МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное Государственное Автономное Образовательное Учреждение
Высшего Образования "Национальный Исследовательский Университет ИТМО"

ФАКУЛЬТЕТ ПИиКТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

по дисциплине
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Вариант № 7

Выполнил:
Студент группы P3219
Зайцев Артём
Михайлович
Преподаватель:
Бострикова Дарья
Константиновна

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

Цель

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Задание

Обязательное задание

Вычислительная реализация задачи:

1. Выбрать из табл. 1 заданную по варианту таблицу $y = f(x)$ (таблица 1.1 – таблица 1.5);
2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы. Таблицу отразить в отчете;
3. Вычислить значения функции для аргумента X1 (см. табл.1), используя
первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;
4. Вычислить значения функции для аргумента X2 (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;

Программная реализация задачи

1. Исходные данные задаются тремя способами:
a) в виде набора данных (таблицы x,y), пользователь вводит значения с клавиатуры;
b) в виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов);
c) на основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, sin. Пользователь выбирает уравнение, исследуемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функций).
2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей;
3. Вычислить приближенное значение функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл. 2). Сравнить полученные значения;
4. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами);

Вычислительная реализация задачи

По моему варианту предлагается построить интерполяционные многочлены по следующим данным

x	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
y	1,532	2,5356	3,5406	4,5462	5,5504	6,5559	7,5594

Затем посчитаем конечные разности и построим талибцу

xi	d0yi	d1yi	d2yi	d3yi	d4yi	d5yi	d6yi	d7yi
x1	1	0.250	0.500	0	0	0	0	
x2	1.250	0.750	0.500	0	0	0		
x3	2	1.250	0.500	0	0			
x4	3.250	1.750	0.500	0				
x5	5	2.250	0.500					
x6	7.250	2.750						
x7	10							

Найдём приближенное значение функции при заданных X

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
0,502	0,751	0,523	0,761	0,545	0,783	0,557

Видно, что все они находятся в левой половине отрезков -> воспользуется 1 формулой Ньютона

Вычислим интерполяционный многочлен

$$1.0 * \Delta^0 y_0 + \Delta^1 y_0 * t + \Delta^2 y_0 * t * (t-1)/2 + \Delta^3 y_0 * t * (t-2) * (t-1)/6 + \\ + \Delta^4 y_0 * t * (t-3) * (t-2) * (t-1)/24 + \Delta^5 y_0 * t * (t-4) * (t-3) * (t-2) * (t-1)/120 + \\ + \Delta^6 y_0 * t * (t-5) * (t-4) * (t-3) * (t-2) * (t-1)/720$$

При $t = \frac{x - 0.5}{0.05}$

Получается

$$Np(x) = 20.072x - 2.305 \cdot 10^{-5} \cdot (20.0x - 15.0)(20.0x - 14.0) \\ (20.0x - 13.0)(20.0x - 12.0)(20.0x - 11.0)(20.0x - 10) + 4.9 \cdot 10^{-5} \cdot (20.0x - 14.0)(20.0x - 13.0) \\ (20.0x - 13.0)(20.0x - 12.0)(20.0x - 11.0)(20.0x - 10) - 0.0001$$

Теперь посчитаем заданные X

X	0,502	0,751	0,523	0,761	0,545	0,783	0,557
Y	1.572	6.576	1.994	6.777	2.435	7.219	2.6761

Затем найдём приближённые значения X с помощью формулы Гаусса

Напишем формулу интерполяционного многочлена Гаусса

Давайте за А возьмём 0.7, чтобы все значения были меньше А.

Тогда $t = \frac{x - 0.7}{0.05}$

Значит сам многочлен будет иметь следующий вид

$$Gp(x) = \Delta^{-1} y_1 * (20.0 * x - 14.0) + \Delta^{-1} y_2 * (20.0 * x - 14.0) * (20.0 * x - 13.0)/2 + \\ \Delta^{-2} y_3 * (20.0 * x - 15.0) * (20.0 * x - 14.0) * (20.0 * x - 13.0)/6 + \Delta^{-2} y_4 * (20.0 * x - \\ 15.0) * (20.0 * x - 14.0) * (20.0 * x - 13.0) * (20.0 * x - 12.0)/24 + \Delta^{-3} y_5 * (20.0 * x - 16.0) * \\ (20.0 * x - 15.0) * (20.0 * x - 14.0) * (20.0 * x - 13.0) * (20.0 * x - 12.0)/120 + \Delta^{-3} y_6 * (20.0 * x - \\ 16.0) * (20.0 * x - 15.0) * (20.0 * x - 14.0) * (20.0 * x - 13.0) * (20.0 * x - 12.0) * (20.0 * x - 11.0)/720 + \Delta^0 y_0$$

Подсчитаем его значение в каждой заданной точке:

X	0,645	0,651	0,639	0,661	0,627	0,683	0,641
Y	3.44	3.56	3.32	3.76	3.07	4.2	3.35

Исходный код программы

[Реализация вычислительных методов]()

Лагранж

```
n = self.X.size
res = 0
for i in range(n):
    part = self.Y[i]

    big_mult = 1
    for j in range(n):
        if i == j:
            continue
        big_mult *= (X_sym - self.X[j]) / (self.X[i] - self.X[j])
    part *= big_mult

    res += part
return res
```

Ньютона

```
res = 0

for k in range(self.n):
    part = 1
    for j in range(k):
        part *= X_sym - self.X[j]

    part *= self.dd(self.X[:k + 1])

    res += part

return res
```

Равномерный Ньютон

```
res = 0
t = self._get_t()
for i in range(self.n):
    part = 1
    for j in range(i):
        part *= (t - j)
    part /= fac(i)

    part *= self.d_k_y_i(i)

    res += part

return res
```

Гаусс

```
res = 0
t = self._get_t()
for i in range(self.n):
```

```
            part = 1
            for j in range(1, i + 1):
                part *= (t + ((-1) ** (j + 1)) * (j // 2))
            part *= self.d_k_y_i(i, -1 * (i // 2))

            part /= fac(i)

            res += part
            pass
        return res
```

Стирлинга

```
    def _interpolate(self):
        return (super()._greater_interpolate() + super()._less_interpolate()) /
2
```

Бессель

```
        res = 0
        t = self._get_t()
        for i in range(self.n // 2):
            part1 = 1
            for j in range(2 * i):
                part1 *= (t + (-1) ** j * j // 2)

            part2 = (self.d_k_y_i(2 * i, -i) + self.d_k_y_i(2 * i, -i + 1)) / 2 /
fac(2 * i)

            part3 = (t - 1 / 2) * self.d_k_y_i(2 * i + 1, -i) / fac(2 * i + 1)

            full_part = part1 * (part2 + part3)
            res += full_part

        return res
```

Вывод:

После выполнения данной лабораторной работы я изучил численные методы интерполирования. Уверен, что полученные знания пригодятся в будущем.

Сами методы можно охарактеризовать следующим образом:

1) Лагранж - легко вычисляется, при добавлении новых узлов нужно пересчитывать
2) Ньютон - вычисляет чуть сложнее, но можно добавлять новые узлы, не пересчитывая предыдущее выражение
3) Гаусс: тут мы должны выбрать опорную точку и уже считать относительно её. Этот метод позволяет интерполировать, приближая исходную функцию.
4) Стирлинг: Среднее от $x < a$ и $x > a$ функций Гаусса. Используется при $|t| <= 0.25$
5) Бессель: Используется при $0.25 < |t| <= 0.5$