

# Animacija dvojnega nihala

UNIVERZA V LJUBLJANI, UL FMF  
FINANČNA MATEMATIKA - 2. STOPNJA

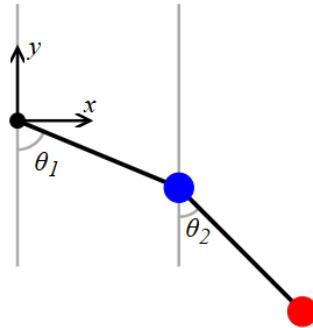
Nena Šefman Hodnik, Nina Švigelj

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

## 1 Osnovni primeri

### 1.1 Dvojno nihalo

Oglejmo si primer na sliki:



Slika 1: Dvojno nihalo [2]

Imamo dve žogici z masama  $m_1$  in  $m_2$  na palčkah dolžine  $l_1$  in  $l_2$  z zanemarljivo maso.

Recimo, da je prva žogica na  $(x_1, y_1)$  in druga žogica na  $(x_2, y_2)$ . Te koordinate dobimo kot:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin(\theta_1), \\x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), \\y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1), \\y_2 &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2).\end{aligned}$$

### Potencialna energija

Potencialna energija je definirana kot  $V = mgh$ , kjer je višina žogice dana z  $h = y$ .

Za posamezni masi velja:

$$h_1 = y_1, \quad h_2 = y_2.$$

Torej celotna potencialna energija sistema je:

$$\begin{aligned}V &= V_1 + V_2 \\&= m_1 g(-l_1 \cos \theta_1) + m_2 g(-l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2).\end{aligned}$$

## Kinetična energija

Kinetična energija vsake žogice je podana z izrazom

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Hitrost žogic dobimo s pomočjo izraza  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ .

Odvodi koordinat so:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \\ \dot{x}_2 &= l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ \dot{y}_1 &= l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{y}_2 &= l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)\end{aligned}$$

Skupna kinetična energija sistema je torej:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Lotimo se sedaj zapisa sistema Euler-Lagrangeevih enačb [4] za  $\mathcal{L} = T - V$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1g(l_1 \cos \theta_1) + m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1\dot{\theta}_1 l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 2l_1\dot{\theta}_1 l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + m_1gl_1 \cos \theta_1 + m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + (m_1 + m_2)l_1g \cos \theta_1 \\ &\quad + m_2l_2g \cos \theta_2.\end{aligned}$$

Želimo dobiti enačbe oblike:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Najprej izpeljimo za  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)l_1g \sin \theta_1.\end{aligned}$$

Torej za  $i = 1$  dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= (m_1 + m_2)(l_1^2\ddot{\theta}_1) + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + (m_1 + m_2)l_1g \sin \theta_1 = 0 \quad / : l_1.\end{aligned}$$

Podobno naredimo za  $\theta_2$  in dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_2g \sin \theta_2\end{aligned}$$

Euler-Lagrangeeva enačba za  $i = 2$  se torej glasi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) + m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad / : l_2$$

Dobimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}\theta_1 : \quad & (m_1 + m_2)[l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1] + m_2 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \\ \theta_2 : \quad & m_2[l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2] + m_2 l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0\end{aligned}$$

## 1.2 Trojno nihalo

Kaj pa bi se zgodilo, če vzamemo trojno nihalo? Predpostavimo, da na drugo žogico pripnemo preko vrvice  $l_3$  še eno žogico z maso  $m_3$ .

Ta žogica je na položaju

$$\begin{aligned}x_3 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \\ y_3 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 - l_3 \cos \theta_3 \\ \dot{x}_3 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \\ \dot{y}_3 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3\end{aligned}$$

Za ta sistem imamo:

$$\begin{aligned}V_3 &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3 \\ &= -(m_1 + m_2 + m_3) l_1 g \cos \theta_1 - \cos \theta_2 g l_2 (m_2 + m_3) - \cos \theta_3 l_3 m_3 g \\ T_3 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{1}{2} m_3 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)] \\ \mathcal{L} &= T_3 - V_3\end{aligned}$$

Podobno kot za dvojno nihalo tudi tu dobimo sistem enačb za  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Če jih malo preuredimo, dobimo:

$$\begin{aligned}\theta_1 : \quad & (m_1 + m_2 + m_3)[l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1] + (m_2 + m_3)l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ & + m_3 l_3 [\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)] = 0 \\ \theta_2 : \quad & (m_2 + m_3)[l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2] + (m_2 + m_3)l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ & + m_3 l_3 [\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] = 0 \\ \theta_3 : \quad & m_3[l_3 \ddot{\theta}_3 - g \sin \theta_3] + m_3 l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)] \\ & + m_3 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_3)] = 0\end{aligned}$$

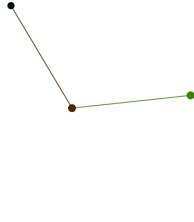
## 2 Postopek animacije

Za sistem dvojnega nihala sva v programskega jeziku `python` napisali funkcijo `resen_sistem_n_simbolicno`, ki simbolično zapiše sistem enačb v odvisnosti od števila  $n$  - torej števila nihal. Potem z uporabo funkcije `resen_sistem_n_numericno` glede na

- izbrane mase  $m_1, m_2, \dots, m_n$
- dolžine vrvic  $l_1, l_2, \dots, l_n$
- začetne  $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \dots, \theta_n, \dot{\theta}_n$
- $dt$  ... korak v času
- $t_{max}$  ... časovna dolžina videa

za vsak  $t = k \cdot dt$ ,  $k = 0, 1, \dots, \frac{t_{max}}{dt}$  rešimo sistem diferencialnih enačb in dobimo matriko z elementi  $[\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \dots, \theta_n, \dot{\theta}_n]$ .

