VI

Superposition des ondes lumineuses

«Ce n'est point l'observation mais la théorie qui m'a conduit à ce résultat que l'expérience a ensuite confirmé.»
Augustin Fresnel (1788-1827)

Plan du chapitre

I Expériences préliminaires

I.1 Superposition de deux vibrations lumineuses issues de deux sources

Superposons deux vibrations lumineuses issues chacune d'un laser He-Ne. OBSERVATIONS :
- La zone commune aux deux faisceaux montre une augmentation perceptible de l'intensité lumineuse.
- Aucun autre phénomène constaté dans cette zone commune.

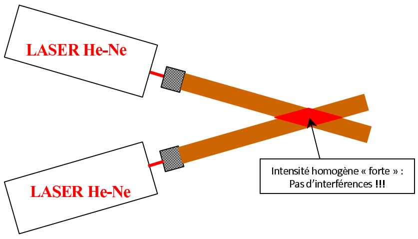


FIGURE VI.1 – Superposition de deux faisceaux laser distincts ⇒ absence d'interférences

I.2 Superposition de deux vibrations lumineuses issues d'une même source

Le dispositif expérimental des trous d'Young se compose d'un très petit trou S (source primaire) éclairé par un faisceau de lumière parallèle monochromatique, la lumière sortant de S éclairant un ensemble de deux très petits trous disposés dans un plan perpendiculaire à l'axe du montage ;

On utilise pratiquement un faisceau LASER comme source primaire.

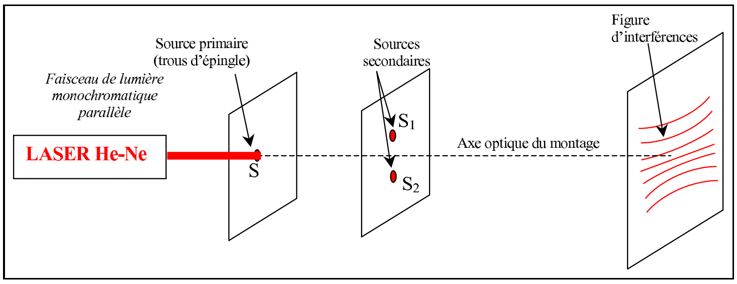


FIGURE VI.2 – Expériences des trous d'Young

Enfin, on dispose un écran loin des sources, et perpendiculaire à l'axe optique du montage. On constate alors l'apparition de **franges d'interférences** sur l'écran d'observation **dans la zone commune des faisceaux issus de chacun des trous**.

On constate ainsi que les intensités de ces derniers ne s'additionnent pas dans cette zone. En appelant :
$I_1(M \in \text{zone commune})$ l'intensité du premier faisceau seul en M
et
$I_2(M \in \text{zone commune})$ l'intensité du second faisceau seul en M

on a :

$$\boxed{I(M \in \text{zone commune}) \neq I_1(M) + I_2(M)}$$

ainsi, il n'y a pas de superposition des intensités des deux faisceaux.

OBJECTIFS :
- **Conditions requises d'obtention des interférences ?**

- **Caractéristiques des figures d'interférences (géométrie) ? A 2 ondes ? A N ondes ?**
- **Dispositifs classiques d'interférences ? (cf chap.** $\left[\begin{array}{l}\textbf{trous d'Young}\\ \textbf{interféromètre de Michelson}\end{array}\right.$

II Superposition de deux ondes lumineuses

II.1 Intensité de deux ondes superposées - terme d'interférences

Considérons deux ondes lumineuses harmoniques **de forme quelconque** (la suite se concentre sur le cas des ondes sphériques et planes) se propageant dans le vide, de pulsations à priori différentes ω_1 et ω_2. On donne l'expression de leur vibration lumineuse en un point M quelconque de l'espace :

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_1(M,t)=\psi_{01}(M)\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))\\ \psi_2(M,t)=\psi_(M)\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))\end{array}\right.$$

La vibration résultante s'écrit :

$$\psi(M,t)=\psi_{01}(M)\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))+\psi_{02}(M)\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))$$

Calculons ensuite l'intensité lumineuse moyenne (donc celle détectée, cf. chapitre V) résultant au point M :

$$I(M)=K\left\langle\psi(M,t)^2\right\rangle_t=K\left\langle[\psi_1(M,t)+\psi_2(M,t)]^2\right\rangle_t$$

soit :

$$I(M)=K\psi_{01}^2(M)<\cos^2(\omega_1 t-\varphi_1(M))>_t+K\psi_{02}^2(M)<\cos^2(\omega_2 t-\varphi_2(M))>_t+$$
$$2K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\left\langle\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))\times\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))\right\rangle_t$$

En notant les intensités et amplitudes des ondes ψ_1 et ψ_2 prises seules en M :

$$\left\{\begin{array}{l}I_1(M)=\frac{K}{2}\psi_{01}^2(M)\ \Rightarrow\ \psi_{01}=\sqrt{\dfrac{2}{K}}\sqrt{I_1(M)}\\ I_2(M)=\frac{K}{2}\psi_{02}^2(M)\ \Rightarrow\ \psi_{02}=\sqrt{\dfrac{2}{K}}\sqrt{I_2(M)}\end{array}\right.$$

on obtient :

$$I(M)=I_1(M)+I_2(M)+K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\underbrace{\left\langle\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t-\varphi_1(M)-\varphi_2(M)\right]\right\rangle_t}_{=0}$$
$$+K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1(M)-\varphi_2(M))\right]\right\rangle_t \quad \text{(VI.1)}$$

soit finalement en remarquant $K\psi_{01}\psi_{02}=K\dfrac{\sqrt{2I_1}}{\sqrt{K}}\times\dfrac{\sqrt{2I_2}}{\sqrt{K}}=2\sqrt{I_1 I_2}$

il vient :

$$I(M)=I_1(M)+I_2(M)+2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right]\right\rangle_t$$

En outre, nous savons qu'un détecteur d'intensité lumineuse évalue une valeur moyenne sur une durée d'acquisition $\tau_a>>T_{vis}=\dfrac{2\pi}{\omega}$, ainsi l'intensité effectivement mesurée s'écrit :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\underbrace{\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right]\rangle_{\tau_a}}_{\text{TERME D'INTERFÉRENCES}}} \quad \text{(VI.2)}$$

Définition II-1: Terme d'interférences

Le terme souligné ci-dessus est le seul susceptible de conduire à une non-uniformité de l'intensité lumineuse. C'est le terme responsable du **phénomène d'interférences** et est appelé **terme d'interférences (souvent désigné en abrégé par TI).**

II.2 Conditions d'obtention

Question : sous quelle(s) condition(s) le T.I. est-il **non partout nul et stationnaire** pour assurer l'observation d'interférences par l'oeil humain ($\tau_a \sim 0,1\ s$) ?

