УДК 517.968.22

Н. Т. Немеш

Топологически проективные, инъективные и плоские модули гармонического анализа

В работе изучаются гомологически тривиальные модули гармонического анализа на локально компактной группе G. Для $L_1(G)$- и $M(G)$-модулей $C_0(G)$, $L_p(G)$ и $M(G)$ даны критерии метрической и топологической проективности, инъективности и плоскости. В большинстве случаев модули обладающие этими свойствами должны быть конечномерными.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: Банахов модуль, проективность, инъективность, плоскость, гармонический анализ.

§ 1. Введение

История банаховой гомологии начинается еще в 50-х годах прошлого века. Один из основных вопросов этой науки: является ли данный банахов модуль гомологически тривиальным, то есть проективным, инъективным или плоским? В качестве примера успешного ответа на этот вопрос можно привести работы Дейлса, Полякова, Рахера и Рамсдена [1, 2, 3], где они дали критерии гомологической тривиальности для классических модулей гармонического анализа. Следует сказать, что все эти результаты были получены для относительной банаховой гомологии. В этой статье мы ответим на те же самые вопросы, но для двух менее изученных версий банаховой гомологии — метрической и топологической. Метрическая банахова гомология была впервые рассмотрена в работе Гравена [4], где он применяет передовые, на тот момент, гомологические и банахово-геометрические методы для изучения модулей гармонического анализа. Понятия топологической банаховой гомологии были определены в работе Уайта [5]. На первый взгляд, эта теория кажется намного менее ограничительной чем метрическая, но, как мы скоро увидим, это совсем не так.

§ 2. Предварительные сведения по банаховой гомологии

В дальнейшем, в предложениях мы будем использовать сразу несколько вариантов, последовательно перечисляя их и заключая в скобки таким образом: $\langle \ldots / \ldots \rangle$. Например, число x называется $\langle$ положительным / неотрицательным $\rangle$ если $\langle\, x > 0 \;/\; x \geqslant 0 \,\rangle$.

Если не оговорено иначе, все банаховы пространства рассматриваются над полем комплексных чисел. Пусть E — банахово пространство, тогда через

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 19–01–00447-а).

B_E мы будем обозначать замкнутый единичный шар в E. Если F — еще одно банахово пространство, то мы будем говорить, что линейный оператор $T : E \to F$ является $\langle$ *изометрическим* / *c-топологически инъективным* $\rangle$ если $\langle \|T(x)\| = \|x\|$ / $c\|T(x)\| \geqslant \|x\| \rangle$ для всех $x \in E$. Аналогично, T называется $\langle$ *строго коизометрическим* / *строго c-топологически сюръективным* $\rangle$ если $\langle T(B_E) = B_F$ / $cT(B_E) \supset B_F \rangle$. В некоторых случаях, мы будем опускать константу c. Для обозначения ℓ_p-суммы банаховых пространств мы будем использовать символ $\bigoplus_p$, и $\widehat{\otimes}$ для проективного тензорного произведения.

Далее, через A мы будем обозначать произвольную банахову алгебру. Символом A_+ мы обозначим стандартную унитализацию A. Мы будем рассматривать банаховы модули только с сжимающим билинейным оператором внешнего умножения. Банахов A-модуль X будем называть $\langle$ существенным / верным / аннуляторным $\rangle$ если $\langle$ линейная оболочка множетсва $A \cdot X$ плотна в X / $a \cdot X = \{0\}$ влечет $a = 0$ / $A \cdot X = \{0\}$ $\rangle$. Всякий ограниченный линейный оператор являющийся морфизмом A-модулей мы будем называть A-морфизмом. Символ $A - \mathbf{mod}$ будет обозначать категорию левых банаховых A-модулей с A-морфизмами в качестве стрелок. Через $A - \mathbf{mod}_1$ мы обозначим подкатегорию $A - \mathbf{mod}$ с теми же объектами, но лишь сжимающими A-морфизмами. Аналогичные категории для правых A-модулей будем обозначать через $\mathbf{mod} - A$ и $\mathbf{mod}_1 - A$, соответственно. Символом $\cong$ мы будем обозначать изоморфизм объектов в категории. Через $\widehat{\otimes}_A$ мы обозначим функтор модульного тензорного произведения, а стандартный функтор морфизмов через Hom. Теперь мы можем дать наши основные определения.

Определение 1. Левый банахов A-модуль P называется $\langle$ *метрически* / *C-топологически* / *C-относительно* $\rangle$ *проективным* если функтор морфизмов $\langle \mathrm{Hom}_{A-\mathbf{mod}_1}(P, -)$ / $\mathrm{Hom}_{A-\mathbf{mod}}(P, -)$ / $\mathrm{Hom}_{A-\mathbf{mod}}(P, -) \rangle$ переводит $\langle$ строго коизометрические морфизмы / строго c-топологически сюръективные морфизмы / морфизмы с правым обратным оператором нормы не более c $\rangle$ в $\langle$ строго коизометрические / строго cC-топологически сюръективные / строго cC-топологически сюръективные $\rangle$ операторы.

Определение 2. Правый банахов A-модуль J называется $\langle$ *метрически* / *C-топологически* / *C-относительно* $\rangle$ *инъективным* если функтор морфизмов $\langle \mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}_1-A}(-, J)$ / $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}-A}(-, J)$ / $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}-A}(-, J) \rangle$ переводит $\langle$ строго изометрические морфизмы / c-топологически инъективные морфизмы / морфизмы с левым обратным оператором нормы не более c $\rangle$ в $\langle$ строго коизометрические / строго cC-топологически сюръективные / строго cC-топологически сюръективные $\rangle$ операторы.

