Преобразования кинематических величин при переходе между разными системами координат

Немеш Н. Т.

1 Справочные материалы

1.1 Некоторые свойства ортогональных матриц и векторного произведения

Пусть a, b и c – три вектора из $\mathbb{R}^3$. Тогда, векторное произвдение будем обозначать через $a \times b$, а скалярное через $\langle a, b\rangle$.

Напомним определение смешанного произвдения

$$(a, b, c) = \langle a, b \times c\rangle$$

Поскольку,

$$(a, b, c) = \det[a, b, c],$$

то смешанное произвдение (как и определитель) меняет знак при перестановке любых двух соседних аргументов.

Определение 1.1 *Пусть a и b – два вектора из R^3. Поскольку векторное произведение линейно по каждому аргументу, то корректно определен линейный оператор*

$$[a]_\times : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto a \times x$$

Предложение 1.2 *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$, тогда*

(i) $[a]_\times b = -[b]_\times a$

(ii) $([a]_\times)^T = -[a]_\times$

(iii) $[a]_\times [b]_\times = ba^T - (a^T b)E$

$\triangleleft$ (i) Непосредственно из определения

$$[a]_\times b = a \times b = -b \times a = -[b]_\times a$$

(ii) Пусть $x, y \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned}
\langle y, [a]_\times^T x\rangle &= \langle [a]_\times y, x\rangle \\
&= \langle x, [a]_\times y\rangle \\
&= \langle x, a \times y\rangle \\
&= (x, a, y) \\
&= -(y, a, x) \\
&= -\langle y, a \times x\rangle \\
&= -\langle y, [a]_\times x\rangle
\end{aligned}$$

Поскольку $x, y \in \mathbb{R}^3$ произвольны, то $([a]_\times)^T = -[a]_\times$

(iii) Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned}
[a]_\times [b]_\times x &= a \times (b \times x) \\
&= \langle a, x\rangle b - \langle a, b\rangle x \\
&= (a^T x) b - (a^T b) x \\
&= b(a^T x) - (a^T b) x \\
&= (b a^T) x - (a^T b) x \\
&= (b a^T - (a^T b) E) x
\end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^3$ произвольно $[a]_\times [b]_\times = b a^T - (a^T b) E$. $\triangleright$

Предложение 1.3 *Пусть M – произвольная матрица и $u, v \in \mathbb{R}^3$, тогда*

$$M^T (Mu \times Mv) = \det(M)(u \times v)$$

В частности, для любой ортогональной матрицы Q

$$Qu \times Qv = \det(Q) Q(u \times v)$$

Наконец, если R – матрица вращения $\mathbb{R}^3$, то

$$Ru \times Rv = R(u \times v) \tag{1}$$

$\triangleleft$ Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned}
\det(M)\langle x, u \times v\rangle &= \det(M)(x, u, v) \\
&= \det(M) \det[x, u, v] \\
&= \det(M \cdot [x, u, v]) \\
&= \det[Mx, Mu, Mv] \\
&= (Mx, Mu, Mv) \\
&= \langle Mx, Mu \times Mv\rangle \\
&= \langle x, M^T (Mu \times Mv)\rangle
\end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^3$ произвольно, то $\det(M)(u \times v) = M^T (Mu \times Mv)$.

Если в качестве M взять ортогональную матрицу Q, то так как $Q^T = Q^{-1}$, то $\det(Q)(u \times v) = Q^{-1}(Qu \times Qv)$. Откуда

$$Qu \times Qv = \det(Q) Q(u \times v).$$

Осталось напомнить, что у матриц вращения определитель равен 1. $\triangleright$

Предложение 1.4 *Пусть R – матрица вращения и a – произвольный вектор в $\mathbb{R}^3$, тогда*

(i)

$$[a]_\times R = R[R^T a]_\times, \quad [Ra]_\times = R[a]_\times R^T \tag{2}$$

(ii)

$$(E + [a]_\times) R = R(E + [R^T a]_\times) \tag{3}$$

(iii)

$$(R(E+[a]_\times))^T = R^T(E-[Ra]_\times) \tag{4}$$

(iv)

$$(R(E+[a]_\times))^{-1} = R^T(E-[Ra]_\times) + o(\|a\|^2)$$

$\triangleleft$ (i) Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\begin{aligned}[a]_\times Rx &= a \times Rx \\ &= RR^T a \times Rx \\ &= R(R^T a \times x) \\ &= R([R^T a]_\times x)\end{aligned}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^3$ произвольно $[a]_\times R = R[R^T a]_\times$.

