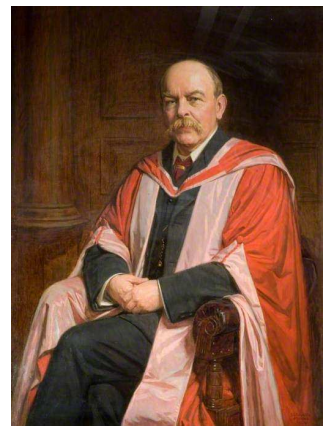


Energie du champ électromagnétique



JOHN HENRY POYNTING (1852-1914)

PLAN DU CHAPITRE

I	Première approche : le conducteur ohmique - loi d'Ohm - loi de Joule	2
I.1	Loi d'Ohm locale avec le modèle de Drüde	2
I.2	Loi d'Ohm intégrale : résistance ohmique	4
I.3	Puissance volumique cédée aux porteurs de charge par le champ électromagnétique .	5
	a - Expression	5
	b - Application : effet Joule local et intégral	6
II	Approche générale : bilan énergétique complet de l'interaction électromagnétique	7
II.1	Bilan d'énergie à l'échelle locale	7
	a - Nécessité d'un «vecteur de transport d'énergie»	7
	b - Ecriture complète du bilan énergétique local : identité de Poynting et vecteur de Poynting	9
II.2	Bilan d'énergie intégral - théorème de Poynting	10
II.3	Exemples d'applications	11
	a - Bilan de puissance dans un conducteur ohmique	11
	b - Stockage d'énergie électromagnétique dans un condensateur - énergie "majoritaire"	12

I Première approche : le conducteur ohmique - loi d'Ohm - loi de Joule

I.1 Loi d'Ohm locale avec le modèle de Drüde

On considère un milieu conducteur **immobile** possédant des charges **mobiles** de valeur q et de masse m en concentration volumique n . On note $\rho = n \times m$ la masse volumique de ce "fluide" de charge (modèle).

Sous l'effet d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , les charges sont mises en mouvement appelé **mouvement de dérive** (en fait seulement par le champ électrique!).

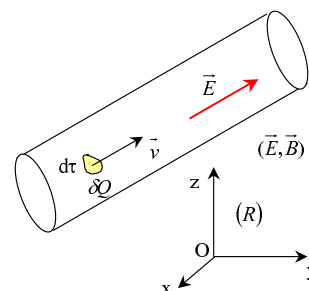


FIGURE XIV.1 – Migration des charges d'un conducteur sous l'effet du champ électrique

NB : ce mouvement de «dérive» des porteurs de charges correspond à un mouvement «moyen» de migration sous l'effet du champ, et n'a rien à voir avec les mouvements isotropes rapides liés à l'agitation thermique.

Considérons un volume élémentaire mésoscopique $d\nu$ de charges mobiles dans le conducteur, toutes animées d'une vitesse moyenne (analyse mésoscopique) \vec{v} .

BILAN DE FORCES : ce volume de charges est soumis :

► à la force "motrice" :

$$d\vec{F} = nq [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}] \cdot d\nu = \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\nu$$

► à une force moyenne de frottement fluide exercée par le réseau cristallin d'ions fixes et modélisée comme suit avec ρ_s masse volumique du milieu :

$$d\vec{F}_f = -\rho_s \frac{\vec{v}}{\tau} d\nu = -nm \frac{\vec{v}}{\tau} d\nu$$

expression dans laquelle τ représente un temps caractéristique d'amortissement¹.

Appliquons la RFD à ce volume élémentaire ; il vient :

$$\rho_s d\nu \frac{d\vec{v}}{dt} = nm d\nu \frac{d\vec{v}}{dt} = nq [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}] \cdot d\nu - nm \frac{\vec{v}}{\tau} d\nu$$

soit finalement :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$$

NB : pour les métaux $\tau \simeq 10^{-14}$ s. Ainsi, pour un temps très supérieur au temps de relaxation, soit $t \gg \tau$, la vitesse limite de dérive est :

1. faire l'analyse dimensionnelle pour observer la cohérence de cette formulation

$$\vec{v}_{lim} = \frac{q\tau}{m} [\vec{E} + \vec{v}_{lim} \wedge \vec{B}] = \mu [\vec{E} + \vec{v}_{lim} \wedge \vec{B}] \quad \text{avec } \mu = \frac{q\tau}{m} \text{ mobilité des porteurs de charges.}$$

