Binomiális

Leírás

- Vegyünk egy κ véletlen kísérlet.
- Ebben a kísérletben válasszunk ki egy $\mathbf{A}$ eseményt.
- Jelölje $\mathbf{p}$ az $\mathbf{A}$ esemény valószínűségét: $\mathbf{p} = P(\mathbf{A})$.
- Hajtsuk végre a κ kísérletet $\mathbf{n}$-szer!
- Jelölje $\mathbf{X}$ valószínűségi változó, hogy az $\mathbf{n}$ végrehajtás során hányszor következett be az $\mathbf{A}$ esemény!

Eloszlás paraméteres kiszámítása

Ekkor $\mathbf{X}$ eloszlása:

1. $R_{\mathbf{X}} = \{0, 1, ..., \mathbf{n}\}$ Hiszen az $\mathbf{A}$ esemény legrosszabb esetben egyszer sem, legjobb esetben minden alkalommal bekövetkezik.
2. $P(\mathbf{X} = i) = \binom{\mathbf{n}}{i}\mathbf{p}^i(1-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-i}$ Hiszen $\mathbf{X} = i$ esetében egy kísérletsorozat i db $\mathbf{A}$ és $\mathbf{n} - i$ db $\bar{\mathbf{A}}$ eseményből áll, tetszőleges sorrendben. Egy konkrét sorrend valószínűsége $\mathbf{p}^i(1-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-i}$, ahol $\mathbf{p}$ az $\mathbf{A}$-k, $1 - \mathbf{p}$ pedig $\bar{\mathbf{A}}$-k bekövetkezésének valószínűsége. Ezekből a sorrendekből pedig $\binom{\mathbf{n}}{i}$ db van, hiszen ennyiféleképpen választhatom ki azt az i db pozíciót ahova az $\mathbf{A}$ események kerültek.

Jelölés

$\mathbf{X}$ valószínűségi változóra azt mondjuk, hogy Binomiális eloszlású $\mathbf{n}$ és $\mathbf{p}$ paraméterekkel. Ezt röviden $\mathbf{X} \in \mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ jelöli. Ennek a jelentése: $\mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{p}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók halmaza, $\mathbf{X}$ pedig ennek a halmaznak egy eleme.

Példa

A valószínűségszámítás kurzust idén 600 hallgató vette fel. Az előző évek statisztikái alapján annak a valószínűsége, hogy egy hallgató aláírást szerez 0.6. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az évfolyam legalább $\frac{2}{3}$-a szerez idén aláírást?

A feladat illesztéséhez a következő fogalmakat kell a szövegben megtalálni:

- κ: Mi volt a kísérlet, amit n-szer megismételtünk?
- $\mathbf{A}$: Mi volt az esemény amit ebben a kísérletben megfigyeltünk és számoltuk hányszor következett be?
- $\mathbf{p}$: Mi ennek az eseménynek a valószínűsége?
- $\mathbf{n}$: Hányszor hajtottuk végre a kísérletet?
- $\mathbf{X}$: Milyen valószínűségi változót definiálhatunk a konkrét példában ami az események bekövetkezésének darabszámát adja meg?

Ebben a feladatban ezek a következők:

- κ: Egyetlen hallgató év végi eredményének megfigyelése.
- $\mathbf{A}$: A hallgató aláírást szerzett év végén.
- $\mathbf{p} = 0.6$, mert feladat szövege megadta.
- $\mathbf{n} = 600$ hallgatót figyeltünk meg.
- $\mathbf{X}$: Hány hallgató szerzett aláírást év végén?

Az így definiált $\mathbf{X}$ valószínűségi változó binomiális eloszlású, $\mathbf{n} = 600$ és $\mathbf{p} = 0.6$ paraméterekkel, hiszen a definíciója megegyezik a binomiális eloszlású valószínűségi változók általános leírásával.

A feladat szövege azt kérdezi mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább 400 hallgató szerez idén aláírást. Ez éppen a következő valószínűséggel egyezik meg:

$P(400 <= X) = \sum_{i=400}^{600} P(X = i) = \sum_{i=400}^{600} \binom{600}{i} * 0.6^i * 0.4^{600-i}$

Geometriai

Leírás

- Vegyünk egy κ véletlen kísérlet.
- Ebben a kísérletben válasszunk ki egy $\mathbf{A}$ eseményt.
- Jelölje $\mathbf{p}$ az $\mathbf{A}$ esemény valószínűségét: $\mathbf{p} = P(\mathbf{A})$.
- Hajtsuk végre a κ kísérletet addig ameddig az $\mathbf{A}$ esemény be nem következik!
- Jelölje $\mathbf{X}$ valószínűségi változó, hogy hányszor kellett végrehajtani a kísérletet.

