Animacija dvojnega nihala

UNIVERZA V LJUBLJANI, UL FMF
FINANČNA MATEMATIKA - 2. STOPNJA

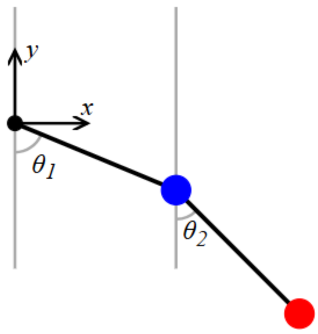
Nena Šefman Hodnik, Nina Švigelj

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

1 Osnovni primeri

1.1 Dvojno nihalo

Oglejmo si primer na sliki:



Slika 1: Dvojno nihalo [5]

Imamo dve žogici z masama m_1 in m_2 na palčkah dolžine l_1 in l_2 z zanemarljivo maso.

Recimo, da je prva žogica na (x_1, y_1) in druga žogica na (x_2, y_2). Te koordinate izrazimo s kotoma $\theta 1, \theta 2$ kot

$$\begin{aligned}
x_1 &= l_1 \sin(\theta_1),\\
x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2),\\
y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1),\\
y_2 &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2).
\end{aligned}$$

Potencialna energija

Potencialna energija je definirana kot $V = mgh$, kjer je višina žogice dana z $h = y$.
Za posamezni masi velja:

$$h_1 = y_1, \quad h_2 = y_2.$$

Celotna potencialna energija sistema je torej

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2\\
&= m_1 g(-l_1 \cos\theta_1) + m_2 g(-l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2).
\end{aligned}$$

Kinetična energija

Kinetična energija vsake žogice je podana z izrazom

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

Hitrost žogic izračunamo po formuli $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Odvodi koordinat so:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), \\
\dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), \\
\dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1), \\
\dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2).
\end{aligned}$$

Skupno kinetično energijo sistema torej izrazimo kot

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Lotimo se sedaj zapisa sistema Euler-Lagrangeevih enačb [7] za $\mathcal{L} = T - V$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g (l_1 \cos\theta_1) + m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \\
&= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} + l_2^2 \dot{\theta}_2^{\,2} + 2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + 2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\
&\quad + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} + l_2^2 \dot{\theta}_2^{\,2} + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos\theta_1 \\
&\quad + m_2 l_2 g \cos\theta_2.
\end{aligned}$$

Želimo dobiti enačbe oblike:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Najprej izpeljimo za θ_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\Big) &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)], \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= -\, m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) l_1 g \sin\theta_1.
\end{aligned}$$

Torej za $i = 1$ dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= (m_1 + m_2)(l_1^2 \ddot{\theta}_1) + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\
&\quad + (m_1 + m_2) l_1 g \sin\theta_1 = 0 \quad / : l_1.
\end{aligned}$$

Podobno naredimo še za $i = 2$ in dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\Big) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)], \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= -\, m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 g \sin\theta_2.
\end{aligned}$$

Iz tega zapišemo še drugo Euler-Lagrangeevo enačbo:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta_2}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta_2} + m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) + m_2 l_2 g \sin\theta_2 = 0 \quad / : l_2$$

Dobimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}
\theta_1 : &\quad (m_1 + m_2)[l_1 \ddot{\theta_1} + g \sin\theta_1] + m_2 l_2 [\ddot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \\
\theta_2 : &\quad m_2 [l_2 \ddot{\theta_2} + g \sin\theta_2] + m_2 l_1 [\ddot{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0
\end{aligned}$$

1.2 Trojno nihalo

Kaj pa bi se zgodilo, če vzamemo trojno nihalo? Predpostavimo, da na drugo žogico pripnemo še eno vrvico dolžine l_3 in žogico z maso m_3.

