξ если $\xi\psi = \phi$.

Определение 1. *A-модуль P называется метрически проективным, если для любого строго коизометрического A-морфизма $\xi : X \to Y$ каждый A-морфизм $\phi : P \to Y$ обладает продолжением $\psi : P \to X$ вдоль ξ таким, что $\|\psi\| = \|\phi\|$.*

Определение 2. *A-модуль P называется топологически проективным, если для любого топологически сюръективного A-морфизма $\xi : X \to Y$ и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует продолжение вдоль ξ.*

Определение 3. *A-модуль P называется относительно проективным, если для любого A-морфизма $\xi : X \to Y$, обладающего правым обратным оператором, и любого A-морфизма $\phi : P \to Y$ существует продолжение вдоль ξ.*

Изначально эти определения были даны Хелемским [1], [5] и Гравеном [6].

На самом деле, все эти типы проективности можно изучать с общих позиций. В работе [5] Хелемским была построена теория оснащенных категорий, позволившая единообразно доказывать многие утверждения о проективных банаховых модулях. Мы дадим определения и кратко перечислим некоторые результаты об оснащенных категориях. Через **Set** мы будем обозначать категорию множеств. Тот факт что объекты X и Y категории $\mathbf{C}$ изоморфны мы будем записывать как $X \underset{\mathbf{C}}{\cong} Y$. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две фиксированные категории. Пара $(\mathbf{C}, \Box : \mathbf{C} \to \mathbf{D})$, где $\Box$ — верный (то есть не склеивающий морфизмы) ковариантный функтор, называется оснащенной категорией. Морфизм ξ в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-допустимым эпиморфизмом если $\Box(\xi)$ — ретракция в $\mathbf{D}$. Объект P в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-проективным, если для каждого $\Box$-допустимого эпиморфизма ξ в $\mathbf{C}$ отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, \xi)$ сюръективно. Объект F в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-свободным с базой M в $\mathbf{D}$, если существует изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(M, \Box(X)) \underset{\mathbf{Set}}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(F, X)$ естественный по X. Оснащенная категория $(\mathbf{C}, \Box)$ называется свободолюбивой, если каждый объект в $\mathbf{D}$ является базой некоторого $\Box$-свободного объекта из $\mathbf{C}$. Имеют место следующие утверждения [5]:

Предложение 1. *Пусть $(\mathbf{C}, \Box)$ — оснащенная категория. Тогда*

(i) *любой ретракт $\Box$-проективного объекта $\Box$-проективен;*

(ii) *любой $\Box$-допустимый эпиморфизм в $\Box$-проективный объект есть ретракция;*

(iii) *любой $\Box$-свободный объект $\Box$-проективен;*

(iv) *если* $(\mathbf{C}, \Box)$ *— свободолюбивая оснащенная категория, то любой объект* $\Box$*-проективен тогда и только тогда, когда он есть ретракт* $\Box$*-свободного объекта;*

Теперь мы продемонстрируем применение оснащенных категорий для изучения проективности банаховых модулей. Через **Ban** мы будем обозначать категорию банаховых пространств с ограниченными операторами в роли морфизмов. Если рассматривать в роли морфизмов только сжимающие операторы, то мы получим еще одну категорию обозначаемую $\mathbf{Ban}_1$. Через $A - \mathbf{mod}$ мы обозначим категорию левых банаховых A-модулей с ограниченными A-морфизмами в роли морфизмов. Через $A - \mathbf{mod}_1$ мы обозначим подкатегорию $A - \mathbf{mod}$ с теми же объектами, но только лишь сжимающими морфизмами.

В дальнейшем, в предложениях мы будем использовать сразу несколько фраз, последовательно перечисляя их и заключая в скобки таким образом: $\langle \ \ldots / \ldots \ \rangle$. Например: число x называется $\langle$ положительным / неотрицательным $\rangle$ если $\langle$ $x > 0$ / $x \geqslant 0$ $\rangle$.

