级数

数项级数

级数的敛散性

- **数项级数：**

  对于数列 $\{u_n\}$ ，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为 **数项级数**
- **部分和：**

  $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ 称为数项级数的 **第 n 个部分和**，简称 **部分和**
- **收敛与和：**

  若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 则称数项级数 **收敛**，S 为数项级数的 **和**

级数收敛的柯西准则

数项级数收敛的 **充要条件：**

任给正数 ϵ ，总存在正整数 N ，使得当 $m > N$ 时，对任一正整数 p ，都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon$$

- 推论：级数收敛的必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

正项级数

比较原则

对于两个正项级数 u_n, v_n ，若存在某正整数 N 对一切 $n > N$ 都有

$$u_n \leq v_n$$

则

1. 若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛
2. 若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 也发散

比较原则的推论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$$

1. $0<l<+\infty$，两级数同敛散
2. $l=0,l=+\infty$ ，$\sum v_n$ 的敛散决定 $\sum u_n$ 的敛散

比式判别法、根式判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

1. $q<1$ ，收敛
2. $q>1,q=+\infty$ ，发散
3. $q=1$ ，无法判断

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$$

1. $l<1$ ，收敛
2. $l>1$ ，发散
3. $l=1$ ，无法判断

一般项级数

交错级数

莱布尼茨判别法

若数列 $\{u_n\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则级数 $\sum u_n$ 收敛

绝对收敛

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|u_i|$ 收敛，则称 $\sum u_n$ 为 **绝对收敛级数**

- 绝对收敛级数一定收敛
- 收敛但是不绝对收敛的级数称为 **条件收敛级数**

阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

对于 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，

1. $\{a_n\}$ 为单调有界数列，$\sum b_n$ 收敛
2. $\{a_n\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}$ ，$\{b_n\}$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

满足以上条件之一则 $\sum(a_nb_n)$ 收敛

函数项级数

- **函数列：**
  对于每一个 n 都有一个对应的函数 f_n，称这样的由函数组成的序列为 **函数列**
- **收敛域：**

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D$$

D 称为函数列 $\{f_n(x)\}$ 的 **收敛域**

函数列的一致收敛性

一致收敛的定义

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上，
若对任给的 $\epsilon > 0$，总存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 是，对一切 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

则称函数列在 D 上 **一致收敛** 于 f，记作

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \to \infty), \quad x \in D$$

内闭一致收敛

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上，
若对任一的闭区间 $[a, b] \subset I$，$\{f_n\}$ 在该区间上一致收敛于 f，
则称 $\{f_n\}$ 在 I 上 **内闭一致收敛** 于 f

一致收敛的柯西准则

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在数集 D 上一致收敛的 **充要条件：**
对任给的 $\epsilon > 0$，总存在正数 N 使得当 $n, m > N$ 时，对一切 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

一致收敛定理

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在数集 D 上一致收敛的 **充要条件：**

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

也可以由此得到不一致收敛的充要条件：存在 x_n 使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ 不收敛于 0

函数项级数

定义

对于函数列 $\{u_n(x)\}$，$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\ldots$，$x\in E$ 称为定义在 E 上的 **函数项级数**，记为 $\sum u_n(x)$

$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ 称为 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\quad x\in D$$

D 称为级数 $\sum u_n(x)$ 的收敛域

这也说明了函数项级数的收敛性 就是 其部分和函数列的收敛性

函数项级数的一致收敛

若函数项级数的部分和函数列一致收敛，则该函数项级数 **一致收敛**

若函数项级数在闭区间内一致收敛，则称它在该区间上 **内闭一致收敛**

一致收敛的柯西准则

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的 **充要条件:**

任给 $\epsilon>0$，总存在某正整数 N，

使得当 $n>N$ 时，对一切 $x\in D$ 和一切正整数 $p\geq 2$，都有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\epsilon$$

若 $p=1$，则该条件为必要条件

推论:

