数理逻辑

命题逻辑

联结词

汇总

(否定)	$\neg P$
(析取)	$P \vee Q$
(合取)	$P \wedge Q$
(蕴含)	P o Q
(双蕴含)	$P \leftrightarrow Q$
(否定双蕴含/不可兼析取)	$P \overline{ee} Q$
(否定蕴含)	$P \stackrel{c}{\to} Q$
(否定合取)	$P\uparrow Q$
(否定析取)	$P \downarrow Q$

真值表

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	P o Q	$P\stackrel{c}{ ightarrow}Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \overline{\vee} Q$	$P \uparrow Q$	$P\downarrow Q$
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F	T	F	T	T

定义联结词的优先次序为: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

等价公式

定义

两个命题公式 A,B 真值表完全相同,则称二者 **等价**,记为 $A\iff B$

常用的等价公式

德摩根律:

$$\neg (P \land Q) \iff (\neg P) \lor (\neg Q)$$
$$\neg (P \lor Q) \iff (\neg P) \land (\neg Q)$$

分配律:

$$P \lor (Q \land R) \iff (P \lor Q) \land (P \lor R)$$
$$P \land (Q \lor R) \iff (P \land Q) \lor (P \land R)$$

同一律:

$$P \wedge T \iff P$$

$$P \vee F \iff P$$

吸收律:

$$P \lor (P \land Q) \iff P$$
$$P \land (P \lor Q) \iff P$$

零律:

$$P \lor T \iff T$$

$$P \wedge F \iff F$$

否定律:

$$P \lor (\neg P) \iff T$$

$$P \wedge (\neg P) \iff F$$

幂等律:

$$P \wedge P \iff P$$

$$P \lor P \iff P$$

杂类:

$$P \land Q \Longleftrightarrow \neg P \to Q$$

$$P \to Q \Longleftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

重言式和蕴含式

定义

- 重言式:无论对分量作怎样的真值指派,真值均为 T 的命题公式
- 矛盾式 (永假式):真值均为 F 的命题公式
- 蕴含式:当且仅当 P o Q 为重言式时,称 P **蕴含** Q,记作 $P \implies Q$
 - 。 对于 $P \rightarrow Q$,

Q o P 称为其 **逆换式**,

- $\neg P \rightarrow \neg Q$ 称为其 **反换式**,
- $\neg Q \rightarrow \neg P$ 称为其 **逆反式**

定理

命题公式 A, B 等价的充要条件:

 $A \leftrightarrow B$ 为重言式

或

 $P \implies Q \boxtimes Q \implies P$

证明蕴含式

对于 $P \implies Q$, 满足以下其一:

- 1. 假定 P 真值为 T ,若由此能推出 Q 的真值为 T
- 2. 假定 Q 真值为 F, 若由此能推出 P 的真值为 F

则 $P \Longrightarrow Q$ 成立

蕴含的性质

- 对于 $P \implies Q$,若 P 为重言式,则 Q 必为重言式
- 蕴含关系式可传递的
- 若 $P \Longrightarrow Q \coprod P \Longrightarrow R \cup P \Longrightarrow (Q \land R)$
- 若 $P \Longrightarrow Q \coprod R \Longrightarrow Q \coprod (P \lor R) \Longrightarrow Q$

最小联结词组

 $\{\neg, \lor\}$ 或 $\{\neg, \land\}$ 或 $\{\uparrow\}$ 或 $\{\downarrow\}$

对偶与范式

定义

• 对偶式:

对于命题公式 A , 将其中所有的 \land 与 \lor 互换 , \uparrow 与 \downarrow 互换 , T 与 F 互换 , 得到新的命题公式 A^* 则称 A^* 与 A 互为对偶式

• 合取范式:

一个命题公式具有形式: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 时称其为 **合取范式**

析取范式:

一个命题公式具有形式: $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 时称其为 **析取范式**

• 小项:

n 个命题变元的合取式,

每个变元与其否定不能同时出现,且必须出现且仅出现一次

• 大项:

n 个命题变元的析取式,

每个变元与其否定不能同时出现, 且必须出现且仅出现一次

主析取范式:

仅由小项析取所组成的公式

• 主合取范式:

仅有大项合取所组成的公式

• 编码:

对于一个命题变元 P , P , $\neg P$ 分别记为 0,1 则对于每个 小项/大项 可以用二进制编码表示 如 $P \land \neg Q \land R$ 可以表示为 m_{010}

• 编码表示 主 析取/合取 范式:

主析取范式可以表示为 $\sum_{i_1,i_2,...,i_m}$ 主合取范式可以表示为 $\prod_{j_1,j_2,...,j_n}$ 其中的 i_k 为第 k 个小项的二进制编码的十进制数 其中的 j_k 为第 k 个大项的二进制编码的十进制数

求 合取/析取 范式步骤

- **1.** 将公式中的联结词化为 ¬, ∧, ∨
- 2. 利用 德摩根律 将 ¬ 移到各个命题变元之前
- 3. 利用 分配律、结合律 将公式归约为 合取/析取 范式