В работах Хелемского [5] и Штейнера [7] были построены три верных функтора:

$$\Box_{met} : A - \mathbf{mod}_1 \to \mathbf{Set}, \qquad \Box_{top} : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{HNor}, \qquad \Box_{rel} : A - \mathbf{mod} \to \mathbf{Ban}.$$

Здесь **HNor** — это категория так называемых полунормированных пространств введенных Штейнером. Мы не будем подробно объяснять как действуют эти функторы. Нам достаточно их существования. Для оснащенных категорий $(A - \mathbf{mod}_1, \Box_{met})$, $(A - \mathbf{mod}, \Box_{top})$ и $(A - \mathbf{mod}, \Box_{rel})$ было доказано, что

(i) A-морфизм ξ $\langle$ строго коизометричен / топологически сюръективен / имеет правый обратный оператор $\rangle$ тогда и только тогда, когда он является $\langle$ $\Box_{met}$-допустимым / $\Box_{top}$-допустимым / $\Box_{rel}$-допустимый $\rangle$ эпиморфизмом;

(ii) A-модуль P является $\langle$ метрически / топологически / относительно $\rangle$ проективным тогда и только тогда, когда он $\langle$ $\Box_{met}$-проективен / $\Box_{top}$-проективен / $\Box_{rel}$-проективен $\rangle$.

Как следствие, из пункта (i) предложения 1 мы получаем:

Предложение 2. *Всякий ретракт* $\langle$ *метрически / топологически / относительно* $\rangle$ *проективного модуля в* $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ *снова* $\langle$ *метрически / топологически / относительно* $\rangle$ *проективен.*

В [5] и [7] также было доказано, что оснащенная категория $\langle$ $(A - \mathbf{mod}_1, \Box_{met})$ / $(A - \mathbf{mod}, \Box_{top})$ / $(A - \mathbf{mod}, \Box_{rel})$ $\rangle$ свободолюбива, и что $\langle$ $\Box_{met}$-свободные / $\Box_{top}$-свободные / $\Box_{rel}$-свободные $\rangle$ модули изоморфны в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ модулям вида $\langle$ $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda)$ / $A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(\Lambda)$ / $A_+ \widehat{\otimes} E$ $\rangle$. Здесь A_+ обозначает стандартную унитизацию банаховой алгебры A, а символ $\widehat{\otimes}$ обозначает проективное тензорное произведение банаховых пространств. Так как $A_+ \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} A_+ \widehat{\otimes} \mathbb{C} \underset{A-\mathbf{mod}_1}{\cong} A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(\{1\})$, то из сказанного выше и пункта (iii) предложения 1 мы немедленно получаем еще один результат.

Предложение 3. *A-модуль A_+ метрически, топологически и относительно проективен.*

Заметим, что $\langle$ $\Box_{met}$-свободные / $\Box_{top}$-свободные $\rangle$ модули совпадают с точностью до изоморфизма в $A - \mathbf{mod}$ и всякая ретракция в $A - \mathbf{mod}_1$ есть ретракция в

$A-\mathbf{mod}$. Поэтому из предложения 2 мы видим, что любой метрически проективный A-модуль топологически проективен. Заметим, также, что всякий $\square_{top}$-свободный модуль является $\square_{rel}$-свободным. Следовательно, каждый топологически проективный A-модуль будет относительно проективным. Мы резюмируем эти результаты в следующем предложении.

Предложение 4. *Каждый метрически проективный модуль является топологически проективным и каждый топологически проективный модуль является относительно проективным.*

Обратные утверждения, вообще говоря, неверны.

Легко проверить, что для любого A-модуля X линейный оператор

$$\pi_X^+ : A_+ \widehat{\otimes} \ell_1(B_X) : a \widehat{\otimes} \delta_x \mapsto a \cdot x$$

является $\langle$ $\square_{met}$-допустимым / $\square_{top}$-допустимым $\rangle$ эпиморфизмом. Здесь, через δ_x мы обозначаем функцию из $\ell_1(B_X)$ равную 1 в точке x и 0 в остальных точках. Теперь из пунктов (ii) и (iv) предложения 1 мы получаем:

Предложение 5. *Модуль P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда π_P^+ — ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$.*

Нам понадобится еще один критерий проективности. С небольшими модификациями его доказательство повторяет рассуждения предложения 7.1.14 из [10].

