Paraméteres bonyolultság

Kovács Milán, Nemkin Viktória

2021. március 16.

Menetrend

Klasszikus bonyolultságelmélet

Algoritmus: hány lépést tesz az input méretének függvényében?

- Nem biztos, hogy az egyforma méretű bemenetek egyformán nehezek...
- Nem biztos, hogy egy teljesen általános megoldásra van szükségünk...

Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Példa: Prímtényezős felbontás

Feladat: prímtényezős felbontás megadása.

Kézzel melyiket lenne könnyebb megoldani?

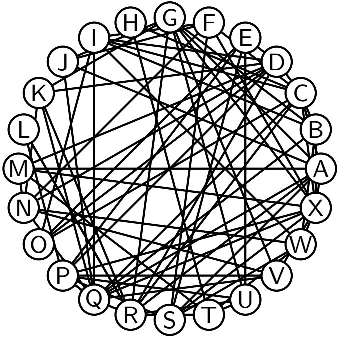
- $4503599627370496 = 2^{52}$
- $1125897758834689 = 524287 \cdot 2147483647$

Számítógépnek melyiket lenne könnyebb megoldani?

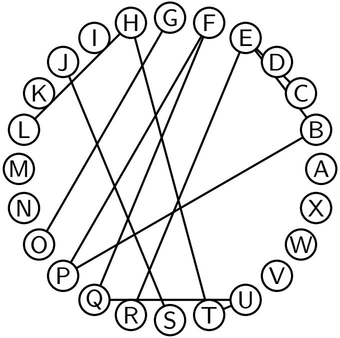
- 10000-nél kisebb prímszámok szorzata.
- RSA kódolás feltörése: két nagyon nagy prím szorzatát felbontani.

Példa: Sűrű / ritka gráfok

Sűrű gráf:



Ritka gráf:



- Input: szomszédossági mátrix → ugyanakkora.
- Gráfalgoritmusok: független csúcshalmaz, klikk, színezés → nem egyformán nehéz.

Valós életbeli problémák

Üzleti korlátok:

- Facebook:
  - ismerősök száma $\leq$ 500 (fokszám)
  - aktív felhasználók száma $\leq$ 3 milliárd (csúcsszám)
- Google:
  - keresett kifejezés hossza $\leq$ 100 karakter (illesztett minta hossza)
  - egy oldalon a linkek száma $\leq$ 1000 (fokszám)
- Orvosi alkalmazások:
  - DNS hosszúsága
  - protein max mérete

...stb

Feladat

Sztori

- Biztonsági őr egy vidéki bárban
- Péntek esti bulik, verekedés
- Falu lakóit ismerjük, tudjuk kik szoktak verekedni
- Megelőzés: nem engedünk be mindenkit
- Menedzsment: legfeljebb k vendég elutasítása
- Csütörtök este van, holnap estig kell eldönteni

Bar Fight Prevention problem

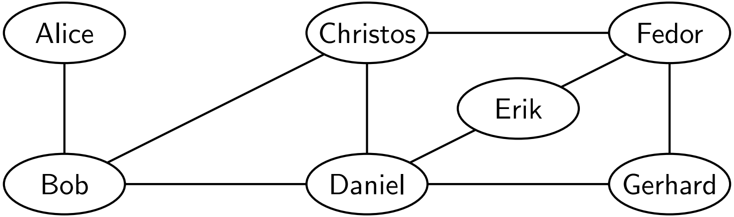
Input

- Vendégek listája: n darab vendég
- Minden vendégpárra: fognak-e verekedni
- Legfeljebb hány vendéget utasíthatunk el: k (kevesebbet lehet)

Output

- Megoldható-e, hogy a beengedettek között ne legyen verekedés?
- Kiket kell kitiltani?

Megoldás

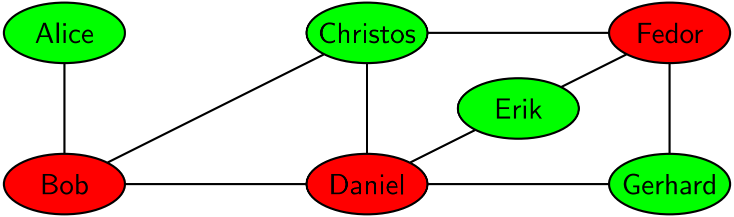


- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma: k=3.

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?

Megoldás



- Csúcsok = vendégek, élek = verekedni fognak.
- Kitilható vendégek száma: k=3.

Kérdések:

- Kit tiltsunk ki, hogy ne legyen verekedés?
  Bob-ot, Daniel-t és Fedor-t.
- Melyik Algoritmuselméletből tanult feladat ez?
  Lefogó csúcshalmaz: ∀ él legalább egyik végpontja benne van.

