欧几里得空间

定义与基本性质

定义

设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间,
在 V 上定义了一个二元实函数，称为 **内积**,
记作 (α, β) ，内积具有以下性质:

1. $(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$
2. $(k \alpha, \beta)=k(\alpha, \beta)$
3. $(\alpha+\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha, \alpha)=0$

其中 α, β, γ 是 V 中任一向量，k 是任一实数
这样的线性空间称为 **欧几里得空间**

基本性质

- 非负实数 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 称为向量 α 的长度，记为 $|\alpha|$
  - 把 α **单位化**

$$\frac{\alpha}{|\alpha|}$$

  - 求解向量之间的 **夹角余弦**

$$\cos \langle\alpha, b\rangle=\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

  - **柯西-布尼亚科夫斯基不等式**

$$|(\alpha, \beta)| \leq|\alpha|\ |\beta|$$

    当且仅当 α, β 线性相关时，等号成立
- 若向量内积为零，即

$$(\alpha, \beta)=0$$

则称 α,β **正交** 或 **相互垂直**，记为 $\alpha\perp\beta$

- 欧几里得空间中的 **勾股定理**

$$\alpha\perp\beta \iff |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$$

拓展：

$$\alpha_1\perp\alpha_2\perp\cdots\perp\alpha_n \iff \\ |\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_n|^2$$

- 对于欧几里得空间内的两个向量和一组基

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\epsilon_1+x_2\epsilon_2+\cdots+x_n\epsilon_n \\ \boldsymbol{\beta}=y_1\epsilon_1+y_2\epsilon_2+\cdots+y_n\epsilon_n$$

内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 可以表示为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{X^TAY}$$

其中 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 为两向量的坐标，
$\mathbf{A}$ 中 $a_{ij}=(\epsilon_i,\epsilon_2)$ ，称 $\mathbf{A}$ 为基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$ 的 **度量矩阵**

  - 不同基的度量矩阵是 **合同** 的
  - 度量矩阵是 **正定** 的

标准正交基

定义

- 欧氏空间 V 中的一组向量，若他们两两正交，则称这组向量为 **正交向量组**
  - 正交向量组是线性无关的
- n 维欧式空间中，
由 n 个向量组成的正交向量组称为 **正交基**，
由单位向量组成的正交基称为 **标准正交基**
  - 对于一组标准正交基，有

$$(\epsilon_i,\epsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

  由此可得一组基为标准正交基的 **充要条件** 为
  它的度量矩阵为 **单位矩阵**

  - 在标准正交基下，内积可以表示为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\mathbf{X}^\mathrm{T}\mathbf{Y}$$

定理

- n 维欧氏空间中任何一个正交向量组都能扩充称一组正交基
- 对于 n 维欧氏空间中的任意一组基都可以找到一组标准正交基使得

$$L(\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}, \ldots, \boldsymbol{\epsilon_i}) = L(\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \ldots, \boldsymbol{\eta_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

具体构造方法见施密特正交化求标准正交基

施密特正交化求标准正交基

将 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ **正交化**，然后**单位化**

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \epsilon_1, \\
&\xi_2 = \epsilon_2 - \frac{(\epsilon_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1, \\
&\ldots, \\
&\xi_{m+1} = \epsilon_{m+1} - \frac{(\epsilon_{m+1}, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \cdots - \frac{(\epsilon_{m+1}, \xi_m)}{(\xi_m, \xi_m)}\xi_m
\end{aligned}$$

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

得到的 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 就是 **标准正交基**