

Paraméteres bonyolultság

Kovács Milán, Nemkin Viktória

2021. március 16.

- 1 Motiváció
- 2 Bar Fight Prevention problem
- 3 Definíciók
- 4 Feedback Arc Set problem

Klasszikus bonyolultságelmélet

Algoritmus: hány lépést tesz az input méretének függvényében?

- Nem biztos, hogy az egyforma méretű bemenetek egyformán nehezek...
- Nem biztos, hogy egy teljesen általános megoldásra van szükségünk...

Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

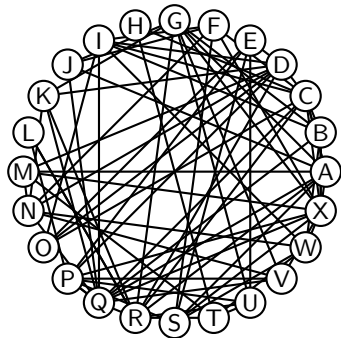
- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Számítógépnek melyiket lenne könnyebb megoldani?

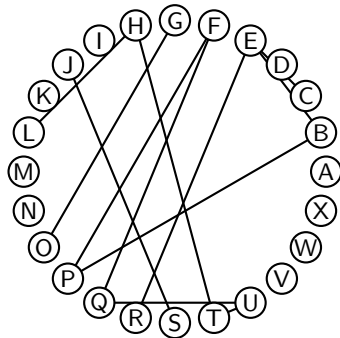
- 10000-nél kisebb prímszámok szorzata.
- RSA kódolás feltörése: két nagyon nagy prím szorzatát felbontani.

Példa: Sűrű / ritka gráfok

Sűrű gráf:



Ritka gráf:



- Input: szomszédossági mátrix \rightarrow ugyanakkora.
- Gráfalgoritmusok: független csúcshalmaz, klikk, színezés \rightarrow nem egyformán nehéz.

Valós életbeli problémák

Üzleti korlátok:

- Facebook:
 - ismerősök száma ≤ 500 (fokszám)
 - aktív felhasználók száma ≤ 3 milliárd (csúcsszám)
- Google:
 - keresett kifejezés hossza ≤ 100 karakter (illesztett minta hossza)
 - egy oldalon a linkek száma ≤ 1000 (fokszám)
- Orvosi alkalmazások:
 - DNS hosszúsága
 - protein max mérete

...stb

Feladat

Sztori

- Biztonsági őr egy vidéki bárban
- Péntek esti bulik, verekedés
- Falu lakóit ismerjük, tudjuk kik szoktak verekedni
- Megelőzés: nem engedünk be mindenkit
- Menedzsment: legfeljebb k vendég elutasítása
- Csütörtök este van, holnap estig kell eldönteni

Bar Fight Prevention problem

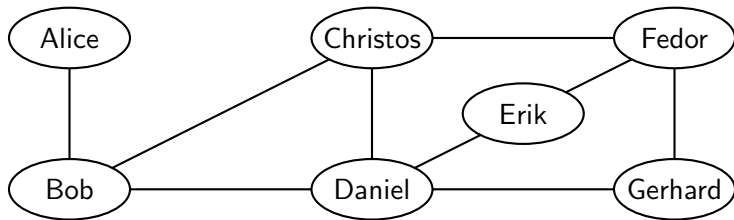
Input

- Vendégek listája: n darab vendég
- Minden vendégpárra: fognak-e verekedni
- Legfeljebb hány vendéget utasíthatunk el: k (kevesebbet lehet)

Output

- Megoldható-e, hogy a beengedettek között ne legyen verekedés?
- Kiket kell kitiltani?

Példa

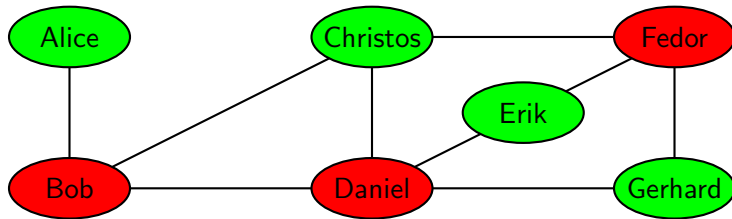


- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma: $k=3$.

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?

Példa



- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma: $k=3$.

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
Bob-ot, Daniel-t és Fedor-t.
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?
Lefogó csúcshalmaz: \forall él legalább egyik végpontja benne van.

Brute force megoldás

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma: k (pl. 10)

Módszer	Lépések száma	Másodpercben (10^8 IPS)
Minden részhalmaz	$2^n = 2^{1000} \approx 1.07 \cdot 10^{301}$	$1.07 \cdot 10^{293} \rightarrow$ Univerzum életkora: $6.62 \cdot 10^{14}$ mp
Csak k elemű részhalmazok	$\binom{n}{k} = \binom{1000}{10} \approx 2.63 \cdot 10^{23}$	$2.63 \cdot 10^{15} \rightarrow$ Nap hossza: $8.64 \cdot 10^4$ mp

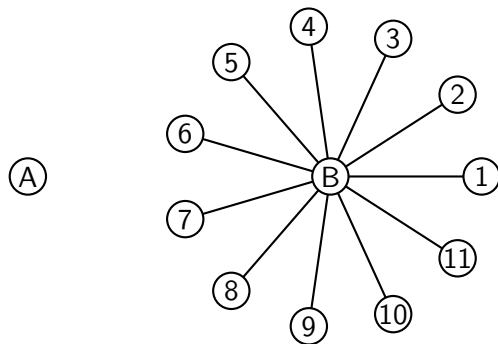
Üzleti korlát: a menedzsment nem fog nagy k -t engedélyezni.

