

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Факультет программной инженерии и  
компьютерной техники**

# **Вычислительная математика**

**Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент**  
**[tamalysheva@itmo.ru](mailto:tamalysheva@itmo.ru)**

**Санкт-Петербург, 2024**

**Трудоемкость дисциплины:** 108 часов (3 з.е.)

Курс включает:

1. Лекции - 16 часов;
2. Лабораторные занятия - 32 часа;
3. СРС - 55,2 часов.

**Оценочные средства текущего контроля успеваемости:**

1. Лабораторные работы - №1, №2, №3, №4, №5, №6
2. Контрольные работы - №1, №2

**Оценочное средство промежуточной аттестации:**  
**ЗАЧЕТ**



## Баллы таблицы БаРС:

Оценочные средства	Минимальный балл	Максимальный балл
Лабораторная работа №1 «Решение систем линейных алгебраических уравнений»	6	9
Лабораторная работа №2 «Численное решение нелинейных уравнений и их систем»	6	11
Лабораторная работа №3 «Численное интегрирование»	6	9
Лабораторная работа №4 «Аппроксимация функций»	6	9
Лабораторная работа №5 «Интерполяция функций»	7	11
Лабораторная работа №6 «Решение задачи Коши для ОДУ»	7	11
Контрольная работа №1 (по темам лекций №1-3)	5	10
Контрольная работа №2 (по темам лекций №4-6)	5	10

**Задачей изучения дисциплины «Вычислительная математика»**

является формирование у студента необходимых знаний:

- о вычислительной математике как о разделе высшей математики;
- о классификации численных методов;
- о причинах возникновения погрешностей и их учете при оценке результата вычислений;
- об основах численных методах линейной алгебры, о решении нелинейных уравнений и систем, о приближении функций, об основах дифференцирования и интегрирования функций;

**В результате лабораторных занятий студент должен уметь:**

- выбрать численный метод, которым необходимо воспользоваться при решении конкретной задачи;
- написать программное приложение, реализующее данный метод;
- **адекватно оценить полученные результаты.**

## Команда преподавателей:

1. Малышева Татьяна Алексеевна,
2. Рыбаков Степан Дмитриевич,
3. Машина Екатерина Алексеевна,
4. Наумова Надежда Александровна,
5. Бострикова Дарья Константиновна.





# Методы решения математических задач

```
graph TD; A[Методы решения математических задач] --> B[Графические]; A --> C[Аналитические]; A --> D[Численные];
```

**Графические**

**Аналитические**

**Численные**



**Численные методы**—приближенные способы решения типовых задач математики, которые наиболее часто встречаются на практике.

Примеры типовых задач - численное решение уравнений, систем, численные дифференцирование и интегрирование и др.

Численные методы сводят решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами.

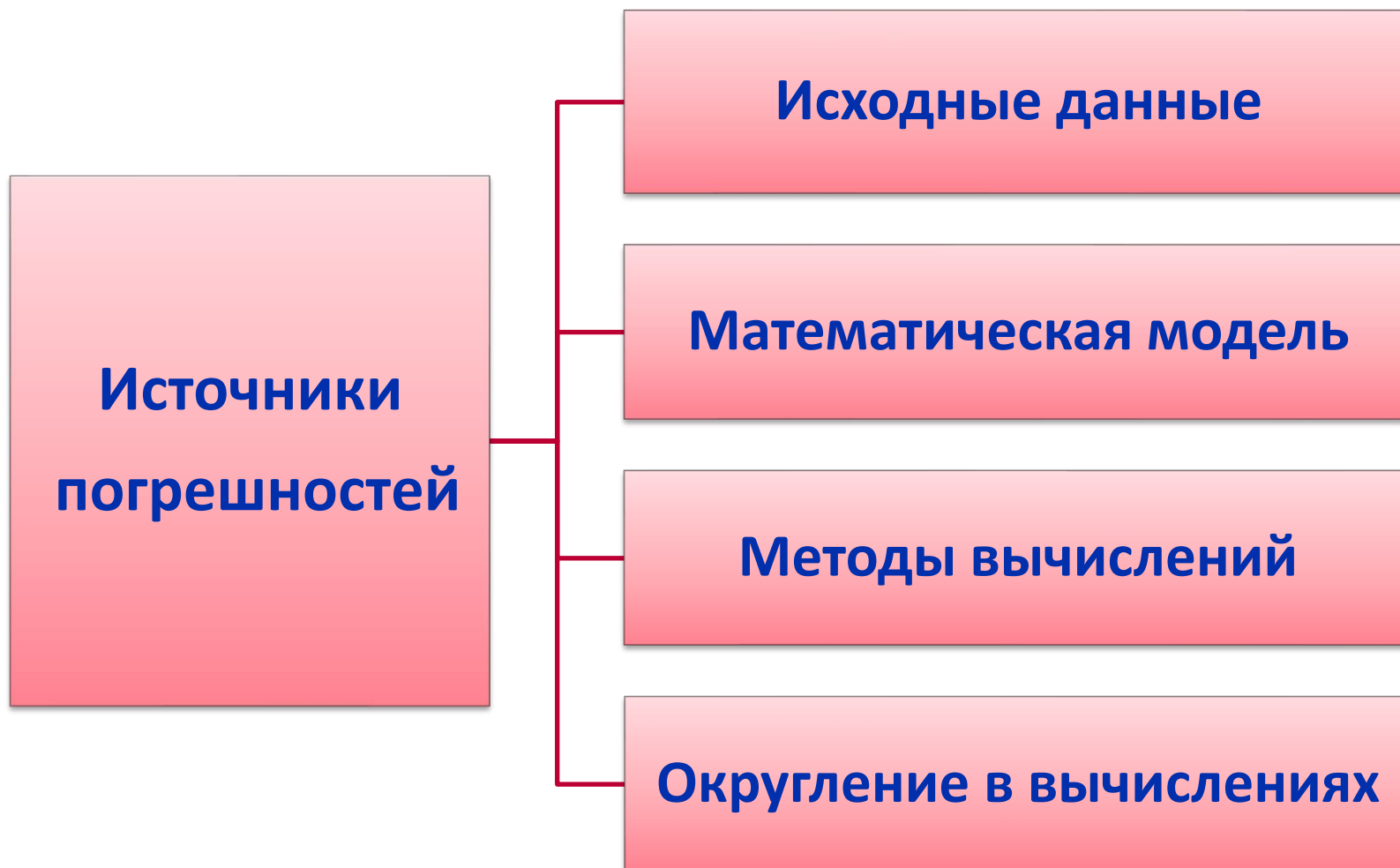
**Главная задача численных методов** - получить приближенное решение задачи с *заданной степенью точности*, или, по крайней мере, оцениваемой точностью.