Reprenons le termes d'interférences :

$$TI = \langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right]\rangle_{\tau_a}$$

Nous savons en réalité que l'onde émise par une source ne peut être purement monochromatique, mais est en fait une succession de trains d'onde sans relation de phase fixe entre eux. Supposons que les trains d'ondes 1 et 2 soient émis par deux sources ponctuelles S_{01} et S_{02} ; les termes de phase s'écrivent alors pour chaque onde :

$$\begin{cases} \varphi_1(M) = k_0\widehat{S_{01}M} + \underbrace{\phi_1(t)}_{\text{(terme de phase aléatoire de la source 1)}} \\ \varphi_2(M) = k_0\widehat{S_{02}M} + \underbrace{\phi_2(t)}_{\text{(terme de phase aléatoire de la source 2)}} \end{cases}$$

donc :

$$TI = \left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + k_0\left[\widehat{S_{02}M}-\widehat{S_{01}M}\right]+\phi_2(t)-\phi_1(t)\right]\right\rangle_{\tau_a}$$

a - Condition sur les pulsations : isochronisme ou quasi-isochronisme des sources

Afin d'éviter la fluctuation temporelle du cosinus dans le TI, ce qui annulerait ce dernier (plus d'interférences), on doit déjà (ce ne sera pas la seule contrainte !) assurer la stationnarité du terme $(\omega_2-\omega_1)t$.

A retenir :

Propriété II-1: Isochronisme des sources

Pour espérer observer un phénomène d'interférences à deux ondes, les sources doivent **obligatoirement** être de même pulsation $\omega = \omega_1 = \omega_2$. On parle d'isochronisme des sources.

NB : ceci est une condition nécessaire non suffisante !

b - Condition sur les phases à l'origine : nécessité d'un diviseur d'onde

L'obtention de la stationnarité du TI nécessite aussi d'assurer la stationnarité de la différence de phase à l'origine, i.e. :

$$\phi_2(t) - \phi_1(t) \neq f(t)$$

or $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ changent de valeurs avec un temps caractéristique $\tau_c << \tau_a$.

Expérience de cours : tentative d'interférences avec 2 lasers identiques.

$\Longrightarrow$ les trains d'onde émis par les sources étant aléatoires, il ne peut y avoir d'interférences si on utilise deux sources distinctes, **même identiques** :

SOLUTION : on peut par exemple imposer $\phi_1(t) = \phi_2(t) \forall t$

A RETENIR :

Propriété II-2: COHÉRENCE DES DEUX ONDES

Pour espérer observer un phénomène d'interférences à deux ondes, on doit imposer un déphasage à l'origine $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ stationnaire pour les deux trains d'ondes (en plus de l'isochronisme), avec par exemple :

$$\phi_2(t) - \phi_1(t) = 0 \implies \boxed{\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t) \quad \forall t}$$

On parle alors de trains d'onde **cohérents**.

Les contraintes d'isochronisme et de cohérence des sources imposent aux deux ondes que l'on tente de faire interférer **d'être toutes deux issues d'une seule et même source**.

CONSÉQUENCE : Les interférences sont obtenues par séparation d'une onde unique en deux ondes issues de la même source origine.

$\Rightarrow$ **nécessité d'utiliser un diviseur d'onde pour fabriquer deux sources secondaires isochrones, et de déphasage à l'origine fixe.**

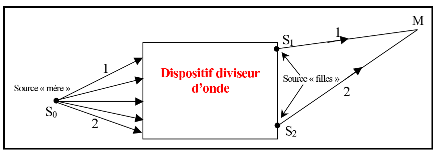


FIGURE VI.3 – Principe d'un diviseur d'onde

Exemples : diviseur de front d'onde (DFO) et diviseur d'amplitude (DA) (utilise la réflexion en général)

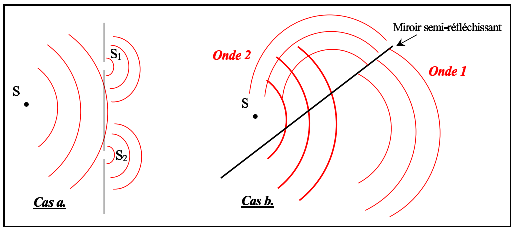


Figure VI.4 – Séparation d'onde par division du front d'onde (a) ou division d'amplitude (b).

Ainsi, en superposant les ondes 1 et 2 issues d'un séparateur d'onde, le T.I. au point M s'écrit :

$$\langle \cos\left[k_0\left((S_0M)_2 - (S_0M)_1\right)\right]\rangle_{\tau_a}$$

et l'intensité en M devient :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle \cos\underbrace{\left[k_0\left((S_0M)_2 - (S_0M)_1\right)\right]}_{\neq fct(t)}\right\rangle_{\tau_a}$$

soit finalement :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\cos\left[k_0\left((S_0M)_2 - (S_{01}M)_1\right)\right]$$

qui devient en introduisant $\delta(M) = \left(\overset{\frown}{S_0M}\right)_2 - \left(\overset{\frown}{S_0M}\right)_1$ appelée **différence de marche au point M entre les deux ondes 1 et 2**, on a :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\cos\underbrace{\left[k_0\delta(M)\right]}_{=\Delta\varphi(M)}}$$

avec $\Delta\varphi(M)$ différence de phase des deux vibrations lumineuses au point M.

c - Une autre condition : condition de cohérence - trains d'onde jumeaux

Les sources réelles émettent des trains d'onde de durée finie (cf chapitre précédent, par. "Modèles de sources"), et fatalement d'extension spatiale finie L_c appelée longueur de cohérence.

Lors d'une tentative d'interférences, deux cas de figure peuvent se présenter :

- les trains d'onde "jumeaux" issus du séparateur d'onde se superposent : **l'interférence à lieu** puisque la phase à l'origine de ces trains d'onde est identique :

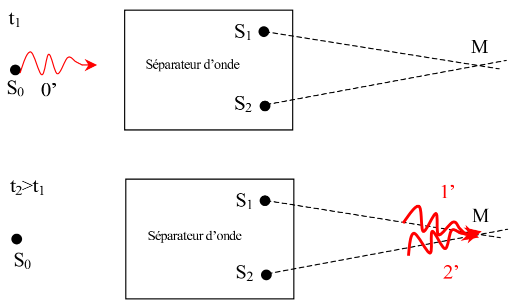


FIGURE VI.5 – Superposition de trains d'onde jumeaux

- les trains d'onde "jumeaux" issus du séparateur d'onde ne se superposent plus : ce sont des trains d'onde de phase à l'origine non identique et donc non corrélés qui se superposent, **l'interférence n'a pas lieu**.