Определение 3. Левый банахов A-модуль F называется $\langle$ *метрически* / *C-топологически* / *C-относительно* $\rangle$ *плоским* если функтор $- \widehat{\otimes}_A F$ переводит $\langle$ изометрические морфизмы / c-топологически инъективные морфизмы / морфизмы с левым обратным оператором нормы не более c $\rangle$ в $\langle$ изометрические / cC-топологически инъективные / cC-топологически инъективные $\rangle$ операторы.

Для краткости мы будем называть банахов модуль $\langle$ *топологически* / *относительно* $\rangle$ проективным, инъективным или плоским если он $\langle$ C-топологически

/ C-относительно $\rangle$ проективный, инъективный или плоский для некоторого $C > 0$.

Эти определения были изложены, в несколько иной форме, Гравеном для метрической теории [4], Уайтом для топологической теории [5] и Хелемским для относительной [6]. В работе Уайта топологически проективные инъективные и плоские модули назывались соответственно строго проективными, инъективными и плоскими. Следует отметить, что понятие строго плоского плоского и строго инъективного модуля еще раньше были даны Хелемским в [8; параграф VII.1]. Основы метрической, топологической и относительной теории можно найти в [7]. Мы будем активно использовать результаты этой статьи.

§ 3. Предварительные сведения по гармоническому анализу

Пусть G — локально компактная группа с единицей e_G. Левая мера Хаара на G будет обозначаться через m_G, а символ Δ_G будет использоваться для модулярной функции группы G. Для $\langle$ бесконечной дискретной / компактной $\rangle$ группы G мы будем нормировать меру m_G так чтобы она была $\langle$ считающей / вероятностной $\rangle$ мерой. В дальнейшем для всех $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ через $L_p(G)$ мы будем обозначать лебегово пространство функций интегрируемых со степенью p по отношению к мере Хаара.

Мы будем рассматривать $L_1(G)$ как банахову алгебру со сверткой в качестве умножения. Эта банахова алгебра обладает сжимающей двусторонней аппроксимативной единицей [9; теорема 3.3.23]. Очевидно, алгебра $L_1(G)$ унитальна тогда и только тогда, когда группа G дискретна. В этом случае индикаторная функция e_G, обозначим ее δ_{e_G}, является единицей в $L_1(G)$. Аналогично, пространство комплексных конечных регулярных борелевских мер $M(G)$ со сверткой в качестве умножения становится унитальной банаховой алгеброй. Роль единицы играет мера Дирака δ_{e_G} сосредоточенная на e_G. Более того, $M(G)$ — это копроизведение, в смысле теории категорий, в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$ (но не в $M(G) - \mathbf{mod}_1$) двустороннего идеала $M_a(G)$ мер абсолютно непрерывных по отношению к m_G и подалгебры $M_s(G)$ состоящей из мер сингулярных по отношению к m_G. Заметим, что $M_a(G) \cong L_1(G)$ в $M(G) - \mathbf{mod}_1$ и $M_s(G)$ — аннуляторный $L_1(G)$-модуль. Наконец, $M(G) = M_a(G)$ тогда и только тогда, когда группа G дискретна.

Теперь приступим к обсуждению стандартных левых и правых модулей над алгебрами $L_1(G)$ и $M(G)$. Отметим, что банахова алгебра $L_1(G)$ является двусторонним идеалом в $M(G)$ посредством изометрического $M(G)$-морфизма левых и правых модулей $i : L_1(G) \to M(G) : f \mapsto f m_G$. Следовательно, достаточно определить все модульные структуры над алгеброй $M(G)$. Для любых $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L_p(G)$ и $\mu \in M(G)$ положим по определению

$$(\mu *_p f)(s) = \int_G f(t^{-1}s)d\mu(t), \qquad (f *_p \mu)(s) = \int_G f(st^{-1})\Delta_G(t^{-1})^{1/p}d\mu(t)$$

Эти внешние умножения превращают все банаховы пространства $L_p(G)$ для $1 \leqslant p < +\infty$ в левые и правые $M(G)$-модули. Отметим, что для $p = 1$ и

$\mu \in M_a(G)$ мы получаем обычное определение свертки. Для $1 < p \leqslant +\infty$, $f \in L_p(G)$ и $\mu \in M(G)$ мы определим

$$(\mu \cdot_p f)(s) = \int_G \Delta_G(t)^{1/p} f(st) d\mu(t), \qquad (f \cdot_p \mu)(s) = \int_G f(ts) d\mu(t)$$

Эти внешние умножения задают на всех пространствах $L_p(G)$ для $1 < p \leqslant +\infty$ структуру левых и правых $M(G)$-модулей. Этот специальный выбор внешних умножений хорошо согласуется с двойственностью. Действительно, имеет место изоморфизм $(L_p(G), *_p)^* \cong (L_{p^*}(G), \cdot_{p^*})$ в $\mathbf{mod}_1 - M(G)$ для всех $1 \leqslant p < +\infty$. Тут мы полагаем по определению, что $p^* = p/(p-1)$ если $1 < p < +\infty$ и $p^* = +\infty$ если $p = 1$. Наконец, банахово пространство $C_0(G)$ также становится левым и правым $M(G)$-модулей с $\cdot_\infty$ в качестве внешнего умножения. Более того, $C_0(G)$ является левым и правым $M(G)$-подмодулем $L_\infty(G)$, причем $(C_0(G), \cdot_\infty)^* \cong (M(G), *)$ в $M(G) - \mathbf{mod}_1$.