函数项级数在数集 D 上一致收敛的必要条件是 其函数列在 D 上一致收敛于零

一致收敛定理

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的 **充要条件:**

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$$

魏尔斯特拉斯 M 判别法

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上，$\sum M_n$ 为收敛的正项级数，

若对一切 $x\in D$ 有

$$|u_n(x)|\leq M_n, n=1,2,\ldots$$

则该函数项级数在 D 上收敛

阿贝尔判别法

1. $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛
2. 对于每一个 $x \in I$，$\{v_n(x)\}$ 单调
3. $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 收敛

狄利克雷判别法

1. $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列 $S_n(x)$ 在 I 上一致有界
2. 对于每一个 $x \in I$，$\{v_n(x)\}$ 单调
3. 在 I 上函数列 $v_n(x)$ 一致收敛于零

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 收敛

一致函数列于函数项级数的性质

省流:
在一定条件下，求和可以于求极限、求积、求导运算交换

幂级数

幂级数

定义

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

这样的函数项级数称为 **幂级数**（仅讨论 $x_0=0$ 的情况）

收敛区间 收敛半径

幂级数的收敛域是以原点为中心的区间，若以 $2R$ 表示区间的长度，则 R 称为幂级数的 **收敛半径**，区间 $(-R, R)$ 称为 **收敛区间**

- 在 $x=\pm R$ 处，幂级数可能收敛也可能发散

收敛半径的求解

对于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

1. $0 < \rho < +\infty$，$R = \frac{1}{\rho}$
2. $\rho = 0, R = +\infty$
3. $\rho = +\infty, R = 0$

也可以使用比式判别法:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$$

若该极限存在，则有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

一致收敛

幂级数在收敛区间 $(-R, R)$ 内的任一闭区间 $[a, b]$ 上都一致收敛

幂级数展开

泰勒级数

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

该级数称为 **泰勒级数**

函数的泰勒级数的收敛

设 f 在点 x_0 具有任意阶导数，
则 f 在区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上等于它的泰勒级数的和函数的 **充要条件** 是:
对一切满足不等式 $|x - x_0| < r$ 的 x ，有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

其中 $R_n(x)$ 为 f 在 x_0 处的泰勒公式余项，即

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x < \xi < x_0$$

对于函数在 $x_0 = 0$ 处的展开式

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

这称为 f 的 **麦克劳林级数**

各种余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}, \quad x < \xi < x_0$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1}, 0 \le \theta \le 1$$

多元函数微分

二元函数的极限

定义

- **重极限**:
  自变量 x, y **同时** 以任何方式趋近于 x_0, y_0，表示为

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

- **累次极限**:
  自变量 x, y **依一定的先后顺序** 相继趋近于 x_0, y_0，
  以先对 $x(\to x_0)$ 后对 $y(\to y_0)$ 的累次极限为例

$$K = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

定理

- 若两种累次极限和重极限均存在，则三者相等
- 若两种累次极限存在但是不相等，则重极限必不存在

二元函数的连续性

- **连续与间断点**
  f 关于 D 在 P_0 连续 $\iff \lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$
  - 若 P_0 是 D 的聚点，而上式不成立，则 P_0 称为 **间断点**
  - 若左边的极限存在而不等于 $f(P_0)$ 则称为 **可去间断点**
- **全增量与偏增量**
  对于 $P_0(x_0, y_0), P(x, y) \in D, \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$，
  称 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 为 f 在 P_0 的 **全增量**
  - f 关于 D 在 P_0 连续 $\iff \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0$
  - 在全增量中取 $\Delta x = 0$ 或 $\Delta y = 0$，相应的函数增量称为 **偏增量**
  - 全增量极限为零 则 偏增量极限也为零（反过来则不一定）