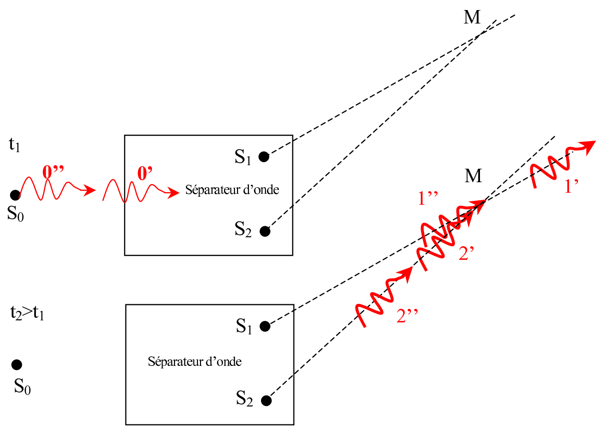


FIGURE VI.6 – Superposition de trains d'onde non jumeaux

QUESTION : quel critère respecter pour assurer que le recouvrement se produit pour des trains d'onde jumeaux, assurant ainsi l'interférence ?

La différence de marche entre deux trains d'onde s'écrit :

$$\delta = c\Delta\tau = c(\tau_{SS_2M} - \tau_{SS_1M})$$

On constate que le recouvrement de deux trains d'onde "jumeaux" est assuré tant que :

$$\boxed{|\delta(M)| \leq c\tau_c = L_c \text{ longueur de cohérence}} \quad \text{(VI.3)}$$

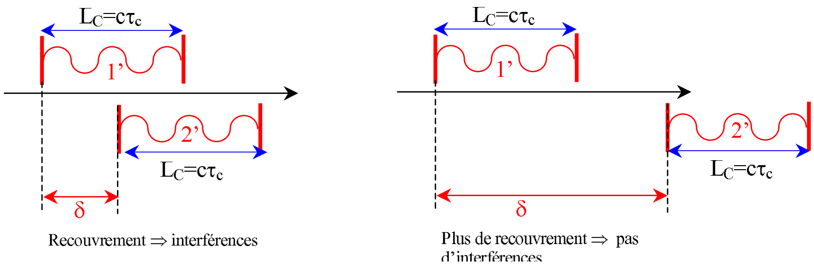


FIGURE VI.7 – Evaluation du critère de cohérence

d - Aspect «pratique» pour le calcul de l'intensité : usage de la notation complexe

Les conditions de cohérence des trains d'onde étant remplies, on pourra retenir l'onde harmonique comme modèle d'onde ⇒ **Notation complexe adaptée**.

Les deux ondes interférant étant de nature quasi-harmonique (chaque train d'onde est une sinusoïde tronquée), elle peuvent donc s'écrire en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{\psi}_1(M,t) = \psi_{01}(M) \cdot e^{j(\omega t - \varphi_1(M))} \\ \underline{\psi}_2(M,t) = \psi_{02}(M) \cdot e^{j(\omega t - \varphi_2(M))} \end{cases}$$

Le champ résultant étant : $\underline{\psi}(M,t) = \underline{\psi}_1(M,t) + \underline{\psi}_2(M,t)$
l'intensité s'écrit alors par définition :

$$I = K \left\langle \psi^2(M,t) \right\rangle$$

or la notation complexe permet de calculer facilement la valeur moyenne de toute grandeur harmonique, ainsi :

$$I = \frac{1}{2} K \mathcal{R}_e \left[\underline{\psi \psi^*} \right] = \frac{1}{2} K \left[\underline{\psi \psi^*} \right]$$

soit :

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\left(\psi_{01}(M) \cdot e^{-j\varphi_1(M)} + \psi_{02}(M) \cdot e^{-j\varphi_2(M)} \right) \right] \times \left[\left(\psi_{01}(M) \cdot e^{+j\varphi_1(M)} + \psi_{02}(M) \cdot e^{+j\varphi_2(M)} \right) \right]$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\psi_{01}^2(M) + \psi_{02}^2(M) + \psi_{01}(M)\psi_{02}(M) \left(e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) \right]$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\psi_{01}^2(M) + \psi_{02}^2(M) + 2\psi_{01}(M)\psi_{02}(M) \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \right]$$

On retrouve finalement le résultat obtenu plus haut avec :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos\left[k_0 \delta(M)\right]}$$

<u>CONCLUSION :</u> on adoptera toujours dans la mesure du possible la notation complexe pour tous les calculs d'intensité avec :

$$\boxed{I(M) = Cste \times \underline{\psi}(M,t) \cdot \underline{\psi}^*(M,t)}$$

II.3 Superposition de deux ondes incohérentes entre elles

Dans le cas où les deux ondes sont **incohérentes** entre-elles, c'est à dire issues de deux sources certes identiques, mais distinctes (non issues d'une source primaire commune), la condition de cohérence des trains d'onde $\phi_1(t) = \phi_2(t)\ \forall t$, n'est plus assurée. par conséquent, le cosinus dans le T.I. devient aléatoire et :

$$TI = \left\langle \cos\left[k_0 \left[\widehat{S_{02}M} - \widehat{S_{01}M}\right] + \underbrace{\phi_2(t) - \phi_1(t)}_{=f(t)\neq 0}\right]\right\rangle_{\tau_a} = 0$$

donc l'intensité en M est simplement :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

A retenir :

Propriété II-3: Superposition de deux ondes incohérentes

Lorsque deux vibrations lumineuses incohérentes se superposent en un point M, l'intensité résultante est la somme des intensités en M de chacune des sources :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M)}$$

II.4 Superposition de deux ondes cohérentes entre elles

a - Formule de Fresnel

Ce qui précède a permis d'établir l'expression de l'intensité lumineuse pour deux ondes interférant en M. On retient en général comme hypothèse simplificatrice que les amplitudes des ondes 1 et 2 sont indépendantes du point M, assurant également la constance des intensités 1 et 2 :

$$I_1 = cste_1 \neq f(M) \text{ et } I_2 = cste_2 \neq f(M) \quad \text{(valable par exemple dans le cas des ondes planes)}$$

Propriété II-4: Formule de Fresnel

L'intensité obtenue en M par interférence de deux ondes est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(k_0\delta(M)\right)$$

avec $\delta(M) = (S_0S_2M) - (S_0S_1M) = (S_2M) - (S_1M)$ différence de marche des 2 vibrations lumineuses issues de la source S_0 et séparées.

b - Interférogramme - ordre d'interférence

La fonction $I(M)$ varie donc sinusoïdalement entre deux valeurs extrêmes :