**Когда применяются численные методы?**

Когда задача трудно решается точными аналитическими методами. Когда перед нами стоит сложная задача, например математической физики.



# Погрешности вычислений







## Обобщенная схема математического моделирования



# Абсолютная и относительная погрешности

**Абсолютная погрешность :**

$$\Delta a^* = |a^* - a|$$

где  $a^*$  – приближенное значение числа  $a$ .

Точное число заключено в границах:

$$a = a^* \pm \Delta a^* \quad \text{или} \quad a^* - \Delta a^* \leq a \leq a^* + \Delta a^*.$$

**Предельная абсолютная погрешность (граница абсолютной погрешности)  $\Delta_a$  :**

$$\Delta a^* \leq \Delta_a$$

**Относительная погрешность:**

$$\delta a^* = \left| \frac{a^* - a}{a^*} \right|$$

**Предельная относительная погрешность (граница относительной погрешности)  $\delta_a$  :**

$$\delta a^* \leq \delta_a$$

Так как значение точного числа  $a$  неизвестно, то часто пользуются приближенными оценками предельных погрешностей:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a^*|} \quad \Delta_a \approx |a^*| \delta_a$$

## Вычислительная погрешность

Проведение численных расчётов на компьютере неизбежно связано с погрешностью округления, которые возникают в силу **ограниченности разрядной сетки компьютера** при представлении в нем вещественных чисел.

В современных компьютерах реализован стандарт двоичной арифметики IEEE. Стандарт предусматривает два основных типа чисел с плавающей точкой: числа одинарной и двойной точности.

Тип	Длина	Знак	Мантисса	Порядок
Одинарная точность	4 байта	1 бит	23 бита	8 битов
Двойная точность	8 байтов	1 бит	52 битов	11 битов

Хранение в компьютере в логарифмическом виде – мантисса и порядок:  $x = \pm t \cdot a^p$ , где  $t$  – мантисса,  $p$  – порядок,  $a$  – основание степени.

Мантисса записывается в нормализованной форме:  $2.578 \cdot 10^2$   
Компьютерное представление: **2.578E+02.**



## Вычислительная погрешность

Точность	Одинарная	Двойная
Наименьшее значение (UFL), порог машинного нуля	$\approx 10^{-38}$	$\approx 10^{-308}$
Наибольшее значение (OFL), порог переполнения	$\approx 10^{+38}$	$\approx 10^{+308}$
Машинное эpsilon ( $\epsilon_{\text{маш}}$ ), машинная погрешность	$\approx 10^{-8}$	$\approx 10^{-16}$



## Свойства численных методов

- **Устойчивость.** Решение задачи  $y^*$  называется устойчивым по исходным данным  $x^*$ , если оно зависит от исходных данных непрерывным образом. Это означает, что малому изменению исходных данных соответствует малое изменение решения. Алгоритм считается устойчивым, если он обеспечивает нахождение существующего и единственного решения при различных исходных данных.
- **Сходимость.** Численное решение задачи должно стремиться к точному решению задачи.

Алгоритм сходится, если последовательность приближений

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

- **Корректность.** Численные методы применяются к корректно поставленным задачам.

Задача называется поставленной корректно, если выполняются следующие условия:

- 1) решение задачи существует и единственно при любых допустимых исходных данных.
- 2) решение устойчиво по отношению к малым изменениям исходных данных.

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

В векторно-матричном виде:  $Ax = b$ ,

где:  $A$  – матрица системы,  $x$  – вектор неизвестных,  $b$  – вектор правых частей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

## Решение задачи

Система линейных алгебраических уравнений может:

- 1) Не иметь решений.
- 2) Иметь бесконечное множество решений.
- 3) Иметь единственное решение.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют **совместной**.

Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**.

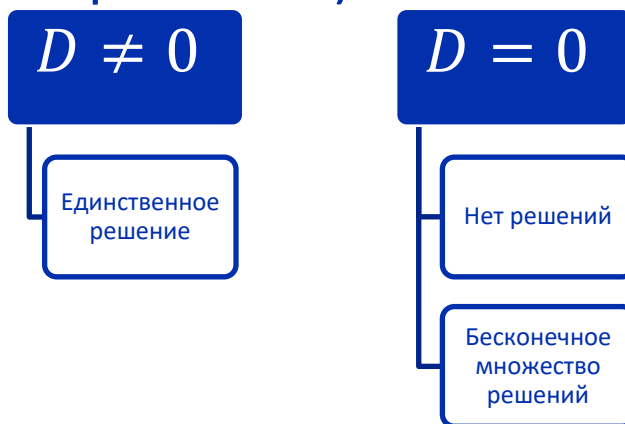
Система, имеющая множество решений, называется **неопределенной**.



## Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, т.е.  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$ .

