Метод Ньютона

Задание

1. ответить на все вопросы в скрипте
2. изменить код метода Ньютона так, чтобы он смог разрешать все проблемные случаи, возникающие в скрипте, продемонстрировать это, объяснить почему модификация решает проблему. Проблемы - нулевая производная, кратные корни, биения. Для кратных корней надо так модифицировать метод, чтобы порядок оставался вторым и продемонстрировать это.

ВАЖНО!

1. Модифицированный метод Ньютона должен получаться путем добавления новых строчек в simple_newton, а не переписыванием его с нуля. Новые строчки надо прокомментировать, зачем они были добавлены.
2. Для каждого нелинейного, где есть указанные проблемы, надо привести демонстрацию решения вашим методом. Без этой демонстрации считается, что обработчик соответствующей проблемы не реализован и не оценивается.

In [160…

```
# простая реализация Метода Ньютона
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def simple_newton(func, dfunc, x, tol = 1e-12):
    sol = 0
    iteration = 0
    dxs = []
    for i in range(30):
        iteration += 1
        dx = -func(x)/dfunc(x)
        dxs.append(dx)
        x = x + dx
        #print(x)
        if abs(dx) < tol:
            sol = x
            return [sol, iteration, dxs]
    sol = float('nan')
    print('More then 30 iterations!')
    return [sol, iteration, dxs]
```

In [208…

```
#модифицированный метод ньютона
def modded_newton(func, dfunc, x, m = 1, tol = 1e-12):#m-кратность
    x_dots = [x]
    sol = 0
    iteration = 0
    dxs = []
    for i in range(70):
        iteration += 1
        if dfunc(x) == 0:
            dx = -func(x)/(0.0005)  # решение проблемы нулевой производной. Этот dx будет ниж
        else:
            dx = -func(x)/dfunc(x)
        dx = m*dx # решение проблемы кратности корня
        dxs.append(dx)
        x = x + dx
        x_dots.append(x)
        if abs(dx) < tol:
```

```
            sol = x
            return [sol, iteration, dxs]

        if i > 1 and x_dots[i] == x_dots[i-2]:
            x = x + 0.05     # решение проблемы биения, мы как-бы насильно выталкиваем итерац

    sol = float('nan')
    print('More then 70 iterations!')
    return [sol, iteration, dxs]
```

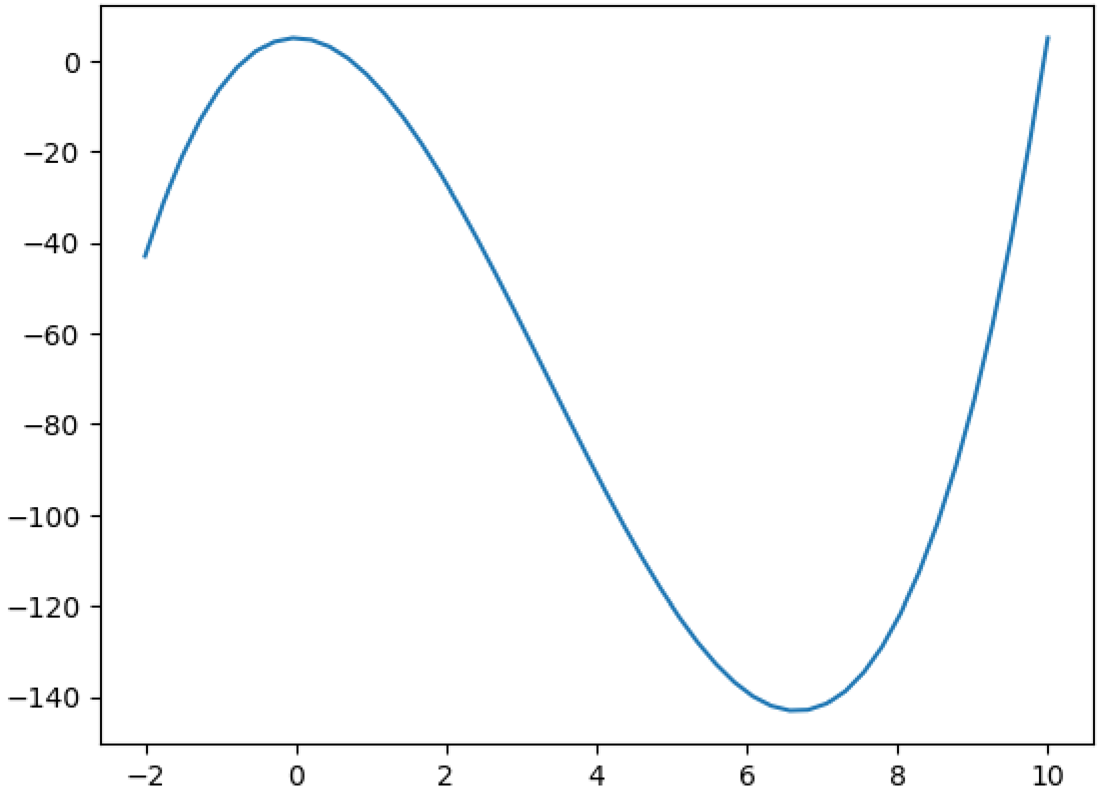
Нелинейное уравнение 1

In [209…

```
x = np.linspace(-2,10)
func0 = lambda x: x**3 - 10*x**2 + 5
dfunc0 = lambda x: 3*x**2 - 20*x
y = func0(x)
plt.plot(x, y)
```