- **Interférences constructives donc franges brillantes pour :**

$$k_0\delta(M_{max}) = 2m\pi \;\; m \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\delta(M) = m\lambda_0$$

L'intensité est alors :

$$\boxed{I(M_{max}) = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2}$$

- **Interférences destructives donc franges sombres pour :**

$$k_0\delta(M_{min}) = (2m+1)\pi = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \;\; m \in \mathbb{Z}$$

soit

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$$

L'intensité est alors :

$$\boxed{I(M_{min}) = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}$$

Définition II-2: ORDRE D'INTERFÉRENCES

On définit l'ordre d'interférence au point M par :

$$\boxed{p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0(vide)}}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \textbf{sur une frange brillante : ordre } p(M_{max}) = \dfrac{\delta(M_{max})}{\lambda_0} = m \in \mathbb{Z} \\ \\ \textbf{sur une frange sombre : ordre } p(M_{min}) = \dfrac{\delta(M_{min})}{\lambda_0} = m + \dfrac{1}{2} \textbf{ demi-entier} \end{cases}$$

On peut alors tracer l'interférogramme $I = f(\delta)$:

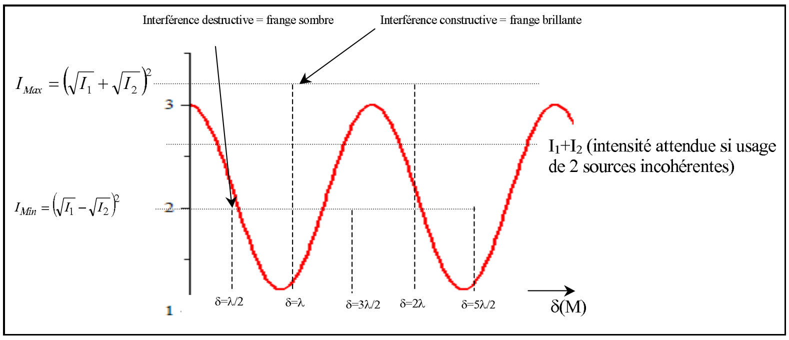


FIGURE VI.8 – Interférences à deux ondes avec mauvais contraste

c - Facteur de contraste - condition idéale de contraste

La qualité de la figure d'interférence peut être caractérisée par un indicateur numérique sans dimension qualifiant la différence d'intensité entre les franges sombres et les franges brillantes d'interférences. Ce nombre d'appelle le constraste, et il est défini ainsi :

Définition II-3: CONTRASTE

On appelle constraste de la figure d'interférences la grandeur suivante (définition de Michelson) :

$$\boxed{C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}}$$

Exercice de cours: **(II.4) - n° 1.** *Montrer que le contraste est maximal pour* $I_1 = I_2$.

Autre écriture :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} \Longrightarrow \boxed{C = 2\frac{\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{1+\frac{I_2}{I_1}} = 2\frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1+\frac{I_1}{I_2}}}$$

On constate avec cette seconde écriture que : $I_1 >> I_2$ ou $I_2 >> I_1 \Rightarrow \boxed{C \simeq 0}$

<u>CAS IDÉAL :</u> $I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow$ ce cas correspond à un contraste maximal $C_{max} = 1$:
L'intensité est alors donnée par **la formule de Fresnel "idéale"** :

$$\boxed{I(M) = 2I_0 + 2I_0\cos(k_0\delta(M)) = 2I_0\left[1 + cos(k_0\delta(M))\right]}$$

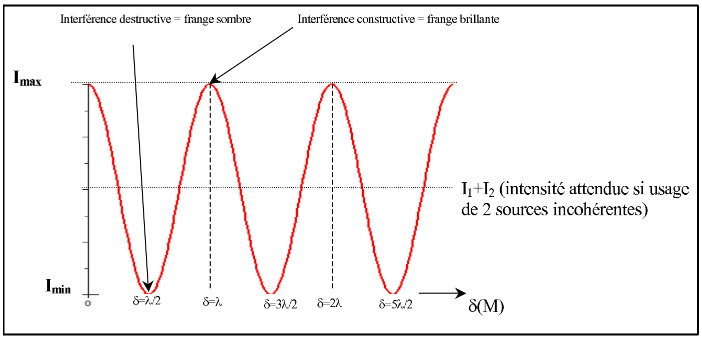
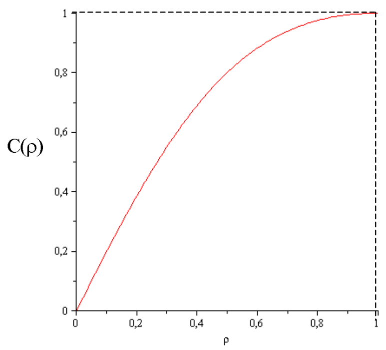


FIGURE VI.9 – Interférences à deux ondes avec bon contraste

Remarque II-1: ETUDE PLUS FINE DU CONTRASTE

On peut réaliser une étude plus fine du contraste ; supposons que $\psi_{02} < \psi_{01} <$; on peut alors poser ρ tel que $0 < \rho = \dfrac{\psi_{02}}{\psi_{01}} = \sqrt{\dfrac{I_2}{I_1}} < 1$:



La formule de Fresnel s'écrit alors : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]$

$$= (I_1 + I_2)\left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]\right)$$

$$= (I_1 + I_2)\left(1 + \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]\right)$$

On remarque facilement que $C = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2}$
et que C est maximal pour $\rho = 1$, i.e. $I_1 = I_2$, ce qui confirme naturellement le résultat précédent.

III Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre-elles

IDÉE : que se passe-t-il si l'on superpose non pas seulement deux, mais un nombre très important de vibrations lumineuses, toutes cohérentes entre-elles ?

III.1 Principe des réseaux

a - Définition

A RETENIR :

Définition III-1: Réseau de diffraction

On appelle réseau de diffraction un ensemble de N pupilles (on parle de «motifs») identiques, de très petites dimensions par rapport à la longueur d'onde $D_{caract} << \lambda$, donc diffractantes, et régulièrement espacées.

