TD N° 17: THERMODYNAMIQUE
Conduction et conducto-convection thermiques

Exercices d'application du cours

EXERCICE N°1: Un café chaud mais pas trop!

On considère une tasse cylindrique de rayon $a = 5\ cm$, d'épaisseur e, dans laquelle on verse du café a $80^0 C$... La paroi a une conductivité thermique $\lambda = 2\ W.K^{-1}.m^{-1}$ et le coefficient conducto-convectif avec l'air extérieur est $h = 300\ W.K^{-1}.m^{-2}$. L'air extérieur est à la température de $T_e = 20^0 C$.

Quel est l'épaisseur limite e_l nécessaire de la tasse pour ne pas se brûler si l'on considère que les doigts peuvent supporter une température maximale de $50^0 C$? On pourra faire le calcul rigoureux dans un premier temps, puis un calcul approximé en géométrie cartésienne dans un second temps dont on justifiera la légitimité.

EXERCICE N°2: Bilan thermique dans un combustible nucléaire

Dans un barreau cylindrique d'uranium, utilisé comme combustible nucléaire, la puissance volumique créée par les réactions nucléaires qui s'y produisent est $\sigma_u = 480\ MW.m^{-3}$. La conductivité thermique de l'uranium est $\lambda = 30\ W.m^{-1}.K^{-1}$, et sa température de fusion $T_f = 1405\ K$. La surface latérale du barreau est maintenue à la température $T_s = 443\ K$.

❶ Le barreau est homogène et sa section droite est un disque de rayon $r_e = 2\ cm$.

- **a·** Trouver la loi de variation de la température $T(r)$, r étant la distance d'un point du matériau à l'axe du cylindre.
- **b·** Quelle est la température maximale? Commenter.
- **c·** Calculer la puissance dissipée par un tel barreau sur une longueur de un mètre.

❷ Le barreau a la forme d'un tube creux de rayon extérieur $r_e = 2\ cm$ et de rayon intérieur $r_i = 1\ cm$. La surface intérieure du tube recouverte d'un isolant thermique parfait.

- **a·** Établir la nouvelle loi de variation de la température $T'(r)$.
- **b·** Quelle est la nouvelle température maximale?
- **c·** Calculer la nouvelle puissance dissipée par un tel tube sur une longueur de un mètre.

EXERCICE N°3: Etude thermique d'un mammifère marin (oral centrale 2015)

Un mammifère marin est modélisé par une sphère de rayon R et de centre O. A l'intérieur, il produit une puissance thermique volumique σ_a.

La sphère est placée dans un fluide (eau ou air) de conductivité thermique λ. La température loin de la sphère est $T_0 = 293\ K$.

❶ Rappeler la loi de Fourier. La commenter. La traduire dans la géométrie du problème après avoir justifier vos choix. Indiquer l'unité $S.I.$ de la conductivité thermique.

❷ Proposer des lois physiques analogues à la loi de Fourier.

❸ Calculer le flux thermique Φ dans le fluide en fonction de σ_a et R, en régime permanent.

❹ Calculer $j_q(R)$.

❺ Montrer que pour $r > R$, $4\pi r^2 j_q(r) = A$. Expliciter A.

❻ Déterminer l'équations vérifiée par $T(r)$ dans le fluide.

Etablir que pour $r > R$, $T(r) = T_0 + \dfrac{a}{r}$. Exprimer a.

❼ Déterminer la température cutanée T_c.

❽ On donne pour l'air $\lambda_a = 5\ S.I.$, pour l'eau $\lambda_e = 500\ S.I.$, $R = 25\ cm$.

Calculer σ_a pour $T_c = 303\ K$ dans les cas où la sphère est plongée dans l'air puis dans l'eau. Commenter.