S pomočjo dobljenih vrednosti nato izračunamo koordinate vsake žogice v vsakem časovnem trenutku in jih narišemo z uporabo funkcije `narisi_sliko_2` za risanje preprostega dvojnega nihala. Podobno sva naredili tudi za trojno nihalo s funkcijo `narisi_sliko_3`.



(a) Primer slike dvojnega nihala.



(b) Primer slike trojnega nihala.

Slika 2: Primeri narisanih nihal.

Dobljene slike nato s pomočjo orodja `ffmpeg` in določenega `fps` (*frames per second oz. sličic na sekundo*) združimo s funkcijo `ustvari_video` v video datoteko.

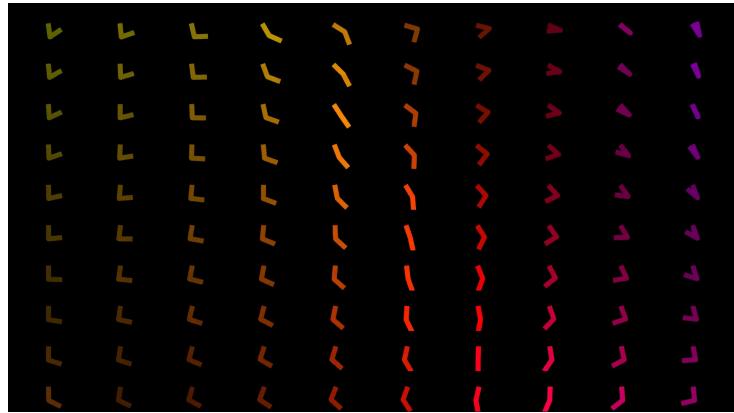
### 3 Primeri risanja nihal

Poleg osnovnih dveh nihal, ki sta prikazana na sliki 2a in 2b sva se lotili še nekaj bolj zanimivih primerov. Prav tako sva se igrali z barvami, zato se bodo morda barve na slikah med seboj malo razlikovale. Velik del videoposnetkov je dostopen na GitHub repozitoriju.

#### 3.1 Dvojna nihala v prostoru

V tem primeru sva narisali več dvojnih nihal, ki so obešena na različne višine v prostoru. Vsako izmed nihal ima svoje začetne pogoje, torej kota  $\theta_1$  in  $\theta_2$ , mase in dolžini vrvic. Vsa nihala se spustijo iz mirovanja.

Primer takšenga risanja je na sliki 3.

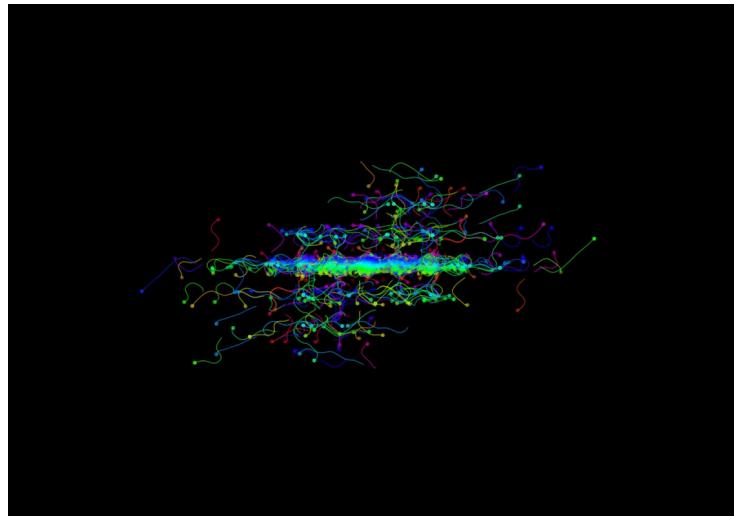


Slika 3:  $10 \times 10$  Dvojno nihalo

### 3.2 Dvojna nihala kot kvadratki

### 3.3 Dvojna nihala v koordinatnem sistemu $\theta_1$ in $\theta_2$

Dvojna nihala lahko narišemo tudi kot točke v koordinatnem sistemu, kjer je  $x$  koordinata enaka kotu drugega nihala  $\theta_2$ ,  $y$  koordinata pa kotu prvega nihala  $\theta_1$ . Vsako nihalo ima svoje začetne pogoje, torej kota  $\theta_1$  in  $\theta_2$ , mase in dolžini vrvic. Tudi tu se vsa nihala spustijo iz mirovanja. Da pa bi bila nihala bolj vidna, sva jim dodali še sledi - repe, ki za določen čas `T_rep` hrani in riše pretekle položaje nihal. Primer risanja nihal v koordinatnem sistemu je na sliki 4.



Slika 4: Primer risanja dvojnih nihal v koordinatnem sistemu z repi.

## Literatura

- [1] 2swap. *Double Pendulums are Chaoticn't*. Ogled: 5. 12. 2025. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=dtjb20hEQcU>.
- [2] Scipython. *The double pendulum*. Ogled: 24. 10. 2025. URL: <https://scipython.com/blog/the-double-pendulum/>.
- [3] Wikipedia. *HSL and HSV — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Ogled: 5. 12. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=HSL\\_and\\_HSV&oldid=1325738283](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=HSL_and_HSV&oldid=1325738283).
- [4] Wikipedia. *Lagrangian mechanics*. Ogled: 24. 10. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_mechanics).