

Лабораторная работа 2.1.3

Определение C_p/C_v по скорости звука в газе

Милославов Глеб Евгеньевич

Б04-105

Долгопрудный
22 марта 2022 г.

1 Введение

Цель работы: Измерение частоты колебаний и длины волны при резонансе звуковых колебаний в газе, заполняющем трубу. Определение показателя адиабаты с помощью уравнения состояния идеального газа.

В работе используются: звуковой генератор ГЗ; электронный осциллограф ЭО; микрофон; телефон; раздвижная труба; теплоизолированная труба, обогреваемая водой из термостата; баллон со сжатым углекислым газом; газгольдер.

2 Теоретические сведения

Скорость распространения звуковой волны в газах зависит от показателя адиабаты γ . На измерении скорости звука основан один из наиболее точных методов определения показателя адиабаты.

Скорость звука в газах определяется формулой:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

где R – газовая постоянная, T – температура газа, а μ – его молярная масса. Преобразуя эту формулу, найдем

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} c^2. \quad (1)$$

Таким образом, для определения показателя адиабаты достаточно измерить температуру газа и скорость распространения звука (молярная масса газа предполагается известной).

Звуковая волна, распространяющаяся вдоль трубы, испытывает многократные отражения от торцов. Звуковые колебания в трубе являются наложением всех отраженных волн и очень сложны. Картина упрощается, если длина трубы L равна целому числу полуволен, то есть когда

$$L = n\lambda/2,$$

где λ – длина волны звука в трубе, а n – любое целое число. Если это условие выполнено, то волна, отраженная от торца трубы, вернувшись к ее началу и вновь отраженная, совпадает по фазе с падающей. Совпадающие по фазе волны усиливают друг друга. Амплитуда звуковых колебаний при этом резко возрастает – наступает резонанс.

При звуковых колебаниях слои газа, прилегающие к торцам трубы, не испытывают смещения. Узлы смещения повторяются по всей длине трубы через $\lambda/2$. Между узлами находятся максимумы смещения.

Скорость звука c связана с его частотой f и длиной волны λ соотношением

$$c = \lambda f. \quad (2)$$

Подбор условий, при которых возникает резонанс, можно производить двояко:

1. При неизменной частоте f звукового генератора (а следовательно, и неизменной длине звуковой волны λ) можно изменять длину трубы L . Для этого применяется раздвижная труба. Длина раздвижной трубы постепенно увеличивается, и наблюдается ряд последовательных резонансов. Возникновение резонанса легко наблюдать на осциллографе по резкому увеличению амплитуды колебаний. Для последовательных резонансов имеем

$$L_n = n\frac{\lambda}{2}, \quad L_{n+1} = (n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \dots, \quad L_{n+k} = n\frac{\lambda}{2} + k\frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

т. е. $\lambda/2$ равно угловому коэффициенту графика, изображающего зависимость длины трубы L от номера резонанса k . Скорость звука находится по формуле (2).

2. При постоянной длине трубы можно изменять частоту звуковых колебаний. В этом случае следует плавно изменять частоту f звукового генератора, а следовательно, и длину звуковой волны λ . Для последовательных резонансов получим

$$L = \frac{\lambda_1}{2}n = \frac{\lambda_2}{2}(n+1) = \dots = \frac{\lambda_{k+1}}{2}(n+k). \quad (4)$$

Из (2) и (4) имеем:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L}n, \quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{2L}(n+1) = f_1 + \frac{c}{2L}, \quad \dots,$$

$$f_{k+1} = \frac{c}{\lambda_{k+1}} = \frac{c}{2L}(n+k) = f_1 + \frac{c}{2L}k.$$

Скорость звука, деленная на $2L$, определяется, таким образом, по угловому коэффициенту графика зависимости частоты от номера резонанса.