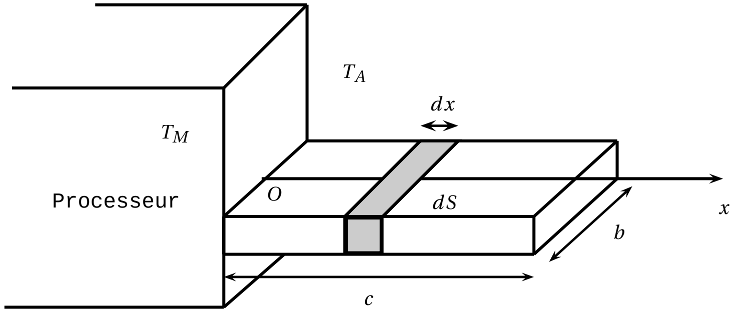
❾ Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins?

EXERCICE N°4: Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important d'un processeur M, on munit son enveloppe d'un dissipateur comportant plusieurs ailettes de refroidissement métalliques. Chaque ailette est parallélépipédique de dimensions:

épaisseur $a = 2,0\ mm$, largeur $b = 10 cm$, et longueur $c = 20\ cm$.

On pourra admettre que a est négligeable devant b.



En fonctionnement, l'enveloppe du processeur est à la température $T_M = 60^0 C$. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme $T_A = 20^0 C$, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air thermiquement peu conductrice dont la température reste localement voisine de celle de la surface de l'ailette.

Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, peut être considéré comme monodimensionnel dans la direction de l'axe $[Ox)$ et qu'il obéit à la loi de Fourier:

$$\overrightarrow{j}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \overrightarrow{e_x}$$

où $\overrightarrow{j}(x)$ est le vecteur de densité de flux thermique à l'abscisse x, mesuré à partir de l'origine O au contact du boitier du processeur, et avec $\lambda = 16\ W.K^{-1}.M^{-1}$. $T(x)$ est la température à l'abscisse x de l'ailette.

IL existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant à travers la couche limite. Le flux thermique entre la surface latérale dS (en gris sur la figure) de l'élément de l'ailette de longueur dx et l'air ambiant est de la forme:

$$dP = h\,[T(x) - T_A] \cdot dS \qquad \text{où } h = 150\ U.S.I. \text{ est un coefficient uniforme et constant.}$$

❶ Ecrire le bilan des échanges d'énergie pour la tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$, en régime permanent d'échange thermique.

❷ En déduire que la température $T(x)$ est solution de l'équation différentielle:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\,[T(x) - T_A] = 0$$

On donnera l'expression et la valeur numérique de L ainsi que son unité.

❸ Résoudre cette équation différentielle. On vérifiera que $c >> L$ et on pourra considérer c comme infini pour simplifier les CL.

❹ Déterminer l'expression de la puissance thermique totale P évacuée par l'ailette, ainsi que sa valeur numérique.

Exercice n°5: Refroidissement d'un appartement

Le but de l'exercice est de déterminer la loi d'évolution de la température dans un appartement.

Les appartements voisins sont maintenus à une température $T_V = 18^0 C$. Les échanges thermiques entre le studio et les appartements voisins sont caractérisés par une conductance thermique $G_V = 100\ W.K^{-1}$. La température extérieure est $T_E =^0 C$, indépendante du temps. Les échanges thermiques entre le studio et l'extérieur sont caractérisés par la résistance thermique $R_E = 0,05\ K.W^{-1}$. La capacité thermique du studio est $C = 6.10^5\ J.K^{-1}$. A l'instant $t = 0$, le chauffage est coupé dans l'appartement et l'on étudie l'évolution de sa température T_f qui était initialement égale à T_V. Pour les échanges thermiques, on fait l'approximation d'une évolution quasistationnaire pour laquelle on utilise les résistances thermiques des murs.

❶ Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $T_f(t)$ et donner le schéma électrique équivalent.

❷ Calculer la constante de temps de l'évolution de la température? Faire une application numérique.

❸ Quelle est la température finale notée T_{fin}? Application numérique.

Exercice n°6: Temps de réponse d'un thermomètre.