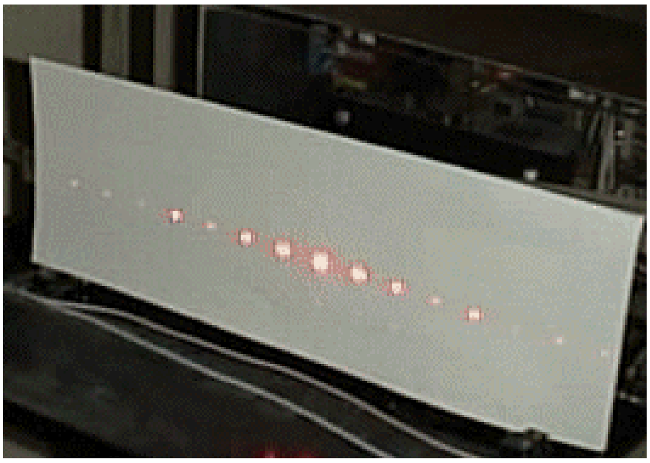
Restrictions de notre étude : on limitera notre approche au cas des réseaux $1D$, c'est à dire constitués de la répétition d'un motif élémentaire selon un axe; les motifs sont espacés d'une distance a appelée **pas du réseau**. On définit le nombre de traits par unité de longueur n avec : $n\left(mm^{-1}\right) = \frac{1}{a(mm)}$

En pratique : on réalise sur un plaque de verre des petites "entailles" de très faible largeur et dont la surface dépolie par la gravure diffuse de la lumière dans toutes les directions de l'espace, à la différence des autres zones du réseau qui laisse passer la lumière au sens de l'optique géométrique $\Leftrightarrow$ **équivalent à un réseau de fentes**

A retenir :

Dans un réseau éclairé par une onde harmonique quelconque, chaque trait se comporte comme une source secondaire émettant dans le demi-espace aval une onde de même fréquence que l'onde incidente et de manière isotrope.

Expérience :



- On place un réseau $600\ traits/mm$ sur un support.
- On éclaire la face du réseau par un laser Helium-Néon.
- On observe l'éclairement sur un écran placé à $1\ m$ du réseau.

Observations : On observe une interférence à ondes multiples, en général destructrice, sauf pour des directions **discrètes** de l'espace pour lesquelles on assiste à un renforcement très marqué de l'intensité lumineuse $\Rightarrow$ ondes superposées toutes en phase.

Objectifs :
- relation donnant explicitement les directions d'intensité renforcée ?
- expression de l'intensité ?
- application ?

III.2 Relations fondamentales des réseaux

a - Condition d'interférences constructives : réseaux en transmission

Question : **comment prévoir les directions d'interférences constructives des N ondes ?**

On envisage ici un réseau éclairé par une onde plane de lumière monochromatique (source S à l'infini, longueur d'onde λ) et une observation réalisée à l'infini (conditions de Fraunhofer).

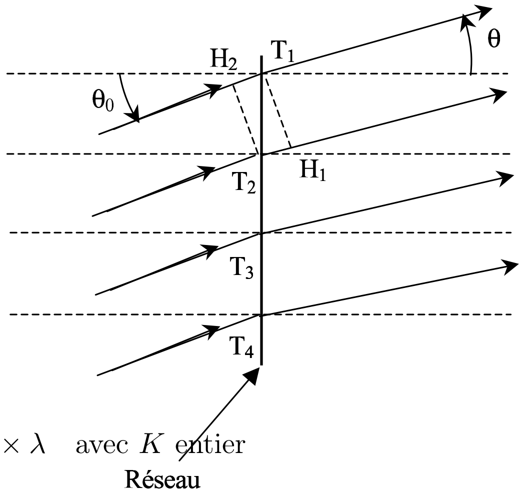
On appellera θ_0 l'angle d'incidence de l'onde sur le réseau, et θ l'angle indiquant la direction d'observation de l'onde sortant du réseau.

Ecrivons la différence de marche entre deux ondes consécutives issues des traits i et $i+1$ et interférant selon une direction θ à l'infini ; on appellera a le pas du réseau (distance T_iT_{i+1}) :

$$\delta_{2/1} = S_0T_2M - S_0T_1M = T_2H_1 - T_1H_2 = T_2T_1 \times sin(\theta) - T_1T_2 \times sin(\theta_0)$$

$$= +T_{i+1}T_i \times sin(\theta) - T_iT_{i+1} \times sin(\theta_0) = \delta_{i+1/i}$$

$$= a(sin\theta - sin\theta_0)$$



A retenir :

Idée : **Les interférences entre toutes les ondes issues du réseau seront constructives si la différence de marche entre deux ondes émises par des pupilles successives est toujours égale à un multiple entier de la longueur d'onde :**

$$\delta_{max} = a(sin\theta_K - sin\theta_0) = K \times \lambda \quad \text{avec } K \text{ entier}$$

Figure VI.10 – Schéma d'un réseau

Propriété III-1: Relation fondamentale des réseaux

On retiendra finalement la relation fondamentale des réseaux par transmission donnant les directions d'interférences constructives :

$$\boxed{a(sin\theta_K - sin\theta_0) = K \times \lambda} \qquad (VI.4)$$

avec $K \in \mathbb{Z}$ entier appelé **ordre d'interférence (ou de diffraction) du réseau.**

ou encore

$$\boxed{sin\theta_K = sin\theta_0 + \frac{K \times \lambda}{a}} \qquad (VI.5)$$

NB :

- $K \nearrow \Rightarrow \theta_K \nearrow$
- $K = 0 \Rightarrow$ conditions de l'optique géométrique soit : les rayons traversent la lame en ligne droite
- $K \neq 0 \Rightarrow$ la position des maximas d'intensité dépend de $\lambda \Rightarrow$ **Système dispersif en lumière polychromatique**

b - Condition d'interférences constructives : réseaux en réflexion

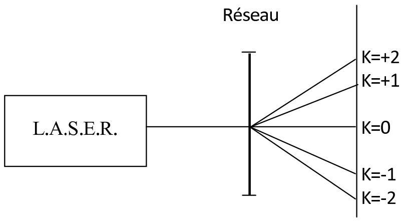
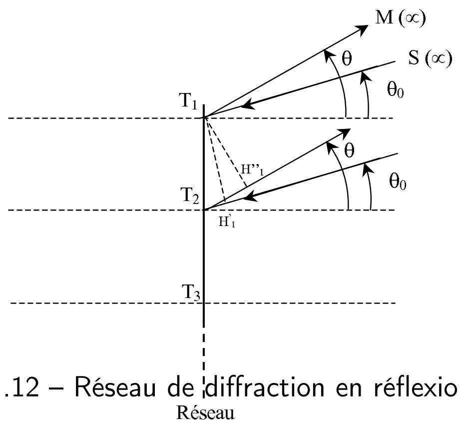