Out[209]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1974d372c50>]
```



1. Объяснить, почему различаются результаты в случае 1 и 2
2. Объяснить, что происходит в случае 3
3. Построить график порядка сходимости от номера итерации. Объяснить результат

In [210…

```
data = simple_newton(func0, dfunc0, 8) # случай 1
#data = simple_newton(func0, dfunc0, 0.7) # случай 2
#data = simple_newton(func0, dfunc0, 0.0) # случай 3
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
```

```
sol =  9.949491057914388
iter =  7
```

Почему различаются результаты в случае 1 и 2:

Вообще, у этого полинома три нуля:

1. -0.68409 (примерное значение)
2. 0.73460 (примерное значение)
3. 9.94949 (примерное значение)

При x = 8, dx = -f(x)/df(x) < 0, поэтому по отрицательным приращениям мы находим третий корень

При x = 0.7, dx = -f(x)/df(x) > 0, поэтому по положительным приращениям мы находим второй корень

Объяснить, что происходит в случае 3:

Происходит деление на ноль, так как dfunc0(0.0) = 0, что не учтено в коде простой реализации

Построить график порядка сходимости от номера итерации, объяснить результат:

Про порядок сходимости: по определению, если $|x_{k+1} - x_p| \leq C * |x_k - x_p|^n$, где $C = const$ и x_p - решение, то порядок сходимости равен n. Будем считать $C = 1$, тогда положив знак равенства, получим: $n = \frac{ln(|x_{k+1} - x_p|)}{ln(|x_k - x_p|)}$

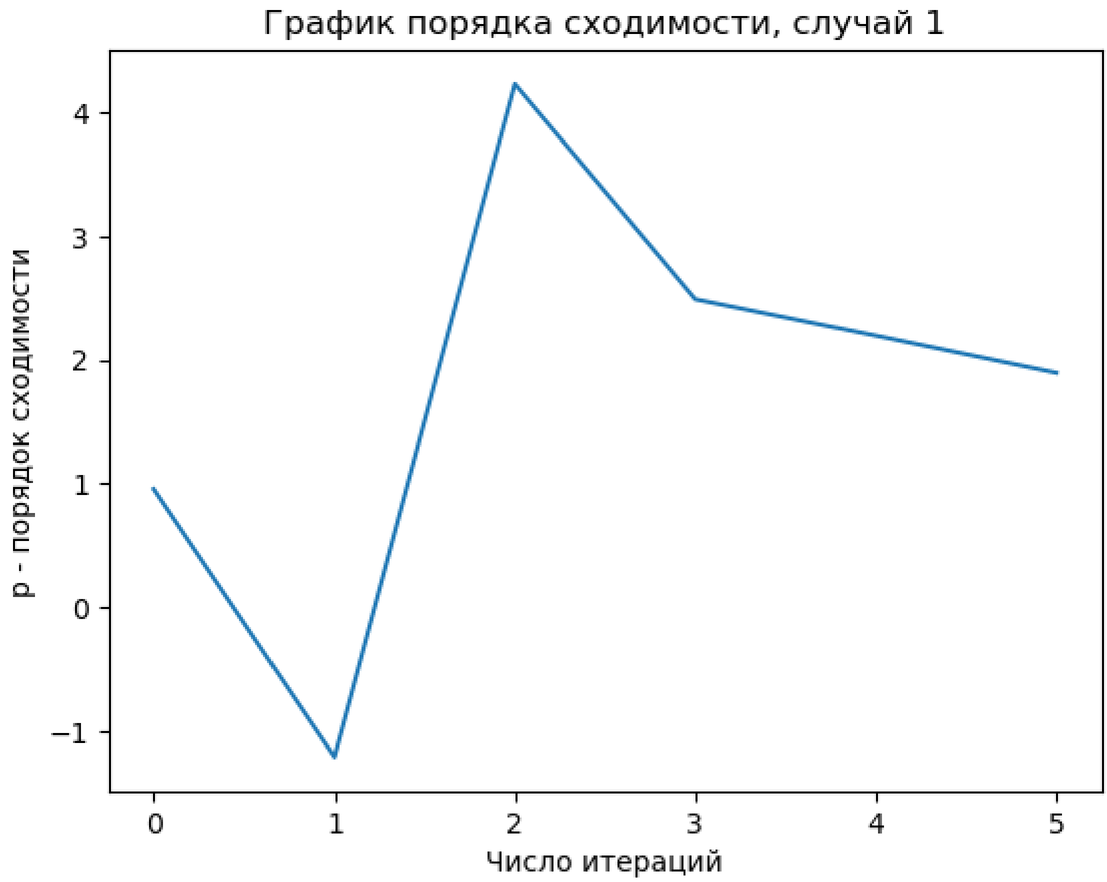
In [211…