Заменяя a на Ra получим $[Ra]_\times R = R[R^T Ra]_\times$. Откуда

$$[Ra]_\times = [Ra]_\times RR^T = ([Ra]_\times R)R^T = R[R^T Ra]_\times R^T = R[a]_\times R^T$$

(iii) Так как $[a]_\times^T = -[a]_\times$, то

$$\begin{aligned}(R(E+[a]_\times))^T &= (E+[a]_\times)^T R^T \\ &= (E+[a]_\times^T)R^T \\ &= (E-[a]_\times)R^T\end{aligned}$$

(ii) Из (ii) следует, что

$$\begin{aligned}(E+[a]_\times)R &= R+[a]_\times R \\ &= R + R[R^T a]_\times \\ &= R(E+[R^T a]_\times)\end{aligned}$$

(iii) Из пункта (ii) следует, что

$$\begin{aligned}R(E+[a]_\times)R^T(E-[Ra]_\times) &= (R+R[a]_\times)(R^T - R^T[Ra]_\times) \\ &= RR^T + R[a]_\times R^T - RR^T[Ra]_\times - R[a]_\times R^T[Ra]_\times \\ &= E + R[a]_\times R^T - [Ra]_\times - R[a]_\times R^T[Ra]_\times \\ &= E - R[a]_\times R^T[Ra]_\times \\ &= E - R[a]_\times R^T R[a]_\times R^T \\ &= E - R[a]_\times[a]_\times R^T \\ &= E + o(\|a\|^2)\end{aligned}$$

Откуда

$$(R(E+[a]_\times))^{-1} = R^T(E-[Ra]_\times) + o(\|a\|^2)$$

$\triangleright$

1.2 Напоминания из теории многомерных нормальных распределений

Определение 1.5 *Пусть $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ – n-мерный вектор, и Σ – положительно определенная матрица размера $n \times n$. Тогда случайный вектор $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^T$ имеет многомерное нормальное распределение если его плотность распределения имеет вид*

$$f_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right).$$

В этом случае мы будем писать $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$.

Замечание 1.6 *Допустим, что случайный вектор $\boldsymbol{X}$ имеет многомерное нормальное распределение с параметрами $\vec{\mu}$ и Σ, т.е. $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$. Пусть A – произвольная матрица размера $k \times n$ и $\vec{b} \in \mathbb{R}^k$ – произвольный k-мерный вектор, тогда случайный вектор $\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + \vec{b}$ имеет многомерное нормальное распределение, причем*

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(A\vec{\mu} + \vec{b}, A\Sigma A^T)$$

2 Преобразования кинематических величин при замене системы координат

В этом параграфе мы выведем формулы преобразования координат векторов различных кинематических величин: поза, скорость, угловая скорость, ускорение. Напомним, что поза – это радиус-вектор и ориентация твердого тела. Во многих ситуациях мы будем считать, что эти величины имеют многомерное нормальное распределение и наша основная задача найти параметры этого распределения.

Большинство векторных величин (поза, скорость, угловая скорость, ускорение) в нашем случае имеют простую модель. Если $\vec{x}$ некоторый вектор то мы будем считать, что к нему добваляется некоторый шум, т.е. случайный вектор с многомерным нормальным распределением с нулевым средним. Такой случайный вектор мы будем обозначать $\boldsymbol{x}$. Более подробно, пусть A некоторая система координат, тогда координаты $\boldsymbol{x}$ в A будут иметь распределение $\mathcal{N}(x^A, \Sigma_x^A)$.

