

XVIII

Rayonnement d'un dipôle oscillant

PLAN DU CHAPITRE

I	Introduction : Expérience de Rudolph Hertz (1887)	3
II	Modèle du dipôle oscillant	4
II.1	Définition	4
II.2	Caractère «assez» général du modèle : exemples classiques	4
	a - Premier exemple : moment dipolaire oscillant d'un nuage électronique	4
	b - Second exemple : moment dipolaire élémentaire oscillant d'une antenne	5
	c - Orientation et conventions	6
II.3	Rayonnement du moment dipolaire	6
III	Les trois échelles de longueur pertinentes (à retenir!!!)	6
III.1	Approximation dipolaire	6
III.2	Approximation non relativiste	7
III.3	Hypothèse de la zone de rayonnement (définition «ad hoc» pour l'instant!)	7
III.4	Bilan des échelles de longueur pour un dipôle (à retenir!)	8
IV	Le «temps de retard» ou temps de propagation	8
IV.1	Signification et écriture pour un dipôle	8
IV.2	Ecriture du temps de retard pour une distribution "plus étendue"	8
V	Etude structurelle du champ rayonné par un dipôle	10
V.1	Topographie du champ rayonné	10
	a - Orientation du champ	10
	b - Champ sur l'axe - anisotropie - vecteur de Poynting	11
V.2	Expression complète et à grande distance des champs - retour sur la zone de rayonnement	11

a - Expressions des champs (admises) - commentaires	11
b - Expression du champ de rayonnement dipolaire à grande distance	12
c - Structure locale d'OPP	14
VI Etude énergétique	14
VI.1 Vecteur de Poynting	14
VI.2 Indicatrice de rayonnement	14
VI.3 Puissance totale rayonnée : formule de Larmor	15
VII Etude succincte de la diffusion (Complément théorique de l'étude documentaire) 16	16
VII.1 Introduction	16
VII.2 Modèle de l'électron élastiquement lié - moment dipolaire électronique	17
VII.3 Domaines spectral de diffusion- le bleu du ciel	18
VII.4 Polarisation par diffusion	19

I Introduction : Expérience de Rudolph Hertz (1887)

Les trois précédents chapitres, consacrés aux OEM, ont permis de dégager la structure des champs électromagnétiques propagés en lien avec les équations de Maxwell, et d'approcher par un modèle très simple leur interaction avec la matière (action sur les plasmas et métaux). Ce chapitre présente de manière qualitative le mécanisme permettant d'engendrer une OEM (l'obtention complète du champ par le calcul étant désormais totalement exclu du programme).

En 1876, les équations de Maxwell sont définitivement établies et publiées, et prévoient la possibilité de produire un champ électromagnétique propagé (équations des potentiels retardés). Ce n'est qu'en 1887 que Heinrich-Rudolph Hertz réalise la première propagation et détection d'une OEM, ouvrant la possibilité des transmissions hertziennes. L'idée générale de son expérience est décrite ci-dessous :

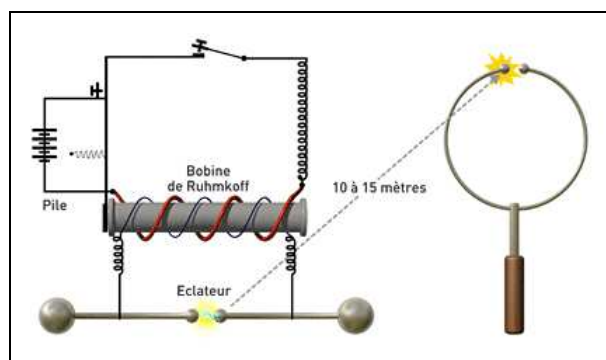


FIGURE XVIII.1 – Expérience de Hertz

OBSERVATIONS :

- ◇ La bobine du circuit primaire est équipée d'un système de rupture de courant par interrupteur **actionné par l'opérateur**.
 ⇒ forte ddp aux bornes de la bobine du primaire et étincelles à l'éclateur constitué par les deux extrémités de la bobine du secondaire ⇒ **explication détaillée du fonctionnement en "live"**.
- ◇ Étincelles à l'éclateur de l'anneau conducteur distant de 10-15m
 ⇒ forte ddp aux bornes de l'anneau conducteur

CONCLUSION

Un champ électromagnétique est produit au moment de l'apparition des étincelles sur l'éclateur de l'émetteur ; celui-ci se propage jusqu'à l'anneau récepteur où il met en mouvement les charges libres pour créer une forte ddp et à nouveau des étincelles à l'éclateur du récepteur, témoins d'une propagation du champ électromagnétique.

⇒ **une onde électromagnétique est engendrée lorsque des charges sont fortement accélérées.**

OBJECTIFS :

- ◇ Présenter un modèle simple de sources de champ de rayonnement.
- ◇ Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné.
- ◇ Étudier l'aspect énergétique du rayonnement.
- ◇ Étudier par un modèle simple d'interaction matière rayonnement les propriétés optiques du ciel. (bleu du ciel, aspect brillant, rouge du soleil couchant) → cf étude documentaire

II Modèle du dipôle oscillant

II.1 Définition

Définition II-1: DIPÔLE OSCILLANT

On appelle dipôle oscillant **un doublet de charges opposées** dont le moment dipolaire varie sinusoidalement au cours du temps. Par convention on oriente très souvent le moment dipolaire selon un axe $[Oz]$: $\vec{p}(t) = p_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z$

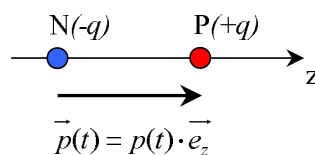


FIGURE XVIII.2 – Dipôle oscillant

NB : une norme ISO fixe l'orientation de tous les systèmes rayonnants selon leur axe principal de symétrie, ici l'axe $[Oz]$ pour le dipôle.