- **有界闭域上连续函数的性质**
  - **有界性与最大最小值定理**
    若 f 在有界闭域上连续，则在该区域内有界 且 能取得最大最小值
  - **一致连续性定理**
    若 f 在有界闭域上连续，则 f 在该区域上 **一致连续**，既
    对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta(\epsilon)$，使得
    对一切点 P, Q，只要 $\rho(P, Q) < \delta$ 就有 $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$
  - **介值性定理**
    若 f 在有界闭域上连续，P_1, P_2 为 D 中任意两点，且 $f(P_1) < f(P_2)$
    则对任何满足 $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ 的 实数 μ
    必存在点 $P_0 \in D$，使得 $f(P_0) = \mu$

多元函数微分学

全微分

若 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的全增量 Δz 可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\end{aligned}$$

其中 A, B 是仅与 P_0 有关的常数，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$，
$o(\rho)$ 是较 ρ 高阶的无穷小量，
则称 f 在 P_0 **可微**，
称线性函数 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 f 在点 P_0 的 **全微分**，记作

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

- 当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 足够小时，全微分可以作为全增量的近似值，既

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

可微性条件

- **可微的必要条件**：
  若 f 在区域 D 上每一点都可微，则 f 在 D 上的全微分为

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

- **可微的充分条件**：
  若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数在点 (x_0, y_0) 的某邻域内存在，
  且 f_x，f_y 在点 (x_0, y_0) 连续，
  则函数 f 在点 (x_0, y_0) 可微
  - **注**：由于这是**充分条件**，所以**不能**通过偏导数的不连续推出函数的不可微
  - 若函数在某点处的偏导数均连续，则称该函数在这点上 **连续可微**

- **中值公式：**
  若函数 f 在点 (x_0, y_0) 的某邻域存在偏导数，对于该邻域内的点 (x, y)
  存在 $\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0), \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0), 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

复合函数的全微分

若以 x, y 为自变量的函数 $z = f(x, y)$ 可微，则其全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

用例子来说明 利用复合函数全微分求偏导数 的方法
例： 设 $z = e^{xy}\sin(x + y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
解：

$$\text{令} z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y\text{，得到}$$

$$\begin{aligned} dz &= z_u du + z_v dv = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \\ du &= y dx + x dy \\ dv &= dx + dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ dz = &\ e^u \sin v(ydx + xdy) + \\ &\ e^u \cos v(dx + dy) \\ = &\ e^{xy}[y\sin(x + y) + \cos(x + y)]dx + \\ &\ e^{xy}[x\sin(x + y) + \cos(x + y)]dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ z_x &= e^{xy}[y\sin(x + y) + \cos(x + y)] \\ z_y &= e^{xy}[x\sin(x + y) + \cos(x + y)] \end{aligned}$$

偏导数

设 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 若 $(x_0, y_0) \in D$ 且 $f(x, y_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则当

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在时，称中国极限为 f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的 **偏导数**，记作

$$f_x(x_0, y_0) \text{ 或 } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

若 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 在每一点上都存在对 x 或对 y 的偏导数，
则可得到 $z = f(x, y)$ 对 x 或对 y 的偏导函数（简称偏导数），记作

$$f_x(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}$$

如何求偏导数

1. 先将其他自变量看作常数
2. 对当前自变量作一元函数求导

复合函数求导（链式法则）

若函数 $x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$ 在点 $(s,t)\in D$ 可微，
且 $z=f(x,y)$ 在 点 $(x,y)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 可微，
则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 在点 (s,t) 可微，其偏导数为

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)} &= \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)} \\
\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)} &= \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}
\end{aligned}
$$

一般的，对于 $f(u_1,u_2,\ldots,u_m), u_k=g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 复合函数的偏导数为

$$
\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i},\ (i=1,2,\ldots,n)
$$

