路与回路

定义

路、回路

- 路：连接各个节点
- 回路：头尾节点相同的路
- 通路：不存在重复节点的路
- 圈：除头尾节点外不存在重复节点的回路
- 迹：不存在重复边的路

连通性

- 连通：两节点之间存在路
- 连通分支：将一个图划分为若干子图，两个节点只有属于同一个集合时连通，连通分支数记为 $W(G)$
- 点割集：如果将集合中所有点及其相连的边从图中移除，会导致图变得不连通（即图的连通分支数增加）
- 割点：单独构成点割集的点
- 点连通度：在保持图连通的前提下，至少需要移除多少个顶点（及其相连的边）才能使图不连通，记为 $k(G)$
- 边割集：如果移除该边集中的所有边后，图会变得不连通的边集
- 割边：单独构成边割集的边
- 边连通度：在保持图连通的前提下，至少需要移除多少条边才能使图不连通，记为 $\lambda(G)$

最短路

- 两节点之间的最短路记为两节点的距离（或短程线），用 $d(u, v)$ 表示
- $D = \max d(u, v)$ 称为图的直径

强弱连通（在有向图中）

单侧连通：图中存在一对节点仅单侧可达（不要求图为连通图）
强连通：图中任意两节点相互可达
弱连通：单侧连通的有向图转为无向图后是连通的
强/弱/单侧分图：具有强/弱/单侧性质的最大子图

定理

- 两节点间必然存在一条不多于 $n-1$ 条边的路
- 两节点间必然存在一条小于 n 条边的通路
- 连通图只有一个连通分支
- $k(K_p)=p-1$（完全图的点连通度为 $\text{节点数}-1$）
- $k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$
- 两节点间每一条路都经过的节点为割点
- 强连通 $\iff$ 图中存在一个回路，该回路至少包含每个节点一次
- 有向图中的每个节点只位于一个强分图中
- $(A(G))^k$ 中，a_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的（回）路的数量
- 对于有 n 个节点的连通图，$rank\,M(G)=r-1$
- 对于有 n 个节点，w 个最大连通子图的连通图，$rank\,M(G)=n-w$

欧拉图与哈密顿图

定义

欧拉图

- 欧拉路径：一条经过所有边且不重复的路
- 欧拉回路：一条经过所有边且不重复的回路
  - 有向图中为单向欧拉路径（回路）

哈密顿图

- 哈密顿路径：经过所有节点恰好一次的路径
- 哈密顿回路：经过所有节点恰好一次的回路

闭包

```
G, G' = <V, E>
节点总数 n
while G'中存在非邻接节点 and 两节点度数之和大于等于 n:
    连接这两个节点
```

$C(G) = G'$ 称为 G 的闭包

定理

欧拉图

- 对于无向图，当且仅当其连通且奇数度节点有 0 或 2 个时，有欧拉路径
- 对于无向图，当且仅当所有节点全为偶数度节点时，有欧拉回路
- 对于有向图，当且仅当其连通且{有两个节点，一个入度比出度大 1 另一个入度比出度小 1}，其余节点入度等于出度时，有欧拉路径
- 对于有向图，当且仅当其连通且所有节点入度等于出度时，有欧拉回路

哈密顿图

- 对于有哈密顿回路的图，S 为节点子集，有 $W(G-S) \leq |S|$
- 对于一个图，若其为简单图且每一对节点度数之和大于等于 $n-1$ $\rightarrow$ 该图有哈密顿路径（这不是充要条件）
- 对于一个图，若其为简单图且每一对节点度数之和大于等于 n $\rightarrow$ 该图有哈密顿回路（这不是充要条件）
- 一个简单图的闭包是哈密顿图 $\iff$ 该简单图也为哈密顿图

平面图

定义

- 平面图：边之间没有交点的图（可以通过改画图像得到）
- 面：边所包围的区域
- 边界：构成面的边所形成的回路
- 面的次数：面的边界长度
- 在 k 度节点内同构：对两个图通过多次添加或删除度数为 k 的节点，后使得两图同构

定理

- 对于有限平面图，面的次数和等于边数的两倍
- 欧拉公式：$V - E + R = 2$
- 判断非平面图的充分条件：对于一个连通的简单平面图，若 $V \geq 3 \longrightarrow E \leq 3V - 6$
- 判断平面图的充要条件：一个图是平面图 $\iff$ 该图不包含与 $K_{3,3}, K_5$ 在 2 度节点内同构的子图

对偶图与着色

定义

对偶

- 对偶图：G 和 G^* 互为对偶图，对于 G 中的每一个面（包括外面），G^* 中均有一个对应的节点在其内部，反之亦然
- 自对偶图：G 与其对偶图 G^* 同构

着色

- 最少着色数：$x(G)$
- $WelchPowell$ 着色法：

```
for node in sorted_node(按度数降序排序后的节点):
    if node未着色:
        对node及其的所有不邻接节点着相同颜色
        换一种颜色
    if 所有节点已着色:
        break
```

定理

- $x(K_n) = n$
- 对于一个至少有三个节点的连通平面图，必存在度数小于 5 的节点
- 任意平面图，最多为 5-色 (?)

树与生成树

定义

- 树：无向图
  - 无回路的连通图
  - 每个节点之间仅有一条路
  - $E = V - 1$
  - $\lambda(G) = 1$
- 生成树：一个图的子图是树，该树称为生成树
- 最小生成树：一个图的所有生成树中，边权和最小的那棵树

定理

- 连通图至少有一颗生成树
- 图中的一条回路/边割集和该图的任何一颗生成树的补至少有一条公共边
- $Kruskal$ 算法得到最小生成树：

```
V = {}, E = {}
G = <V, E>
sum = 0
for edge in sorted_edges（按边权升序排列的边）:
    if 加入该边 不会 出现环:
        将该边加入图中
    if G是生成树（边数等于n-1）:
        break
```

根树及其应用

定义

- 有向树：不考虑边的方向时是一颗树的有向图
- 根树：恰有一个节点入度为 0，其余节点入度为 1 的有向树，入度为 0 的为根，出度为 0 的为叶，出度不为 0 的为分支点或内点
- （完全）m 叉树：每一个节点的出度均（恰好等于）小于等于 m 的根树
- 内部/外部 通路长度：根到 分支节点/叶节点 的通路的长度
- 带权二叉树：有 t 个叶节点，每个叶节点带有权值 $w_1, w_1, \ldots, w_t$
- 最优带权二叉树（哈夫曼树）：
  - 对于带权为 w_i 的叶节点，其通路长度为 $L(w_i)$
  - 将 $w(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i)$ 称为该带权二叉树 T 的 权
  - 最优树为 $w(T)$ 最小的那棵树
- 前缀码：一个 01 序列集合，没有一个序列是其他序列的前缀
  - 前缀码和二叉树一一对应

定理

- 对于完全 m 叉树，树叶数为 t，分枝点数为 i，则有 $i(m-1) = t-1$
- 对于有 n 个分枝点的完全二叉树，内部通路长度总和为 I，外部通路长度总和为 E，有 $E = I + 2n$
- 对于带权 $w_1 \leq w_2 \leq \ \ldots \ \leq w_t$ 的最优树 T：
  - 带权 w_1, w_2 的叶节点 v_{w_1}, v_{w_2} 互为兄弟节点
  - v_{w_1}, v_{w_2} 的父节点的通路长度最长
  - 若将 v_{w_1}, v_{w_2} 的父节点改为带权 $w_1 + w_2$ 的叶节点，得到的新树 $T\,'$ 也是最优树