Finalement, la densité volumique de courant de dérive dans le conducteur peut s'écrire :

$$\vec{J} = nq\vec{v}_{lim} = \frac{nq^2\tau}{m} [\vec{E} + \vec{v}_{lim} \wedge \vec{B}]$$

soit encore :

$$\vec{J} = \frac{nq^2\tau}{m} \left[\vec{E} + \frac{\vec{J}}{nq} \wedge \vec{B} \right]$$

et finalement

$$\boxed{\vec{J} = \gamma [\vec{E} + R_H \vec{J} \wedge \vec{B}]}$$

$$\text{avec } \begin{cases} R_H = \frac{1}{nq} = \frac{1}{\rho} & \text{appelée constante de Hall} \\ \gamma = \frac{nq^2\tau}{m} & \text{conductivité du milieu} \end{cases}$$

$$\text{NB : } [\gamma] = R^{-1}.L^{-1} = \Omega^{-1}.m^{-1} = S.m^{-1}$$

Question : peut-on négliger la contribution $\gamma R_H \vec{J} \wedge \vec{B}$?

Pour que la contribution magnétique $\gamma R_H \vec{J} \wedge \vec{B}$ soit comparable à la contribution électrique $\gamma \vec{E}$, il faudrait assurer que :

$$vB \sim E$$

soit :

$$B \sim \frac{E}{v} \sim \frac{E}{\frac{J}{nq}} \sim \frac{E}{\frac{\gamma E}{nq}} = \frac{nq}{\gamma}$$

$$\text{En prenant l'exemple du cuivre pour lequel } \begin{cases} n = 8,5.10^{28} m^{-3} \\ \gamma_{Cu} = 5,9.10^7 S.m^{-1} \end{cases}$$

nous obtenons un champ de l'ordre de $B_{lim} \sim 240 T$, valeur exceptionnellement élevée, inaccessible avec nos moyens "classiques" de laboratoire, en tout cas très grande par rapport au champ produit par le courant circulant dans le conducteur.

CONCLUSION : dans un matériau conducteur² on néglige toujours le champ magnétique dans l'expression de la loi d'Ohm locale, ainsi :

A RETENIR :

2. Attention : ce n'est pas le cas dans un semi-conducteur

Propriété I-1:

Dans un milieu conducteur, champ électrique \vec{E} , densité volumique de courant \vec{J} , et conductivité électrique γ sont reliées par la loi d'Ohm locale :

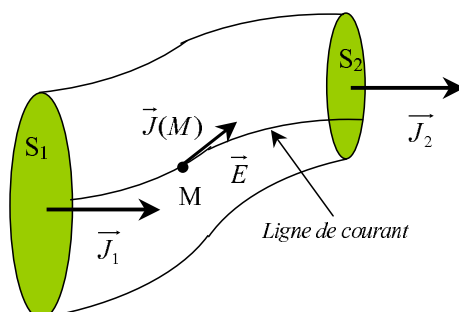
$$\vec{J} = \gamma \times \vec{E} \quad (\text{XIV.1})$$

Quelques ordres de grandeur pour la conductivité γ d'un milieu ohmique :

MILIEU	γ (S.m ⁻¹)	NATURE
Paraffine	10 ⁻⁸	Isolant
Terre	6.10 ⁻⁶	Mauvais conducteur
Mercure (Hg)	10 ⁶	Bon conducteur
Aluminium (Al)	3,7.10 ⁷	Excellent conducteur
Cuivre (Cu)	5,9.10 ⁷	Excellent conducteur

I.2 Loi d'Ohm intégrale : résistance ohmique

On considère un tube de courant "découpé" dans un milieu ohmique de conductivité γ de section S_1 et S_2 en régime permanent et immobile dans le référentiel d'étude :



L'intensité électrique en régime permanent s'écrit :

$$I = \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

Par ailleurs, la différence de potentiel entre les sections (chacune isopotentielle) se calcule par circulation du champ électrique sur n'importe quel chemin allant de la section 1 à la section 2 :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Définition I-1: RÉSISTANCE OHMIQUE

Le rapport de la d.d.p. avec le courant constitue la résistance du tube ohmique qui s'écrit donc par définition :

$$R = \frac{\overbrace{U}^{\text{"cause"}}}{\underbrace{I}_{\text{"effet"}}} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_{S_1 \text{ ou } S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}} \quad (\text{XIV.2})$$

Exemple classique : cas d'un conducteur ohmique cylindrique de section S droite et de longueur L .