3 Экспериментальная установка

Соответственно двум методам измерения скорости звука в работе имеются две установки (рис. 1 и 2). В обеих установках звуковые колебания в трубе возбуждаются телефоном Т и улавливаются микрофоном М. Мембрана телефона приводится в движение переменным током звуковой частоты; в качестве источника переменной ЭДС используется звуковой генератор ГЗ. Возникающий в микрофоне сигнал наблюдается на осциллографе ЭО.

Микрофон и телефон присоединены к установке через тонкие резиновые трубки. Такая связь достаточна для возбуждения и обнаружения звуковых колебаний в трубе и в то же время мало возмущает эти колебания: при расчетах оба торца трубы можно считать неподвижными, а влиянием соединительных отверстий пренебречь.

Первая установка (рис. 1) содержит раздвижную трубу с миллиметровой шкалой. Через патрубков (на рисунке не показан) труба может наполняться воздухом или углекислым газом из газгольдера. На этой установке производятся измерения γ для воздуха и для CO_2 . Вторая установка (рис. 2) содержит теплоизолированную трубу постоянной длины. Воздух в трубе нагревается водой из термостата. Температура газа принимается равной температуре омывающей трубу воды. На этой установке измеряется зависимость скорости звука от температуры.

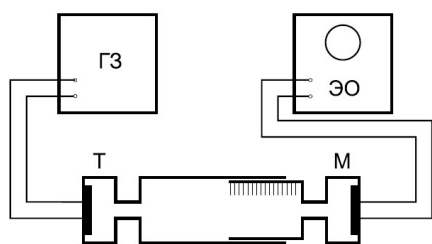


Рис. 1: Установка для измерения скорости звука при помощи раздвижной трубы

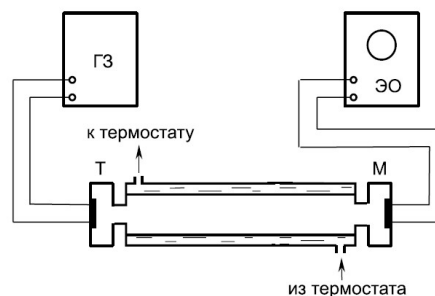


Рис. 2: Установка для изучения зависимости скорости звука от температуры

4 Ход работы

4.1 Измерение C_p/C_v для воздуха при помощи установки с раздвижной трубой

Проведём измерение коэффициента C_p/C_v для воздуха при помощи установки с раздвижной трубой. Для проведения серии измерений фиксируем частоту звукового сигнала и оставляем её неизменной до окончания снятия показаний. Увеличиваем и уменьшаем длину трубки, чтобы добиться резонанса, возникновение которого устанавливается при помощи осциллографа. При возникновении резонанса фиксируем то расстояние, на которое была выдвинута трубка прибора. Данные измерения проводим для нескольких значений частот. Полученные результаты заносим в таблицу 1.

f , кГц	4,10		3,92		3,81		3,72		3,61	
k	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм
1	22	0	14	0	35	0	11	0	33	0
2	63	41	56	42	79	44	55	44	80	47
3	103	81	99	85	123	88	101	90	127	94
4	144	122	141	127	169	134	147	136	175	142
5	189	167	185	171	213	178	193	182	221	188
6	277	205	229	215	—	—	—	—	—	—