方向导数

定义

设三元函数 f 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset\mathbf{R}^3$ 有定义，
l 为从点 P_0 出发的射线，
$P(x,y,z)$ 为在 l 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点，
以 ρ 表示 P,P_0 之间的距离，若极限

$$
\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}
$$

存在，则称此极限为 f 在点 P_0 沿方向 l 的 **方向导数**，记作

$$
f_t(P_0)\text{ 或 }\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}
$$

计算公式

$$
f_t(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma
$$

$$
\cos\theta_i=\frac{l_i}{|l|}
$$

其中 α,β,γ 为方向 l 的方向余弦

梯度

定义

若多元函数在某点存在对所有自变量的偏导数，
则称向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的 **梯度**，记作

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} f &= (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \\ |\mathbf{grad} f| &= \sqrt{f_x(P_0^2 + f_y(P_0^2 + f_z(P_0^2)}\end{aligned}$$

- 若记 l 方向上的单位向量为

$$l_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

  则方向导数公式也可以写成

$$f_l(P_0) = \mathbf{grad} f(P_0) \cdot l_0 = |\mathbf{grad} f(P_0)| \cos\theta$$

  θ 指梯度向量与 l_0 的夹角

高阶偏导数

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

定理

- 若 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

复合函数的高阶偏导数

例： 设 $z = f(x, \frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
解：

$$\text{令} z = f(u,v), u = x, v = \frac{x}{y}, \text{得到}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}) \\
&= -\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}
$$

中值定理

设二元函数 f 在凸开域 $D \subset \mathbf{R^2}$ 上可微,
则对任意两点 $P(a,b), Q(a+h,b+k) \in D$ 存在 $0<\theta<1$ 使得

$$
\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)-f(a,b) \\
=&hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)
\end{aligned}
$$

注:
此处的公式与二元函数可微性条件中的中值公式的区别在于,
此处的公式的中值点在两点连线上，且只有一个 θ

- **推论**：若函数 f 在区域 D 上存在偏导数，且

  $$f_x = f_y \equiv 0$$

  则 f 在区域 D 上为常量函数

泰勒公式

若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有直到 $n+1$ 阶的**连续偏导数**，
则对 $U(P_0)$ 上任一点 (x_0+h,y_0+k)，存在相应的 $\theta \in (0,1)$，使得

$$
\begin{aligned}
& f(x_0+h,y_0+k) \\
=& f(x_0,y_0)+ \\
& (h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+ \\
& \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+ \\
& \cdots+ \\
& \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+ \\
& \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{其中} \\
& \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0) \\
=& \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n}{\partial x^i\,\partial y^{m-i}}\ h^i k^{m-i}\ f(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

极值问题

- **极值的必要条件：**
  若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数，且在 P_0 取得极值，则

  $$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$$

  且称该点为 **极值点**
  - 若满足上式而取不到极值则称为 **稳定点**
- **极值的充分条件：**
  设二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数，且 P_0 是稳定点，则
  当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是正定矩阵，f 在点 P_0 取得 **极小值**
  当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是负定矩阵，f 在点 P_0 取得 **极大值**
  当 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 是不定矩阵，f 在点 P_0 **不取极值**
- **黑塞矩阵：**

  $$\mathbf{H}_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{P_0}$$

- **极值的充分条件的实用写法：**
  1. 当 $f_{xx}(P_0)>0,(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$ 时，取极小值
  2. 当 $f_{xx}(P_0)<0,(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)>0$ 时，取极大值
  3. 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)<0$ 时，不取极值
  4. 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)=0$ 时，不确定

