多元函数微分

二元函数的极限

定义

- **重极限**:
  自变量 x, y **同时** 以任何方式趋近于 x_0, y_0，表示为

$$L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

- **累次极限**:
  自变量 x, y **依一定的先后顺序** 相继趋近于 x_0, y_0，
  以先对 $x(\to x_0)$ 后对 $y(\to y_0)$ 的累次极限为例

$$K=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

定理

- 若两种累次极限和重极限均存在，则三者相等
- 若两种累次极限存在但是不相等，则重极限必不存在

二元函数的连续性

- **连续与间断点**
  f 关于 D 在 P_0 连续 $\iff \lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$
  - 若 P_0 是 D 的聚点，而上式不成立，则 P_0 称为 **间断点**
  - 若左边的极限存在而不等于 $f(P_0)$ 则称为 **可去间断点**
- **全增量与偏增量**
  对于 $P_0(x_0,y_0), P(x,y)\in D, \Delta x=x-x_0, \Delta y=y-y_0$，
  称 $\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 f 在 P_0 的 **全增量**
  - f 关于 D 在 P_0 连续 $\iff \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z=0$
  - 在全增量中取 $\Delta x=0$ 或 $\Delta y=0$，相应的函数增量称为 **偏增量**
  - 全增量极限为零 则 偏增量极限也为零（反过来则不一定）

- **有界闭域上连续函数的性质**
  - **有界性与最大最小值定理**
    若 f 在有界闭域上连续，则在该区域内有界 且 能取得最大最小值
  - **一致连续性定理**
    若 f 在有界闭域上连续，则 f 在该区域上 **一致连续**，既
    对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta(\epsilon)$，使得
    对一切点 P, Q，只要 $\rho(P, Q) < \delta$ 就有 $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$
  - **介值性定理**
    若 f 在有界闭域上连续，P_1, P_2 为 D 中任意两点，且 $f(P_1) < f(P_2)$
    则对任何满足 $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ 的 实数 μ
    必存在点 $P_0 \in D$，使得 $f(P_0) = \mu$

多元函数微分学

全微分

若 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的全增量 Δz 可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\end{aligned}$$

其中 A, B 是仅与 P_0 有关的常数，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$，
$o(\rho)$ 是较 ρ 高阶的无穷小量，
则称 f 在 P_0 **可微**，
称线性函数 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 f 在点 P_0 的 **全微分**，记作

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

- 当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 足够小时，全微分可以作为全增量的近似值，既

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

可微性条件

- **可微的必要条件：**
  若 f 在区域 D 上每一点都可微，则 f 在 D 上的全微分为

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

- **可微的充分条件：**
  若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数在点 (x_0, y_0) 的某邻域内存在，
  且 f_x，f_y 在点 (x_0, y_0) 连续，
  则函数 f 在点 (x_0, y_0) 可微
  - **注：** 由于这是**充分条件**，所以**不能**通过偏导数的不连续推出函数的不可微
  - 若函数在某点处的偏导数均连续，则称该函数在这点上 **连续可微**

- **中值公式:**
  若函数 f 在点 (x_0, y_0) 的某邻域存在偏导数，对于该邻域内的点 (x, y)
  存在 $\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0), \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0), 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 使得

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(\xi, y)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

复合函数的全微分

若以 x, y 为自变量的函数 $z = f(x, y)$ 可微，则其全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

用例子来说明 利用复合函数全微分求偏导数 的方法
例: 设 $z = e^{xy}\sin(x+y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
解:

$$\text{令} z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y\text{，得到}$$

$$\begin{aligned} dz &= z_u du + z_v dv = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \\ du &= y dx + x dy \\ dv &= dx + dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ dz = &e^u \sin v(ydx + xdy) + \\ &e^u \cos v(dx + dy) \\ = &e^{xy}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)]dx + \\ &e^{xy}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)]dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ z_x &= e^{xy}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)] \\ z_y &= e^{xy}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)] \end{aligned}$$

偏导数

设 $z = f(x,y), (x,y) \in D$ 若 $(x_0, y_0) \in D$ 且 $f(x, y_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则当

