УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Малышева Татьяна Алексеевна, к.т.н., доцент
tamalysheva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2024

Постановка задачи

Пусть некоторая функция $\boldsymbol{f(x)}$ задана на отрезке $x\epsilon[a,b]$
и определена рядом своих точек $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, ..n,\ a \leq x_i \leq b$

Основная задача ***интерполяции*** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

<u>Определение 1.</u> Точки $x_0, x_1, \dots x_n$ называются ***узлами интерполяции***. Точка, в которой нужно найти значение функции – ***точкой интерполяции***.

Требуется построить интерполирующую функцию $F(x)$, принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е. $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$.

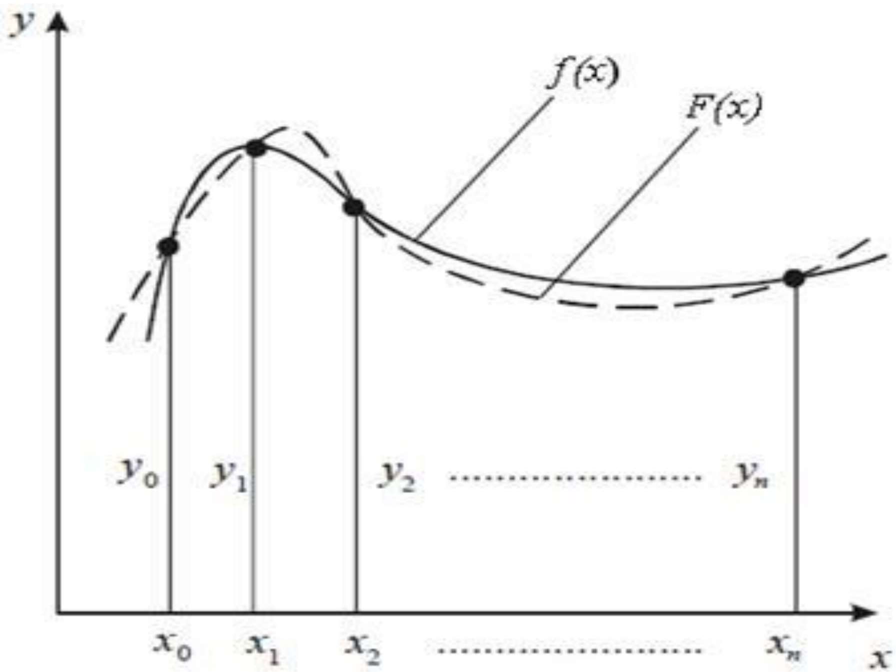
Тогда, ***условие интерполяции***: $F(x_i) = y_i$.

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

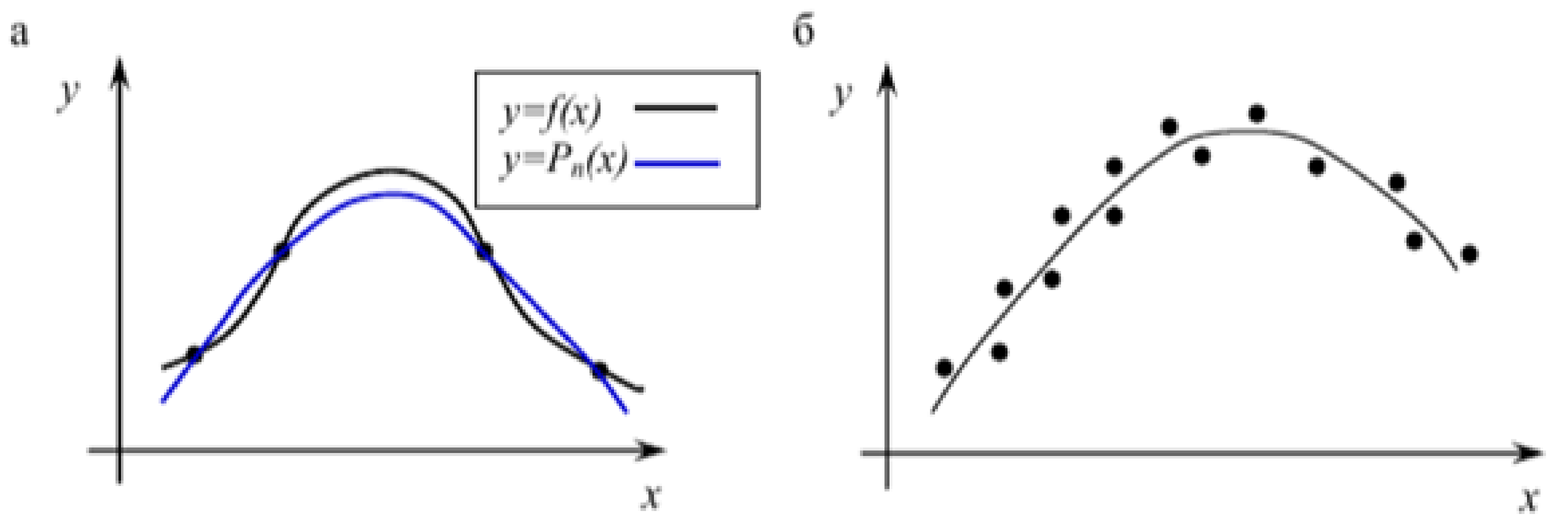
Геометрическая интерпретация

<u>**Определение 2.**</u> Процесс вычисления значений функции $F(x)$ в точках отличных от узлов интерполирования называется ***интерполированием*** функции $f(x)$. При этом различают ***интерполирование*** в узком смысле, когда x принадлежит интервалу $[x_0, x_n]$, и ***экстраполирование***, когда x находится за пределами отрезка.



Геометрически задача интерполирования функции означает построение кривой $y = F(x)$ проходящей через заданные точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n)

Геометрическая интерпретация



Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующего полинома (б) для точечно заданной функции

Основная задача ***интерполяции*** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

Основная задача ***аппроксимации*** — построение эмпирической формулы, для которой $f(x_i) \approx \varphi(x_i)$.