Через $\widehat{G}$ мы будем обозначать дуальную группу группы G. Любой характер $\gamma \in \widehat{G}$ задает непрерывный характер

$$\varkappa_\gamma^L : L_1(G) \to \mathbb{C} : f \mapsto \int_G f(s)\overline{\gamma(s)} dm_G(s), \quad \varkappa_\gamma^M : M(G) \to \mathbb{C} : \mu \mapsto \int_G \overline{\gamma(s)} d\mu(s).$$

на $L_1(G)$ и $M(G)$ соответственно. Символом $\mathbb{C}_\gamma$ мы будем обозначать левый и правый аугментационный $L_1(G)$- или $M(G)$-модуль. Его внешние умножения определяются равенствами

$$f \cdot_\gamma z = z \cdot_\gamma f = \varkappa_\gamma^L(f) z, \qquad \mu \cdot_\gamma z = z \cdot_\gamma \mu = \varkappa_\gamma^M(\mu) z$$

для $f \in L_1(G)$, $\mu \in M(G)$ и $z \in \mathbb{C}$.

Одно из многих определений аменабельной группы говорит, что локально компактная группа G является аменабельной если существует $L_1(G)$-морфизм правых модулей $M : L_\infty(G) \to \mathbb{C}_{e_{\widehat{G}}}$ такой что $M(\chi_G) = 1$ [8; раздел VII.2.5]. Мы даже можем предполагать, что функционал M сжимающий [8; замечание VII.1.54].

Все результаты этого раздела, для которых не было указано ссылок, подробно описаны в [9; раздел 3.3].

§ 4. $L_1(G)$-модули

Метрические гомологические свойства стандартных $L_1(G)$-модулей гармонического анализа впервые были изучены в [4]. Мы обобщим эти идеи на случай топологической банаховой гомологии. Чтобы прояснить определения мы начнем с общего результата об инъективности. Будет поучительно доказать его по определению.

Предложение 1. *Пусть A — банахова алгебра со сжимающей правой аппроксимативной единицей, тогда правый A-модуль A^* метрически инъективен.*

Доказательство. Пусть $\xi : Y \to X$ — изометрический A-морфизм правых A-модулей X и Y и пусть задан сжимающий A-морфизм $\phi : Y \to A^*$. По предположению A обладает сжимающей аппроксимативной единицей, назовем ее

$(e_\nu)_{\nu\in N}$. Для каждого $\nu\in N$ определим ограниченный линейный функционал $f_\nu : Y\to\mathbb{C} : y\to\phi(y)(e_\nu)$. По теореме Хана-Банаха существует ограниченный линейный функционал $g_\nu : X\to\mathbb{C}$ такой что $g_\nu\xi = f_\nu$ и $\|g_\nu\| = \|f_\nu\|$. Легко проверить, что $\psi_\nu : X\to A^* : x\mapsto (a\mapsto g_\nu(x\cdot a))$ есть A-морфизм правых модулей такой, что $\|\psi_\nu\|\leqslant\|\phi\|$ и $\psi_\nu(\xi(y))(a) = \phi(y)(ae_\nu)$ для всех $y\in Y$ и $a\in A$. Поскольку направленность $(\psi_\nu)_{\nu\in N}$ ограничена по норме, существует поднаправленность $(\psi_\mu)_{\mu\in M}$ с таким же ограничением на нормы, которая сходится в слабо*-операторной топологии к некоторому оператору $\psi : X\to A^*$. Легко видеть, что ψ является морфизмом правых A-модулей причем $\psi\xi=\phi$ и $\|\psi\|\leqslant\|\phi\|$. Поскольку ϕ произвольно, отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mod}_1-A}(\xi, A^*)$ строго коизометрично. Следовательно, модуль A^* метрически инъективен.

Предложение 2. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда $L_\infty(G)$ метрически и топологически инъективен как $L_1(G)$-модуль. Как следствие, $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$ метрически и топологически плоский.*

Доказательство. Так как $L_1(G)$ обладает сжимающей аппроксимативной единицей, то по предложению 1 правый $L_1(G)$-модуль $L_1(G)^*$ метрически инъективен. Как следствие, он топологически инъективен [7; предложение 2.14]. Осталось напомнить, что $L_\infty(G)\cong L_1(G)^*$ в $\mathbf{mod}_1 - L_1(G)$. Результат о плоскости $L_1(G)$ следует из [7; предложение 2.21].

Предложение 3. *Пусть G — локально компактная группа и $\gamma\in\widehat{G}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G компактна;

(ii) $\mathbb{C}_\gamma$ — метрически проективный $L_1(G)$-модуль;

(iii) $\mathbb{C}_\gamma$ — топологически проективный $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (i) Доказательство аналогично [4; теорема 4.2].

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Импликация следует из [7; предложение 2.4].