❶ On considère un thermomètre au mercure où le métal est contenu dans un tube de rayon a. Le mercure possède une très grande conductivité de sorte qu'en régime quasi-stationnaire, sa température est uniforme au sein du thermomètre. On appelle h le coefficient d'échange mercure-air, D la diffusivité thermique, λ sa conductivité thermique, et L la hauteur moyenne de la colonne de mercure. Pour les applications numériques on prendra:

$$\begin{cases} h = 57\ W.m^{-2}.K^{-1} \\ D = 0{,}0166\ m^2.heure^{-1} \\ \lambda = 43.10^{-3}\ W.m^{-1}.K^{-1} \\ L = 25\ cm \end{cases}$$

Le mercure étant initialement à une température T_0 et l'extérieur à une température T_e, établir la loi de variation de $T(t)$ en supposant que l'échange thermique ne se fait qu'à l'interface de rayon a.

❷ On introduit le nombre de Biot, $B = \dfrac{hL}{\lambda}$ et le nombre de Fourier, $f = \dfrac{tD}{L^2}$.

Exprimer $\eta(t) = \dfrac{T(t) - T_e}{T_0 - T_e}$ en fonction de f et de B.

Justifier la géométrie des thermomètres. Donner une estimation du temps de réponse du thermomètre. Application numérique.

❸ On pose $\theta = T(t) - T_e$ et on suppose maintenant que du fait d'un courant d'air, la température évolue selon une loi typique:

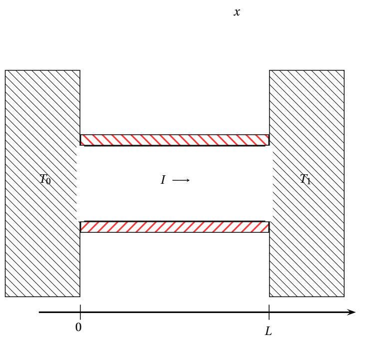
$$T_{ext} = T_e + \theta_1 \sin(\omega t)$$

Exprimer le rapport α entre l'amplitude thermique maximum du thermomètre et l'amplitude thermique maximum du courant d'air. Calculer sa valeur pour une période de fluctuation de l'ordre de la minute. Conclure.

Exercices à caractère plus technique

Exercice n°7: Diffusion thermique en présence d'un effet Joule

Un cylindre métallique de conductivité électrique et thermique γ et λ, de section S et de longueur L est parcouru longitudinalement par un courant électrique constant d'intensité I. On suppose que les extrémités sont maintenues aux températures T_0 et T_1 avec $T_0 > T_1$ et que la surface latérale est calorifugée (fig ci-dessous). On appelle ρ et c_m respectivement la masse volumique et la capacité thermique massique du conducteur constituant le cylindre.



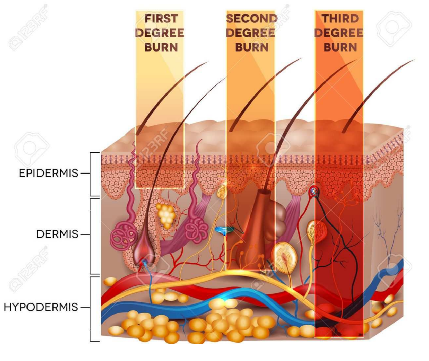
❶ Déterminer la loi d'évolution spatiale de la température en fonction de l'abscisse en régime établi. On supposera le problème est unidimensionnel.

❷ Examiner les cas particuliers $I = 0$ ou bien $T_0 = T_1$ et commenter l'allure des courbes obtenues.

❸ Calculer le flux thermique aux deux extêmités et commenter le résultat.

Exercice n°8: Modélisation d'une brûlure de la peau

On cherche dans cet exercice à analyser la propagation de la chaleur dans la peau lors d'une brûlure de celle-ci. On adopte pour cela un modèle unidimensionnel très simple dans lequel la peau correspond au demi-espace $x \geq 0$. Pour $t = 0^-$, la surface de la peau est supposée de température uniforme $T_0 = 300\ K$. A l'instant $t = 0$, la surface de la peau en $x = 0$ est brusquement et durablement mise en contact avec un corps très chaud de température $T_1 = 440\ K$. On donne la diffusivité de la peau humaine $D = 1{,}5.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$



❶ Préciser les expressions de $T(x>0, t=0^+)$, et $T(x=0, t>0)$, et rappeler l'équation de la diffusion thermique correspondant à ce problème?