求 主合取/主析取 范式步骤

- 1. 化归为 合取/析取 范式
- 2. 除去 合取/析取 范式中所有为永 真/假 的 合取/析取 项
- 3. 合并相同的 合取/析取 项和所有相同的变元
- 4. 对 合取/析取 项补入没有出现的命题变元,然后用分配律展开公式

定理

- $\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \iff A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$
- 若 $A \iff B \cup A^* \iff B^*$
- 任意两个不同的小项的合取式永假
- 全体小项的析取式永真
- 任意两个不同的大项的析取式永真
- 全体大项的合取式永假

推理理论

定义

• 前提、有效结论:

对于命题公式 H_1,H_2,\ldots,H_n,C , 当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \implies C$, 称 C 是 **一组前提** H_1,H_2,\ldots,H_n 的 **有效结论**

P规则:

前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用

T规则:

在推导中,如果有一个或多个公式蕴含着公式 S ,则 S 可以引入推导中

真值表法

- 1. 列出 H_1, H_2, \ldots, H_n, C 的所有对应真值
- 2. 找出 H_1, H_2, \ldots, H_n 全为 T 的行,若这几行对应的 C 也有真值 T 则推理成立

或者

2. 找出 C 为 F 的行, 若这几行对应的 H_1, H_2, \ldots, H_n 至少有一个真值为 F 则推理成立

直接证法

例题: 证明 $(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to S) \implies S \lor R$

解:

$(1)~P \vee Q$	P	(P 规则,	引入前提)
$(2)\ \neg P \to Q$	T(1)E	(T 规则,	由(1)等价得到(2))
$(3)~Q\to S$	P	(P 规则,	引入前提)
$(4)\ \neg P \to S$	T(2), (3)I	(T规则,	由(2),(3)蕴含得到(4))
$(5)\ \neg S \to R$	T(4)E	(T规则,	由(4)等价得到(5))
$(6)~P \to R$	P	(P 规则,	引入前提)
$(7)\ \neg S \to R$	T(5), (6)I	(T规则,	由(5),(6)蕴含得到(7))
$(8)~S \to R$	T(7)E	(T规则,	由(7)等价得到(8),证毕)

注: 括号内仅为注释, 实际书写中无括号内的内容

间接证法

归谬法

对于要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \implies C$ 的情况,只需要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \iff F$,

其中 $\neg C$ 称为 **附加条件**

例题: 证明: $A \to B, \neg (B \lor C)$ 可逻辑推出 $\neg A$

解:

 (1) $A \rightarrow B$ P

 (2) A P(附加前提)

 (3) $\neg (B \lor C)$ P

 (4) $\neg B \land \neg C$ T(3)E

 (5) B T(1), (2)I

 (6) $\neg B$ T(4)I

 (7) $B \land \neg B(\rat{F} \Brigat{f})$ T(5), (6)I

CP 规则

对于要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \implies R \to C$ 的情况,只需要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge R \iff C$,

其中 R 称为 附加条件

例题: 证明: $A \to (B \to C)$, $\neg D \lor A$, B 重言蕴含 $D \to C$

解:

(1) DP(附加前提) $(2)\ \neg D \lor A$ P(3) AT(1), (2)I(4) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ P(5) $B \rightarrow C$ T(3), (4)I(6) BPT(5), (6)I(7) C(8) $D \rightarrow C$ CP

谓词逻辑

谓词

将 $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 中的 A 称为 n 元谓词 例如 A 表示"是大学生",a 表示"张三",则 A(a) 表示"张三是大学生",其中 A 为 一元谓词

命题函数

由一个谓词和一些客体变元组成的表达式,称为 **简单命题函数** 例如 L(x,y,z)

量词

用于划定论域的标记称作量词, $\forall x, \exists x$ 分别表示 "所有的 x"、"存在一些 x" 例如:

1. 设 M(x): x是人,H(x): x要呼吸则 $(\forall x)M(x) \to H(x)$ 表示 "所有人都是要呼吸的"

- **2.** 设 P(x): x是质数
 - 则 $(\exists x)(P(x))$ 表示 "存在一个数是质数"
- **3**. 设 M(x): x是人,R(x): x是聪明的
 - 则 $(\exists x)M(x) \land (R(x))$ 表示 "一些人是聪明的"

谓词公式与翻译

例题:数学分析中的极限定义为:仍给一个小正数 ϵ ,则存在一个正数 δ ,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $|f(x)-b|<\delta$,此时称 $\lim_{x o a}f(x)=b$

解:

设 P(x,y):x 大于 y, Q(x,y):x 小于 y则 $\lim f(x) = b$ 可以表示为:

$$(orall \epsilon)(\exists \delta)(((P(\epsilon,0) o P(\delta,0))\wedge Q(|x-a|,\delta)) o (Q(|f(x)-b|,\delta))$$

变元的约束

约束变元的换名

通过对谓词公式换名, 使得每个变元在公式中仅以一种约束形式出现

例题: 对 $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)) \land Q(x,y)$ 换名 **解:** 可换名为 $(\forall z)(P(z) \rightarrow R(z,y)) \land Q(x,y)$

