

## 9. Жёсткие задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Вспоминая способы построения методов высокого порядка на примере явных методов Рунге–Кутты, важно отметить следующее:

- используя Липшиц-непрерывность функции  $f(x, u)$ , можно доказать, что методы Р–К устойчивы, т.е. численное решение будет сходиться к точному с порядком аппроксимации;
- методика позволяет построить метод *любого* порядка точности;
- явный метод Рунге–Кутты вычислительно реализуется в виде последовательного ( $s$  раз) вычисления функции правой части при разных значениях аргументов – это «дешёвые» операции.

Кажется, что указанные пункты позволяют закрыть тему численных методов для решения задачи Коши. Однако это не так.

Рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) = -\sin t, u(0) = 1, t \in [0, 2] \quad (59)$$

с точным решением

$$u(t) = \cos t. \quad (60)$$

Применим для решения этой задачи явный метод Эйлера. Локальная ошибка (невязка):

$$r(t) = \frac{1}{2}h^2 u''(t) + O(h^3) = -\frac{1}{2}h^2 \cos t + O(h^3). \quad (61)$$

Функция  $f(t) = -\sin t$  не зависит от  $u$ , можно получить такую оценку для глобальной ошибки:

$$|E| \leq \frac{T}{h} \|r\|_{\infty} = h \max_{t \in [0, 2]} |\cos t| = h. \quad (62)$$

Если мы хотим вычислить решение с точностью  $|E| \leq 10^{-3}$ , нужно взять  $h = 10^{-3}$ , и мы получим нужное решение после  $T/h = 2000$  шагов. Действительно, вычисления дают  $u_{2000} = -0.415692$  с ошибкой  $E^{2000} = u_{2000} - \cos(2) = 0.4548 \times 10^{-3}$ .

Теперь изменим уравнение

$$u'(t) = \lambda(u - \cos t) - \sin t, u(0) = 1. \quad (63)$$

Точное решение этой задачи по-прежнему  $u(t) = \cos t$ . Так как невязка  $r^n$  зависит только от точного решения (и не зависит от уравнения), мы по-прежнему надеемся получить нужную точность, взяв шаг  $h = 10^{-3}$ . Возьмём  $\lambda = -10$ , получается значение  $u_{2000} = -0.416163$  с ошибкой  $E^{2000} = 0.161 \times 10^{-4}$ .

Теперь возьмём  $\lambda = -2100$ . Точное решение не изменяется, локальная ошибка тоже. Но теперь, если мы выполним расчёт с  $h = 10^{-3}$ , получим  $u_{2000} = -0.2453 \times 10^{77}$  с ошибкой величины  $10^{77}$ . Решение ведёт себя «неустойчиво», ошибка растёт экспоненциально со временем.

Итак, мы знаем, что явный метод Эйлера устойчив, и, следовательно, численное решение сходится к точному. И, разумеется, с достаточно маленькими шагами мы получим хорошие результаты. В чём же дело?

Для данного линейного уравнения запишем, как меняется глобальная ошибка от шага к шагу:

$$E^{n+1} = (1 + h\lambda)E^n - r_n. \quad (64)$$

Это выражение проясняет причину экспоненциального роста ошибки: на каждом шаге предыдущая ошибка умножается на  $(1 + h\lambda)$ . Для случая  $\lambda = -2100$ ,  $h = 10^{-3}$  получается  $1 + h\lambda = -1.1$ , следовательно ошибка на шаге  $m$  увеличится в  $(-1.1)^{n-m}$  раз по выполнении  $n$  шагов.  $(-1.1)^{2000} \approx 10^{82}$ , что соответствует полученному в расчёте значению. Когда  $\lambda = -10$ ,  $1 + h\lambda = 0.99$  и ошибка убывает. Благодаря этому и получился хороший результат.

Важно понять, что экспоненциальный рост ошибки не противоречит устойчивости метода (и сходимости).

## 9.1. А-устойчивость (Absolute stability)

Вся дальнейшая теория строится на основе модельного уравнения

$$u'(t) = \lambda u(t). \quad (65)$$

Где  $\lambda \in \mathbb{C}$  – комплексная константа. Случай  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  соответствует экспоненциально растущим решениям, т.е. неустойчивым; он рассматриваться не будет.