Мы также будем предполагать, что переходы между некоторыми системами координат нам точно не известны и имеют некоторый шум. Точнее пусть $\boldsymbol{R}$ – случайная велична описывающая матрицу перехода между двумя системами координат. Будем считать, что существует фиксированная матрица перехода R и случайный вектор $\delta\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, такие, что $\boldsymbol{R} = R(E + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times)$

Теперь рассмотрим различные сценарии преобразования между двумя системами координат. В этих сценариях системы координат могут быть

- неподвижными друг относительно друга
- двигаться с линейной или с угловой или с обеими скоростями друг относительно друга
- иметь нетривиальную матрицу поворота
- иметь матрицу поворота являющуюся случайной величиной

2.1 Преобразования позиции для константной замены координат относительно инерциальной системы отсчета

Допустим у нас есть три системы координат A, B и C, причем C – инерциальная система координат. Пусть нам известны поза системы координат A относительно C и B относительно A, надо найти позу системы координат B относительно C. Будем считать, что поза A в C является случайной величиной, а поза B в A доподлинно известна. За модельный пример здесь можно взять $A = \mathrm{imu}$, $B = \mathrm{base\ link}$ и $C = \mathrm{map}$.

Пусть $(\boldsymbol{R}_A^C, \boldsymbol{p}_A^C)$ – поза A в C, тогда

$$\boldsymbol{R}_A^C = R_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times), \quad \delta\boldsymbol{\theta}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta}^A)$$
$$\boldsymbol{p}_A^C = p_A^C + \delta\boldsymbol{p}_A^C, \quad \delta\boldsymbol{p}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta p}^A),$$

Поза B в C описывается формулами

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_B^C &= \boldsymbol{R}_A^C R_B^A \\
&= R_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times) R_B^A \\
&= R_A^C R_B^A (E + [(R_B^A)^T \delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times) \\
\boldsymbol{p}_B^C &= \boldsymbol{p}_A^C + \boldsymbol{R}_A^C p_B^A \\
&= p_A^C + \delta\boldsymbol{p}_A^C + R_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times) p_B^A \\
&= p_A^C + R_A^C p_B^A + \delta\boldsymbol{p}_A^C + R_A^C[\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times p_B^A \\
&= p_A^C + R_A^C p_B^A + \delta\boldsymbol{p}_A^C - R_A^C[p_B^A]_\times \delta\boldsymbol{\theta}_A^C
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{R}_B^C = R_A^C R_B^A (E + [\delta\boldsymbol{\theta}_B^C]_\times), \quad \delta\boldsymbol{\theta}_B^C \sim \mathcal{N}(0, (R_B^A)^T \Sigma_{\delta\theta}^A R_B^A) \tag{5}$$
$$\boldsymbol{p}_B^C = p_A^C + R_A^C p_B^A + \delta\boldsymbol{p}_A^C, \quad \delta\boldsymbol{p}_B^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta p}^A + R_A^C[p_B^A]_\times \Sigma_{\delta\theta}^A (R_A^C[p_B^A]_\times)^T) \tag{6}$$

2.2 Преобразования скорости, угловой скорости и ускорения для константной замены координат между инерциальными системами координат связанными с твердым телом

Допустим у нас есть две инерциальные системы координат A и B связанные с некоторым твердым телом. Пускай нам известна некоторая векторная велична $\boldsymbol{x}$ в системе координат A, и поза системы координат A относительно B. Надо найти $\boldsymbol{x}$ в системе координат B. Будем считать, что поза A в B доподлинно известна. За модельный пример здесь можно взять $A = \mathrm{imu}$, $B = \mathrm{base\ link}$.

Пусть

$$\boldsymbol{x}^A = x^A + \delta\boldsymbol{x}^A, \quad \delta x^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta x}^A)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^B &= R_A^B \boldsymbol{x}^A \\
&= R_A^B(x^A + \delta\boldsymbol{x}^A) \\
&= R_A^B x^A + R_A^B \delta\boldsymbol{x}^A
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x}^B = R_A^B x^A + \delta\boldsymbol{x}^B, \quad \delta\boldsymbol{x}^B \sim \mathcal{N}(0, R_A^B \Sigma_{\delta x}^A (R_A^B)^T) \tag{7}$$

В последней формуле в качестве $\boldsymbol{x}$ можно брать скороть $\boldsymbol{v}$, угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ или ускорение $\boldsymbol{a}$.