Предложение 6. *Пусть P — существенный A-модуль, то есть линейная оболочка $A \cdot P$ плотна в P. Тогда P $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда отображение $\pi_P : A \widehat{\otimes} \ell_1(B_P) : a \widehat{\otimes} \delta_x \mapsto a \cdot x$ есть ретракция в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$.*

2. Проективность идеалов банаховых алгебр

Далее все рассматриваемые идеалы банаховых алгебр предполагаются замкнутыми. Наше исследование мы начнем с простого наблюдения.

Предложение 7. *Пусть I — левый идеал банаховой алгебры A и $I = Ap$ для некоторого $\langle$ идемпотента $p \in I$ нормы 1 / идемпотента $p \in I$ $\rangle$. Тогда I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль;*

Доказательство. Очевидно, что I есть ретракт A_+ в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$ посредством A-морфизма $\pi : A_+ \to I : x \mapsto xp$ Теперь результат следует из предложений 2 и 3.

Чтобы получить главный результат этого параграфа нам нужны две подготовительные леммы.

Лемма 1. *Пусть I — двусторонний идеал банаховой алгебры A, существенный как левый I-модуль и пусть задан A-морфизм $\phi : I \to A$. Тогда $\operatorname{Im}(\phi) \subset I$.*

Доказательство. Так как I — правый идеал, то $\phi(ab) = a\phi(b) \in I$ для всех $a, b \in I$. Поэтому $\phi(I \cdot I) \subset I$. Так как I — существенный левый I-модуль, то $I = \mathrm{cl}_A(\mathrm{span}(I \cdot I))$ и $\operatorname{Im}(\phi) \subset \mathrm{cl}_A(\mathrm{span}\,\phi(I \cdot I)) = \mathrm{cl}_A(\mathrm{span}\, I) = I$.

Лемма 2. *Пусть I — левый идеал банаховой алгебры A. Допустим, выполнено одно из следующих условий:*

$(*)$ I имеет левую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу, и для любого морфизма $\phi : I \to A$ левых A-модулей найдется морфизм $\psi : I \to I$ правых I-модулей со свойством $\phi(x)y = x\psi(y)$ для всех $x, y \in I$.

$(**)$ I имеет правую $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу, и существует $\langle$ $C = 1$ / $C \geqslant 1$ $\rangle$ такое, что для любого морфизма $\phi : I \to A$ левых A-модулей найдется морфизм $\psi : I \to I$ правых I-модулей со свойствами $\|\psi\| \leqslant C\|\phi\|$ и $\phi(x)y = x\psi(y)$ для всех $x, y \in I$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль;*
2. *I обладает $\langle$ правой единицей нормы 1 / правой единицей $\rangle$.*

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Если выполнено $(*)$ или $(**)$, то I обладает односторонней аппроксимативной единицей. Следовательно, I — существенный левый I-модуль и тем более существенный A-модуль. По предложению 6, существует правый обратный A-морфизм $\sigma : I \to A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I)$ к π_I в $\langle$ $A - \mathbf{mod}_1$ / $A - \mathbf{mod}$ $\rangle$. Для каждого $d \in B_I$ рассмотрим A-морфизм $p_d : A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I) \to A : a \widehat{\otimes} \delta_x \mapsto \delta_x(d)a$ и $\sigma_d = p_d\sigma$. Тогда $\sigma(x) = \sum_{d\in B_I} \sigma_d(x) \widehat{\otimes} \delta_d$ для всех $x \in I$. Напомним, что $A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I)$ изометрически изоморфно ℓ_1-сумме копий алгебры A в количестве равном мощности B_I, то есть $A \widehat{\otimes} \ell_1(B_I) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_1\{A : d \in B_I\}$ Из этого отождествления мы получаем $\|\sigma(x)\| = \sum_{d\in B_I} \|\sigma_d(x)\|$ для всех $x \in I$. Так как σ — правый обратный морфизм к π_I то $x = \pi_I(\sigma(x)) = \sum_{d\in B_I} \sigma_d(x)d$ для всех $x \in I$.