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在时，称中国极限为 f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的 **偏导数**，记作

$$f_x(x_0, y_0) \text{ 或 } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

若 $z = f(x,y), (x,y) \in D$ 在每一点上都存在对 x 或对 y 的偏导数，
则可得到 $z = f(x,y)$ 对 x 或对 y 的偏导函数（简称偏导数），记作

$$f_x(x,y) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}$$

如何求偏导数

1. 先将其他自变量看作常数
2. 对当前自变量作一元函数求导

复合函数求导（链式法则）

若函数 $x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$ 在点 $(s,t)\in D$ 可微，
且 $z=f(x,y)$ 在 点 $(x,y)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 可微，
则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 在点 (s,t) 可微，其偏导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)}$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}$$

一般的，对于 $f(u_1,u_2,\ldots,u_m), u_k=g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 复合函数的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i},\ (i=1,2,\ldots,n)$$

方向导数

定义

设三元函数 f 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset\mathbf{R}^3$ 有定义，
l 为从点 P_0 出发的射线，
$P(x,y,z)$ 为在 l 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点，
以 ρ 表示 P,P_0 之间的距离，若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在，则称此极限为 f 在点 P_0 沿方向 l 的 **方向导数**，记作

$$f_t(P_0) \text{ 或 } \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$$

计算公式

$$f_t(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$$
$$\cos\theta_i=\frac{l_i}{|l|}$$

其中 α,β,γ 为方向 l 的方向余弦

梯度

定义

若多元函数在某点存在对所有自变量的偏导数，
则称向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的 **梯度**，记作

$$
\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \\
|\mathbf{grad} f| &= \sqrt{f_x(P_0^2 + f_y(P_0^2 + f_z(P_0^2)}
\end{aligned}
$$

- 若记 l 方向上的单位向量为

  $$l_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

  则方向导数公式也可以写成

  $$f_l(P_0) = \mathbf{grad} f(P_0) \cdot l_0 = |\mathbf{grad} f(P_0)| \cos\theta$$

  θ 指梯度向量与 l_0 的夹角

高阶偏导数

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

定理

- 若 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续，则

  $$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

复合函数的高阶偏导数

例： 设 $z = f(x, \frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
解：

$$
\begin{aligned}
&\text{令} z = f(u,v), u = x, v = \frac{x}{y}\text{，得到} \\
&\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}) \\
&= -\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}-\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}
$$

中值定理

设二元函数 f 在凸开域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上可微，
则对任意两点 $P(a,b), Q(a+h,b+k) \in D$ 存在 $0<\theta<1$ 使得

$$
\begin{aligned}
& f(a+h,b+k)-f(a,b) \\
=& h f_x(a+\theta h, b+\theta k)+k f_y(a+\theta h, b+\theta k)
\end{aligned}
$$

注：
此处的公式与二元函数可微性条件中的中值公式的区别在于，
此处的公式的中值点在两点连线上，且只有一个 θ

- **推论**：若函数 f 在区域 D 上存在偏导数，且

  $$f_x = f_y \equiv 0$$

  则 f 在区域 D 上为常量函数

泰勒公式

若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有直到 $n+1$ 阶的**连续偏导数**，
则对 $U(P_0)$ 上任一点 (x_0+h, y_0+k)，存在相应的 $\theta \in (0,1)$，使得

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)\\
=&f(x_0,y_0)+\\
&(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\\
&\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\\
&\cdots+\\
&\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+\\
&\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{其中}\\
&\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)\\
=&\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n}{\partial x^i\ \partial y^{m-i}}\ h^i k^{m-i}\ f(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

极值问题

- **极值的必要条件：**
  若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数，且在 P_0 取得极值，则

  $$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$$

  且称该点为 **极值点**
  - 若满足上式而取不到极值则称为 **稳定点**
- **极值的充分条件：**
  设二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数，
  且 P_0 是稳定点，则
  当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是正定矩阵，f 在点 P_0 取得 **极小值**
  当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是负定矩阵，f 在点 P_0 取得 **极大值**
  当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是不定矩阵，f 在点 P_0 **不取极值**
- **黑塞矩阵：**

  $$\mathbf{H}_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0)\\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{P_0}$$

- **极值的充分条件的实用写法：**
  1. 当 $f_{xx}(P_0)>0,(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$ 时，取极小值
  2. 当 $f_{xx}(P_0)<0,(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$ 时，取极大值
  3. 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)<0$ 时，不取极值
  4. 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)=0$ 时，不确定