```
def my_plot(func0, dfunc0, x, case, flag = 0, m = 1):
    if (flag):
        data = modded_newton(func0, dfunc0, x, m)
    else:
        data = simple_newton(func0, dfunc0, x)
    Y = list()
    for dx in (data[2]):
        Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
        x += dx
    plt.plot(range(len(Y)), Y)
    plt.title(f"График порядка сходимости, случай {case}")
    plt.xlabel("Число итераций")
    plt.ylabel("p - порядок сходимости")
```

In [212…

```
my_plot(func0, dfunc0, 8, 1) # случай 1
```

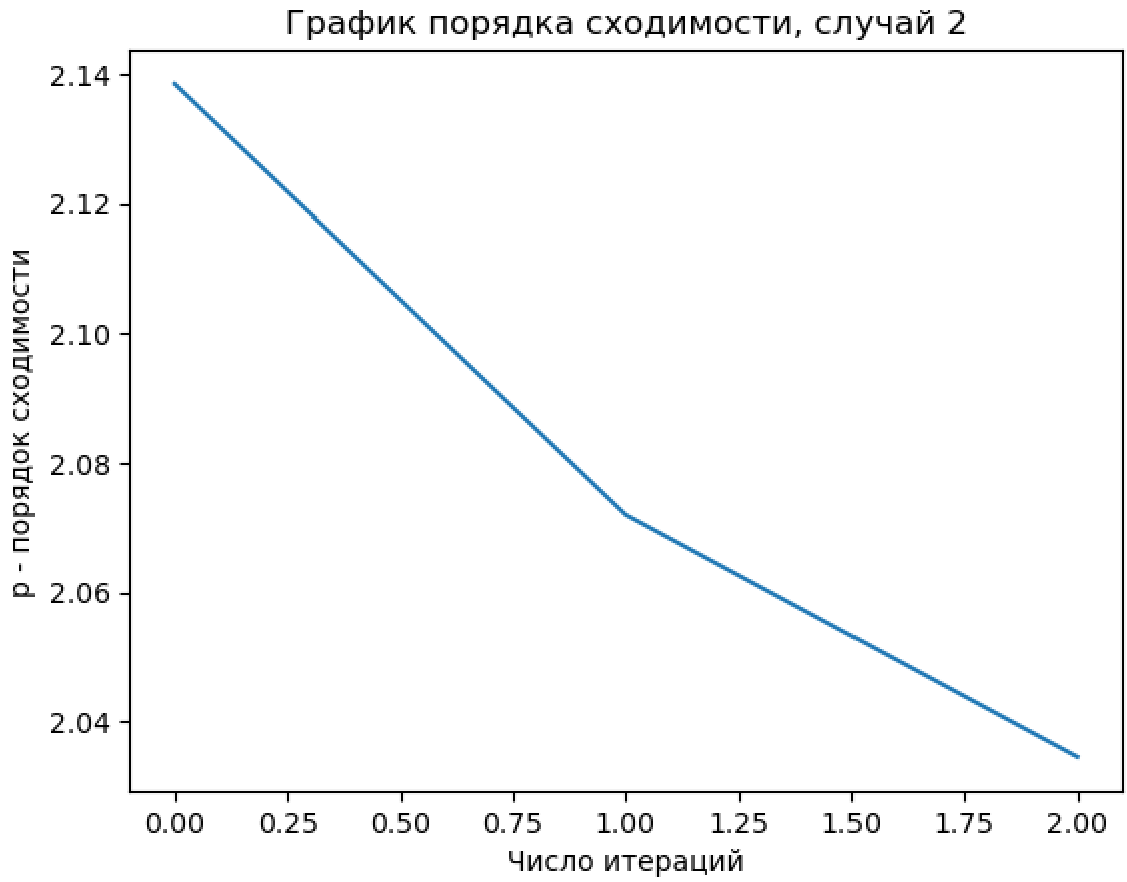
```
C:\Users\glebm\AppData\Local\Temp\ipykernel_6012\1369974145.py:8: RuntimeWarning: divide by z
ero encountered in log
  Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
```



In [213…