Интерполяция функции

Наиболее распространены следующие виды *интерполяции*:

- ***линейная интерполяция***, при которой промежуточная точка, расположенная между двумя узловыми точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}), лежит на отрезке прямой, соединяющей две ближайшие узловые точки;
- ***квадратичная интерполяция***, при которой промежуточная точка между узловыми точками (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)и (x_{i+1}, y_{i+1}) лежит на отрезке параболы, соединяющей эти узловые точки;
- ***полиномиальная интерполяция***, при которой промежуточные точки вычисляются как значение некоторого многочлена $P_n(x)$, причем $P_n(x_i) = f(x_i)$;
- ***сплайновая интерполяция***, при которой промежуточные точки находятся с помощью отрезков полиномов невысокой степени, проходящих через узловые точки и поддерживающие определенные условия стыковки в концевых точках;

Интерполяция функции

Задача нахождения интерполяционной функции $F(x)$ имеет бесконечное число решений, так как через заданные точки x_i, y_i можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции.

Однако эта задача становится однозначно разрешимой, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше *n*, удовлетворяющий условиям $P_n(x_i) = f(x_i)$:

$$\boldsymbol{F(x) = P_n(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n, \quad i = 0, 1, \dots, n} \qquad \textbf{(1)}$$

Определение 3. Алгебраический многочлен, удовлетворяющий условиям интерполяции, называется ***интерполяционным многочленом***.

Интерполяция функции

В случае использования в качестве интерполирующей функции многочлена $\boldsymbol{n}$-й степени $F(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$ (требующий $\boldsymbol{n+1}$ узел интерполяции) задача интерполяция табличной функции имеет единственное решение, т.е. *коэффициенты* $a_0, \ldots, a_n$ *определяются единственным образом*.

Можно составить систему из $\boldsymbol{n+1}$ линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$. Матрица коэффициентов этой СЛАУ называется матрицей **Вандермонда**. Ее определитель не равен нулю, поскольку все значения узлов интерполяции различны между собой и ни одна из строк не является линейной комбинацией других строк

$$\begin{array}{l} i=0 \\ i=1 \\ \ldots \\ i=n \end{array} \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & . & x_1^n \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & x_n^n \end{pmatrix} \neq 0$$

Интерполяция функции

Примечание. Вычисление коэффициентов полинома посредством решения системы в вычислительной практике ***реализуется крайне редко***.

Причиной этого является плохая обусловленность

матрицы Вандермонда, приводящая к заметному росту погрешности при выполнении условий интерполирования уже при сравнительно невысоких порядках полинома.

Вычислительные затраты реализации метода пропорциональны n^3.

Интерполяция функции

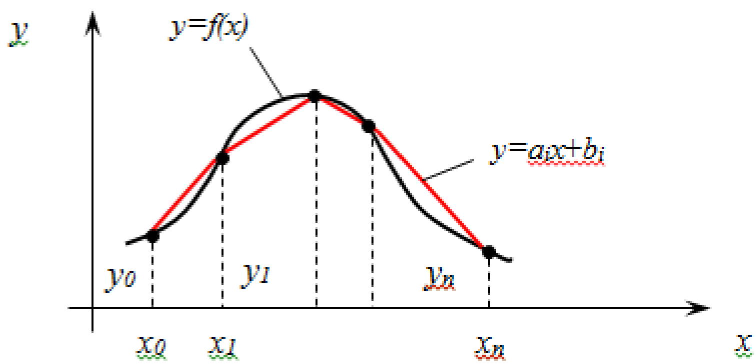
Глобальная интерполяция → Полином един для всей области интерполяции

Локальная (кусочная) интерполяция → Между различными узлами полиномы различны

Линейная интерполяция

Линейная интерполяция является простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции . Она состоит в том, что заданные точки (x_i, y_i), соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается к ломаной с вершинами в данных точках.

Уравнения каждого отрезка ломаной линии в общем случае разные. Поскольку имеется *n* интервалов (x_{i-1}, x_i) то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного полинома используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для i — го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), в виде: $\frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}} = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$



$$y = a_i x + b_i\ ,\ \ x_{i-1} \le x \le x_i \quad (2)$$

$$a_i = \frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

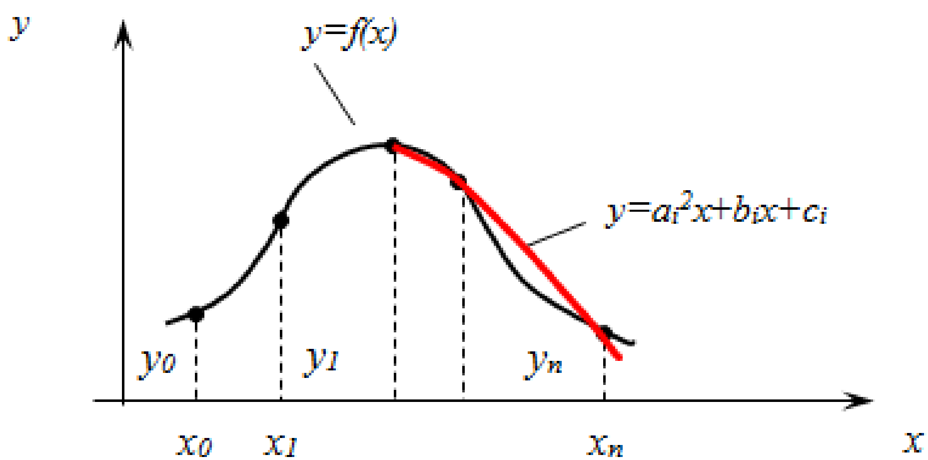
Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента *x*, а затем подставить его в формулу (2) и найти приближенное значение функций в этой точке.

Квадратичная интерполяция

В случае ***квадратичной интерполяции*** в качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен.

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad x_{i-1} \le x \le \ x_{i+1} \tag{3}$$

Для определения неизвестных коэффициента a_i , b_i , c_i необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы через три точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$. Эти условия можно записать в виде:



$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}$$
$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i$$
$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}$$

Интерполяция для любой точки $x \in [x_0,\ x_n]$ проводится по трем ближайшим ней узлам.

