

# Paraméteres bonyolultság

Kovács Milán, Nemkin Viktória

2021. március 16.

- 1 Motiváció
- 2 Bar Fight Prevention problem
- 3 Definíciók
- 4 Feedback Arc Set problem

# Klasszikus bonyolultságelmélet

Algoritmus: hány lépést tesz az input méretének függvényében?

- Nem biztos, hogy az egyforma méretű bemenetek egyformán nehezek...
- Nem biztos, hogy egy teljesen általános megoldásra van szükségünk...

## Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

## Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

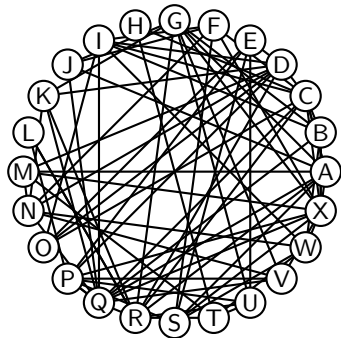
- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Számítógépnek melyiket lenne könnyebb megoldani?

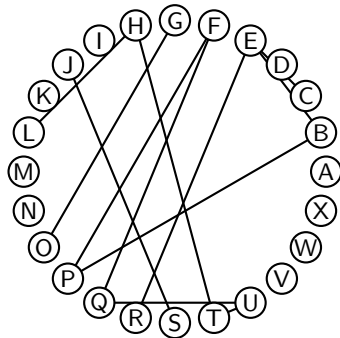
- 10000-nél kisebb prímszámok szorzata.
- RSA kódolás feltörése: két nagyon nagy prím szorzatát felbontani.

## Példa: Sűrű / ritka gráfok

Sűrű gráf:



Ritka gráf:



- Input: szomszédossági mátrix  $\rightarrow$  ugyanakkora.
- Gráfalgoritmusok: független csúcshalmaz, klikk, színezés  $\rightarrow$  nem egyformán nehéz.

# Valós életbeli problémák

Üzleti korlátok:

- Facebook:
  - ismerősök száma  $\leq 500$  (fokszám)
  - aktív felhasználók száma  $\leq 3$  milliárd (csúcsszám)
- Google:
  - keresett kifejezés hossza  $\leq 100$  karakter (illesztett minta hossza)
  - egy oldalon a linkek száma  $\leq 1000$  (fokszám)
- Orvosi alkalmazások:
  - DNS hosszúsága
  - protein max mérete

...stb

# Feladat

## Sztori

- Biztonsági őr egy vidéki bárban
- Péntek esti bulik, verekedés
- Falu lakóit ismerjük, tudjuk kik szoktak verekedni
- Megelőzés: nem engedünk be mindenkit
- Menedzsment: legfeljebb k vendég elutasítása
- Csütörtök este van, holnap estig kell eldönteni



# Bar Fight Prevention problem

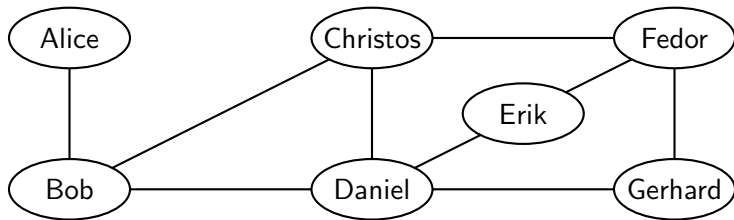
## Input

- Vendégek listája:  $n$  darab vendég
- Minden vendégpárra: fognak-e verekedni
- Legfeljebb hány vendéget utasíthatunk el:  $k$  (kevesebbet lehet)

## Output

- Megoldható-e, hogy a beengedettek között ne legyen verekedés?
- Kiket kell kitiltani?

