矩阵

概念

定义

由m*n个数排成一个m行n列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

几种特殊矩阵

上三角

主对角线（左上到右下）以下全为0的**方阵**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

运算

加法与数乘

统称为矩阵的线性运算

加法

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

运算律

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}&=\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{O} \\ 1\cdot\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A} \\ (kl)\boldsymbol{A}&=k(l\boldsymbol{A}) \\ (k+l)\boldsymbol{A}&=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A} \\ k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

乘法

法则

设A是一个`m*s`矩阵，B是一个`s*n`矩阵

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

运算律

- (AB)C = A(BC)
- A(B+C) = AB + AC
- (B+C)A = BA + CA
- $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$
- $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$

注意

- 一般情况下，矩阵乘法不满足交换律，即BA不等于AB

- 若n阶矩阵（方阵）满足交换律，则称A与B乘法可交换。n阶单位矩阵与任意n阶矩阵可交换
- 两个非零矩阵之积可能是零矩阵，即若 AB=O，不代表A和B有零矩阵
- 若A不等于O，AB=AC不能说明B=C

幂

方阵A的幂即多个A相乘，满足以下规律

- $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$
- $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$

注意

- 因为矩阵乘法不满足交换律，所以一般$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$

多项式

对于方阵A，有以下形式的称为n阶方阵A的m次多项式

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E}$$

由于多项式都是A相乘或是A与E相乘，因此都是可交换的，所以

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$$

此外，若A和B可交换，则$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n$也可按二项式定理展开

转置

将A的行换位同序数的列，即

$$a'_{ij}=a_{ji}$$

运算律

- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(\lambda A)^T=\lambda A^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$

对称性

若$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$则称为对称矩阵，若$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T$则称为反对称矩阵，**反对称矩阵主对角线上元素均为0**

有如下几种形式的方阵必为对称矩阵

- $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$
- $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$

有如下形式的必为反对称矩阵

- $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T$

任意方阵可以写成如下形式

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$$

即，**任意方阵A都可写成对称矩阵与反对称矩阵之和**

共轭矩阵

若A为复矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=[\overline{a_{ij}}]$$

其中$\overline{a_{ij}}$为aij的共轭复数

运算

- $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$
- $\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{A}}$
- $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}$

可逆矩阵

对于方阵A，若存在方阵B，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称A可逆，B为A的逆矩阵。**逆矩阵是唯一的**

若方阵不可逆，则称为**奇异矩阵**，否则为非奇异矩阵

性质

- 若A是可逆矩阵，则A^{-1}也是可逆矩阵，且$(A^{-1})^{-1}=A$
- 若A是可逆矩阵，k是不为零的数，则$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$
- 若A是可逆矩阵，则A的转置也是可逆矩阵，且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- 若A、B是可逆矩阵，则$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

其他性质见`行列式-应用-逆矩阵-性质`

计算

二阶

若ad-bc不等于0，则二阶方阵A可逆，且

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

对角

因为对角矩阵A和B，有

$$c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$$

要符合可逆矩阵的定义，则有

$$a_{ii} = \frac{1}{b_{ii}}$$

分块矩阵

可以将一个大的矩阵A写成多个小矩阵的组合，如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$
$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$
$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}$$

对于可以将矩阵A分为下列形式的矩阵，称为准对角矩阵，或分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} = diag(A_1, A_2, \dots, A_r)$$

运算

加法与数乘

加法与数乘显而易见，与普通形式一样

转置

注意，转置时大矩阵需转置，每个分块也需转置

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$

乘法

在进行乘法时，需要注意**A的列的分法必须与B的行的分法一致**

计算方法与普通乘法类似

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$$

特殊的，若为分块对角矩阵，则

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_rB_r\end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix}A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^k\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1}\end{pmatrix}$$

最后的可逆前提是各个分块都可逆

例

这里注意A的列的分法与B的行的分法

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & E\\ 3E & O\end{pmatrix}\qquad A_{11}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}O & B_{12}\\ B_{21} & O\end{pmatrix}\qquad B_{12}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\qquad B_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

则

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & E \\ 3E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B_{12} \\ B_{21} & O \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}O + B_{21}E & A_{11}B_{12} + EO \\ 3EO + B_{21}O & 3EB_{12} + OO \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_{21} & A_{11}B_{12} \\ O & 3B_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

