

# Animacija dvojnega nihala

UNIVERZA V LJUBLJANI, UL FMF  
FINANČNA MATEMATIKA - 2. STOPNJA

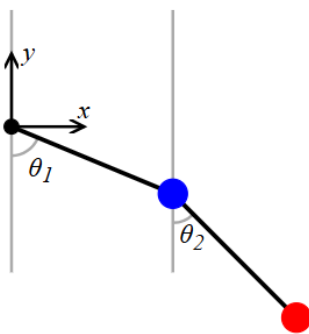
Nena Šefman Hodnik, Nina Švigelj

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

## 1 Osnovni primeri

### 1.1 Dvojno nihalo

Oglejmo si primer na sliki:



Slika 1: Dvojno nihalo [5]

Imamo dve žogici z masama  $m_1$  in  $m_2$  na palčkah dolžine  $l_1$  in  $l_2$  z zanemarljivo maso.

Recimo, da je prva žogica na  $(x_1, y_1)$  in druga žogica na  $(x_2, y_2)$ . Te koordinate izrazimo s kotoma  $\theta_1, \theta_2$  kot

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin(\theta_1), \\x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), \\y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1), \\y_2 &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2).\end{aligned}$$

### Potencialna energija

Potencialna energija je definirana kot  $V = mgh$ , kjer je višina žogice dana z  $h = y$ .

Za posamezni masi velja:

$$h_1 = y_1, \quad h_2 = y_2.$$

Celotna potencialna energija sistema je torej

$$\begin{aligned}V &= V_1 + V_2 \\&= m_1 g(-l_1 \cos \theta_1) + m_2 g(-l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2).\end{aligned}$$

## Kinetična energija

Kinetična energija vsake žogice je podana z izrazom

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Hitrost žogic izračunamo po formuli  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ .

Odvodi koordinat so:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1), \\ \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2).\end{aligned}$$

Skupno kinetično energijo sistema torej izrazimo kot

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Lotimo se sedaj zapisa sistema Euler-Lagrangeevih enačb [7] za  $\mathcal{L} = T - V$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g(l_1 \cos \theta_1) + m_2 g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 \\ &\quad + m_2 l_2 g \cos \theta_2.\end{aligned}$$

Želimo dobiti enačbe oblike:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Najprej izpeljimo za  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)], \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) l_1 g \sin \theta_1.\end{aligned}$$

Torej za  $i = 1$  dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= (m_1 + m_2) (l_1^2 \ddot{\theta}_1) + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + (m_1 + m_2) l_1 g \sin \theta_1 = 0 \quad / : l_1.\end{aligned}$$

Podobno naredimo še za  $i = 2$  in dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)], \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 g \sin \theta_2.\end{aligned}$$

Iz tega zapišemo še drugo Euler-Lagrangeovo enačbo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) + m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad / : l_2$$

Dobimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad & (m_1 + m_2)[l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1] + m_2 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \\ \theta_2 : \quad & m_2 [l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2] + m_2 l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \end{aligned}$$

## 1.2 Trojno nihalo

Kaj pa bi se zgodilo, če vzamemo trojno nihalo? Predpostavimo, da na drugo žogico pripnemo še eno vrvico dolžine  $l_3$  in žogico z maso  $m_3$ .

Ta žogica je na položaju

$$\begin{aligned} x_3 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3, \\ y_3 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 - l_3 \cos \theta_3, \end{aligned}$$

prva odvoda koordinat po času pa sta

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3, \\ \dot{y}_3 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3. \end{aligned}$$

Za ta sistem imamo:

$$\begin{aligned} V_3 &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3 \\ &= -(m_1 + m_2 + m_3) l_1 g \cos \theta_1 - \cos \theta_2 g l_2 (m_2 + m_3) - \cos \theta_3 l_3 m_3 g \\ T_3 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{1}{2} m_3 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + l_3 \dot{\theta}_3^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2 l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2 l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] \\ \mathcal{L} &= T_3 - V_3 \end{aligned}$$

Podobno kot za dvojno nihalo tudi tu dobimo sistem enačb za  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Če jih malo preuredimo, dobimo:

$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad & (m_1 + m_2 + m_3)[l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1] + (m_2 + m_3) l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ & + m_3 l_3 [\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)] = 0 \\ \theta_2 : \quad & (m_2 + m_3)[l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2] + (m_2 + m_3) l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ & + m_3 l_3 [\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] = 0 \\ \theta_3 : \quad & m_3 [l_3 \ddot{\theta}_3 - g \sin \theta_3] + m_3 l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)] \\ & + m_3 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] = 0 \end{aligned}$$