1. Если  $\text{rang}A \neq \text{rang}(A|B)$ , то СЛАУ несовместна (не имеет решений).
2. Если  $\text{rang}A = \text{rang}(A|B) < n$ , то СЛАУ является неопределённой (имеет бесконечное количество решений).
3. Если  $\text{rang}A = \text{rang}(A|B) = n$ , то СЛАУ является определённой (имеет единственное решение).







# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ПРЯМЫЕ (ТОЧНЫЕ)

ИТЕРАЦИОННЫЕ (ПРИБЛИЖЕННЫЕ)

**ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ** используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение за конечное число арифметических операций. Эти методы сравнительно просты и наиболее универсальны, т. е. пригодны для решения широкого класса линейных систем.

Иногда прямые методы называют *точными*, имея в виду, что при отсутствии ошибок в исходных данных и при выполнении элементарных операций результат будет точным. Однако, при реализации метода на ЭВМ неизбежны ошибки округления и, как следствие, наличие вычислительной погрешности.



# Прямые методы

## Недостатки:

- требуют хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы, и при больших значениях  $n$  расходуется много места в памяти.
  - не учитывают структуру матрицы при большом числе нулевых элементов в разреженных матрицах (например, клеточных или ленточных); эти элементы занимают место в памяти машины, и над ними проводятся арифметические действия.
  - происходит накопление погрешностей в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций.
- Применяются для систем ( $n < 1000$ ) с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем.



# Прямые методы. Правило Крамера

**Формулы Крамера.** Каждое неизвестное представляется в виде отношения определителей (детерминантов). Используется для систем размерностью  $n=2, 3$ .

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n$$

$\det A_j$  – определитель матрицы, получаемой заменой  $j$ -го столбца матрицы  $A$  столбцом правых частей  $b$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

При большом числе уравнений потребуются выполнить огромное число арифметических операций, поскольку для вычислений  $n$  неизвестных необходимо найти значения  $n + 1$  определителей. Количество арифметических операций:  $N \approx n \cdot n!$

При  $n=100$  потребуется совершить  $10^{158}$  операций. **Много это или сойдет для человека/ЭВМ?**

# Прямые методы. Метод Гаусса

Карл Фридрих Гаусс

(1777-1855 гг., немецкий математик, механик, физик, астроном, геодезист)



Основан на приведении матрицы системы к треугольному виду так, чтобы ниже ее главной диагонали находились только нулевые элементы.

**Прямой ход** метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается  $x_1$  из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается  $x_2$  из третьего и всех последующих уравнений и т.д.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока в левой части последнего ( $n$ -го) уравнения не останется лишь один член с неизвестным  $x_n$ , т. е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

**Обратный ход** метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим неизвестное  $x_n$ . Далее, из предыдущего уравнения вычисляем  $x_{n-1}$  и т. д. Последним найдем  $x_1$  из первого уравнения.

Метод имеет много различных вычислительных схем.

**Основное требование** -  $\det A \neq 0$ .

# Прямые методы. Метод Гаусса

Рассмотрим наиболее распространенную *схему единственного деления*.

[illegible]

### Прямой ход:

**Шаг 1 (считаем  $a_{11} \neq 0$ ):**

Исключим  $x_1$  из второго уравнения: умножим первое уравнение на  $(-a_{21}/a_{11})$  и прибавим ко второму.

Исключим  $x_1$  из третьего уравнения: умножим первое уравнение на  $(-a_{31}/a_{11})$  и прибавим к третьему...

Исключим  $x_1$  из последнего уравнения: умножим первое уравнение на  $(-a_{n1}/a_{11})$  и прибавим к последнему. Получим равносильную систему уравнений (2) :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}, \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (2) \quad \begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, i, j = 2, 3 \dots n \\ b_i^{(1)} &= b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, i = 2, 3 \dots n \end{aligned}$$



## Прямые методы. Метод Гаусса

### Шаг 2:

Исключим  $x_2$  из третьего уравнения: умножим второе уравнение на  $(-a'_{32}/a'_{22})$  и прибавим к третьему (и т.д. для следующих уравнений)

Исключим  $x_2$  из последнего уравнения: умножим второе уравнение на  $(-a'_{n2}/a'_{22})$  и прибавим к последнему.

Получим:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}\end{aligned}\tag{3}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \quad i, j = 3, 4 \dots n \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \quad i = 3, 4 \dots n$$



## Прямые методы. Метод Гаусса

Продолжим до тех пор, пока матрица системы (3) не примет треугольный вид (4):

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}\end{aligned}\tag{4}$$

Матрица системы (4) имеет треугольный вид  $\rightarrow$  конец *прямого хода*.

**Требование :** Если в процессе исключения неизвестных, коэффициенты:

$$a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)} \dots = 0 ,$$

тогда необходимо соответственным образом переставить уравнения системы.

Перестановка уравнений должна быть предусмотрена в вычислительном алгоритме при его реализации на компьютере.



## Прямые методы. Метод Гаусса

Обратный ход:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

.....

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}^{(1)}} (b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)} x_n)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \dots - a_{1n} x_n)$$

**Трудоемкость метода.** Для реализации метода Гаусса требуется примерно  $\frac{2}{3} n^3$  операций для прямого хода и  $n^2$  операций для обратного хода.

Общее количество операций:  $\frac{2}{3} n^3 + n^2$ .