行与列的性质

若C=AB，将B按行分块，则

$$C = AB = A\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\beta_1 & A\beta_2 & \dots & A\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

将B按列分块，则

$$C = AB = A\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\beta_1 \\ A\beta_2 \\ \dots \\ A\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

因此B矩阵相乘的结果的每一列或每一行都可以视为A矩阵单独乘该行/列的结果

内积与外积

内积

两个`n*1`向量x和y，其内积为

$$x^T y = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

外积

外积为

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (y_1, y_2 \cdots y_n) = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

外积展开

对于两个矩阵A（`m*n`）和B（`k*n`），将A按列划分，B^T按行划分，有

$$AB^T=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^T\\\boldsymbol{y}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{y}_n^T\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^T+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2^T+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n^T$$

矩阵的初等变换

矩阵与线性方程组

设n元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

当b_i全为0时称为齐次线性方程组

该式可以写成矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}\qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

A称为**系数矩阵**，(A,b)称为**增广矩阵**

初等变换

类型

下列为初等行变换，列变换同理

- $r_i\leftrightarrow r_j$ 互换矩阵第i行与第j行位置

$$\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

- kr_i 用非零常数k乘矩阵第i行的每个元

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $r_i + kr_j$ 将第j行所有元的k倍加到i行

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

性质

若A经过一系列**初等行变换**变为B，则称AB行等价 $A \xrightarrow{r} B$

若A经过一系列**初等列变换**变为B，则称AB列等价 $A \xrightarrow{c} B$

若A经过一系列**初等变换**变为B，则称AB等价 $A \to B$

- 反身性 任意矩阵与自己等价
- 对称性 A等价于B则B等价于A
- 传递性 AB等价，BC等价则AC等价

化简方程

很容易可以知道，对于方程组的**增广矩阵**，对其进行初等变换后形成的新方程组与原方程组的解是一样的。因此一般采用将增广矩阵化简为**行阶梯型**矩阵来求解，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

行阶梯型矩阵

- 若有0行（全为0的行），则0行位于非0行下方
- 每个首非0元（从左数第一个不为0的数）前面的0个数逐行增加

行最简型

所有行首非0元为1，且其所在列的其他元都为0的行阶梯型矩阵

- 任意`m*n`矩阵A都可以经过初等行变换化为行阶梯型矩阵及行最简形矩阵

等价标准型

任意`m*n`矩阵必可化为如下形式的矩阵

$$N = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

初等矩阵

对单位矩阵进行一次初等变换的矩阵，有三种

- E(i,j) 交换行

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

- E(i(k)) k乘第i行

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & k & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

- E(i, j(k)) 第i行加第j行的k倍

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵与初等变换

定理1

设A为`m*n`矩阵，对A进行一次初等行变换，相当于在A的**左边**乘一个m阶初等矩阵。对A进行一次初等列变换，相当于在A**右边**乘一个n阶初等矩阵

推论：

$$\begin{aligned} E(i,j)E(i,j) &= E \\ E(i(k))E(i(\frac{1}{k})) &= E \\ E(i,j(k))E(i,j(-k)) &= E \end{aligned}$$

所以可以得到逆矩阵

$$\begin{aligned} E(i,j)^{-1} &= E(i,j) \\ E(i(k))^{-1} &= E(i(\frac{1}{k})) \\ E(i,j(k))^{-1} &= E(i,j(-k)) \end{aligned}$$

定理2

对于任意`m*n`矩阵，必存在行最简形矩阵U和m阶初等矩阵Pi，使得

$$P_1P_2...P_tA = U$$

定理3

对于任意`m*n`矩阵A，必存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使

$$PAQ = N$$

其中$N = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

n阶方阵可逆充要条件

n阶方阵可逆的充要条件是它能表示为E和一系列初等矩阵的乘积

推论：`m*n`矩阵A和B等价的充要条件是存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使

$$PAQ = B$$

初等变换法求逆

由上述定理，若A是n阶矩阵，则必存在P，使得

$$P_1P_2...P_mA = E$$

则$A^{-1} = P_1P_2...P_m$，因此有

$$P_1P_2...P_m(A|E) = A^{-1}(A|E) = (E|A^{-1})$$

即可以通过$P_1, P_2, ..., P_m$行变换实现求逆

初等变换法求方程

对于下述方程

$AX = C \;\; XB = C \;\; AXB = C$

可知其解

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}C \\ X &= CB^{-1} \\ X &= A^{-1}CB^{-1} \end{aligned}$$