自由变元的代入

例题: 对 $(\forall x)(P(y) \land R(x,y))$ 代入

解: 代入后公式为 $(\forall x)(P(z) \land R(x,z))$

若论域的元素是有限的,如论域元素为 a_1, a_2, \ldots, a_n ,则

$$(orall x)A(x) = A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n) \ (\exists x)A(x) = A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$$

谓词演算的等价式和蕴含式

量词与联结词 ¬ 的关系

$$\neg(\forall x)A(x) \iff (\exists x)\neg A(x)$$
$$\neg(\exists x)A(x) \iff (\forall x)\neg A(x)$$

有关量词的等价式

$$(\forall x)A(x) \to B \iff (\exists x)(A(x) \to B)$$

$$(\exists x)A(x) \to B \iff (\forall x)(A(x) \to B)$$

$$B \to (\forall x)A(x) \iff (\forall x)(B \to A(x))$$

$$B \to (\exists x)A(x) \iff (\exists x)(B \to A(x))$$

$$(\forall x)(A(x) \land B(x)) \iff (\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)$$

$$(\exists x)(A(x) \lor B(x)) \iff (\exists x)A(x) \lor (\exists x)B(x)$$

$$(\forall x)(A \lor B(x)) \iff A \lor (\forall x)B(x)$$

$$(\forall x)(A \lor B(x)) \iff A \lor (\forall x)B(x)$$
$$(\exists x)(A \land B(x)) \iff A \land (\exists x)B(x))$$

$$(\exists)(A(x) o B(x))\Longleftrightarrow\ (\exists)A(x) o (\forall x)B(x)$$

有关量词的蕴含式

$$(\forall x)A(x) \lor (\forall x)B(x) \Longrightarrow (\forall x)(A(x) \lor B(x))$$
$$(\exists x)(A(x) \land B(x)) \Longrightarrow (\exists x)A(x) \land (\exists x)B(x)$$
$$(\forall)(A(x) \to B(x)) \Longrightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$$
$$(\forall)(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Longrightarrow (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall x)B(x)$$
$$(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Longleftrightarrow (\forall x)(A(x) \to B(x))$$

多元谓词的等价/蕴含式

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \iff (\forall y)(\forall x)A(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)A(x,y) \iff (\exists y)(\exists x)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \implies (\exists x)(\forall y)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \implies (\forall x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \implies (\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \implies (\forall y)(\exists x)A(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)A(x,y) \implies (\forall x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)A(x,y) \implies (\forall x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \implies (\exists x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \implies (\exists x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\forall y)(\exists x)A(x,y) \implies (\exists y)(\exists x)A(x,y)$$

前東范式

定义

- 前東范式: $(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n)A$
- 前束合取范式:

$$(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n)[(A_{11}\vee A_{12}\vee\dots\vee A_{1l_1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\dots\vee A_{2l_2})\wedge\dots\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\dots\vee A_{ml_m})]$$

前束析取范式:

$$(\square v_1)(\square v_2)\dots(\square v_n)[(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\dots\wedge A_{1l_1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\dots\wedge A_{2l_2})\vee\dots\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\dots\wedge A_{ml_m})]$$

例题: 将 $D: (\forall x)[(\forall y)P(x) \lor (\forall z)q(z,y) \to \neg(\forall y)R(x,y)]$ 化为前束合取范式 解:

1. 消去多余量词

$$D \iff (orall x)[P(x) \lor (orall z)q(z,y)
ightarrow
eg(orall y)R(x,y)]$$

2. 换名

$$D \iff (orall x)[P(x) \lor (orall z)q(z,y)
ightarrow
eg(orall w)R(x,w)]$$

3. 消去条件联结词

$$D \iff (\forall x)[\neg(P(x) \lor (\forall z)q(z,y)) \lor \neg(\forall w)R(x,w)]$$

4. 将 ¬ 放入括号内

$$D \iff (\forall x)[(\neg P(x) \land (\exists z) \neg q(z,y)) \lor (\exists w) \neg R(x,w)]$$

5. 将量词化到左侧

$$D \iff (\forall x)(\exists z)(\exists w)[(\neg P(x) \land \neg q(z,y)) \lor \neg R(x,w)]$$

6. 化简得到结果

$$D \iff (\forall x)(\exists z)(\exists w)[(\neg P(x) \vee \neg R(x,w)) \wedge (\neg q(z,y) \vee \neg R(x,w))]$$

谓词演算的推理理论

全称指定规则
$$(US)$$
:
$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$$
全称推广规则 (UG) :
$$\frac{P(x)}{\therefore (\forall x)P(x)}$$
存在指定规则 (ES) :
$$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$
存在推广规则 (EG) :
$$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

例题: 证明 $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)) \land H(s) \iff M(s)$

$$egin{aligned} (1) \ (orall x)(H(x)
ightarrow M(x)) \ (2) \ H(s)
ightarrow M(s) \end{aligned}$$

$$egin{array}{ll} (2) \ H(s)
ightarrow M(s) & US(1) \ (3) \ H(s) & P \end{array}$$

(4)
$$M(s)$$
 $T(2), (3)I$

P