Локальная интерполяция

Пример 1. Найти приближенное значение функции $y = f(x)$ при $\mathrm{x} = 0{,}35$ для заданной таблицы:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

1. Используем линейную интерполяцию. Значение x=0,35 находится между узлами $x_{i-1} = 0{,}3$ и $x_i = 0{,}4$. Тогда:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{5{,}44 - 3{,}79}{0{,}4 - 0{,}3} = 16{,}5$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 3{,}79 - 16{,}5 \cdot 0{,}3 = -1{,}16$$

$$\boldsymbol{y \approx 16{,}5x - 1{,}16 = 16{,}5 \cdot 0{,}35 - 1{,}16 = 4{,}615}$$

2. Используем квадратичную интерполяцию. Составим систему уравнений для ближайших узлов к точке x=0,35: $x_{i-1} = 0{,}2$, $x_i = 0{,}3$, $x_{i+1} = 0{,}4$.

Соответственно $y_{i-1} = 2{,}38$, $y_i = 3{,}79$, $y_{i+1} = 5{,}44$.

$$0{,}2^2 a_i + 0{,}2 b_i + c_i = 2{,}38$$
$$0{,}3^2 a_i + 0{,}3 b_i + c_i = 3{,}79$$
$$0{,}4^2 a_i + 0{,}4 b_i + c_i = 5{,}44$$

В результате решения системы, получим: $a_i = 12$, $b_i = 8{,}1$, $c_i = 0{,}28$.

$$\boldsymbol{y \approx 12 \cdot 0{,}35^2 + 8{,}1 \cdot 0{,}35 + 0{,}28 = 4{,}585}$$

Многочлен Лагранжа

Построим интерполяционный полином $L_n(x)$, степени не больше n и для которого выполнены условия $L_n(x_i) = y_i$ (4)

$$L_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$$

Лагранж предложил строить многочлен $Ln(x)$ в виде:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \cdots + l_n(x) \qquad (5)$$

где $l_i(x)$ – полином степени n, который удовлетворяет условию:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = x_i \text{ (если } i = j) \\ 0, & \text{во всех других узлах (если } i \neq j) \end{cases} \qquad (6)$$

Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ – корни этого многочлена. Требование (6) совместно с выражением (5) обеспечивает выполнение условий (4).

Многочлен Лагранжа

Полиномы $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots .(x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad (7)$$

Здесь в каждом полиноме $l_i(x)$ отсутствует скобка $(x - x_i)$, которой соответствует коэффициент c_i.

Найдем неизвестные коэффициенты $c_i, i = 0,1, \dots, n,$ называемые коэффициентами Лагранжа, используя условие: $L_n(x_i) = y_i$

При $x = x_0$ $Ln(x_0) = y_0$

$$L_n(x_0) = c_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots .(x_0 - x_n) = y_0$$

Следовательно, коэффициент c_0 вычисляется по следующей формуле:

$$c_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots .(x_0 - x_n)}$$

При $x = x_1$ $L_n(x_1) = y_1$

$$L_n(x_1) = c_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots .(x_1 - x_n) = y_1$$

Следовательно, коэффициент c_1 вычисляется по следующей формуле:

$$c_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots .(x_1 - x_n)}$$

Многочлен Лагранжа

Значения остальных коэффициентов вычисляются аналогично:

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Тогда:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_3 - x_n)} \dots\dots$$

Многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

$$Ln(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (8)$$

Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях n ($n < 20$).

К недостаткам можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все ***вычисления проводить заново***.

Многочлен Лагранжа

Линейная и квадратичная интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

При n=1 (два узла и первая степень многочлена):

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

При n=2 (три узла и вторая степень многочлена):

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Оценка погрешности

В точках, отличных от узлов, интерполяционный полином $P(x)$ отличается от значения функции $f(x)$ на величину ***остаточного члена***: $R_n(x) = f(x) - P(x)$

Погрешность при использовании многочлена Лагранжа определяется формулой:

$$R_n(x) \le \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots . (x - x_n)|$$

$$M^{(n+1)}(x) = \max_{x \in [x_0; x_n]} f^{n+1}(x)$$

Применение этой формулы затрудняется необходимостью вычисления константы $M^{(n+1)}$, ведь о функции $f(x)$ в общем случае неизвестно ничего, кроме таблицы. Для решения этой проблемы приходится привлекать дополнительные соображения, например, геометрические или физические, все, что известно о $f(x)$ в каждом конкретном случае.

Например, получили $R_n(x) \approx 0{,}000017$, т.е. интерполяционный многочлен дает четыре верных знака после запятой. Однако нужно учитывать погрешности табличных данных и вычислений многочлена, поэтому верных знаков, скорее всего, будет меньше.

Многочлен Лагранжа

Пример 2. Найти приближенное значение функции $y = f(x)$ при x=0,35 для заданной таблицы с помощью многочлена Лагранжа.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}1-0{,}2)(0{,}1-0{,}3)(0{,}1-0{,}4)(0{,}1-0{,}5)}$$
$$= 0{,}0234375 * y_0 = 0{,}0234375 * 1{,}25 = 0{,}029297$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}3)(0{,}2-0{,}4)(0{,}2-0{,}5)}$$
$$= (-0{,}15625) * y_1 = (-0{,}15625) * 2{,}38 = -0{,}37187$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}2)(0{,}3-0{,}4)(0{,}3-0{,}5)}$$
$$= 0{,}703125 * y_2 = 0{,}703125 * 3{,}79 = 2{,}66485$$

Многочлен Лагранжа

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(0{,}35 - 0{,}1)(0{,}35 - 0{,}2)(0{,}35 - 0{,}3)(0{,}35 - 0{,}5)}{(0{,}4 - 0{,}1)(0{,}4 - 0{,}2)(0{,}4 - 0{,}3)(0{,}4 - 0{,}5)}$$
$$= 0{,}46875 * y_3 = 0{,}46875 * 5{,}44 = 2{,}55$$

$$l_4(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{(0{,}35 - 0{,}1)(0{,}35 - 0{,}2)(0{,}35 - 0{,}3)(0{,}35 - 0{,}4)}{(0{,}5 - 0{,}1)(0{,}5 - 0{,}2)(0{,}5 - 0{,}3)(0{,}5 - 0{,}4)}$$
$$= -0{,}0390625 * y_4 = -0{,}0390625 * 7{,}14 = -0{,}27891$$

$$\boldsymbol{L_4(0,35) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) + l_4(x) = 4,59336}$$

Пример 3. Построить многочлен Лагранжа, если функция $y = f(x)$задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

n=3

$$L_3(x) = 0 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} +$$
$$7 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5$$

Многочлен Лагранжа

Пример 4: Вычислить, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, $\sqrt{105}$ и оценить погрешность.

Решение: Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$

x	100	121	144
y	10	11	12

$\boldsymbol{n = 2}$

$$\mathrm{L}_2(x) = 10 \cdot \frac{(105-121)(105-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \cdot \frac{(105-100)(105-144)}{(121-100)(121-144)} +$$
$$12 \cdot \frac{(105-100)(105-121)}{(144-100)(144-121)} = 10{,}245624$$

Оценим $R_2(x)$:

$$R_2(x) \le \frac{\max\limits_{x\in[x_0;x_n]} f'''(x)}{(3)!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad y'' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

$$\max_{x\in[100;144]} y'''(x) = \left|\frac{3}{8\sqrt{100^5}}\right| = \frac{3}{8}10^{-5}$$

$$R_2(x) < \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \, |(105-100)(105-121)(105-144)| \approx 1{,}95 \cdot 10^{-3}$$

Многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

При построении интерполяционного полинома в форме Ньютона используется понятие **разделенной разности**.

Разделенные разности применяются для функций, заданных на неравномерной сетке (**неравноотстоящие узлы)**.

Разделенные разности (или разностные отношения) **нулевого порядка** совпадают со значениями функции в узлах: $f(x_i) = y_i$.

Определение. Разделенные разности первого порядка называют величины (определяются через разделенные разности нулевого порядка):

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

Разделенные разности второго порядка называют величины (определяются через разделенные разности первого порядка):

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}$$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1},x_{i+2})-f(x_i,x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i}$$

Многочлен Ньютона

Разделенные разности k-го порядка определяются через разделенные разности порядка $k-1$:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Они определяются рекуррентно, начиная с первого порядка.

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0,\ x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0,\ x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$\boldsymbol{N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)} \qquad \textbf{(9)}$$

Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Для повышения точности интерполяции в сумму могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

Пример 5. Используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов найти приближенное значение функции ***для x=0,22***.

x	0,15	0,2	0,33	0,47
y	1,25	2,38	3,79	5,44

Решение: Вычисления произведем по формуле:

$$N_3(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)\cdot(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + f(x_0,x_1,x_2,x_3)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{2{,}38-1{,}25}{0{,}2-0{,}15} = 22{,}6$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{3{,}79-2{,}38}{0{,}33-0{,}2} = 10{,}846$$

$$f(x_2,x_3) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{5{,}44-3{,}79}{0{,}47-0{,}33} = 11{,}786$$

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,\ x_2)-f(x_{0,}x_1)}{x_2-x_0} = \frac{10{,}846-22{,}6}{0{,}33-0{,}15} = -65{,}3$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_2,\ x_3)-f(x_{1,}x_2)}{x_3-x_1} = \frac{11{,}786-10{,}846}{0{,}47-0{,}2} = 3{,}481$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0} = \frac{3{,}481\ +65{,}3}{0{,}47-0{,}15} = 214{,}941$$

$$y(0{,}22) = 1{,}25 + 22{,}6\cdot(0{,}22-0{,}15) - 65{,}3\cdot(0{,}22-0{,}15)\cdot(0{,}22-0{,}2) + 214{,}941\cdot(0{,}22-0{,}15)\cdot(0{,}22-0{,}2)\cdot(0{,}22-0{,}33) = 2{,}707$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Узлы интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ называются равноотстоящими, если: $x_i - x_{i-1} = h = const$, где h - шаг интерполирования, $x_i = x_0 + ih$.

Конечные разности применяются для функций, заданных на равномерной сетке.

Конечные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах: $f(x_i) = y_i$.

Конечными разностями первого порядка называют величины:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1$

Конечными разностями второго порядка называют величины:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Конечными разностями k-го порядка называют величины:

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \cdots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Аналогично для любого k можно записать:

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \cdots + (-1)^k y_0$$

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - k y_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \cdots + (-1)^k y_i$$

Используя конечные разности, можно определить y_k:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^k y_0$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона.

Этот многочлен запишем в виде:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \qquad (*)$$

Условие интерполяции $N_n(x_i) = y_i$ используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N_n(x_0) = a_0 = y_0$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1 h + 2a_1 h^2 = y_2$$

…………………

Найдем отсюда коэффициенты a_0, a_1, a_2:

$$a_0 = y_0, \qquad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \qquad a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Общая формула имеет вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}\, k = 0, 1, \dots, n$$

Подставляя эти выражения в (*), получим:

$$\boldsymbol{N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед:**

$$\boldsymbol{N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0}$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для $x_0 \le x \le x_1$. При этом за x_0 может приниматься любой узел интерполяции x_k. Например, для $x_1 \le x \le x_2$, вместо x_0 надо взять значение x_1. Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$\boldsymbol{N_n(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i} \quad (*)$$

Интерполяционную формулу (*) обычно используют для вычислений значений функции в точках левой половины отрезка.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h.$ Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад:**

$$\boldsymbol{N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0}$$

Экстраполирование функции

При **экстраполировании** для отыскания значений функции для $x < x_0$ используется первый интерполяционный многочлен Ньютона. В этом случае $t \leq 0$ и говорят, что первая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования назад**.

При отыскании значений функции для $x > x_n$ используется второй интерполяционный многочлен Ньютона.

В этом случае $t \geq 0$ и говорят, что вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования вперед**.

Замечание. При экстраполировании получаются бóльшие погрешности, чем при интерполировании. Поэтому пределы его применения ограничены. Тем не менее, экстраполирование можно проводить в узких пределах, например в пределах шага h.

В более далеких точках можно получить неверные значения y.

Формула Лагранжа применяется в обоих случаях.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности функций удобно располагать в таблице (чтобы нагляднее понимать какие конечные разности надо вычислять):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$				
x_5	y_5	Δy_5					
x_6	y_6						

Если $x_0 \le x \le x_1$, то при использовании **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

Δy_i, $i = 0,..5$	$\Delta^2 y_i$, $i = 0,..4$	$\Delta^3 y_i$, $i = 0,..3$	$\Delta^4 y_i$, $i = 0,..2$	$\Delta^5 y_i$, $i = 0,1$	$\Delta^6 y_i$, $i = 0$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i;\quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i;$

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i;\quad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

$t =(x - x_0)/h$

$$N_6(x) =$$

$$y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 +$$

$$\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\cdots$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\ddots$	
x_2	y_2				$\Delta^n y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
				$\iddots$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-1}$		
		Δy_{n-1}			
x_n	y_n				

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Если $x_1 \le x \le x_2$, можно также использовать предыдущую формулу.

Но, для увеличения точности вычислений, рекомендуется взять вместо x_0 значение x_1 и тогда при использовании **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

$\boldsymbol{t = (x - x_1)/h}$

Δy_i, $i = 1,..5$	$\Delta^2 y_i$, $i = 1,..4$	$\Delta^3 y_i$, $i = 1,..3$	$\Delta^4 y_i$, $i = 1,2$	$\Delta^5 y_i$, $i = 1$

$$N_n(x) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_1$$

Количество слагаемых в этом случае уменьшается на единицу!

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Для интерполирования назад все то же самое, только считаем с конца!!!!

$$N_6(x) = y_6 + t\Delta y_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_3$$
$$+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_2$$
$$+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}\Delta^5 y_1$$
$$+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Пример 6. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона найти приближенное значение функции для *x*=0,15, *x*=0,22 и *x*=0,47 по заданной таблице.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение:

№	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	$0,1$	$1,25$	$\Delta y_0 = 1,13$	$\Delta^2 y_0 = 0,28$	$\Delta^3 y_0 = -0,04$	$\Delta^4 y_0 = -0,15$
1	$0,2$	$2,38$	$\Delta y_1 = 1,41$	$\Delta^2 y_1 = 0,24$	$\Delta^3 y_1 = -0,19$	
2	$0,3$	$3,79$	$\Delta y_2 = 1,65$	$\Delta^2 y_2 = 0,05$		
3	$0,4$	$5,44$	$\Delta y_3 = 1,7$			
4	$0,5$	$7,14$				

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед, т.к. *x=0,15 x=0,22* лежат в левой половине отрезка.

Для *x*=0,15: $t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0{,}15-0{,}1}{0{,}1} = 0{,}5$

$$N_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$y(0{,}15) \approx 1{,}25 + 0{,}5 \cdot 1{,}13 + \frac{0{,}5(-0{,}5)}{2} \cdot 0{,}28 + \frac{0{,}5(-0{,}5)(-1{,}5)}{6} \cdot (-0{,}04) + \frac{0{,}5(-0{,}5)(-1{,}5)(-2{,}5)}{24} \cdot (-0{,}15) \approx 1{,}78336$$

Для *x*=0,22: $t = \frac{(x-x_1)}{h} = \frac{0{,}22-0{,}2}{0{,}1} = 0{,}2$

$$N_3(x) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1$$

$$y(0{,}22) \approx 2{,}38 + 0{,}2 \cdot 1{,}41 + \frac{0{,}2(-0{,}8)}{2} \cdot 0{,}24 + \frac{0{,}2(-0{,}8)(-1{,}8)}{6} \cdot (-0{,}19) \approx 2{,}63368$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад, т.к. *x=0,47* лежит в второй половине отрезка.

Для *x*=0,47: $t = \frac{(x - x_n)}{h} = \frac{0{,}47 - 0{,}5}{0{,}1} = -0{,}3$

$$N_4(x) = y_4 + t\Delta y_3 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$y(0{,}47) = 7{,}14 - 0{,}3 \cdot 1{,}7 + \frac{-0{,}3(-0{,}3+1)}{2!}0{,}05 + \frac{-0{,}3(-0{,}3+1)(-0{,}3+2)}{3!}(-0{,}19) + \frac{-0{,}3(-0{,}3+1)(-0{,}3+2)(-0{,}3+3)}{4!}(-0{,}15) \approx 6{,}64208$$

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Пример 7. Построить многочлен Ньютона, если функция $y = f(x)$задана таблицей:

x	1	2	3	4
y	0	3	5	7

n=3, h=1

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	0	3	-1	1
2	3	2	0	
3	5	2		
4	7			

$$N_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= 0 + 3(x - 1) + \frac{-1}{2}(x - 1)(x - 2) + \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3) = \frac{x^3}{6} - \frac{9}{6}x^2 + \frac{38}{6}x - 5$$

Погрешность интерполяционного полинома Ньютона

Погрешность интерполяции по формуле Ньютона оценивается также, как и при использовании многочлена Лагранжа, т.е. по формуле:

$$R_n(x) \leq \frac{M^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots . (x - x_n)|$$

$$M^{(n+1)}(x) = \max_{x \in [x_0; x_n]} f^{n+1}(x)$$

Однако, оценить производную высокого порядка часто бывает трудно, а порой и невозможно. Поэтому на практике пользуются следующим правилом: степень интерполяционного полинома должна совпадать с порядком практически постоянных конечных разностей.

Тогда оценка погрешности для первой интерполяционной формулы Ньютона находится по формуле:

$$R_n(x) \leq \left| \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!} \right| \Delta^{n+1} y_0 \qquad t = \frac{x - x_0}{h}$$

Оценка погрешности для второй интерполяционной формулы Ньютона находится по формуле:

$$R_n(x) \leq \left| \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} \right| \Delta^{n+1} y_n \qquad t = \frac{x - x_n}{h}$$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Узлы располагаются слева и справа от центральной точки a. Пусть требуется найти приближенное значение функции f в точке x между a и a+h: a<x<a+h.
Таким образом, поставлена интерполяции табличной функции в середине таблицы.
Идея: выражают входящие в интерполяционный многочлен Ньютона (9) разделенные разности через конечные с заменой переменной:

$$t = \frac{(x - x_0)}{h} = \frac{(x - \boldsymbol{a})}{h} \Rightarrow \boldsymbol{x = a + th}$$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

i	x_i	y_i
$n-1$	$a+(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]h$	$y_{(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	$a-3h$	y_{-3}
4	$a-2h$	y_{-2}
2	$a-h$	y_{-1}
0	a	y_0
1	$a+h$	y_1
3	$a+2h$	y_2
5	$a+3h$	y_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a+(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]h$	$y_{(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]}$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

Первая интерполяционная формула Гаусса $(x > a)$

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$
$$+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots$$
$$+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}$$
$$+ \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Интерполяционные многочлены Гаусса

Вторая интерполяционная формула Гаусса $(x < a)$

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n})(t+n-1)\ldots(t-n+\mathbf{1})}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n)$$

Интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя

1 формула

2 формула

<table>
<tr><th>x_i</th><th>y_i</th><th>Δy_i</th><th>$\Delta^2 y_i$</th><th>$\Delta^3 y_i$</th><th>$\Delta^4 y_i$</th><th>$\Delta^5 y_i$</th><th>$\Delta^6 y_i$</th><th>…</th></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td rowspan="2">…</td><td rowspan="3">…</td><td rowspan="4">…</td><td rowspan="5">…</td><td rowspan="6">…</td><td rowspan="7">…</td><td rowspan="16">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_{-3}</td><td rowspan="2">y_{-3}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_{-3}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_{-2}</td><td rowspan="2">y_{-2}</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_{-2}</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_{-1}</td><td rowspan="2">y_{-1}</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_{-2}$</td><td rowspan="2">$\Delta^4 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_{-1}</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_{-2}$</td><td rowspan="2">$\Delta^5 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>y_0</td><td>$\Delta^2 y_{-1}$</td><td>$\Delta^4 y_{-2}$</td><td>$\Delta^6 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>y_0</td><td rowspan="2">Δy_0</td><td>$\Delta^2 y_{-1}$</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_{-1}$</td><td>$\Delta^4 y_{-2}$</td><td rowspan="2">$\Delta^5 y_{-2}$</td><td>$\Delta^6 y_{-3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_1</td><td rowspan="2">y_1</td><td rowspan="2">$\Delta^2 y_0$</td><td rowspan="2">$\Delta^4 y_{-1}$</td><td rowspan="7">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_1</td><td rowspan="2">$\Delta^3 y_0$</td><td rowspan="6">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_2</td><td rowspan="2">y_2</td><td rowspan="2">$\Delta^2 1$</td><td rowspan="5">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δy_2</td><td rowspan="4">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_3</td><td rowspan="2">y_3</td><td rowspan="3">…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">…</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Интерполяционные формулы Гаусса

Пример 8. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса найти приближенное значение функции для x=0,32, x=0,28 по заданной таблице.

1 формула Гаусса (выделено желтым)

2 формула Гаусса (выделено зеленым)

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_{-2} = 0,1$	$y_{-2} = 1,25$	$\Delta y_{-2} = 1,13$	$\Delta^2 y_{-2} = 0,28$	$\Delta^3 y_{-2} = -0,04$	$\Delta^4 y_{-2} = -0,15$
$x_{-1} = 0,2$	$y_{-1} = 2,38$	$\Delta y_{-1} = 1,41$	$\Delta^2 y_{-1} = 0,24$	$\Delta^3 y_{-1} = -0,19$	
$x_0 = 0,3$	$y_0 = 3,79$	$\Delta y_0 = 1,65$	$\Delta^2 y_0 = 0,05$		
$x_1 = 0,4$	$y_1 = 5,44$	$\Delta y_1 = 1,7$			
$x_2 = 0,5$	$y_2 = 7,14$				

Интерполяционные многочлены Гаусса

1 формула Гаусса (выделено желтым):

$$t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,32-0,3}{0,1} = 0,2$$

$$P_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$y(0,32) \approx 3,79 + 0,2 \cdot 1,65 + \frac{0,2\cdot(-0,8)}{2} \cdot 0,24 + \frac{0,2\cdot 1,2\cdot(-0,8)}{6} \cdot (-0,19) + \frac{0,2\cdot 1,2\cdot(-0,8)(-1,8)}{24} \cdot (-0,15) \approx 4,10472$$

2 формула Гаусса (выделено зеленым):

$$t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0,28-0,3}{0,1} = -0,2$$

$$P_4(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$y(0,28) \approx 3,79 - 0,2 \cdot 1,41 + \frac{-0,2 \cdot 0,8}{2} \cdot 0,24 + \frac{-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2)}{6} \cdot (-0,04) + \frac{-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2) \cdot 1,8}{24} \cdot (-0,15) \approx 3,48536$$

Интерполяционный многочлен Стирлинга

Формула Стирлинга представляет собой среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса. Применяется для интерполирования при значениях t, близких к 0. На практике ее используют при $|t| \leq 0,25$. Строится по нечетному числу узлов

$$P_n(x) = y_0 + t\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{t^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{t^2(t^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$
$$+ \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \cdots$$
$$+ \frac{\boldsymbol{t\left(t^2 - 1^2\right)\left(t^2 - 2^2\right) \dots \left(t^2 - (n-1)^2\right)}}{\boldsymbol{(2n-1)!}} \cdot \frac{\boldsymbol{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}}{\boldsymbol{2}} +$$
$$+ \frac{\boldsymbol{t^2\left(t^2 - 1^2\right)\left(t^2 - 2^2\right) \dots \left(t^2 - (n-1)^2\right)}}{\boldsymbol{(2n)!}} \cdot \boldsymbol{\Delta^{2n} y_{-n}}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx h^{2n+1}\frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - n^2)$$

Интерполяционный многочлен Бесселя

Формула Бесселя применяется для интерполирования при значениях t, близких к 0,5. На практике ее используют при $0,25 \le |t| \le 0,75$. Строится по четному числу узлов

$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}$$
$$+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t+3)}{6!}\frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots$$
$$+ \frac{\boldsymbol{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots(t-n)(t+n-1)}}{\boldsymbol{(2n)!}} \cdot \frac{\boldsymbol{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}}{\boldsymbol{2}}$$
$$+ \frac{\boldsymbol{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots(t-n)(t+n-1)}}{\boldsymbol{(2n+1)!}}\boldsymbol{\Delta^{2n+1} y_{-n}}$$

Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx h^{2n+1}\frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!}t(t^2 - 1^2)\ldots(t^2 - n^2)(t - n - 1)$$

Интерполяционный многочлен Бесселя

Формула Бесселя при $t = 0,5$
(формула интерполирования на середину):

$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \frac{1}{8}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1))^2}{2^{2n}(2n)!}\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2}$$

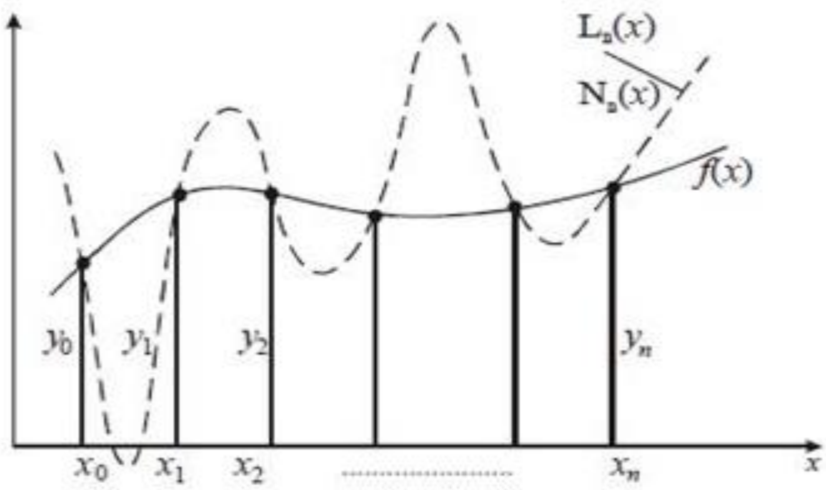
Оценка погрешности:

$$R_n(x) \approx (-1)^{n+1} h^{2n+2} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1))^2}{2^{2n+2}(2n+2)!}$$

Сплайн-интерполяция

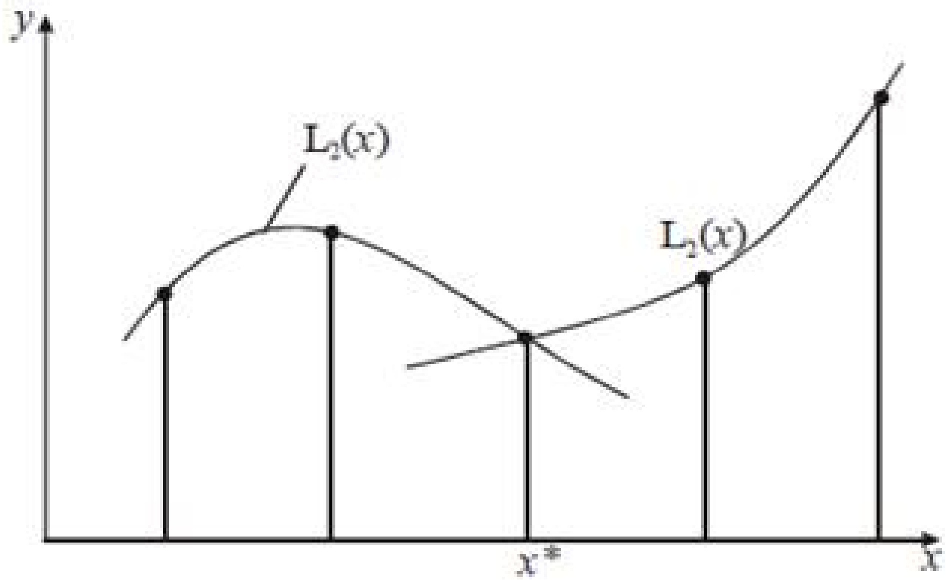
Глобальная интерполяция, когда интерполяционный полином строится сразу по всем узлам интерполяции, становится практически непригодна при $n > 10$, поскольку:

- при вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления
- интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию
- задача интерполяции может быть плохо обусловлена (проявление колебательных свойств многочлена)



Сплайн-интерполяция

Можно применить ***локальную интерполяцию***.
Отрезок, на котором определена функция, можно разбить на участки, содержащие малое число экспериментальных точек, и для каждого из них построить интерполяционные полиномы. Обычно полиномиальную интерполяцию осуществляют максимум по 5-7 узлам.
Однако в этом случае аппроксимирующая функция будет иметь точки, где производная не является непрерывной, т. е. график функции будет содержать точки “излома” - точка x*.



Сплайн-интерполяция

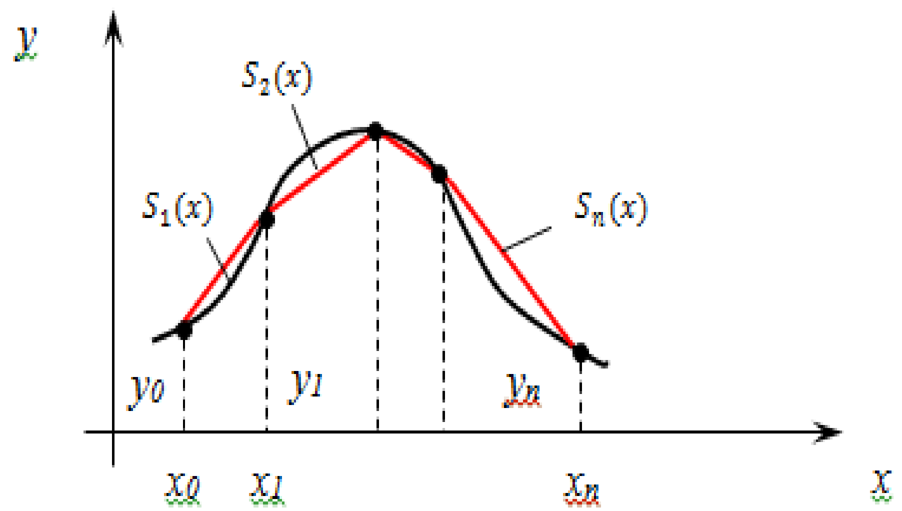
Альтернатива глобальной интерполяции

Пусть на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функция $P(x)$ является некоторым многочленом $S_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.

В такой постановке задача имеет множество решений.

Единственность решения можно обеспечить, потребовав от функции $P(x)$ некоторой гладкости в местах стыков функций $S_i(x)$, то есть в узлах интерполяции.

Кусочно-линейная интерполяция.
На каждом отрезке функция аппроксимируется линейно.
Дополнительных условий не требуется, условия гладкости на $P(x)$ в данном случае не налагаются.



Сплайн-интерполяция

Наиболее широко применяемым является вариант, в котором между любыми двумя точками строится многочлен *n*-й степени.

$$\boldsymbol{S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x^k, \quad x_{i-1} \le x \le x_i}$$

который в узлах интерполяции принимает значения интерполируемой функции и непрерывен вместе со своими $(n-1)$ производными. Такой кусочно-непрерывный интерполяционный многочлен называется ***сплайном.***

Сплайном степени *n* называется функция $S_n(x)$, обладающая следующими свойствами:
1. Функция $S_n(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0;\ x_n]$ вместе со всеми своими производными: $S_n^{(1)}(x)\ S_n^{(2)}(x) \dots .\ S_n^{(p)}(x)$ до некоторого порядка *p*;
2. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ функция $S_{n,i}(x)$ является многочленом $P_{n,i}(x)$ степени *n*.

Характеристики сплайна:
1. Степень сплайна – максимальная из степеней использованных полиномов.
2. Гладкость сплайна – максимальный порядок непрерывной производной.
3. Дефект сплайна – разность между степенью сплайна и его гладкостью.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1
Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1

Сплайн-интерполяция

Наибольшее распространение на практике получили сплайны $S_3(x)$ 3-й степени – кубические сплайны.

Кубическим интерполяционным сплайном называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом интервале $[x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, \dots, n$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени;

2. функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные $S'(x), S''(x)$ непрерывны на отрезке $[x_0;\ x_n]$ (гладкость = 2).

Кубический сплайн является многочленом третьей степени, который для *i*-го участка записывается так:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $S_i(x)$ в окрестности точки x_i . Поскольку $S_i(x)$ — кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что:

$$a_i = S_i(x_i) \quad b_i = S'_i(x_i) \quad c_i = S''_i(x_i) \quad d_i = S'''_i(x_i)$$

Сплайн-интерполяция

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех *n* элементарных отрезках необходимо получить 4*n* уравнений.

Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции S(*x*) через заданные точки:

$S(x_{i-1}) = y_{i-1}$

$S(x_i) = y_i$

Часть дополняет условиями непрерывности сплайна и непрерывности первой и второй производных в узлах интерполяции:

$S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$

$S'_i(x_{i-1}) = S'_{i-1}(x_{i-1})$

$S''_i(x_{i-1}) = S''_{i-1}(x_{i-1})$

И добавляют граничные условия:

$S''(x_0) = 0 \;\; S''(x_n) = 0$

$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_i h_i + 3d_i {h_i}^2$

$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) = c_i + 3d_i h_i$

Сплайн-интерполяция

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i

$h_i = (x - x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n.$

$a_{i-1} = S_{i-1}(x_{i-1}) = S_i(x_{i-1}) =$

$a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + c_i(x_{i-1} - x_i)^2 + d_i(x_{i-1} - x_i)^3 = a_i - b_i h_i + c_i {h_i}^2 - d_i {h_i}^3$

$i = 2, 3, \dots, n$

Выразим условия непрерывности первой и второй производной:

$b_{i-1} = S'_{i-1}(x_{i-1}) = S'_i(x_{i-1}) = b_i + 2c_i(x_{i-1} - x_i) + 3d_i(x_{i-1} - x_i)^2$

$= b_i - 2c_i h_i + 3d_i {h_i}^2$

$c_{i-1} = S''_{i-1}(x_{i-1}) = S''_i(x_{i-1}) = 2c_i + 6d_i(x_{i-1} - x_i) = c_i - 3d_i h_i \quad i = 2, 3, \dots, n$

Выразим условия интерполирования:

$a_i = S_i(x_i) = y_i \qquad i = 1, 2, \dots, n$

Для x_0 **имеем:**

$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + c_1(x_0 - x_1)^2 + d_1(x_0 - x_1)^3$

Для краевых условий:

$c_1 - d_1 h_1 = S''_1(x_0) = 0$

$c_n = S''_n(x_n) = 0$

Сплайн-интерполяция

Полученную систему линейных уравнений можно упростить до системы уравнений с трехдиагональной матрицей, которую решают методом прогонки (модификация метода Гаусса для частного случая разряженных систем).
В результате серии упрощений получится система относительно только значений $c_{1},\ldots,c_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ h_1 & \delta_1 & h_2 & & & & \\ & h_2 & \delta_2 & h_3 & & & \\ & & h_3 & \delta_3 & h_4 & & \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & & h_{n-1} & \delta_{n-1} & h_n \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \ldots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \ldots \\ \varepsilon_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$a_i = f_i,$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} + \frac{2 \cdot c_i + c_{i-1}}{3} \cdot h_i.$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3 \cdot h_i},$$

где: $\delta_i = 2 \cdot (h_i + h_{i+1}),\ \varepsilon_i = 3 \cdot \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), i \in [1, n-1].$