# Példa

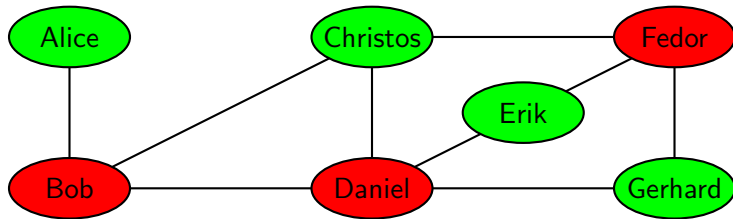


- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma:  $k=3$ .

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?

# Példa



- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma:  $k=3$ .

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?  
Bob-ot, Daniel-t és Fedor-t.
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?  
Lefogó csúcshalmaz:  $\forall$  él legalább egyik végpontja benne van.

# Brute force megoldás

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma:  $k$  (pl. 10)

Módszer	Lépések száma	Másodpercben ( $10^8$ IPS)
Minden részhalmaz	$2^n = 2^{1000} \approx 1.07 \cdot 10^{301}$	$1.07 \cdot 10^{293} \rightarrow$ Univerzum életkora: $6.62 \cdot 10^{14}$ mp
Csak $k$ elemű részhalmazok	$\binom{n}{k} = \binom{1000}{10} \approx 2.63 \cdot 10^{23}$	$2.63 \cdot 10^{15} \rightarrow$ Nap hossza: $8.64 \cdot 10^4$ mp

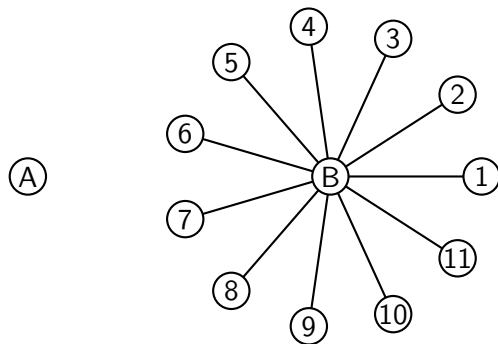
Üzleti korlát: a menedzsment nem fog nagy  $k$ -t engedélyezni.

# Paraméter választás

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszerű csúcs
- B:  $k + 1 \leq$  fokszerű csúcs

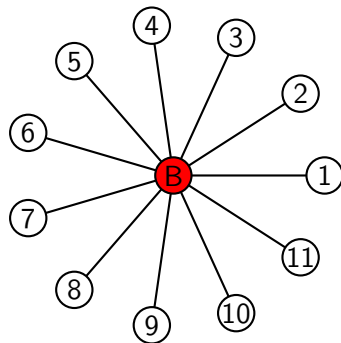


# Paraméter választás: fokszám

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs  
→ Beengedhető, nem ronthatja el
- B:  $k + 1 \leq$  fokszámú csúcs  
→ Mindenképp ki kell zárni  
→  $k$ -t csökkenteni 1-el



# Maradék gráf

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

# Maradék gráf

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás  $\leq k$  konfliktust fog megoldani.
- Még  $k$  kitiltásunk maradt.



# Maradék gráf

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás  $\leq k$  konfliktust fog megoldani.
- Még  $k$  kitiltásunk maradt.
- Összesen  $\leq k^2$  konfliktust tudunk megoldani.

# Maradék gráf

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

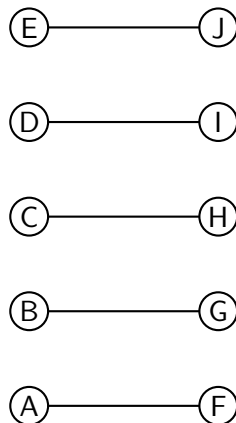
- Minden kitiltás  $\leq k$  konfliktust fog megoldani.
- Még  $k$  kitiltásunk maradt.
- Összesen  $\leq k^2$  konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$  élre: nem megoldható, készen vagyunk.