Таблица 1: Результаты измерений для воздуха

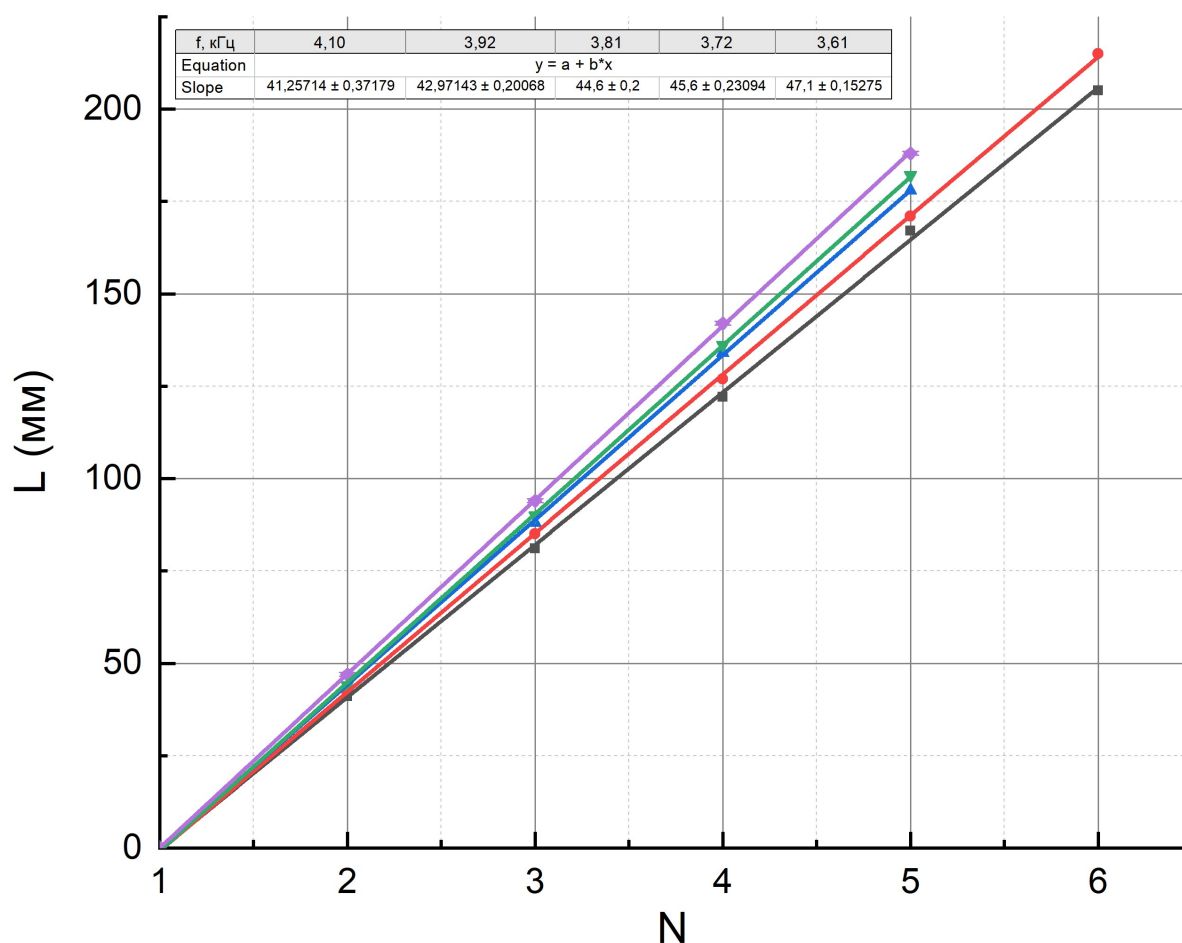


Рис. 3: График зависимости длины стержня от номера гармоники

Для каждого измерения величины «выдвиг» трубы $\sigma_l = 0,5$ мм. Также для каждого измерения вычислим $L_k = l_k - l_0$. Погрешность определения этой величины составит $\sigma_L = \sqrt{2}\sigma_l \approx 0,7$ мм. По полученным данным построим графики зависимости $L_k(k)$.

Аппроксимируем полученные зависимости прямыми $y = ax$ используя метод наименьших квадратов.

Вычисляем λ и c для каждого значения частоты, результаты вычислений заносим в таблицу 2.

f , кГц	a , мм	σ_a , мм	λ , мм	σ_λ , мм	c , м/с	σ_c , м/с
4,10	41,3	0,4	82,6	0,8	338,7	3,4
3,92	42,9	0,2	85,8	0,4	336,6	1,8
3,81	44,6	0,2	89,2	0,4	339,9	1,8
3,72	45,6	0,2	91,2	0,4	339,3	1,7
3,61	47,1	0,2	94,2	0,4	340,1	1,7

Таблица 2: Результаты вычислений для воздуха

Согласно (3), угловой коэффициент наклона прямой a равен $\lambda/2$. По этой формуле вычислим λ и результаты также занесём в таблицу 2.