隐函数定理

隐函数

定义

$$F(x,y)=0,\ \ x\in I,\ \ y\in J,\ \ (x,y)\in E\subset R^2$$

称该方程确定了一个定义在 I 上，值域含于 J 的 **隐函数**

$$y=f(x)\implies F(x,f(x))=0$$

隐函数定理

隐函数存在唯一性定理

简要概括：
对于点 P_0 若 F 连续，对 y 偏导数也连续且在 P_0 不为零，
则能在 P_0 某邻域内找到唯一的隐函数
精确描述：

$$\begin{cases}1.\ F\text{ 在以 }P_0(x_0,y_0)\text{ 为内点的某一区域 }D\subset R^2\text{ 上连续}\\2.\ F(x_0,y_0)=0\\3.\ F\text{ 在 }D\text{ 上存在连续的偏导数 }F_y(x,y)\\4\ F_y(x_0,y_0)\neq 0\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}1.\text{ 在 }P_0\text{ 某邻域 }U(P_0)\text{ 内必能找到}\\\quad\text{在 }(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\subset U(P_0)\text{ 上唯一的函数 }y=f(x)\text{ 使得 }F(x,f(x))=0\\2.\ f(x)\text{ 在 }(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\text{ 上连续}\end{cases}$$

注： 在条件 $3,4$ 中把对 y 的偏导数改为对 x 的偏导数，则结论得到的是 $x=g(y)$

隐函数可微性定理

简要概括：
对于连续可微函数 F ，若其对 y 的偏导数在 P_0 处不为零
则必能在 P_0 的某邻域内找到唯一的连续可微的隐函数，
其导数等于 F 对 x,y 的偏导数相除
精确描述：

$$\begin{cases}1.\text{唯一性定理的四个条件}\\2.F\text{ 存在连续的偏导数 }F_x(x,y)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}1.\text{存在 }(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\text{ 上的隐函数 }y=f(x,y)\\2.f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\end{cases}$$

对于多元函数 $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ 则有

$$y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$f_{x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y},\ i=1,2,\ldots,n.$$

隐函数的极值的求解步骤

1. 求 y' 为零的点（驻点）$A(x_0,y_0)$，即 $F_x(x,y)=0$ 的解
2. 由 $F_x(x,y)=0$ 可以化简得到 $y''|_A=-\frac{F_{xx}}{F_y}|_A$，由此判断极值

隐函数组

定义

对于方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0,\end{cases}$$

其确定了隐函数

$$\begin{cases}u=f(x,y),\\v=g(x,y),\end{cases}\quad (x,y)\in D,(u,v)\in E.$$

这使得在 D 上成立

$$\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\\G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\end{cases}\quad (x,y)\in D$$

雅可比行列式

对 F,G 求 x,y 的偏导数，得到方程组

$$\begin{cases}F_x+F_uu_x+F_vv_x=0,\\G_x+G_xu_x+G_vv_x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_y+F_uu_y+F_vv_y=0,\\G_y+G_xu_y+G_vv_y=0,\end{cases}$$

能够从中解出 u_x,v_x,u_y,v_y 的充分条件为

$$\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$$

* 该条件相当于隐函数唯一存在定理中的第四个条件
 不等式左侧的行列式称为 **雅可比行列式**，也记作

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

隐函数组定理

若

1. $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V\subset R^4$ 上连续
2. $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$
3. 在 V 上 F,G 具有一阶连续偏导数
4. 雅可比行列式在 P_0 处不为零

则

1. $Q_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(Q_0)$ 上必能找到两个二元隐函数
$$u=f(x,y),v=g(x,y,)$$
使得 $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$，且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时，
$$\begin{gathered}(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),\\ F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0.\end{gathered}$$
2. $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上连续
3. $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上由一阶连续偏导数，且
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad &\frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad &\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.\end{aligned}$$

条件极值

定义

条件极值问题的一般形式是在条件组
$$\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,k=1,2,\ldots,m\quad(m<n)$$
的限制下，求目标函数
$$y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
的极值

使用拉格朗日乘数求解步骤

1. **构造拉格朗日函数**
引入拉格朗日乘数 λ_i，构造拉格朗日函数 L

$$
\begin{aligned}
&L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

2. **求偏导数**
   求 L 对每个变量的偏导数，令它们为零，得到方程组

$$
\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,
$$
$$
\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.
$$

3. **解方程组**
   求解上述方程组，解得满足条件的 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$
4. **检验极值点**
   检验找到的点是否为极值点