Предложение 4. *Пусть G — локально компактная группа и $\gamma\in\widehat{G}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G аменабельна;

(ii) $\mathbb{C}_\gamma$ — метрически инъективный $L_1(G)$-модуль;

(iii) $\mathbb{C}_\gamma$ — топологически инъективный $L_1(G)$-модуль;

(iv) $\mathbb{C}_\gamma$ — метрически плоский $L_1(G)$-модуль;

(v) $\mathbb{C}_\gamma$ — топологически плоский $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (i) Доказательство аналогично [4; теорема 4.5].

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Импликация следует из [7; предложение 2.14].

(ii) $\Longrightarrow$ (iv), (iii) $\Longrightarrow$ (v) Напомним, что $\mathbb{C}_\gamma^*\cong\mathbb{C}_\gamma$ в $\mathbf{mod}_1 - L_1(G)$, поэтому все эквивалентности следуют из трех предыдущих пунктов и того факта что плоские модули это в точности модули чьи сопряженные модули инъективны [7; предложение 2.21].

В следующем предложении мы займемся изучением специальных идеалов банаховой алгебры $L_1(G)$, а именно идеалов вида $L_1(G)*\mu$ для некоторой идемпотентной меры μ. На самом деле, этот класс идеалов в случае коммутативной группы совпадает с классом левых идеалов $L_1(G)$ обладающих правой аппроксимативной единицей.

Теорема 1. *Пусть G — локально компактная группа и $\mu \in M(G)$ — идемпотентная мера, то есть $\mu * \mu = \mu$. Допустим, что левый идеал $I = L_1(G) * \mu$ банаховой алгебры $L_1(G)$ топологически проективен как $L_1(G)$-модуль. Тогда $\mu = pm_G$ для некоторого $p \in I$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный морфизм $L_1(G)$-модулей $\phi : I \to L_1(G)$. Определим $L_1(G)$-морфизм $\phi' : L_1(G) \to L_1(G) : x \mapsto \phi(x * \mu)$. По теореме Венделя [11; теорема 1], существует мера $\nu \in M(G)$ такая что $\phi'(x) = x * \nu$ для всех $x \in L_1(G)$. В частности, $\phi(x) = \phi(x * \mu) = \phi'(x) = x * \nu$ для любого $x \in I$. Отсюда следует, что $\psi : I \to I : x \mapsto \nu * x$ — морфизм правых I-модулей такой, что $\phi(x)y = x\psi(y)$ для всех $x, y \in I$. Из [10; лемма 2, пункт (ii)] следует, что идеал I обладает правой единицей, скажем $e \in I$. Тогда $x * \mu = x * \mu * e$ для всех $x \in L_1(G)$. Две меры равны если их свертки со всеми функциями из $L_1(G)$ совпадают [9; следствие 3.3.24], поэтому $\mu = \mu * e m_G$. Так как $e \in I \subset L_1(G)$, то $\mu = \mu * e m_G \in M_a(G)$. Положим $p = \mu * e \in I$, тогда $\mu = pm_G$.

Для случая метрической проективности наша гипотеза состоит в том, что левый идеал вида $L_1(G) * \mu$ для идемпотентной меры μ метрически проективен как $L_1(G)$-модуль тогда и только тогда, когда $\mu = pm_G$ для $p \in I$ нормы 1. В [4] Гравен дал критерий метрической проективности $L_1(G)$-модуля $L_1(G)$. Теперь мы можем получить этот результат как простое следствие.

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G дискретна;
(ii) $L_1(G)$ — метрически проективный $L_1(G)$-модуль;
(iii) $L_1(G)$ — топологически проективный $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Если группа G дискретна, то $L_1(G)$ — унитальная алгебра с единицей нормы 1. Из [10; предложение 7] мы получаем, что $L_1(G)$ метрически проективен как $L_1(G)$-модуль.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Импликация следует из [7; предложение 2.4].

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Очевидно, δ_{e_G} — идемпотентная мера. Так как $L_1(G) = L_1(G) * \delta_{e_G}$ — метрически проективный $L_1(G)$-модуль, то из предложения 1 следует, что $\delta_{e_G} = f m_G$ для некоторого $f \in L_1(G)$. Это возможно только если группа G дискретна.

Стоит отметить, что $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$ относительно проективен для любой локально компактной группы G [8; упражнение 7.1.17].

Предложение 5. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) G дискретна;
(ii) $M(G)$ — метрически проективный $L_1(G)$-модуль;
(iii) $M(G)$ — топологически проективный $L_1(G)$-модуль;
(iv) $M(G)$ — метрически плоский $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Как известно, $M(G) \cong L_1(G)$ в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$ когда группа G дискретна, поэтому результат следует из теоремы 2.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Импликация следует из [7; предложение 2.4].

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Импликация следует из [7; предложение 2.26].

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Так как $M(G) \cong L_1(G) \bigoplus_1 M_s(G)$ в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$, то модуль $M_s(G)$ топологически проективен как ретракт топологически проективного модуля [7; предложение 2.2]. Заметим, что $M_s(G)$ — аннуляторный $L_1(G)$-модуль, следовательно алгебра $L_1(G)$ обладает правой единицей [7; предложение 3.3]. Поскольку $L_1(G)$ также обладает двусторонней аппроксимативной единицей, то алгебра $L_1(G)$ унитальна. Отсюда следует, что группа G дискретна.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Поскольку $M(G) \cong L_1(G) \bigoplus_1 M_s(G)$ в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$, то $M_s(G)$ — метрически плоский модуль как ретракт метрически плоского модуля [7; предложение 2.27]. Так как $M_s(G)$ является аннуляторным $L_1(G)$-модулем над ненулевой алгеброй $L_1(G)$, то $M_s(G)$ должен быть нулевым модулем [7; предложение 3.6]. Это возможно только если G — дискретная группа.

