# 线性空间

## 定义与简单性质

### 定义

1. 加法交换律
2. 加法结合律
3. 乘法结合律
4. 数量乘法分配律
5. 向量乘法分配律
6. $V$ 中存在 $\mathbf{0}$
7. $V$ 中存在负元素
8. $1\alpha = \alpha$

### 简单性质

1. 零元素唯一
2. 负元素唯一
3. $0\alpha = \mathbf{0}, k\mathbf{0} = \mathbf{0}, (-1)\alpha = -\alpha$

## 维数 基 坐标

### 定理

$V$ 中任意一个向量均可以由一组线性无关的向量组线性表出，
则 $V$ 是 $n$ 维的，这组向量组为 $V$ 的 **基**

## 基变换与坐标变换

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$ 称为由基 $\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{E}'$ 的 **过渡矩阵**

则在基 $\mathbf{E}$ 下的坐标 $\mathbf{X}$ 变换到 $\mathbf{E}'$ 后坐标 $\mathbf{X}'$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X}$$

# 线性子空间

## 定义

数域 $P$ 上 $V$ 中的一个非空子集合 $W$ 满足两种运算的封闭性,
则 $W$ 称为 $V$ 的 **线性子空间**

### 生成子空间

对于 $V$ 中的一组向量 $W$
其 **所有可能的** 线性组合构成的集合称为 **生成子空间**
记为 $L(W)$

## 定理

- 两个向量组生成相同子空间的 **充要条件** 为
  这两个向量组等价
- $Rank(L(W)) = Rank(W)$
- 子空间的基可以经过扩充称为整个空间的基

# 子空间的交与和

## 定义

- $V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

## 定理

- 子空间的交 也是 子空间
- 子空间的和 也是 子空间
- 空间的和 满足 交换律和结合律
- 维数公式

$$D(V_1) + D(V_2) = D(V_1 + V_2) + D(V_1 \cap V_2)$$

  - 如果 $n$ 维线性空间 $V$ 的两个子空间的维数和 大于 $n$
    则两个子空间必含有非零的公共向量

# 子空间的直和

## 定义

对于 由 $V_1+V_2$ 得到的 $V$ 中的任意向量 $\alpha$ ,
其在 $V_1, V_2$ 中的分解是唯一的,
则 $V_1+V_2$ 是直和, 记作 $V_1 \oplus V_2$

## 定理

- $V_1+V_2$ 是直和的充要条件为
  - $V_1 \cap V_2=\{\mathbf{0}\}$
  - $D(V_1+V_2)=D(V_1)+D(V_2)$
- 对于 $V_1, V_2, V_3 \ldots V_s$, 以下条件等价
  - $W=\sum_{i=1}^s V_i$ 是直和
  - 零向量的表法唯一
  - $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j=\{\mathbf{0}\}$
  - $D(W)=\sum_{i=1}^s D(V_i)$

# 线性空间的同构

## 定义

对于线性空间 $V, V'$ 满足以下条件则为同构:

1. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$
2. $\sigma(k \alpha)=k \sigma(\alpha)$

其中 $\alpha, \beta, k$ 分别为两个 $V$ 中的向量和一个任意数

## 定理

两个有限维的线性空间，同构的 **充要条件** 为
他们具有 **相同的维数**

# 线性变换

## 变换的定义

对于变换 $\mathscr{A}$ 和 $V$ 中任意元素 $\alpha, \beta$，若满足：

1. $\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)$
2. $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha)$

则称 $\mathscr{A}$ 为 **线性变换**

## 线性变换的矩阵

### 定义

$\mathscr{A}\,\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot A$
则称 $A$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\mathbf{E}$ 下的矩阵

### 定理

- 向量 $\xi$ 在 基 $\mathbf{E}$ 下的坐标为 X， $\mathscr{A}\xi$ 在基 $\mathbf{E}$ 下的坐标为 $Y$，则

$$Y=\mathscr{A}X$$

- 线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $E$ 和 $E$\ 下的矩阵分别为 $A, B$
从基 $E$ 到 $E'$ 的过渡矩阵为 $X$，则

$$B=X^{-1}AX$$

- 

#### 相似

- 对于两个 $n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$
如果能找到 $\mathbf{X}$，使得
$\mathbf{B}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$
则称 $\mathbf{A}$ 相似于 $\mathbf{B}$，记作 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$

- 如果两个矩阵相似，则可以看作是同一个线性变换在两组基下对应的矩阵

# 特征值与特征向量

## 定义

对于 $\mathscr{A}\xi = \lambda_0\xi$
$\lambda_0$ 称为 $\mathscr{A}$ 的 **特征值**，$\xi$ 为 **特征向量**

## 求解特征值和特征向量

1. 求解 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$，得到特征值
2. 将每个特征值带入 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 求解得到的线性方程组，得到特征向量

## 特征子空间

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha|\mathscr{A}\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \in V\}$$

