1. Решение разностных уравнений

Рассмотрим СЛАУ вида $Ay = f$, где $y = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$. Также предположим, что основная подсистема (уравнения с k-го до $(N-m)$-го) рассматриваемой системы имеет вид:

$$a_{n-k}y_{n-k} + \ldots + a_{n-1}y_{n-1} + a_n y_n + \ldots + a_{n+m}y_{n+m} = f_n, n = \overline{k, N-m}. \tag{1}$$

Будем искать решение системы (1) в виде $y = y_g + y_p$, где y_g - общее решение однородной системы (1), y_p - частное решение.

Задача 1 (общее решение однородного разностного уравнения). *Найти общее решение разностного уравнения*

$$ay_{n+3} + by_{n+2} - \frac{2b^3}{27a^2}y_n = 0.$$

Решение: решение получается в несколько шагов:

1. делаем замену в разностном уравнении вида $y_n = q^n$;
2. получаем характеристическое уравнение $aq^3 + bq^2 - \frac{2b^3}{27a^2} = 0$;
3. находим корни характеристического уравнения. В рассматриваемой задаче для удобства нахождения корней можно сделать замену $q = \mu - \frac{b}{3a}$, что приводит к уравнению $\mu(\mu^2 - \frac{b^2}{3a^2})$. Решаем и получаем, что корни $q_1 = -\frac{b}{3a}$, $q_2 = \frac{b(\sqrt{3}-1)}{3a}$, $q_3 = -\frac{b(\sqrt{3}+1)}{3a}$. Обратим внимание, что все корни различны.
4. Общее решение *в случае различных корней* будет иметь вид $y_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + C_3 q_3^n$.

Подставляем найденные корни и получаем ответ $y_n = C_1\left(-\frac{b}{3a}\right)^n + C_2\left(\frac{b(\sqrt{3}-1)}{3a}\right)^n + C_3\left(-\frac{b(\sqrt{3}+1)}{3a}\right)^n$. ■

Замечание: при необходимости неизвестные константы C_i могут быть найдены из уравнений, не входящих в основную подсистему (1). Как правило при решении дифференциального уравнения эти уравнения являются аппроксимацией начальных или краевых условий.

В следующей задаче рассмотрим, как получается общее решение *неоднородного* разностного уравнения в случае, когда в характеристическом уравнении есть *кратные* корни.

Задача 2 (общее решение неоднородного разностного уравнения). *Найти общее решение разностного уравнения*

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n - y_{n-1} = ah^3, a \neq 0.$$

Решение: сначала найдем общее решение однородного уравнения (не учитываем правую часть).

1. делаем замену в разностном уравнении вида $y_n = q^n$;
2. получаем характеристическое уравнение $q^3 - 3q^2 + 3q - 1 = 0$;
3. находим корни характеристического уравнения. Для данного уравнения имеем один корень $q = 1$ кратности 3. Кратный корень учитывает в общем решении в виде $\left(C_j + nC_{j+1} + \ldots + n^{r-1}C_{j+r-1}\right) q^n$. Здесь r - кратность корня.
4. Общее решение однородного уравнения в этом случае будет иметь вид $(y_g)_n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) \cdot 1^n$.
5. Найдем частное решение. Будем искать его, например, в виде $(y_p)_n = An^3$. После подстановки его в неоднородное разностное уравнение получим, что $A = \frac{ah^3}{6}$ и $(y_p)_n = \frac{a(hn)^3}{6}$.

Суммируя общее однородного и частное решение, получим ответ $y_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{a(hn)^3}{6}$. ■

Рассмотрим как строится общее решение системы разностных уравнений на примере задачи. Там также придется искать корни разностного уравнения. Рассмотрим только случай, когда корни различны. Наличие кратных корней представляет более сложный случай.