Согласно (2), скорость звука в воздухе можно вычислить по следующей формуле:

$$c = \lambda f.$$

Погрешность такого вычисления равна

$$\sigma_c = c\sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_\lambda^2}.$$

При этом в каждом измерении примем $\sigma_f \approx 0,01$ кГц.

Эти результаты также заносим в таблицу 2.

Таким образом, мы получили значение c для каждого отдельного значения частоты. Усредняя вычисленные значения, в итоге получаем

$$c = (339 \pm 2) \text{ м/с} \quad (\varepsilon = 0,6 \%)$$

Также, по формуле (1), вычислим C_p/C_v :

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma = \frac{\mu}{RT} c^2.$$

При этом для воздуха $\mu \approx 0,02898 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Во время эксперимента температура в лаборатории равнялась $T = (23,0 \pm 0,1) ^\circ\text{C}$. Тогда погрешность такого вычисления можно оценить по следующей формуле:

$$\sigma_\gamma = \gamma\sqrt{\varepsilon_f^2 + (2\varepsilon_c)^2}.$$

В итоге получаем:

$$\gamma = 1,36 \pm 0,02 \quad (\varepsilon = 1,3 \%)$$

Табличное значение показателя адиабаты для воздуха при данных условиях равно $\gamma = 1,40$. Тогда относительная погрешность для него равна $\varepsilon = 3 \%$.

4.2 Измерение C_p/C_v для углекислого газа при помощи установки с раздвижной трубой

В этой части работы проведём измерения, аналогичные проведённым в п. 4.1, для трубы, заполненной углекислым газом. Заносим результаты измерений зависимости номера резонанса от величины, на которую выдвинута труба, в таблицу 3.

f , кГц	2,53		2,61		2,75		2,81		2,93	
k	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм	l_k , мм	L_k , мм
1	45	0	26	0	35	0	25	0	35	0
2	98	53	73	47	82	47	76	51	83	48
3	152	107	129	103	130	95	124	99	127	92
4	203	158	180	154	180	145	174	149	172	137
5	—	—	—	—	228	193	224	199	218	183

Таблица 3: Результаты измерений для углекислого газа

Строим графики зависимости $L_k(k)$. Аппроксимируем зависимости прямыми $y = ax$. Результаты заносим в таблицу 4. Вычисляем также λ и c для каждого значения частоты f .

