Paraméteres bonyolultság

Kovács Milán, Nemkin Viktória

2021. március 16.

Menetrend

1. Motiváció
2. Bar Fight Prevention problem
3. Definíciók
4. Feedback Arc Set problem
5. Végszó

Menetrend

1. Motiváció
2. Bar Fight Prevention problem
3. Definíciók
4. Feedback Arc Set problem
5. Végszó

Klasszikus bonyolultságelmélet

Algoritmus: hány lépést tesz az input méretének függvényében?

- Nem biztos, hogy az egyforma méretű bemenetek egyformán nehezek...
- Nem biztos, hogy egy teljesen általános megoldásra van szükségünk...

Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

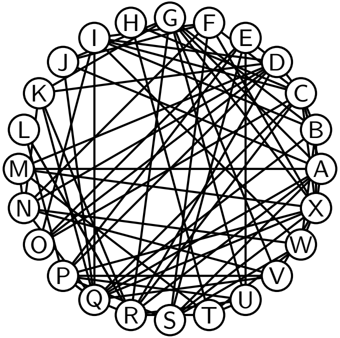
- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Számítógépnek melyiket lenne könnyebb megoldani?

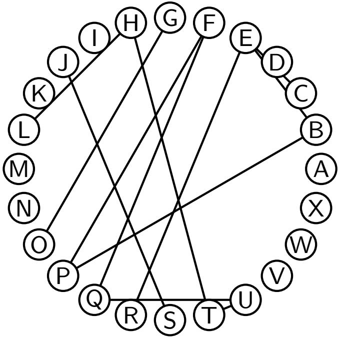
- 10000-nél kisebb prímszámok szorzata.
- RSA kódolás feltörése: két nagyon nagy prím szorzatát felbontani.

Példa: Sűrű / ritka gráfok

Sűrű gráf:



Ritka gráf:



- Input: szomszédossági mátrix → ugyanakkora.
- Gráfalgoritmusok: független csúcshalmaz, klikk, színezés → nem egyformán nehéz.

Valós életbeli problémák

Üzleti korlátok:

- Facebook:
  - ismerősök száma $\leq$ 500 (fokszám)
  - aktív felhasználók száma $\leq$ 3 milliárd (csúcsszám)
- Google:
  - keresett kifejezés hossza $\leq$ 100 karakter (illesztett minta hossza)
  - egy oldalon a linkek száma $\leq$ 1000 (fokszám)
- Orvosi alkalmazások:
  - DNS hosszúsága
  - protein max mérete

...stb

Menetrend

1 Motiváció

2 Bar Fight Prevention problem

3 Definíciók

4 Feedback Arc Set problem

5 Végszó

Feladat

Sztori

- Biztonsági őr egy vidéki bárban
- Péntek esti bulik, verekedés
- Falu lakóit ismerjük, tudjuk kik szoktak verekedni
- Megelőzés: nem engedünk be mindenkit
- Menedzsment: legfeljebb k vendég elutasítása
- Csütörtök este van, holnap estig kell eldönteni

Bar Fight Prevention problem

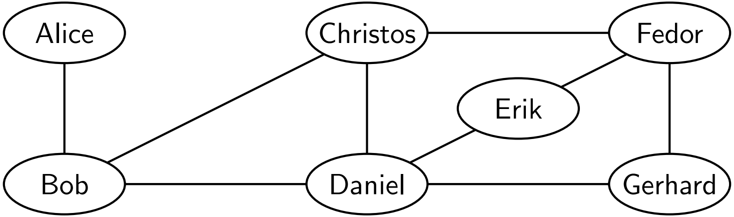
Input

- Vendégek listája: n darab vendég
- Minden vendégpárra: fognak-e verekedni
- Legfeljebb hány vendéget utasíthatunk el: k (kevesebbet lehet)

Output

- Megoldható-e, hogy a beengedettek között ne legyen verekedés?
- Kiket kell kitiltani?

Példa

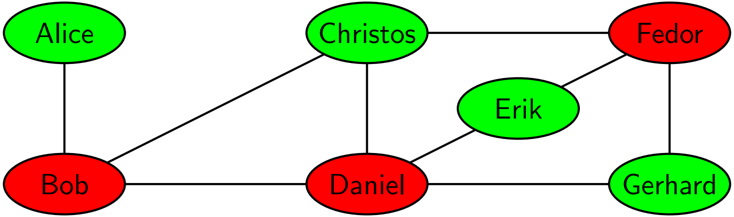


- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma: k=3.

