Sziasztok!

Ahogy ígértem itt vannak a gyakorlat végi feladatok magyarázatai azoknak akiknek menniük kellett, illetve a lineáris transzformációs feladat levezetése általános esetben és a standardizálás magyarázata mégegyszer.

(A képleteket képekként szúrtam be, ha valakinél nem jelennek meg szóljatok.)

Fgy. II.6 feladata:

Legyen $X \in U(0,1)$ és $Y = \sqrt{2X}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

A feladat értelmezése:

Az $Y = \sqrt{2X}$ kifejezés azt jelenti, hogy van egy valószínűségi változónk, amit egy adott kísérlethez definiáltunk. A kísérlet elvégzésekor az X változó felveszi valamelyik értékét.

Az Y valószínűségi változót pedig úgy definiáljuk, hogy minden kísérlet végén a kapott$X$ értéket behelyettesítjük a $\sqrt{2X}$ egyenletbe és így kapjuk meg Y értékét az adott kísérlet végeredményeként.

Innentől kezdve az Y valószínűségi változóról is minden kísérlet végén meg tudjuk mondani, hogy milyen értéket vett fel.

Ha Y eloszlása (sűrűségfüggvénye vagy eloszlásfüggvénye) a kérdés, akkor a lent ismertetett módszerrel át tudjuk alakítani úgy, hogy megjelenjen benne X eloszlása (sűrűségfüggvénye vagy eloszlásfüggvénye), amit pedig már ismerünk.

A feladat megoldása:

Az ilyen jellegű feladatokban mindig az első lépés megadni Y értékkészletét. Ez azért lesz fontos, mert a számolás során olyan átalakításokat végzünk, amik nem minden értelmezési tartományra ekvivalensek, ezekre majd külön figyelmet fordítunk.

$R_X = (0,1)$, mert X egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon.

Ha a $(0,1)$ intervallumról jövő számokat a $\sqrt{2X}$ függénybe írjuk, akkor a $(0,\sqrt{2})$intervallumon kapunk értékeket, azaz: $R_Y = (0,\sqrt{2})$.

Az értékkészletén kívüli részen Y eloszlásfüggvénye ha $t \leq 0$ biztosan 0 lesz, ha pedig $\sqrt{2} \leq t$ akkor biztosan 1 lesz.

Nekünk csak a köztes értékekre kell a számolást elvégezni, azaz a $0 < t < \sqrt{2}$ -re.

A sűrűségfüggvény az ilyen jellegű feladatokban az eloszlásfüggvény deriválásával számolható:

$$f_Y(t) = F'_Y(t)$$

Tehát először az eloszlásfüggvényt számoljuk. Ez definíció szerint a t helyen egyenlő annak a valószínűségével, hogy $Y < t$.

$$F_Y(t) = P(Y < t)$$

Ebbe a kifejezésbe be tudjuk helyettesíteni Y helyére a $\sqrt{2X}$ függvényt, amivel generáltuk.

$$P(Y < t) = P(\sqrt{2X} < t)$$

A következő lépés átrendezni ezt a kifejezést, hogy a bal oldalon X legyen (mert így kapjuk meg X eloszlásfüggvényét).

Ehhez először mindkét oldalt négyzetre kell emelni. Ez egy olyan transzformáció ami nem ekvialens átalakítás, hiszen ha negatív szám lenne bármelyik oldalon, annak eltűnik az előjele. Ezáltal az egyenlőtlenség előfordulhat, hogy megfordul.

Viszont mi tudjuk, hogy a $0 < t < \sqrt{2}$-re számolunk most, azaz a jobb oldal biztosan nem lehet negatív. A bal oldalon pedig egy gyökös tag van, aminek az értéke biztosan nem lehet negatív.

Azaz jelen esetben mind a két oldal nemnegatív szám, ilyenkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért elvégezhetjük:

$P(\sqrt{2X} < t) = P(2X < t^2)$

A 2-vel osztás mindig ekvivalens átalakítás:

$P(2X < t^2) = P(X < \frac{t^2}{2})$

Az eloszlásfüggvény definíciója szerint ez éppen X eloszlásfüggvénye a $\frac{t^2}{2}$ helyen.

$P(X < \frac{t^2}{2}) = F_X(\frac{t^2}{2})$

X eloszlásfüggvényét ismerjük, mert megadták, hogy $X \in U(0,1)$:

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ u & 0 < u < 1 \\ 1 & 1 \leq u \end{cases}$$

A kérdés, hogy ha $u = \frac{t^2}{2}$ akkor a három közül melyik sorát kell nézni F_X-nek?