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_{S_1/S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}} = \frac{EL}{JS} = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\rho L}{S}$$

I.3 Puissance volumique cédée aux porteurs de charge par le champ électromagnétique

a - Expression

Supposons un volume $d\tau$ de porteurs de charges mobiles d'un conducteur contenant la charge $\delta Q = \rho_m \cdot d\tau$ dans le référentiel \mathcal{R} d'étude supposé galiléen. On appelle $(\vec{E}, \vec{B})_{\mathcal{R}}$ le champ électromagnétique auquel est soumise cette charge dans la région de l'espace où elle se déplace. La force électromagnétique agissant sur cette charge est la force de Lorentz avec :

$$d\vec{F} = \delta Q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Le travail élémentaire dépensé par cette force lors d'un déplacement $d\vec{l}$ est :

$$\delta^2 W_{em} = d\vec{F} \cdot d\vec{l} = d\vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

soit :

$$\delta^2 W_{em} = \delta Q \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

d'où une puissance :

$$d\mathcal{P}_{em} = \frac{\delta^2 W}{dt} = \delta Q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$d\mathcal{P}_{em} = \rho_m \vec{E} \cdot \vec{v} d\tau$$

soit en utilisant $\vec{J} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v}$

$$d\mathcal{P}_{em} = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

qui permet d'exprimer la densité volumique de puissance électromagnétique cédée par le champ aux porteurs de charge mobiles :

Définition I-2: PUISSANCE VOLUMIQUE CÉDÉE AUX PORTEURS DE CHARGE

La puissance volumique cédée à des porteurs de charges mobiles de courant volumique \vec{J} par le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est

$$\mathcal{P}_{vol} = \frac{d\mathcal{P}_{em}}{d\tau} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{J}^2}{\gamma} = \gamma \vec{E}^2 \quad (\text{XIV.3})$$

Remarque I-1:

Si plusieurs types de porteurs de charge mobiles interviennent, chacun indicé i , de densité de charge ρ_i , de vitesse moyenne \vec{v}_i , participent au courant dans le milieu ohmique, on peut écrire :

$$d\mathcal{P}_{em} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} \cdot d\tau = \underbrace{\left(\sum_i \rho_i \vec{v}_i \right)}_{=\vec{J}} \cdot d\tau \cdot \vec{E}$$

soit là-encore : $\mathcal{P}_{vol} = \frac{d\mathcal{P}_{em}}{d\tau} = \vec{J} \cdot \vec{E}$

b - Application : effet Joule local et intégral

■ LOCAL :

Reprenons cette dernière expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge et utilisons la loi d'Ohm locale :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\gamma}$$

Calculons par ailleurs la puissance volumique de la force de frottement dans le modèle de Drude :

$$\mathcal{P}_{vol_f} = -\rho \frac{\vec{v}}{\tau} \cdot \vec{v} = -\frac{nm \left(\frac{J}{nq} \right)^2}{\tau} = -\frac{J^2}{\gamma} = -\mathcal{P}_{vol}$$

Ainsi, l'ensemble de la puissance fournie aux porteurs de charge mobiles en régime permanent est restituée par effet Joule.

Le bilan de puissance volumique pour les porteurs de charges du circuit s'écrit donc :

A retenir :

$$\mathcal{P}_{vol_f} = -\mathcal{P}_{vol} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

Propriété I-2:

Traduction : pour un conducteur ohmique, toute la puissance cédée aux porteurs de charges est "restituée" par effet Joule.

Remarque I-2: CONVERSION ÉNERGÉTIQUE PAR EFFET JOULE

On peut facilement appréhender ceci qualitativement : si les porteurs de charge d'un conducteur sont soumis à un champ électrique "moteur" constant, ils atteignent rapidement leur vitesse maximale (donc courant constant) dans le milieu alors que le champ électrique continue de leur céder de l'énergie ; cette puissance totale, qui doit être conservée, est donc intégralement convertie en chaleur.