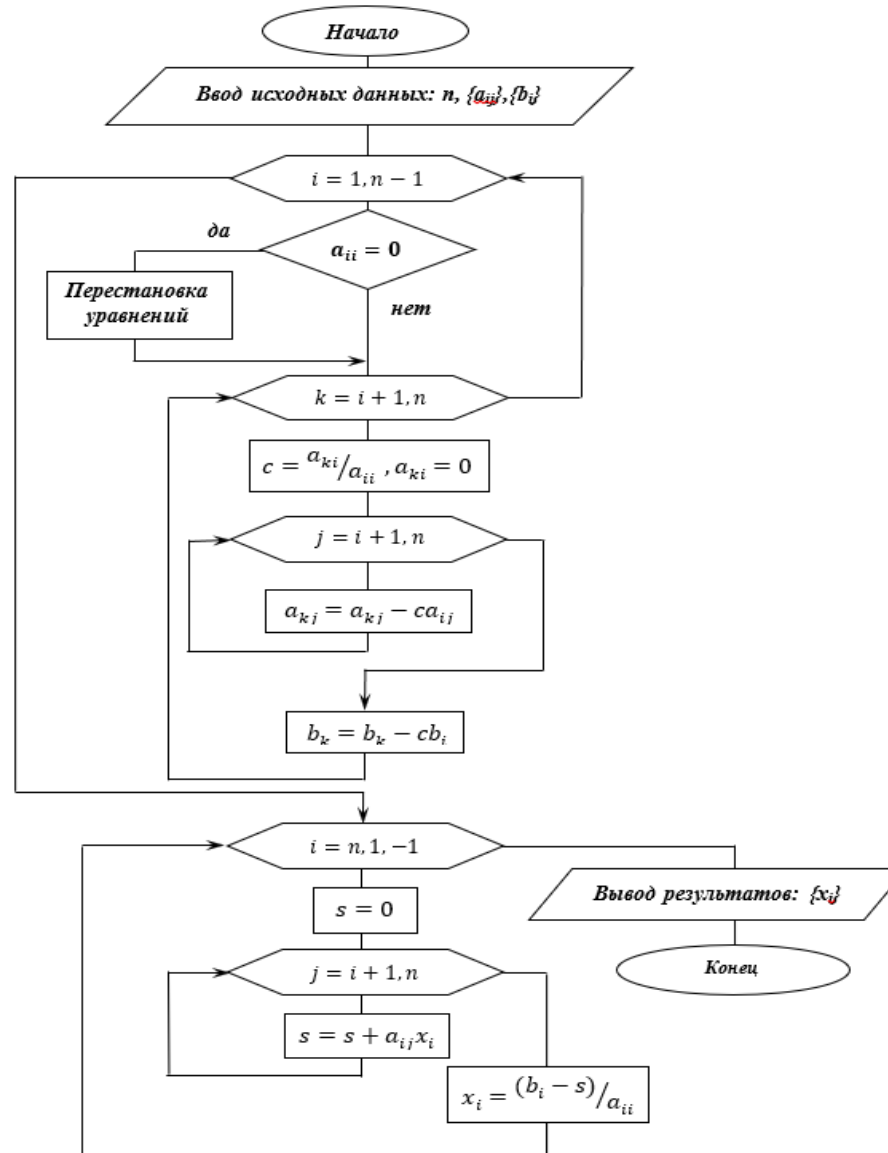
## Блок-схема метода Гаусса

Первый цикл с переменной цикла  $i$  реализует прямой ход, а второй – обратный ход метода.

$i$  – номер неизвестного, которое исключается из оставшихся  $n - 1$  уравнений при прямом ходе (а также номер уравнения, из которого исключается  $x_i$ ) и номер неизвестного, которое определяется из  $i$ -го уравнения при обратном ходе;

$k$  – номер уравнения, из которого исключается неизвестное  $x_i$  при прямом ходе;

$j$  – номер столбца при прямом ходе и номер уже найденного неизвестного при обратном ходе.





# Метод Гаусса. Пример 1

Рассмотрим алгоритм решения линейной системы методом Гаусса для случая трех уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 &= 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6 \end{cases}$$

Исключим  $x_1$  из второго и третьего уравнений. Для этого сначала умножим первое уравнение на 0.3 и результат прибавим ко второму, а затем умножим первое же уравнение на -0.5 и результат прибавим к третьему. Получим:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 &= 7 \\ -0,1x_2 + 6x_3 &= 6,1 \\ 2,5x_2 + 5x_3 &= 2,5 \end{cases}$$

Исключим  $x_2$  из третьего уравнения (заметим, что ведущий элемент  $a_{22}$  мал, поэтому было бы лучше переставить второе и третье уравнения). Однако мы проводим сейчас вычисления в рамках точной арифметики и погрешности округлений не опасны, поэтому продолжим исключение. Умножим второе уравнение на 25 и результат сложим с третьим уравнением. Получим систему в треугольном виде:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 &= 7 \\ -0,1x_2 + 6x_3 &= 6,1 \\ 155x_3 &= 155 \end{cases}$$

На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса.

Обратный ход состоит в последовательном вычислении  $x_3, x_2, x_1$

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1 \quad x_2 = \frac{6x_3 - 6,1}{0,1} = -1 \quad x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0$$

Подстановкой в исходную систему легко убедиться, что  $(0, -1, 1)$  и есть ее решение.



## Метод Гаусса. Пример 2

Изменим коэффициенты исходной системы:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + \mathbf{2,099}x_2 + 6x_3 = \mathbf{3,901} \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Здесь изменены коэффициент при  $x_2$  и правая часть второго уравнения.

Вычисления проведем в рамках арифметики с плавающей точкой, сохраняя пять разрядов числа.

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -0,001x_2 + 6x_3 = 6,001 \\ 2,5x_2 + 5x_3 = 2,5 \end{cases}$$

Следующий шаг исключения проводим при малом ведущем элементе (-0.001). Чтобы исключить  $x_2$  из третьего уравнения, надо умножить второе уравнение на 2500. При умножении  $6,001 \cdot 2500 = 15002,5$  при округлении до пяти разрядов  $\rightarrow 15\ 003$ .