Figure VI.11 – Disposition relative des ordres de diffraction d'un réseau

Le réseau est maintenant exploité en réflexion ; en tenant compte de l'algébricité des angles (sur le dessin ci -contre θ_0 et θ ont été choisis positifs arbitrairement),la différence de marche entre deux ondes consécutives issues des traits i et $i+1$ et interférant selon une direction θ à l'infinis'écrit :



$$\delta_{i+1/i} = \delta_{2/1} = H_1'T_2 + T_2H"_1$$

$$= T_iT_{i+1} \times sin(\theta) + T_iT_{i+1} \times sin(\theta_0)$$

$$= a(sin\theta + sin\theta_0)$$

Figure VI.12 – Réseau de diffraction en réflexion

soit pour une interférence constructives

$$\delta_{max} = a(sin\theta_K + sin\theta_0) = K \times \lambda$$

<u>A retenir :</u>

On en tire la relation fondamentale des **réseaux en réflexion** :

$$\boxed{a(sin\theta_K + sin\theta_0) = K \times \lambda} \quad \text{avec } K \in \mathbb{Z} \tag{VI.6}$$

ou

$$\boxed{sin\theta_K = \frac{K\lambda}{a} - \sin\theta_0} \quad \text{avec } K \in \mathbb{Z} \tag{VI.7}$$

c - Relation du minimum de déviation (réseaux en transmission)

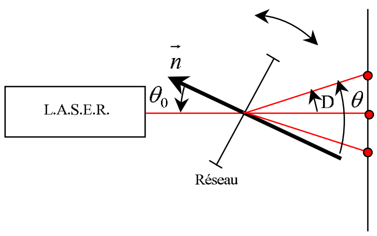


Figure VI.13 – Recherche du minimum de déviation

Supposons un réseau éclairé en lumière monochromatique plane.

EXPÉRIENCE DE COURS : en observant dans la direction d'une interférence constructive d'ordre 1 , on constate en faisant varier θ_0 (angle d'incidence) que **la déviation du faisceau passe par un minimum**.

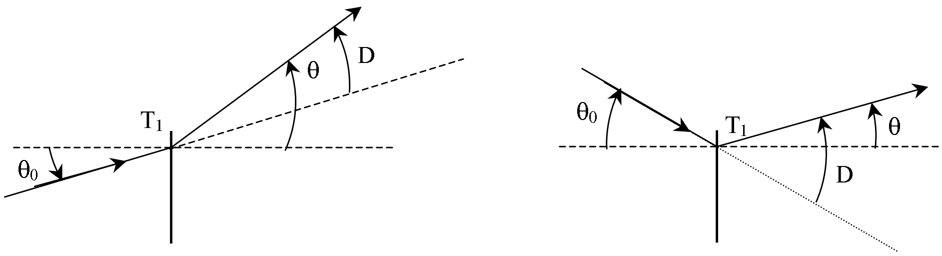


FIGURE VI.14 – Angle de déviation d'un faisceau par un réseau

Question : Quelles sont les conditions angulaires du minimum de déviation **pour un ordre K donné** ?

Les interférences de toutes les ondes issues du réseau étant constructives pour λ, la relation du réseau est vérifiée :

$$a(sin\theta_K - sin\theta_0) = K \times \lambda$$

La déviation s'écrit :

$$D_K = \theta_K - \theta_0$$

Evaluons la dérivée de la déviation par rapport à l'angle d'incidence θ_0 :

$$\frac{dD_K}{d\theta_0} = \frac{d\theta_K}{d\theta_0} - 1$$

En outre, en différençiant la relation d'interférence constructive (a, λ et K étant des constantes) :

$$\frac{d\theta_K}{d\theta_0} = \frac{cos\theta_0}{cos\theta_K}$$

donc :

$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{cos\theta_0}{cos\theta_K} - 1$$

Il résulte que la déviation D_K est minimale pour $\theta_K = \pm\theta_0$, soit $D_m = 0$ ou $D_m = -2\theta_0$. Le cas $\theta = +\theta_0$ soit $D_m = 0$ ne présente aucun intérêt puisqu'il correspond au rayon non diffracté.

Ceci entraîne :

$$D_m = -2\theta_0 = 2\theta_{K_m}$$

et

$$a(sin\theta - sin\theta_0) = a\left[sin\left(\frac{D_m}{2}\right) - sin\left(-\frac{D_m}{2}\right)\right] = 2a \times sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = K \times \lambda$$

soit :

A RETENIR :

Propriété III-2: RELATION DU MINIMUM DE DÉVIATION

$$\boxed{sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{K \times \lambda}{2a}} \qquad \text{(VI.8)}$$

d - Pouvoir dispersif d'un réseau

Considérons un ordre K fixé. La déviation s'écrit : $D_K = \theta_K - \theta_0$
La relation de réseau s'écrit également : $\sin\theta_K = \sin\theta_0 + \frac{K\lambda}{a}$
qui donne par différenciation :

$$\cos\theta_K \cdot d\theta_K = \frac{K}{a}d\lambda \;\Rightarrow\; d\theta_K = \frac{K}{a\cos\theta_K} \cdot d\lambda$$

soit : $\frac{d\theta_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K}$
soit finalement l'expression du pouvoir dispersif du réseau :

A RETENIR :

Définition III-2: POUVOIR DISPERSIF D'UN RÉSEAU

$$P_d = \frac{dD_K}{d\lambda} = \frac{d\theta_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K} \text{ (pouvoir dispersif)}$$

NB : cette grandeur caractérise la qualité du réseau qui se veut d'autant meilleur que sa capacité à disperser les différentes longueurs d'onde est grande.

COMMENTAIRES :

- Le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre K considéré l'est. Cependant le choix d'un ordre élevé entraîne un affaiblissement de l'intensité lumineuse. (modulation de l'intensité par la fonction de diffraction du motif élémentaire $\Longrightarrow$ plus au programme)
- La dispersion est d'autant meilleure que le pas du réseau a est faible (problème : coût de fabrication en "exponentielle" de a ! ! !)

Conséquences :

Supposons un réseau éclairé sous incidence normale $\theta_0 = 0$ par deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On observe la déviation des radiations à l'ordre K.

Deux cas de figure :

- $K > 0$:
  Avec la formule fondamentale des réseaux on a : $\sin\theta_K = \dfrac{K}{a}\lambda > 0$ donc $\theta_K = D_K > 0$
  ainsi :
  $$\frac{dD_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K} > 0$$
  $\Longrightarrow$ **la radiation de plus forte longueur d'onde λ_2 est davantage déviée que celle de longueur d'onde λ_1** soit $0 < D_K(\lambda_1) < D_K(\lambda_2)$
- $K < 0$:
  Cette fois : $\sin\theta_K = \dfrac{K}{a}\lambda < 0$ donc $\theta_K = D_K < 0$
  ainsi :
  $$\frac{dD_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K} < 0$$
  $\Longrightarrow$ **la radiation de plus forte longueur d'onde λ_2 est là encore davantage déviée que celle de longueur d'onde λ_1** $D_K(\lambda_2) < D_K(\lambda_1) < 0$ (mais cette fois vers les valeurs angulaires négatives).