❷ On va rechercher la solution de ce problème sous la forme $T(x,t) = f(u)$ avec $u = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ variable sans dimension.

a· Dégager l'équation différentielle à laquelle obéit la fonction $f(u)$, et vérifier qu'une solution possible est de la forme:

$$f(u) = A + B\int_0^u e^{-y^2}\cdot dy$$

où A et B sont deux constantes. On admettra qu'il s'agit de la solution générale de cette équation différentielle.

b· Déterminer les expressions des constantes A et B en fonction de T_0 et T_1. **Donnée:**

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

❸ Déterminer l'expression de la densité de courant thermique $\overrightarrow{J_Q}(x,t)$ et en déduire sa valeur à la surface de la peau, en $x=0$. Que peut-on en conclure?

❹ On cherche dans cette question à estimer la vitesse de propagation de la chaleur dans la peau afin de prévoir les dégâts potentiels d'une exposition prolongée au matériau chaud.
Calculer les instants t_1 et t_2 au bout desquels la température est égale à 90 % de T_1 aux profondeurs 1 mm puis 1 cm.

Ci-dessous sont rassemblées quelques valeurs numériques de la *fonction d'erreur* (appelée aussi *fonction d'erreur de Gauss*):

$$erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}\cdot dt$$

u	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
erf(u)	0	0,11	0,22	0,33	0,43	0,52	0,60	0,68	0,74	0,80	0,84	0,88

Exercice n°9: Fusion de la glace sur un pare brise

Soit une voiture une nuit d'hiver, dont le pare-brise d'épaisseur e_0 est recouvert de glace d'épaisseur initiale e_1. L'air intérieur de la voiture est à la température T_i, et l'air extérieur est à la température $T_e = -5\,^0C$.

On supposera que la glace fond à $\theta = 0^0C$ dans les conditions de pression de l'expérience.

On modélise les interfaces air intérieur/vitre et air extérieur/glace par une loi de conducto-convection de Newton de coefficients respectifs h_i et h_e.

On se place dans cet exercice dans le cadre d'un régime quasi-permanent pour les transferts thermiques.

On appelle l_f l'enthalpie de fusion massique de la neige dans les conditions de pression de l'exercice.

On appelle également μ la masse volumique de la glace.

❶ Donner l'expression de la résistance thermique totale entre l'air intérieur et l'interface vitre/glace.

❷ Donner de même l'expression de la résistance thermique entre l'air extérieur et l'interface vitre/glace.

❸ Modéliser la situation par un cicuit électrocinétique équivalent et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $e(t)$, épaisseur de la couche de glace à l'instant t.

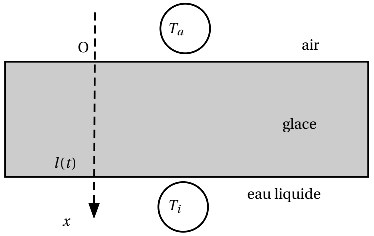
❹ Commenter cette équation en décrivant comment évolue la vitesse de fusion de la glace $\dfrac{de(t)}{dt}$:
- en fonction de la température intérieure de la voiture T_i.
- en fonction du coefficient conducto-convectif h_i. Comment faire pour l'augmenter?
- en fonction de l'épaisseur à l'instant t $e(t)$.

Exercice n°10: Gel d'un lac

On considère un lac où l'eau liquide est en permanence à la température de congélation $T_i = 273\ K$. L'air au-dessus du lac est à la température constante $T_a = 263K$.
Libre de glace à l'instant initial $t=0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur est notée $l(t)$ à l'instant t.

On donne pour la glace:

- masse volumique $\rho = 900 kg.m^3$
- conductivité thermique $\lambda = 2,1 W.m^{-1}.K^{-1}$
- capacité calorifique: **négligeable**
- chaleur latente de fusion $L_f = 334 kJ/kg$



Enfin, les échanges thermiques entre la surface libre de la glace et l'air s'effectuent par couplage conducto-convectif; la puissance thermique échangée par unité de surface de glace vaut donc:

$$\mathscr{P}_s^{cc} = h[T_0(t) - T_a]$$

où $T_0(t)$ est la température de la glace en $x = 0$, et $h = 42\ W.m^{-2}.K^{-1}$.