```
my_plot(func0, dfunc0, 0.7, 2, 0) # случай 2
```

```
C:\Users\glebm\AppData\Local\Temp\ipykernel_6012\1369974145.py:8: RuntimeWarning: divide by z
ero encountered in log
  Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
```



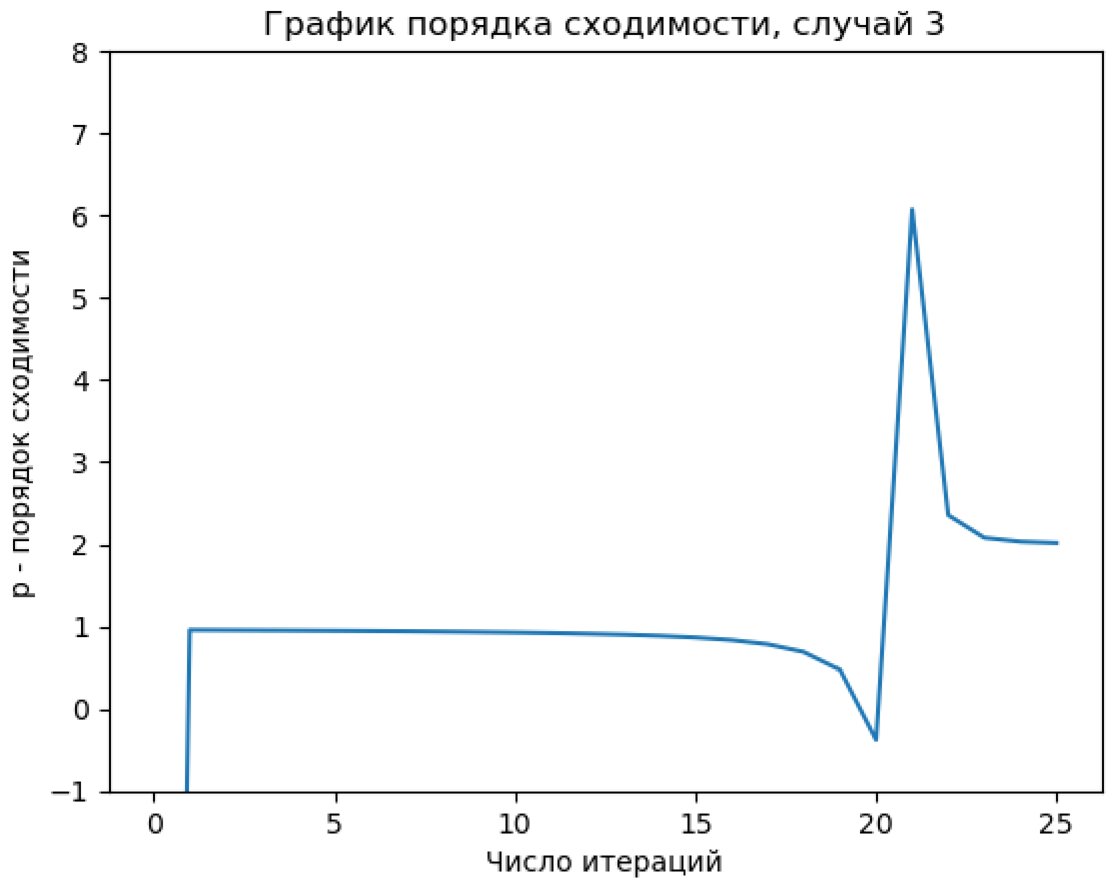
In [214…

```
my_plot(func0, dfunc0, 0.0, 3, 1) # случай 3
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-1, 8])
```

```
C:\Users\glebm\AppData\Local\Temp\ipykernel_6012\1369974145.py:8: RuntimeWarning: divide by z
ero encountered in log
  Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
```

Out[214]:

```
(-1.0, 8.0)
```



Во всех трёх случаях порядок сходимости в конечном итоге стремится у двум, что ожидается исходя из теории.

Левая часть графика (малое количество итераций) может вести себя хаотично, из-за неточности нулевого приближения и из-за неточности формулы для порядка сходимости (пологаем $C = 1$ и строгое равенство для n).

В третьем случае на левой части графика также наблюдаются последствия нулевой производной (неточность метода следовательно). Возможно получение более позитивной картины с помощью подбора нижней границы dx в модифицированном методе Ньютона.

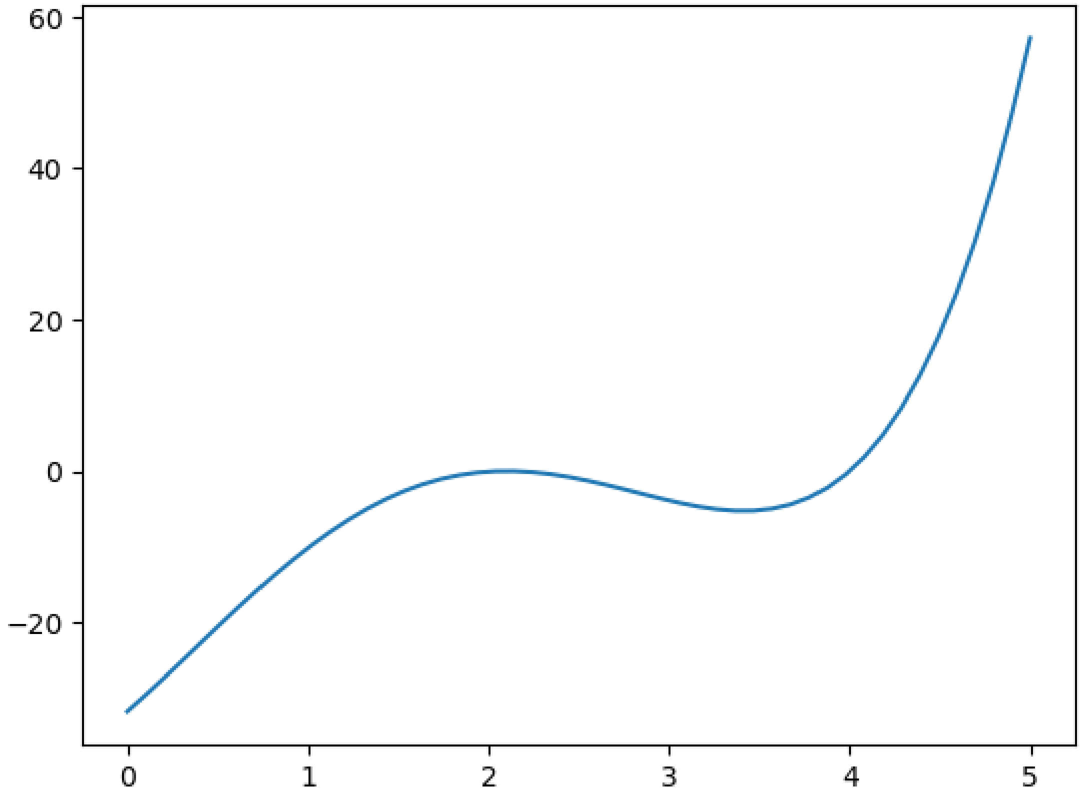
Нелинейное уравнение 2

In [215…

