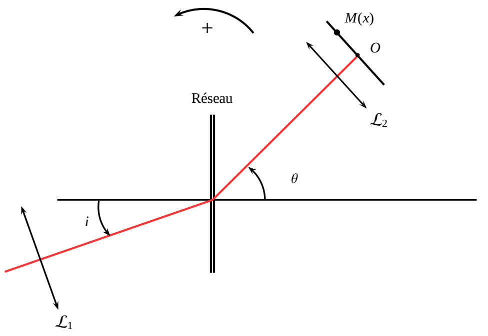
TD N° 6: OPTIQUE ONDULATOIRE
Interférences à N ondes - Réseaux optiques

Exercices techniques niveau 1

EXERCICE N°1: Exploitation de la relation du minimum de déviation

Une fente éclairée par une source monochromatique est placée au foyer objet d'une lentille convergente ($\mathcal{L}_1$ de distance focale f_1') et éclaire un réseau. L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente ($\mathcal{L}_2$ de distance focale f_2'). Le pas du réseau est noté a.



❶ Rappeler la relation fondamentale des réseaux en transmission.

❷ Déterminer la relation entre θ et i pour que la déviation D soit minimale.

❸ On suppose la relation ci-dessus vérifiée.

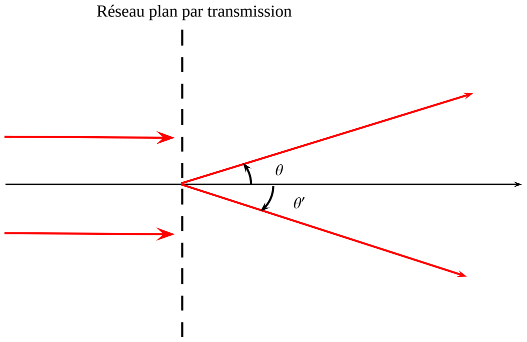
Quelle relation vérifie i en considérant que l'on se trouve au minimum de déviation d'ordre 2?

❹ Déterminer le pas du réseau. Faire l'application numérique avec $\lambda = 0,5861\ \mu m$ et $i = -23^0$.

❺ Soit $B = \dfrac{dX}{di}$ avec X qui repère la position du point M sur l'écran. Déterminer B sachant que la radiation λ_0 est observée en $X = 0$ et que l'on se trouve au minimum de déviation d'ordre 2. Calculer numériquement B avec $f' = 20\ cm$.

EXERCICE N°2: Exploitation expérimentale des ordres "symétriques"

Un réseau de pas a est éclairé par une source de longueur d'onde λ_0 sous incidence quasi-normale:



Pour les ordres $|k| \in 1, 2$, on donne les valeurs de θ et θ':

	$\vert k\vert = 1$	$\vert k\vert = 2$
θ_k	$23^0 12'$	$49^0 18'$
θ'_k	$-19^0 30'$	$-44^0 15'$

❶ L'incidence est-elle vraiment quasi-normale? Calculer le pas du réseau et le nombre de traits par millimètre pour $\lambda_0 = 0,5461\ \mu m$.

❷ On éclaire le réseau avec une autre source de longueur d'onde λ_1 inconnue. On mesure $\theta_2 = 42°09'$ et $\theta'_2 = -37°43'$. Calculer λ_1.

Exercices techniques niveau 2

Exercice n°3: Résolution du doublet jaune du sodium

Plusieurs méthodes de résolution du doublet du sodium de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0\ nm$ et $\lambda_2 = 589,6\ nm$ existent. L'une des techniques les plus courantes consiste à employer un Michelson (cf cours et TP) et d'exploiter la périodicité d'annulation du contraste (mesure indirecte). On peut également exploiter un spectroscope à réseau en utilisant les ordres > 1 (plus dispersifs).

On réalise à l'aide d'un spectroscope à réseau, un spectre normal d'ordre 2 que l'on observe dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f' = 50\ cm$. La largeur totale du réseau est de $2\ cm$.

❶ Déterminer le nombre minimal de lignes du réseau par mm permettant la résolution du doublet.

❷ Quel est dans le plan d'observation la distance séparant les deux raies (maximas primaires d'intensité) lorsque le réseau de pas $2\ \mu m$ est éclairé sur une largeur de $2\ cm$. Trouver le pouvoir de résolution théorique de ce réseau.

Exercice n°4: Variante de choix du réseau pour séparer le doublet du sodium

On considère un réseau utilisé en incidence normale pour séparer le doublet du sodium.

❶ Quelle est la valeur limite du nombre de traits "utiles" à l'ordre 2?