$15003 + 2,5 = 15005,5 \rightarrow 15006$

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -0,001x_2 + 6x_3 = 6,001 \\ 15005x_3 = 15006 \end{cases} \quad x_3 = \frac{15006}{15005} = 1,0001 \quad x_2 = \frac{6,001x_3 - 6,1}{0,001} = -0,4 \quad x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0,42$$

Вычисления проводились с округлением до пяти разрядов по аналогии с процессом вычислений на компьютере. В результате этого было получено решение (0.42, -0.4, 1.0001) вместо (0, -1, 1).

Такая большая неточность результатов объясняется малой величиной ведущего элемента.



## Прямые методы. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Чтобы избежать вычислительной погрешности при значениях ведущих элементов, близких к нулю по абсолютной величине, применяется метод Гаусса с выбором главного элемента .

Эта схема является одной из модификаций метода Гаусса.

Идеей метода Гаусса с выбором главного элемента является такая перестановка уравнений, чтобы на  $k$ -ом шаге исключения ведущим элементом  $a_{ii}$  оказывался наибольший по модулю элемент  $k$ -го столбца.

Т.е. на очередном шаге  $k$  в уравнениях, начиная от  $k$  до последнего (  $i=k, k+1, \dots, n$  ) в столбце  $k$  выбирают максимальный по модулю элемент и строки  $i$  и  $k$  меняются местами. Это выбор главного элемента «по столбцу».

Выбор главного элемента «по строке» - на очередном шаге  $k$  в строке  $k$ , начиная со столбца  $k$  (  $j=k, k+1, \dots, n$  ) справа выбирается максимальный по модулю элемент. **Столбцы  $j$  и  $k$  меняются местами.**



## Прямые методы. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Выбор главного элемента «по столбцу»:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \color{red}{6} & 9 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ & \boxed{1-3} & \\ \color{red}{-3,5} & \color{red}{-0,5} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ & -3,5 & -0,5 \\ & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \\ -5,5 \end{pmatrix}$$

Выбор главного элемента «по строке»:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \color{red}{4} \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 1 & \boxed{6} \\ \boxed{2} & 8 & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & \color{red}{2} \\ & 0,5 & \color{red}{-4,5} \\ & -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -0,25 \\ 2,5 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ & \boxed{-4,5} & \boxed{0,5} \\ & \boxed{-2} & \boxed{-7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -0,25 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$



## Метод Гаусса с выбором главного элемента. Пример 3

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + \mathbf{2,099}x_2 + 6x_3 = \mathbf{3,901} \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -0,001x_2 + 6x_3 = 6,001 \\ 2,5x_2 + 5x_3 = 2,5 \end{array} \right.$$

До исключения  $x_2$  из третьего уравнения переставим уравнения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ \mathbf{2,5}x_2 + 5x_3 = 2,5 \\ \mathbf{-0,001}x_2 + 6x_3 = 6,001 \end{array} \right. \quad \text{выбор главного элемента «по столбцу» : } \mathbf{2,5}$$

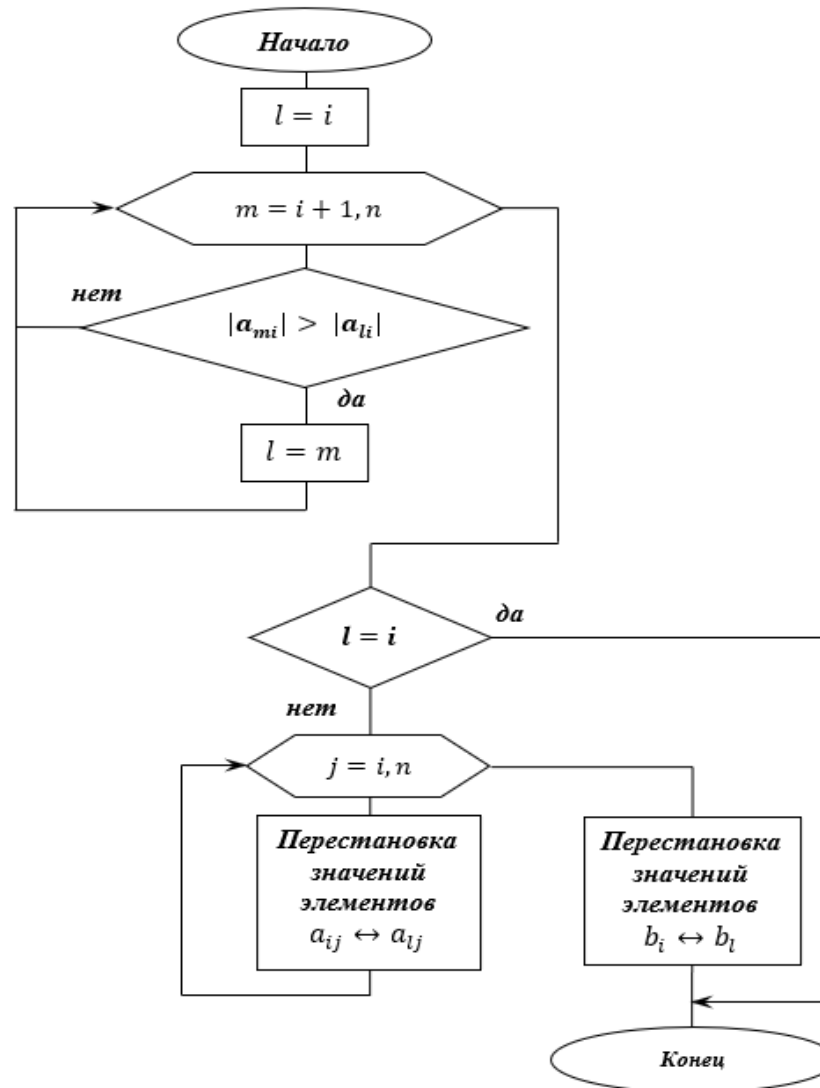
Исключим теперь  $x_2$  из третьего уравнения, получим:  $6,002x_3 = 6,002$

Отсюда находим  $x_3 = 1$ . Далее:  $x_2 = \frac{2,5 - 5x_3}{2,5} = -1$      $x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0$

Таким образом, в результате перестановки уравнений, т. е. *выбора наибольшего по модулю из оставшихся в данном столбце элементов*, погрешность решения в рамках данной точности исчезла.