La variation du moment dipolaire peut avoir deux origines :

- ◇ Les valeurs des charges du doublet sont invariantes, mais la distance entre elles varie ; on a alors :

$$\vec{p}(t) = q \vec{d}(t) = q \overline{NP}(t) = q \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dist. maxi}}}{a} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z \rightarrow \text{CF PREMIER EXEMPLE CI-DESSOUS.}$$

- ◇ La distance des charges est invariante, mais la charge du dipôle varie ; alors :

$$\vec{p}(t) = q(t) \vec{d} = q(t) \overline{NP} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{charge maxi}}}{q_0} \cos(\omega t) \cdot \underbrace{NP}_{\text{fixe!}} \cdot \vec{e}_z \rightarrow \text{CF SECOND EXEMPLE CI-DESSOUS.}$$

II.2 Caractère «assez» général du modèle : exemples classiques

a - Premier exemple : moment dipolaire oscillant d'un nuage électronique

Supposons un atome, ou une molécule dont le nuage électronique est susceptible de se déformer de manière sinusoidale sous l'effet du champ électrique d'une OPPH par exemple ; on parle d'atome ou molécule polarisable.

⇒ les barycentres des charges négatives N_- et des charges positives P_+ ne coïncident plus.
⇒ apparition d'un moment dipolaire.

QUESTION : Quel est le moment dipolaire oscillant équivalent de cette distribution de charges ?

L'atome est constitué de $2Z$ charges discrètes :

$\begin{cases} Z \text{ charges } + \text{ (noyau)} \\ Z \text{ charges } - \text{ (nuage électronique)} \end{cases}$
 repérés par les points A_i

Le moment dipolaire résultant de cet atome "déformé" s'écrit par définition :

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{2Z} q_i \overrightarrow{OA_i}$$

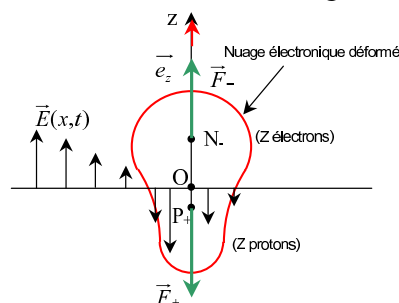


FIGURE XVIII.3 – Nuage électronique déformé

En "séparant" les charges de signe opposé, et en exploitant la définition du barycentre, on peut aussi écrire le moment dipolaire ainsi :

$$\vec{p}(t) = - \underbrace{\sum_{i=1}^Z e \overrightarrow{ON_i}}_{=-Ze \overrightarrow{ON_-}(t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^Z e \overrightarrow{OP_i}}_{=Ze \overrightarrow{OP_+}(t)} = -Ze \overrightarrow{ON_-}(t) + Ze \overrightarrow{OP_+}(t) = Ze \overrightarrow{N_-P_+}(t)$$

En général, le noyau, bien plus massif est immobile dans le référentiel d'étude, ainsi $P \equiv O$ avec O centre du repère du référentiel d'étude galiléen. Donc :

$$\vec{p}(t) = Ze \overrightarrow{NO} = -Ze \overrightarrow{ON_-}$$

◇ On suppose un mouvement sinusoïdal du nuage donc :

$$-\overrightarrow{ON_-}(t) = - \underbrace{(ON_-)_0}_{=a} \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z = -a \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z$$

avec a l'amplitude d'oscillation de la distribution dipolaire.

et par suite un moment dipolaire d'expression :

$$\vec{p}(t) = \underbrace{-Ze \cdot a}_{=p_0} \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z = p_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z$$

b - Second exemple : moment dipolaire élémentaire oscillant d'une antenne

HYPOTHÈSES :

- ◇ tige métallique rectiligne selon l'axe $[Oz)$.
 - ◇ Courant sinusoïdal dans la tige
 - ◇ On découpe en tronçon de longueur dz et portant une charge $\delta q(t)$
- ⇒ le moment dipolaire élémentaire de chaque tronçon $\delta \vec{p}(t)$ est variable et sa variation s'écrit :

$$d[\delta \vec{p}(t)] = d \left[\underbrace{\delta q(t) \cdot z \cdot \vec{e}_z}_{\text{moment dipolaire élément.}} \right] = \delta q(t) \cdot dz \cdot \vec{e}_z \quad \text{avec } i(z, t) = \left. \frac{\delta q(t)}{dt} \right|_z = I_0(z) \cdot \cos(\omega t)$$

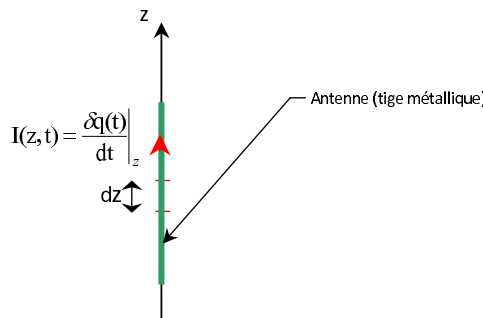


FIGURE XVIII.4 – Tronçon d'antenne équivalent à un dipôle élémentaire.