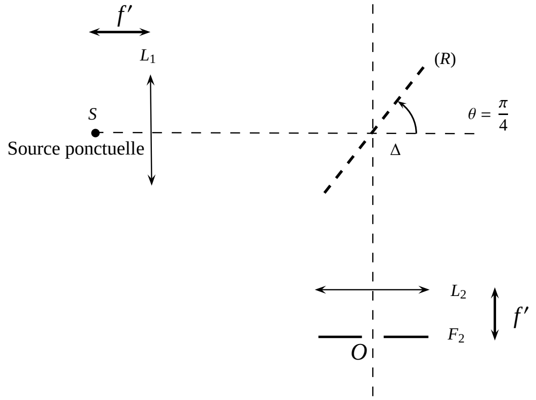
❷ Estimer alors l'ordre de grandeur du pas du réseau.

❸ Un réseau est éclairé en incidence normale sur une largeur de $10\ mm$ par le doublet du sodium.

Le doublet est séparé à l'ordre 5. Quel est le pas du réseau? Quelle est la largeur de faisceau nécessaire pour séparer le spectre d'ordre 3? Dans la pratique, est-ce raisonnable en modifiant une caractéristique du goniomètre? (il sera peut-être nécessaire de se "replonger" dans l'énoncé du TP de MPSI consacré à la spectrogoniométrie à prisme pour répondre à cette question.)

Exercice n°5: Monochromateur à réseau par transmission

On examine un monochromateur équipé d'un réseau (R) exploité en transmission. L'angle θ est fixé à $\dfrac{\pi}{4}$. Les lentilles sont de focale $10\ cm$, et le pas du réseau de $820\ nm$.



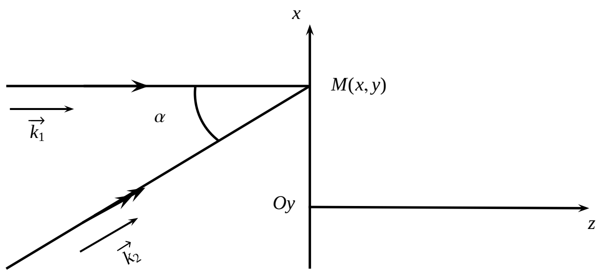
❶ Quelle est la longueur d'onde de la lumière arrivant au point O?

❷ La fente de sortie est de largeur $2l = 2\ mm$ centrée sur O. Quel est le domaine de longueur d'onde sélectionné à la sortie de cette fente?

Exercice n°6: Elaboration d'un réseau holographique

Deux faisceaux lumineux, modélisés par des ondes planes monochomatiques de même pulsation, se propagent dans le vide selon des vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$. On note λ leur longueur d'onde et α l'angle entre $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$. ϵ_1 et ϵ_2 sont les éclairements, à priori différents, donnés par chacune des deux ondes séparément.

On place un écran plan, perpendiculaire à $\overrightarrow{k_1}$, dans la zone où ces deux faisceaux se superposent. Un point M de cet écran est repéré par ses coordonnées (x, y), les axes (Ox) et (Oy) étant orientés comme le montre le schéma ci-contre. L'origine O est choisie de façon à ce que les deux ondes y soient en phase. L'axe (Oz) est dans la direction de $\overrightarrow{k_1}$.



❶ Exprimer le déphasage entre les deux ondes en un point M de l'écran, puis l'éclairement $\epsilon(M)$ sur ce plan, en fonction des données du problème. Définir l'ordre d'interférences p et donner son expression en fonction des coordonnées du point M. En déduire l'allure de la figure d'interférences sur l'écran.

❷ Donner l'expression de l'interfrange i et du contraste Γ. Calculer leur valeur dans le cas où $\lambda = 532\ nm$, $\alpha = 10^0$, $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$

❸ Simplifier l'expression de i lorsque α est très faible. Pour quelle valeur de α (donner l'ordre de grandeur en ^{0}) a-t-on un interfrange bien visible à l'oeil nu ($i \sim\ 0,5\ mm$)?

❹ Pour quelle valeur de α l'interfrange est-il minimum? Quelle est alors sa valeur?

❺ On remplace l'écran par une plaque photographique, permettant d'enregistrer les variations d'éclairement: la plaque, une fois le développement réalisé, a une transparence proportionnelle à l'éclairement reçu. Expliquer en quoi cette technique permet de réaliser des réseaux, appelés réseaux holographiques, c'est à dire des structures périodiques, dont la période de l'ordre du micromètre, peut être facilement ajustée.

Exercice n°7: **Interféromètre de Fabry-Pérot**

On considère une lame à face parallèle d'indice $n = 1,6$ et d'épaisseur $e = 2\mu m$; ses faces sont recouvertes d'un dépot métallique d'épaisseur négligeable.Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour ces deux dioptres sont notés r et t; on pose $r^2 = R$ et $t^2 = T$.
Cette lame est éclairée par une source monochromatique (λ_0) spatialement étendue; un rayon atteignant la lame sous incidence i donne lieu, après réflexions multiples, aux rayons transmis $1, 2, 3 \ldots$. On étudie le phénomène d'interférences dans le plan focal d'une lentille convergente.
R voisin de 1, par valeurs inférieures, vérifie: $R + T = 1$.