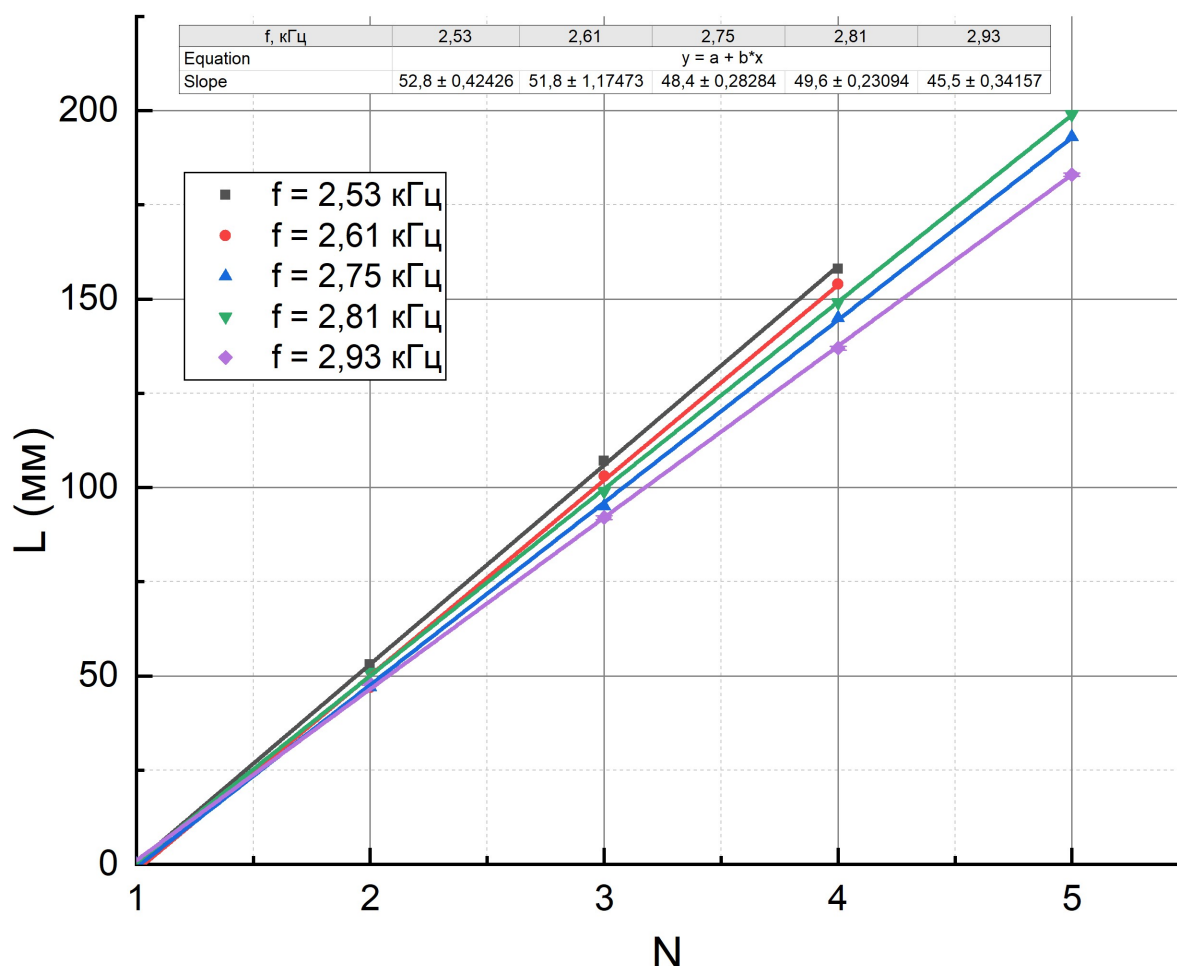


Рис. 4: График зависимости длины стержня от номера гармоники для CO_2

Вычисляем λ и c для каждого значения частоты, результаты вычислений заносим в таблицу 4

f , Гц	a , мм	σ_a , мм	λ , мм	σ_λ , мм	c , м/с	σ_c , м/с
2,53	52,8	0,4	105,6	0,8	267,2	2,3
2,61	51,8	0,1	103,6	0,2	270,4	1,2
2,75	48,4	0,3	96,8	0,6	266,2	1,9
2,81	49,6	0,2	99,2	0,4	278,8	1,5
2,93	45,5	0,3	91,0	0,6	266,6	2,0

Таблица 4: Результаты вычислений для углекислого газа

Усредняя результаты всех экспериментов, получаем:

$$c = (270 \pm 2) \text{ м/с} \quad (\varepsilon = 0,7 \%)$$

Вычисляя C_p/C_v аналогично п. 4.1, учитывая, что для углекислого газа $\mu \approx 0,04401 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, получаем:

$$\gamma = 1,32 \pm 0,02 \quad (\varepsilon = 0,5 \%)$$

Табличное значение показателя адиабаты для воздуха при данных условиях равно $\gamma = 1,30$. Тогда относительная погрешность для него равна $\varepsilon = 1,2 \%$.

4.3 Измерение C_p/C_v для воздуха при различных температурах

Проведём измерения C_p/C_v для воздуха при различных температурах. Для этого будем использовать трубу постоянного размера $L = (700 \pm 1)$ мм. Для фиксированной температуры будем изменять частоту звукового сигнала, тем самым изменяя и длину волны, так, чтобы мы могли наблюдать последовательные резонансы. Для каждого резонанса будем фиксировать частоту, при которой он возник. Полученные измерения занесём в таблицу 5.