NB : cf TD n°14

c - Orientation et conventions

Dans la suite, le moment dipolaire oscillant sera toujours positionné à l'origine O du repère, et orienté selon l'axe $[Oz]$. On adoptera les coordonnées sphériques :

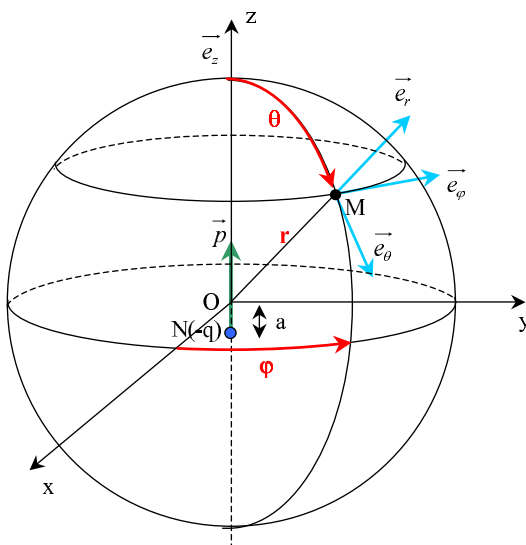


FIGURE XVIII.5 – Orientation du moment dipolaire oscillant

II.3 Rayonnement du moment dipolaire

D'après l'expérience de Hertz, l'accélération des charges est à priori responsable du rayonnement \Rightarrow **le dipôle oscillant peut être une source de rayonnement ! (accélération harmonique des charges)**

A retenir :

Propriété II-1: CONDITION DE RAYONNEMENT

$$\text{Accélération de charge} \neq 0 \Rightarrow \vec{\ddot{p}}(t) \neq \vec{0} \Rightarrow \text{rayonnement possible !!!}$$

\Rightarrow Tout dipôle dont la dérivée seconde du moment dipolaire est non nulle peut être une source de rayonnement, ceci sous condition !!! (cf plus bas), donc :

$$\vec{E}_{ray}, \vec{B}_{ray} = fct(\ddot{p})$$

III Les trois échelles de longueur pertinentes (à retenir!!!)

III.1 Approximation dipolaire

Dans notre cadre d'étude, nous examinons le rayonnement du dipôle oscillant à une distance $r = OM$ très supérieure à la longueur caractéristique du dipôle, ici a donc :

$$\text{approximation dipolaire} \Leftrightarrow a \ll OM = r$$

Remarque III-1:

Cette approximation est la même que celle exploitée dans l'étude du champ produit par un dipôle électrostatique (cf cours dipôle) \rightarrow on observe toujours les effets à grande distance.

III.2 Approximation non relativiste

Dans le cas du dipôle oscillant, le moment dipolaire subit une variation sinusoïdale de pulsation ω , soit de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$; si la distance caractéristique de déplacement des charges est a comme défini plus haut, et leur période d'oscillation $T = \frac{2\pi}{\omega}$, l'ordre de grandeur de la vitesse de déplacement des charges est donc :

$$v \simeq \frac{a}{T}$$

Dans toute la suite, on considèrera que le mouvement des charges est non relativiste, soit :

$$v \ll c$$

Donc :

$$\frac{a}{T} \ll c$$

Dans la mesure où les ondes émises seront naturellement de période T , elles auront une longueur d'onde $\lambda = cT$. L'inégalité précédente devient alors :

$$\text{approximation non relativiste} \Leftrightarrow a \ll cT = \lambda$$

NB : on se placera dans cette hypothèse pour toute la suite du cours.

III.3 Hypothèse de la zone de rayonnement (définition «ad hoc» pour l'instant !)

Nous examinons par hypothèse le champ électromagnétique rayonné à grande distance du dipôle; ceci sous entend que la durée de propagation du rayonnement Δt_{propa} entre O (origine du dipôle) et M (point de "mesure" du champ) est très supérieure au temps caractéristique du dipôle T , sa période d'oscillation :

$$\Delta t_{propa} \sim \frac{r}{c} = \frac{OM}{c} \gg T \Rightarrow r = OM \gg cT \Rightarrow r = OM \gg \lambda$$

\Rightarrow cette échelle de distance définit la zone de rayonnement

A RETENIR :

$$\text{hypothèse de la zone de rayonnement} \Leftrightarrow r = OM \gg \lambda$$

III.4 Bilan des échelles de longueur pour un dipôle (à retenir !)

En résumé, pour un dipôle rayonnant, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ approx. dipolaire } a \ll r \\ \bullet \text{ cadre non relativiste } a \ll \lambda \\ \bullet \text{ zone de rayonnement } \lambda \ll r \end{array} \right\} \Rightarrow a \ll \lambda \ll r$$

IV Le « temps de retard » ou temps de propagation

IV.1 Signification et écriture pour un dipôle

Lorsqu'un dipôle placé en O rayonne, le champ émis par ce dernier se propage à la célérité c ; ainsi lorsque le champ est perçu en un point M à la date t , il est nécessairement le résultat d'une modification de la source (le dipôle) à la date retardée $t' = t - \underbrace{\frac{OM}{c}}_{\text{tps propag.}} = t - \frac{r}{c}$

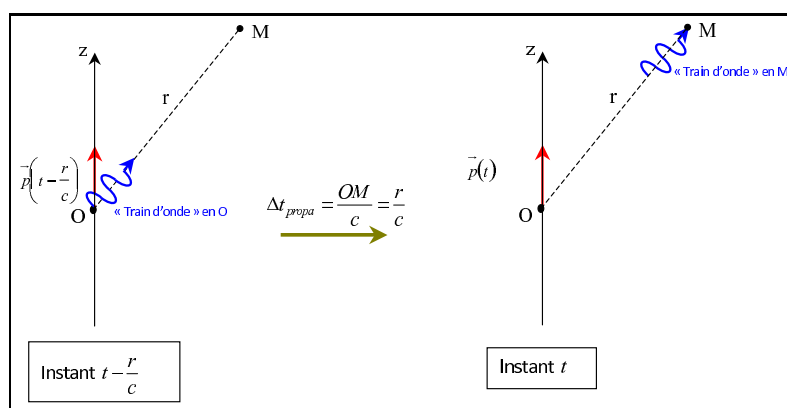


FIGURE XVIII.6 – Illustration du temps de retard

À RETENIR : expression du temps retardé pour un dipôle rayonnant placé en O :

$$\underbrace{t'}_{\text{temps retardé}} = t - \frac{OM}{c} = t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{\text{temps de retard}}$$

IV.2 Écriture du temps de retard pour une distribution "plus étendue"

Pour le dipôle rayonnant, la longueur caractéristique de la distribution de charge, a étant très petite face à la longueur d'onde, i.e. on est toujours dans le cadre de l'approximation non relativiste :

$$a \ll \lambda$$

QUESTION : que se passe-t-il si l'étendue spatiale a de la distribution source n'est plus négligeable devant λ , c'est à dire si l'approximation non relativiste n'est plus décrite par $v/c \sim a/\lambda$?

