8. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ

Общий вид задачи Коши для системы ОДУ:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), t \in [t_0, T],\\&\mathbf{u}(t_0) = \alpha.\end{aligned}$$

Далее, все выкладки приведены для скалярного случая $u' = f(t, u)$, что никак не ограничивает общности. Положим $t_0 = 0$, введём сетку на отрезке $[0, T]$: $\{t_n = nh\}_{n=0}^{N}$, $h = T/N$. h – сеточный шаг. Будем обозначать u_n – приближённое значение функции u в узле t_n, $u(t_n)$ – значение точного решения в узле t_n.

Итак, имея начальное значение u_0 мы хотим вычислить $u_1, \ldots, u_N$ такие, что $u_n \approx u(t_n)$. Простейший метод – *явный метод Эйлера* – получается, если заменить u' односторонней разностью:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n), n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{36}$$

$$u_0 = \alpha. \tag{37}$$

В общем случае уравнения метода образуют систему *нелинейных* уравнений, т.к. неизвестные значения u_n входят как аргументы нелинейной функции f. Однако в данном случае удобнее рассматривать соотношения (36) как рекуррентное соотношение, т.к. можно явно найти u_{n+1}, зная u_n:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n). \tag{38}$$

Стартуя с начального значения u_0, мы можем последовательно найти u_1, u_2 и т.д. Здесь проявляется «эволюционная природа» задачи Коши – мы двигаемся в положительном направлении по t, при этом нам нужно знать только начальное значение. В противоположность этому в краевой задаче значения на обеих концах интервала влияют на решение во всей области. Методы, в которых подобно методу Эйлера можно последовательно находить решение, двигаясь по времени, называются *маршевыми* (time-marching).

Если аппроксимировать производную u' в точке t_{n+1} разностью назад, получим *неявный метод Эйлера*:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}), n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{39}$$

$$u_0 = \alpha. \tag{40}$$

Или

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Аналогично можно находить значения $u_1, u_2, \ldots$ последовательно, одно за другим, но теперь на каждом шаге нужно решать нелинейное уравнение (например, методом Ньютона), так как нет явной формулы, по которой можно найти значение u_{n+1} на каждом шаге.

Рассмотренные методы *одношаговые* – значение u_{n+1} зависит только от значения в предыдущем узле u_n и не зависит от других значений $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots$ Это соответствует дифференциальной постановке, т.к. точное решение в любой точке однозначно определяется *одним* значением (начальными данными). Однако существует целый класс *многошаговых* методов, в которых при вычислении u_{n+1} используются несколько предыдущих значений. Например, при замене u' центрально-разностной формулой, получается многошаговый метод (правило средней точки):

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n), \tag{41}$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n), n = 1, \ldots, N. \tag{42}$$

Важно отметить, что теперь помимо начального условия $u_0 = \alpha$, для того чтобы «запустить» счёт, необходимо как-то вычислить ещё одно значение u_1.

8.1. Порядок аппроксимации метода, невязка, локальная ошибка

Введём понятие *ошибки аппроксимации.* Ее еще называют *локальная ошибка* или *невязка.* Определим ее, как результат подстановки точного решения в разностные уравнения. *Порядок аппроксимации* – степень по шагу h, с которой входит старший член в ошибку аппроксимации.

Задача 28 (порядок аппроксимации явного метода Эйлера). *Покажите, что явный метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.*

Решение: подставим в (36) точное решение. Тогда понятно, что равенство (36) уже не может выполняться точно. Можно сказать, что

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = f(t_n, u(t_n)) + r_n, \tag{43}$$

где r_n – локальная ошибка. Оценим r_n. Для этого разложим все входящие в (43) значения неизвестной функции u в ряд Тейлора относительно t_n. В данном случае необходимо разложить только $u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) + O(h^3)$. После подстановки в (43) и преобразования, получим

$$u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(t_n) + O(h^2) = f(t_n, u(t_n)) + r_n,$$

причем здесь $u'(t_n)$ сокращается с $f(t_n, u(t_n))$ по постановке задачи. Тогда получается, что невязка $r_n = \frac{h}{2}u''(t_n) + O(h^2)$. $u''(t_n)$ – некоторое фиксированное число, старший член невязки $\frac{h}{2}u''(t_n)$ имеет первый порядок по h. При стремлении h к нулю именно он будет давать основной вклад в ошибку аппроксимации. То есть $r_n = O(h)$ Поэтому говорят, что явный метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. ■

Замечание: для явных методов, локальная ошибка – это ошибка, которую вносит метод на одном шаге по времени. Разумно ожидать, что если метод *устойчив* в каком-то смысле, то ошибка будет суммироваться от шага к шагу, но не будет слишком быстро расти (не заостряемся здесь на вопросе устойчивости и понимаем под ней пока именно написанное). Так как число шагов $N = \frac{T}{h}$, оценка ошибки явного метода Эйлера при вычислении u_{n+1} по u_n равна $r_n \cdot h = O(h) \cdot h$, тогда оценка полной ошибки в последнем узле будет $\frac{T}{h}O(h) \cdot h = O(h)$.