Brute force megoldás

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható emberek száma: k (pl. 10)

Módszer	Lépések száma	Másodpercben (10^8 IPS)
Minden részhalmaz	$2^n = 2^{1000} \approx 1.07 \cdot 10^{301}$	$1.07 \cdot 10^{293} \rightarrow$ Univerzum életkora: $6.62 \cdot 10^{14}$ mp
Csak k elemű részhalmazok	$\binom{n}{k} = \binom{1000}{10} \approx 2.63 \cdot 10^{23}$	$2.63 \cdot 10^{15} \rightarrow$ Nap hossza: $8.64 \cdot 10^{4}$ mp

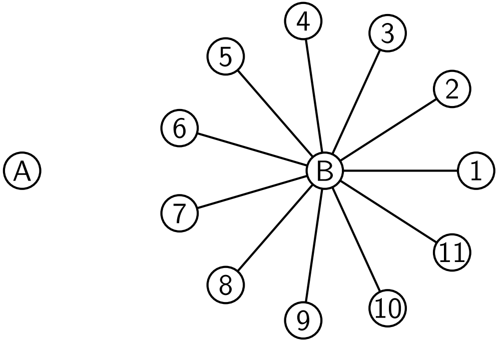
Üzleti korlát: a menedzsment nem fog nagy k-t engedélyezni.

Paraméter választás

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Kizárható vendégek száma: k (pl. 10)

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
- B: $k+1 \leq$ fokszámú csúcs

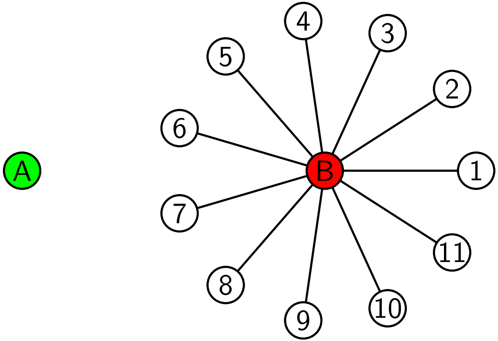


Paraméter választás: fokszám

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

Mit tehetünk a következő csúcsokkal?

- A: 0 fokszámú csúcs
  → Beengedhető, nem ronthatja el
- B: $k + 1 \leq$ fokszámú csúcs
  → Mindenképp ki kell zárni
  → k' = k-1 kizárás maradt



Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

- Minden kitiltás $\leq k'$ konfliktust fog megoldani.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

- Minden kitiltás $\leq k'$ konfliktust fog megoldani.
- Még k' kitiltásunk maradt.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

- Minden kitiltás $\leq k'$ konfliktust fog megoldani.
- Még k' kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k'^2$ konfliktust tudunk megoldani.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

- Minden kitiltás $\leq k'$ konfliktust fog megoldani.
- Még k' kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k'^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k'^2 < e$ élre: nem megoldható, kész.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

- Minden kitiltás $\leq k'$ konfliktust fog megoldani.
- Még k' kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k'^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k'^2 < e$ élre: nem megoldható, kész.
- $e \leq k'^2$ élre: csúcsok száma$\leq 2k'^2$.

Maradék gráf

- Csúcsok száma: n (pl. 1000)
- Élek száma: e
- Még kizárható vendégek száma: $k' \leq k$ (pl. 10)
- Csúcsok fokszáma: $1 \leq d(v) \leq k'$

- Minden kitiltás $\leq k'$ konfliktust fog megoldani.
- Még k' kitiltásunk maradt.
- Összesen $\leq k'^2$ konfliktust tudunk megoldani.
- $k'^2 < e$ élre: nem megoldható, kész.
- $e \leq k'^2$ élre: csúcsok száma$\leq 2k'^2$.
- $\binom{2k^2}{k}$ mostmár $k \leq 10$-re már jobb mint az előbbi 2^n.

1 fokú csúcsok

- Az 1 fokú csúcs és szomszédja esetében: ha beengedem a csúcsot akkor az 1 darab szomszédját nem engedhetem be.
- Ezzel biztos nem lett rosszabb a helyzet, mert ha a csúcsot nem engedem be akkor a szomszédját beengedhetem, de annak még lehetnek egyéb szomszédjai is.
- Ezért engedjük be az 1 fokú csúcsokat és tiltsuk ki a szomszédokat (ezzel k-t is csökkentsük 1-el).
- Így mostmár 2..k konfliktus lehet.
- Erre megint kiszámolom a max csúcsszámot, ez mostmár csak k^2, erre még jobb szám jön ki.

?

Itt van még a példának folytatása bounded search tree-kkel, de azt inkább Milánnak kellene elmondania.

Kernelizációs technika általánosan

Vertex cover feladat megoldása egyben

Paraméteres komplexitás definíciója általánosan

Szemezgetés