如要求解第一个式子，可以使用类似求逆的方式

$$A^{-1}(A|C) = (E|A^{-1}C)$$

三角形分解

又叫LU分解，指将一个方阵A分解为上三角阵U和下三角阵L的乘积，其原理如下：

对于一个非奇异方阵A，必有变换

$$E_mE_{m-1}\cdots E_1A = U$$

其中U即为上三角阵，则

$$A = E_1^{-1}\cdots E_{m-1}^{-1}E_m^{-1}U = LU$$

下面为一个例子，注意这里$E_m^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$的简便运算方式

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{bmatrix} \qquad l_2 - \frac{1}{2}l_1 \quad l_3 - 2l_1 \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad\qquad\qquad l_3 + 3l_2
\end{aligned}
$$

实际上相当于左乘了下列三个初等矩阵

$$
E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

对应逆矩阵如下

$$
E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}
$$

三者的乘积就是

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}
$$

就是三个初等矩阵对应多出来的元放在L的对应位置上构成的矩阵

行列式

基本性质

概念来源

求解二元一次方程组时

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
\end{aligned}
$$

引入记号

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

所以上面可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

排列与逆序

对于一个排列$j_1 j_2 \ldots j_n$（注意排列有顺序，组合无顺序），若一个较大的数在较小的数前，称这两个数构成一个逆序。排列中所有的逆序总个数称为该排列的逆序数，记为$\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)$

```
如154362，逆序个数为（每次选取一个数字a，只比较a与该数字之前的数构成几个逆序）
逆序总数为
0    1与前面的数无法构成逆序
0    5与1无法构成逆序
1    4与5构成一个逆序，与1无法构成
2    3与4  3与5构成逆序
0    6与3  4  5  1都无法构成逆序
4    2与6  3  4  5构成逆序

逆序数为  0+0+1+2+0+4=7
```

逆序数为奇数称为奇排列，反之为偶排列

对换排列中的两数会改变排列的奇偶性

行列式定义

由n阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的元组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式，记为det(A)或|A|

计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\dots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

上述求和针对`j1j2...jn`的所有排列

其中一个一般项a_{ij}可以表示为

$$a_{ij} = (-1)^{\tau(i_1i_2\dots i_n)+\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$$

性质

性质1

- 方阵A的行列式与A^T相同

很容易证明，因为矩阵A与矩阵A的转置区别只是调换了i和j的顺序，根据一般项公式，不改变值

性质2

- 互换行列式的两行，行列式变号

也容易证明，因为一次对换改变排列的奇偶性

- **推论** 如果行列式有两行（列）完全相同，则行列式值为0

因为这说明D=-D

性质3

- 行列式某行（列）的公因子可以提到行列式外，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

也容易证明，因为某行（列）的公因子在每个一般项中必出现一次

- **推论** 设A为n阶矩阵，则$|kA| = k^n|A|$
- **推论** 若行列式的两行（列）成比例，则行列式为0

性质4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质5

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上述这些运算即行列式进行矩阵初等变换时的对应变换

性质6

设A B都是n阶矩阵，则

$$|AB| = |A||B|$$

按行（列）展开

余子式

n阶行列式|A|中划去第i行第j列后构成的n-1阶行列式，称为a_{ij}的**余子式**，记作M_{ij}

代数余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

余子式与行列式

两者有如下关系，证明见附

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

或

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

且有如下的关系

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \text{ 当} i \neq j$$

因此可以总结如下

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

应用

范德蒙德行列式

Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$$

伴随矩阵

定义

由n阶矩阵A的行列式的各个代数余子式组成的矩阵称为伴随矩阵

注意这里的序号，类似于是一个转置后的矩阵（第1行第二列元素为A21非A12）

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

性质

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

逆矩阵

n阶矩阵A可逆的充要条件为：A的行列式不为0且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

性质

- 若n阶方阵A B满足 AB=E，则$A^{-1} = B \ \ B^{-1} = A$
- 若A可逆且AB=AC，则B=C
- 非奇异矩阵的等价条件 下列三个命题是等价的

- A是非奇异的
- Ax=0 仅有平凡解0
- A与E行等价

非奇异和奇异矩阵

矩阵**行列式|A|不为0**的称为非奇异矩阵

逆矩阵的行列式

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

伴随矩阵的行列式

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

克拉默法则

对于线性方程组

$$Ax = b$$

如果线性方程组的系数行列式D=|A|不为0，则有唯一解，且

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

其中Dj是用方程组常数项$b_1, b_2, \ldots b_n$替换第j列的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