Par exemple (cas classique) : l'antenne émettrice dite «demi-onde» de longueur totale $\frac{\lambda}{2}$ i.e. $a \sim \lambda$
 → CF TD

NB : ordre de grandeur pour une antenne hyperfréquence ($\nu \sim 1 - 10GHz$: satellite, radar, wifi) $a \sim \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9 \leftrightarrow 10^{10}} \sim 0,3 \leftrightarrow 0,03 \text{ m} \sim \text{cm}$ taille classique d'une antenne.

RÉPONSE :

Imaginons une distribution de charge accélérée rayonnant un champ électromagnétique, et dont la dimension caractéristique a est de l'ordre de λ . Appelons P un point caractéristique de la distribution de charge accélérée

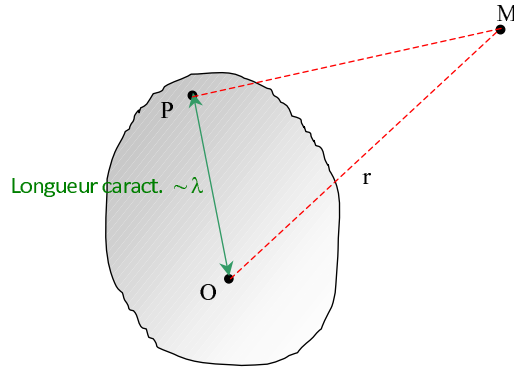


FIGURE XVIII.7 – Temps de retard pour une distribution de sources "étendue"

IDÉE : calculons l'«erreur» commise sur le temps retardé t' suivant que l'on considère la distribution concentrée en O ou en P :

$$\epsilon_t = \left| \left(t - \frac{PM}{c} \right) - \left(t - \frac{r}{c} \right) \right| = \left| \frac{r - PM}{c} \right|$$

On a :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = \vec{r} - \overrightarrow{OP} \Rightarrow PM = \sqrt{r^2 + OP^2 - 2\vec{r} \cdot \overrightarrow{OP}} > \sqrt{r^2 + OP^2 - 2r \cdot OP}$$

$$PM > r \sqrt{1 + \left(\frac{OP}{r} \right)^2 - 2 \frac{OP}{r}} = r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2 \frac{a}{r}}$$

qui donne à l'ordre 1 en a/r : $PM > r \left(1 - \frac{a}{r} \right) = r - a$

soit :

$$r - PM < a$$

on a finalement :

$$\epsilon_t = \frac{|r - PM|}{c} < \frac{\overset{\sim \lambda}{a}}{c} \ll \frac{\lambda}{c} = T$$

et donc

$$\epsilon_t \sim T$$

CONCLUSION : l'erreur commise est de l'ordre de la période, donc dans ce cas de figure, le temps retardé doit être exprimé en chaque point P de la distribution ; on doit donc écrire :

$$t'_P = t - \frac{PM}{c}$$

V Etude structurale du champ rayonné par un dipôle

V.1 Topographie du champ rayonné

a - Orientation du champ

De l'analyse des symétries et invariances de la distribution source, soit le dipôle, on peut tirer les premières conclusions suivantes :

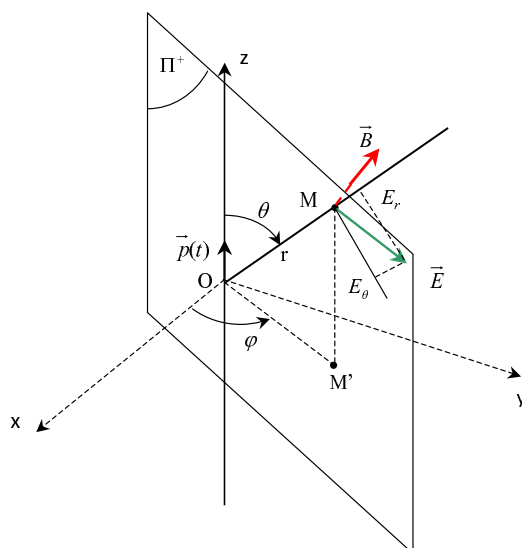


FIGURE XVIII.8 – Orientation du champ dipolaire

$$\text{SYMÉTRIES : } [M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta] \equiv \Pi^+ \implies \begin{cases} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi, t) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi, t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_\varphi = B(r, \theta, \varphi, t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{NB : } [Oxy] = \Pi^- \implies \vec{E}(\forall r; \theta = \frac{\pi}{2}, t) \perp \Pi^- \implies \vec{E}(\forall r; \theta = \frac{\pi}{2}, t) \parallel \vec{e}_z$$

INVARIANCES : par rotation autour de $[Oz)$ selon tout angle $\varphi \Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi, t) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi, t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_\varphi = B(r, \theta, \varphi, t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

b - Champ sur l'axe - anisotropie - vecteur de Poynting

◇ CAS DE \vec{B}

Considérons deux plans de symétries Π_1^+ et Π_2^+ contenant tous deux l'axe $[Oz)$, on doit avoir :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B}(M \in [Oz)) \perp \Pi_1^+ \\ \vec{B}(M \in [Oz)) \perp \Pi_2^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}(M \in [Oz)) = \vec{B}(r, \theta = (0, \pi)) = \vec{0}$$

A RETENIR :

CONSÉQUENCE : le champ \vec{B} ne pouvant être nul partout **il est nécessairement anisotrope, c'est à dire que θ est nécessairement variable de $\vec{B} \Rightarrow \vec{B}(r, \theta, t)$** .