8.2. Методы Рунге–Кутты

Методы Эйлера – одношаговые методы первого порядка аппроксимации. Попробуем теперь построить одношаговый метод второго порядка аппроксимации. Следующий пример – демонстрация идеи построения методов высокого порядка. Запишем правило средней точки как одношаговый метод:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, u_{n+\frac{1}{2}}). \qquad (44)$$

Этот метод имеет 2-й порядок аппроксимации, что гораздо лучше первого порядка метода Эйлера. Но какое значение взять для $u_{n+\frac{1}{2}}$? Ведь нам известно только u_n!

Попробуем немного изменить метод и вычислить $u_{n+\frac{1}{2}}$ приближённо с помощью явного метода Эйлера:

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{h}{2}f(t_n, u_n),$$
$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, u_{n+\frac{1}{2}}).$$

Немного перепишем эти расчетные формулы в другом виде:

$$k_1 = f(t_n, u_n), \tag{45}$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1), \tag{46}$$

$$u_{n+1} = u_n + hk_2. \tag{47}$$

Может показаться странным, что для вычисления k_2 мы предлагаем сделать шаг методом Эйлера, который имеет первый порядок. Но из формулы видно, что k_2 умножается на h, и мы ожидаем, что метод «сохранит» второй порядок. Исследование аппроксимации метода подтверждает это предположение.

Все предыдущие «подгоночные» рассуждение служат только наводящими соображениями для того, чтобы записать некоторое семейство методов в общем виде. Обобщение этой «методики» даёт класс методов *Рунге–Кутты*. Пусть $s > 0$ – число стадий или этапов, a_{ij}, b_i, c_i – вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$k_1 = f(t_n, u_n), \tag{48}$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, u_n + h a_{21} k_1), \tag{49}$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, u_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \tag{50}$$

$$\ldots \tag{51}$$

$$k_s = f(t_n + c_s h, u_n + h(a_{s1} k_1 + \ldots + a_{s,s-1} k_{s-1})), \tag{52}$$

$$u_{n+1} = u_n + h(b_1 k_1 + \ldots + b_s k_s) \tag{53}$$

называется s-стадийным *явным методом Рунге–Кутты*.

Коэффициенты метода принято записывать в виде таблицы, которую называют *таблицей Бутчера*.

Ниже приведены условия порядка аппроксимации для методов Рунге–Кутты (первые три порядка):

1. Первый порядок:

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, i = 1, \ldots, s, \tag{54}$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1; \tag{55}$$

2. второй порядок (+ к предыдущим условиям):

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}; \tag{56}$$

3. третий порядок (+ к предыдущим условиям):

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}, \tag{57}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}. \tag{58}$$

Задача 29 (таблица Бутчера для метода Эйлера с пересчетом). *Выписать таблицу Бутчера для метода, заданного формулами* (45).

Решение: запишем коэффициенты $\{a_{ij}\}$ в виде матрицы, под которой снизу выпишем строкой коэффициенты b_j, а слева столбцом – коэффициенты c_i. Тогда таблица Бутчера примет вид:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

■

Замечание: стоит отметить, что для явных методов Рунге–Кутты таблица $\{a_{ij}\}$ всегда нижнетреугольная с нулями на главной диагонали.

Замечание: явный и неявный методы Эйлера – тоже методы Рунге–Кутты. Число стадий у них равно 1.

Задача 30 (расчетные формулы метода Рунге–Кутты). *Выписать расчетные формулы для решения ОДУ второго порядка*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

методом Эйлера с пересчетом.

Решение: сначала сведем ОДУ второго порядка к системе ОДУ первого порядка. Для этого введем новые переменные $y = u$, $y' = v$. Тогда получим систему первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -2xv, \\ u(0) = 0, v(0) = 1. \end{cases}$$

В векторном виде имеем ОДУ $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = (u, v)^T$, $\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = (v, -2xv)^T$. Выпишем расчетные формулы метода Эйлера $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, где

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = (k_{11}, k_{12})^T = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{u}_n) = (v_n, -2x_n v_n)^T, \\ \mathbf{k}_2 = (k_{21}, k_{22})^T = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{u}_n + h\mathbf{k}_1) = (v_n + hk_{12}, -2(x_n + h)(v_n + hk_{12}))^T. \end{cases}$$