Mivel úgy kezdtük a számolást, hogy t-t csak a $(0, \sqrt{2})$ intervallumon nézzük, ezért ha erről az intervallumról írunk számokat a $\frac{t^2}{2}$ kifejezésbe, az pont a $(0,1)$intervallumot fogja visszaadni. Ez tehát a 2. sort, az $0 < u < 1$ helyen vett u helyettesítési értéket jelöli ki.

Megjegyzés: ez természetesen nem véletelen, hiszen úgy indultunk, hogy a $(0,1)$intervallumot transzformáltuk a $\sqrt{2X}$-el a $(0, \sqrt{2})$ intervallumra, majd a számolás során meghatároztuk ennek a transzformáló függvénynek az inverzét, $\frac{t^2}{2}$-t, majd ezzel visszatranszformáltuk a $(0, \sqrt{2})$ intervallumot a $(0,1)$ intervallumra.

Térjünk vissza a számolásra, tehát az $F_X(u) = u$ helyettesítési értéket használva:

$F_X(\frac{t^2}{2}) = \frac{t^2}{2}$ ha $0 < t < \sqrt{2}$ (Ezt le szoktátok hagyni!)

(Ettől az intervallumtól balra 0, jobbra meg 1 az értéke, ez viszont már magától értetődik.)

Azaz megkaptuk, hogy

$F_Y(t) = F_X(\frac{t^2}{2}) = \frac{t^2}{2}$

Nekünk a sűrűségfüggvény volt a kérdés, ez az eloszlásfüggvény deriváltja:

$f_Y(t) = F'_Y(t) = t$ ha $0 < t < \sqrt{2}$.

És készen vagyunk.

Ez a megoldási módszer elég sokszor előjön, sok olyan jellegű feladat van ahol adott valószínűségi változóból valamilyen függvénnyel csinálunk egy másikat, majd ennek kérdezünk rá az eloszlására, ezért érdemes megjegyezni.

Fgy II.67 feladata:

Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheitben mérik. Washingtonban a hőmérséklet eloszlása nyaranta $X \in N(86,4)$. Térjünk át a Celsius skálára! (Átváltási képlet: $Y[C] = \frac{5}{9}(X[F] - 32)$.)

Azaz most az Y valószínűségi változót $Y = \frac{5}{9}(X - 32)$-vel generáltuk.

Előadáson is tanult tétel alapján normál eloszlású valószínűségi változó esetében, ha azt lineárisan transzformáljuk akkor szintén normál eloszlású valószínűségi változót kapunk. Konkrétan ha $X \in N(m, D)$ és $Y = aX + b$-vel transzformáljuk (ahol $a \neq 0$, mert akkor konstans változót kapnánk), akkor $Y \in N(am + b, |a|D)$-t kapunk.

Ennek a bizonyítása pont azzal a módszerrel történik, mint amit a II.6 feladatban alkalmaztunk: van egy ismert eloszlású valószínűségi változónk, amit transzformálunk, majd annak kérdezzük meg a sűrűségfüggvényét. A sűrűségfüggvényről pedig ránézésre leolvashatóak a normál eloszlás paraméterei.

Az első lépés megint az, hogy megadjuk értékkészletét. Mivel $X \in N(m, D)$ ezért $R_X = (-\infty, \infty)$. Ha ezt tetszőlegesen lineárisan transzformáljuk az eredmény szintén a $(-\infty, \infty)$ intervallumra fog kerülni, azaz $R_Y = (-\infty, \infty)$.

A második lépés kiszámolni az eloszlásfüggvényt:

$$F_Y = P(Y < t) = P(aX + b < t) = P(aX < t - b)$$

Itt megint egy nem ekvivalens átalakításhoz értkeztünk: ha az a paraméter értéke negatív, a vele leosztástól megfordul az egyenlőtlenség iránya.

Ezért bontsuk két esetre a számolást:

1. eset: $a > 0$
2. eset: $a < 0$

($a = 0$-t kizártuk a tétel megfogalmazásakor.)

1. eset: $a > 0$

Az a-val leosztáskor nem változik meg az egyenlőtlenség iránya.

$$P(aX < t - b) = P(X < \frac{t-b}{a}) = F_X(\frac{t-b}{a})$$

Mivel X normál eloszlású valószínűségi változó, ezért én meg sem próbálom azt a borzasztó Taylor-soros kifejezést ide az eloszlásfüggvény helyére beírni, inkább rögtön lederiválom.