$V_{\lambda_0}$ 称为特征子空间
既属于特征值 $\lambda_0$ 的全部特征向量加上一个零向量组成的集合

## 定理

- 相似的矩阵由相同的特征多项式
- 如果特征多项式能分解为一次因式的积，则
  **全体特征值的和**为 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ （称为 $\mathbf{A}$ 的迹）
  **全体特征值的积**为 $|\mathbf{A}|$
- **哈密顿-凯莱定理**：
  对于 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 和在基下的矩阵 $\mathbf{A}$
  $$f(\mathscr{A}) = f(\mathbf{A}) = 0$$

# 对角矩阵

## 定理

- 线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下为对角矩阵的 **充要条件** 为
  $\mathscr{A}$ 由 $n$ 个线性无关的特征向量
- 属于不同特征值的特征向量是 **线性无关** 的，
  （但是属于同一个特征值的特征向量不一定是线性相关的）

- 对于属于每个特征值的线性无关的特征向量，
  他们合并得到的新的向量组也 **线性无关**

> *由此上面两个定理可以得到：*
>
> 1. *对于 $n$ 维线性空间 $V$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式*
>    *有 $n$ 个不同的根（在复数域上既没有重根）则*
>    *该变换可以在 $V$ 中的某组基下为对角形*
> 2. *在特征多项式没有 n 个不同的根（既没有 n 个特征值）时，*
>    *若将属于每个特征值的线性无关的特征向量合并，*
>    *若总个数等于空间的维数，*
>    *则变换可以在 $V$ 中的某组基下为对角形*

**总结**：
$\mathscr{A}$ 能够在某组基下的矩阵成对角形的 **充要条件** 为：
$\mathscr{A}$ 的特征子空间的维数之和等于空间维数，既

$$\sum_{i=1}^{r} D(V_{\lambda_i}) = D(V)$$

由此得到，若 $\mathscr{A}$ 在基下的矩阵 $\mathbf{A}$ 为对角形，则应该为

$$|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 在主对角线上的元素，除排列次序外，是确定的
元素均为特征多项式的根（重根按重数计算）

# 线性变换的值域与核

## 定义

- **值域**

$$\mathscr{A}V = \{\mathscr{A}\xi|\xi\in V\}$$

- **核**

$$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\xi|\mathscr{A}\xi = \mathbf{0}, \xi\in V\}$$

- $\mathscr{A}V$ 的维度称为 $\mathscr{A}$ 的 **秩**
  $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 的维度称为 $\mathscr{A}$ 的 **零度**

### 定理

- 对于 $V$ 中b 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ ， $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\mathbf{A}$ 则
    1. $\mathscr{A}$ 的值域是基像的生成子空间
       $\mathscr{A}V = L(\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\epsilon_n)$
    2. 线性变换与矩阵之间的对应关系保持 **秩不变**
       $Rank(\mathscr{A}) = Rank(\mathbf{A})$
    3. $D(\mathscr{A}V) + D(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})) = D(V)$
- 有限维线性空间的线性变换是单射的 **充要条件** 为它是满射

# 不变子空间

### 定义

对于线性空间 $W$ 和线性变换 $\mathscr{A}$ ，如果 $W$ 中的向量在 $\mathscr{A}$ 仍在 $W$ 中，则称 $W$ 是 $\mathscr{A}$ 的 **不变子空间**，简称 $\mathscr{A}$**-子空间**

### 定理

对于线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$
若其可以分解为一次因式的乘积

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

则 $V$ 可以分解为不变子空间的直和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

其中 $V_i = \{\xi \in V | (\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E})^{r_i}\xi = \mathbf{0}\}$

#### 根子空间

称 $V_i = \{\xi \in V | (\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E})^{r_i}\xi = \mathbf{0}\}$ 为
$\mathscr{A}$ 的属于特征值 $\lambda_i$ 的 **根子空间**
记为 $V^{\lambda_i}$

# 若尔当标准型

# 定义

形如：

$$J(\lambda_0,k)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \lambda_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0\end{pmatrix}_{k\times k}$$

的矩阵称为 **若尔当块**，其中 $\lambda_0$ 是复数
由若干个若尔当块组成的准对角矩阵，称为 **若尔当形矩阵**

# 定理

对于 **复数域** 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个线性变换 $\mathscr{A}$ ，$V$ 中 **一定存在** 一组基，使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵，称为 $\mathscr{A}$ 的**若尔当标准形**

## 引理

若 $n$ 维线性空间 $V$ 上的一个线性变换 $\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{B}^k=0$，
则称 $\mathscr{B}$ 为 $V$ 上的 **幂零线性变换**

对于这个线性变换，$V$ 中必然存在一组基
使得其在这组基下的矩阵为若尔当形矩阵
该矩阵由若干 $J(0,k)$ 组成

> *总结：*
> *每个 $n$ 阶复矩阵 $\mathbf{A}$ 一定与一个若尔当形矩阵相似*
> *这个若尔当形矩阵 **除去其中若尔当块的排列外** 由 $\mathbf{A}$ 唯一决定*
> *称为 $\mathbf{A}$ 的 **若尔当标准形***