齐次线性方程组

齐次线性方程组的一般形式为$Ax = 0$，易得其必有解$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

而齐次线性方程组**有非零解**的充要条件是**系数行列式|A|=0**

一些应用

图论

图的邻接矩阵对于无向图来说是个对称矩阵，元素a_{ij}记录了从节点i到节点j是否有路径（有为1.无为0）

因此，假设从节点1开始，路径为`1 -> 2 -> 5 -> 4`，则可以使用$a_{12}a_{25}a_{54}$的值来判断是否有该条路径

因此，若想知道从节点1到节点3的路径数，其中只经过一个节点（即路径长度为2），可以使用下式

$$a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}+\cdots+a_{1n}a_{n3}$$

形式与矩阵相乘相同，即对于图的邻接矩阵A，$A^2=\{a'_{ij}\}$的元素a'_{13}即代表了从节点1到节点3，长度为2的路径数

同理，A^m的各个元素代表了从节点i到节点j，长度为m的路径数

一些问题的解释和证明

矩阵

矩阵乘法由来

由研究线性变换和线性方程组而来

$$\begin{cases} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2 \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2 \\ x_3=a_{31}y_1+a_{32}y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2 \\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2 \end{cases}$$

代入整理得

$$\begin{cases} x_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2 \\ x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2 \\ x_3=(a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21})z_1+(a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22})z_2 \end{cases}$$

因此归纳总结可以得运算规则

矩阵乘法运算律证明

交换律

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

设AB的元素为m，BC的元素为n，（AB)C的元素为l，A为`m*s`，B为`s*t`，C为`t*n`

$$
\begin{aligned}
m_{ij} &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \\
n_{ij} &= \sum_{k=1}^{t} b_{ik} c_{kj} \\
l_{ij} &= \sum_{r=1}^{t} m_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^{t} (\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kr}) c_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{t} (a_{i1} b_{1r} + a_{i2} b_{2r} + \ldots + a_{is} b_{sr}) c_{rj} \\
&= (a_{i1} b_{11} + a_{i2} b_{21} + \ldots + a_{is} b_{s1}) c_{1j} + (a_{i1} b_{12} + a_{i2} b_{22} + \ldots + a_{is} b_{s2}) c_{2j} + \ldots + (a_{i1} b_{1t} + a_{i2} b_{2t} + \ldots + a_{is} b_{st}) c_{tj} \\
&= (a_{i1} b_{11} c_{1j} + a_{i1} b_{12} c_{2j} + \ldots + a_{i1} b_{1t} c_{tj}) + (a_{i2} b_{21} c_{1j} + a_{i2} b_{22} c_{2j} + \ldots + a_{i2} b_{2t} c_{tj}) + \ldots + (a_{is} b_{s1} c_{1j} + a_{is} b_{s2} c_{2j} + \ldots + a_{is} b_{st} c_{tj}) \\
&= a_{i1} (b_{11} c_{1j} + b_{12} c_{2j} + \ldots + b_{1t} c_{tj}) + a_{i2} (b_{21} c_{1j} + b_{22} c_{2j} + \ldots + b_{2t} c_{tj}) + \ldots + a_{is} (b_{s1} c_{1j} + b_{s2} c_{2j} + \ldots + b_{st} c_{tj}) \\
&= a_{i1} \sum_{k=1}^{t} b_{1k} c_{kj} + a_{i2} \sum_{k=1}^{t} b_{2k} c_{kj} + \ldots + a_{is} \sum_{k=1}^{t} b_{sk} c_{kj} \\
&= \sum_{r=1}^{s} a_{ir} n_{rj}
\end{aligned}
$$

所以得证

加法分配率

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

设AB的元素为m，AC的元素为n，B+C的元素为l，A为`m*s`，B为`s*n`，C为`s*n`

$$
\begin{aligned}
l_{ij} &= b_{ij} + c_{ij} \\
m_{ij} &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \\
n_{ij} &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik} c_{kj}
\end{aligned}
$$

对于$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$的元素o，有

$$
\begin{aligned}
o_{ij} &= m_{ij} + n_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{s} b_{ik} c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{s} (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{s} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{s} a_{ik} l_{kj}
\end{aligned}
$$