T , К	303,1		313,2	
k	\hat{f}_k , кГц	f_k , кГц	\hat{f}_k , кГц	f_k , кГц
1	2,99	0,00	2,53	0,00
2	3,19	0,20	2,78	0,25
3	3,49	0,50	3,04	0,51
4	3,68	0,69	3,27	0,74
5	3,98	0,99	3,54	1,01

Таблица 5: Результаты измерений при разных температурах для воздуха

Также занесём в таблицу величину $f_k = \hat{f}_k - \hat{f}_0$. Погрешность измерения такой величины составит $\sigma_{f_k} = \sigma_{\hat{f}_k} \sqrt{2} \approx 2,82$ Гц. По полученным экспериментальным данным построим графики зависимости $f_k(k)$ и таблицу с результатами:

T , К	a , с ⁻¹	σ_a , с ⁻¹	c , м/с	σ_c , м/с	γ	σ_γ
296,0	—	—	—	—	1,357	0,018
303,1	0,247	0,010	345,8	2,3	1,331	0,019
313,2	0,251	0,003	351,4	1,5	1,373	0,018

Таблица 6: Результаты вычислений при различных температурах

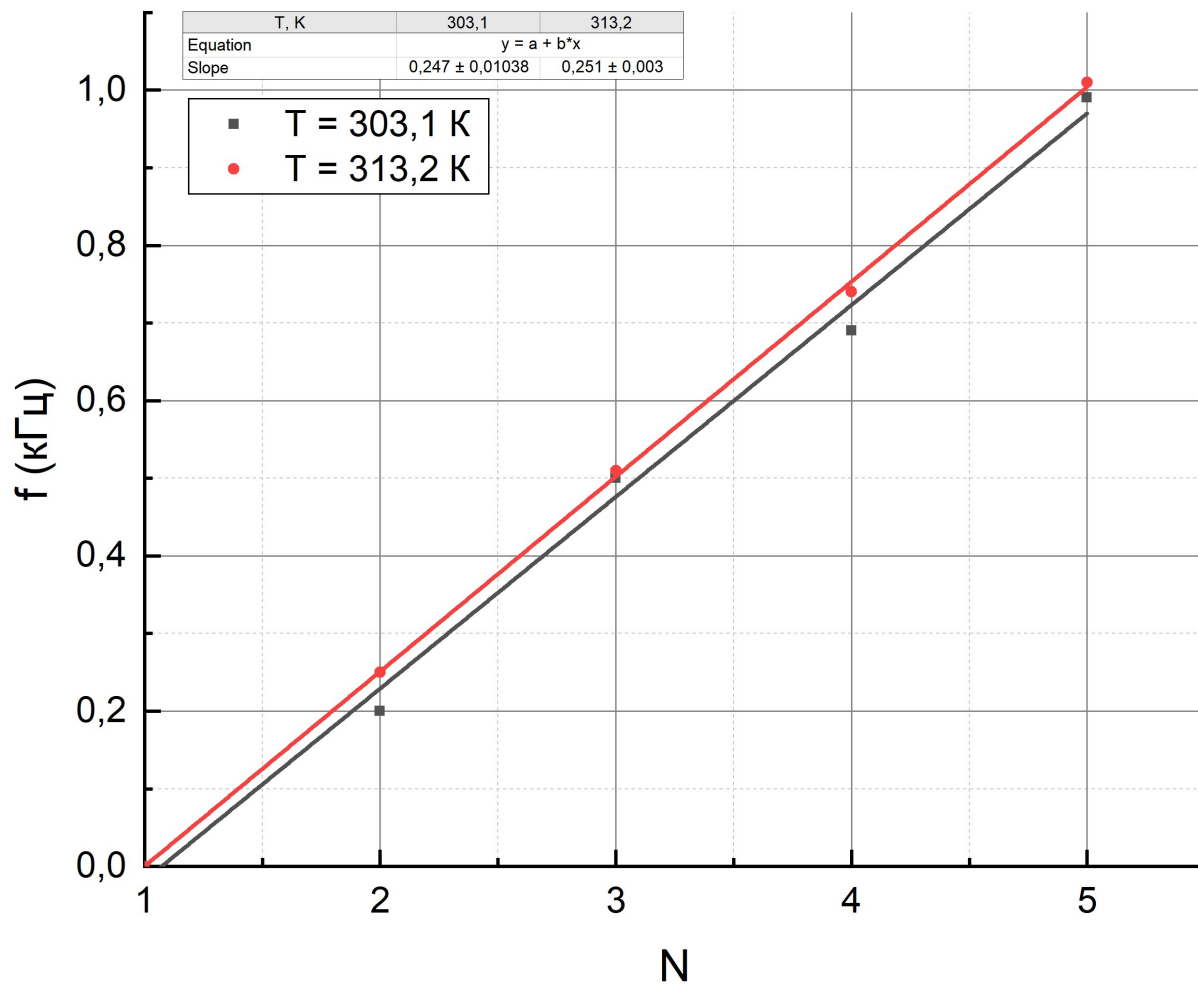


Рис. 5: График зависимости частоты от номера гармоники при разных температурах

Согласно полученным данным, можно утверждать, что γ остаётся постоянной в исследуемом диапазоне температур в пределах погрешностей. Поэтому усредним результаты, полученные при различных значениях температуры и получим для воздуха:

$$\boxed{\gamma = 1,35 \pm 0,02} \quad (\varepsilon = 1,3\%)$$

5 Вывод

В ходе выполнения работы мы:

1. На установке с трубой переменной длины при постоянных значениях частот были измерены длины рабочих частей трубы, необходимые для получения резонанса при соответствующих частотах, после чего с помощью МНК и уравнения состояния идеального газа были посчитаны скорость звука в газе и адиабатическая постоянная:

(а) Для воздуха:

$$c = (339 \pm 2) \text{ м/с} \quad (\varepsilon = 0,6 \%)$$