2.3 Преобразования скорости, угловой скорости и ускорения для неконстантной замены координат между инерциальными системами координат связанными с твердым телом

Допустим у нас есть две системы координат A и B связанные с некоторым твердым телом. Пускай нам известна некоторая векторная велична $\boldsymbol{x}$ в системе координат A, и поза системы координат A относительно B. Надо найти $\boldsymbol{x}$ в системе координат B. Будем считать, что поза A в B является случайной величиной. За модельный пример здесь можно взять $A = \mathrm{imu}$, $B = \mathrm{base\ link}$.

Пусть

$$\boldsymbol{x}^A = x^A + \delta\boldsymbol{x}^A, \quad \delta x^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^A_{\delta x})$$
$$\boldsymbol{R}^B_A = R^B_A(E + [\delta\boldsymbol{\theta}^B_A]_\times), \quad \delta\boldsymbol{\theta}^B_A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta})$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^B &= \boldsymbol{R}^B_A\boldsymbol{x}^A \\
&= R^B_A(E + [\delta\boldsymbol{\theta}^B_A])(x^A + \delta\boldsymbol{x}^A) \\
&= R^B_A x^A + R^B_A\delta\boldsymbol{x}^A + R^B_A[\delta\boldsymbol{\theta}^B_A]_\times x^A + R^B_A[\delta\boldsymbol{\theta}^B_A]_\times\delta\boldsymbol{x}^A \\
&= R^B_A x^A + R^B_A\delta\boldsymbol{x}^A - R^B_A[x^A]_\times\delta\boldsymbol{\theta}^B_A + o(\|\delta\boldsymbol{x}^A\|)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x}^B = R^B_A x^A + \delta\boldsymbol{x}^B, \quad \delta\boldsymbol{x}^B \sim \mathcal{N}(0, R^B_A\Sigma^A_{\delta x}(R^B_A)^T + R^B_A[x^A]_\times\Sigma_{\delta\theta}(R^B_A[x^A]_\times)^T) \tag{8}$$

В последней формуле в качестве $\boldsymbol{x}$ можно брать скорость $\boldsymbol{v}$, угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ или ускорение $\boldsymbol{a}$.

2.4 Нахождение скорости точек твердого тела в различных системах координат

Допустим, у нас есть две системы координат A и B связанные с твердым телом. Пусть в некоторой инерциальной системе координат C твердое тело имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Пусть $\boldsymbol{v}_A$ линейная скорость начала системы координат A относительно системы координат C. Аналогично $\boldsymbol{v}_B$ линейная скорость начала системы координат B относительно системы координат C

Так как A и B связаны с одним и тем же твердым телом, то A и B будет иметь в системе координат C ту же самую угловую скорость. Тогда

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB} \tag{9}$$

Мы выведем параметры распределения вектора $\boldsymbol{v}_B$ в базисах A и C.

За модельный пример здесь можно взять $A = \mathrm{imu}$, $B = \mathrm{base\ link}$ и $C = \mathrm{map}$.

Пусть координаты $\boldsymbol{v}^A_A$ вектора $\boldsymbol{v}_A$ в системе координат A имеют распределение

$$\boldsymbol{v}^A_A = v^A_A + \delta\boldsymbol{v}^A_A, \quad \delta\boldsymbol{v}^A_A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^A_{\delta v})$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta\boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma^A_{\delta\omega})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_B^A &= \boldsymbol{v}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A \\
&= \boldsymbol{v}_A^A + \delta\boldsymbol{v}_A^A + (\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A \\
&= \boldsymbol{v}_A^A + \omega^A \times p_B^A + \delta\boldsymbol{v}_A^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A \\
&= \boldsymbol{v}_A^A + \omega^A \times p_B^A + \delta\boldsymbol{v}_A^A - [p_B^A]_\times \delta\boldsymbol{\omega}^A
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{v}_B^A = \boldsymbol{v}_A^A + \omega^A \times p_B^A + \delta\boldsymbol{v}_B^A, \quad \delta\boldsymbol{v}_B^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v}^A + [p_B^A]_\times \Sigma_{\delta\omega}([p_B^A]_\times)^T) \tag{10}$$