■ INTÉGRAL : sur l'exemple du conducteur cylindrique

Exemple d'application : supposons un conducteur ohmique cylindrique de longueur L , et section S normale à l'axe. La puissance Joule perdue s'écrit en intégrant sur le volume $V = LS$ du conducteur la puissance volumique "restituée" :

$$P = \iiint_V \mathcal{P}_{vol_f} \cdot d\tau = -\frac{1}{\gamma} \iiint_V J^2 \cdot d\tau = -\frac{J^2}{\gamma} LS = -\frac{I^2 L}{\gamma S} = -\frac{\rho L}{S} I^2 = -RI^2$$

COMMENTAIRES : on retrouve le résultat bien connu en électrocinétique de la puissance cédée par effet Joule par un conducteur ohmique de résistance R traversé par un courant I .

II Approche générale : bilan énergétique complet de l'interaction électromagnétiqueOBJECTIFS :

- Décrire le mécanisme de cession d'énergie du champ électromagnétique à un volume milieu quelconque, contenant ou non des charges.
- Traduire sous forme locale puis intégrale le bilan de puissance entre un milieu quelconque (contenant ou non des charges) et le champ électromagnétique strictement à partir des équations de Maxwell.
- Traiter quelques exemples.

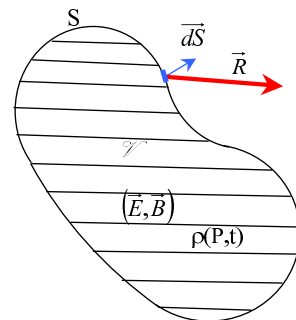
II.1 Bilan d'énergie à l'échelle locale**a - Nécessité d'un «vecteur de transport d'énergie»**

On isole un volume \mathcal{V} de l'espace contenant éventuellement des charges et dans lequel règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) ; si u_{em} désigne la densité volumique d'énergie associée au champ électromagnétique, alors le volume \mathcal{V} contient l'énergie :

$$\epsilon_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{em}(P, t) \cdot d\tau$$

En outre, ϵ_{em} peut varier puisque le champ est susceptible de céder de l'énergie aux porteurs de charge, on peut donc écrire à l'instant $t + dt$:

$$\epsilon_{em}(t + dt) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{em}(P, t + dt) \cdot d\tau$$



soit une variation élémentaire durant l'intervalle de temps dt de :

$$d\epsilon_{em} = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\underbrace{u_{em}(P, t + dt) - u_{em}(P, t)}_{= \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dt} \right] \cdot d\tau$$

qui finalement peut s'écrire (taux de variation de l'énergie électromagnétique) :

$$\frac{d\epsilon_{em}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \cdot d\tau$$

On peut recenser deux causes de variation de la l'énergie électromagnétique du volume \mathcal{V} :

- Supposons dans un premier temps que le volume \mathcal{V} n'échange pas d'énergie avec l'extérieur ; alors il est clair que le taux de variation de l'énergie du champ (\vec{E}, \vec{B}) est l'opposé de la puissance cédée aux porteurs de charge contenues dans le volume, soit :

$$\left. \frac{d\epsilon_{em}}{dt} \right|_{\text{transfert charges}} = - \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_{vol} \cdot d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

- Supposons maintenant que le volume ne contienne pas de charge ; alors si le taux de variation d'énergie du volume \mathcal{V} est non nul, cela provient nécessairement d'un transfert avec l'extérieur à travers la surface frontière S du volume.

Nommons \vec{R} le vecteur densité surfacique de puissance véhiculant l'énergie à travers la surface frontière du volume \mathcal{V} . Il vient donc :

$$\left. \frac{d\epsilon_{em}}{dt} \right|_{\text{transfert exterieur}} = \underbrace{- \oiint_{S/\mathcal{V}} \vec{R} \cdot \vec{dS}}_{= \text{puissance reçue par le volume}}$$

Remarque II-1:

- ◊ Le signe $<< - >>$ est évidemment lié au fait que les surfaces fermées sont conventionnellement orientées vers l'extérieur et que nous comptons conventionnellement positive la puissance entrante.
- ◊ On peut noter l'analogie complète de la démarche avec celle réalisée lors de l'établissement de l'équation de conservation de la charge, \vec{R} ici étant alors l'analogue du vecteur densité volumique de courant électrique \vec{J} , et ϵ_{em} celui de la charge Q .

