

# Paraméteres bonyolultság

Kovács Milán, Nemkin Viktória

2021. március 16.

- 1 Motiváció
- 2 Bar Fight Prevention problem
- 3 Definíciók
- 4 Feedback arc set

# Klasszikus bonyolultságelmélet

Algoritmus: hány lépést tesz az input méretének függvényében?

- Nem biztos, hogy az egyforma méretű bemenetek egyformán nehezek...
- Nem biztos, hogy egy teljesen általános megoldásra van szükségünk...

## Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

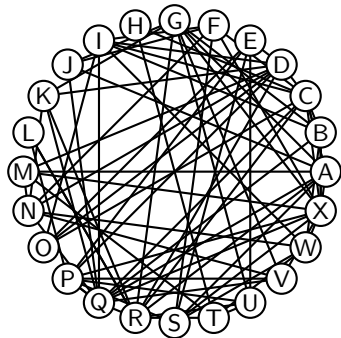
- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Számítógépnek melyiket lenne könnyebb megoldani?

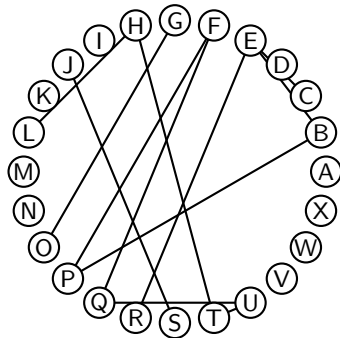
- 10000-nél kisebb prímszámok szorzata.
- RSA kódolás feltörése: két nagyon nagy prím szorzatát felbontani.

## Példa: Sűrű / ritka gráfok

Sűrű gráf:



Ritka gráf:



- Input: szomszédossági mátrix  $\rightarrow$  ugyanakkora.
- Gráfalgoritmusok: független csúcshalmaz, klikk, színezés  $\rightarrow$  nem egyformán nehéz.

# Valós életbeli problémák

Üzleti korlátok:

- Facebook:
  - ismerősök száma  $\leq 500$  (fokszám)
  - aktív felhasználók száma  $\leq 3$  milliárd (csúcsszám)
- Google:
  - keresett kifejezés hossza  $\leq 100$  karakter (illesztett minta hossza)
  - egy oldalon a linkek száma  $\leq 1000$  (fokszám)
- Orvosi alkalmazások:
  - DNS hosszúsága
  - protein max mérete

...stb

# Feladat

## Sztori

- Biztonsági őr egy vidéki bárban
- Péntek esti bulik, verekedés
- Falu lakóit ismerjük, tudjuk kik szoktak verekedni
- Megelőzés: nem engedünk be mindenkit
- Menedzsment: legfeljebb k vendég elutasítása
- Csütörtök este van, holnap estig kell eldönteni

# Bar Fight Prevention problem

## Input

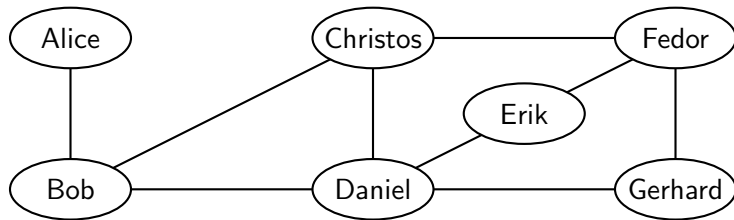
- Vendégek listája:  $n$  darab vendég
- Minden vendégpárra: fognak-e verekedni
- Legfeljebb hány vendéget utasíthatunk el:  $k$  (kevesebbet lehet)

## Output

- Megoldható-e, hogy a beengedettek között ne legyen verekedés?
- Kiket kell kitiltani?



# Megoldás

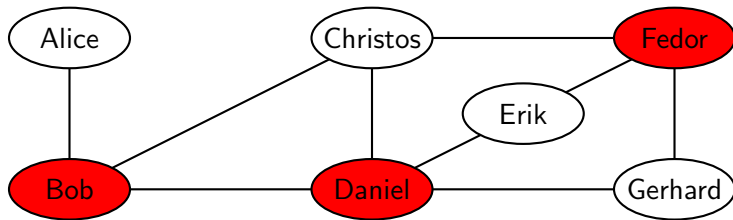


- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma:  $k=3$ .

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?

# Megoldás



- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma:  $k=3$ .