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?

Példa



- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma: k=3.

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
  Bob-ot, Daniel-t és Fedor-t.
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?
  Lefogó csúcshalmaz: ∀ él legalább egyik végpontja benne van.

Brute force megoldás

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma: k (pl. 10)

Módszer	Lépések száma	Másodpercben (10^8 IPS)
Minden részhalmaz	$2^n = 2^{1000} \approx 1.07 \cdot 10^{301}$	$1.07 \cdot 10^{293} \to$ Univerzum életkora: $6.62 \cdot 10^{14}$ mp
Csak k elemű részhalmazok	$\binom{n}{k} = \binom{1000}{10} \approx 2.63 \cdot 10^{23}$	$2.63 \cdot 10^{15} \to$ Nap hossza: $8.64 \cdot 10^{4}$ mp

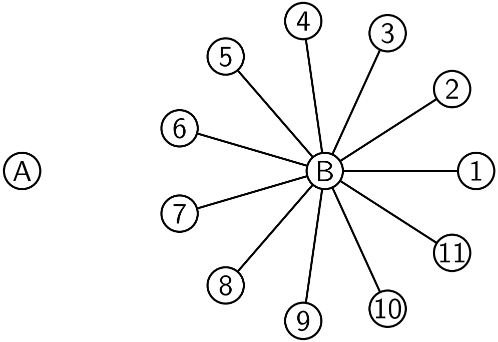
Üzleti korlát: a menedzsment nem fog nagy k-t engedélyezni.

Paraméter választás

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
- B: $k + 1 \leq$ fokszámú csúcs

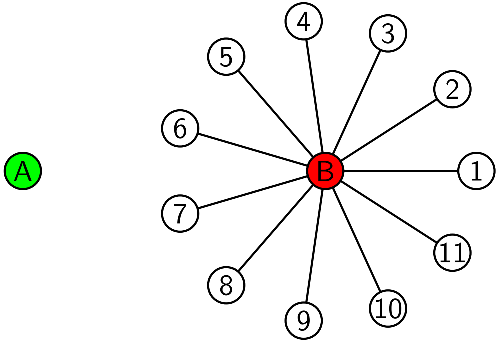


Paraméter választás: fokszám

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
  $\rightarrow$ Beengedhető, nem ronthatja el
- B: $k + 1 \leq$ fokszámú csúcs
  $\rightarrow$ Mindenképp ki kell zárni
  $\rightarrow$ k-t csökkenteni 1-el



Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

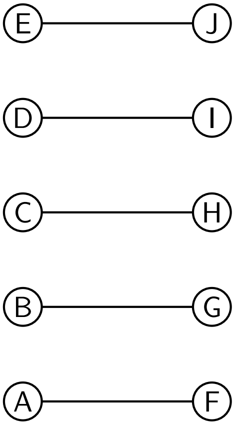
- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$ élre: nem megoldható, készen vagyunk.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

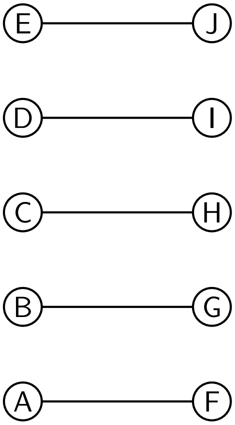
Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$ élre: nem megoldható, készen vagyunk.
- Fokszám legalább 1: $n \leq 2k^2$



Maradék gráf

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$



Mennyi van hátra?

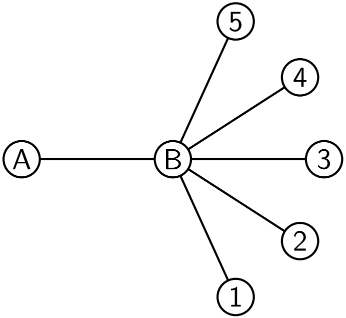
- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$ élre: nem megoldható, készen vagyunk.
- Fokszám legalább 1: $n \leq 2k^2$
- $\binom{2k^2}{k}$, pl. $\binom{200}{10} \approx 2.24 \cdot 10^{16}$.
  Egy mai szuperszámítógépen már megoldható!