Предположим, выполнено условие $(*)$. Тогда для каждого $d \in B_I$ существует морфизм правых I-модулей $\tau_d : I \to I$ такой, что $\sigma_d(x)d = x\tau_d(d)$ для всех $x \in I$. Пусть $(e_\nu)_{\nu\in N}$ — левая $\langle$ сжимающая / ограниченная $\rangle$ аппроксимативная единица в I ограниченная по норме константой D. Поскольку $\tau_d(d) \in I$ для всех $d \in B_I$, то для любого конечного множества $S \subset B_I$ выполнено

$$\sum_{d\in S} \|\tau_d(d)\| = \sum_{d\in S} \lim_\nu \|e_\nu\tau_d(d)\| = \lim_\nu \sum_{d\in S} \|e_\nu\tau_d(d)\| = \lim_\nu \sum_{d\in S} \|\sigma_d(e_\nu)d\|$$

$$\leqslant \liminf_\nu \sum_{d\in S} \|\sigma_d(e_\nu)\|\|d\| \leqslant \liminf_\nu \sum_{d\in S} \|\sigma_d(e_\nu)\| \leqslant \liminf_\nu \sum_{d\in B_I} \|\sigma_d(e_\nu)\|$$

$$= \liminf_\nu \|\sigma(e_\nu)\| \leqslant \|\sigma\| \liminf_\nu \|e_\nu\| \leqslant D\|\sigma\|.$$

Теперь предположим что, выполнено условие $(**)$. Из предположения, для каждого $d \in B_I$ существует морфизм правых I-модулей $\tau_d : I \to I$ такой, что $\sigma_d(x)d = x\tau_d(d)$ для всех $x \in I$ и $\|\tau_d\| \leqslant C\|\sigma_d\|$. Пусть $(e_\nu)_{\nu\in N}$ — правая $\langle$ сжимающая / ограниченная $\rangle$ аппроксимативная единица в I ограниченная по норме некоторой константой D. Для всех $x \in I$ выполнено

$$\|\sigma_d(x)\| = \|\sigma_d(\lim_\nu xe_\nu)\| = \lim_\nu \|x\sigma_d(e_\nu)\| \leqslant \|x\| \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|,$$

поэтому $\|\sigma_d\| \leqslant \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|$. Тогда для всех конечных множеств $S \subset B_I$ выполнено

$$\sum_{d\in S} \|\tau_d(d)\| \leqslant \sum_{d\in S} \|\tau_d\|\|d\| \leqslant C \sum_{d\in S} \|\sigma_d\| \leqslant C \sum_{d\in S} \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|$$

$$\leqslant C \liminf_{\nu} \sum_{d\in S} \|\sigma_d(e_\nu)\| \leqslant C \liminf_{\nu} \sum_{d\in B_I} \|\sigma_d(e_\nu)\| = C \liminf_{\nu} \|\sigma(e_\nu)\|$$
$$\leqslant C\|\sigma\| \liminf_{\nu} \|e_\nu\| \leqslant CD\|\sigma\|.$$

Для обоих предположений $(*)$ и $(**)$ мы доказали, что число $\sum_{d\in S}\|\tau_d(d)\|$ ограничено $\langle$ единицей / некоторой константой $\rangle$ для любого конечного множества $S\subset B_I$. Следовательно, существует $p=\sum_{d\in B_I}\tau_d(d)\in I$ со свойством $\langle$ $\|p\|\leqslant 1$ / $\|p\|<\infty$ $\rangle$. Более того, для всех $x\in I$ выполнено $x=\sum_{d\in B_I}\sigma_d(x)d=\sum_{d\in B_I}x\tau_d(d)=xp$, то есть p — правая единица в I.

$(ii) \implies (i)$ Пусть $p\in I$ — правая единица для I, тогда $I=Ap$. Теперь из предложения 7 мы получаем, что идеал I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль.

Теорема 1. *Пусть I — идеал коммутативной банаховой алгебры A и I имеет $\langle$ сжимающую / ограниченную $\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда I $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективен как A-модуль тогда и только тогда, когда I имеет $\langle$ единицу нормы 1 / единицу $\rangle$.*

Доказательство. Поскольку A коммутативна, то для любого A-морфизма $\phi: I\to A$ и любых $x,y\in I$ выполнено $\phi(x)y=x\phi(y)$. Так как I имеет ограниченную аппроксимативную единицу и I коммутативен, то мы можем применить лемму 1, чтобы заключить $\phi(y)\in I$. Теперь выполнено условие $(*)$ леммы 2, и мы получаем желаемую равносильность.