## Блок-схема метод Гаусса с выбором главного элемента



$l$  – номер наибольшего по абсолютной величине элемента матрицы в столбце с номером  $i$  (т. е. среди элементов  $a_{ii}, \dots, a_{mi}, \dots, a_{ni}$ );

$m$  – текущий номер элемента, с которым происходит сравнение;

Выбор главного элемента осуществляется по столбцу



## Погрешности решения

Решения, получаемые с помощью прямых методов, обычно содержат погрешности, которые возникают из-за погрешностей округлений при выполнении операций над числами с плавающей точкой. В ряде случаев эти погрешности могут быть значительными.

Существуют две величины, характеризующие степень отклонения полученного решения от точного:

**абсолютная погрешность**  $\Delta x = x - x^*$ ,

где  $x$  – точное решение,  $x^*$  – численное решение, вычисленное по методу Гаусса.

**невязка**  $r = Ax^* - b$ ,

разность между левой и правой частями уравнений при подстановке в них решения  $x^*$ .

В практических расчетах, если система не является плохо обусловленной, **контроль точности решения осуществляется с помощью невязки** (погрешность же обычно вычислить невозможно, поскольку неизвестно точное решение).

Метод Гаусса с выбором главного элемента дает малые невязки.





## Определитель

Из курса линейной алгебры известно, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Определитель после приведения матрицы  $A$  к треугольному виду вычисляется по формуле:

$$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$k$  – число перестановок строк (или столбцов) матрицы при ее приведении к треугольному виду (для получения ненулевого или максимального по модулю ведущего элемента на каждом этапе исключения).

Знак определителя меняется на противоположный при перестановке его столбцов или строк.



## Другие прямые методы

**Метод Холецкого** (метод квадратных корней) используется для симметрично и положительно определенной матрицы  $A$ . Схема устойчива и требует вдвое меньше арифметических операций, чем метод Гаусса.

**Метод прогонки** используется при решении краевых задач для дифференциальных уравнений.

**Схема Жордана** – система приводится к диагональному виду (а не к треугольному), но облегчается обратный ход.

**Метод оптимального исключения** удобен при построчном вводе матрицы системы в оперативную память.

**Клеточные методы** могут использоваться для решения больших систем, когда матрица и вектор правых частей целиком не помещаются в оперативной памяти.



# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ПРЯМЫЕ (ТОЧНЫЕ)

ИТЕРАЦИОННЫЕ (ПРИБЛИЖЕННЫЕ)

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

это методы последовательных приближений.

Задается некоторое начальное приближение. Далее с помощью определенного алгоритма проводится один цикл вычислений - итерация. В результате итерации находят новое приближение. Итерации выполняются до получения решения с требуемой точностью.

### Достоинства:

- требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с  $n$  компонентами. Иногда элементы матрицы можно совсем не хранить, а вычислять их по мере необходимости.
- погрешности не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется лишь результатами предыдущей итерации и практически не зависит от ранее выполненных вычислений.

### Недостатки:

- Алгоритмы итерационных методов более сложные по сравнению с прямыми методами.



## Итерационные методы

Итерационные методы дают возможность для системы (1) построить последовательность векторов  $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ , пределом которой должно быть точное решение  $\vec{x}^{(*)}$ :  $\vec{x}^{(*)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}^{(k)}$

Построение последовательности заканчивается, как только достигается желаемая точность.

**Критерии окончания итерационного процесса:**

**Критерий по абсолютным отклонениям**, наиболее простой и часто используемый способ – это сравнение между собой соответствующих неизвестных по двум соседним итерациям (k) и (k-1):

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon$$

**Критерий по относительным разностям:**

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

**Критерий по невязке:**

$$\max_{1 \leq i \leq n} |r_i^{(k)} = Ax_i^{(k)} - b| \leq \varepsilon$$



# Итерационные методы. Метод простой итерации

Рассмотрим систему линейных уравнений с невырожденной матрицей ( $\det A \neq 0$ ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5)$$

Приведем систему уравнений к виду (6), выразив неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответственно из первого, второго и т.д. уравнений системы (5):

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \dots \\ x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \quad (6)$$



# Итерационные методы. Метод простой итерации

Обозначим:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \dots \dots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}$$

Или в векторно-матричном виде:  $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}$ , где  $\mathbf{x}$  – вектор неизвестных,  $\mathbf{C}$  – матрица коэффициентов преобразованной системы размерности  $n \times n$ ,  $\mathbf{D}$  – вектор правых частей преобразованной системы.



# Итерационные методы. Метод простой итерации

Систему (6) представим в сокращенном виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Рабочая формула метода простой итерации:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где  $k$  – номер итерации.

За начальное (нулевое) приближение выбирают вектор свободных членов:  $x^{(0)} = D$  или нулевой вектор:  $x^{(0)} = 0$

Следующее приближение:  $\vec{x}^{(1)} = c\vec{x}^{(0)} + \vec{d}$ ,  $\vec{x}^{(2)} = c\vec{x}^{(1)} + \vec{d} \dots$

$$\vec{x}^{(k)} = c\vec{x}^{(k-1)} + \vec{d}$$



# Итерационные методы. Условия сходимости

*Теорема.* Достаточным условием сходимости итерационного процесса к решению системы при любом начальном векторе  $x_i^{(0)}$  является выполнение условия **преобладания диагональных элементов** или доминирование диагонали:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго. Эти условия являются достаточными для сходимости метода, но они не являются необходимыми, т. е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении этого условия.





