

多元函数微分

二元函数的极限

定义

- 重极限:

自变量 x, y 同时以任何方式趋近于 x_0, y_0 , 表示为

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

- 累次极限:

自变量 x, y 依一定的先后顺序相继趋近于 x_0, y_0 ,
以先对 $x(\rightarrow x_0)$ 后对 $y(\rightarrow y_0)$ 的累次极限为例

$$K = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

定理

- 若两种累次极限和重极限均存在, 则三者相等
- 若两种累次极限存在但是不相等, 则重极限必不存在

二元函数的连续性

- 连续与间断点

f 关于 D 在 P_0 连续 $\iff \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$

- 若 P_0 是 D 的聚点, 而上式不成立, 则 P_0 称为 **间断点**
- 若左边的极限存在而不等于 $f(P_0)$ 则称为 **可去间断点**

- 全增量与偏增量

对于 $P_0(x_0, y_0), P(x, y) \in D, \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$,

称 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 为 f 在 P_0 的 **全增量**

- f 关于 D 在 P_0 连续 $\iff \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta z = 0$

- 在全增量中取 $\Delta x = 0$ 或 $\Delta y = 0$, 相应的函数增量称为 **偏增量**
- 全增量极限为零 则 偏增量极限也为零 (反过来则不一定)

- 有界闭域上连续函数的性质

- 有界性与最大最小值定理

若 f 在有界闭域上连续, 则在该区域内有界且能取得最大最小值

- 一致连续性定理

若 f 在有界闭域上连续, 则 f 在该区域上 **一致连续**, 既

对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta(\epsilon)$, 使得

对一切点 P, Q , 只要 $\rho(P, Q) < \delta$ 就有 $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$

- 介值性定理

若 f 在有界闭域上连续, P_1, P_2 为 D 中任意两点, 且 $f(P_1) < f(P_2)$

则对任何满足 $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ 的实数 μ

必存在点 $P_0 \in D$, 使得 $f(P_0) = \mu$

多元函数微分学

全微分

若 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的全增量 Δz 可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\end{aligned}$$

其中 A, B 是仅与 P_0 有关的常数, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$o(\rho)$ 是较 ρ 高阶的无穷小量,

则称 f 在 P_0 **可微**,

称线性函数 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 f 在点 P_0 的 **全微分**, 记作

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

- 当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 足够小时, 全微分可以作为全增量的近似值, 既

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

可微性条件

- **可微的必要条件:**

若 f 在区域 D 上每一点都可微, 则 f 在 D 上的全微分为

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

- **可微的充分条件:**

若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数在点 (x_0, y_0) 的某邻域内存在,

且 f_x, f_y 在点 (x_0, y_0) 连续,

则函数 f 在点 (x_0, y_0) 可微

- **注:** 由于这是**充分条件**, 所以**不能**通过偏导数的不连续推出函数的不可微
 - 若函数在某点处的偏导数均连续, 则称该函数在这点上 **连续可微**

- **中值公式:**

若函数 f 在点 (x_0, y_0) 的某邻域存在偏导数, 对于该邻域内的点 (x, y) 存在 $\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0), \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0), 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

复合函数的全微分

若以 x, y 为自变量的函数 $z = f(x, y)$ 可微, 则其全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

用例子来说明 利用复合函数全微分求偏导数 的方法

例: 设 $z = e^{xy} \sin(x + y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

解:

令 $z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y$, 得到

$$dz = z_u du + z_v dv = e^u \sin v du + e^u \cos v dv$$

$$du = ydx + xdy$$

$$dv = dx + dy$$

$$\begin{aligned} \therefore dz &= e^u \sin v (ydx + xdy) + e^u \cos v (dx + dy) \\ &= e^{xy} [y \sin(x + y) + \cos(x + y)] dx + e^{xy} [x \sin(x + y) + \cos(x + y)] dy \end{aligned}$$

$$\therefore z_x = e^{xy} [y \sin(x + y) + \cos(x + y)]$$

$$z_y = e^{xy} [x \sin(x + y) + \cos(x + y)]$$

偏导数

设 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 若 $(x_0, y_0) \in D$ 且 $f(x, y)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 则当