A retenir :

Propriété III-3: Séparation d'une radiation polychromatique

Lors de l'utilisation d'un réseau en lumière polychromatique, la déviation d'une radiation est d'autant plus forte que sa longueur d'onde est élevée.

III.3 Vibration lumineuse en sortie d'un réseau

a - Intensité et fonction de réseau

On considère un réseau utilisé en transmission et éclairé sous incidence non nécessairement normale, par une onde monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide arrivant d'une source S_0 située à l'infini .

On rappelle la différence de marche entre deux motifs consécutifs

$$\delta_{i+1/i} = S_0\overset{\frown}{O_{i+1}}M - S_0\overset{\frown}{O_i}M = a\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)$$

soit la différence de phase entre deux motifs consécutifs :

$$\Delta\varphi_{i+1/i} = k_0\left(S_0\overset{\frown}{O_{i+1}}M - S_0\overset{\frown}{O_i}M\right)$$

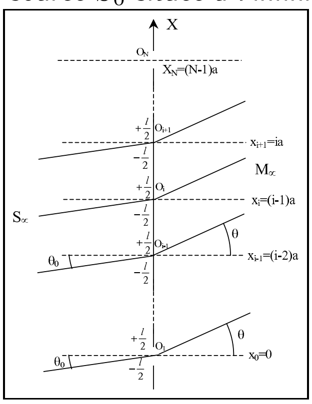


Figure VI.15 – *Schéma du réseau de pas a.*

$$= k_0 \cdot a\,(\sin\theta - \sin\theta_0) = \Delta\varphi \neq f(i)$$

L'amplitude de l'onde émise par un seul motif indicé i centrée en O_i dans la direction du point M à l'infini s'écrit :

$$\psi_i(M,t) = \psi_{S_0}(M) e^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_i}M - \phi_{S_0}\right)} \overset{\text{onde plane}}{=} K e^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_i}M - \phi_{S_0}\right)}$$

ainsi :

$$\begin{cases} \psi_1(M,t) = K e^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_1}M - \phi_{S_0}\right)} \\ \psi_2(M,t) = K e^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_2}M - \phi_{S_0}\right)} \\ ..... \\ \psi_N(M,t) = K e^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_N}M - \phi_{S_0}\right)} \end{cases}$$

Les ondes étant cohérentes entre-elles, la vibration résultante s'obtient par sommation de toutes les vibrations émises en direction de M :

$$\psi(M,t) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(M,t) = K \cdot e^{j(\omega t - \phi_{S_0})} \sum_{i=1}^{N} e^{-jk_0 S_0\widehat{O_i}M}$$

$$= K \cdot e^{j(\omega t - \phi_{S_0})} \times \left[e^{-jk_0 S_0\widehat{O_1}M} + e^{-jk_0 S_0\widehat{O_2}M} + e^{-jk_0 S_0\widehat{O_3}M} + ... + e^{-jk_0 S_0\widehat{O_N}M} \right]$$

$$= \underbrace{K \cdot e^{j(\omega t - \phi_{S_0})}}_{=cste(j\omega)} \times$$

$$e^{-jk_0 S_0\widehat{O_1}M} \left[1 + e^{-j\underbrace{k_0(S_0\widehat{O_2}M - S_0\widehat{O_1}M)}_{\Delta\varphi}} + e^{-j\underbrace{k_0(S_0\widehat{O_3}M - S_0\widehat{O_1}M)}_{2\Delta\varphi}} + ... + e^{-j\underbrace{k_0(S_0\widehat{O_N}M - S_0\widehat{O_1}M)}_{=(N-1)\Delta\varphi}} \right]$$

soit :

$$\psi(\Delta\varphi) = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S_0\widehat{O_1}M} \left[1 + e^{-j\Delta\varphi} + e^{-2j\Delta\varphi} + ...e^{-(N-1)j\Delta\varphi} \right]$$

$$\psi(\Delta\varphi) = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S\widehat{O_1}M} \times \frac{1 - e^{-jN\Delta\varphi}}{1 - e^{j\Delta\varphi}} = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S_0\widehat{O_1}M} \times \frac{e^{-jN\frac{\Delta\varphi}{2}}}{e^{-j\frac{\Delta\varphi}{2}}}$$

$$\times \frac{e^{jN\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{-jN\frac{\Delta\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{-j\frac{\Delta\varphi}{2}}}$$

et finalement :

$$\psi(\Delta\varphi) = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S_0\widehat{O_1}M} \times e^{-j(N-1)\frac{\Delta\varphi}{2}} \times \frac{\sin\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

L'intensité diffractée par le réseau en M (caractérisé par $\Delta\varphi$) est donc :

$$I\left(M(\Delta\varphi)\right) = \frac{K'}{\psi}(M) \times \psi(M)^{*} = \underbrace{K'|cste(j\omega)|^2}_{I_0} \times \left[\frac{\sin\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]^2$$

soit finalement

A RETENIR :

Propriété III-4: FONCTION DE RÉSEAU

$$\boxed{I(M) = N^2 I_0 \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]^2}_{=R(\Delta\varphi)}}$$

NB : $\Delta\varphi = f(\theta)$!!!

$R(\Delta\varphi)$ est appelée fonction de réseau.

b - Analyse succincte de la fonction de réseau $R(\Delta\varphi)$

On propose ici une analyse succincte de la fonction d'intensité du réseau :

NB : $\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$ 4π périodique $\rightarrow$ $\sin^2\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$ 2π périodique $\rightarrow$ $R(\Delta\varphi)$ est 2π périodique.

- ANNULATION :

$$\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0 \ et \ \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{2p\pi}{N} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ non multiple de } N$$

- MAXIMA PRIMAIRES : compte tenu de la périodicité de la fonction, on étudie la fonction au voisinage de $\Delta\varphi = 0$ seulement

$$\Delta\varphi \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad R(\Delta\varphi) \simeq \left[\frac{\sin\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{N\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]^2 = sinc^2\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

NB : petit rappel sur la fonction "sinus cardinal" en live ! ! !