◇ CAS DE \vec{E}

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(M \in [Oz)) \in \Pi_1^+ \\ \vec{E}(M \in [Oz)) \in \Pi_2^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}(M \in [Oz)) = E(r, \theta = (0, \pi)) \cdot \vec{e}_z \text{ si non nul ?!}$$

A RETENIR :

Propriété V-1: ABSENCE DE RAYONNEMENT SUR L'AXE DU DIPÔLE

Le champ magnétique est toujours nul sur l'axe d'un dipôle source, donc le vecteur de Poynting est également nul sur cette direction :

$$\vec{R}|_{\theta=0,\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}|_{\theta=0,\pi} \wedge \vec{B}|_{\theta=0,\pi} = \vec{0}$$

soit :

Un dipôle oscillant ne rayonne pas d'énergie sur son axe

V.2 Expression complète et à grande distance des champs - retour sur la zone de rayonnement

a - Expressions des champs (admisses) - commentaires

La résolution complète du problème de rayonnement dipolaire conduit aux expressions suivantes complètes des champs électrique et magnétique en tout point $M(r, \theta, \varphi)$:

Champ électrique :

$$\vec{E} [M(r, \theta, \varphi), t] = \begin{pmatrix} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \cos \theta \left[\frac{1}{r^3} p(t - r/c) + \frac{1}{r^2 c} \dot{p}(t - r/c) \right] \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[\frac{1}{r^3} p(t - r/c) + \frac{1}{r^2 c} \dot{p}(t - r/c) + \frac{1}{r c^2} \ddot{p}(t - r/c) \right] \\ E_\varphi = 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XVIII.1})$$

Champ magnétique :

$$\vec{B} [M(r, \theta, \varphi), t] = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{1}{r^2} \dot{p}(t - r/c) + \frac{1}{r c} \ddot{p}(t - r/c) \right] \cdot \vec{e}_\varphi \quad (\text{XVIII.2})$$

COMMENTAIRES :

- ◇ Les facteurs $\sin \theta$ et $\cos \theta$ témoignent bien de l'anisotropie des champs ; on retrouve en outre l'annulation du champ magnétique sur l'axe du dipôle et par conséquent l'absence de rayonnement d'énergie sur cet axe.
- ◇ Sans surprise, l'état du champ mesuré à la date t correspond l'état de ses sources à l'instant retardé donc le moment dipolaire et ses dérivées sont forcément calculés à $t - \frac{r}{c}$ pour tenir compte du temps de propagation de l'onde rayonnée.

b - Expression du champ de rayonnement dipolaire à grande distance

Les expressions précédentes des champs font intervenir le moment dipolaire retardé ainsi que ses dérivées première et seconde. Dans le cas d'un moment dipolaire sinusoïdal, on a (en posant $t' = t - r/c$) :

$$\begin{cases} p(t') = p_0 \cos \omega t' & \text{d'amplitude } p_0 \\ \dot{p}(t') = -p_0 \omega \cdot \sin \omega t' & \text{d'amplitude } p_0 \omega \\ \ddot{p}(t') = -p_0 \omega^2 \cdot \cos \omega t' & \text{d'amplitude } p_0 \omega^2 \end{cases}$$

Comparons l'amplitude des différents termes intervenant dans les expressions des composantes du champ électrique $\vec{E}(M, t)$, en se rappelant que $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$:

TERME	$\frac{p}{r^3}$	$\frac{\dot{p}}{r^2 c}$	$\frac{\ddot{p}}{r c^2}$
AMPLITUDE	$\frac{p_0}{r^3}$	$\frac{p_0 \omega}{r^2 c} = 2\pi \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)$	$\frac{p_0 \omega^2}{r c^2} = 4\pi^2 \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2$

- ◇ Si $r \ll \lambda$ le terme statique d'ordre nul est dominant. Cette zone s'appelle la **zone statique**, et l'on retrouve l'expression du champ d'un dipôle électrostatique :

$$\vec{E}_{r < \lambda}(r, \theta, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ◇ Si $r < \lambda$ le terme d'ordre 1 domine. On est alors dans le domaine de l'induction (phénomène lié aux dérivées d'ordre 1 du moment dipolaire dans les expressions des champs).
- ◇ Si $r \simeq \lambda$, on est en zone intermédiaire dans laquelle aucun terme ne domine.
- ◇ Si $r \gg \lambda$ c'est enfin le terme d'ordre 2 qui devient dominant. C'est la condition pour obtenir une valeur de champ significative à grande distance :

→ Zone de rayonnement

Expressions des champs dans les différentes zones :

	$\lambda \gg r$	$\lambda \ll r$
TERME DOMINANT DANS \vec{E}	$\frac{p}{r^3}$	$\frac{\ddot{p}}{rc^2}$
CHAMP \vec{E}	$\vec{E} \simeq \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \cdot \vec{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \cdot \vec{e}_\theta$	$\vec{E} \simeq \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}}{r} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\ddot{p}}{r} \cdot \vec{e}_\theta$
CHAMP \vec{B}	$\vec{B} \simeq \vec{0}$	$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\ddot{p}}{rc} \cdot \vec{e}_\varphi$
DÉNOMINATION ZONE	statique/ARQS	ZONE DE RAYONNEMENT

En résumé, le champ électromagnétique rayonné à grande distance par un dipôle oscillant s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{B}_{ray}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{rc} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{rc} \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{E}_{ray}(\vec{r}, t) = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{r} \cdot \vec{e}_\theta \end{cases} \quad (\text{XVIII.3})$$

COMMENTAIRES :

- ◇ On constate que le champ $\vec{E}_{ray}(\vec{r}, t)$ émis est polarisé selon \vec{e}_θ ; sa composante selon \vec{e}_r est négligeable en zone de rayonnement.