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在时, 称中国极限为 f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的 **偏导数**, 记作

$$f_x(x_0, y_0) \text{ 或 } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

若 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 在每一点上都存在对 x 或对 y 的偏导数, 则可得到 $z = f(x, y)$ 对 x 或对 y 的偏导函数 (简称偏导数), 记作

$$f_x(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}$$

如何求偏导数

1. 先将其他自变量看作常数
2. 对当前自变量作一元函数求导

复合函数求导（链式法则）

若函数 $x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$ 在点 $(s, t) \in D$ 可微,
且 $z = f(x, y)$ 在点 $(x, y) = (\varphi(s, t), \psi(s, t))$ 可微,
则复合函数 $z = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ 在点 (s, t) 可微, 其偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{(s,t)} &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{(s,t)} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{(s,t)} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{(s,t)} &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(s,t)} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(s,t)}\end{aligned}$$

一般的, 对于 $f(u_1, u_2, \dots, u_m), u_k = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 复合函数的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

方向导数

定义

设三元函数 f 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域 $U(P_0) \subset \mathbf{R}^3$ 有定义,
 l 为从点 P_0 出发的射线,
 $P(x, y, z)$ 为在 l 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点,
以 ρ 表示 P, P_0 之间的距离, 若极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在, 则称此极限为 f 在点 P_0 沿方向 l 的 **方向导数**, 记作

$$f_t(P_0) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{P_0}$$

计算公式

$$\begin{aligned}f_t(P_0) &= f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + f_z(P_0) \cos \gamma \\ \cos \theta_i &= \frac{l_i}{|l|}\end{aligned}$$

其中 α, β, γ 为方向 l 的方向余弦

梯度

定义

若多元函数在某点存在对所有自变量的偏导数，
则称向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的 **梯度**，记作

$$\mathbf{grad} f = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$$
$$|\mathbf{grad} f| = \sqrt{f_x^2(P_0) + f_y^2(P_0) + f_z^2(P_0)}$$

- 若记 l 方向上的单位向量为

$$l_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

则方向导数公式也可以写成

$$f_l(P_0) = \mathbf{grad} f(P_0) \cdot l_0 = |\mathbf{grad} f(P_0)| \cos \theta$$

θ 指梯度向量与 l_0 的夹角

高阶偏导数

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

定理

- 若 $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

复合函数的高阶偏导数

例： 设 $z = f(x, \frac{x}{y})$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解：

令 $z = f(u, v), u = x, v = \frac{x}{y}$ ，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\
&= -\frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}$$

中值定理

设二元函数 f 在凸开域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上可微,
 则对任意两点 $P(a, b), Q(a+h, b+k) \in D$ 存在 $0 < \theta < 1$ 使得

$$\begin{aligned}
&f(a+h, b+k) - f(a, b) \\
&= hf_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf_y(a+\theta h, b+\theta k)
\end{aligned}$$

注:

此处的公式与二元函数可微性条件中的中值公式的区别在于,
 此处的公式的中值点在两点连线上, 且只有一个 θ

- **推论:** 若函数 f 在区域 D 上存在偏导数, 且

$$f_x = f_y \equiv 0$$

则 f 在区域 D 上为常量函数

泰勒公式

若函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有直到 $n+1$ 阶的**连续偏导数**,
 则对 $U(P_0)$ 上任一点 (x_0+h, y_0+k) , 存在相应的 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned}
& f(x_0 + h, y_0 + k) \\
&= f(x_0, y_0) + \\
& \quad \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \\
& \quad \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \\
& \quad \dots + \\
& \quad \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \\
& \quad \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) \\
&= \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^{n-i}} h^i k^{n-i} f(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

极值问题

- **极值的必要条件:**

若函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 存在偏导数, 且在 P_0 取得极值, 则

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

且称该点为 **极值点**

- 若满足上式而取不到极值则称为 **稳定点**

- **极值的充分条件:**

设二元函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数, 且 P_0 是稳定点, 则

当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是正定矩阵, f 在点 P_0 取得 **极小值**

当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是负定矩阵, f 在点 P_0 取得 **极大值**

当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是不定矩阵, f 在点 P_0 **不取极值**

- **黑塞矩阵:**

$$\mathbf{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0}$$

- **极值的充分条件的实用写法:**

1. 当 $f_{xx}(P_0) > 0, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时, 取极小值
2. 当 $f_{xx}(P_0) < 0, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时, 取极大值
3. 当 $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) < 0$ 时, 不取极值
4. 当 $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) = 0$ 时, 不确定

隐函数定理