❶ Traduire cet énoncé par un schéma annoté.

❷ Pour quelle raison ne peut-on pas se contenter des rayons émergents 1 et 2? On pourra par exemple raisonnner numériquement en prenant $R = 0,9$.

❸ Quel est le déphasage φ entre deux rayons transmis consécutifs en fonction de i' angle de réfraction, n, e, et λ_0?

❹ Si A_0 est l'amplitude de l'onde incidente, justifier brièvement que l'amplitude complexe de l'onde transmise à l'infini s'obtient par la somme:

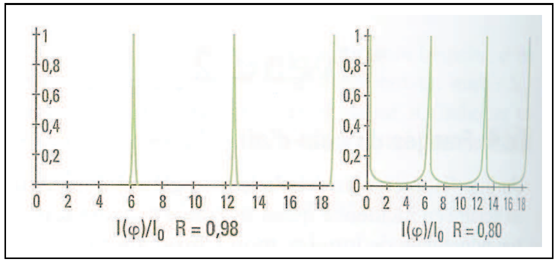
$$A_0T + A_0TR \cdot e^{j\varphi} + A_0TR^2 \cdot e^{2j\varphi} + A_0TR^3 \cdot e^{3j\varphi} + \ldots$$

❺ Montrer que l'intensité de l'onde résultante est:

$$I(\varphi) = \frac{I_0}{1 + m \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

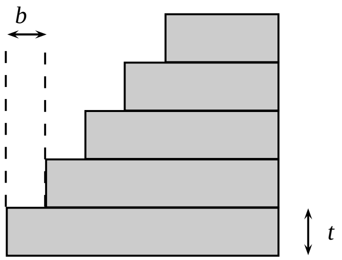
Donner les expressions de I_0 et m, en fonction de A_0, R et d'un coefficient à définir.

❻ On considère les deux courbes $\frac{I(\varphi)}{I_0}$ pour $R = 0,98$ et $R = 0,8$. Quel avantage voyez-vous dans le 1er cas?



EXERCICE N°8: **Réseau à échelons de Michelson**

En 1898, Michelson réalisa un réseau à fort pouvoir de résolution en empilant $N = 15$ lames métalliques, de même épaisseur $t = 1\ cm$, chacune d'entre-elles étant en retrait d'une largeur $b = 1\ mm$ par rapport à la précédente. L'ensemble des N lames forme un réseau par réflexion que l'on éclaire sous incidence normale par une radiation monochromatique ($\lambda = 500\ nm$).



❶ Montrer que la différence de chemin optique entre deux ondes véhiculées par des rayons parallèles, tombant sur des points homologues de deux lames consécutives, et diffractés dans la même direction θ, a pour expression:

$$L = t(1 + \cos\theta) - b\sin\theta$$

❷ En déduire l'expression de la distribution en intensité de la lumière diffractée en fonction de θ. Trouver la position des maxima principaux dans le cas où θ est petit. Quel est l'ordre d'interférences pour $\theta = 0$?

❸ Calculer le pouvoir de résolution théorique d'un tel réseau ainsi que sa résolution en longueur d'onde.

EXERCICE N°9: **Effet d'un défaut aléatoire de périodicité d'un réseau sur ses capacités de résolution**

On considère un réseau de pas a comportant N traits identiques, mais dont la position n'est pas exactement régulière. On modélise la disposition irrégulière des centres des traits par la relation suivante: (donnant la position du centre du n$^{\text{ième}}$ trait)

$$x_n = a\left(n + \epsilon\sin\frac{2n\pi}{p}\right) \quad \begin{cases}\text{avec } p << N\\ \text{avec } \epsilon << 1\end{cases}$$

Ce réseau est éclairé par une onde plane arrivant sous incidence θ_0 et l'observation se fait en un point M situé à l'infini dans la direction émergente θ par rapport à la normale au réseau.

❶ En notant $\Phi = ka$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$, montrer que le déphasage de l'onde émise par le (n-1)$^{\text{ième}}$ trait par rapport au premier s'écrit:

$$\Phi_n(M_\infty) = n\Phi + \Phi\epsilon\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$$

❷ Montrer que l'amplitude de l'onde résultante s'écrit de façon approchée:

$$\psi(M_\infty) \simeq K(j\omega t)\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\Phi} + \frac{ka\epsilon}{2}e^{jn\left(\Phi+\frac{2\pi}{p}\right)} - \frac{ka\epsilon}{2}e^{jn\left(\Phi-\frac{2\pi}{p}\right)}$$

On exploitera le DL1: $e^{\epsilon} \overset{\epsilon<<1}{\simeq} 1 + \epsilon$

❸ Montrer que compte tenu de $\Phi >> \dfrac{2\pi}{p}$ et $p << N$, l'intensité peut s'écrire comme la somme de trois termes entrainant autour de chaque pic "classique" (obtenu avec un réseau parfait) deux pics "parasites".