```
x = np.linspace(0,5)
func1 = lambda x: x**4 - 6.4*x**3 + 6.45*x**2 + 20.538*x - 31.752 #double root
dfunc1 = lambda x: 4.0*x**3 - 19.2*x**2 + 12.9*x + 20.538
y = func1(x)
plt.plot(x, y)
```

Out[215]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1974aa37050>]
```



1. Построить график порядка сходимости от номера итерации. Объяснить результат

In [216…

```
data = simple_newton(func1, dfunc1, 2.0)
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
```

```
sol =  2.0999999786199406
iter =  23
```

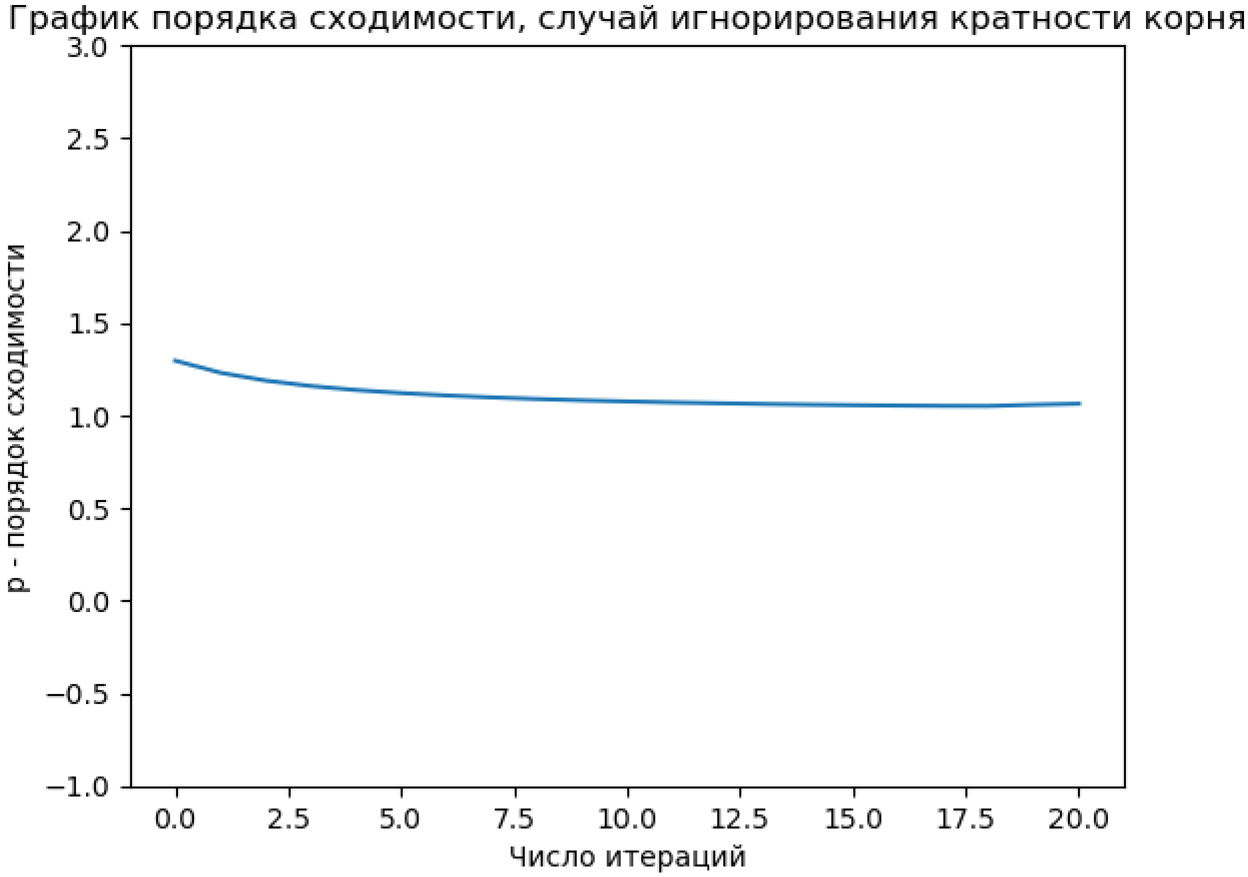
In [217…

```
my_plot(func1, dfunc1, 2.0, "игнорирования кратности корня", 1, 1) # случай игнорирования кра
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-1, 3])
```

```
C:\Users\glebm\AppData\Local\Temp\ipykernel_6012\1369974145.py:8: RuntimeWarning: divide by z
ero encountered in log
  Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
C:\Users\glebm\AppData\Local\Temp\ipykernel_6012\1369974145.py:8: RuntimeWarning: invalid val
ue encountered in scalar divide
  Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
```