# Maradék gráf

- Csúcsok száma:  $n \leq 2k^2$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás  $\leq k$  konfliktust fog megoldani.
- Még  $k$  kitiltásunk maradt.
- Összesen  $\leq k^2$  konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$  élre: nem megoldható, készen vagyunk.
- Fokszám legalább 1:  $n \leq 2k^2$

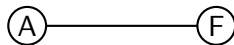
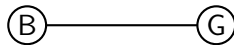
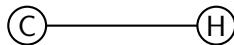
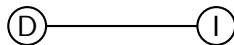
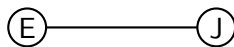


# Maradék gráf

- Csúcsok száma:  $n \leq 2k^2$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás  $\leq k$  konfliktust fog megoldani.
- Még  $k$  kitiltásunk maradt.
- Összesen  $\leq k^2$  konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$  élre: nem megoldható, készen vagyunk.
- Fokszám legalább 1:  $n \leq 2k^2$
- $\binom{2k^2}{k}$ , pl.  $\binom{200}{10} \approx 2.24 \cdot 10^{16}$ .  
Egy mai szuperszámítógépen már megoldható!

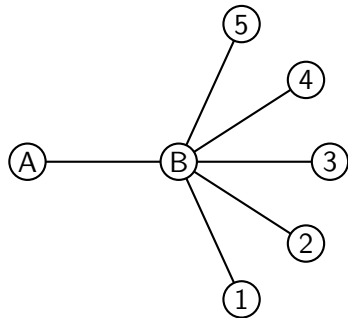


# 1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma:  $n \leq 2k^2$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs
- B: A szomszédja

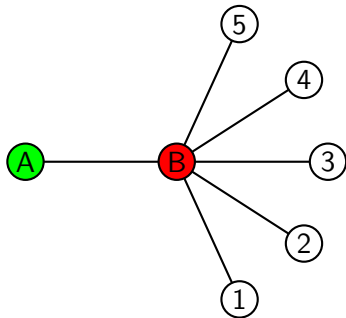


# 1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma:  $n \leq 2k^2$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $2 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs  $\rightarrow$  Beengedjük
- B: A szomszédja  $\rightarrow$  Kitiltjuk,  $k$ -t csökkentjük

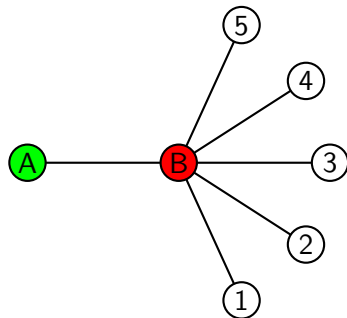


# 1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma:  $n \leq k^2$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $2 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs  $\rightarrow$  **Beengedjük**
- B: A szomszédja  $\rightarrow$  **Kitiltjuk, k-t csökkentjük**

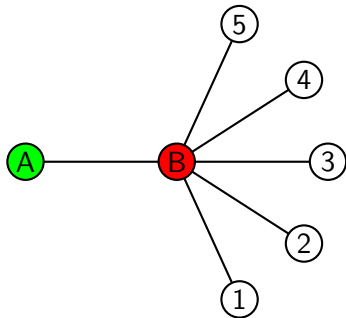


# 1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma:  $n \leq k^2$  (pl. 1000)
- Élek száma:  $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $2 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs → Beengedjük
- B: A szomszédja → Kitiltjuk,  $k$ -t csökkentjük
- $\binom{k^2}{k}$ , pl.  $\binom{100}{10} \approx 1.73 \cdot 10^{13}$ .  
Már a laptopunk is le tudja futtatni!

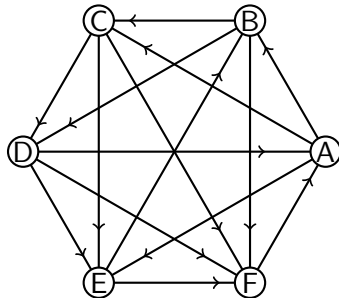




# Folytatás

## Bounded Search Trees

# Kernelizációs technika általánosan



# Vertex cover feladat megoldása egyben

# Paraméteres komplexitás definíciója általánosan

# Szemezgetés