XIII

Les équations de Maxwell

«This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself.»
James Clerk Maxwell (1831-1879)

Plan du chapitre

I La conservation de la charge

I.1 Une première approche 1D

L'expérience en physique, y compris en physique quantique et en physique relativiste, dégage dans tous les cas de figure que la charge électrique est un **invariant**. Lors d'une réaction chimique, d'une désintégration radioactive, ou d'une transformation matière-énergie ($E = mc^2$), elle ne disparaît, ni n'apparaît pour un système fermé. De fait, **sa conservation peut être érigée en principe**.

On se propose dans cette partie de dégager une **loi locale** traduisant cette propriété.

A RETENIR :

On considère une distribution de courant de vecteur densité volumique orienté selon l'axe $[Ox)$ et ne dépendant spatialement que de la variable x $\overrightarrow{J} = J(x,t) \cdot \overrightarrow{e_x}$. Isolons un volume élémentaire $d\tau = S \cdot dx$ de surface de base S et de longueur dx fixe dans le référentiel d'étude, et établissons un bilan de charge entre les instants t et $t + dt$:

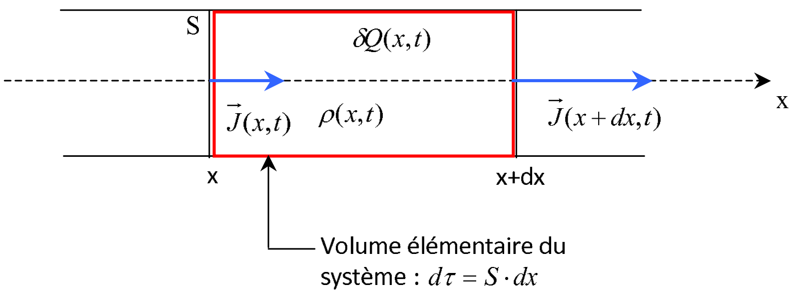


FIGURE XIII.1 – Conservation de la charge : établissement cadre 1D

BILAN DE CHARGE DU VOLUME $d\tau = S \cdot dx$:

▶ A LA DATE t :

$$\delta Q(t) = \rho(x,t) \cdot Sdx$$

▶ A LA DATE $t + dt$:

$$\delta Q(t+dt) = \rho(x,t+dt) \cdot Sdx$$

Evaluons la variation de charge du volume $d\tau$ pendant dt de deux manières :

- Par différence des deux relations précédentes :

$$d\left[\delta Q\right] = \delta Q(t+dt) - \delta Q(t) = \underbrace{\left[\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\right]}_{=\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \cdot dt} \cdot Sdx = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \cdot dtSdx \qquad \text{(XIII.1)}$$

- Par bilan des courants entrant et sortant :

$$d\left[\delta Q\right] = \left[I(x,t) - I(x+dx,t)\right]\cdot dt = \left[\iint\limits_{S(x)} \overrightarrow{J}(x,t)\cdot \overrightarrow{dS} - \iint\limits_{S(x,dx)} \overrightarrow{J}(x+dx,t)\cdot\overrightarrow{dS}\right]\cdot dt$$
$$= \left[J_x(x,t) - J_x(x+dx,t)\right]S\cdot dt = -\frac{\partial J_x(x,t)}{\partial x}\cdot dx\cdot S\cdot dt \quad \text{(XIII.2)}$$

En égalisant XIII.1 et XIII.2, il vient :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\cdot dtSdx = -\frac{\partial J_x(x,t)}{\partial x}Sdx\cdot dt$$

qqui donne finalement l'équation de conservation de la charge à 1D :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J_x(x,t)}{\partial x} = 0}$$

I.2 Généralisation à 3D - conséquences

a - Equation locale 3D de conservation de la charge

Reprenons la démonstration précédente par une approche locale 3D (hors programme)

Considérons un volume V **fixe** dans le référentiel d'étude.

Si l'on appelle $\rho(M,t)$ sa densité volumique de charge, alors la charge totale de V s'écrit :

$$Q(t) = \iiint\limits_V \rho(M,t)\times d\tau$$

Evaluons son taux de variation dans le temps ; on a :

$$Q(t+dt) = \iiint\limits_V \rho(M,t+dt)\times d\tau$$

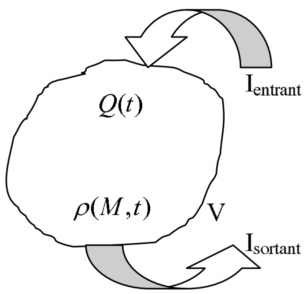


FIGURE XIII.2 – Convervation de la charge

ainsi

$$dQ = Q(t+dt) - Q(t) = \iiint\limits_V \left[\underbrace{\rho(M,t+dt) - \rho(M,t)}_{\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}dt}\right]\times d\tau$$

soit finalement : $\displaystyle\frac{dQ(t)}{dt} = \iiint\limits_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t}\times d\tau$

Si ce taux de variation est non nul, le principe de conservation de la charge impose un échange (positif ou négatif) de charge avec l'extérieur du volume V.

En remarquant, comme dans la démonstration 1D, que le taux de variation de la charge correspond simplement au courant traversant la frontière de V, en tenant compte bien sûr du sens des flux de charges entrant et/ou sortant, on peut écrire :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \underbrace{I_{entrant} - I_{sortant}}_{=I_{total}} = \oiint_{S/V} -\overrightarrow{J}(M,t) \cdot \overrightarrow{n}_{ex} \times dS$$

le signe $-$ devant l'intégrale de flux provenant de la normale aux surfaces fermées toujours orientée vers l'extérieur.