Out[217]:

```
(-1.0, 3.0)
```



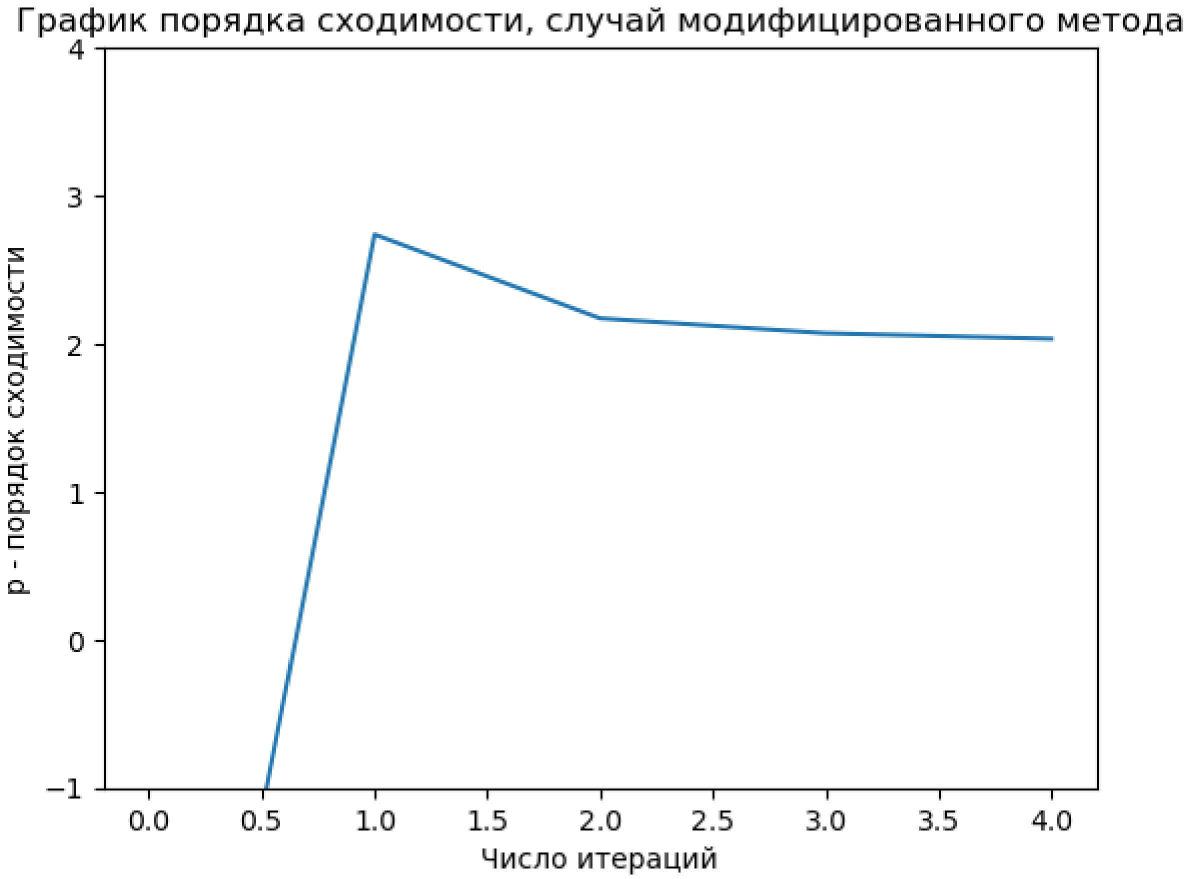
In [218…

```
my_plot(func0, dfunc0, 2.0, 'модифицированного метода', 1, 1) # случай модифицированного мето
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-1, 4])
```

```
C:\Users\glebm\AppData\Local\Temp\ipykernel_6012\1369974145.py:8: RuntimeWarning: divide by z
ero encountered in log
  Y.append((np.log(abs(x + dx - data[0])))/(np.log(abs(x - data[0]))))
```

Out[218]:

```
(-1.0, 4.0)
```



В случае кратного корня всё ещё можно использовать простой метод Ньютона, но скорость сходимости в таком случае будет не квадрадичной, а линейной. Если же мы хотим добиться квадратичной скорости сходимости, необходима поправка в методе, а именно:

$$x_{n+1} = x_n - m * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Что и было реализованно в коде. Графики выше подтверждают теорию