## Итерационные методы. Метод простой итерации

*Теорема.* Достаточным условием сходимости итерационного метода к решению системы при любом начальном векторе  $x_i^{(0)}$  является требование к норме матрицы  $C$ :

$$\|C\| < 1$$

$$\|C\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1$$

$$\|C\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1$$

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2} < 1$$

Условие сходимости  $\|C\| < 1$  в этом методе равносильно условию диагонального преобладания.

## Итерационные методы. Метод простой итерации

Следует особо отметить, что в решении СЛАУ этим методом наиболее сложным и трудоемким является выполнение преобразования системы из вида (5) к виду (6). Эти преобразования должны быть эквивалентными, т.е. не меняющими решения исходной системы и обеспечивающие величину нормы матрицы  $\|C\| < 1$

Единого рецепта для выполнения таких преобразований не существует. Здесь в каждом конкретном случае необходимо проявлять **творчество!!!!**

### Достоинства метода:

- Является универсальным и простым для реализации на ЭВМ

### Недостатки метода:

- Является трудоемким
- Обладает медленной скоростью сходимости



## Метод простой итерации. Пример

Методом простых итераций с точностью  $\varepsilon = 0,01$  решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

Условие преобладания диагональных элементов не выполняется, так как  $|2| < |2| + |10|$ ,  $|1| < |10| + |1|$ ,  $|1| < |2| + |10|$ . Переставим уравнения местами так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения  $x_1$ , из второго  $x_2$ , из третьего  $x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,2 \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}$$



## Метод простой итерации. Пример

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$d = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

Заметим, что норма преобразованной матрицы:

$\|C\| = \max(0,2; 0,3; 0,4) = 0,4 < 1$ , следовательно, условие сходимости выполнено.

Зададим начальное приближение:

$$x^0 = d = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

Выполним расчеты по формуле:  $x^{k+1} = Cx^k + d$  или:

$$x_1^{k+1} = -0,1x_2^k - 0,1x_3^k + 1,2$$

$$x_2^{k+1} = -0,2x_1^k - 0,1x_3^k + 1,3$$

$$x_3^{k+1} = -0,2x_1^k - 0,2x_2^k + 1,4$$



## Метод простой итерации. Пример

Для первого приближения получаем:

$$x_1^1 = -0,1 \cdot 1,3 - 0,1 \cdot 1,4 + 1,2 = 0,93$$

$$x_2^1 = -0,2 \cdot 1,2 - 0,1 \cdot 1,4 + 1,3 = 0,92$$

$$x_3^1 = -0,2 \cdot 1,2 - 0,2 \cdot 1,3 + 1,4 = 0,9$$

$$\max \begin{pmatrix} |x_1^1 - x_1^0| \\ |x_2^1 - x_2^0| \\ |x_3^1 - x_3^0| \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,38 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ Критерий по абсолютным отклонениям}$$

k	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$	$\max  x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} $
0	1,200	1,3000	1,4000	-
1	0,9300	0,9200	0,9000	0,5
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,13
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0108
5	0,9996	0,9995	0,9993	0,0031 < ε

Приближенное решение задачи: (0,9996; 0,9995; 0,9993). Очевидно, точное решение: (1,1,1)



# Метод Гаусса-Зейделя

Филипп Людвиг фон Зейдель

(1821-1896 гг. , немецкий математик и астроном)



Метод Гаусса-Зейделя является модификацией метода простой итерации и обеспечивает более быструю сходимость к решению систем уравнений.

Так же как и в методе простых итераций строится эквивалентная СЛАУ и за начальное приближение принимается вектор правых частей (как правило, но может быть выбран и нулевой, и единичный вектор):  $x_i^0 = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

$$x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1$$

$$x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2$$

... ..

$$x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n$$



## Метод Гаусса-Зейделя

Идея метода: при вычислении компонента  $x_i^{(k+1)}$  на  $(k+1)$ -й итерации используются  $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ , уже вычисленные на  $(k+1)$ -й итерации.

Значения остальных компонент  $x_{i+1}^{(k+1)}, x_{i+2}^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$  берутся из предыдущей итерации.

Схема для  $k = 1$ :

$$x_1^1 \rightarrow x_2^0 \quad x_3^0 \quad x_4^0$$

$$x_2^1 \rightarrow x_1^1 \quad x_3^0 \quad x_4^0$$

$$x_3^1 \rightarrow x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_4^0$$

$$x_4^1 \rightarrow x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1$$

# Метод Гаусса-Зейделя

Тогда приближения к решению системы методом Зейделя определяются следующей системой равенств:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \cdots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\x_2^{(k+1)} &= c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \cdots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\x_3^{(k+1)} &= c_{31}x_1^{(k+1)} + c_{32}x_2^{(k+1)} + c_{33}x_3^{(k)} \cdots + c_{3n}x_n^{(k)} + d_3\end{aligned}$$

$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n$$

### Рабочая формула метода Гаусса-Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока:

$$|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}| \leq \varepsilon, \quad |x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}| \leq \varepsilon, \quad |x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}| \leq \varepsilon$$





## Метод Гаусса-Зейделя

### Достоинства метода:

- Является универсальным и простым для реализации на ЭВМ.
- Обеспечивает более быструю сходимость (по сравнению с методом простой итерации)