❹ Conclure alors sur l'utilisation de ce réseau en spectroscopie?

Résolution de problèmes

Exercice n°10: **Des lunettes confortables!!**

Les lunettes de vue modernes sont quasiment toutes équipées d'un dispositif de revêtement antireflet sur la face avant des verres qui vise à améliorer la luminosité et le "contact" visuel avec les interlocuteurs. Dans le cas des lunettes de soleil, c'est la face arrière en regard des yeux du porteur de lunettes qui est traitée afin d'éviter les reflets de la lumière provenant de derrière et l'inconfort qui en découle:

Cette couche antireflet, déposée **sur le verre de lunette d'indice** n, est constituée d'un fin revêtement diélectrique (isolant le plus souvent de nature organique) partiellement réfléchissant **d'épaisseur** e **et d'indice** n_0 que nous appellerons milieu. Le milieu environnant avant la couche de diélectrique est de l'air d'indice assimilé à celui du vide $n_{air} = 1$.

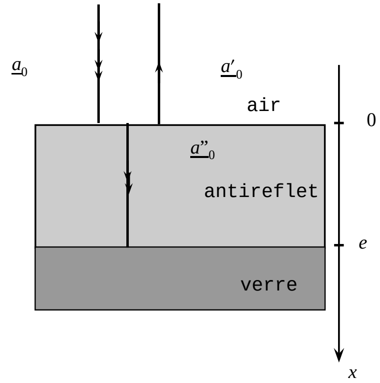
Pour simplifier l'étude, nous supposerons qu'une onde plane monochromatique arrive sous incidence normale sur le diélectrique depuis l'air. On donne les expressions des coefficients de réflexion et de transmission **en amplitude** d'une onde plane monochromatique se propageant dans le milieu (1) et en incidence sur le milieu (2):

$$\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

on notera également:

$$r_0 = \frac{n_0 - 1}{n_0 + 1} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{n_0 - n}{n_0 + n}$$

Appelons par exemple a_0 l'amplitude de l'onde incidente, a'_0 celle de l'onde réfléchie, et enfin $a"_0$ celle de l'onde transmise à l'interface air-diélectrique. Le dispositif est représenté sur le schéma ci-dessous:



Le problème propose d'analyser les conditions de «bon fonctionnement» de ce dispositif.

❶ Expliquer comment un tel dispositif doit se comporter pour assurer sa fonction antireflet.

❷ La couche agissant comme une cavité "piège", calculer l'amplitude en $x = 0$ de l'onde transmise dans l'air après n aller-retours dans la couche de diélectrique en fonction de $\underline{a}_0$, r_0, r, et φ le retard de phase correspondant à un aller-retour de l'onde dans la couche.

❸ Dégager la condition de bon fonctionnement du système antireflet.

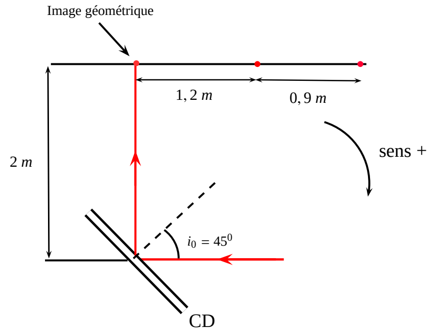
Exercice n°11: **Capacité des CD-ROM et DVD-ROM**

On souhaite déterminer la capacité approximative de stockage des supports optiques CD et DVD par une simple expérience de diffraction. Pour cela on dispose d'une petite diode L.A.S.E.R. (type "porte-clés") émettant une lumière rouge de longueur d'onde $\lambda = 633\ nm$.

On envoie le faisceau L.A.S.E.R. de la diode sous une incidence d'environ 45^0 sur la surface du CD. La lumière renvoyée est observée sur un mur à environ $2\ m$ du support optique. On constate la présence d'un point lumineux correspondant à l'image géométrique du faisceau et deux traits légèrement courbés, le premier étant à une distance $1,2\ m$ du point lumineux. La distance entre les deux traits est de $0,9\ m$.

Lorsque cette manipulation est réalisée avec le DVD, on observe sur le mur un point lumineux et un seul trait lumineux à plus de $2\ m$ de l'image géométrique (on observe aussi une sous structure au niveau des traits selon que le DVD est simple ou double couche)

L'expérience menée est résumée sur le schéma ci-dessous:



Question: Interpréter ces observations et estimer en octets l'ordre de grandeur de la capacité de stockage de chacun de ces deux supports.