В относительной теории нет аналогичного критерия проективности идеалов. Наиболее общий результат такого типа дает лишь необходимое условие: если идеал I коммутативной банаховой алгебры A относительно проективен как A-модуль, то I имеет паракомпактный спектр [[8], теорема IV.3.6].

Отметим, что существование ограниченной аппроксимативной единицы не является необходимым условием для топологической проективности идеала коммутативной банаховой алгебры. Действительно, рассмотрим банахову алгебру $A_0(\mathbb{D})$ — идеал алгебры на диске состоящий из функций исчезающих в нуле. Комбинируя предложения 4.3.5 и 4.3.13 параграф (iii) из [9] мы заключаем, что $A_0(\mathbb{D})$ не имеет ограниченных аппроксимативных единиц. С другой стороны, из [[10], пример IV.2.2] мы знаем, что $A_0(\mathbb{D}) \underset{A_0(\mathbb{D})-\mathbf{mod}}{\cong} A_0(\mathbb{D})_+$, поэтому согласно предложению 3, $A_0(\mathbb{D})$ — топологически проективный $A_0(\mathbb{D})$-модуль.

3. Проективность идеалов C^*-алгебр

Чтобы получить описание метрически и топологически проективных левых идеалов C^*-алгебр нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть I — левый идеал унитальной C^*-алгебры A. Пусть $a\in I$ — самосопряженный элемент, и пусть E — действительное подпространство исчезающих в нуле действительнозначных функций из $C(\operatorname{sp}_A(a))$. Тогда существует изометрический гомоморфизм $\operatorname{RCont}_a^0: E\to I$ корректно определенный равенством $\operatorname{RCont}_a^0(f)=a$, где $f:\operatorname{sp}_A(a)\to\mathbb{C}: t\mapsto t$.*

Доказательство. Через $\mathbb{R}_0[t]$ мы обозначим действительное линейное подпространство в E, состоящее из многочленов исчезающих в нуле. Так как I — левый идеал в A и многочлен $p \in \mathbb{R}_0[t]$ не имеет свободного члена, то $p(a) \in I$. Следовательно, корректно определен $\mathbb{R}$-линейный гомоморфизм алгебр $\mathrm{RPol}_a^0 : \mathbb{R}_0[t] \to I : p \mapsto p(a)$. Из непрерывного функционального исчисления для любого многочлена p выполнено $\|p(a)\| = \|p|_{\mathrm{sp}_A(a)}\|_\infty$, поэтому $\|\mathrm{RPol}_a^0(p)\| = \|p|_{\mathrm{sp}_A(a)}\|_\infty$. Значит, RPol_a^0 изометричен. Так как $\mathbb{R}_0[t]$ плотно в E и I полно, то RPol_a^0 имеет изометрическое продолжение $\mathrm{RCont}_a^0 : E \to I$, которое является $\mathbb{R}$-линейным гомоморфизмом.

Следующее доказательство основано на идеях Блечера и Каниа. В [[11], лемма 2.1] они доказали, что любой алгебраически конечно порожденный левый идеал C^*-алгебры является главным.

Теорема 2. *Пусть I — левый идеал C^*-алгебры A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $I = Ap$ для некоторого самосопряженного идемпотента $p \in I$;

(ii) I — метрически проективный A-модуль;

(iii) I — топологически проективный A-модуль.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ Так как p — самосопряженный идемпотент, то $\|p\| = 1$, поэтому из пункта (i) предложения 7 следует, что идеал I метрически проективен как A-модуль.

$(ii) \implies (iii)$ Импликация следует из предложения 4.