Пусть координаты $\boldsymbol{v}_A^C$ вектора $\boldsymbol{v}_A$ в системе координат C имеют распределение

$$\boldsymbol{v}_A^C = v_A^C + \delta\boldsymbol{v}_A^C, \quad \delta\boldsymbol{v}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v_A}^C)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\omega^A, \quad \delta\omega^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\omega}^A)$$

Будем считать, что матрица перехода от A к C сама является случайной величиной с распределением

$$\boldsymbol{R}_A^C = R_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times), \quad \delta\boldsymbol{\theta}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_B^C &= \boldsymbol{v}_A^C + \boldsymbol{\omega}^C \times \overrightarrow{AB}^C \\
&= \boldsymbol{v}_A^C + \boldsymbol{R}_A^C\boldsymbol{\omega}^A \times \boldsymbol{R}_A^C p_B^A \\
&= \boldsymbol{v}_A^C + \boldsymbol{R}_A^C(\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= v_A^C + \delta\boldsymbol{v}_A^C + R_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times)((\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A) \\
&= v_A^C + \delta\boldsymbol{v}_A^C + (R_A^C + R_A^C[\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times)(\omega^A \times p_B^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= v_A^C + \delta\boldsymbol{v}_A^C + R_A^C(\omega^A \times p_B^A) + R_A^C[\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times(\omega^A \times p_B^A) + R_A^C(\delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + R_A^C[\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times(\delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= v_A^C + R_A^C(\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{v}_A^C - R_A^C[\omega^A \times p_B^A]_\times \delta\boldsymbol{\theta}_A^C - R_A^C[p_B^A]_\times \delta\boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta\boldsymbol{\omega}^A\|)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_B^C = v_A^C + R_A^C(\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{v}_B^C, \\
&\delta\boldsymbol{v}_B^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta v_A}^C + R_A^C[\omega^A \times p_B^A]_\times \Sigma_{\delta\theta}(R_A^C[\omega^A \times p_B^A]_\times)^T + R_A^C[p_B^A]_\times \Sigma_{\delta\omega}^A(R_A^C[p_B^A]_\times)^T)
\end{aligned} \tag{11}$$

2.5 Нахождение ускорений точек твердого тела в различных системах координат

Допустим, у нас есть две системы координат A и B связанные с твердым телом. Пусть в некоторой инерциальной системе координат C твердое тело имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\epsilon}$. Пусть $\boldsymbol{a}_A$ линейное ускорение начала системы координат A относительно системы координат C. Аналогично $\boldsymbol{a}_B$ линейное ускорение начала системы координат B относительно системы координат C.

Поскольку $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, то

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B &= \frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \\
&= \boldsymbol{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB} \\
&= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\epsilon} \times \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB})
\end{aligned} \tag{12}$$

Мы выведем параметры распределения вектора $\boldsymbol{a}_B$ в базисах A и C.

За модельный пример здесь можно взять $A = \text{imu}$, $B = \text{base link}$ и $C = \text{map}$.

