多元函数积分

含参量积分

含参量正常积分

定义

对于定义在区域 $G=\{(x,y)|c(x)\leq y\leq d(x),a\leq x\leq b\}$ 上的二元函数，其中 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)dy,\quad x\in[a,b].$$

称为定义在 $[a,b]$ 上 **含参量 x 的正常积分**，简称 **含参量积分**

连续性

若二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $G=\{(x,y)|c(x)\leq y\leq d(x),a\leq x\leq b\}$ 上连续
其中 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上连续

可微性

若 $f(x,y),f_x(x,y)$ 在 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续，$c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f_x(x,y)dy+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x)$$

可积性

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，
则 $\varphi(x),\psi(y)$ 分别在 $[a,b],[c,d]$ 上可积
即存在连个求积顺序不同积分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy,\ \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

且在 $f(x,y)$ 连续的前提下，这两个积分相等

含参量反常积分

定义

设函数 $f(x,y)$ 在无界区域 $R=\{(x,y)|x\in I,c\le y<\infty\}$ 上
若对于每一个固定的 $x\in I$ 反常积分

$$\int_c^{\infty} f(x,y)dy$$

都收敛，则它的值是 x 在 I 上取值的函数，

$$\Phi(x)=\int_c^{\infty} f(x,y)dy,x\in I$$

称为定义在 I 上的 **含参量 x 的无穷限反常积分**，简称 **含参量反常积分**

一致收敛及其判别

定义

若含参量反常积分 $\int_c^{\infty} f(x,y)dy$ 与函数 $\Phi(x)$ 对于任给的正数 ϵ ，总存在某一实数 $N>c$ 使得当 $M>N$ 时，对于一切 $x\in I$ 都有

$$\left|\int_c^M f(x,y)dy-\Phi(x)\right|<\epsilon$$

即

$$\left|\int_M^{\infty} f(x,y)dy\right|<\epsilon$$

则称含参量反常积分在 I 上一致收敛于 $\Phi(x)$

内闭一致收敛

若对于任一 $[a,b] \subset I$，含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则称 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上 **内闭一致收敛**

一致收敛的柯西准则

含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的 **充要条件**：
对于任给的正数 ϵ，
总存在一个实数 $M > c$ 使得当 $A_1, A_2 > M$ 时，
对于一切 $x \in I$ 都有

$$\left|\int_{A_2}^{A_1} f(x,y)dy\right| < \epsilon$$

一致收敛定理 1

含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的 **充要条件**：

$$F(A) = \sup_{x\in I}\left|\int_A^\infty f(x,y)dy\right|,$$
$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = 0.$$

一致收敛定理 2

含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的 **充要条件**：
对于任一趋于 $+\infty$ 的递增数列 $\{A_n\}$ $(A_1 = c)$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy = \sum_{n=1}^\infty u_n(x)$$

在 I 上一致收敛

魏尔斯特拉斯 M 判别法

设有函数 $g(y)$ 使得

$$\left|f(x,y)\right| \le g(y), (x,y) \in I \times [c,+\infty)$$

若 $\int_c^\infty g(y)dy$ 收敛，则 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛

狄利克雷判别法

若

1. 对于一切实数 $N > c$，含参量正常积分

$$\int_c^N f(x,y)dy$$

   对参量 x 在 I 上一致有界，
   即存在正数 M，对于一切 $N > c$ 及一切 $x \in I$，都有

$$\left|\int_c^N f(x,y)dy\right| \le M$$

2. 对于每一个 $x \in I$ ，函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，
   且当 $y \to +\infty$ 时，对参量 x ，$g(x,y)$ 一致收敛于 0

则

$$\int_c^\infty f(x,y)g(x,y)dy$$

在 I 上一致收敛

阿贝尔判别法

若

1. $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛
2. 对每一个 $x \in I$ ，函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，
   且对参量 x ，$g(x,y)$ 在 I 上一致有界

则

$$\int_c^\infty f(x,y)g(x,y)dy$$

在 I 上一致收敛

含参量反常积分的性质

在一定条件下，
无穷积分运算可以与 其他正常积分、无穷积分、极限运算、求导运算交换

曲线积分

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\ \beta],$$

一型曲线积分

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

二型曲线积分

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi^{'}(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi^{'}(t)]dt$$

二重积分

直角坐标系

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

格林公式

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})d\sigma = \oint_L Pdx + Qdy$$

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx$$

曲线积分的路线无关性

对于单连通区域，若函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内连续，则一下四个条件等价：

1. $$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$
2. $$\int_L Pdx + Qdy \text{ 与路线无关，仅与 } L \text{ 的起点和终点有关}$$
3. $$\text{在 } D \text{ 内存在 } u(x,y) \text{ 使得}$$ $$du = Pdx + Qdy$$
4. $$\text{在 } D \text{ 内处处成立}$$ $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

全微分的原函数

$$
\begin{aligned}
& u(x,y) \\
&= \int_{x_0}^{x} P(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \\
&= \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt
\end{aligned}
$$

变量变换

对于 $\iint\limits_D f(x,y)dA$，遵照以下步骤进行变量替换

1. 选择变换函数
   定义新的变量 $u = g(x,y), v = h(x,y)$
   解出 $x = x(u,v), y = y(u,v)$
2. 计算变换的雅可比行列式 $|J|$

$$
J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}
$$

3. 确定新变量 (u,v) 对应的新区域 D'
4. 替换积分
   变换为 $\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\ |J|\ dudv$

极坐标变换

$$
T: \begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi
$$

$$
\begin{aligned}
& \iint\limits_D f(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_{D'} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)abrdrd\theta \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)abrdr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} abrdr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

三重积分

基本计算

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

坐标变换

雅可比行列式 $|J|$:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

柱坐标变换

$$T: \begin{cases} x = rcos\,\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = rsin\,\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

$$J(r,\theta,z) = r$$

球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = rsin\,\varphi cos\,\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = rsin\,\varphi sin\,\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = rcos\,\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

$$J(r,\theta,z) = r^2 sin\,\varphi$$

曲面积分

第一型曲面积分

一般计算

$$\text{对于曲面 } S: z = z(x,y),\ (x,y) \in D,$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

参量形式曲面

$$S:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}\quad (u,v)\in D,$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\\ G=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\\ F=x_v^2+y_v^2+z_v^2,\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

$$\text{要求}\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\ \text{之中至少有一个不等于零}$$

第二型曲面积分

一般计算

$$\text{对于曲面 } S:z=z(x,y),\ (x,y)\in D,$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))dxdy$$

参量形式曲面

$$S:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}\quad (u,v)\in D,$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}\iint\limits_S Pdydz=\pm\iint\limits_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv,\\ \iint\limits_S Qdzdx=\pm\iint\limits_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\dfrac{\partial(z,x}{\partial(u,v)}dudv,\\ \iint\limits_S Rdxdy=\pm\iint\limits_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.\end{cases}$$

$$\text{正负号由法向量}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)\ \text{对应 } S \text{ 内外侧决定}$$

$$\text{要求}\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\ \text{之中至少有一个不等于零}$$

高斯公式

空间区域 V 由双侧封闭曲面 S 围成， P,Q,R 在 V上连续

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

*常用于化简封闭曲面二重积分

$$\downarrow$$

令高斯公式中的 $P=x,Q=y,R=z$

得到封闭空间区域体积公式：

$$\Delta V=\frac{1}{3}\oiint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$$

斯托克斯公式

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

S 的侧以及 L 的方向由右手定则决定