Предложение 6. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда $L_1(G)$-модуль $M(G)$ топологически плоский.*

Доказательство. Напомним, что банахово пространство $M(G)$ является L_1-пространством и тем более $\mathscr{L}_1^g$-пространством [12; пункт 3.13, упражнение 4.7(b)]. Так как пространство $M_s(G)$ дополняемо в $M(G)$, то $M_s(G)$ так же является $\mathscr{L}_1^g$-пространством [12; следствие 23.2.1(2)]. Более того $M_s(G)$ — аннуляторный $L_1(G)$-модуль, значит он топологически плоский $L_1(G)$-модуль [7; предложение 3.6]. По предложению 2 топологически плоским является и $L_1(G)$-модуль $L_1(G)$. Снова используя изоморфизм $M(G) \cong L_1(G) \bigoplus_1 M_s(G)$ в $L_1(G) - \mathbf{mod}_1$, мы заключаем, что $L_1(G)$-модуль $M(G)$ топологически плоский как сумма топологически плоских модулей [7; предложение 2.27].

§ 5. $M(G)$-модули

Мы приступаем к обсуждению стандартных $M(G)$-модулей гармонического анализа. Как мы увидим, большая часть результатов может быть получена из предыдущих теорем и утверждений для $L_1(G)$-модулей.

Предложение 7. *Пусть G — локально компактная группа и X — $\langle$ существенный / верный / существенный $\rangle$ $L_1(G)$-модуль. Тогда,*

(i) X является метрически $\langle$ проективным / инъективным / плоским $\rangle$ $M(G)$-модулем тогда и только тогда когда он метрически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ как $L_1(G)$-модуль;

(ii) X является топологически $\langle$ проективным / инъективным / плоским $\rangle$ $M(G)$-модулем тогда и только тогда, когда он топологически $\langle$ проективный / инъективный / плоский $\rangle$ как $L_1(G)$-модуль.

Доказательство. Напомним, что $L_1(G)$ — двусторонний 1-дополняемый идеал алгебры $M(G)$. Теперь утверждения пунктов (i) и (ii) следуют из $\langle$ [7; предложение 2.6] / [7; предложение 2.16] / [7; предложение 2.24] $\rangle$.

Здесь следует упомянуть, что $L_1(G)$-модули $C_0(G)$, $L_p(G)$ для $1 \leqslant p < \infty$ и $\mathbb{C}_\gamma$ для $\gamma \in \widehat{G}$ суть существенные модули, а $C_0(G)$, $M(G)$, $L_p(G)$ для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\mathbb{C}_\gamma$ для $\gamma \in \widehat{G}$ суть верные $L_1(G)$-модули.

Предложение 8. *Пусть G — локально компактная группа. Тогда $M(G)$ метрически и топологически проективен как $M(G)$-модуль. Как следствие, он является метрически и топологически плоским $M(G)$-модулем.*

Доказательство. Так как $M(G)$ — унитальная алгебра с единицей нормы 1, то $\langle$ метрическая / топологическая $\rangle$ проективность $M(G)$ следует из [10; предложение 7], поскольку $M(G)$ можно рассмотреть унитальный как идеал алгебры $M(G)$. Остается напомнить что всякий $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ проективный модуль также является $\langle$ метрически / топологически $\rangle$ плоским [7; предложение 2.26].

§ 6. Ограничения банаховой геометрии

В этом разделе мы покажем, что многие модули гармонического анализа не могут быть метрически или топологически проективными, инъективными или плоским по причинам своей плохой банаховой геометрии. В метрической теории для бесконечномерных $L_1(G)$-модулей $L_p(G)$, $M(G)$ и $C_0(G)$ это было сделано в [4; теоремы 4.12–4.14].

Предложение 9. *Пусть G — бесконечная локально компактная группа. Тогда*

(i) банаховы пространства $L_1(G)$, $C_0(G)$, $M(G)$ и $L_\infty(G)^*$ не являются топологически инъективными;

(ii) банаховы пространства $C_0(G)$ и $L_\infty(G)$ не дополняемы ни в одном L_1-пространстве.

Доказательство. Так как G — бесконечная группа, то все рассматриваемые банаховы пространства бесконечномерны.

(i) Если бесконечномерное банахово пространство топологически инъективно, то оно содержит копию $\ell_\infty(\mathbb{N})$ [13; следствие 1.1.4], и как следствие копию $c_0(\mathbb{N})$. Банахово пространство $L_1(G)$ слабо секвенциально полно [14; следствие III.C.14], поэтому из [15; следствие 5.2.11] мы знаем, что оно не может содержать копию $c_0(\mathbb{N})$. Таким образом, банахово пространство $L_1(G)$ не топологически инъективно. Допустим, что пространство $M(G)$ топологически инъективно, тогда инъективно и его дополняемое подпространство $M_a(G)$, изоморфное $L_1(G)$. Это противоречит рассуждениям выше. Из [16; следствие 3] известно, что банахово пространство $C_0(G)$ не дополняемо в $L_\infty(G)$, следовательно оно не может быть топологически инъективным. Напомним, что пространство $L_1(G)$ дополняемо в $L_\infty(G)^*$, которое в свою очередь изометрически изоморфно $L_1(G)^{**}$ [12; предложение B10]. Следовательно, если банахово пространство $L_\infty(G)^*$ топологически инъективно, то $L_1(G)$ тоже будет инъективным. Это противоречит рассуждениям выше.