$(iii) \implies (i)$ Пусть $(e_\nu)_{\nu \in N}$ — правая сжимающая аппроксимативная единица идеала I (существующая согласно, например [[10], теорема 4.7.79]). Так как идеал I имеет правую аппроксимативную единицу, то он является существенным левым I-модулем, и тем более существенным левым A-модулем. По предложению 6 морфизм π_I имеет правый обратный A-морфизм $\sigma : I \to A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_I)$. Для каждого $d \in B_I$ рассмотрим A-морфизмы $p_d : A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_I) \to A : a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto \delta_x(d)a$ и $\sigma_d = p_d \sigma$. Тогда $\sigma(x) = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_d$ для всех $x \in I$. Из отождествления $A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_I) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_1 \{A : d \in B_I\}$, для всех $x \in I$ мы имеем $\|\sigma(x)\| = \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(x)\|$. Так как σ суть правый обратный морфизм к π_I, то $x = \pi_I(\sigma(x)) = \sum_{d \in B_I} \sigma_d(x) d$ для всех $x \in I$.

Для всех $x \in I$ мы имеем

$$\|\sigma_d(x)\| = \|\sigma_d(\lim_\nu x e_\nu)\| = \lim_\nu \|x \sigma_d(e_\nu)\| \leqslant \|x\| \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|,$$

поэтому $\|\sigma_d\| \leqslant \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\|$. Тогда для любого конечного множества $S \subset B_I$ выполнено

$$\sum_{d \in S} \|\sigma_d\| \leqslant \sum_{d \in S} \liminf_\nu \|\sigma_d(e_\nu)\| \leqslant \liminf_\nu \sum_{d \in S} \|\sigma_d(e_\nu)\| \leqslant \liminf_\nu \sum_{d \in B_I} \|\sigma_d(e_\nu)\|$$

$$= \liminf_\nu \|\sigma(e_\nu)\| \leqslant \|\sigma\| \liminf_\nu \|e_\nu\| \leqslant \|\sigma\|.$$

Так как конечное множество $S \subset B_I$ произвольно, то сумма $\sum_{d \in B_I} \|\sigma_d\|$ конечна. Как следствие, сумма $\sum_{d \in B_I} \|\sigma_d\|^2$ тоже конечна.

Теперь будем рассматривать алгебру A как идеал в своей унитизации $A_\#$ как C^*-алгебры. Тогда I также идеал в $A_\#$. Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и действительное число $\epsilon > 0$. Тогда существует конечное множество $S \subset B_I$ такое, что $\sum_{d \in B_I \setminus S} \|\sigma_d\| < \epsilon$. Обозначим мощность этого множества через N. Рассмотрим положительный элемент $b = \sum_{d\in B_I} \|\sigma_d\|^2 d^*d \in I$. Из леммы 3 мы знаем, что $b^{1/m} \in I$, поэтому $b^{1/m} = \sum_{d\in B_I} \sigma_d(b^{1/m})d$. Из непрерывного функционального исчисления следует, что $\|b^{1/m}\| = \sup_{t\in \mathrm{sp}_{A_\#}(b)} t^{1/m} \leqslant \|b\|^{1/m}$, тогда $\limsup_{m\to\infty} \|b^{1/m}\| \leqslant 1$. Следовательно, $\|b^{1/m}\| \leqslant 2$ для достаточно больших m. Положим $\varsigma_d := \sigma_d(b^{1/m})$, $u := \sum_{d\in S} \varsigma_d d$ и $v := \sum_{d\in B_I\setminus S} \varsigma_d d$. Тогда

$$b^{2/m} = (b^{1/m})^* b^{1/m} = u^*u + u^*v + v^*u + v^*v.$$

Ясно, что $\varsigma_d^*\varsigma_d \leqslant \|\varsigma_d\|^2 e_{A_\#} \leqslant \|\sigma_d\|^2\|b^{1/m}\|^2 e_{A_\#} \leqslant 4\|\sigma_d\|^2 e_{A_\#}$. Для любых $x, y \in A$ всегда выполнено $x^*x + y^*y - (x^*y + y^*x) = (x-y)^*(x-y) \geqslant 0$, и поэтому

$$d^*\varsigma_d^*\varsigma_c c + c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d \leqslant d^*\varsigma_d^*\varsigma_d d + c^*\varsigma_c^*\varsigma_c c \leqslant 4\|\sigma_d\|^2 d^*d + 4\|\sigma_c\|^2 c^*c$$