$$\gamma = 1,36 \pm 0,02 \quad (\varepsilon = 1,3 \%)$$

Табличное значение показателя адиабаты для воздуха при данных условиях равно $\gamma = 1,40$. Тогда относительная погрешность для него равна $\varepsilon = 3 \%$.

(б) Для углекислого газа:

$$c = (270 \pm 2) \text{ м/с} \quad (\varepsilon = 0,7 \%)$$

$$\gamma = 1,32 \pm 0,02 \quad (\varepsilon = 0,5 \%)$$

Табличное значение показателя адиабаты для воздуха при данных условиях равно $\gamma = 1,30$. Тогда относительная погрешность для него равна $\varepsilon = 1,2 \%$.

2. На установке с трубой постоянной длины и термостатом были резонансные частоты при разных температурах, после чего с помощью МНК и уравнения состояния идеального газа были посчитаны скорость звука в газе и адиабатическая постоянная в зависимости от температуры:

$T, \text{ K}$	$c, \text{ м/с}$	$\sigma_c, \text{ м/с}$	γ	σ_γ
296,0	338,8	2,1	1,357	0,018
303,1	345,8	2,3	1,331	0,019
313,2	351,4	1,5	1,373	0,018

Таблица 7: Результаты вычислений при различных температурах

Согласно полученным данным, можно утверждать, что γ остаётся постоянной в исследуемом диапазоне температур в пределах погрешностей. Усреднив результаты, получаем:

$$\gamma = 1,35 \pm 0,02 \quad (\varepsilon = 1,3\%)$$

Табличное значение показателя адиабаты для воздуха при данных условиях равно $\gamma = 1,40$. Тогда относительная погрешность для него равна $\varepsilon = 3 \%$.

В итоге на обеих установках значение C_p/C_v для воздуха оказались схожи, и отличаются они менее чем на 0,3%, что может говорить об их одинаковой точности измерений.