多元函数积分

含参量积分

含参量正常积分

定义

对于定义在区域 $G=\{(x,y)|c(x)\le y\le d(x),a\le x\le b\}$ 上的二元函数，其中 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy,\quad x\in[a,b].$$

称为定义在 $[a,b]$ 上 **含参量 x 的正常积分**，简称 **含参量积分**

连续性

若二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $G=\{(x,y)|c(x)\le y\le d(x),a\le x\le b\}$ 上连续
其中 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上连续

可微性

若 $f(x,y),f_x(x,y)$ 在 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续，$c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数，则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)dy+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x)$$

可积性

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，
则 $\varphi(x),\psi(y)$ 分别在 $[a,b],[c,d]$ 上可积
即存在连个求积顺序不同积分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy,\ \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

且在 $f(x,y)$ 连续的前提下，这两个积分相等

含参量反常积分

定义

设函数 $f(x,y)$ 在无界区域 $R=\{(x,y)|x\in I,c\le y<\infty\}$ 上
若对于每一个固定的 $x\in I$ 反常积分

$$\int_c^\infty f(x,y)dy$$

都收敛，则它的值是 x 在 I 上取值的函数，

$$\Phi(x)=\int_c^\infty f(x,y)dy,x\in I$$

称为定义在 I 上的 **含参量 x 的无穷限反常积分**，简称 **含参量反常积分**

一致收敛及其判别

定义

若含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 与函数 $\Phi(x)$ 对于任给的正数 ϵ ，总存在某一实数 $N>c$ 使得当 $M>N$ 时，对于一切 $x\in I$ 都有

$$\left|\int_c^M f(x,y)dy-\Phi(x)\right|<\epsilon$$

即

$$\left|\int_M^\infty f(x,y)dy\right|<\epsilon$$

则称含参量反常积分在 I 上一致收敛于 $\Phi(x)$

内闭一致收敛

若对于任一 $[a,b]\subset I$，含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则称 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上 **内闭一致收敛**

一致收敛的柯西准则

含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的 **充要条件:**
对于任给的正数 ϵ，
总存在一个实数 $M>c$ 使得当 $A_1,A_2>M$ 时，
对于一切 $x\in I$ 都有

$$\left|\int_{A_2}^{A_1} f(x,y)dy\right|<\epsilon$$

一致收敛定理 1

含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的 **充要条件:**

$$F(A)=\sup_{x\in I}\left|\int_A^\infty f(x,y)dy\right|,$$
$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=0.$$

一致收敛定理 2

含参量反常积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛的 **充要条件:**
对于任一趋于 $+\infty$ 的递增数列 $\{A_n\}$ $(A_1=c)$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$$

在 I 上一致收敛

魏尔斯特拉斯 M 判别法

设有函数 $g(y)$ 使得

$$\left|f(x,y)\right|\le g(y),(x,y)\in I\times[c,+\infty)$$

若 $\int_c^\infty g(y)dy$ 收敛，则 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛

狄利克雷判别法

若

1. 对于一切实数 $N>c$，含参量正常积分

   $$\int_c^N f(x,y)dy$$

   对参量 x 在 I 上一致有界，
   即存在正数 M，对于一切 $N>c$ 及一切 $x\in I$，都有

$$\left|\int_c^N f(x,y)dy\right| \leq M$$

2. 对于每一个 $x \in I$， 函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，
   且当 $y \to +\infty$ 时，对参量 x， $g(x,y)$ 一致收敛于 0

则

$$\int_c^\infty f(x,y)g(x,y)dy$$

在 I 上一致收敛

阿贝尔判别法

若

1. $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛
2. 对每一个 $x \in I$， 函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，
   且对参量 x， $g(x,y)$ 在 I 上一致有界