Ainsi, la fonction de réseau est assimilable à un sinus cardinal autour de son maximum qui s'annule pour :

$$N\Delta\varphi/2 = \pm\pi \ \Rightarrow \ \Delta\varphi = \pm\frac{2\pi}{N}$$

La largeur du pic central (et des autres pics) est donc : $\boxed{\Delta(\Delta\varphi) = 2 \times \frac{2\pi}{N}}$

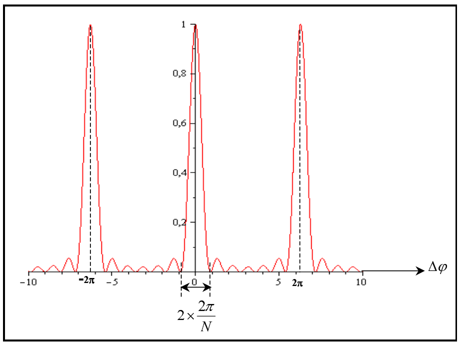


FIGURE VI.16 – *Tracé de la fonction* $R(\Delta\varphi)$

c - Pouvoir séparateur d'un réseau : critère de Rayleigh

PRÉLIMINAIRE : On peut reformuler la fonction de réseau R avec la variable θ ; il vient alors :

$$R(\sin\theta) = \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(sin\theta - \sin\theta_0)\right)}{N\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}(sin\theta - \sin\theta_0)\right)}\right]^2$$

La largeur d'un pic en variable $\sin\theta$ est : $\Delta(\Delta\varphi) = 2 \times \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta\left[\frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)\right] = 2 \times \frac{2\pi}{N}$
soit en choisissant une incidence normale $\theta_0 = 0$ (condition "théorique" classique[1]) :

$$\boxed{\Delta_{pic}(\sin\theta) = 2 \times \frac{\lambda}{Na}}$$

Question : quelle est la condition pour laquelle deux longueurs d'onde proches λ_1 et λ_2 (par exemple le doublet du sodium $\lambda_1 = 589\ nm$ et $\lambda_2 = 589,6\ nm$) sont séparées par le réseau ?

HYPOTHÈSE : on se place en incidence normale $\theta_0 = 0$ et on observe uniquement le premier ordre $K = 1$.
Le tracé des fonctions $R(\sin\theta)$ pour chacune de ces deux radiations est représenté ci-dessous :
D'après la formule des réseaux en transmission, pour un ordre K donné, les positions angulaires des maximas sont (en incidence normale $\theta_0 = 0$) :

$$\sin\theta_K(\lambda_1) = K\frac{\lambda_1}{a} \qquad et \qquad \sin\theta_K(\lambda_2) = K\frac{\lambda_2}{a}$$

Les deux pics de l'ordre K sont donc distants de : $\boxed{\Delta(\sin\theta_K) = \frac{K}{a}\Delta\lambda}$

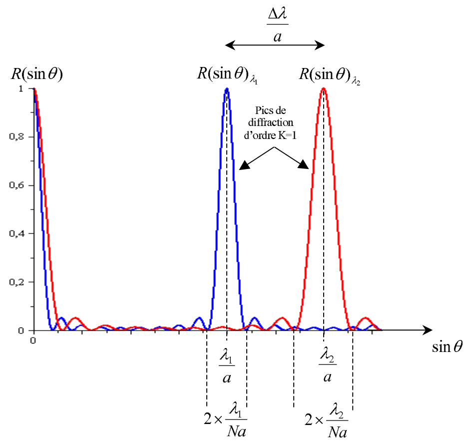


FIGURE VI.17 – Résolution totale de deux radiations λ_1 et λ_2

Définition III-3: Critère de Rayleigh

On appelle critère de Rayleigh, la condition arbitraire de limite de discernabilité de deux maxima d'intensité proches correspondant chacun à une radiation. Quantitativement, cette situation correspond au cas où un maximum d'intensité d'une des radiations se superpose au premier minima de la seconde.

La limite de résolution selon le critère de Rayleigh impose donc :

$$\Delta(\sin\theta_K) = \frac{K}{a}\Delta\lambda \geq \frac{\lambda_{1/2}}{Na} \quad soit \quad \boxed{\Delta\lambda|_{limite} \simeq \frac{\overline{\lambda}}{KN}}$$

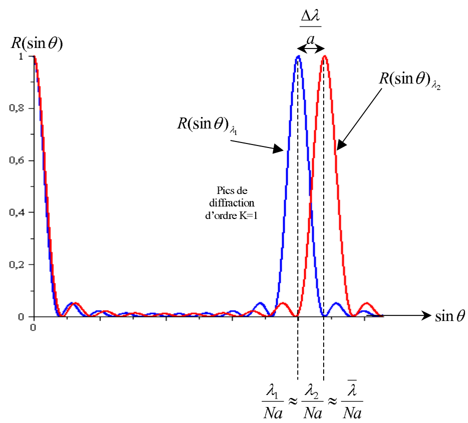


FIGURE VI.18 – Limite de résolution des deux radiations λ_1 et λ_2 selon le critère de Rayleigh

d - Problème du recouvrement des ordres en lumière blanche

Le spectre de lumière blanche $\lambda \in [0,4\mu m; 0,8\mu m]$ dispersé par un prisme est unique ; en revanche lorsque l'on procède à la dispersion par un réseau, plusieurs ordres apparaissent avec un risque de chevauchement.

Question : quels ordres sont susceptibles de se chevaucher ?

L'expérience montre que seul le premier ordre n'est pas recouvert (cf TP réseau !). Démontrons ceci !

Supposons que deux radiations de longueurs d'onde respectives λ_1 et λ_2 issues de deux ordres consécutifs se chevauchent en sortie de réseau ; on a :

$$a\left[\sin\theta_K - \sin\theta_i\right] = K \cdot \lambda_1 = (K+1)\lambda_2 \text{ avec } \lambda_1 > \lambda_2$$

On peut alors isoler l'ordre K correspondant :

$$K = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Par exemple, pour le cas du visible, le premier risque de chevauchement concerne les radiations extrêmes du spectre : le violet $\lambda_2 = 0,4\ \mu m$ du spectre d'ordre $K+1$ recouvrirait le rouge $\lambda_1 = 0,8\ \mu m$ du spectre d'ordre K. Dans ces conditions, l'ordre K serait :

$$K = \left\lceil \frac{0.4}{0.780 - 0.4} \right\rceil = \lceil 1,05 \rceil = 2$$

CONCLUSION : Les radiations dans l'ordre 1 ne subissent pas de chevauchement ; le chevauchement apparaît cependant dès les ordres 2 et 3.

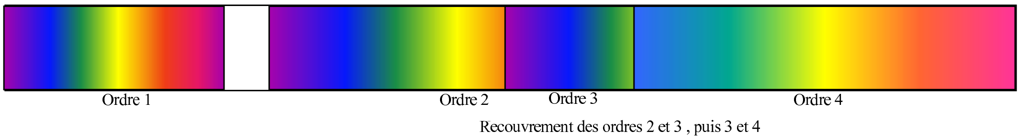


FIGURE VI.19 – Phénomène de recouvrement des ordres d'un réseau lors de la dispersion de la lumière blanche