欧几里得空间

定义与基本性质

定义

设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间，
在 V 上定义了一个二元实函数，称为 **内积**，
记作 $(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ ，内积具有以下性质：

1. $(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$
2. $(k \alpha, \beta)=k(\alpha, \beta)$
3. $(\alpha+\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha, \alpha)=0$

其中 α, β, γ 是 V 中任一向量，k 是任一实数
这样的线性空间称为 **欧几里得空间**

基本性质

- 非负实数 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为向量 α 的长度，记为 $|\alpha|$
  - 把 α **单位化**

$$\frac{\alpha}{|\alpha|}$$

  - 求解向量之间的 **夹角余弦**

$$\cos \langle\alpha, b\rangle=\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

  - **柯西-布尼亚科夫斯基不等式**

$$|(\alpha, \beta)| \leq|\alpha|\ |\beta|$$

    当且仅当 α, β 线性相关时，等号成立
- 若向量内积为零，即

$$(\alpha, \beta)=0$$

则称 α, β **正交** 或 **相互垂直**，记为 $\alpha \perp \beta$

- 欧几里得空间中的 **勾股定理**

$$\alpha \perp \beta \iff |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

拓展：

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \perp \cdots \perp \alpha_n \iff$$
$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

- 对于欧几里得空间内的两个向量和一组基

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$$
$$\boldsymbol{\beta} = y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2 + \cdots + y_n\epsilon_n$$

内积 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 可以表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$$

其中 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 为两向量的坐标，
$\mathbf{A}$ 中 $a_{ij} = (\epsilon_i, \epsilon_2)$ ，称 $\mathbf{A}$ 为基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ 的 **度量矩阵**

- 不同基的度量矩阵是 **合同** 的
- 度量矩阵是 **正定** 的

标准正交基

定义

- 欧氏空间 V 中的一组向量，若他们两两正交，则称这组向量为 **正交向量组**
  - 正交向量组是线性无关的
- n 维欧式空间中，
由 n 个向量组成的正交向量组称为 **正交基**，
由单位向量组成的正交基称为 **标准正交基**
  - 对于一组标准正交基，有

$$(\epsilon_i, \epsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

由此可得一组基为标准正交基的 **充要条件** 为
它的度量矩阵为 **单位矩阵**

  - 在标准正交基下，内积可以表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \mathbf{X}^\mathrm{T}\mathbf{Y}$$

定理

- n 维欧氏空间中任何一个正交向量组都能扩充称一组正交基
- 对于 n 维欧氏空间中的任意一组基都可以找到一组标准正交基使得

$$L(\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}, \ldots, \boldsymbol{\epsilon_i}) = L(\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \ldots, \boldsymbol{\eta_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

  具体构造方法见施密特正交化求标准正交基
- 对于 n 阶实矩阵 $\mathbf{A}$
  若 $\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ 则称其为 **正交矩阵**

施密特正交化求标准正交基

将 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ **正交化**，然后**单位化**

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \epsilon_1, \\
&\xi_2 = \epsilon_2 - \frac{(\epsilon_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1, \\
&\ldots, \\
&\xi_{m+1} = \epsilon_{m+1} - \frac{(\epsilon_{m+1}, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \cdots - \frac{(\epsilon_{m+1}, \xi_m)}{(\xi_m, \xi_m)}\xi_m
\end{aligned}$$

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

得到的 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 就是 **标准正交基**

同构

定义

对于实数域 $\mathbf{R}$ 上的欧氏空间 V, V' ，若由 V 到 V' 由一个双射 σ 满足：

1. $\sigma(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\beta})$
2. $\sigma(k\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$
3. $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

则称这样的映射 σ 为 V 到 V' 的 **同构映射

- 每个 n 为欧氏空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构
- 同构关系具有自反、对称、传递性

定理

- 两个有限维的欧氏空间同构的 **充要条件** 是 他们的维数相同

正交变换

定义

对于线性变换 $\mathscr{A}$ 若它能保持向量内积不变，即对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 都有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

