数理逻辑

命题逻辑

联结词

汇总

（否定）	$\neg P$
（析取）	$P \vee Q$
（合取）	$P \wedge Q$
（蕴含）	$P \to Q$
（双蕴含）	$P \leftrightarrow Q$
（否定双蕴含/不可兼析取）	$P \overline{\vee} Q$
（否定蕴含）	$P \xrightarrow{c} Q$
（否定合取）	$P \uparrow Q$
（否定析取）	$P \downarrow Q$

真值表

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \xrightarrow{c} Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \overline{\vee} Q$	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F	T	F	T	T

> *定义联结词的优先次序为：* $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$

等价公式

定义

两个命题公式 A, B 真值表完全相同，则称二者 **等价**，记为 $A \iff B$

常用的等价公式

德摩根律：

$$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$$
$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

分配律：

$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

同一律：

$$P \wedge T \iff P$$
$$P \vee F \iff P$$

吸收律：

$$P \vee (P \wedge Q) \iff P$$
$$P \wedge (P \vee Q) \iff P$$

零律：

$$P \vee T \iff T$$
$$P \wedge F \iff F$$

否定律：

$$P \vee (\neg P) \iff T$$
$$P \wedge (\neg P) \iff F$$

幂等律：

$$P \wedge P \iff P$$
$$P \vee P \iff P$$

杂类：

$$P \wedge Q \iff \neg P \to Q$$
$$P \to Q \iff \neg Q \to \neg P$$

重言式和蕴含式

定义

- 重言式：无论对分量作怎样的真值指派，真值均为 T 的命题公式
- 矛盾式（永假式）：......真值均为 F 的命题公式
- 蕴含式：当且仅当 $P \to Q$ 为重言式时，称 P **蕴含** Q，记作 $P \implies Q$
  - 对于 $P \to Q$，
    $Q \to P$ 称为其 **逆换式**,
    $\neg P \to \neg Q$ 称为其 **反换式**,
    $\neg Q \to \neg P$ 称为其 **逆反式**

定理

命题公式 A, B **等价的充要条件**:
$A \leftrightarrow B$ 为重言式
或
$P \implies Q$ 且 $Q \implies P$

证明蕴含式

对于 $P \implies Q$，满足以下其一:

1. 假定 P 真值为 T，若由此能推出 Q 的真值为 T
2. 假定 Q 真值为 F，若由此能推出 P 的真值为 F

则 $P \implies Q$ 成立

蕴含的性质

- 对于 $P \implies Q$，若 P 为重言式，则 Q 必为重言式
- 蕴含关系式可传递的
- 若 $P \implies Q$ 且 $P \implies R$ 则 $P \implies (Q \wedge R)$
- 若 $P \implies Q$ 且 $R \implies Q$ 则 $(P \vee R) \implies Q$

最小联结词组

$\{\neg, \vee\}$ 或 $\{\neg, \wedge\}$ 或 $\{\uparrow\}$ 或 $\{\downarrow\}$

对偶与范式

定义

- **对偶式**：
  对于命题公式 A，
  将其中所有的 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，$\uparrow$ 与 $\downarrow$ 互换，T 与 F 互换，
  得到新的命题公式 A^*
  则称 A^* 与 A 互为对偶式
- **合取范式**：
  一个命题公式具有形式：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 时称其为 **合取范式**
- **析取范式**：
  一个命题公式具有形式：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 时称其为 **析取范式**
- **小项**：
  n 个命题变元的合取式，
  每个变元与其否定不能同时出现，且必须出现且仅出现一次
- **大项**：
  n 个命题变元的析取式，
  每个变元与其否定不能同时出现，且必须出现且仅出现一次
- **主析取范式**：
  仅由小项析取所组成的公式
- **主合取范式**：
  仅有大项合取所组成的公式
- **编码**：
  对于一个命题变元 P， $P, \neg P$ 分别记为 $0, 1$
  则对于每个 小项/大项 可以用二进制编码表示
  如 $P \wedge \neg Q \wedge R$ 可以表示为 m_{010}
- **编码表示 主 析取/合取 范式**：
  主析取范式可以表示为 $\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$
  主合取范式可以表示为 $\prod_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$
  其中的 i_k 为第 k 个小项的二进制编码的十进制数
  其中的 j_k 为第 k 个大项的二进制编码的十进制数

求 合取/析取 范式步骤

1. 将公式中的联结词化为 $\neg, \wedge, \vee$
2. 利用 **德摩根律** 将 $\neg$ 移到各个命题变元之前
3. 利用 **分配律、结合律** 将公式归约为 合取/析取 范式

求 主合取/主析取 范式步骤

1. 化归为 合取/析取 范式
2. 除去 合取/析取 范式中所有为永 真/假 的 合取/析取 项
3. 合并相同的 合取/析取 项和所有相同的变元
4. 对 合取/析取 项补入没有出现的命题变元，然后用分配律展开公式

定理

- $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \iff A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
- 若 $A \iff B$ 则 $A^* \iff B^*$
- 任意两个不同的小项的合取式永假
- 全体小项的析取式永真
- 任意两个不同的大项的析取式永真
- 全体大项的合取式永假