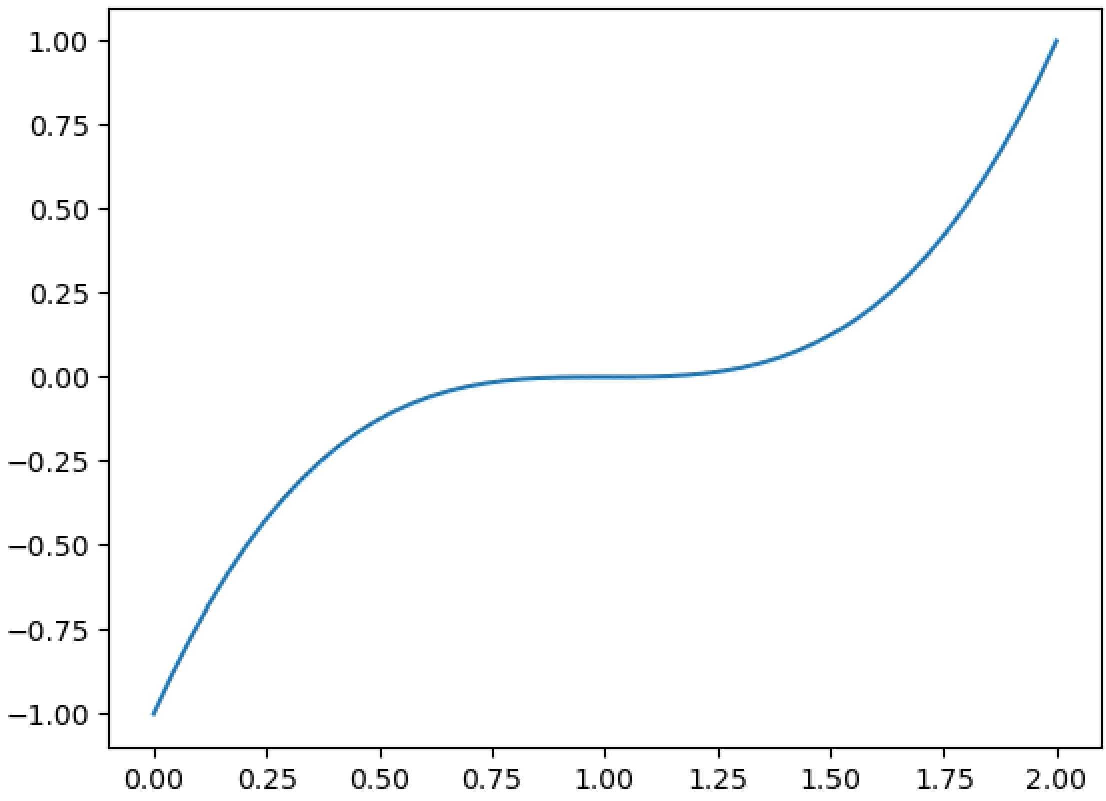
Нелинейное уравнение 3

In [219…

```
x = np.linspace(0,2)
func2 = lambda x: (x-1)**3
dfunc2 = lambda x: 3*(x-1)**2
y = func2(x)
plt.plot(x, y)
```

Out[219]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1974df1a150>]
```



1. Подобрать начальное приближение и решить задачу

In [220…

```
ddfunc2 = lambda x: 6*(x-1)
x0 = 1.2
data = simple_newton(func2, dfunc2, x0)
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
# print('dxs: ', data[2])
x_dots = [x0]
for i in range (data[1]):
    x_dots.append(x_dots[i] + data[2][i])
    # print(x_dots[i] + data[2][i], "\n")
for i in range (data[1]):
    print(1 - ((dfunc2(x_dots[i]))**2 - (func2(x_dots[i])*(ddfunc2(x_dots[i]))))/((dfunc2(x_d
```

```
More then 30 iterations!
sol =  nan
iter =  30
0.6666666666666667
0.6666666666666665
0.6666666666666667
0.6666666666666666
0.6666666666666665
0.6666666666666663
0.6666666666666667
0.6666666666666667
0.6666666666666666
0.6666666666666666
0.6666666666666667
0.6666666666666667
0.6666666666666665
0.6666666666666665
0.6666666666666665
0.6666666666666669
0.666666666666667
0.6666666666666667
0.6666666666666665
0.6666666666666666
0.6666666666666666
0.6666666666666667
0.6666666666666667
0.6666666666666665
0.6666666666666666
0.6666666666666669
0.6666666666666667
0.6666666666666667
0.666666666666667
0.6666666666666665
```

Заметим, что $\forall x \hookrightarrow f(x) * f''(x) = 6(x-1)^4 > 0$, а также $f^{'}$ и f'' непрерывны на R. Но корень лежит на [0.75; 1.25], и на концах этого отрезка f'' не знакопостоянна (на самом деле на концах любого отрезка такого, что $f(a)f(b) > 0$). Однако это всё относится к достаточному условию сходимости.

Можно проверить сходимоть по условию $|\frac{d\phi}{dx}| <= q < 1$, где $\phi = x_{n+1}$ - условие выполняется (смотреть данные выше). За 30 итераций без учёта кратности корня только при достаточно точном нулевом приближении метод успевает сойтись. Однако с учётом кратности корня получим:

In [221…
```
ddfunc2 = lambda x: 6*(x-1)
x0 = 1.2
data = modded_newton(func2, dfunc2, x0, 3)
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
# print('dxs: ', data[2])
```

