二次型

矩阵表示

二次型可以写成
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \dots, n)$$

线性替换可以写成
$\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$
其中 $\mathbf{C}$ 为替换中的系数矩阵

- 对于矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 若存在 $\mathbf{C}$ 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}$
  则称矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 **合同** 的
  由矩阵 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$ 的变换称为 **合同变换**
- 合同关系满足 **自反性、对称性、传递性**

标准形

配方法化标准形

1. 若有平方项，则从 x_1 到 x_n，依次将含有该变量的项合并，然后配方
2. 若没有平方项，则先作平方差替换，构造出平方项

例：

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

解：

没有平方项，则先作平方差替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$ ，得到

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, x_3) \\
=& 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \text{（此时有平方项，对 } 2y_1^2 - 4y_1y_3 \text{ 配方）} \\
=& 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 \text{（此时有平方项，对 } -2y_2^2 + 8y_2y_3 \text{ 配方）} \\
=& 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3) - 2y_3^2 \\
=& 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2
\end{aligned}$$

接下来令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

即作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

得到

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

总线性替换为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

合同变换法化标准形

1. 在二次型的矩阵下放置一个单位矩阵，
2. 将上方的二次型的矩阵化为单位矩阵，对整个矩阵同时进行相同的行列变换

解:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+c_1]{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2-c_1/2]{r_2-r_1/2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-4\times c_1]{r_3-4\times r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以得到的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - \frac{1}{2}z^2 + 6z_3^2$$

线性替换为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正交变换法化标准形

详见“欧几里得空间”一章中“实对称矩阵的标准形”

唯一性

- 对于复二次型或者说复对称矩阵，都可以化为规范形，
  即复对称矩阵必合同于一个对角阵，其对角元素部分为 1，部分为 0
  - 两个复对称矩阵合同的 **充要条件** 是二者的秩相等
- 对于实二次型或者说实对称矩阵，都可以化为规范性
  即实对称矩阵必合同于一个对角阵，其对角元素部分为 1，部分为 -1
  - 实二次型的规范性中，
    正平方项的个数称为 **正惯性指数**，
    负平方项的个数称为 **负惯性指数**，
    它们的差称为 **符号差**
- 复对称矩阵的规范形中，
  矩阵对角形上的 1 的个数是唯一确定的，个数等于原复对称矩阵的秩
- 实对称矩阵的规范形中，
  矩阵的正负惯性指数是唯一确定的，二者的和等于原实对称矩阵的秩

正定二次型

定义

- 对于实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$，
  如果任意一组不全为 0 的实数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 带入二次型，
  都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$ ，
  则该二次型称为 **正定二次型**，称它对应的实对称矩阵是 **正定矩阵**
  - 非退化线性替换保持正定性不变
- $$H_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
  该子式称为 **顺序主子式**
- 对于实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$，
  如果任意一组不全为 0 的实数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 带入二次型，
  都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) < 0$ ，则该二次型称为 **负定的**
  都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$ ，则该二次型称为 **半正定的**
  都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$ ，则该二次型称为 **半负定的**
  如果它既不半正定也不半负定，则称为 **不定的**

定理

- n 元的实二次型是正定的与下面四个条件均等价（即 **充要条件**）：
  1. 它的正惯性指数等于 n
  2. 它的矩阵合同于单位矩阵
  3. 它的矩阵的顺序主子式全大于零
  4. $-f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是负定的

  推论： 正定矩阵的行列式大于零
- 对于实二次型，以下条件等价：
  1. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的
  2. 它的正惯性指数与秩相等
  3. 存在实**可逆**矩阵（即非退化的） $\mathbf{C}$ 使得 $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}$ 为对角形，对角线上元素均大于等于零
  4. 有实矩阵 $\mathbf{C}$ 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$
  5. 其矩阵的所有 **主子式** 均大于等于零（**不是顺序主子式！**）