推理理论

定义

- **前提、有效结论：**
  对于命题公式 $H_1, H_2, \ldots, H_n, C$，
  当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \implies C$，
  称 C 是 **一组前提** $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的 **有效结论**
- **P 规则：**
  前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用
- **T 规则：**
  在推导中，如果有一个或多个公式蕴含着公式 S，则 S 可以引入推导中

真值表法

1. 列出 $H_1, H_2, \ldots, H_n, C$ 的所有对应真值
2. 找出 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 全为 T 的行，若这几行对应的 C 也有真值 T 则推理成立

或者

2. 找出 C 为 F 的行，
   若这几行对应的 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 至少有一个真值为 F 则推理成立

直接证法

例题： 证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \implies S \vee R$
解：

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ P \vee Q & P & （P\text{规则，引入前提}） \\
(2)\ \neg P \to Q & T(1)E & （T\text{规则，由}(1)\text{等价得到}(2)） \\
(3)\ Q \to S & P & （P\text{规则，引入前提}） \\
(4)\ \neg P \to S & T(2),(3)I & （T\text{规则，由}(2),(3)\text{蕴含得到}(4)） \\
(5)\ \neg S \to R & T(4)E & （T\text{规则，由}(4)\text{等价得到}(5)） \\
(6)\ P \to R & P & （P\text{规则，引入前提}） \\
(7)\ \neg S \to R & T(5),(6)I & （T\text{规则，由}(5),(6)\text{蕴含得到}(7)） \\
(8)\ S \to R & T(7)E & （T\text{规则，由}(7)\text{等价得到}(8)\text{，证毕}）
\end{array}
$$

注：括号内仅为注释，实际书写中无括号内的内容

间接证法

归谬法

对于要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \implies C$ 的情况，
只需要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \iff F$，
其中 $\neg C$ 称为 **附加条件**
例题： 证明：$A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$
解：

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ A \to B & P \\
(2)\ A & P(\text{附加前提}) \\
(3)\ \neg(B \vee C) & P \\
(4)\ \neg B \wedge \neg C & T(3)E \\
(5)\ B & T(1),(2)I \\
(6)\ \neg B & T(4)I \\
(7)\ B \wedge \neg B(\text{矛盾}) & T(5),(6)I
\end{array}
$$

CP 规则

对于要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \implies R \to C$ 的情况，
只需要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge R \iff C$，
其中 R 称为 **附加条件**
例题： 证明：$A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$
解：

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ D & P(\text{附加前提}) \\
(2)\ \neg D \vee A & P \\
(3)\ A & T(1),(2)I \\
(4)\ A \to (B \to C) & P \\
(5)\ B \to C & T(3),(4)I \\
(6)\ B & P \\
(7)\ C & T(5),(6)I \\
(8)\ D \to C & CP
\end{array}
$$

谓词逻辑

谓词

将 $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 中的 A 称为 n **元谓词**
例如 A 表示“是大学生”，a 表示“张三”，
则 $A(a)$ 表示“张三是大学生”，其中 A 为 **一元谓词**

命题函数

由一个谓词和一些客体变元组成的表达式，称为 **简单命题函数**
例如 $L(x, y, z)$

量词

用于划定论域的标记称作量词，
$\forall x, \exists x$ 分别表示 “所有的 x”、“存在一些 x”
例如：

1. 设 $M(x): x\text{是人}，H(x): x\text{要呼吸}$
   则 $(\forall x)M(x) \to H(x)$ 表示 “所有人都是要呼吸的”

2. 设 $P(x)$: x是质数
   则 $(\exists x)(P(x))$ 表示“存在一个数是质数”
3. 设 $M(x)$: x是人，$R(x)$: x是聪明的
   则 $(\exists x)M(x) \wedge (R(x))$ 表示“一些人是聪明的”

谓词公式与翻译

例题：数学分析中的极限定义为：仍给一个小正数 ϵ，则存在一个正数 δ，使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $|f(x)-b| < \delta$，此时称 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

解：

设 $P(x,y)$: x 大于 y， $Q(x,y)$: x 小于 y

则 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ 可以表示为：

$$(\forall\epsilon)(\exists\delta)(((P(\epsilon,0) \to P(\delta,0)) \wedge Q(|x-a|,\delta)) \to (Q(|f(x)-b|,\delta))$$

变元的约束

约束变元的换名

通过对谓词公式换名，使得每个变元在公式中仅以一种约束形式出现

例题：对 $(\forall x)(P(x) \to R(x,y)) \wedge Q(x,y)$ 换名

解：可换名为 $(\forall z)(P(z) \to R(z,y)) \wedge Q(x,y)$

自由变元的代入

例题：对 $(\forall x)(P(y) \wedge R(x,y))$ 代入

解：代入后公式为 $(\forall x)(P(z) \wedge R(x,z))$

若论域的元素是有限的，如论域元素为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，则

$$(\forall x)A(x) = A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$$
$$(\exists x)A(x) = A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$$