для всех $c, d \in B_I$. Просуммируем эти неравенства по $c \in S$ и $d \in S$, тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{c\in S}\sum_{d\in S} c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d &= \frac{1}{2}\left(\sum_{c\in S}\sum_{d\in S} d^*\varsigma_d^*\varsigma_c c + \sum_{c\in S}\sum_{d\in S} c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(4N\sum_{d\in S}\|\sigma_d\|^2 d^*d + 4N\sum_{c\in S}\|\sigma_c\|^2 c^*c\right)\\
&= 4N\sum_{d\in S}\|\sigma_d\|^2 d^*d.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$u^*u = \left(\sum_{c\in S}\varsigma_c c\right)^* \left(\sum_{d\in S}\varsigma_d d\right) = \sum_{c\in S}\sum_{d\in S} c^*\varsigma_c^*\varsigma_d d \leqslant N\sum_{d\in S} 4\|\sigma_d\|^2 d^*d \leqslant 4Nb.$$

Заметим, что

$$\|u\| \leqslant \sum_{d\in S}\|\varsigma_d\|\|d\| \leqslant \sum_{d\in S} 2\|\sigma_d\| \leqslant 2\|\sigma\|, \qquad \|v\| \leqslant \sum_{d\in B_I\setminus S}\|\varsigma_d\|\|d\| \leqslant \sum_{d\in B_I\setminus S} 2\|\sigma_d\| \leqslant 2\epsilon;$$

поэтому $\|u^*v + v^*u\| \leqslant 8\|\sigma\|\epsilon$ и $\|v^*v\| \leqslant 4\epsilon^2$. Так как $u^*v + v^*u$ и v^*v — самосопряженные элементы, то $u^*v + v^*u \leqslant 8\|\sigma\|\epsilon e_{A_\#}$ и $v^*v \leqslant 4\epsilon^2 e_{A_\#}$ Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ и достаточно большого m выполнено

$$b^{2/m} = u^*u + u^*v + v^*u + v^*v \leqslant 4Nb + \epsilon(8\|\sigma\| + 4\epsilon)e_{A_\#}.$$

Другими словами, $g_m(b) \geqslant 0$ для непрерывной функции $g_m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : t \mapsto 4Nt + \epsilon(8\|\sigma\| + 4\epsilon) - t^{2/m}$. Теперь выберем $\epsilon > 0$ так, чтобы $M := \epsilon(8\|\sigma\| + 4\epsilon) < 1$. По теореме об отображении спектра [[12], теорема 6.4.2] мы получаем $g_m(\mathrm{sp}_{A_\#}(b)) = \mathrm{sp}_{A_\#}(g_m(b)) \subset \mathbb{R}_+$. Легко проверить, что g_m имеет только одну точку экстремума $t_{0,m} = (2Nm)^{\frac{m}{2-m}}$, где она достигает минимума. Так как $\lim_{m\to\infty} g_m(t_{0,m}) = M - 1 < 0$, $g_m(0) = M > 0$ и $\lim_{t\to\infty} g_m(t) = +\infty$, то для достаточно больших m функция g_m имеет ровно два корня: $t_{1,m} \in (0, t_{0,m})$ и $t_{2,m} \in (t_{0,m}, +\infty)$. Следовательно, решением неравенства $g_m(t) \geqslant 0$ будет $t \in [0, t_{1,m}] \cup [t_{2,m}, +\infty)$. Значит, $\mathrm{sp}_{A_\#}(b) \subset [0, t_{1,m}] \cup [t_{2,m}, +\infty)$ для всех достаточно больших m. Так как $\lim_{m\to\infty} t_{0,m} = 0$, то так же $\lim_{m\to\infty} t_{1,m} = 0$. Заметим, что $g_m(1) = 4N + M - 1 > 0$ для достаточно больших m, и поэтому $t_{2,m} \leqslant 1$. Следовательно, $\mathrm{sp}_{A_\#}(b) \subset \{0\} \cup [1, +\infty)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \min(1, t)$. Тогда по лемме 3 мы получаем идемпотент $p = h(b) = \mathrm{RCont}_b^0(h) \in I$, такой, что его норма $\|p\| = \sup_{t\in \mathrm{sp}_{A_\#}(b)} |h(t)| \leqslant 1$. Следовательно, p — самосопряженный идемпотент. Так как $h(t)t = th(t) = t$ для всех $t \in \mathrm{sp}_{A_\#}(b)$, то $bp = pb = b$. Последнее равенство влечет

$$0 = (e_{A_\#} - p)b(e_{A_\#} - p) = \sum_{d\in B_I} (\|\sigma_d\| d(e_{A_\#} - p))^* \|\sigma_d\| d(e_{A_\#} - p).$$