## 2 Postopek animacije

Za sistem dvojnega nihala sva v programskem jeziku `python` napisali funkcijo `resen_sistem_n_simbolicno`, ki simbolično zapiše sistem diferencialnih enačb za izbrano število nihala  $n$ . Potem z uporabo funkcije `resen_sistem_n_numericno` glede na

- mase  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ,
- dolžine vrvic  $l_1, l_2, \dots, l_n$ ,
- začetne pogoje  $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \dots, \theta_n, \dot{\theta}_n$ ,
- korak  $dt$ ,
- čas nihanja  $t_{max}$

za vsak  $t_k = k \cdot dt$ ,  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{t_{max}}{dt} \rfloor$  rešimo sistem diferencialnih enačb in dobimo matriko z vrsticami  $[\theta_1(t_k), \dot{\theta}_1(t_k), \theta_2(t_k), \dot{\theta}_2(t_k), \dots, \theta_n(t_k), \dot{\theta}_n(t_k)]$ ,  $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{t_{max}}{dt} \rfloor$ . Za numerično reševanje diferencialnih enačb sva uporabili funkcijo `solve_ivp` z RK45 metodo. Ta metoda je podrobneje opisana v [3]. V nekaterih prejšnjih verzijah pa sva uporabili tudi funkcijo `odeint` (*ordinary differential equation integration*), ki je opisana v [2].

S pomočjo dobljenih vrednosti nato izračunamo koordinate vsake žogice v vsakem trenutku in jih narišemo z uporabo funkcije `narisi_sliko_2` za risanje preprostega dvojnega nihala. Podobno sva naredili tudi za trojno nihalo s funkcijo `narisi_sliko_3`.



(a) Primer slike dvojnega nihala.



(b) Primer slike trojnega nihala.

Slika 2: Primeri narisanih nihala.

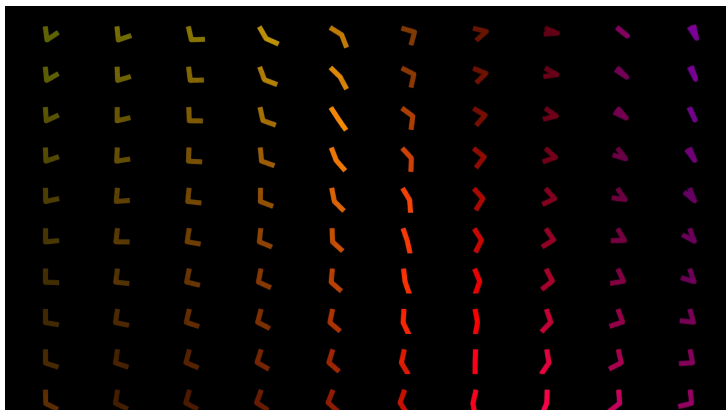
Dobljene slike nato s pomočjo orodja `ffmpeg` in določenega `fps` (*frames per second* oz. *sličic na sekundo*) združimo s funkcijo `ustvari_video` v video datoteko.

## 3 Primeri risanja nihala

Poleg osnovnih dveh nihala, ki sta prikazana na sliki 2a in 2b sva se lotili še nekaj bolj zanimivih primerov. Prav tako sva se igrali z barvami, zato se bodo morda barve na slikah med seboj malo razlikovale. Velik del videoposnetkov je dostopen na GitHub repozitoriju.

### 3.1 Dvojna nihala v prostoru

V tem primeru sva narisali več dvojnih nihala, ki so obešena na različne višine v prostoru. Vsako izmed nihala ima svoje začetne pogoje, torej kota  $\theta_1$  in  $\theta_2$ , mase in dolžini vrvic. Vsa nihala se spustijo iz mirovanja.



Slika 3:  $10 \times 10$  Dvojno nihalo

Primer takšnega risanja je na sliki 3.