❶ Déterminer la distribution de température $T(x,t)$ dans la glace en fonction de $T_0(t)$, T_i, $l(t)$ et x.

❷ Etablir deux relations entre $l(t)$ et $T_0(t)$. En déduire l'expression de $l(t)$.
On posera $l_0 = \dfrac{\lambda}{h}$ et $\tau = \dfrac{\lambda \rho L_f}{2h^2(T_i - T_a)}$. Donner les valeurs numériques de l_0, τ, et $\dfrac{dl(t)}{dt}$.

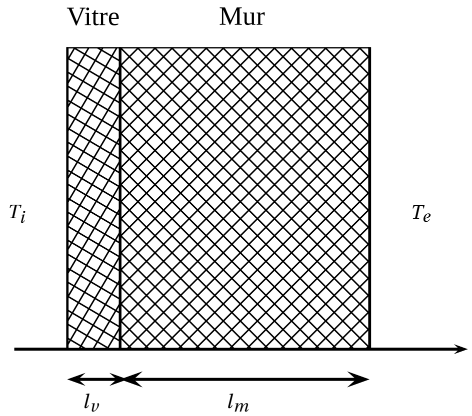
❸ Comment évolue la température à la surface du lac?

Exercice n°11: Buée sur un miroir de salle de bain

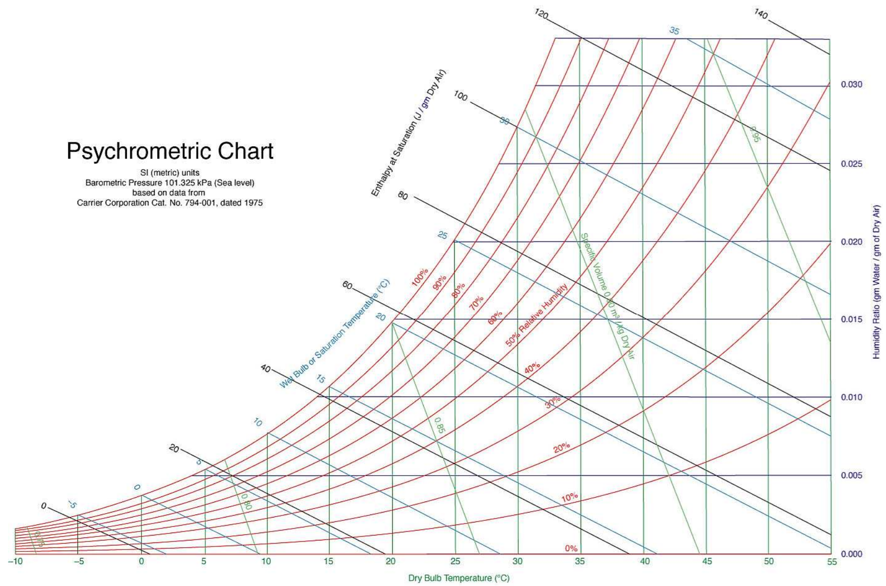
On considère un miroir de surface $S = 0,5\ m^2$ accolé à un mur de salle de bain.

On donne les informations suivantes:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_m = 1\ W.m^{-1}.K^{-1} \text{ conduction thermique du mur} \\ \lambda_v = 1\ W.m^{-1}.K^{-1} \text{ conduction thermique du verre du miroir} \\ h_i = 10\ W.m^{-2}.K^{-1} \text{ coefficient conducto-convectif air intérieur-miroir} \\ h_e = 20\ W.m^{-2}.K^{-1} \text{ coefficient conducto-convectif mur-air extérieur} \\ l_v = 5mm \text{ épaisseur de la vitre} \\ l_m = 20cm \text{ épaisseur du mur} \end{array}\right.$$



❶ Si $T_e = 0^0C$ et $T_i = 19^0C$, calculer la température à la surface de la vitre. Préciser une condition sur le degré hygrométrique pour qu'il n'y ait pas de buée qui se forme sur le miroir; on exploitera l'abaque fournie ci-dessous pour répondre à cette question.