Так как правая часть этого равенства неотрицательна, то $d = dp$ для всех $d \in B_I$, для которых $\sigma_d \neq 0$. Наконец, для всех $x \in I$ мы получаем $xp = \sum_{d\in B_I} \sigma_d(x)dp = \sum_{d\in B_I} \sigma_d(x)d = x$, то есть $I = Ap$ для некоторого самосопряженного идемпотента $p \in I$.

Следует отметить, что в относительной теории нет аналогичного описания относительной проективности левых идеалов C^*-алгебр. Хотя известно, что для случая сепарабельных C^*-алгебр (то есть для C^*-алгебр сепарабельных как банахово пространство) все левые идеалы относительно проективны. В [[13], параграф 6] можно найти хороший обзор последних результатов на эту тему.

Следствие 1. *Пусть I — двусторонний идеал C^*-алгебры A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) I унитален;
(ii) I метрически проективен как A-модуль;
(iii) I топологически проективен как A-модуль.

Доказательство. Идеал I имеет двустороннюю сжимающую аппроксимативную единицу [[10], теорема 4.7.79]. Следовательно, I имеет правую единицу тогда и только тогда, когда он унитален. Теперь все эквивалентности следуют из теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть L — хаусдорфово локально компактное пространство, и пусть I — идеал в $C_0(L)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) гельфандовский спектр идеала I компактен;
(ii) I метрически проективный $C_0(L)$-модуль;
(iii) I топологически проективный $C_0(L)$-модуль.

Доказательство. Обозначим спектр идеала через $\mathrm{Spec}(I)$. По теореме Гельфанда-Наймарка $I \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C_0(\mathrm{Spec}(I))$; следовательно, идеал I полупрост как банахова алгебра. Отсюда, в силу теоремы Шилова об идемпотентах, идеал I унитален тогда и только тогда, когда $\mathrm{Spec}(I)$ компактен. Осталось применить следствие 1.

Отметим, что класс *относительно* проективных идеалов в $C_0(L)$ намного шире. Известно, что идеал I в алгебре $C_0(L)$ относительно проективен тогда и только тогда, когда его спектр паракомпактен [[8], глава IV,§§2–3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Я. Хелемский, “ О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами”, *Математический сборник*, **81 3** (1970), 430–444.

[2] G. Wittstock, “ Injectivity of the module tensor product of semi-Ruan modules”, *Journal of Operator Theory*, **65 1** (2011), 87.

[3] E. G. Effros, N. Ozawa, Z. J. Ruan, “ On injectivity and nuclearity for operator spaces”, *Duke Mathematical Journal*, **110 3** (2001), 489–521.

[4] B. Forrest, “ Projective operator spaces, almost periodicity and completely complemented ideals in the Fourier algebra”, *Rocky Mountain J. Math.*, **41 1** (2011), 155–176.

[5] А. Я. Хелемский, “ Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей”, *Матем. сб.*, **204 7** (2013), 450–469.

[6] A. W. M. Graven, “ Injective and projective Banach modules”, *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, **82 1** (1979), 253–272.

[7] С. М. Штейнер, “ Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей”, *Вестник Самарского государственного университета*, **9/1(110)**, 49–57.

[8] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, изд-во МГУ, 1986.

[9] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, Clarendon Press, 2000.

[10] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, 1989.

[11] D. P. Blecher, T. Kania, “ Finite generation in C^*-algebras and Hilbert C^*-modules”, *Studia Mathematica*, **224 2** (2014), 143–151.

[12] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, 2015.

[13] D. Cushing, Z. A. Lykova, “ Projectivity of Banach and C^*-algebras of continuous fields”, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **64 2** (2013), 341–371.

Н. Т. Немеш
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `nemeshnorbert@yandex.ru`

Поступило
??.??.????
Исправленный
вариант
??.??.????