Eloszlás paraméteres kiszámítása

Ekkor $\mathbf{X}$ eloszlása:

1. $R_{\mathbf{X}} = \{1, 2, 3, ...\}$ Hiszen előfordulhat bármilyen hosszú kísérletsorozat, mielőtt az $\mathbf{A}$ esemény elsőre bekövetkezik.
2. $P(\mathbf{X} = i) = (1 - \mathbf{p})^{\mathbf{i-1}} p$ Hiszen $\mathbf{X} = i$ esetében egy kísérletsorozat pontosan $i - 1$ db $\bar{\mathbf{A}}$, majd 1 db $\mathbf{A}$ eseményt tartalmaz, ebben a fix sorrendben.

Jelölés

$\mathbf{X}$ valószínűségi változóra azt mondjuk, hogy Geometriai eloszlású $\mathbf{p}$ paraméterrel. Ezt röviden $\mathbf{X} \in \mathbf{G}(\mathbf{p})$ jelöli. Ennek a jelentése: $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{p}$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók halmaza, $\mathbf{X}$ pedig ennek a halmaznak egy eleme.

Példa

Bélának sikerült aláírást szereznie valószínűségszámításból, már csak a vizsgát kell sikeresen teljesítenie. Béla az aktuális félévben 3 vizsgaalkalmon tud részt venni. Annak a valószínűsége, hogy egy vizsgát sikeresen teljesít 0.7. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Béla ebben a félévben sikeresen levizsgázik valószínűségszámításból?

A feladat illesztéséhez a következő fogalmakat kell a szövegben megtalálni:

- κ: Mi volt a kísérlet, amit addig ismétlünk ameddig a megfigyelt esemény be nem következik?
- $\mathbf{A}$: Mi volt az esemény amit ebben a kísérletben megfigyeltünk?
- $\mathbf{p}$: Mi ennek az eseménynek a valószínűsége?
- Az $\mathbf{A}$ esemény a megállási feltétele a kísérletsorozatnak.
- $\mathbf{X}$: Milyen valószínűségi változót definiálhatunk a konkrét példában ami a kísérletek végrehajtásának darabszámát adja meg?

Ebben a feladatban ezek a következők:

- κ: Béla részt vesz egy vizsgaalkalmon.
- $\mathbf{A}$: Béla sikeresen teljesíti a vizsgát.
- $\mathbf{p} = 0.7$, mert a feladat szövege megadta.
- Béla pontosan addig vesz részt a vizsgákon ameddig az egyiket nem teljesíti sikeresre.
- $\mathbf{X}$: Hány vizsgán vett részt Béla?

Az így definiált $\mathbf{X}$ valószínűségi változó geometriai eloszlású, $\mathbf{p} = 0.7$ paraméterrel, hiszen a definíciója megegyezik a geometriai eloszlású valószínűségi változók általános leírásával.

A feladat szövege azt kérdezi mennyi a valószínűsége annak, hogy Béla még idén levizsgázik, azaz belefér a 3 vizsgaalkalomba. Ez éppen a következő valószínűséggel egyezik meg:

$P(X <= 3) = \sum_{i=1}^{3} P(X = i) = \sum_{i=1}^{3} 0.3^{i-1} * 0.7$

Poisson

$X \in Po(\lambda)$, azaz X valószínűségi változó Poisson-eloszlású λ paraméterrel, ha az eloszlása a következő:

1. $R_X = \{0, 1, ...\}$
2. $P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} * e^{-\lambda}$

A Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeloszlása: Ez azt jelenti, hogy ha $X \in B(n, p)$, azaz X binomiális eloszlású n és p paraméterekkel, és teljesül, hogy $\lambda = n * p$, illetve $n- > \infty$ és $p- > 0$, akkor ebből következik, hogy X Poisson-eloszlású $\lambda = n * p$ paraméterrel, azaz $X \in Po(\lambda)$.

A ZH szempontjából a Poisson-eloszlást a következő esetekben kell használni:

- A feladat szövege azt mondja, hogy Poisson-eloszlású a változó.
- A feladat szövege illeszkedik a binomiális eloszlásra, azonban valamely, akár mindkét paraméter hiányzik:
  - n: Hiányzik a kísérletek végrehajtásának a száma, csak annyit tudunk, hogy az „elég nagy”.
  - p: Hiányzik az esemény bekövetkezésének valószínűsége, csak annyit tudunk, hogy az „elég kicsi”.

  Viszont valahonnan kikövetkeztethető a paraméterek szorzatának, azaz $n * p$-nek az értéke.

Egyenletes

Coming soon!

Exponenciális

Coming soon!

Normál

Coming soon!