1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs
- B: A szomszédja

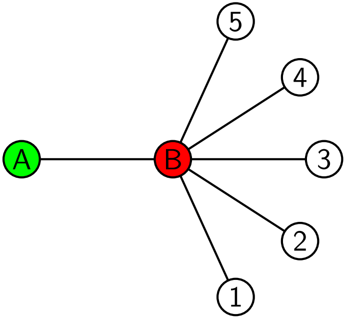


1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $2 \leq d(v) \leq k$

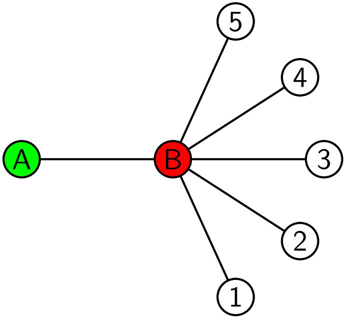
Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs $\rightarrow$ Beengedjük
- B: A szomszédja $\rightarrow$ Kitiltjuk, k-t csökkentjük



1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $2 \leq d(v) \leq k$

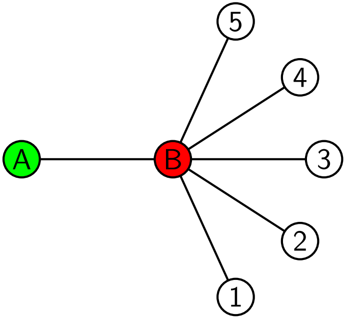


Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs $\rightarrow$ Beengedjük
- B: A szomszédja $\rightarrow$ Kitiltjuk, k-t csökkentjük

1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $2 \leq d(v) \leq k$



Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs $\rightarrow$ Beengedjük
- B: A szomszédja $\rightarrow$ Kitiltjuk, k-t csökkentjük

- $\binom{k^2}{k}$, pl. $\binom{100}{10} \approx 1.73 \cdot 10^{13}$.
  Már a laptopunk is le tudja futtatni!

Folytatás

Bounded Search Trees

Lépésszám

- Input: $n \cdot n$-es szomszédossági mátrix, k szám.
- Amíg van változás (max n-szer):
  - Kiszámolom minden csúcs fokszámát: n^2 lépés.
  - Elbánok a 0, 1, $k+1 \leq$ fokszámú csúcsokkal: n lépés.
- Ez összesen $n \cdot (n^2 + n) \approx n^3$ lépés lehet.
- Kernel megoldása $\binom{k^2}{k} \leq (k^2)^k = k^{2k}$

Összesen: $O(k^{2k} \cdot n^3)$.

Menetrend

1. Motiváció
2. Bar Fight Prevention problem
3. Definíciók
4. Feedback Arc Set problem
5. Végszó

Paraméteres bonyolultság

- Alapgondolat: A futási időt az
  - input mérete n és
  - az input valamilyen fontos k paraméterének a függvényében elemezzük.
- A cél a kombinatorikus robbanást k-ra korlátozni.

Definíció:

Egy probléma **fixed-parameter tractable (FPT)**, ha megoldható $f(k) \cdot n^{O(1)}$ időben, ahol f egy tetszőleges csak k-tól függő függvény.

Kernelizáció

A kernelizáció lényege:

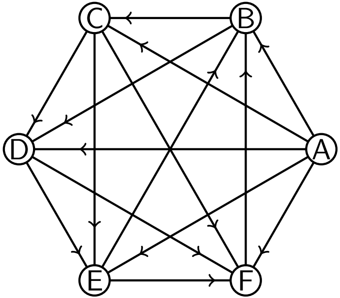
- A feladat könnyen kezelhető részeit gyorsan elintézzük.
- A fennmaradó rész: a probléma magja = "kernele".
- Ha jól csináljuk, a kernel mérete már csak a paramétertől függ.
- Ezt megoldjuk, akár exponenciális lépésben.

Menetrend

1. Motiváció
2. Bar Fight Prevention problem
3. Definíciók
4. Feedback Arc Set problem
5. Végszó

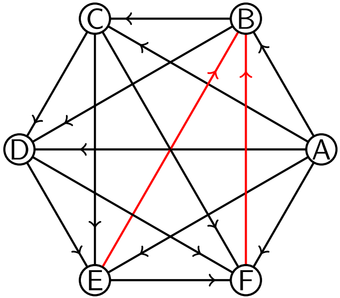
Tournament gráf

Irányított gráf, minden csúcspárra pontosan 1 irányban van él.



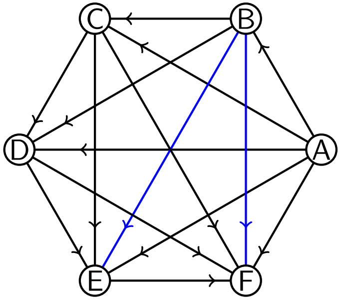
Feedback arc set

- Olyan élhalmaz, amit ha megfordítok nem lesz kör a gráfban.
- Tehát a gráf minden körének legalább az egyik éle benne van.
- Feladat: legfeljebb k elemű feedback arc set találása.