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?  
**Bob-ot, Daniel-t és Fedor-t.**
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?  
**Lefogó csúcshalmaz:  $\forall$  él legalább egyik végpontja benne van.**

# Brute force megoldás

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma:  $k$  (pl. 10)

Módszer	Lépések száma	Másodpercben ( $10^8$ IPS)
Minden részhalmaz	$2^n = 2^{1000} \approx 1.07 \cdot 10^{301}$	$1.07 \cdot 10^{293} \rightarrow$ Univerzum életkora: $6.62 \cdot 10^{14}$ mp
Csak $k$ elemű részhalmazok	$\binom{n}{k} = \binom{1000}{10} \approx 2.63 \cdot 10^{23}$	$2.63 \cdot 10^{15} \rightarrow$ Nap hossza: $8.64 \cdot 10^4$ mp

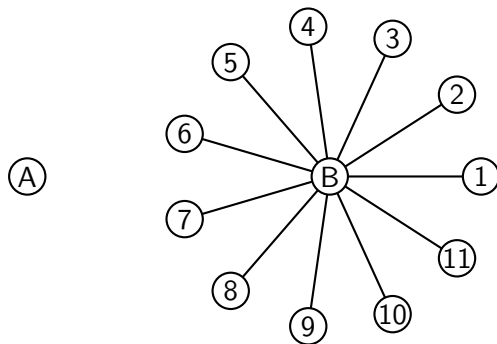
Üzleti korlát: a menedzsment nem fog nagy  $k$ -t engedélyezni.

# Paraméter választás

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma:  $k$  (pl. 10)

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
- B:  $k + 1 \leq$  fokszámú csúcs

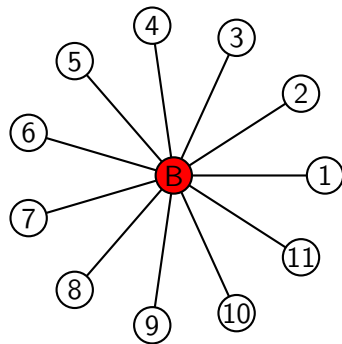


# Paraméter választás: fokszám

- Csúcsok száma:  $n$  (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma:  $k$  (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma:  $1 \leq d(v) \leq k$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs  
→ Beengedhető, nem ronthatja el
- B:  $k + 1 \leq$  fokszámú csúcs  
→ Mindenképp ki kell zárni  
→  $k' = k - 1$  kizárás maradt



$k+1$ 

- Aki  $k$ -nál nagyobb fokszámú azt nem engedhetem be, mert akkor a szomszédjait kellene kitiltani, akik  $k$ -nál többen vannak.
- Ha valakit kitiltok akkor  $k$ -t csökkentem eggyel.
- Maradék gráf:  $1 \dots k$  fokú csúcsok. Minden kitiltás így  $k$  vagy kevesebb konfliktust fog megoldani a továbbiakban.
- Ha több mint  $k^2$  élünk van akkor biztosan nem megoldható a feladat, készen vagyunk.
- Ha  $k^2$  vagy kevesebb élünk van, akkor legfeljebb  $2k^2$  csúcsunk lehet (minden élnek két vége van és nincs 0 fokú csúcs).
- $\binom{2k^2}{k}$  mostmár  $k \leq 10$ -re már jobb mint az előbbi  $2^n$ .

# 1 fokú csúcsok

- Az 1 fokú csúcs és szomszédja esetében: ha beengedem a csúcsot akkor az 1 darab szomszédját nem engedhetem be.
- Ezzel biztos nem lett rosszabb a helyzet, mert ha a csúcsot nem engedem be akkor a szomszédját beengedhetem, de annak még lehetnek egyéb szomszédjai is.
- Ezért engedjük be az 1 fokú csúcsokat és tiltsuk ki a szomszédokat (ezzel  $k$ -t is csökkentjük 1-el).
- Így mostmár  $2..k$  konfliktus lehet.
- Erre megint kiszámolom a max csúcsszámot, ez mostmár csak  $k^2$ , erre még jobb szám jön ki.



Itt van még a példának folytatása bounded search tree-kkel, de azt inkább Milánnak kellene elmondania.



# Kernelizációs technika általánosan

# Vertex cover feladat megoldása egyben

# Paraméteres komplexitás definíciója általánosan

# Szemezgetés