Enfin, en considérant simultanément ces deux causes de variation de l'énergie du volume \mathcal{V} , il vient le bilan intégral suivant :

$$\boxed{\frac{d\epsilon_{em}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \cdot d\tau = - \oiint_{S/\mathcal{V}} \vec{R} \cdot \vec{dS} - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau}$$

Ainsi, le flux du vecteur \vec{R} à travers la frontière du volume \mathcal{V} est la puissance reçue par le volume.

Par simple application du théorème de Grenn-Ostrogradski, on tire le bilan local (provisoire dans son écriture) suivant :

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{R} + \vec{J} \cdot \vec{E} = 0}$$

Il reste à dégager les expressions de u_{em} et \vec{R} !!!

b - Ecriture complète du bilan énergétique local : identité de Poynting et vecteur de Poynting

L'expression précédente donnant la puissance volumique fournie par le champ électrique aux charges ($\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E}$) peut aussi être traduite à l'aide d'un bilan local à partir des équations de Maxwell.

A l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on présente sous la forme :

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

réécrivons la puissance volumique \mathcal{P}_{vol} cédée par le champ électromagnétique :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

or la relation vectorielle générale :

$$\text{div} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}$$

soit encore :

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \text{div} (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

permet de transformer le premier terme du second membre de l'équation obtenue qui devient alors :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit avec l'équation de Maxwell-faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

la puissance volumique donne finalement :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et finalement en réunissant tous les termes dans le même membre, on réalise le bilan de puissance suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right]}_{=u_{em}} + \operatorname{div} \underbrace{\left[\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right]}_{=\vec{R}} + \vec{J} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{XIV.4})$$

Cette équation appelée **Identité de Poynting**, parfaitement compatible avec le bilan générique établi plus haut traduit donc un bilan local de puissance (conservation de l'énergie).

SIGNIFICATION DES DIFFÉRENTS TERMES :

Les trois termes de ce bilan sont homogènes à $\vec{J} \cdot \vec{E}$, soit une puissance volumique ; ainsi :

- $u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique constituée respectivement des contributions électrique et magnétique (déjà vues précédemment sur les exemples simples du condensateur plan parfait et du solénoïde).
- $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, soit une puissance par unité de surface. On l'appelle **Vecteur de Poynting** (John Henry Poynting 1852-1914).

$$[\vec{R}] \equiv P.L^{-2} \rightarrow W.m^{-2}$$

- Enfin, le terme $\vec{J} \cdot \vec{E}$ est la puissance volumique cédée aux porteurs de charge, et par suite restituée au milieu extérieur par effet Joule.

II.2 Bilan d'énergie intégral - théorème de Poynting

Considérons à nouveau le volume \mathcal{V} délimité par la surface fermée \mathcal{S} , contenant éventuellement des charges et soumis à un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et intégrons l'identité de Poynting sur ce volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \cdot d\tau = 0$$

soit en réorganisant les termes, le bilan devient l'égalité suivante :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau + \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \cdot d\tau \right] = - \oint_{\mathcal{S}/\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} \quad (\text{XIV.5})$$

Rappelons la signification de chacun des termes de cette relation :

■

$$- \oint_{S/\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S}$$

représente la puissance électromagnétique traversant la surface S , ou **puissance rayonnée à travers la surface S** .

■

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \cdot d\tau \right]$$

représente le taux de variation de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{V} .

■

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

constitue enfin l'énergie communiquée par le champ aux charges du milieu.

La démarche précédente montre donc que la puissance transportée par le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) l'est selon la direction donnée par le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

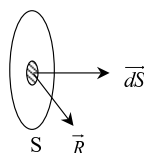
Propriété II-1: THÉORÈME DE POYNTING

La puissance \mathcal{P}_R rayonnée par le champ électromagnétique à travers une surface S fermée est donnée par le **théorème de Poynting** :

$$\mathcal{P}_R = \frac{dW_R}{dt} = - \oint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad (\text{XIV.6})$$

Si la surface est ouverte, ce théorème devient :

$$\mathcal{P}_R = \frac{dW_R}{dt} = \iint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad (\text{XIV.7})$$



NB : quelques ordres de grandeur de flux électromagnétiques rayonnés :

- flux surfacique solaire reçu par la Terre : $\Phi_{S/T} = 1368 \text{ W.m}^{-2}$
- flux surfacique d'un laser He-Ne : 10^4 W.m^{-2}
- flux surfacique d'une L.E.D. : 10^3 W.m^{-2}