Paraméter választás

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
- B: $k + 1 \leq$ fokszámú csúcs

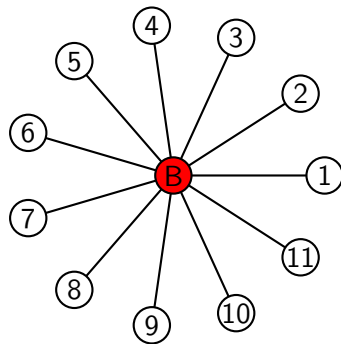


Paraméter választás: fokszám

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
→ Beengedhető, nem ronthatja el
- B: $k + 1 \leq$ fokszámú csúcs
→ Mindenki ki kell zárni
→ k -t csökkenteni 1-el



Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

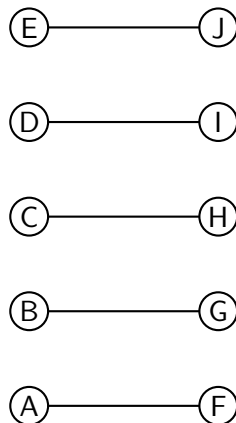
- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$ élre: nem megoldható, készen vagyunk.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$ élre: nem megoldható, készen vagyunk.
- Fokszám legalább 1: $n \leq 2k^2$



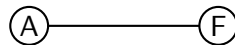
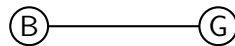
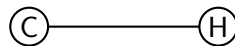
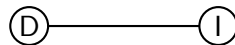
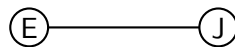
Maradék gráf

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mennyi van hátra?

- Minden kitiltás $\leq k$ konfliktust fog megoldani.
- Még k kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k^2 < e$ élre: nem megoldható, készen vagyunk.
- Fokszám legalább 1: $n \leq 2k^2$
- $\binom{2k^2}{k}$, pl. $\binom{200}{10} \approx 2.24 \cdot 10^{16}$.

Egy mai szuperszámítógépen már megoldható!

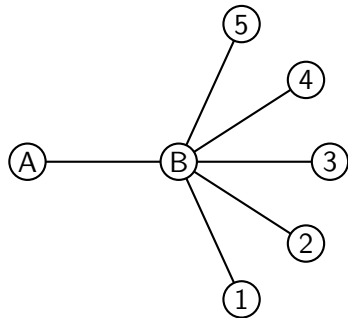


1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs
- B: A szomszédja

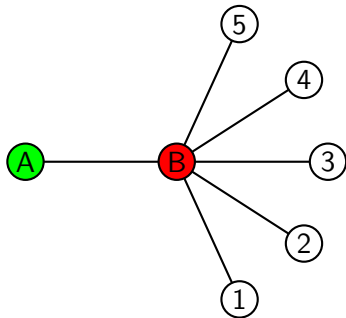


1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq 2k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $2 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs \rightarrow Beengedjük
- B: A szomszédja \rightarrow Kitiltjuk, k -t csökkentjük

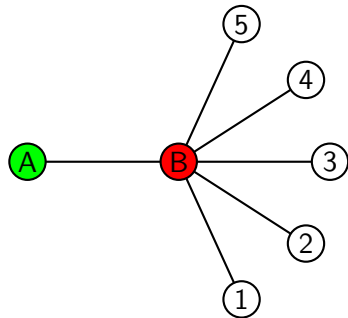


1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $2 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs \rightarrow Beengedjük
- B: A szomszédja \rightarrow Kitiltjuk, k -t csökkentjük

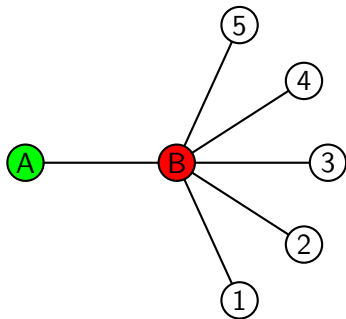


1 fokú csúcsok

- Csúcsok száma: $n \leq k^2$ (pl. 1000)
- Élek száma: $e \leq k^2$
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $2 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 1 fokszámú csúcs \rightarrow **Beengedjük**
- B: A szomszédja \rightarrow **Kitiltjuk, k-t csökkentjük**
- $\binom{k^2}{k}$, pl. $\binom{100}{10} \approx 1.73 \cdot 10^{13}$.
Már a laptopunk is le tudja futtatni!



Folytatás

Bounded Search Trees

Kernelizációs technika általánosan

Vertex cover feladat megoldása egyben

Paraméteres komplexitás definíciója általánosan

Szemezgetés