Ta žogica je na položaju

$$\begin{aligned}
x_3 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 + l_3 \sin\theta_3, \\
y_3 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 - l_3 \cos\theta_3,
\end{aligned}$$

prva odvoda koordinat po času pa sta

$$\begin{aligned}
\dot{x_3} &= l_1 \dot{\theta_1} \cos\theta_2 + l_2 \dot{\theta_2} \cos\theta_2 + l_3 \dot{\theta_3} \cos\theta_3, \\
\dot{y_3} &= l_1 \dot{\theta_1} \sin\theta_2 + l_2 \dot{\theta_2} \sin\theta_2 + l_3 \dot{\theta_3} \sin\theta_3.
\end{aligned}$$

Za ta sistem imamo:

$$\begin{aligned}
V_3 =& m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3 \\
=& -(m_1 + m_2 + m_3) l_1 g \cos\theta_1 - \cos\theta_2 g l_2 (m_2 + m_3) - \cos\theta_3 l_3 m_3 g \\
T_3 =& \frac{1}{2} m_1 (\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x_3}^2 + \dot{y_3}^2) \\
=& \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + l_2 \dot{\theta_2}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{1}{2} m_3 [l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + l_2 \dot{\theta_2}^2 \\
&+ l_3^2 \dot{\theta_3}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2 l_1 l_3 \dot{\theta_1} \dot{\theta_3} \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2 l_2 l_3 \dot{\theta_2} \dot{\theta_3} \cos(\theta_2 - \theta_3)] \\
\mathcal{L} =& T_3 - V_3
\end{aligned}$$

Podobno kot za dvojno nihalo tudi tu dobimo sistem enačb za θ_i, $i = 1, 2, 3$. Če jih malo preuredimo, dobimo:

$$\begin{aligned}
\theta_1 : &\quad (m_1 + m_2 + m_3)[l_1 \ddot{\theta_1} + g \sin\theta_1] + (m_2 + m_3) l_2 [\ddot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\
&+ m_3 l_3 [\ddot{\theta_3} \cos(\theta_1 - \theta_3) + \dot{\theta_3}^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)] = 0 \\
\theta_2 : &\quad (m_2 + m_3)[l_2 \ddot{\theta_2} + g \sin\theta_2] + (m_2 + m_3) l_1 [\ddot{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\
&+ m_3 l_3 [\ddot{\theta_3} \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{\theta_3}^2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] = 0 \\
\theta_3 : &\quad m_3 [l_3 \ddot{\theta_3} - g \sin\theta_3] + m_3 l_1 [\ddot{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_3) - \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)] \\
&+ m_3 l_2 [\ddot{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_3) - \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] = 0
\end{aligned}$$

2 Postopek animacije

Za sistem dvojnega nihala sva v programskem jeziku `python` napisali funkcijo `resen_sistem_n_simbolicno`, ki simbolično zapiše sistem diferencialnih enačb za izbrano število nihal n. Potem z uporabo funkcije `resen_sistem_n_numericno` glede na

- mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$,
- dolžine vrvic $l_1, l_2, \ldots, l_n$,
- začetne pogoje $\theta_1, \dot{\theta_1}, \theta_2, \dot{\theta_2}, \ldots, \theta_n, \dot{\theta_n}$,
- korak dt,
- čas nihanja t_{max}

za vsak $t_k = k \cdot dt,\ k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{tmax}{dt} \rfloor$ rešimo sistem diferencialnih enačb in dobimo matriko z vrsticami $[\theta_1(t_k), \dot{\theta_1}(t_k), \theta_2(t_k), \dot{\theta_2}(t_k), \ldots, \theta_n(t_k), \dot{\theta_n}(t_k)], \quad k = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{tmax}{dt} \rfloor$. Za numerično reševanje diferencialnih enačb sva uporabili funkcijo `solve_ivp` z RK45 metodo. Ta metoda je podrobneje opisana v [3]. V nekaterih prejšnjih verzijah pa sva uporabili tudi funkcijo `odeint` (*ordinary differential equation integration*), ki je opisana v [2].

S pomočjo dobljenih vrednosti nato izračunamo koordinate vsake žogice v vsakem trenutku in jih narišemo z uporabo funkcije `narisi_sliko_2` za risanje preprostega dvojnega nihala. Podobno sva naredili tudi za trojno nihalo s funkcijo `narisi_sliko_3`.

(a) Primer slike dvojnega nihala. (b) Primer slike trojnega nihala.