(ii) Допустим, $C_0(G)$ является ретрактом некоторого L_1-пространства, тогда пространство $M(G)$, которое, как известно, изометрически изоморфно $C_0(G)^*$, будет ретрактом некоторого L_∞-пространства. Следовательно, $M(G)$ — топологически инъективное банахово пространство. Это противоречит пункту (i). Так как пространство $\ell_\infty(\mathbb{N})$ вкладывается в $L_\infty(G)$, то существует и вложение пространства $c_0(\mathbb{N})$. Если $L_\infty(G)$ ретракт некоторого L_1-пространства, то такое L_1-пространство будет содержать копию $c_0(\mathbb{N})$. Как было показано в пункте (i) это невозможно.

С этого момента через A мы будем обозначать одну из алгебр $L_1(G)$ или $M(G)$. Напомним, что $L_1(G)$ и $M(G)$ являются L_1-пространствами.

Предложение 10. *Пусть G — бесконечная локально компактная группа. Тогда*

(i) A-модули $C_0(G)$ и $L_\infty(G)$ не являются ни метрически ни топологически проективными;

(ii) A-модули $L_1(G)$, $C_0(G)$, $M(G)$ и $L_\infty(G)^*$ не являются ни метрически ни топологически инъективными;

(iii) A-модули $L_\infty(G)$ и $C_0(G)$ не являются ни метрически ни топологически плоскими.

(iv) A-модули $L_p(G)$ для $1 < p < \infty$ не являются ни метрически ни топологически проективными, инъективными или плоскими.

Доказательство. (i) Каждый метрически или топологически проективный A-модуль дополняем в некотором L_1-пространстве [7; предложение 3.8]. Остается применить пункт (ii) предложения 9.

(ii) Каждый метрически или топологически инъективный A-модуль является топологически инъективным банаховым пространством [7; предложение 3.8]. Теперь результат следует из пункта (i) предложения 9.

(iii) Напомним, что $C_0(G)^* \cong M(G)$ в $\mathbf{mod}_1 - A$. Теперь достаточно скомбинировать результаты пункта (i) и тот факт, что модуль сопряженный к плоскому инъективен [7; предложение 2.21].

(iv) Так как пространства $L_p(G)$ рефлексивны для $1 < p < \infty$ то достаточно применить [7; следствие 3.14].

Осталось рассмотреть метрические и топологические гомологические свойства A-модулей для конечной группы G.

Предложение 11. *Пусть G — нетривиальная конечная группа и $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Тогда A-модуль $L_p(G)$ является метрически $\langle$ проективным / инъективным $\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle\ p = 1\ /\ p = +\infty\ \rangle$.*

Доказательство. Допустим, что A-модуль $L_p(G)$ метрически $\langle$ проективен / инъективен $\rangle$. Поскольку пространство $L_p(G)$ конечномерно, то в силу $\langle$ проективности / инъективности $\rangle$ должны существовать изометрические изоморфизмы $\langle\ L_p(G) \cong \ell_1(\mathbb{N}_n)\ /\ L_p(G) \cong \ell_\infty(\mathbb{N}_n)\ \rangle$ [7; предложение 3.8, пункты (i), (ii)], где $n = \mathrm{Card}(G) > 1$. Теперь воспользуемся результатом теоремы 1 из [17] для банаховых пространств над полем $\mathbb{C}$: если для $2 \leqslant m \leqslant k$ и $1 \leqslant r, s \leqslant \infty$, существует изометрическое вложение из $\ell_r(\mathbb{N}_m)$ в $\ell_s(\mathbb{N}_k)$, то либо $r = 2$, $s \in 2\mathbb{N}$ либо $r = s$. Таким образом, $\langle\ p = 1\ /\ p = +\infty\ \rangle$. Обратная импликация легко следует из $\langle$ теоремы 2 / предложения 2 $\rangle$.

Предложение 12. *Пусть G — конечная группа. Тогда,* *(i) A-модули $C_0(G)$ и $L_\infty(G)$ метрически инъективны;*

(ii) A-модули $C_0(G)$ и $L_p(G)$ для $1 < p \leqslant +\infty$ метрически проективны тогда и только тогда, когда группа G тривиальна;

(iii) A-модули $M(G)$ и $L_p(G)$ для $1 \leqslant p < +\infty$ метрически инъективны тогда и только тогда, когда группа G тривиальна;

(iv) A-модули $C_0(G)$ и $L_p(G)$ для $1 < p \leqslant +\infty$ метрически плоские тогда и только тогда, когда группа G тривиальна.

Доказательство. (i) Так как группа G конечна, то $C_0(G) = L_\infty(G)$. Теперь необходимый результат следует из предложения 2.

(i) Если группа G тривиальна, то есть $G = \{e_G\}$, то $L_p(G) = C_0(G) = L_1(G)$. Осталось воспользоваться пунктом (i). Если группа G нетривиальна, то достаточно вспомнить, что $C_0(G) = L_\infty(G)$ и использовать предложение 11.

(iii) Если $G = \{e_G\}$, то $M(G) = L_p(G) = L_\infty(G)$ и можно снова использовать пункт (i). Если группа G нетривиальна, то можно применить предложение 11 поскольку в этом случае $M(G) = L_1(G)$.

