№1

а) $f_X(x) = 3x^2, \quad x \in [0,1]$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_0^x 3t^2\,dt = x^3$$

ЭФР $F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x)$

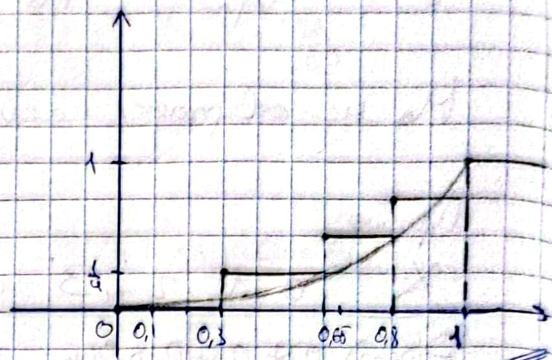
Тогда $F_n^*(x<0{,}3) = 0$

$F_n^*(0{,}3 \le x < 0{,}65) = \frac{1}{4}$

$F_n^*(0{,}65 \le x < 0{,}8) = \frac{1}{2}$

$F_n^*(0{,}8 \le x < 1) = \frac{3}{4}$

$F_n^*(x \ge 1) = 1$



б) $\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & X_i \le x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$P\left(\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x) = 1\right) = P(X_i \le x) = F_X(x)$$

$$E[F_n^*(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_X(x) = F_X(x)$$

$$D[\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x)] = F_X(x)(1-F_X(x))$$

$$D[F_n^*(x)] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x)] =$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} F_X(x)(1-F_X(x)) = \frac{1}{n}F_X(x)(1-F_X(x))$$

в) $Z_x^{(n)} = \sqrt{n}\left(F_X^*(x) - F_X(x)\right) \quad x \in [0,1]$

$$cov\left(Z_{x_1}^{(n)}, Z_{x_2}^{(n)}\right) = n \cdot cov\left(F_n^*(x_1), F_n^*(x_2)\right)$$

$$cov\left(F_n^*(x_1), F_n^*(x_2)\right) = cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x_1), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{[X_j,+\infty)}(x_2)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} cov\left(\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x_1), \mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x_2)\right) + \sum_{i\ne j} \underbrace{cov\left(\mathbb{1}_{[X_i,+\infty)}(x_1), \mathbb{1}_{[X_j,+\infty)}(x_2)\right)}_{0}\right]$$

в силу нез-сти наблюд.

$\operatorname{cov}(\mathbb{1}_{[X_1,+\infty)}(x_1), \mathbb{1}_{[X_1,+\infty)}(x_2)) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[X_1,+\infty)}(x_1)\mathbb{1}_{[X_1,+\infty)}(x_2)] -$

$- \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[X_1,+\infty)}(x_1)]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{[\ldots)}(x_2)]$

$\mathbb{E}[\mathbb{1}(x_1)\mathbb{1}(x_2)] = F_X(\max(x_1,x_2))$ т.к. $\mathbb{1}(x_1)\mathbb{1}(x_2) = \mathbb{1}(\max(x_1,x_2))$

$\operatorname{cov}(\mathbb{1}(x_1)\mathbb{1}(x_2)) = F_X(\max(x_1,x_2)) - F_X(x_1)F_X(x_2)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{cov}(Z^{(n)}_{x_1}, Z^{(n)}_{x_2}) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}[F_X(\max(x_1,x_2)) - F_X(x_1)F_X(x_2)] =$

$= F_X(\min(x_1,x_2)) - F_X(x_1)F_X(x_2)$

для $F_X(x) = x^3 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{cov}(Z^{(n)}_{x_1}, Z^{(n)}_{x_2}) = \min(x_1^3, x_2^3) - x_1^3x_2^3$

№2

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2)\right]$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\frac{1}{n}\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\frac{1}{n}\overline{X}^2$ учтём $\sum_{i=1}^{n}X_i = n\overline{X}$:

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X}\cdot\overline{X} + \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$

Покажем (не)смещённость: $\mathbb{E}[S^2] = \cancel{\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]} =$

$= \underbrace{\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]} - \underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum X_i - \overline{X}\right)^2} \longrightarrow \mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i\right) = \frac{1}{n}\sigma^2$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}X_i = \frac{1}{n}\cdot n\sigma^2 = \sigma^2$

$\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 \Rightarrow$ оценка смещённая

Состоятельность: по нер-ву Чебышева: $\mathbb{P}(|S^2-\sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}(S^2)}{\varepsilon^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(|S^2-\sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbb{D}(S^2)}{\varepsilon^2} = 0 \Rightarrow S^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$

№3 а) $\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k)$ если $Z_1, Z_2, \dots Z_k$ нез. случ. вел.

$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \sim N(0,1)$ & $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = (X_1 - 1)^2 + \left(\frac{X_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 3}{3}\right)^2$

$Y \sim \chi^2(3)$

$\chi_3^2 = (X_1 - 1)^2 + \left(\frac{X_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 3}{2}\right)^2$

б) Если $Z \sim N(0,1)$ и $V \sim \chi^2(k)$, независимы, то

$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \sim t(k)$ выберем Z_1, Z_2, Z_3 так, чтобы удовлетворить условию нез-сти

Пусть $Z = Z_1 = \frac{X_1 - 1}{1} = X_1 - 1 \sim N(0,1)$

и $V = \left(\frac{X_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 3}{3}\right)^2 \sim \chi^2(2)$

$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{2}}} = \frac{X_1 - 1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{X_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 3}{3}\right)^2\right]}} \sim t_2$

в) Если $U \sim \chi^2(m)$ и $V \sim \chi^2(n)$ независимы, то

$F_{m,n} = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$

Пусть $U = \frac{(X_1 - 1)^2}{1} = (X_1 - 1)^2 \sim \chi^2(1)$

$V = \left(\frac{X_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 3}{3}\right)^2 \sim \chi^2(2)$

$F_{1,2} = \frac{2(X_1 - 1)^2}{\left(\frac{X_2 - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 3}{2}\right)^2}$