### Недостатки метода:

- Является трудоемким



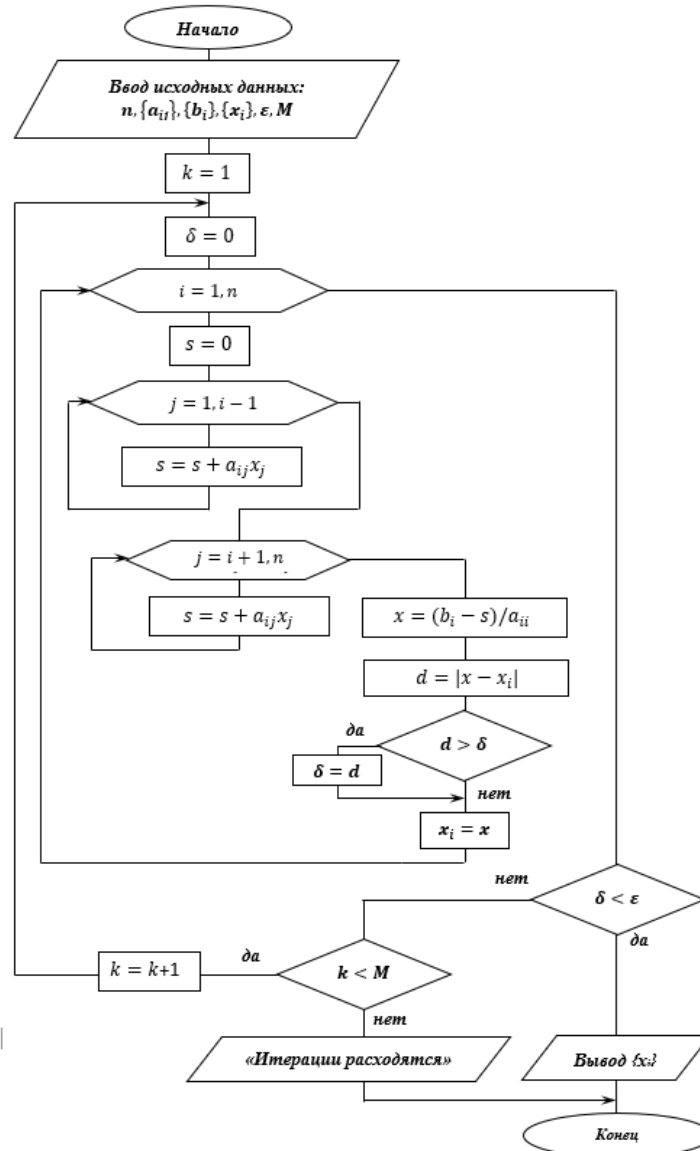
# Блок-схема метод Гаусса-Зейделя

$n$  – порядок матрицы,  
 $\varepsilon$  – погрешность вычислений,  
 $a_{ij}, b_i$  – коэффициенты и правые части уравнений системы,  
 $x_i$  – начальные приближения,  
 $M$  – максимально допустимое число итераций,  
 $k$  – порядковый номер итерации;  
 $i$  – номер уравнения, а также переменного, которое вычисляется в соответствующем цикле;

$j$  – номер элемента вида  $a_{ij}x_j^{(k)}$  или  $a_{ij}x_j^{(k-1)}$  в правой части соотношения.

Итерационный процесс прекращается либо при выполнении условия:

$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$ , либо при  $k = M$ , т.е. итерации не сходятся.





## Метод Гаусса-Зейделя. Пример

Методом Гаусса-Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0,01$  решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

Приведем систему  $Ax = b$  к виду  $x = Cx + d$  :

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,2 \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

Норма матрицы  $\|C\| = \max(0,2; 0,3; 0,4) = 0,4 < 1$ , условие сходимости выполняется.



## Метод Гаусса-Зейделя. Пример

Зададим начальное приближение:

$$x^0 = d = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

Выполним расчеты по формуле:

$$x_1^{k+1} = -0,1x_2^k - 0,1x_3^k + 1,2$$

$$x_2^{k+1} = -0,2x_1^{k+1} - 0,1x_3^k + 1,3$$

$$x_3^{k+1} = -0,2x_1^{k+1} - 0,2x_2^{k+1} + 1,4$$

Для первого приближения получаем:

$$x_1^1 = -0,1 \cdot 1,3 - 0,1 \cdot 1,4 + 1,2 = 0,93$$

$$x_2^1 = -0,2 \cdot 0,93 - 0,1 \cdot 1,4 + 1,3 = 0,974$$

$$x_3^1 = -0,2 \cdot 0,93 - 0,2 \cdot 0,974 + 1,4 = 1,0192$$

$$\max \begin{pmatrix} |x_1^1 - x_1^0| \\ |x_2^1 - x_2^0| \\ |x_3^1 - x_3^0| \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,326 \\ 0,3808 \end{pmatrix}$$



## Метод Гаусса-Зейделя. Пример

k	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$	$\max  x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} $
0	1,200	1,3000	1,4000	-
1	0,9300	0,9740	1,0192	0,3808
2	1,0007	0,9979	1,0028	0,0707
3	0,9997	0,9998	1,0001	0,0027 < $\varepsilon$

Как видно, итерационный процесс завершился быстрее, чем в методе простой итерации (5 итераций).



## Список литературы:

1. Турчак, Л.И., П.В. Плотников. Основы численных методов — Москва : Физматлит, 2002. — 304 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/2351>.
2. Волков, Е. А. Численные методы : учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 252 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/167179>
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебник / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 9-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 636 с.— URL: <https://e.lanbook.com/book/126099>.
4. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 672 с.  
URL: <https://e.lanbook.com/book/167894> .
5. Лабораторный практикум по вычислительной математике: учебно-методическое пособие.

[https://books.ifmo.ru/book/2669/laboratornyy\\_praktikum\\_po\\_vychislitelnoy\\_matematike:\\_uchebno-metodicheskoe\\_posobie..htm](https://books.ifmo.ru/book/2669/laboratornyy_praktikum_po_vychislitelnoy_matematike:_uchebno-metodicheskoe_posobie..htm)