谓词演算的等价式和蕴含式

量词与联结词 $\neg$ 的关系

$$\neg(\forall x)A(x) \iff (\exists x)\neg A(x)$$
$$\neg(\exists x)A(x) \iff (\forall x)\neg A(x)$$

有关量词的等价式

$$(\forall x)A(x) \to B \iff (\exists x)(A(x) \to B)$$
$$(\exists x)A(x) \to B \iff (\forall x)(A(x) \to B)$$

$$B \to (\forall x)A(x) \iff (\forall x)(B \to A(x))$$
$$B \to (\exists x)A(x) \iff (\exists x)(B \to A(x))$$

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \iff (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$$
$$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \iff (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$$

$$(\forall x)(A \vee B(x)) \iff A \vee (\forall x)B(x)$$
$$(\exists x)(A \wedge B(x)) \iff A \wedge (\exists x)B(x))$$

$$(\exists)(A(x) \to B(x)) \iff (\exists)A(x) \to (\forall x)B(x)$$

有关量词的蕴含式

$$
\begin{aligned}
(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) &\implies (\forall x)(A(x) \vee B(x)) \\
(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) &\implies (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\forall)(A(x) \to B(x)) &\implies (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x) \\
(\forall)(A(x) \leftrightarrow B(x)) &\implies (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall x)B(x)
\end{aligned}
$$

$$
(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \iff (\forall x)(A(x) \to B(x))
$$

多元谓词的 等价/蕴含 式

$$
\begin{aligned}
(\forall x)(\forall y)A(x,y) &\iff (\forall y)(\forall x)A(x,y) \\
(\exists x)(\exists y)A(x,y) &\iff (\exists y)(\exists x)A(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\forall x)(\forall y)A(x,y) &\implies (\exists x)(\forall y)A(x,y) \\
(\forall x)(\forall y)A(x,y) &\implies (\forall x)(\exists y)A(x,y) \\
(\forall x)(\forall y)A(x,y) &\implies (\exists y)(\forall x)A(x,y) \\
(\forall x)(\forall y)A(x,y) &\implies (\forall y)(\exists x)A(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\exists y)(\forall x)A(x,y) &\implies (\forall x)(\exists y)A(x,y) \\
(\exists y)(\forall x)A(x,y) &\implies (\forall x)(\exists y)A(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\forall x)(\exists y)A(x,y) &\implies (\exists x)(\exists y)A(x,y) \\
(\forall y)(\exists x)A(x,y) &\implies (\exists y)(\exists x)A(x,y)
\end{aligned}
$$

前束范式

定义

- **前束范式：** $(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n)A$
- **前束合取范式：**
  $(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n)[(A_{11} \vee A_{12} \vee \dots \vee A_{1l_1}) \wedge (A_{21} \vee A_{22} \vee \dots \vee A_{2l_2}) \wedge \dots \wedge (A_{m1} \vee A_{m2} \vee \dots \vee A_{ml_m})]$
- **前束析取范式：**
  $(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n)[(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \dots \wedge A_{1l_1}) \vee (A_{21} \wedge A_{22} \wedge \dots \wedge A_{2l_2}) \vee \dots \vee (A_{m1} \wedge A_{m2} \wedge \dots \wedge A_{ml_m})]$

例题： 将 $D : (\forall x)[(\forall y)P(x) \vee (\forall z)q(z,y) \to \neg(\forall y)R(x,y)]$ 化为前束合取范式

解：

1. 消去多余量词
   $D \iff (\forall x)[P(x) \vee (\forall z)q(z,y) \to \neg(\forall y)R(x,y)]$
2. 换名
   $D \iff (\forall x)[P(x) \vee (\forall z)q(z,y) \to \neg(\forall w)R(x,w)]$
3. 消去条件联结词
   $D \iff (\forall x)[\neg(P(x) \vee (\forall z)q(z,y)) \vee \neg(\forall w)R(x,w)]$
4. 将 $\neg$ 放入括号内
   $D \iff (\forall x)[(\neg P(x) \wedge (\exists z)\neg q(z,y)) \vee (\exists w)\neg R(x,w)]$
5. 将量词化到左侧
   $D \iff (\forall x)(\exists z)(\exists w)[(\neg P(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg R(x,w)]$
6. 化简得到结果
   $D \iff (\forall x)(\exists z)(\exists w)[(\neg P(x) \vee \neg R(x,w)) \wedge (\neg q(z,y) \vee \neg R(x,w))]$

谓词演算的推理理论

全称指定规则(US)：

$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

全称推广规则(UG)：

$$\frac{P(x)}{\therefore (\forall x)P(x)}$$

存在指定规则(ES)：

$$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

存在推广规则(EG)：

$$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

例题： 证明 $(\forall x)(H(x) \to M(x)) \land H(s) \iff M(s)$

解：

$$\begin{array}{ll} (1)\ (\forall x)(H(x) \to M(x)) & P \\ (2)\ H(s) \to M(s) & US(1) \\ (3)\ H(s) & P \\ (4)\ M(s) & T(2),(3)I \end{array}$$