```
sol =  1.0
iter =  2
```

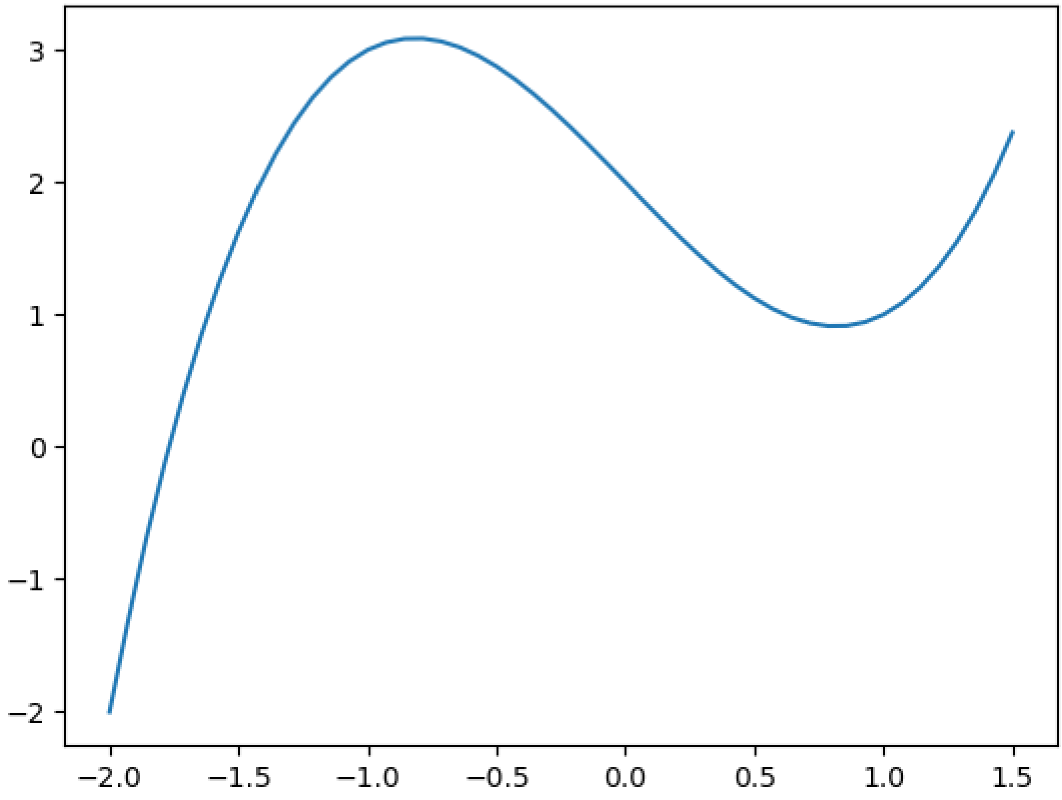
Поэтому в соответствии с критерием сходимости, можно выбрать почти любое нулевое приближение, вопрос только в том, какое количество итераций нам понадобится и какой метод мы будем для этого использовать

Нелинейное уравнение 4

In [222…
```
x = np.linspace(-2,1.5)
#x = np.linspace(-5,5)
func3 = lambda x: x**3 - 2*x + 2
dfunc3 = lambda x: 3*x**2 - 2
```

```
y = func3(x)
plt.plot(x, y)
```

Out[222]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1974df8aed0>]



1. Почему не находится решение во втором случае?

In [223…

```
data = simple_newton(func3, dfunc3, 0.5) # случай 1
#data = simple_newton(func3, dfunc3, 0) # случай 2
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
x_dots = [0.5]
print("x_n:\n")
for i in range (data[1]):
    x_dots.append(x_dots[i] + data[2][i])
    print(x_dots[i] + data[2][i])
```

```
sol =  -1.7692923542386314
iter =  10
x_n:

1.4
0.8989690721649484
-1.2887793276654596
-2.105767299013565
-1.8291999504602496
-1.771715812062107
-1.76929656115579
-1.769292354251341
-1.7692923542386314
-1.7692923542386314
```

In [224…

```
#data = simple_newton(func3, dfunc3, 0.5) # случай 1
data = simple_newton(func3, dfunc3, 0) # случай 2
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
x_dots = [0]
for i in range (data[1]):
    x_dots.append(x_dots[i] + data[2][i])
    print(x_dots[i] + data[2][i])
```

```
More then 30 iterations!
sol =  nan
iter =  30
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
1.0
0.0
```

Решение не находится, потому что происходят так называеме биения: при определённых параметрах поиск решения может зациклится и никогда не достичь окрестности корня, это прозрачно видно по значениям сверху.

In [226…

```
#data = simple_newton(func3, dfunc3, 0.5) # случай 1
data = modded_newton(func3, dfunc3, 0) # случай 2
print('sol = ', data[0])
print('iter = ', data[1])
```

```
sol =  -1.7692923542386314
iter =  43
```

Как видно, для нашего случая поправка в modded_newton сработала, однако я подозреваю, что можно подобрать такие функции и параметры, что цикл будет состоять не из двух точек, а из большего количества, тогда предложенное решение не сработает. На ум приходит пока только одно строгое решение для исключения биения - проверка значения x на данной итерации со значениями x на всех предыдущих. Однако это далеко не оптимально по времени (да и по памяти тоже) и возможно есть алгоритмы менее ресурсозатратные.