(iv) Из пункта (iii) следует, что для $1 \leqslant p < +\infty$ модули $L_p(G)$ метрически инъективны тогда и только тогда, когда группа G тривиальна. Напомним, что банахов модуль плоский тогда и только тогда, когда его сопряженный модуль инъективен [7; предложение 2.21]. Теперь результат для модулей $L_p(G)$ следует из отождествления $L_p(G)^* \cong L_{p^*}(G)$ в $\mathbf{mod}_1 - L_1(G)$ для $1 \leqslant p^* < +\infty$. Аналогично используя характеризацию плоских модулей и изоморфизмы $C_0(G)^* \cong M(G) \cong L_1(G)$ в $\mathbf{mod}_1 - L_1(G)$ мы получаем критерий инъективности для $M(G)$.

Следует сказать, что если бы мы рассматривали все банаховы пространства над полем действительных чисел, то модули $L_\infty(G)$ и $L_1(G)$ были бы метрически проективны и инъективны соответственно, для группы G состоящей из двух элементов. Причина в том, что $L_\infty(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{R}_{\gamma_0} \bigoplus_1 \mathbb{R}_{\gamma_1}$ в $L_1(\mathbb{Z}_2) - \mathbf{mod}_1$ и $L_1(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{R}_{\gamma_0} \bigoplus_\infty \mathbb{R}_{\gamma_1}$ в $\mathbf{mod}_1 - L_1(\mathbb{Z}_2)$. Здесь, $\mathbb{Z}_2$ обозначает единственную группу из двух элементов и $\gamma_0, \gamma_1 \in \widehat{\mathbb{Z}_2}$ — ее характеры задаваемые равенствами $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = -\gamma_1(1) = 1$.

Предложение 13. *Пусть G — конечная группа. Тогда $C_0(G)$, $M(G)$ и $L_p(G)$ для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ являются топологически проективными, инъективными и плоскими A-модулями.*

Доказательство. Для конечной группы G мы имеем $M(G) = L_1(G)$ и $C_0(G) = L_\infty(G)$, поэтому модули $C_0(G)$ и $M(G)$ не требуют специального рассмотрения. Поскольку $M(G) = L_1(G)$, мы можем ограничиться случаем $A = L_1(G)$. Тождественное отображение $i : L_1(G) \to L_p(G) : f \mapsto f$ является топологическим изоморфизмом банаховых пространств, так как $L_1(G)$ и $L_p(G)$ для $1 \leqslant p < +\infty$ имеют одинаковую размерность. Так как группа G конечна, то она унимодулярна. Поэтому, совпадают внешние умножения в $(L_1(G), *)$ и $(L_p(G), *_p)$ для $1 \leqslant p < +\infty$. Следовательно i — изоморфизм в $L_1(G) - \mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod} - L_1(G)$. Аналогично можно показать, что модули $(L_\infty(G), \cdot_\infty)$ и $(L_p(G), \cdot_p)$ для $1 < p \leqslant +\infty$ изоморфны в $L_1(G) - \mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod} - L_1(G)$. Наконец, легко проверить, что модули $(L_1(G), *)$ и $(L_\infty(G), \cdot_\infty)$ изоморфны в $L_1(G) - \mathbf{mod}$ и $\mathbf{mod} - L_1(G)$ посредством изоморфизма j :

$L_1(G) \to L_\infty(G) : f \mapsto (s \mapsto f(s^{-1}))$. Таким образом, все рассматриваемые модули попарно изоморфны. Осталось вспомнить, что по теореме 2 и предложению 2 модуль $L_1(G)$ является топологически проективным и плоским, и по предложению 2 модуль $L_\infty(G)$ является топологически инъективным.

В таблице 1, приведенной ниже, собраны результаты о гомологических свойствах модулей гармонического анализа для метрической, топологической и относительной теории. Каждая ячейка таблицы содержит условие при котором модуль обладает соответствующим свойством и ссылки на доказательства. Стрелка $\Longrightarrow$ обозначает, что на данный момент известно только необходимое условие. Стоит сказать, что результаты для модулей $L_p(G)$, где $1 < p < \infty$, верны для обоих типов внешнего умножения $*_p$ и $\cdot_p$. Формулировки и доказательства теорем о гомологической тривиальности модулей $\mathbb{C}_\gamma$ в случае относительной теории будут такими же как и в предложениях 3 и 4, но на самом деле эти результаты давно известны. Например, критерий о проективности $\mathbb{C}_\gamma$ дан в [8; теорема IV.5.13], а инъективности в [18; теорема 2.5]. Для алгбер $L_1(G)$ и $M(G)$ понятия $\langle$ проективности / инъективности / плоскости $\rangle$ совпадают во всех трех теориях для модулей $\langle$ $M(G)$ и $\mathbb{C}_\gamma$ / $L_\infty(G)$, $C_0(G)$ и $\mathbb{C}_\gamma$ / $L_1(G)$ и $\mathbb{C}_\gamma$ $\rangle$. Наконец, плоские $M(G)$-модули $M(G)$ так же имеют одно и то же описание в метрической, топологической и относительной теории.