Представим одношаговый метод, применённый к уравнению (65), в виде

$$u_{n+1} = R(h\lambda)u_n. \quad (66)$$

Функция  $R(z)$  называется *функцией устойчивости* данного метода. Функцию устойчивости можно истолковать как численное решение на первом шаге по времени задачи Коши для уравнения (65) с начальными данными  $u_0 = 1$ ,  $z = \lambda h$ . Или более подробно: точное решение задачи Коши имеет вид  $e^{\lambda t}$  для  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$  – это экспоненциально убывающее решение. Численное решение:  $R(z)^n$ . Если  $|R(z)| < 1$ , то численное решение убывает и моделирует поведение точного. Если же  $|R(z)| > 1$ , численное решение экспоненциально растёт и вообще не приближает точное. Требование, чтобы численное решение было ограничено  $\forall t$  (при фиксированном шаге  $h!$ ), приводит к следующим определениям:

Область  $S = \{z \in \mathbb{C}, |R(z)| \leq 1\}$  называется *областью устойчивости* метода с функцией устойчивости  $R(z)$ . Если  $\lambda h \in S$ , решение (и ошибка) экспоненциально убывает со временем.

Как мы видели, условие  $|R(z)| = |1 + h\lambda| \leq 1$  для явного метода Эйлера приводит к сильному ограничению на шаг по времени:

$$h \leq \frac{2}{|\lambda|}, \quad (67)$$

при больших значениях  $|\lambda|$  метод становится непригодным для вычислений.

В связи с этим, существует потребность в методах, для которых не возникает таких жёстких ограничений на шаг. Естественно, лучше, если не возникает никаких ограничений. Эту простую идею выразил Далквист в 1963 году, когда ввёл следующее понятие: метод называется *A-устойчивым*, если при его применении к уравнению  $u' = \lambda u$  ( $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ) отсутствуют ограничения на шаг, связанные с устойчивостью. Это определение распространяется и на многошаговые методы.

Для одношаговых методов можно сформулировать это определение в терминах функции устойчивости: метод, имеющий область устойчивости

$$S \supset \mathbb{C}^- = \{z, \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \quad (68)$$

(т.е. область устойчивости целиком содержит левую полуплоскость), называется *A-устойчивым*.

Напомним, как формулируется класс одношаговых неявных методов *Рунге-Кутты* в общем случае. Пусть  $s > 0$  – число стадий или

этапов,  $a_{ij}, b_i, c_i$  – вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$k_1 = f(t_n + c_1 h, u_n + h(a_{11}k_1 + \dots + a_{1,s}k_s)), \quad (69)$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, u_n + h(a_{21}k_1 + \dots + a_{2,s}k_s)), \quad (70)$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, u_n + h(a_{31}k_1 + \dots + a_{3,s}k_s)), \quad (71)$$

$$\dots \quad (72)$$

$$k_s = f(t_n + c_s h, u_n + h(a_{s1}k_1 + \dots + a_{s,s}k_s)), \quad (73)$$

$$u_{n+1} = u_n + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s) \quad (74)$$

называется  $s$ -стадийным неявным методом Рунге–Кутты.

Следующие формулы показывают связь функции устойчивости метода Рунге–Кутты с его коэффициентами. Функция устойчивости неявного (в общем случае) метода Рунге–Кутты выражается через коэффициенты так:

$$R(z) = 1 + z\mathbf{b}^T(\mathbf{I} - z\mathbf{A})^{-1}\mathbf{e}, \quad (75)$$

где  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_s]^T$ ,  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ ,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Или так

$$R(z) = \frac{\det(\mathbf{I} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{I} - z\mathbf{A})}. \quad (76)$$

**Задача 31 (функция и область устойчивости метода Рунге–Кутты).**

*Для решения задачи Коши для системы ОДУ*

$$\begin{cases} \dot{u} = -800u + 0.04v + 0.02w, \\ \dot{v} = -5v - 3w, \\ \dot{w} = v - w, \\ u(0) = 0, v(0) = 4, w(0) = 6. \end{cases}$$

*используется метод Рунге–Кутты с таблицей Бутчера:*

$$\begin{array}{c|cc} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 1/5 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

*Получите для него функцию и условие устойчивости. Найдите показатель жесткости.*