Slika 2: Primeri narisanih nihal.

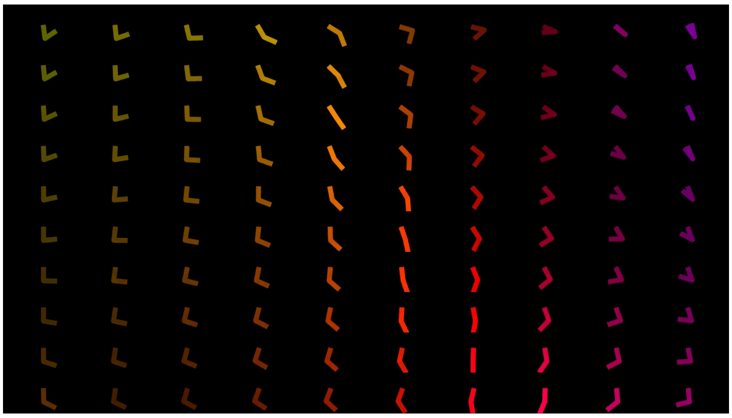
Dobljene slike nato s pomočjo orodja `ffmpeg` in določenega `fps` (*frames per second oz. sličic na sekundo*) združimo s funkcijo `ustvari_video` v video datoteko.

3 Primeri risanja nihal

Poleg osnovnih dveh nihal, ki sta prikazana na sliki 2a in 2b sva se lotili še nekaj bolj zanimivih primerov. Prav tako sva se igrali z barvami, zato se bodo morda barve na slikah med seboj malo razlikovale. Velik del videoposnetkov je dostopen na GitHub repozitoriju.

3.1 Dvojna nihala v prostoru

V tem primeru sva narisali več dvojnih nihal, ki so obešena na različne višine v prostoru. Vsako izmed nihal ima svoje začetne pogoje, torej kota θ_1 in θ_2, mase in dolžini vrvic. Vsa nihala se spustijo iz mirovanja.

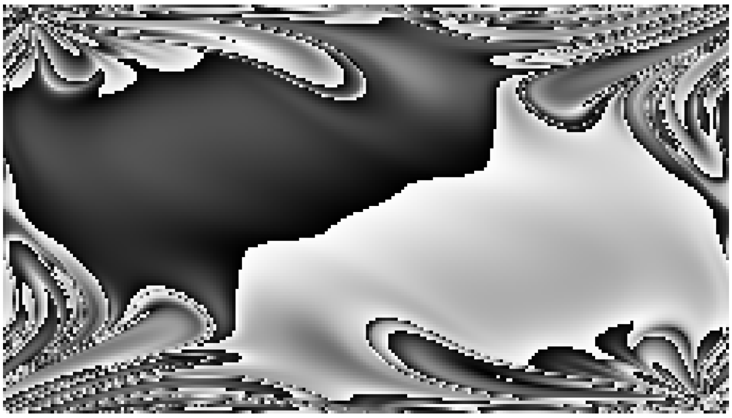


Slika 3: 10×10 Dvojno nihalo

Primer takšenga risanja je na sliki 3.

3.2 Dvojna nihala kot kvadratki

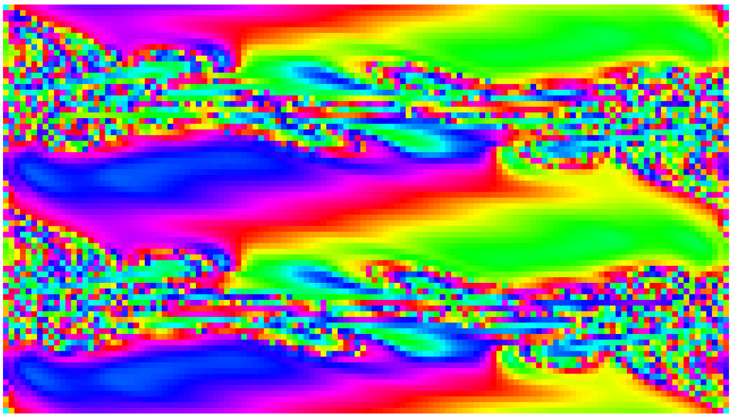
Ker risanje velikega števila dvojnih nihal v mrežo kmalu postane praktično nemogoče, sva se odločili prikazovati samo še njihove barve. Te sva določali na različne načine preko kotov θ_1, θ_2 in kotnih hitrosti $\dot{\theta_1}, \dot{\theta_2}$ nihal v posameznih trenutkih (funkcije za barvanje lahko najdete na repozitoriju v datoteki `barve.py`). Na ta način sva lahko narisali mnogo mnogo večje mreže. Začetne pogoje nihal, ki so si blizu skupaj, sva nastavili tako, da so si zelo podobni, ter na ta način vizualizirali fazne portrete obravnavanih diferencialnih enačb. Primer takšnega risanja je prikazan na slikah 4 in 5.