Таблица 1. Гомологически тривиальные модули гармонического анализа

	$L_1(G)$-модули			$M(G)$-модули		
	Проективность	Инъективность	Плоскость	Проективность	Инъективность	Плоскость
Метрическая теория						
$L_1(G)$	G дискретна 2	$G = \{e_G\}$ 10, 12	G любая 2	G дискретна 2, 7	$G = \{e_G\}$ 10, 12	G любая 2, 7
$L_p(G)$	$G = \{e_G\}$ 10, 11	$G = \{e_G\}$ 10, 11	$G = \{e_G\}$ 10, 12	$G = \{e_G\}$ 10, 11	$G = \{e_G\}$ 10, 11	$G = \{e_G\}$ 10, 12
$L_\infty(G)$	$G = \{e_G\}$ 10, 11	G любая 2	$G = \{e_G\}$ 10, 12	$G = \{e_G\}$ 10, 11	G любая 2, 7	$G = \{e_G\}$ 10, 12
$M(G)$	G дискретна 5	$G = \{e_G\}$ 10, 12	G дискретна 6	G любая 8	$G = \{e_G\}$ 10, 12	G любая 8
$C_0(G)$	$G = \{e_G\}$ 10, 12	G конечна 10, 12	$G = \{e_G\}$ 10, 12	$G = \{e_G\}$ 10, 12	G конечна 10, 12	$G = \{e_G\}$ 10, 12
$\mathbb{C}_\gamma$	G компактна 3	G аменабельна 4	G аменабельна 4	G компактна 3, 7	G аменабельна 4, 7	G аменабельна 4, 7
Топологическая теория						
$L_1(G)$	G дискретна 2	G конечна 10, 13	G любая 2	G дискретна 2, 7	G конечна 10, 13	G любая 2, 7
$L_p(G)$	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13
$L_\infty(G)$	G конечна 10, 13	G любая 2	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G любая 2, 7	G конечна 10, 13
$M(G)$	G дискретна 5	G конечна 10, 13	G любая 6	G любая 8	G конечна 10, 13	G любая 8
$C_0(G)$	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13	G конечна 10, 13
$\mathbb{C}_\gamma$	G компактна 3	G аменабельна 4	G аменабельна 4	G компактна 3, 7	G аменабельна 4, 7	G аменабельна 4, 7
Относительная теория						
$L_1(G)$	G любая [1], §6	G аменабельна и дискретна [1], §6	G любая [1], §6	G любая [2], §3.5	G аменабельна и дискретна [2], §3.5	G любая [2], §3.5
$L_p(G)$	G компактна [1], §6	G аменабельна [3]	G аменабельна [3]	G компактна [2], §3.5	G аменабельна [2], §3.5, [3]	G аменабельна [2], §3.5
$L_\infty(G)$	G конечна [1], §6	G любая [1], §6	G аменабельна [1], §6	G конечна [2], §3.5	G любая [2], §3.5	G аменабельна ($\Longrightarrow$) [2], §3.5
$M(G)$	G дискретна [1], §6	G аменабельна [1], §6	G любая [2], §3.5	G любая [2], §3.5	G аменабельна [2], §3.5	G любая [2], §3.5
$C_0(G)$	G компактна [1], §6	G конечна [1], §6	G аменабельна [1], §6	G компактна [2], §3.5	G конечна [2], §3.5	G аменабельна [2], §3.5
$\mathbb{C}_\gamma$	G компактна 3	G аменабельна 4	G аменабельна 4	G компактна 3, 7	G аменабельна 4, 7	G аменабельна 4, 7

Список литературы

[1] H. G. Dales, M. E. Polyakov, “Homological properties of modules over group algebras”, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **89**:2 (2004), 390–426.

[2] P. Ramsden, *Homological properties of semigroup algebras*, The University of Leeds, 2009.

[3] G. Racher, “Injective modules and amenable groups”, *Comment. Math. Helv.*, **88**:4 (2013), 1023–1031.

[4] A. W. M. Graven, “Injective and projective Banach modules”, *Indag. Math.*, **82**:1 (1979), 253–272.

[5] M. C. White, “Injective modules for uniform algebras”, *Proc. London Math. Soc.*, **73**:1 (1996), 155–184.

[6] А. Я. Хелемский, “О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами”, *Матем. Сб.*, **81**:3 (1970), 430–444.

[7] Н. Т. Немеш, “Геометрия проективных, инъективных и плоских банаховых модулей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:3 (2016), 161–184.

[8] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.*, Наука, 1989.

[9] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, Clarendon Press, 2000.

[10] Н. Т. Немеш, “Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр”, *Матем. заметки*, **99**:4, 526–536.

[11] J. G. Wendel, “Left centralizers and isomorphisms of group algebras”, *Pacific J. Math.*, **2**:3 (1952), 251–261.

[12] A. Defant, K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, **176**, Elsevier, 1992.

[13] H. Rosenthal, “On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory”, *Stud. Math.*, **37**:1 (1970), 13–36.

[14] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, **25**, Cambridge University Press, 1996.

[15] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, **233**, Springer, 2006.

[16] A. T.-M. Lau, V. Losert, “Complementation of certain subspaces of $L_\infty(G)$ of a locally compact group”, *Pacific J. Math*, **141**:2 (1990), 295–310.

[17] Yu. I. Lyubich, O. A. Shatalova, “Isometric embeddings of finite-dimensional ℓ_p-spaces over the quaternions”, *St. Petersburg Math. J.*, **16**:1 (2005), 9–24.

[18] B. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Memoirs Series, 1972.

Н. Т. Немеш (N. T. Nemesh)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: nemeshnorbert@yandex.ru

Поступила в редакцию
31.10.2019