### 3.2 Dvojna nihala kot kvadrтки

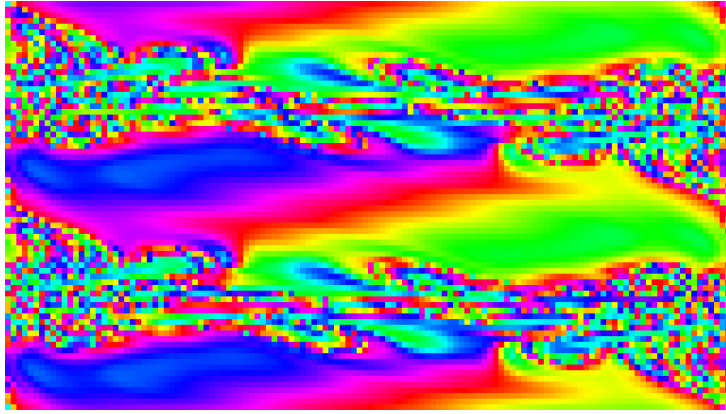
Ker risanje velikega števila dvojnih nihala v mrežo kmalu postane praktično nemogoče, sva se odločili prikazovati samo še njihove barve. Te sva določali na različne načine preko kotov  $\theta_1, \theta_2$  in kotnih hitrosti  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  nihala v posameznih trenutkih (funkcije za barvanje lahko najdete na repozitoriju v datoteki `barve.py`). Na ta način sva lahko narisali mnogo mnogo večje mreže. Začetne pogoje nihala, ki so si blizu skupaj, sva nastavili tako, da so si zelo podobni, ter na ta način vizualizirali fazne portrete obravnavanih diferencialnih enačb. Primer takšnega risanja je prikazan na slikah 4 in 5.



Slika 4: Primer risanja dvojnih nihala predstavljenih kot barvni kvadrтки.

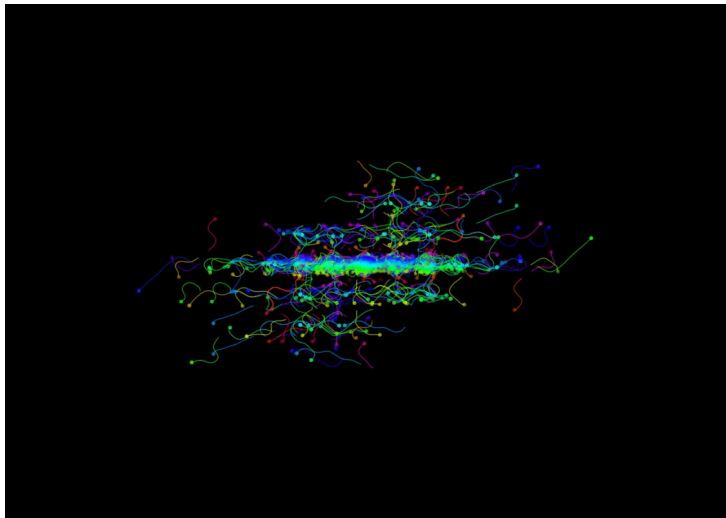
### 3.3 Dvojna nihala v koordinatnem sistemu $\theta_1$ in $\theta_2$

Dvojna nihala lahko narišemo tudi kot točke v koordinatnem sistemu, kjer je  $x$  koordinata enaka kotu drugega nihala  $\theta_2$ ,  $y$  koordinata pa kotu prvega nihala  $\theta_1$ . Vsako nihalo ima svoje začetne pogoje, torej kota  $\theta_1$  in  $\theta_2$ , mase in dolžini vrvic. Tudi tu se vsa nihala spustijo iz mirovanja. Da



Slika 5: Primer risanja dvojnih nihali predstavljenih kot barvni kvadrati.

pa bi bila nihala bolj vidna, sva jim dodali še sledi - repe, ki za določen čas  $T_{rep}$  hrani in riše pretekle položaje nihala. Primer risanja nihala v koordinatnem sistemu je na sliki 6.



Slika 6: Primer risanja dvojnih nihali v koordinatnem sistemu z repi.

## Literatura

- [1] 2swap. *Double Pendulums are Chaoticn't*. Ogled: 5. 12. 2025. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=dtjb20hEQcU>.
- [2] The SciPy community. *scipy.integrate.odeint* - *SciPy API Reference*. Ogled: 12. 12. 2025. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>.
- [3] The SciPy community. *scipy.integrate.solve\_ivp* - *SciPy API Reference*. Ogled: 12. 12. 2025. URL: [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve\\_ivp.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html).
- [4] J.R. Dormand in P.J. Prince. "A family of embedded Runge-Kutta formulae". V: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (1980), str. 19–26. ISSN: 0377-0427. DOI: [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X80900133>.
- [5] Scipython. *The double pendulum*. Ogled: 24. 10. 2025. URL: <https://scipython.com/blog/the-double-pendulum/>.
- [6] Wikipedia. *HSL and HSV* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Ogled: 5. 12. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=HSL\\_and\\_HSV&oldid=1325738283](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=HSL_and_HSV&oldid=1325738283).
- [7] Wikipedia. *Lagrangian mechanics*. Ogled: 24. 10. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_mechanics).