- ◇ On retrouve l'anisotropie du champ $(\vec{E}_{ray}, \vec{B}_{ray})$ émis avec annulation du champ rayonné sur l'axe du dipôle, et champ maximal sur le plan équatorial du dipôle.
- ◇ On observe que l'évolution radiale du champ est en $\frac{1}{r}$; ainsi, la norme du champ dans une direction donnée est faiblement atténuée, bien moins que dans le cas d'un dipôle électrostatique par exemple dont l'évolution est en $\frac{1}{r^3}$

c - Structure locale d'OPP

Avec l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}_{ray}, \vec{B}_{ray})$ rayonné, on remarque que :

$$\vec{B}_{ray} = \frac{E_{ray}}{c} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{E_{ray}}{c} \cdot \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}_{ray}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_{ray}}{\omega}$$

en posant $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{e}_r$ vecteur d'onde "local" indiquant la "pseudo" direction de propagation de l'onde.

A RETENIR :

Propriété V-2: STRUCTURE LOCALE D'ONDE PLANE

A grande distance du dipôle, l'onde rayonnée possède **localement** la structure d'une onde plane avec :

$$\vec{B}_{ray} = \left(\frac{\vec{e}_r}{c} \right) \wedge \vec{E}_{ray} \quad (\text{XVIII.4})$$

\vec{e}_r étant la "pseudo" direction de propagation. $(\vec{E}_{ray}, \vec{B}_{ray}, \vec{e}_r)$ constituant un trièdre direct.

VI Etude énergétique

VI.1 Vecteur de Poynting

Evaluons le vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique rayonnée par le dipôle :

$$\vec{R}(M, t) = \frac{\vec{E}_{ray}(M, t) \wedge \vec{B}_{ray}(M, t)}{\mu_0}$$

qui donne immédiatement :

$$\vec{R} = \frac{\ddot{p}^2(t - r/c)}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\omega^4 p^2(t - r/c)}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{XVIII.5})$$

VI.2 Indicatrice de rayonnement

Un moyen performant pour caractériser le rayonnement d'un dipôle est de réaliser son diagramme de rayonnement, ou **indicatrice de rayonnement**. Ce graphique consiste à tracer, en représentation polaire, la norme du vecteur de poynting $R = ||\vec{R}||$ en coordonnée radiale, en fonction de la direction de rayonnement considérée, caractérisée par la donnée du doublet d'angles (θ, φ) , le tout pour une valeur fixée de la distance r entre le centre

de la distribution rayonnante et le point de mesure M ; en d'autres termes, la norme R est d'autant plus grande que le point de la surface (diagramme de rayonnement 3D) ou de la courbe (diagramme de rayonnement 2D) est éloigné du centre O du repère de la figure.

NB : on a invariance par rotation autour de l'axe $[Oz]$ donc φ n'est pas variable du problème \Rightarrow on peut tracer l'indicatrice se trace dans un plan !

CARCTÉRISTIQUES DE SYMÉTRIE ET CONVENTION POUR LE TRACÉ DU DIAGRAMME :

On trace donc $\|\vec{R}\| = \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = f(\theta)$ **en polaire**

Par ailleurs, on fixe la valeur du rayon r (pourvu qu'elle satisfasse à l'approximation dipolaire.)

Le tracé proposé ci-dessous est réalisé pour $r = 1m$ (et normalisé à 1 pour l'amplitude du vecteur de Poynting).

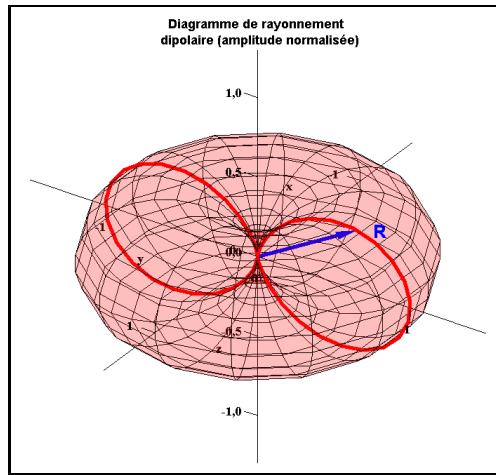


FIGURE XVIII.9 – Diagramme de rayonnement 3D ($r=1m$)

NB : on retrouve le caractère anisotrope du rayonnement dipolaire (présence du $\sin^2 \theta$).

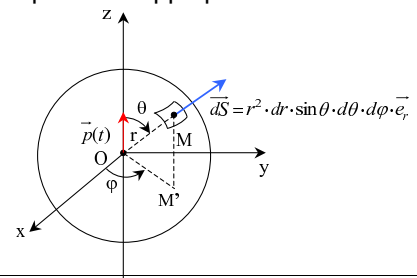
On peut également tracer un diagramme de rayonnement en 2D correspondant à une coupe du diagramme 3D pour $\varphi = cste$. Dans le diagramme ci-dessous on a tracé l'indicatrice de rayonnement **adimensionnée** pour différentes longueurs d'onde :

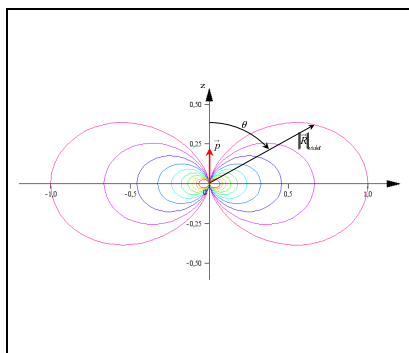
$$f(\theta) = \frac{\|\vec{R}\|_{\lambda}(\theta)}{\|\vec{R}\|_{\lambda=380 \text{ nm}}(\theta)} = \left(\frac{\omega}{\omega_{viol.}} \right)^4 = \left(\frac{\lambda_{viol.}}{\lambda} \right)^4$$

