ДЗ №3

№1

$\{X_i\}_{i=1}^n \in U(0;\theta_0)$

а) $F_{X_{(n)}}(x) = \left(\frac{x}{\theta_0}\right)^n$, $T_n = n(X_{(n)} - \theta_0)$

$x \in [0;\theta_0] \Rightarrow T_n \in [-n\theta_0, 0] \xrightarrow[n\to\infty]{} (-\infty; 0]$

$\mathbb{P}(T_n \leq t) = \mathbb{P}(n(X_{(n)} - \theta_0) \leq t) = \mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq \frac{t}{n} + \theta_0\right) =$

$= \left(\frac{\frac{t}{n} + \theta_0}{\theta_0}\right)^n = \left(1 + \frac{t}{n\theta_0}\right)^n \quad t \in [-n\theta_0; 0]$

б) $\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t}{\theta_0 n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{t}{\theta_0 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{t}{\theta_0} + \underbrace{o(1)}_{\text{б.м.} \to 0}\right)$

$\mathbb{P}(T_n \leq t) \to e^{\frac{t}{\theta_0}}$, $n \to \infty$, т.е. $T_n \xrightarrow{d} T$, где $F_T(t) = e^{\frac{t}{\theta_0}}$

По т. Слуцкого: $T_n \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{d} T \cdot 0 = 0$

тогда $X_{(n)} - \theta_0 \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta_0$

оценка состоятельна

в) $T_n^* = n(X_{(n)}^* - X_{(n)})$

$\mathbb{P}(X_{(n)}^* = X_{(n)}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ т.к. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathbb{P}(X_i^* \neq X_{(n)}\ \forall i$ из бутстр. выборки$)$

из $\{X_1, \ldots X_n\}$ выбрать $X_{(n)}$ можно с $P = \frac{1}{n}$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ – за n раз не выбрать $X_{(n)}$

$\mathbb{P}(T_n^* = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

г) $\mathbb{P}(T_n^* = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-1}$

Но $F_T(0) = 1 \neq \mathbb{P}(T_n^* = 0)$, а $\mathbb{P}(T_n^* = 0) \to 1 - e^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{T^*}(t)$ не может сходиться р-но к $F_T(t)$

Интервал Холла CI: $\left[2X_{(n)} - q^*_{1-\frac{\alpha}{2}},\ 2X_{(n)} - q^*_{\frac{\alpha}{2}}\right]$

где $q^*_{\frac{\alpha}{2}}$ – $\frac{\alpha}{2}$ квантиль $X^*_{(n)}$, но $P(X^*_{(n)} = X_{(n)}) \to 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$

тогда $q^*_{0{,}025} = X_{(n)}$ и $q^*_{0{,}975} = X_{(n)}$ $\Rightarrow$ CI $\to [X_{(n)}, X_{(n)}]$

Интервал вырождается в точку и вер-сть покрыть θ_0 будет мала, а не $\approx 0{,}95$. Поэтому бутстрап не работает для крайних порядковых статистик.

№3

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\theta}\,dx = \int_0^{\theta} x^2 \frac{1}{\theta}\,dx = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\mathbb{E}[X^3] = \frac{\theta^3}{4}$$

По ЗБЧ: $Y \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X^2] = \frac{\theta^2}{3}$ и $Z \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X^3] = \frac{\theta^3}{4}$

$$\frac{Z}{Y} \xrightarrow{P} \frac{\theta^3}{4}\frac{3}{\theta^2} = \frac{3}{4}\theta$$

δ-метод: пусть $g(a,b) = \frac{4}{3}\cdot\frac{b}{a}$, $(a_0, b_0) = \left(\frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{4}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = -\frac{4}{3}\frac{b}{a^2} \qquad \frac{\partial g}{\partial b} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial a}\right|_{(a_0,b_0)} = -\frac{4}{3}\frac{\theta^3/4}{(\theta^2/3)^2} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4\theta} = -\frac{3}{\theta}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial b}\right|_{(a_0,b_0)} = \frac{4}{3}\frac{1}{\theta^2/3} = \frac{4}{\theta^2}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i^2, X_i^2) = \mathbb{E}[X^4] - (\mathbb{E}[X^2])^2 = \frac{\theta^4}{5} - \frac{\theta^4}{9} = \frac{4}{45}\theta^4$$

$$\mathrm{Cov}(X_i^3, X_i^3) = \mathbb{E}[X^6] - (\mathbb{E}[X^3])^2 = \frac{\theta^6}{7} - \left(\frac{\theta^3}{4}\right)^2 = \theta^6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16}\right) = \frac{9\theta^6}{112}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i^2, X_i^3) = \mathbb{E}[X^5] - \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X^3] = \frac{\theta^5}{6} - \frac{\theta^2}{3}\frac{\theta^3}{4} = \frac{\theta^5}{12}$$

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} Y - \frac{\theta^2}{3} \\ Z - \frac{\theta^3}{4}\end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\Sigma)$$ по ЦПТ, где $\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{4}{45}\theta^4 & \frac{\theta^5}{12} \\ \frac{\theta^5}{12} & \frac{9\theta^6}{112}\end{pmatrix}$

Тогда $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \nabla g^T \Sigma \nabla g)$

$$\nabla g^T \Sigma \nabla g = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\theta} & \frac{4}{\theta^2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4\theta^4}{45} & \frac{\theta^5}{12} \\ \frac{\theta^5}{12} & \frac{9\theta^6}{112}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\theta} \\ \frac{4}{\theta^2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{\theta} & \frac{4}{\theta^2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4\theta^4}{45}\cdot\left(-\frac{3}{\theta}\right) + \frac{\theta^5}{12}\cdot\frac{4}{\theta^2} \\ \frac{\theta^5}{12}\left(-\frac{3}{\theta}\right) + \frac{9\theta^6}{112}\cdot\frac{4}{\theta^2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\theta} & \frac{4}{\theta^2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{15}\theta^3 + \frac{1}{3}\theta^3 \\ -\frac{1}{4}\theta^4 + \frac{9}{28}\theta^4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\theta} & \frac{4}{\theta^2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\theta^3}{15} \\ \frac{\theta^4}{14}\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\theta^2}{5} + \frac{2\theta^2}{7} = \frac{3\theta^2}{35}$$

$\hat{\theta} = \frac{4}{3}\cdot\frac{Z}{Y}$ $\qquad$ $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{3\theta^2}{35}\right)$