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = F'_X(\frac{t-b}{a}) = \frac{1}{a} f_X(\frac{t-b}{a})$$

2. eset: $a < 0$

Az a-val leosztáskor megfordul az egyenlőtlenség iránya.

$$P(aX < t - b) = P(X > \frac{t-b}{a}) = 1 - P(X < \frac{t-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{t-b}{a})$$

Majd ugyanúgy mint az 1. esetben lederiválom:

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{d(1 - F_X(\frac{t-b}{a}))}{dt} = -\frac{1}{a} f_X(\frac{t-b}{a})$$

Vegyük észre, hogy itt a negatív szám. A (-1)-es szorzót összevonhatjuk vele, ha $-\frac{1}{a}$ helyett az abszolút értékét: $\frac{1}{|a|}$-t írunk.

Az 1. esetben pedig az a pozitív szám, tehát őt nem fogja zavarni ha helyette az abszolútértékét írjuk.

Azaz az 1. és 2. eset innentől kezdve összevonható a következő képlettel:

$$f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{t-b}{a})$$

Mivel tudjuk, hogy $X \in N(m, D)$ ezért be is helyettesíthetjük a sűrűségfüggvényét:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}D} e^{-\frac{(t-m)^2}{2D^2}}$$

A következőképpen:

$$f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{t-b}{a}) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}D} e^{-\frac{(\frac{t-b}{a} - m)^2}{2D^2}}$$

Rendezzük át ezt szebb alakra:

$$\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}D}e^{-\frac{(\frac{t-b}{a}-m)^2}{2D^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|D}e^{-\frac{\frac{1}{a^2}((t-b)-am)^2}{2D^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|D}e^{-\frac{(t-(am+b))^2}{2a^2D^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|D}e^{-\frac{(t-(am+b))^2}{2(|a|)^2D^2}}$$

Ez pedig éppen egy $Y \in N(am+b, |a|D)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

A gyakorlaton ez a levezetés a konkrét lineáris transzformációra hangzott el, azaz paraméterek helyett a konkrét számokat írtuk be az egyenletbe, így kicsit rövidebb volt, mert tudtuk az a előjelét.

Most ha már a tételt levezettük, gyorsan megadható a megoldás a fenti feladatra (és ez a tétel előadáson elhangzott, ezért akár meg is lehet tanulni az eredményét).

$X \in N(86, 4)$

$Y = \frac{5}{9}(X-32) = \frac{5}{9}X - \frac{160}{9}$

Tanult tétel alapján $Y \in N(\frac{5}{9}*86 - \frac{160}{9}, \frac{5}{9}*4) = N(30, \frac{20}{9})$.

Standardizálás:

Az órán már emlegetett standardizálás éppen ennek a lineáris transzformációnak a speciális esete.

$X \in N(m, D)$

Keressük azt a transzformációt ami az X valószínűségi változót $N(0,1)$ eloszlásúvá transzformálja.

Próbáljunk meg ilyen lineáris transzformációt találni!

Lineráris transzformációk általános alakja: $Y = aX + b$. A tanult tétel alapján ekkor $Y \in N(am+b, |a|D)$. Én azt akarom, hogy $Y \in N(0,1)$ legyen, azaz állítsuk be az a és b paramétert úgy, hogy:

$am + b = 0$
$|a|D = 1$

Legyen $a = \frac{1}{D}$. Mivel D nem lehet negatív szám (következő előadáson tanuljuk, hogy miért) ezért $|a|$ -el szorozva nem adhat -1-et az 1 helyett.

Ekkor pedig $\frac{m}{D} + b = 0$, azaz $b = -\frac{m}{D}$ kell legyen.

Azaz létezik olyan lineáris transzformáció ami standardizálja X-et, ez pedig az $Y = aX + b = \frac{1}{D}X - \frac{m}{D} = \frac{X-m}{D}$

Az órán ezt a fent levezetett általános lineáris transzformációs tételt próbáltam meg erre a speciális esetre megcsinálni, nem túl sok sikerrel. Remélem ez alapján már világos hogy miért így kell normál eloszlású változókat standardizálni.

Ha valaki a fentiekben hibát talál, kérem jelezze, így a többieknek is tudok róla szólni/javítani még jövő hét szerda előtt.

Mindenkinek sikeres felkészülést kívánok a zárthelyire. :)

Viki