VI.3 Puissance totale rayonnée : formule de Larmor

On calcule la puissance totale rayonnée par le dipôle oscillant dans l'espace en appliquant le théorème de Poynting à une sphère S de rayon r et centrée sur le dipôle en O , soit :

$$\mathcal{P}_r = \oiint_{Sph(r)} \vec{R} \cdot \vec{dS} = \oiint_S \frac{p^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{dS}$$




 FIGURE XVIII.10 – Diagramme de rayonnement 2D (courbes relatives à celle obtenue pour $\lambda = 380 \text{ nm}$)

soit avec l'élément de surface d'une sphère de rayon r : $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \cdot \vec{e}_r$

$$\mathcal{P}_r = \frac{p^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

soit en utilisant le résultat connu : $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$:

$$\mathcal{P}_r = \frac{p^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{Formule de Larmor}) \quad (\text{XVIII.6})$$

Exercice de cours: (VI.3) - n° 1. Montrer que dans le cas du dipôle sinusoïdal, l'expression de la puissance moyenne rayonnée s'écrit également :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{12} \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 \pi c^3}$$

Exercice de cours: (VI.3) - n° 2. Expliquer en quoi la décroissance du champ (\vec{E}, \vec{B}) en $\frac{1}{r}$ est prévisible par la conservation de l'énergie.

VII Etude succincte de la diffusion (Complément théorique de l'étude documentaire)

VII.1 Introduction

Une onde électromagnétique incidente sur la matière est susceptible de faire osciller les électrons par l'action de la force électrique de Lorentz. Ces électrons atomiques ainsi excités, se comportent alors eux-mêmes comme des dipôles oscillants émettant des ondes électromagnétiques. Cette réémission secondaire est nommée «diffusion».

EXPÉRIENCE DE COURS : diffusion de lumière par des particules de soufre en structure colloïdale (expérience reprise en TP).

OBSERVATIONS :

- ◇ les particules réémettent de la lumière (diffusion) avec une dominance d'intensité dans le bleu/violet.
- ◇ la lumière émise par les particules semble polarisée rectilignement

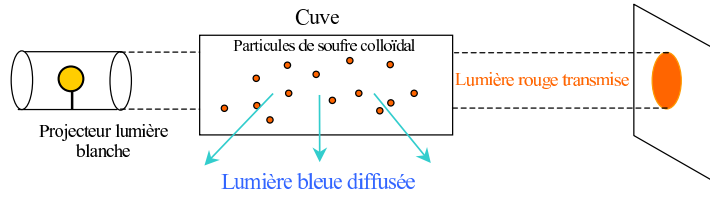


FIGURE XVIII.12 – Expérience du "bleu du ciel"

OBJECTIFS :

- ◇ Expliquer au moins qualitativement le phénomène de diffusion.
- ◇ Détermination de p_0 par un modèle simple.

VII.2 Modèle de l'électron élastiquement lié - moment dipolaire électronique

HYPOTHÈSES :

- ◇ Electron atomique de masse m_e , de charge $q = -e$ soumis à une OPPH de pulsation ω se déplaçant selon l'axe $[Ox)$ et polarisée selon \vec{e}_z

$$\vec{E} = E_m \times e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

Si l'électron est supposé placé en $x = 0$:

$$\vec{E} = E_m \times e^{j\omega t} \vec{e}_z$$

Recensons les forces appliquées sur cet électron :

- ◇ force de rappel élastique d'expression : $\vec{f}_{el} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$
- ◇ force de frottement liée au collisions dans le milieu, que l'on posera proportionnelle à la vitesse (frottement visqueux) : $\vec{f}_f = -\alpha \frac{d\vec{r}}{dt}$
- ◇ force électrique résultant du champ de l'onde (en négligeant comme toujours la contribution magnétique) : $\vec{f}_e = -e E_m \times e^{j\omega t} \vec{e}_z$

L'application de la RFD à l'électron permet de déterminer le mouvement de ce dernier en RSF soit selon l'axe $[Oz)$ compte tenu de la polarisation du champ électrique :

$$m_e \ddot{z} = -m_e \omega_0^2 z - \alpha \dot{z} - e E_m \times e^{j\omega t}$$

soit en posant $\tau = \frac{m_e}{\alpha}$

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e E_m}{m_e} \times e^{j\omega t}$$

Le formalisme complexe permet très facilement la détermination de la solution z du régime permanent :

$$z = \frac{-e E_m e^{j\omega t}}{m_e [(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega}{\tau}]}$$

On en déduit immédiatement l'expression du moment dipolaire lié au mouvement de cet électron :

$$\vec{p} = -e z \vec{e}_z = \frac{e^2 E_m e^{j\omega t}}{m_e [(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega}{\tau}]} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{XVIII.7})$$

soit :

$$\vec{p} = \underline{p}_0(\omega) e^{j\omega t} \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \underline{p}_0(\omega) = \frac{e^2 E_m}{m_e [(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}]}$$

soit finalement :

$$p_0(\omega) = \frac{e^2 E_m}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

VII.3 Domaines spectral de diffusion- le bleu du ciel

A l'aide des résultats précédents, on peut facilement calculer la puissance moyenne rayonnée par ce dipôle électro-nique.