II.3 Exemples d'applications

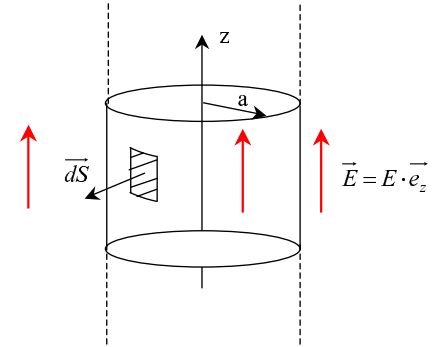
a - Bilan de puissance dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur ohmique de forme cylindrique d'axe $[Oz]$, de rayon a , de conductivité γ et soumis au champ "moteur" constant :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \vec{e}_z$$

La densité volumique de courant circulant dans le conducteur est donnée par la loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \gamma \vec{E} = \gamma E_0 \cdot \vec{e}_z$ soit un courant $I = \gamma E_0 \pi a^2$

Le théorème d'Ampère permet de dégager l'expression du champ magnétique produit par ce courant :



$$\begin{cases} \vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \gamma E_0}{2} r \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \gamma E_0 a^2}{2r} \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \begin{cases} \vec{R}(r < a) = -\frac{\gamma E_0^2}{2} r \cdot \vec{e}_r \\ \vec{R}(r > a) = -\frac{\gamma E_0^2 a^2}{2r} \cdot \vec{e}_r \end{cases}$$

soit une puissance rayonnée à travers tout cylindre de rayon r et de hauteur H :

$$\mathcal{P}_R = - \oiint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} -\gamma E_0^2 \pi H r^2 & \text{pour } r < a \\ -\gamma E_0^2 \pi H a^2 = -\gamma^2 E_0^2 \pi^2 a^4 \times \frac{H}{\gamma \pi a^2} = -RI^2 & \text{pour } r > a \end{cases}$$

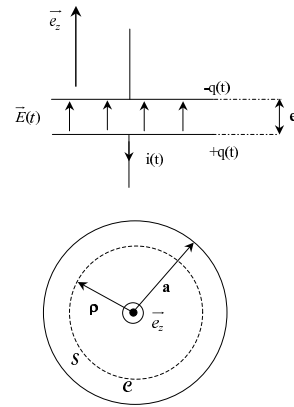
Vérifions maintenant le bilan intégral de puissance sur tout cylindre intérieur au conducteur (ou de même rayon) $r \leq a$ en intégrant l'identité de Poynting :

$$\underbrace{\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau}_{= \gamma E_0^2 \iiint_V d\tau} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\iiint_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \cdot d\tau \right]}_{=0 \text{ car rég. perm.}} = - \oiint_{S/V} \vec{R} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{soit : } \begin{cases} r < a \implies \gamma E_0^2 \pi r^2 H = \gamma E_0^2 \pi H r^2 & \text{OK!!!} \\ r > a \implies \gamma E_0^2 \pi a^2 H = \gamma E_0^2 \pi H a^2 & \text{OK!!!} \end{cases}$$

b - Stockage d'énergie électromagnétique dans un condensateur - énergie "majoritaire"

On reprend ici le cas d'un condensateur plan idéal intégré dans un circuit en régime sinusoïdal forcé. On rappelle les expressions du champ électrique et du champ magnétique régnant dans l'espace inter-armatures :



$$\begin{cases} \vec{E}(t) = E_0 \cos \omega t \cdot \vec{e}_z \\ \vec{B}(\rho < a, t) = \frac{\rho}{2c^2} \frac{dE(t)}{dt} \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{\rho}{2c^2} E_0 \omega \times \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

QUESTION :

- ❶ Montrer qu'aux fréquences usuelles avec un condensateur de dimensions raisonnables, l'énergie magnétique moyenne est négligeable par rapport à l'énergie électrique moyenne stockée dans le condensateur.
- ❷ Vérifier le bilan intégral d'énergie du condensateur.