所以得证

幂

1

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$$

直接数学归纳法（应该可以吧）

因为由定义，$A^{k+1}=A^kA$，所以$A^{k+2}=A^{k+1}A=A^kAA=A^kA^2$，这可以由矩阵乘法结合律得到，所以得证

2

$$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$$

因为$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^k\ldots=\boldsymbol{A}^{k+k+\ldots+k}=\boldsymbol{A}^{kl}$

矩阵转置证明

设A为`m*s`，B为`s*n`

$$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$$

设AB元素为p，则

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

AB的转置为

$$p'_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$$

设B^TA^T的元素为q

$$\begin{aligned}q_{ij}&=\sum_{k=1}^{s}b'_{ik}a'_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{s}b_{jk}a_{ki}\\&=p'_{ij}\end{aligned}$$

所以得证

可逆矩阵

唯一性

假设A有B和C两个逆矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{CE}=\boldsymbol{C}$$

所以唯一

二阶方阵求逆

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则可以解方程

$$\begin{cases} ax_{11} + bx_{21} = 1 \\ ax_{12} + bx_{22} = 0 \\ cx_{11} + dx_{21} = 0 \\ cx_{12} + dx_{22} = 1 \end{cases}$$

AB的逆

若A B可逆，则

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证明如下

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$$

行阶梯型矩阵

任意矩阵必可化为行阶梯型矩阵，设矩阵A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

对第i行进行如下初等变换，可以使第j列的元素变为0

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \frac{a_{ij}}{a_{1j}} \boldsymbol{r}_1$$

重复该过程，可以化为行阶梯矩阵

化为行阶梯型矩阵后

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

可以简单地将所有行同除最左元素化为行最简式

化为行最简式后

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

对第j列进行如下变换，可以化为标准型

$$\boldsymbol{c}_i' = \boldsymbol{c}_i - c_{ij} * \boldsymbol{c}_j$$

注意，这里cj的第j个元素为1

这部分算法实现可见code/Row_ladder_matrix.py

要将`m*n`矩阵化为等价标准型（m不等于n），若m<n，还需要对矩阵进行列变换；若m>n，需要增加行变换步骤。这里的程序暂时还没写这个功能

行列式

排列奇偶性

1) 假设对换的数i j相邻，则相当于

$$a_1a_2\dots a_sijb_1b_2\dots b_m$$

转换为

$$a_1a_2\dots a_sjib_1b_2\dots b_m$$

因此若i>j，则$\tau_2 = \tau_1 - 1$，若i<j，则$\tau_2 = \tau_1 + 1$

2) 假设对换的数不相邻，则相当于

$$a_1a_2\dots a_sib_1b_2\dots b_mjc_1c_2\dots c_p$$

转换为

$$a_1a_2\dots a_sjb_1b_2\dots b_mic_1c_2\dots c_p$$

首先，对换对于a和c无影响，对于a对换前后i和j都不在任何a之前，对于c对换前后i和j都在c之前

其次，对于$b_x < min(i,j)$和$b_x > max(i,j)$，对换不影响它们的逆序数

因此可以假设**i<j**，且有x个b，有i<b<j，则

$$\tau_2 = \tau_1 + x + (x+1) = \tau_1 + 2x + 1$$

其中x是x个b中每个的逆序数都+1，(x+1)为对换后i的逆序数

再假设**j<b<i**，有y个b，则显然与上式相反

$$\tau_2 = \tau_1 - 2y - 1$$

因此奇偶性相反

一般项

$$a_{ij}=(-1)^{\tau(i_1i_2\dots i_n)+\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$$

调换因子的顺序，假设一共需要调换s次，得

$$a_{ij}=(-1)^{\tau(i_1i_2\dots i_n)+\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{1l_1}a_{2l_2}\dots a_{nl_n}$$

上述操作不改变任何值。但若要将对应的τ函数转换为对应下标，则$\tau(i_1i_2\dots i_n)$和$\tau(j_1j_2\dots j_n)$分别需要调换s次，因此一共需要调换2s次，即

$$a_{ij}=(-1)^{\tau(12\dots n)+\tau(l_1l_2\dots l_n)}a_{1l_1}a_{2l_2}\dots a_{nl_n}$$