隐函数定理

隐函数

定义

$$F(x,y)=0,\ \ x\in I,\ \ y\in J,\ \ (x,y)\in E\subset R^2$$

称该方程确定了一个定义在 I 上，值域含于 J 的 **隐函数**

$$y=f(x)\implies F(x,f(x))=0$$

隐函数定理

隐函数存在唯一性定理

简要概括：
对于点 P_0 若 F 连续，对 y 偏导数也连续且在 P_0 不为零，
则能在 P_0 某邻域内找到唯一的隐函数
精确描述：

$$\begin{cases}1.\ F\text{ 在以 }P_0(x_0,y_0)\text{ 为内点的某一区域 }D\subset R^2\text{ 上连续}\\ 2.\ F(x_0,y_0)=0\\ 3.\ F\text{ 在 }D\text{ 上存在连续的偏导数 }F_y(x,y)\\ 4\ F_y(x_0,y_0)\neq 0\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}1.\text{ 在 }P_0\text{ 某邻域 }U(P_0)\text{ 内必能找到}\\ \quad\text{在 }(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\subset U(P_0)\text{ 上唯一的函数 }y=f(x)\text{ 使得 }F(x,f(x))=0\\ 2.\ f(x)\text{ 在 }(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\text{ 上连续}\end{cases}$$

注： 在条件 $3,4$ 中把对 y 的偏导数改为对 x 的偏导数，则结论得到的是 $x=g(y)$

隐函数可微性定理

简要概括：
对于连续可微函数 F ，若其对 y 的偏导数在 P_0 处不为零
则必能在 P_0 的某邻域内找到唯一的连续可微的隐函数，
其导数等于 F 对 x,y 的偏导数相除
精确描述：

$$\begin{cases}1.\text{唯一性定理的四个条件}\\ 2.F\text{ 存在连续的偏导数 }F_x(x,y)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}1.\text{存在 }(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\text{ 上的隐函数 }y=f(x,y)\\ 2.f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\end{cases}$$

对于多元函数 $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ 则有

$$y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$f_{x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y},\ i=1,2,\ldots,n.$$

隐函数的极值的求解步骤

1. 求 y' 为零的点（驻点）$A(x_0,y_0)$，即 $F_x(x,y)=0$ 的解
2. 由 $F_x(x,y)=0$ 可以化简得到 $y''|_A=-\frac{F_{xx}}{F_y}|_A$，由此判断极值

隐函数组

定义

对于方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0,\end{cases}$$

其确定了隐函数

$$\begin{cases}u=f(x,y),\\v=g(x,y),\end{cases}\quad (x,y)\in D,(u,v)\in E.$$

这使得在 D 上成立

$$\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\\G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\end{cases}\quad (x,y)\in D$$

雅可比行列式

对 F,G 求 x,y 的偏导数，得到方程组

$$\begin{cases}F_x+F_uu_x+F_vv_x=0,\\G_x+G_xu_x+G_vv_x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_y+F_uu_y+F_vv_y=0,\\G_y+G_xu_y+G_vv_y=0,\end{cases}$$

能够从中解出 u_x,v_x,u_y,v_y 的充分条件为

$$\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$$

* 该条件相当于隐函数唯一存在定理中的第四个条件
不等式左侧的行列式称为 **雅可比行列式**，也记作

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

隐函数组定理

若

1. $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在
   以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V\subset R^4$ 上连续
2. $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$
3. 在 V 上 F,G 具有一阶连续偏导数
4. 雅可比行列式在 P_0 处不为零

则

1. $Q_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(Q_0)$ 上必能找到两个二元隐函数

   $$u=f(x,y),v=g(x,y,)$$

   使得 $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$，且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时，

   $$\begin{aligned}(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),\\ F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0.\end{aligned}$$

2. $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上连续
3. $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上由一阶连续偏导数，且

   $$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, & \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, & \frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.\end{aligned}$$

条件极值

定义

条件极值问题的一般形式是在条件组

$$\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,k=1,2,\ldots,m\quad(m<n)$$

的限制下，求目标函数

$$y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

的极值

使用拉格朗日乘数求解步骤

1. **构造拉格朗日函数**
   引入拉格朗日乘数 λ_i，构造拉格朗日函数 L

$$
\begin{aligned}
&L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

2. **求偏导数**
   求 L 对每个变量的偏导数，令它们为零，得到方程组

$$
\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,
$$
$$
\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.
$$

3. **解方程组**
   求解上述方程组，解得满足条件的 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$
4. **检验极值点**
   检验找到的点是否为极值点