Для такой системы матрица Якоби правой части будет иметь вид:

$$\frac{d\phi}{d\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

и в первой норме достаточное условие сходимости сводится к проверке условия

$$\max\left(\left|\frac{\partial \phi_0}{\partial y}(y^*)\right|, \left|\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x^*)\right|\right) \le q < 1.$$

Здесь проверяем условие сходимости непосредственно в корне, считая рассматриваемую окрестность корня достаточно малой. Вычисляя $\frac{\partial \phi_0}{\partial y}(y^*) \approx 0.64$, $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x^*) \approx 0.48$, убеждаемся, что условие сходимости в малой окрестности корня выполнено. ■

6.2. Метод Ньютона

Рассмотрим скалярное нелинейное уравнение

$$f(x) = 0 \tag{30}$$

на отрезке $[a, b]$. Сформулируем **теорему** (достаточное условие) о сходимости метода Ньютона: если $f(a)f(b) < 0$, причем f' и f'' непрерывны и знакопостоянны на $[a, b]$, то по начальному приближению $x_0 \in [a, b]$ такому, что

$$f(x_0)f''(x_0) > 0, \tag{31}$$

можно вычислить единственный корень уравнения (30) с любой точностью с помощью итерационного метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод Ньютона имеет второй порядок сходимости:

$$|x_{n+1} - x^*| \le \alpha |x_n - x^*|^2.$$

Задача 23 (метод Ньютона для решения нелинейного уравнения). *У функции* $f(x) = 32x^3 + 20x^2 - 11x + 3 = 0$ *существует единственный вещественный корень на отрезке* $[-1.625, -0.08]$*. Указать нулевое приближение метода Ньютона.*

Решение: для решения задачи воспользуемся теоремой о сходимости метода Ньютона. Сначала проверим непрерывность и знакопостоянность первой и второй производных функции f: $f'(x) = 96x^2 + 40x - 11$,

$f''(x) = 192x+40$. Непрерывность очевидна. Для определения областей знакопостоянства найдем нули первой и второй производных. Решая квадратное уравнение, находим, что нули первой производной $x_1 > 0$ и $x_2 \approx -0.606$. x_1 лежит вне рассматриваемого отрезка. Единственный ноль второй производной $x_3 \approx -0.208$. Тогда области знакопостоянства первой и второй производных на отрезке $[-1.625, -0.08]$ определяются нулями x_2 и x_3: $[-1.625, -0.606), (-0.606, -0.208), (-0.208, -0.08]$. Среди этих областей разные знаки функции f на концах только на $[-1.625, -0.606)$. Причем $f(-1.625) < 0$ и $f(-0.606) > 0$. Будем далее рассматривать ее как область локализации корня. На этой области $f''(x) < 0$ всюду. Тогда, чтобы удовлетворить условию сходимости (31), выберем в качестве начального приближения левый край области локализации $x_0 = -1.625$. ■

Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений (21) будет иметь вид:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \mathbf{f}_x^{-1}(\bar{x}_n)\mathbf{f}(\bar{x}_n), \tag{32}$$

где $\mathbf{f}_x^{-1}$ – матрица, обратная к матрице Якоби для функции $\mathbf{f}$.

Задача 24 (метод Ньютона для решения СНАУ). *Написать формулу Ньютона для системы*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ e^x - e^y = 1. \end{cases}$$

Решение: $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, где $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $f_2(x,y) = e^x - e^y - 1$. Тогда

$$\mathbf{f}_x = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_x^{-1} = \frac{1}{2(xe^y + ye^x)} \begin{pmatrix} e^y & 2y \\ e^x & -2x \end{pmatrix}.$$

Подставляя $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}_x^{-1}$ в (32), после матричного умножения и расставления итерационных индексов, получим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{y_n}(x_n^2 + y_n^2 - 1) + 2y_n(e^{x_n} - e^{y_n} - 1)}{2(x_n e^{y_n} + y_n e^{x_n})},$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{e^{x_n}(x_n^2 + y_n^2 - 1) - 2x_n(e^{x_n} - e^{y_n} - 1)}{2(x_n e^{y_n} + y_n e^{x_n})}. \blacksquare$$