可化简为

$$a_{ij}=(-1)^{\tau(l_1l_2\dots l_n)}a_{1l_1}a_{2l_2}\dots a_{nl_n}$$

与行列式求和的一般项形式相同，即两者等价。显然原式是更一般的形式

行列式性质6

$$|AB|=|A||B|$$

作矩阵

$$D=\begin{pmatrix}A & O\\ -E & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{用第一列乘}b11\text{加第}n+1\text{列（置零}b11\text{元素）}\\
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}
&=
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} & \cdots & 0 \\
-1 & & & 0 & \cdots & b_{1n} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}\\
&\text{用第二列乘}b21\text{加第}n+1\text{列（置零}b21\text{元素）}\\
&=
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21} & \cdots & 0 \\
-1 & & & 0 & \cdots & b_{1n} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}\\
&\text{重复上述过程}n\text{次}\\
&=
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & 0 \\
-1 & & & 0 & \cdots & b_{1n} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & -1 & 0 & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}\\
&\text{对第}n+2\ldots 2n\text{列做同样操作}\\
&=
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\ldots+a_{1n}b_{nn} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \\
-1 & & & 0 & \cdots & 0 \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & -1 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即最后的结果为

$$
D = \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & O \end{pmatrix}
$$

因此要求行列式，可以进行下列化简

$$
|D| = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix} = (-1)^n |-E||AB| = (-1)^{2n}|AB| = |AB|
$$

而

$$
|D| = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|
$$

所以得证

余子式与行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{i1}(-1)^{i-1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i-1+n-1}M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} \end{aligned}$$

对于$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \ \ i \neq j$ 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{jk})A_{ik} = |A| + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}$$

所以$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \ \ i \neq j$

范德蒙德矩阵

第i行减去第i-1行的a1倍，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) D_{n-1} \end{aligned}$$

所以有

$$D = \prod_{1 \le i \le j \le n} (a_j - a_i)$$

伴随矩阵

$$
\begin{aligned}
AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22} & \cdots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\dots & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22} & \cdots & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\dots & a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22} & \cdots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} \\
&= |A|E
\end{aligned}
$$

同样对于A^*A有相同的结论，因为只有在i=j的情况下$a_{ik}A_{jk}$不为0

逆矩阵

必要性：

若A可逆，则$A^{-1}A=\frac{1}{|A|}A^*A=\frac{1}{|A|}|A|E=E$，且$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$，所以|A|不为0

充分性：

若|A|不为0，则

$$E=\frac{1}{|A|}|A|E=\frac{1}{|A|}A^*A$$

因此

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

性质

1

若AB=E，则$A^{-1}AB=A^{-1}E$，即$A^{-1}=B$，反之同理

2

若AB=AC，则同乘A的逆可证B=C

3

若A是非奇异的，则存在逆矩阵A^{-1}，则对于$Ax=0$，假设$\hat{x}$是该式的一个解，则有

$$\hat{x}=E\hat{x}=(A^{-1}A)\hat{x}=A^{-1}(A\hat{x})=A^{-1}0$$

即$\hat{x}=0$

因为Ax=0存在平凡解0，因此其必可以化为行阶梯型矩阵与x的乘积$Ux=0$。此外因为方程没有非平凡解，因此U的对角元素必定非0，且为该行第一个非零元。因此Ux=0的行最简型即为单位阵I，即A与I行等价

逆矩阵行列式

因为$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|$，所以$|A^{-1}|=\frac{|E|}{|A|}=\frac{1}{|A|}$

伴随矩阵行列式

因为

$$\begin{aligned}|AA^*|=|A||A^*|=&\big||A|E\big|\\=&\begin{vmatrix}|A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A|\end{vmatrix}\\=&|A|^n\end{aligned}$$

所以

$$|A*|=|A|^{n-1}$$

克拉默法则

方程组为

$$Ax=b$$

因此有

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}A^*b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

注意这里的x是列向量，因此可知x向量的元素j，有

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}) = \frac{D_j}{D}$$

齐次线性方程组

因为对于每个矩阵A，都有

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

因为|A|=0，因此r<n，所以至少有一列是零向量，所以取出最后一列

$$PAQ\epsilon_n = 0$$

其中

$$\epsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

则同乘P的逆，得$AQ\epsilon_n = 0$，因为Q为n阶可逆矩阵，所以Q的第n列必不为0，即存在$Q\epsilon_n \neq 0$，使等式成立，即方程有非零解$Q\epsilon_n$