RÉPONSES :

- ❶ On intègre la densité volumique d'énergie électromagnétique sur le volume du condensateur (cylindre de hauteur h et de rayon a)

$$\mathcal{E}_e = \iiint_V u_e \times d\tau = \frac{\epsilon_0 E^2(t)}{2} \pi a^2 e = \frac{\pi a^2 e \epsilon_0}{2} E_0^2 \times \cos^2 \omega t$$

d'où la valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = \frac{\pi a^2 e \epsilon_0}{4} E_0^2$$

Le principe de calcul est similaire dans le cas de l'énergie magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_V u_m \times d\tau = 2\pi e \int_0^a \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \times \rho d\rho$$

soit en injectant l'expression de $B(t)$ démontrée plus haut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\pi e}{\mu_0} \int_0^a \frac{\rho^2}{4c^4} \omega^2 E_0^2 \sin^2 \omega t \times \rho d\rho$$

Soit après intégration et en ordonnant correctement les facteurs :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\pi a^2 e \epsilon_0}{2} E_0^2 \times \sin^2 \omega t \times \frac{a^2 \omega^2}{8c^2}$$

soit une valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle = \underbrace{\frac{\pi a^2 e \epsilon_0}{4} E_0^2}_{=\langle \mathcal{E}_e \rangle} \times \frac{a^2 \omega^2}{8c^2}$$

Evaluons l'ordre de grandeur du facteur sans dimension $\alpha_{m/e} = \frac{a^2 \omega^2}{8c^2}$:

Avec $a = 10 \text{ cm}$, $\omega = 2\pi \times 1 \text{ kHz}$, et en rappelant que $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$:

$$\alpha_{m/e} \simeq 5.10^{-13} \ll 1$$

On constate que dans le cadre de l'ARQS, le facteur sans dimension $\frac{a^2 \omega^2}{8c^2}$ est négligeable devant 1 ; on ne retient alors que la contribution électrique, le comportement magnétique d'un condensateur étant négligeable. En outre, on peut encore écrire :

$$\mathcal{E}_{em} \simeq \mathcal{E}_e = \underbrace{\frac{\pi a^2 \epsilon_0}{e}}_{=C \text{ (capacité)}} \times \frac{e^2 E^2(t)}{2} = \frac{1}{2} C V^2(t)$$

On retrouve un résultat bien connu de l'électrocinétique dans le cadre de l'ARQS.

② Vérification par bilan intégral de puissance :

Considérons l'ensemble du volume inter-armatures du condensateur (vide), enfermé dans une surface Σ . La puissance rayonnée vers l'extérieur de la surface Σ est donnée par le théorème de Poynting.

$$\mathcal{P}_R = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

En écrivant le bilan intégral de puissance, on a :

$$\iiint_{V/\Sigma} \underbrace{\vec{J}}_{=\vec{0}} \cdot \vec{E} \cdot d\tau + \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{em} + \oint_{\Sigma} \vec{R} \cdot d\vec{S} = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\Sigma} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \mathcal{P}_R} \quad \text{à vérifier}$$

■ CALCUL DE \mathcal{P}_R PUISSANCE RAYONNÉE EN $r = a$:

$$\vec{R}(r = a) = \frac{E_0^2 \omega}{2c^2 \mu_0} a \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{e}_z \wedge (-\vec{e}_\theta)$$

donc :

$$\mathcal{P}_R(r = a) = -\oint \vec{R} \cdot d\vec{S} = -\frac{E_0^2 a \omega}{2\mu_0 c^2} \sin \omega t \cos \omega t 2\pi a e = -\epsilon_0 E_0^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t 2\pi a^2 e$$

■ CALCUL DE $\frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt}$

$$\epsilon_{em} = \left[\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2 \omega t + \underbrace{\epsilon_m}_{\simeq 0} \right] \pi a^2 e \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} = -\epsilon_0 E_0^2 \sin \omega t \cos \omega t \pi a^2 e$$

On vérifie bien le bilan intégral :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} = \mathcal{P}_R}$$

Remarque II-2:

Le calcul ci-dessus, réalisé en ARQS, ne tient pas compte de la contribution magnétique de l'énergie contenue dans le volume inter-armatures. Pourtant l'identité de Poynting une fois intégrée est vérifiée malgré cette lacune!!!????

Ceci provient de la forme homogène choisie pour le champ électrique, qui là-encore est celle retenue dans le cadre de l'ARQS, car en réalité le champ électrique entre armature n'est pas homogène $\vec{E} = E(r, t) \cdot \vec{e}_z$ (sans effet de bord).