则称该线性变换为 **正交变换**

定理

- 以下四个命题互相等价：
    1. $\mathscr{A}$ 是 **正交变换**
    2. $\mathscr{A}$ 保持向量的 **长度不变**，即 $\boldsymbol{\alpha} \in V, |\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$
    3. $\mathscr{A}$ 对一组标准正交基做变换后得到的 **也是** 标准正交基
    4. $\mathscr{A}$ 在任意一组标准正 交基下的矩阵是 **正交矩阵**
- 由于正交变换的矩阵是正交矩阵，对于正交矩阵 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$$
$$\therefore |\mathbf{A}|^2 = 1, |\mathbf{A}| = \pm 1.$$

若行列式为 1 则称该正交变换为 **第一类的**（旋转），
反之则为 **第二类的**（镜面反射）

子空间

定义

空间的正交

设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 中的两个子空间，若 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2$ 恒有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

则称 V_1, V_2 是正交的，记为 $V_1 \perp V_2$
若 $\boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\beta} \in V_1$，恒有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}, V_2$ 是正交的，记为 $\boldsymbol{\alpha} \perp V_1$

- 若 $V_1 \perp V_2$ 则 $V_1 \cap V_2 = |\mathbf{0}|$
- 若 $\boldsymbol{\alpha} \perp V_1, \boldsymbol{\alpha} \in V_1$，则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

正交补

如果 $V_1 \perp V_2, V_1 + V_2 = V$
则称子空间 V_2 是子空间 V_1 的正交补
V_1 的正交补记为 $V_1^{\perp}$
$D(V_1) + D(V_1^{\perp}) = D(V)$

定理

- 若 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ 两两正交，则 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和
- V 的每个子空间都有唯一的正交补
  - $V_1^{\perp}$ 由所有与 V_1 正交的向量组成

实对称矩阵的标准型

定理

- $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，则其复特征值皆为实数
- 定义线性变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

显然 $\mathscr{A}$ 在标准正交基

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \epsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵就是 $\mathbf{A}$
设 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵， $\mathscr{A}$ 的定义如上，则对于 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^n$，有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}),$$

即

$$\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}).$$

将这个线性变换称为 **对称变换**

- 若 $\mathscr{A}$ 是对称变换， V_1 是 $\mathscr{A}$-子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$-子空间
- 若 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，则 $\mathbf{R}^n$ 中属于 $\mathbf{A}$ 的不同特征值的特征向量必正交
- 对于任意一个 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ ，
  都存在一个 n 阶正交矩阵 T 使得 $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 成对角形

求正交矩阵步骤

已有 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$

1. 求出 $\mathbf{A}$ 的特征值，记为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$
2. 对于每个 λ_i 解齐次线性方程组

$$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

   求出一个基础解系，该解系为 $\mathbf{A}$ 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基，
   由这组基出发，使用施密特正交化求出 V_{λ_i} 的一组标准正交基，
   记为 $\eta_{i1},\eta_{i2},\ldots,\eta_{ik}$
3. 将所有得到的向量合并，得到向量组

$$\eta_{11},\eta_{12},\ldots,\eta_{1k},\ldots,\eta_{r1},\eta_{r2},\ldots,\eta_{rk}$$

   该向量组排列出的矩阵即为要求的正交矩阵 $\mathbf{T}$

例：
已知

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

求正交矩阵 $\mathbf{T}$ 使得 $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 成对角形
解：

$$|\lambda E - A| = 0$$

解得 $\lambda = 1, -3$

带入求解线性方程组

解得

$$\lambda = 1 \text{ 时基础解系为} \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0, 0), \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 1, 0), \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 0, 0, 1). \end{cases}$$

$$\lambda = 1 \text{ 时基础解系为} (1, -1, -1, 1)$$

$$\text{正交化、单位化后，得到} \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), \\ \boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0) \\ \boldsymbol{\eta}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}), \\ \boldsymbol{\eta}_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

则

$$\mathbf{T} = (\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}, \boldsymbol{\eta_4})^T$$