**A módszerek leírása**

Általános leírás a klasszikus iterációkról

A program a használt módszerekből adódóan felteszi, hogy az együtthatómátrix négyzetes, a determinánsa nullától különböző. Ekkor az egyértelmű megoldást jelölje x\*. Az iterációs módszerek általában olyan konvergens sorozatokat konstruálnak, melyek határértéke az egyenlet megoldása. Az

iterációt az A \* x = b egyenletrendszerrel konzisztensnek hívjuk, ha

(Az x\* vektor az egyenletrendszer megoldása.)

Tegyük fel, hogy az A együtthatómátrixot előállítottuk A = S – T alakban, ahol S reguláris mátrix. Ekkor a

egyenlőséget S inverzével balról szorozva, ma jd x-et kifejezve

Ezen egyenlőség miatt az

iteráció konzisztens az egyenletrendszerrel.

Az S mátrixot prekondicionálási mátrixnak hívjuk. Ez a mátrix határozza meg, hogy mennyire nehéz vagy könnyű az iteráció végrehajtása. Megválasztását két, egymással ellentétes követelmény határozza meg. Egyrészt könnyen invertálhatónak kell lennie, hiszen az iterációhoz szükség van a mátrix inverzére, másrészt a

egyenlőség miatt jó lenne, ha S "közel lenne A-hoz", hiszen akkor a B mátrix spektrálsugara jóval kisebb lehetne, mint 1, ami gyors konvergenciát eredményezne.

Az implementált módszerek közül a két klasszikus iteráció (Jacobi és Gauss-Seidel) alapjai az előzőekben taglaltak. Mindkét esetben a mátrixot A = D - L - U is írjuk fel, ahol D a diagonális elemek, L a diagonális alatti elemek -1-szereseinek, míg U a diagonális feletti elemek -1-szereseinek mátrixa. Feltesszük, hogy D főátlójának (azaz A főátlójának) egyik eleme sem nulla. Ez mindig elérhető az egyenletek megfelelő átrendezésével.

*Jacobi-iteráció*

Az S = D és T = U + L választással konstruált

iterációt ( tetszőleges kezdővektor) Jacobi-iterációnak nevezzük. Az iterációt vektorkomponensenként kiírva az

iterációt nyerjük.

*Gauss-Seidel-iteráció*

Az S = D + L és T = U választású

iterációt (x0 tetszőleges kezd®vektor) Gauss-Seidel-iterációnak nevezzük. Hogy lássuk az iteráció Jacobi-iterációval való kapcsolatát, alakítsuk át az iterációs képletet. Szorozzunk először balról a (D-L) mátrixszal, majd adjunk hozzá mindkét oldalhoz -et, és végül szorozzunk D inverzével. A fenti ekvivalens átalakítások után az

iterációt nyerjük. Látható, hogy a Jacobi-iterációhoz kép est csak annyi a különbség, hogy a tag helyett a Gauss-Seidel-iterációban szerepel. Látszólag ez az iteráció nem explicit, hiszen a jobb oldalon is szerep el az vektor, de mivel szigorú (a főátlóban nullák szerepelnek) alsó háromszögmátrix, így mégis egyszerűen meghatározható. Az vektor első elemének meghatározásához nincs szükség az vektorra. A második elem meghatározásához pedig csak a korábban meghatározott első elemre van szükség, stb. Még jobban látszik a kapcsolat a két iteráció között, ha a Gauss-Seidel-iteráció utóbbi alakját komponensenként is kiírjuk:

(i = 1,..., n). Ha összevetjük ezt a Jacobi-iteráció képletével, akkor látható, hogy a Jacobi-iteráció az vektor komponenseinek meghatározásához csak az vektort használja, míg a Gauss-Seidel-módszer az vektor i-edik elemének meghatározásához felhasználja a vektor korábban kiszámolt j = 1,…,i-1 indexű elemeit ( megfelelő elemei helyett)

Általános leírás a variációs módszerekről

A lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy másik iterációs megoldási lehetősége szimmetrikus, pozitív definit mátrixokra. Az alap ötlet az, hogy megadunk egy többváltozós függvényt, melynek abszolút minimumhelye az egyenletrendszer megoldása. Ezt a minimumhelyet keressük meg egy megfelelő iterációs eljárással.

Legyen tehát szimmetrikus, pozitív definit mátrix, és tekintsük a

n-változós függvényt. Az összeszorzott mátrixok mérete szerint a jobb oldali kifejezés valóban egy valós számot (egy (1x1) -es mátrixot) rendel minden vektorhoz. Ennek a függvénynek egyetlen abszolút minimumhelye van az halmazon és ez pontosan az A \* x = b egyenletrendszer megoldása.

*Gradient-módszer*

A Gradiens-módszernél egy x pontból, ahol a maradékvektorm az er vektor irányába az pontba lépünk tovább. Innét pedig az itteni

maradékvektor irányában keressük a következő iránymenti minimumot. Az

egyenlőség miatt látható, hogy az iteráció során az egymás utáni keresési irányok merőlegesek egymásra.

A módszer algoritmusa:

*Konjugált Gradiens-módszer*

Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy a keresési irányok másfajta megválasztásával nem lehetne-e gyorsítani valahogy a konvergenciát. Induljunk ki abból az állításból, hogy az pontbeli keresési irány (a Gradiensvektor (-1)-szerese) merőleges az pontbeli maradékvektorra.

Ebből a képletből látható, hogy az pontból az megoldásba vezető vektor teljesíti a feltételt. Az egyszerűbb megfogalmazás kedvéért vezessük b e az alábbi fogalmat.

Definíció:

Legyen adva egy szimmetrikus pozitív definit mátrix. Azt mondjuk, hogy az x és y vektorok *A-konjugáltak (vagy A ortogonálisak),* ha *.*

Vegyük észre, hogy ha A az egységmátrix, akkor az A-ortogonalitás pontosan a hagyományos skaláris szorzatbeli ortogonalitást jelenti.

A defníció segítségével tehát mondhatjuk, hogy a keresési irányt úgy kell egválasztanunk, hogy az legyen A-ortogonális a keresési irányra. Rögtön látjuk, hogy ez lehetséges az megoldás ismerete nélkül is. Keressük

alakban a második keresési irányt. Az A-ortogonalitási feltételt felhasználva ekkor

Továbbá,

Így

Tehát a módszer algoritmusa a következő: