
Simulation numérique

Stade de Bunimovich

Néo POTRON

Alex CASSI

143

Introduction

Un billard mathématique est un système dynamique idéal où une particule se déplace librement sur une surface plane bornée, subissant des collisions élastiques avec les parois. Si la géométrie du bord est simple, le mouvement est souvent intégrable et prédictible. Cependant, Leonid Bunimovich a démontré en 1974 qu'une forme de stade, composée d'un rectangle fermé par deux demi-cercles, suffit à engendrer un comportement chaotique et ergodique. L'objectif de ce projet est de simuler ce système dynamique à l'aide de Python afin d'étudier numériquement l'émergence du chaos. Nous avons d'abord modélisé la dynamique d'une particule unique, puis observé la divergence des trajectoires avec deux particules, avant d'ajouter la complexité des collisions mutuelles. Enfin, nous avons quantifié le chaos via l'exposant de Lyapunov et vérifié les propriétés d'ergodicité du système.

1 Simulation à une particule

1.1 Gestion des temps de collision

La première étape a consisté à construire un moteur physique capable de gérer les interactions avec les parois d'un stade horizontal défini par une longueur droite L et une largeur W . La fonction principale de simulation `md_step` procède par une approche événementielle. À chaque étape, l'algorithme calcule les temps de collision potentiels avec toutes les parois. Il sélectionne le temps le plus court ($\min(\Delta t)$), avance la particule jusqu'à ce point d'impact précis, puis applique le changement de vitesse adéquat.

1.1.1 Pour une paroi horizontale

Lorsque la particule se déplace entre les deux murs plats situés en $y = 0$ et $y = W$, le temps de collision Δt dépend de la composante verticale de la vitesse v_y . Si $v_y > 0$ (la particule monte vers le mur du haut), la collision a lieu quand :

$$y(t) + v_y \Delta t = W - R$$

Si $v_y < 0$ (la particule descend vers le mur du bas) :

$$y(t) + v_y \Delta t = R$$

Où : $y(t)$ est la position actuelle, W la largeur du stade et R le rayon de la particule. On en déduit Δt immédiatement.

1.1.2 Pour une paroi circulaire

La détection des collisions avec les arcs est plus complexe, nécessitant de résoudre l'intersection entre une trajectoire linéaire et un cercle. Cela revient à chercher l'instant t où la distance entre la particule et le centre de l'arc vaut le rayon effectif $R_{eff} = W/2 - r$. Nous distinguons deux arcs : l'arc gauche, centré en $C_G = (0, W/2)$, et l'arc droit, centré en $C_D = (L, W/2)$. Pour un arc donné de centre C , nous définissons le vecteur position relatif $\Delta \vec{r}$:

$$\Delta \vec{r} = \vec{P}_{particule} - \vec{P}_{centre}$$

La condition de collision s'écrit $\|\Delta \vec{r} + \vec{v} \Delta t\|^2 = R_{eff}^2$, ce qui conduit à une équation quadratique de la forme :

$$a(\Delta t)^2 + b\Delta t + c = 0$$

avec :

$$a = \|\vec{v}\|^2 \quad b = 2(\Delta \vec{r} \cdot \vec{v}) \quad c = \|\Delta \vec{r}\|^2 - R_{eff}^2$$

Les solutions sont données par :

$$\Delta t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nous ne retenons que la plus petite solution positive réelle. De plus, une vérification géométrique est effectuée pour s'assurer que l'impact a bien lieu sur l'arc considéré.

1.2 Dynamique du rebond

La loi de réflexion spéculaire utilisée dépend de la normale au point d'impact notée \vec{n} . Il faut alors considéré le mur comme une particule de masse infinie. Considérons une collision élastique entre une particule de masse m_1 et une cible de masse m_2 . La variation de vitesse est donnée par la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique :

$$\Delta \vec{v}_1 = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2} ((\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Dans le cas d'une paroi immobile ($\vec{v}_2 = \vec{0}$) et infiniment lourde ($m_2 \rightarrow \infty$), le terme de masse tend vers 2. On retrouve ainsi la loi de réflexion implémentée :

$$\Delta \vec{v} = -2(\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

2 Simulation à deux particules

Pour étudier la sensibilité aux conditions initiales, nous avons introduit une seconde particule. Nous plaçons deux particules avec un écart de position initial infinitésimal ($\|\Delta \vec{r}_0\| = 10^{-5}$) et des vitesses identiques. Nous avons comparé visuellement l'évolution de ces deux trajectoires dans des géométries différentes :

- Dans un cercle parfait ($L = 0$) : Le système est mathématiquement intégrable. La distance entre les particules évolue de manière linéaire et non exponentielle. Les trajectoires restent strictement parallèles, illustrant la stabilité absolue du système.
- Dans un quasi-cercle ($L = 0,1$) : Nous simulons ici une géométrie très légèrement allongée. Bien que la symétrie parfaite soit brisée, nous observons que les particules conservent des trajectoires quasi-parallèles et restent groupées sur une très longue durée. La perturbation géométrique est encore insuffisante pour provoquer une divergence immédiate.
- Dans le stade ($L = 10$) : La situation est radicalement différente. Après une courte phase transitoire, les particules se séparent brutalement suite aux rebonds sur les parties courbes défocalisantes. Elles finissent par explorer des régions totalement différentes du stade, signant l'émergence du chaos.

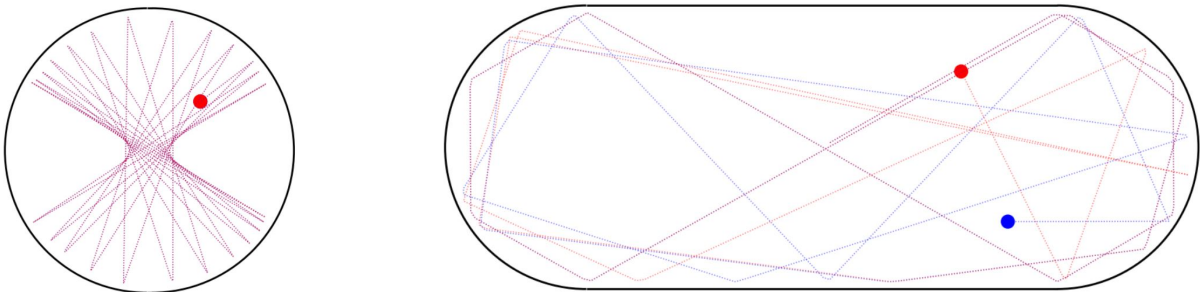


Figure 1 – Comparaison de l'évolution temporelle de deux particules initialement très proches après un temps $t = 25$ s. **Gauche** : Quasi-cercle. **Droite** : Stade de Bunimovich.

Cette observation qualitative confirme la nature chaotique du stade de Bunimovich par opposition aux billards réguliers.

3 Simulation à deux particules avec collisions inter-particules

Afin de rendre la simulation plus réaliste, nous avons implémenté les chocs élastiques entre particules (sphères dures). Le temps de collision est calculé en résolvant $\|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\|^2 = (2r)^2$. Lors du choc, les vitesses sont mises à jour selon la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, utilisant la même formulation vectorielle que pour les parois :

$$\vec{v}_{1,new} = \vec{v}_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

L'ajout des collisions internes complexifie les trajectoires individuelles mais ne modifie pas la nature fondamentale du système. Dans le stade, la divergence exponentielle est maintenue (et potentiellement accélérée par les chocs supplémentaires), confirmant la robustesse du chaos géométrique imposé par les parois courbes.

4 Quantification du chaos

4.1 Métrique de divergence

Soit la métrique $d(t)$ comme la distance euclidienne entre les deux particules à l'instant t :

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Nous traçons l'évolution de cette grandeur au cours du temps (Figure 2). Jusqu'à $t \approx 20$, les deux particules suivent des trajectoires quasi-identiques. Cette phase est transitoire puisque la distance entre les deux particules augmente de manière exponentielle. Puis, on observe une saturation car le stade borné est de taille finie.

4.2 L'exposant de Lyapunov

La théorie du chaos prédit une divergence exponentielle des trajectoires proches. Pour extraire l'exposant de Lyapunov λ , nous traçons le logarithme de la distance, tel que :

$$d(t) \sim d_0 e^{\lambda t} \quad \implies \quad \ln(d(t)) = \ln(d_0) + \lambda t$$

Comme le montre la Figure 2, nous obtenons une droite de pente positive dans la phase transitoire. Une régression linéaire sur cette zone nous permet de calculer $\lambda \approx 0,555$ (pour $L = 10, W = 6$). Une valeur positive confirme mathématiquement le chaos. Plus l'exposant est grand plus le système est chaotique, c'est-à-dire plus les trajectoires divergent rapidement.

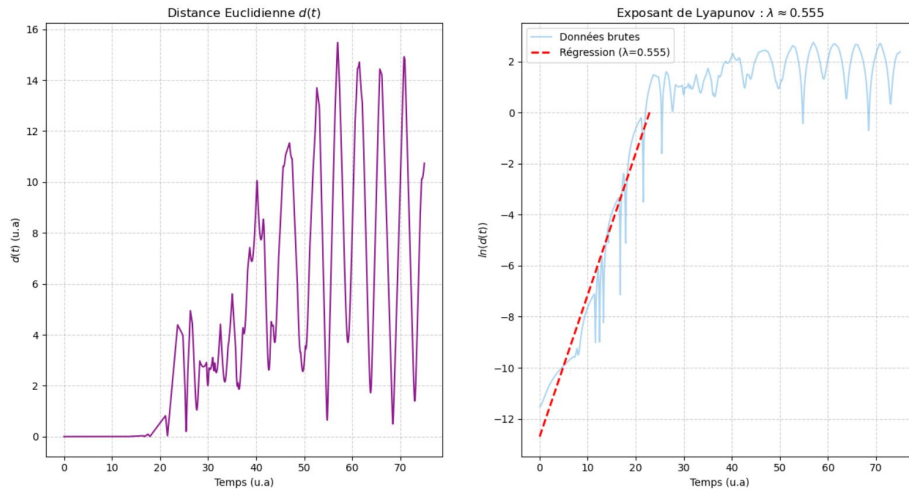


Figure 2 – Évolution de la métrique de divergence avec le temps dans un stade avec $L = 10$. **Gauche** : Distance brute $d(t)$. **Droite** : Échelle semi-log montrant le régime exponentiel.

5 Études avancées du système

5.1 Étude paramétrique : transition vers le chaos

Nous avons automatisé le calcul de l'exposant de Lyapunov λ pour différentes géométries en faisant varier la longueur L du stade (Figure 3).

- Transition $L \rightarrow 0$: Pour $L = 0$ (cercle), nous mesurons $\lambda \approx 0$, confirmant le caractère intégrable du système. Dès que $L > 0$, même pour une valeur infime, nous observons un saut brutal de λ vers des valeurs positives. Cette discontinuité marque une transition géométrique immédiate.
- Plateau maximal ($L \approx 2$ à 8) : Nous observons un plateau de chaos maximal lorsque la longueur du stade est comparable à sa largeur ($L \sim W$). La fréquence des collisions avec les arcs est suffisamment élevée pour disperser les trajectoires, tout en laissant assez d'espace libre pour que cette dispersion s'amplifie exponentiellement entre deux chocs.
- Comportement asymptotique ($L \gg W$) : Pour de très grands L , λ diminue progressivement. La particule passe la majorité de son temps en vol libre régulier entre les murs plats et frappe de plus en plus rarement les arcs, qui sont les seules sources de dispersion. Le système tend asymptotiquement vers la géométrie intégrable du billard rectangulaire, réduisant la densité temporelle de divergence.

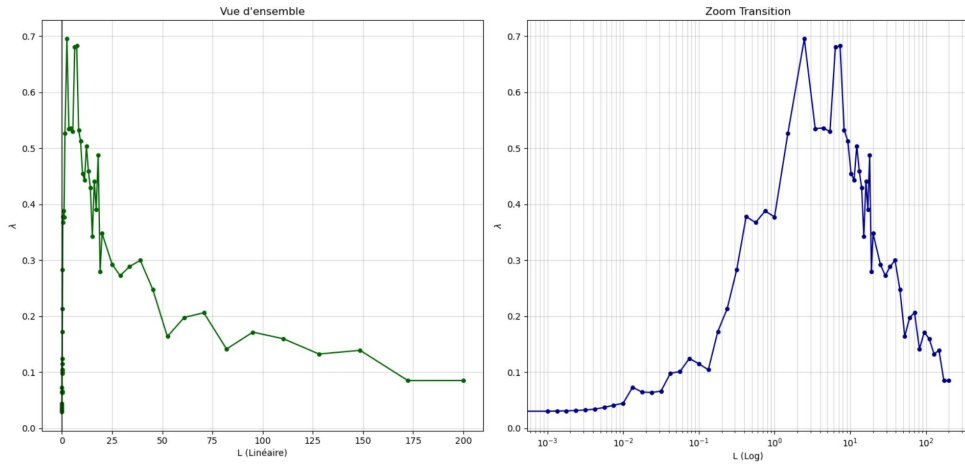


Figure 3 – Évolution de l'exposant de Lyapunov λ en fonction de la longueur L . **Gauche** : Vue d'ensemble montrant la décroissance asymptotique. **Droite** : Échelle logarithmique mettant en évidence la rupture de symétrie brutale au voisinage de $L = 0$.

5.2 Carte de chaleur : ergodicité

Un système est dit ergodique si une trajectoire unique finit par visiter l'ensemble de l'espace des phases accessible de manière uniforme sur une longue durée. Nous avons vérifié cette propriété en générant des cartes de chaleur haute résolution (300 000 pas de simulation). Nous comparons ici plusieurs géométries (Figure 4) :

- Le cercle ($L = 0$) : Ce système est rigoureusement intégrable. La conservation du moment cinétique empêche la diffusion chaotique. Avec nos conditions initiales (particule lancée depuis le centre), le moment cinétique est nul donc la particule effectue indéfiniment des allers-retours rectilignes le long d'un diamètre. Elle ne visite qu'une ligne infiniment fine de la surface, rendant le système trivialement non-ergodique.
- Le quasi-cercle ($L = 0,05$) : Bien que la symétrie circulaire soit brisée, le système reste en régime quasi-intégrable. La densité de probabilité n'est absolument pas uniforme. La particule reste piégée dans une trajectoire quasi-périodique en forme d'étoile, fortement

concentrée au centre. Elle explore très peu la périphérie du disque. Cette forte dépendance aux conditions initiales confirme que le système n'est pas ergodique.

- Le stade ($L = 10$) : La géométrie défocalisante des arcs induit un mélange efficace des trajectoires. La carte de chaleur révèle une distribution spatiale parfaitement homogène, la particule a exploré équitablement chaque zone du billard, confirmant le caractère ergodique du mouvement chaotique.

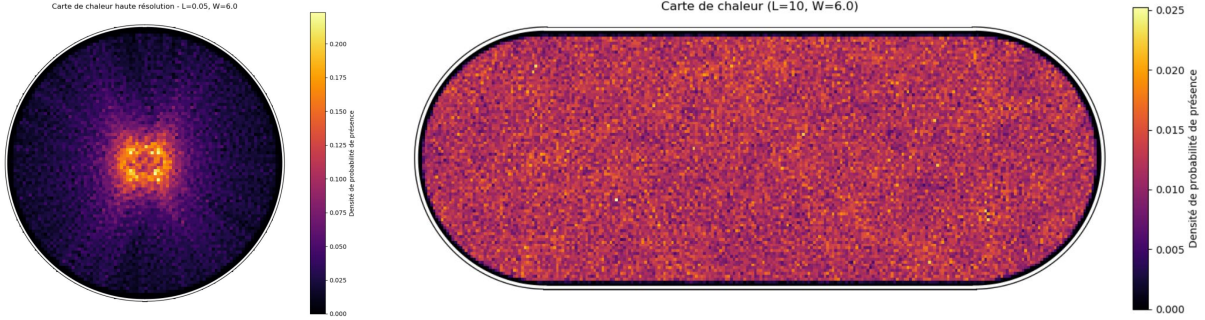


Figure 4 – Comparaison des cartes de densité de probabilité de présence pour deux géométries distinctes. *Gauche* : Quasi-cercle. *Droite* : Stade de Bunimovich.

Conclusion et perspectives

Ce projet de simulation numérique nous a permis de passer de la modélisation mécanique élémentaire à l'étude statistique approfondie d'un système dynamique. Nous avons réussi à reproduire numériquement la transition vers le chaos, à la quantifier objectivement via l'exposant de Lyapunov, et à illustrer l'ergodicité du stade de Bunimovich à l'aide de cartes de chaleur.

Il est important de souligner que cette divergence a été initiée par une perturbation spatiale minime ($\|\Delta\vec{r}_0\| = 10^{-5}$), bien inférieure à la taille physique de la particule ($\sigma = 0,15$). Ce résultat illustre l'universalité du chaos déterministe dans ce système. Il existe une sensibilité critique aux conditions initiales qui se manifesterait de manière identique avec une variation infinitésimale de la vitesse ou de l'angle de tir.

Cette étude a néanmoins mis en lumière certaines limites inhérentes à notre approche. Sur le plan numérique, la gestion des singularités mathématiques (cas $v_y \rightarrow 0$ parallèle aux murs) et l'accumulation des erreurs d'arrondi flottant imposent une limite à la précision sur des temps très longs. Sur le plan technique, nous avons identifié un goulot d'étranglement dans l'affichage graphique. La méthode de tracé de l'historique complet entraîne un ralentissement progressif de l'animation, tandis que le caractère bloquant de la librairie `matplotlib` contraint le flux d'exécution entre la visualisation et l'analyse.

Malgré ces contraintes techniques, la cohérence physique des résultats valide la robustesse de notre programme `simul.py`. Les outils développés forment une base solide qui pourrait être étendue à l'étude de billards plus complexes. À titre de perspective, si la puissance de calcul le permettait, il serait pertinent de caractériser plus finement le comportement asymptotique pour un L très grand, afin de confirmer la convergence lente vers le régime intégrable du billard rectangulaire.