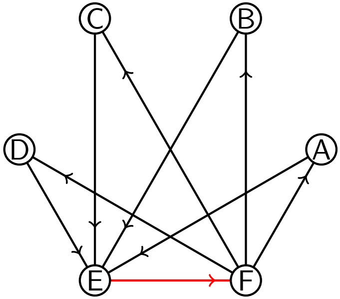
Feedback arc set

- Olyan élhalmaz, amit ha megfordítok nem lesz kör a gráfban.
- Tehát a gráf minden körének legalább az egyik éle benne van.
- Feladat: legfeljebb k elemű feedback arc set találása.



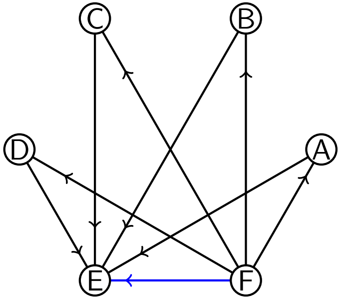
Kernelizáció: 1. szabály

Ha egy él k+1 háromszögben is benne van, akkor fordítsuk meg és csökkentsük a k-t 1-el.



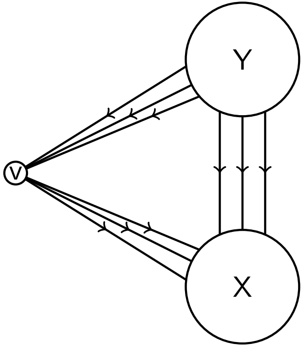
Kernelizáció: 1. szabály

Ha egy él k+1 háromszögben is benne van, akkor fordítsuk meg és csökkentsük a k-t 1-el.



Kernelizáció: 2. szabály

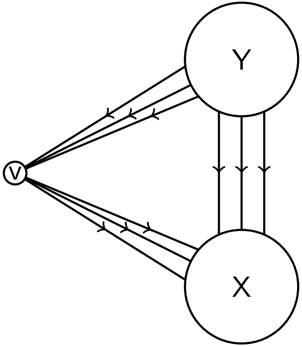
Ha egy csúcs nincs benne egyetlen háromszögben sem, akkor töröljük.



Kernelizáció: 2. szabály

Ha egy csúcs nincs benne egyetlen háromszögben sem, akkor töröljük.

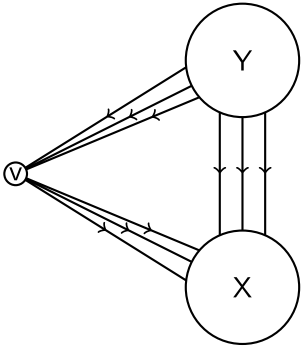
- A v nincs benne egyetlen körben sem.



Kernelizáció: 2. szabály

Ha egy csúcs nincs benne egyetlen háromszögben sem, akkor töröljük.

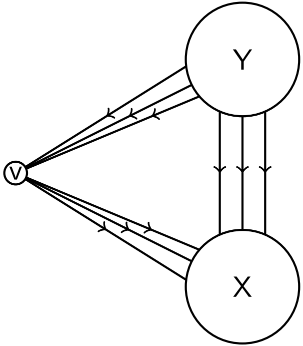
- A v nincs benne egyetlen körben sem.
- Az Y $\rightarrow$ v, illetve v $\rightarrow$ X élekre nincs szükség a feedback arc setben.



Kernelizáció: 2. szabály

Ha egy csúcs nincs benne egyetlen háromszögben sem, akkor töröljük.

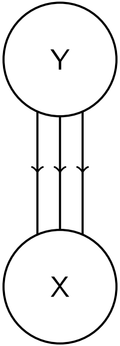
- A v nincs benne egyetlen körben sem.
- Az Y $\rightarrow$ v, illetve v $\rightarrow$ X élekre nincs szükség a feedback arc setben.
- Az Y $\rightarrow$ X élek nem fognak megfordulni.



Kernelizáció: 2. szabály

Ha egy csúcs nincs benne egyetlen háromszögben sem, akkor töröljük.

- A v nincs benne egyetlen körben sem.
- Az Y $\rightarrow$ v, illetve v $\rightarrow$ X élekre nincs szükség a feedback arc setben.
- Az Y $\rightarrow$ X élek nem fognak megfordulni.



Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.

Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
  - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
  - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.

Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
  - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
  - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.
- Tfh. van k méretű feedback arc set: F.

Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
  - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
  - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.
- Tfh. van k méretű feedback arc set: F.
- Ennek egy élére: 2 végpont + k db csúccsal lehet háromszögben (1. szabály nem alkalmazható)

Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
    - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
    - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.
- Tfh. van k méretű feedback arc set: F.
- Ennek egy élére: 2 végpont + k db csúccsal lehet háromszögben (1. szabály nem alkalmazható)
- Minden csúcs benne van egy háromszögben (2. szabály nem alkalmazható)

Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
  - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
  - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.
- Tfh. van k méretű feedback arc set: F.
- Ennek egy élére: 2 végpont + k db csúccsal lehet háromszögben (1. szabály nem alkalmazható)
- Minden csúcs benne van egy háromszögben (2. szabály nem alkalmazható)
- Minden háromszögben van él F-ből.

Kernel mérete

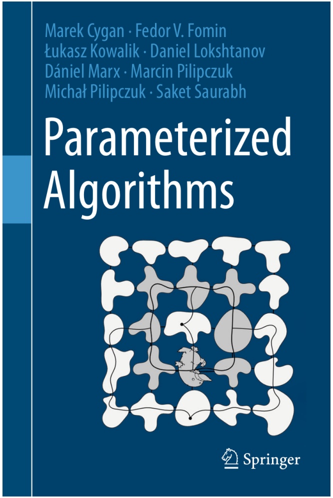
- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
  - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
  - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.
- Tfh. van k méretű feedback arc set: F.
- Ennek egy élére: 2 végpont + k db csúccsal lehet háromszögben (1. szabály nem alkalmazható)
- Minden csúcs benne van egy háromszögben (2. szabály nem alkalmazható)
- Minden háromszögben van él F-ből.
- Leszámláltunk k db F-beli élre darabonként k+2 csúcsot, kihagyás nélkül.

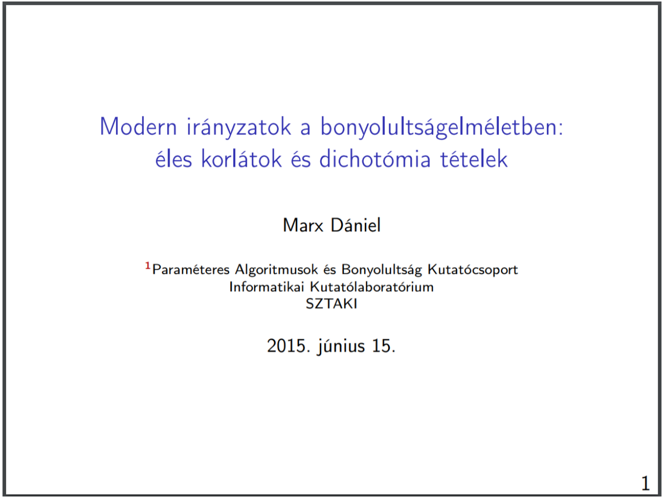
Kernel mérete

- Alkalmazzuk ezeket a szabályokat amíg lehet.
- Amikor már nem lehet:
  - 1. szabályt nem lehet, mert: minden él legfeljebb k háromszög része.
  - 2. szabály nem lehet, mert: minden csúcs része valamely háromszögnek.
- Tfh. van k méretű feedback arc set: F.
- Ennek egy élére: 2 végpont + k db csúccsal lehet háromszögben (1. szabály nem alkalmazható)
- Minden csúcs benne van egy háromszögben (2. szabály nem alkalmazható)
- Minden háromszögben van él F-ből.
- Leszámláltunk k db F-beli élre darabonként k+2 csúcsot, kihagyás nélkül.
- A gráfban legfeljebb $k(k+2)$ csúcs van, ha megoldható.

Menetrend

1. Motiváció
2. Bar Fight Prevention problem
3. Definíciók
4. Feedback Arc Set problem
5. Végszó




Modern irányzatok a bonyolultságelméletben: éles korlátok és dichotómia tételek

Marx Dániel

[1]Paraméteres Algoritmusok és Bonyolultság Kutatócsoport
Informatikai Kutatólaboratórium
SZTAKI

2015. június 15.

1

- https://www.springer.com/gp/book/9783319212746
- http://www.cs.bme.hu/~dmarx/papers/sztaki2015-talk.pdf