则

$$\int_c^\infty f(x,y)g(x,y)dy$$

在 I 上一致收敛

含参量反常积分的性质

在一定条件下，
无穷积分运算可以与 其他正常积分、无穷积分、极限运算、求导运算交换

曲线积分

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha,\ \beta],$$

一型曲线积分

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

二型曲线积分

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi^{'}(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi^{'}(t)]dt$$

二重积分

直角坐标系

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

格林公式

$$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})d\sigma = \oint_L Pdx + Qdy$$

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L x\ dy - y\ dx$$

曲线积分的路线无关性

对于单连通区域，若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内连续，则一下四个条件等价：

1. $$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$
2. $$\int_L Pdx + Qdy \text{ 与路线无关，仅与 } L \text{ 的起点和终点有关}$$
3. $$\text{在 } D \text{ 内存在 } u(x,y) \text{ 使得}$$ $$du = Pdx + Qdy$$
4. $$\text{在 } D \text{ 内处处成立}$$ $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

全微分的原函数

$$
\begin{aligned}
&u(x,y)\\
&=\int_{x_0}^{x}P(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt\\
&=\int_{x_0}^{x}P(s,y)ds+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt
\end{aligned}
$$

变量变换

对于 $\iint\limits_{D} f(x,y)dA$ ，遵照以下步骤进行变量替换

1. 选择变换函数
   定义新的变量 $u=g(x,y), v=h(x,y)$
   解出 $x=x(u,v), y=y(u,v)$
2. 计算变换的雅可比行列式 $|J|$

$$
J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}
$$

3. 确定新变量 (u,v) 对应的新区域 D'
4. 替换积分
   变换为 $\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\ |J|\ dudv$

极坐标变换

$$
T:\begin{cases}x=arcos\ \theta,\\ y=brsin\ \theta,\end{cases}\quad 0\le r<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy\\
&=\iint\limits_{D'} f(arcos\ \theta, brsin\ \theta)abrdrd\theta\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(arcos\ \theta, brsin\ \theta)abrdr\\
&=\int_{r_1}^{r_2}abrdr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(arcos\ \theta, brsin\ \theta)d\theta
\end{aligned}
$$

三重积分

基本计算

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx$$

坐标变换

雅可比行列式 $|J|$:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

柱坐标变换

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

$$J(r,\theta,z) = r$$

球坐标变换

$$T:\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

$$J(r,\theta,z) = r^2\sin\varphi$$

曲面积分

第一型曲面积分

一般计算

$$\text{对于曲面 } S: z = z(x,y),\ (x,y) \in D,$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

参量形式曲面

$$S:\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases} \quad (u,v)\in D,$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, \\ G=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v, \\ F=x_v^2+y_v^2+z_v^2, \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

$$\text{要求 } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\text{，}\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\text{，}\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \text{ 之中至少有一个不等于零}$$

第二型曲面积分

一般计算

$$\text{对于曲面 } S:z=z(x,y)\text{，}\ (x,y)\in D,$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))dxdy$$

参量形式曲面

$$S:\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases} \quad (u,v)\in D,$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_{S} Pdydz=\pm\iint\limits_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv, \\ \displaystyle\iint\limits_{S} Qdzdx=\pm\iint\limits_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x}{\partial(u,v)}dudv, \\ \displaystyle\iint\limits_{S} Rdxdy=\pm\iint\limits_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv. \end{cases}$$

$$\text{正负号由法向量}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\text{，}\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\text{，}\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right) \text{ 对应 } S \text{ 内外侧决定}$$

$$\text{要求 } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\text{，}\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\text{，}\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \text{ 之中至少有一个不等于零}$$

高斯公式

空间区域 V 由双侧封闭曲面 S 围成， P,Q,R 在 V上连续

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

*常用于化简封闭曲面二重积分

$$\downarrow$$

令高斯公式中的 $P=x,Q=y,R=z$

得到封闭空间区域体积公式：

$$\Delta V=\frac{1}{3}\oiint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$$

斯托克斯公式

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

S 的侧以及 L 的方向由右手定则决定