*Решение:* функция устойчивости получается по одной из формул (75) или (76):

$$R(z) = \frac{1 + 0.6z + 0.14z^2}{1 - 0.4z + 0.04z^2}. \quad (77)$$

Поскольку правая часть системы ОДУ линейная с постоянными коэффициентами, то заменой переменных можно представить систему ОДУ как три независимых модельных уравнения вида (65) с собственными числами матрицы, составленной из коэффициентов правой части, в качестве множителей  $\lambda$ . Эти собственные числа будут  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -4$  и  $\lambda_3 = -800$ . Так как  $z = \lambda h$ , то и функцию устойчивости достаточно исследовать на действительной оси. Условие устойчивости определяется областью устойчивости  $|R(z)| \leq 1$ . После решения неравенства получается, что условие устойчивости  $z(1+z/10) \leq 0$ . Проверяя его для всех  $\lambda$ , получаем  $h$ , который удовлетворяет всем случаям:  $h \in (0, \frac{10}{800})$ . Показатель жесткости – отношение максимального и минимального по модулю собственного числа  $s = \frac{800}{2} = 400$ . ■

## 9.2. L-устойчивость, монотонность

A-устойчивость гарантирует, что  $\forall \lambda, Re(\lambda) < 0$  численное решение «затухает» с ростом времени (числа шагов). Однако может оказаться, что  $|R(z)|$  близко к единице и затухание происходит медленно. Это частично объясняет потребность в следующем определении: метод называется *L-устойчивым*, если он A-устойчив и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0. \quad (78)$$

Полезно помнить, что для рациональной функции (какой и является функции устойчивости) верно ( $i$  – мнимая единица):

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z=iy, y \rightarrow \infty} R(z). \quad (79)$$

Ещё одно желательное свойство – монотонность. Точное решение тестовой задачи Коши  $e^{\lambda t} > 0$  – монотонно убывающая функция, поэтому разумно потребовать этого от численного решения: метод называется *монотонным*, если  $\forall y \in \mathbb{R}, y < 0$ , выполняется  $0 < R(y) < 1$ .

**Задача 32 (ОДУ второго порядка).** Для решения задачи Коши для ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} y'' = -\frac{19}{4}y - 10y', \\ y(0) = -9, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (80)$$

используется метод трапеции. Найти показатель жесткости задачи и исследовать на L-устойчивость.

*Решение:* сначала сведем ОДУ второго порядка к системе первого порядка:

$$\mathbf{u}' = -A\mathbf{u}, \mathbf{u}(0) = (-9, 0)^T.$$

Здесь  $\mathbf{u} = (y_1, y_2)^T$ ,  $y = y_1' = y_2$ , а матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{19}{4} & 10 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Собственные числа матрицы  $\lambda_1 = -1/2$ ,  $\lambda_2 = -19/2$ . Тогда показатель жесткости  $s = 19$ . Разностное уравнение метода трапеции имеет вид

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2}. \quad (82)$$

Применяя его для модельного уравнения, получим функцию устойчивости  $R(z) = \frac{2+z}{2-z}$ . Несложно видеть, что область устойчивости метода – вся левая комплексная полуплоскость. Значит метод А-устойчивый. Но он не будет L-устойчивым, так как условие (78) не выполняется. ■

### 9.3. А-устойчивость многошаговых методов

Для исследования многошагового метода на А-устойчивость можно воспользоваться, например, теоремой, которая называется *второй барьер Далквиста*: любой А-устойчивый многошаговый метод должен иметь порядок  $p \leq 2$ .

Чтобы найти порядок многошагового метода вида

$$\alpha_k y_{l+k} + \alpha_{k-1} y_{l+k-1} + \dots + \alpha_0 y_l = h(\beta_k f_{l+k} + \beta_{k-1} f_{l+k-1} + \dots + \beta_0 f_l), \quad (83)$$

где  $f_i = f(x_i, y_i)$ ,  $\alpha_k \neq 0$ ,  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ , можно воспользоваться условием порядка. Многошаговый метод имеет порядок  $p$ , если

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \sum_{j=0}^k \alpha_j j^q = q \sum_{j=0}^k \beta_j j^{q-1}, q = 1, \dots, p. \quad (84)$$

**Задача 33 (А-устойчивость многошагового метода).** *Найти порядок метода и исследовать его на А-устойчивость:*

$$\frac{x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}}{3\tau} = \frac{1}{12}f_n + \frac{4}{6}f_{n-1} + \frac{3}{12}f_{n-2}. \quad (85)$$

*Решение:* воспользуемся условием порядка для многошагового метода и получим, что  $p = 3$ . По второму барьеру Далквиста метод не может быть А-устойчивым. ■