Задача 3 (общее решение однородной системы разностных уравне *Найти общее решение однородной системы разностных уравнений*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 2y_n, \\ y_{n+1} = 4x_n - y_n. \end{cases}$$

Решение:

1. Общее решение будем искать в виде $(x_n, y_n)^T = (e_1, e_2)^T q^n$;

2. подставим общее решение в систему, получим

$$\begin{cases} e_1 q^{n+1} = 5e_1 q^n - 2e_2 q^n, \\ e_2 q^{n+1} = 4e_1 q^n - e_2 q^n. \end{cases}$$

3. Сокращая на q^n, получим характеристическую систему

$$\begin{cases} (q-5)e_1 + 2e_2 = 0, \\ -4e_1 + (q+1)e_2 = 0. \end{cases}$$

4. Найдем собственные числа q и соответствующие им собственные вектора **e**. Для этого решим уравнение

$$\det \begin{pmatrix} q-5 & 2 \\ -4 & q+1 \end{pmatrix} = 0.$$

5. Решая, получим $q_1 = 1$ и $\mathbf{e}_1 = (1,2)^T$, $q_2 = 3$ и $\mathbf{e}_2 = (1,1)^T$.

6. Тогда общее решение разностной однородной системы $(x_n, y_n)^T = c_1 \mathbf{e_1} q_1^n + c_2 \mathbf{e_2} q_2^n = c_1(1,2)^T 1^n + c_2(1,1)^T 3^n$.

■

Следующая задача также часто используется при исследовании свойств численных методов.

Задача 4 (Собственные значения разностного оператора). *Найти все решения задачи на собственные значения*

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = (2-\lambda)y_k, y_0 = 0, y_N = y_{N-1}, h = \frac{1}{N}.$$

Решение: требуется найти все λ, при которых задача будет иметь нетривиальное решение. Для этого

1. перепишем задачу в виде разностного уравнения $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} - (2-\lambda)h^2 y_k = 0$.

2. Подставим $y_n = q^n$ и получим характеристическое уравнение $q^2 - (2 + (2-\lambda)h^2)q + 1 = 0$.

3. Поскольку по теореме Виета $q_1 = 1/q_2$, то общее решение представимо в виде $y_n = \alpha q_1^n + \beta q_1^{-n}$.

4. Для нахождения q_1 воспользуемся краевыми условиями. Из левого краевого условия, $y_0 = 0$, имеем $\alpha = -\beta$. Из правого краевого условия, $y_N = y_{N-1}$, после подстановки и элементарных преобразований, получим $q_1^{2N-1} = -1$.

5. Это равенство достигается при $q_1^{2N-1} = e^{2\pi ki+\pi i}$, $q_1 = exp\left(\frac{2\pi ki+\pi i}{2N-1}\right) = exp\left(\frac{\pi(2ki+i)}{2N-1}\right) = e^{\gamma_k}, k = 1, \ldots, N-1.$

6. Тогда общее решение $y_n = \alpha(e^{n\gamma_k} - e^{-n\gamma_k}) = 2i\alpha \sin\left(\frac{\gamma_k n}{i}\right)$.

7. Теперь остается подставить общее решение в разностное уравнение, выразить из него λ, аккуратно все преобразовать и получить все собственные значения λ при которых задача будет иметь нетривиальное решение. В этой задаче $\lambda^{(k)} = 2 + 4N^2 sin^2\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(2N-1)}\right)$.

■

2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ

В векторном виде систему ОДУ можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), a < x < b, \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{y}$ и $\mathbf{f}$ - d-мерные вектор-функции. Если (2) дополнить условиями сразу на двух концах в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0},$$

то такая задача будет называться краевой задачей для ОДУ, а условия - граничными или краевыми.

В качестве примера краевой задачи для ОДУ рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности для однородной одномерной среды:

$$u''(x) = f(x), a < x < b, \qquad (3)$$

Такое уравнение описывает распределение температуры u в стержне из однородного материала. В качестве граничного условия зададим температуру на обоих концах стержня:

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta \qquad (4)$$

Граничное условие (4) называется граничным условием Дирихле. Если вместо самой функции на краях задана ее производная, то такое граничное условие будет называться граничным условием Неймана.

Рассмотрим метод численного решения такой задачи. Для простоты будем считать, что $a = 0, b = 1$. Разобъем отрезок $[0, 1]$ с шагом $h = 1/m$ узлами $x_j = jh, j = \overline{0, m}$. На этой сетке в узлах определим сеточную функцию $\{u_i\}_{i=0}^{m}$, u_i - аппроксимация точного решения $u(x_i)$ в i-ом узле сетки. Очевидно, что $u_0 = \alpha, u_m = \beta$ из граничных условий. Аппроксимируем $u^{''}(x)$ в уравнении (3) в каждом внутреннем узле x_j следующим образом:

$$u^{''}(x_j) \approx \frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})$$