❷ Après une douche, la température de l'air est de 22^0C et l'air est saturé en vapeur d'eau. Montrer qu'il est inévitable que de la buée se forme sur le miroir.

❸ Pour l'empêcher, on peut mettre un film chauffant derrière le miroir. Expliquer le principe d'un tel dispositif et calculer la puissance minimale nécessaire du film chauffant.

EXERCICE N°12: **Barre en régime instationnaire**

On étudie une barre métallique de longueur L, de section S, de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, et de capacité thermique massique c.

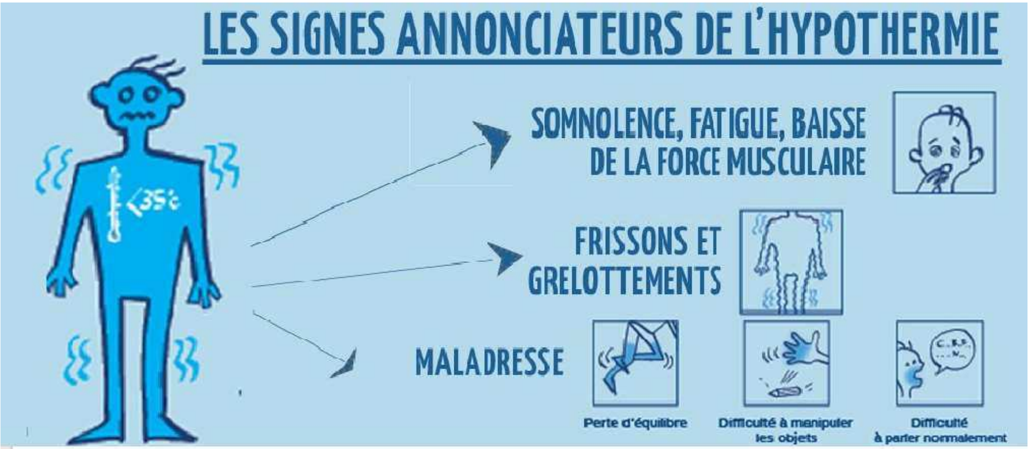
La barre est calorifugée latéralement, et on impose aux deux extrêmités une température T_0.

Etablir le profil de température $T(x,t)$ sachant que l'on a une température initiale:

$$T_{i,n}(x) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

EXERCICE N°13: RÉSOLUTION DE PROBLÈME: **prévenir l'hypothermie**

On cherche dans ce problème à savoir combien de temps un plongeur équipé d'une combinaison de plongée ou non peut séjourner dans l'eau avant d'être victime de l'hypothermie.



On donne pour cet exercice:

- Température de l'eau: 17^0C
- Températures communément admises d'hypothermie chez l'homme:
  - de 35^0C à 34^0C: hypothermie modérée
  - de 34^0C à 32^0C: hypothermie moyenne
  - En dessous de 32^0C: hypothermie grave
- Energie quotidienne fournie par le métabolisme humain 2400 $kcal \simeq 1.10^4\ kJ$
- Capacité thermique massique du corps humain: $C_{corps} = 3{,}5\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
- Résistance thermique de la peau humaine pour une homme «moyen»: $3.10^{-2}\ K.W^{-1}$
- Puissances surfaciques de perte du corps humain:
  - par rayonnement $= 22{,}8.10^{-8} \times T_{ext}^3 \cdot (T_{ext} - T)$ en $W.m^{-2}$
  - par convection $= 10 \times (T_{ext} - T)$ en $W \cdot m^{-2}$

  où T_{ext} est la température de l'eau environnante.
- **Combinaison**:
  - Epaisseur «classique» d'une combinaison de plongée: 3 mm
  - Conductivité thermique du néoprène: $\lambda_{neo} = 0{,}2\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Proposer une modélisation physique de cette situation permettant de déterminer la durée de séjour maximale du plongeur dans l'eau avant qu'il ne subisse le phénomène d'hypothermie.

Vous devrez probablement introduire certains paramètres physique, et leur choisir des valeurs numériques raisonnables.