Slika 4: Primer risanja dvojnih nihal predstavljenih kot barvni kvadratki.

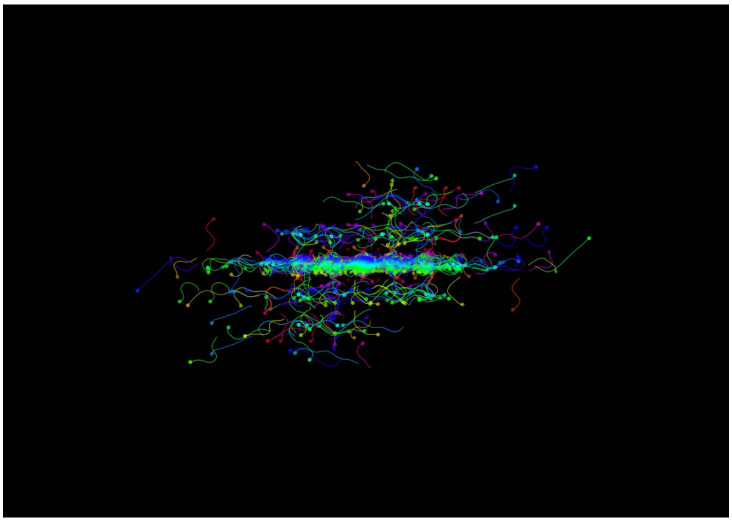
3.3 Dvojna nihala v koordinatnem sistemu θ_1 in θ_2

Dvojna nihala lahko narišemo tudi kot točke v koordinatnem sistemu, kjer je x koordinata enaka kotu drugega nihala θ_2, y koordinata pa kotu prvega nihala θ_1. Vsako nihalo ima svoje začetne pogoje, torej kota θ_1 in θ_2, mase in dolžini vrvic. Tudi tu se vsa nihala spustijo iz mirovanja. Da



Slika 5: Primer risanja dvojnih nihal predstavljenih kot barvni kvadratki.

pa bi bila nihala bolj vidna, sva jim dodali še sledi - repe, ki za določen čas `T_rep` hrani in riše pretekle položaje nihal. Primer risanja nihal v koordinatnem sistemu je na sliki 6.



Slika 6: Primer risanja dvojnih nihal v koordinatnem sistemu z repi.

Literatura

[1] 2swap. *Double Pendulums are Chaoticn't*. Ogled: 5. 12. 2025. YouTube. URL: https://www.youtube.com/watch?v=dtjb2OhEQcU.

[2] The SciPy community. *scipy.integrate.odeint - SciPy API Reference*. Ogled: 12. 12. 2025. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html.

[3] The SciPy community. *scipy.integrate.solve_ivp - SciPy API Reference*. Ogled: 12. 12. 2025. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html.

[4] J.R. Dormand in P.J. Prince. "A family of embedded Runge-Kutta formulae". V: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (1980), str. 19–26. ISSN: 0377-0427. DOI: https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X80900133.

[5] Scipython. *The double pendulum*. Ogled: 24. 10. 2025. URL: https://scipython.com/blog/the-double-pendulum/.

[6] Wikipedia. *HSL and HSV — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Ogled: 5. 12. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=HSL_and_HSV&oldid=1325738283.

[7] Wikipedia. *Lagrangian mechanics*. Ogled: 24. 10. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_mechanics.