Пусть координаты $\boldsymbol{a}_A^A$ вектора $\boldsymbol{a}_A$ в системе координат A имеют распределение

$$\boldsymbol{a}_A^A = a_A^A + \delta\boldsymbol{a}_A^A, \quad \delta\boldsymbol{a}_A^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta a}^A)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta\boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\omega}^A)$$

Угловое ускорение будем считать пренебрежимо малым, тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B^A &= \boldsymbol{a}_A^A + \boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \delta\boldsymbol{a}_A^A + (\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times ((\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \delta\boldsymbol{a}_A^A + (\omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A) \times (\omega^A \times p_B^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \delta\boldsymbol{a}_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \omega^A \times (\delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{\omega}^A \times (\delta\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= a_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{a}_A^A - (\omega^A \times p_B^A) \times \delta\boldsymbol{\omega}^A - \omega^A \times (p_B^A \times \delta\boldsymbol{\omega}^A) + o(\|\delta\omega^A\|^2) \\
&= a_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{a}_A^A - [\omega^A \times p_B^A]_\times \delta\boldsymbol{\omega}^A - [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times \delta\boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta\omega^A\|^2) \\
&= a_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{a}_A^A - ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times)\delta\boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta\omega^A\|^2)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B^A &= \boldsymbol{a}_A^A + \omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta\boldsymbol{a}_B^A \\
\delta\boldsymbol{a}_B^A &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta a}^A + ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times)\Sigma_{\delta\omega}^A([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times)^T)
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть координаты $\boldsymbol{a}_A^C$ вектора $\boldsymbol{a}_A$ в системе координат C имеют распределение

$$\boldsymbol{a}_A^C = a_A^A + \delta\boldsymbol{a}_A^C, \quad \delta\boldsymbol{a}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta a}^C)$$

и угловая скорость в системе координат A имеет распределение

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega^A + \delta\boldsymbol{\omega}^A, \quad \delta\boldsymbol{\omega}^A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\omega}^A)$$

Будем считать, что матрица перехода от A к C сама является случайной величиной с распределением

$$\boldsymbol{R}_A^C = R_A^C(E + [\delta\boldsymbol{\theta}_A^C]_\times), \quad \delta\boldsymbol{\theta}_A^C \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\delta\theta})$$

Угловое ускорение будем считать пренебрежимо малым, тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B^C &= \boldsymbol{a}_A^C + \boldsymbol{\omega}^C \times (\boldsymbol{\omega}^C \times \overrightarrow{AB}^C) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + \boldsymbol{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times \boldsymbol{R}_A^C p_B^A) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + \boldsymbol{R}_A^C \boldsymbol{\omega}^A \times \boldsymbol{R}_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + \boldsymbol{R}_A^C (\boldsymbol{\omega}^A \times (\boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + R_A^C (E + [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_\times)((\omega^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A) \times ((\omega^A + \delta \boldsymbol{\omega}^A) \times p_B^A)) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + R_A^C (E + [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_\times)(\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \delta \boldsymbol{\omega}^A \times (\omega^A \times p_B^A) + \omega^A \times (\delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A) + \delta \boldsymbol{\omega}^A \times (\delta \boldsymbol{\omega}^A \times p_B^A)) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + (R_A^C + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_\times)(\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A) - ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times)\delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|^2)) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + R_A^C (\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)) + R_A^C [\delta \boldsymbol{\theta}_A^C]_\times (\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)) - R_A^C ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times)\delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|) \\
&= \boldsymbol{a}_A^C + R_A^C (\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)) - R_A^C [\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)]_\times \delta \boldsymbol{\theta}_A^C - R_A^C ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times)\delta \boldsymbol{\omega}^A + o(\|\delta \boldsymbol{\omega}^A\|)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B^C &= a_A^C + R_A^C (\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)) + \delta \boldsymbol{a}_B^C, \\
\delta \boldsymbol{a}_B^C &\sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\Sigma}_{\delta\theta} + \widetilde{\Sigma}_{\delta\omega}^A) \\
\widetilde{\Sigma}_{\delta\theta} &= R_A^C [\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)]_\times \Sigma_{\delta\theta} (R_A^C [\omega^A \times (\omega^A \times p_B^A)]_\times)^T \\
\widetilde{\Sigma}_{\delta\omega}^A &= R_A^C ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times) \Sigma_{\delta\omega}^A (R_A^C ([\omega^A \times p_B^A]_\times + [\omega^A]_\times [p_B^A]_\times))^T
\end{aligned} \tag{14}$$