On rappelle que :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{12} \frac{p_0^2(\omega) \omega^4}{\epsilon_0 \pi c^3}$$

soit avec l'expression de $p_0(\omega)$ dégagée ci-dessus :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{e^4 E_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} \times \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$$

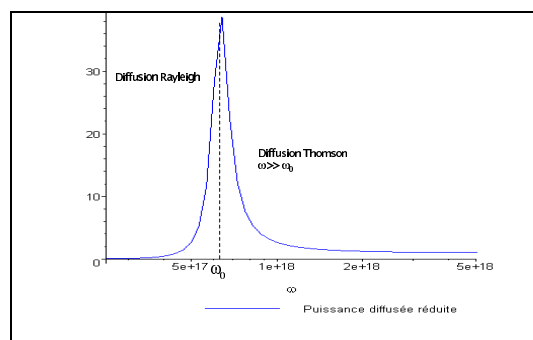


FIGURE XVIII.13 – Puissance électromagnétique moyenne diffusée

Le tracé ci-contre de la puissance moyenne rayonnée $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ (échelle arbitraire pour l'axe des puissances) est réalisé pour les dipôles de haute atmosphère constitués par les molécules de N_2 et O_2 (donc polarisables!!!). Pour ces molécules, on a :

$$\tau_{O_2} \simeq \tau_{N_2} \sim 10^{-12} \leftrightarrow 10^{-14} \text{ s} \quad \text{et} \quad \omega_0 \simeq 10^{17} \text{ rad.s}^{-1} \gg \omega_{vis}$$

On constate deux zones distinctes sur ce graphique :

- La première zone pour laquelle $\omega \ll \omega_0$ c'est à dire pour des rayonnements de faible fréquence comme les rayonnements visibles correspond au **domaine de la diffusion Rayleigh**. Dans ces conditions, la puissance rayonnée est environ proportionnelle à ω^4 , avec :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle \simeq \frac{e^4 E_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} \times \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

CONSÉQUENCES :

Rappel : $\omega_{bleu} \simeq 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_{rouge} \simeq 2,35 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$

En formant le rapport des puissances rayonnées dans le violet et le rouge, on obtient :

$$\frac{\mathcal{P}_{violet}}{\mathcal{P}_{rouge}} = \frac{\omega_{violet}^4}{\omega_{rouge}^4} = \frac{\lambda_{rouge}^4}{\lambda_{violet}^4} \simeq \frac{750^4}{400^4} \simeq 12$$

On peut dès lors comprendre les raisons de la **couleur bleue du ciel**. Les molécules constituant l'air, essentiellement diazote et dioxygène, sont "excitées" par le rayonnement solaire incident, et réémettent à leur tour, dans toutes les directions de l'espace, un rayonnement dont l'essentiel de la puissance est concentré dans les hautes fréquences (bleu/violet).

NB : prévisions théoriques conformes au résultat obtenu dans l'expérience sur la diffusion par les particules de soufre colloïdal.

Remarque VII-1: INSTABILITÉ DE L'ATOME ?

Dans un modèle classique de l'atome, les électrons sont supposés «graviter» autour du noyau sur des orbites circulaires (modèle de Bohr) ou elliptiques (modèle de Rutherford).

Ces trajectoires supposent alors que l'électron possède une **accélération non nulle (accélération centripète)**, ce qui devrait entraîner une perte d'énergie par rayonnement. Le modèle classique prévoit donc une instabilité de l'atome ce qui est en désaccord avec l'expérience. Seule la mécanique quantique apporte un modèle théorique satisfaisant.

- La seconde zone pour laquelle $\omega \gg \omega_0$, est le **domaine de la diffusion Thomson**, pour lequel la puissance rayonnée est indépendante de la pulsation puisque :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle \simeq \frac{e^4 E_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2}$$

Pour les molécules de l'atmosphère terrestre constituée en majorité de diazote et de dioxygène O_2 et N_2 , ce phénomène est constaté pour les rayons X durs $\omega \gg \omega_0(atmo) \simeq 2\pi \cdot 10^{17} rad.s^{-1}$

VII.4 Polarisation par diffusion

Considérons un dipôle en O irradié par une source de lumière non polarisée émettant dans la direction $[Ox)$. L'onde est supposée quasi-plane. On se propose d'observer la structure de la lumière diffusée en fonction de la direction d'observation. Les schémas qui suivent illustrent les deux cas extrêmes d'observation.

- Sur le premier schéma ci-contre, on observe la lumière diffusée dans la direction $[Ox)$ de propagation, c'est à dire pour un angle α nul. On constate que la lumière diffusée est non polarisée.

- Dans le second cas, on observe la lumière diffusée dans la direction perpendiculaire à $[Ox)$, soit pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'on constate que cette lumière est polarisée rectilignement.

Pour toutes les situations intermédiaires, c'est à dire pour lesquelles $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, l'onde diffusée dans la direction d'observation est partiellement polarisée.

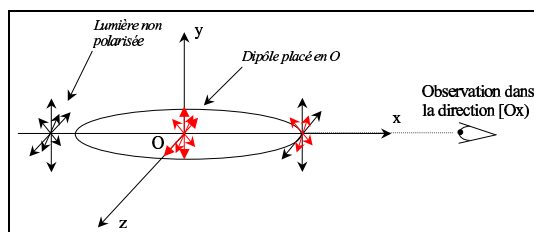


FIGURE XVIII.14 – Observation dans la direction $[Ox)$.

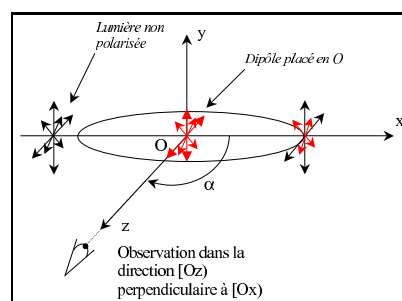


FIGURE XVIII.15 – Observation dans une direction perpendiculaire à l'axe de propagation.