Soit :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} \times d\tau = \oiint_{S/V} -\overrightarrow{J}(M,t) \cdot \overrightarrow{n}_{ex} \times dS$$

$$\text{avec } \overrightarrow{n} \text{ vecteur unitaire normal de surface orienté vers l'extérieur}$$

En appliquant la relation de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} \times d\tau = -\iiint_V div\,\overrightarrow{J}(M,t) \times d\tau$$

En regroupant les deux termes dans le même membre, on obtient **l'équation locale de conservation de la charge** généralisée à 3D appelée aussi **équation de continuité de la charge** :

Propriété I-1: EQUATION DE CONSERVATION DE LA CHARGE

Equation locale de conservation de la charge $\Leftrightarrow \dfrac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + div\,\overrightarrow{J}(M,t) = 0$ (XIII.3)

b - Cas du régime permanent/ARQS - loi des noeuds

Dans le cadre des régimes permanents ou de l'ARQS électrocinétique (cf §III de ce chapitre) on a stationnarité ou quasi-stationnarité de la charge volumique ρ, soit :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0$$

ce qui impose donc en vertu de l'équation locale de conservation de la charge la relation $div\,\overrightarrow{J} = 0$

En intégrant cette relation sur un volume autour d'un noeud de courant il vient avec le théorème de G.O. :

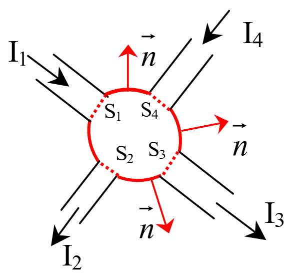


FIGURE XIII.3 – Loi des noeuds

$$\iiint_V div\,\overrightarrow{J} \cdot d\tau = \oiint_{S/V} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{n} dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{n} dS + ... = -\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

les courants étant comptés positivement lorsqu'ils arrivent sur le noeud. On retrouve la loi des noeuds avec :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$

II Les équations de Maxwell

II.1 L'équation de Maxwell Ampère - courants de déplacement

a - Quelque-chose manque à l'appel ! ! !

Ecrivons la forme locale du théorème d'Ampère dégagée en cours de magnétostatique :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J}$$

il vient avec la propriété vectorielle $div\left(\overrightarrow{rot}\right) \equiv 0$: $div\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\right) = \mu_0 div\overrightarrow{J} = 0$

soit : $div\overrightarrow{J} = 0$

Cette dernière équation est incompatible avec la relation de conservation de la charge établie précédemment dans le cadre le plus général i.e. pour tout régime :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\overrightarrow{J} = 0$$

Ainsi, l'équation locale traduisant le théorème d'Ampère dégagée en magnétostatique ne convient donc pas à la description de tout régime.

Pour assurer la compatibilité avec les régimes variables, l'idée de Maxwell fut d'ajouter un terme de courant supplémentaire $\overrightarrow{J_D}$ au courant de conduction $\overrightarrow{J}$; ainsi :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{J} + \overrightarrow{J_D}\right)$$

en prenant la divergence de cette dernière équation et en tenant compte de $div[\overrightarrow{rot}] \equiv 0$, on obtient :

$$div(\overrightarrow{J} + \overrightarrow{J_D}) = 0$$

soit avec l'équation de conservation de la charge :

$$div\overrightarrow{J_D} = -div\overrightarrow{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En supposant la validité de la forme locale du théorème de Gauss pour tout régime, on a $div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} = div\left[\epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right]$

on a finalement :

$$div\overrightarrow{J_D} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = div\left[\epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right]$$

Ainsi, une forme compatible (mais à priori pas la seule) est :

$$\overrightarrow{J_D} = \epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

En considérant que cette forme est la bonne, ce qui sera vérifié un peu plus bas sur un exemple (§II.1.b), alors la forme locale du théorème d'Ampère pour tout régime, appelée équation de Maxwell-Ampère, s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{J} + \epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)} \qquad \text{(XIII.4)}$$

Remarque II-1: COURANTS DE DÉPLACEMENT

Historiquement, Maxwell appela le terme $\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ «courants de déplacement». La suite propose une interprétation physique de ce terme afin de justifier une telle appellation.

Exercice de cours: **(II.1) - n° 1.** *Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir de l'équation de Maxwell-Ampère. On utilisera la relation* $div(\overrightarrow{rot}) \equiv 0$

b - Signification physique des courants de déplacement : exemple de la décharge d'un condensateur

Prenons le cas d'un condensateur initialement chargé, et se déchargeant dans une résistance R.
Appliquons le théorème d'Ampère sur le contour $\mathcal{C}$ en exploitant la relation de Stokes Ampère dans 2 cas de figure :

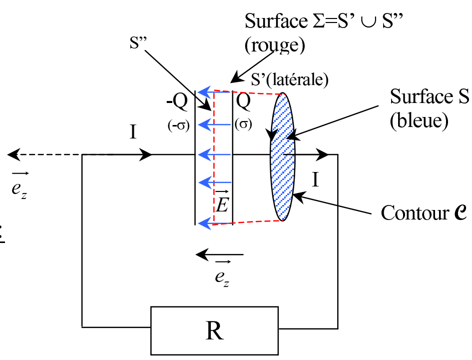


FIGURE XIII.4 – Décharge d'un condensateur plan dans une résistance R

■ SANS PRISE EN COMPTE DES COURANTS DE DÉPLACEMENT :

$$\mathcal{C}\left(\overrightarrow{B}\right) = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 I \quad (1)$$

Choisissons maintenant d'intégrer sur la surface Σ s'appuyant toujours sur le contour $\mathcal{C}$ mais passant cette fois entre les armatures du condensateur, espace dans lequel aucun courant physique n'existe (aucun courant physique ne traverse la surface Σ) :

$$\mathcal{C}\left(\overrightarrow{B}\right) = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{dS} = 0!!! \quad (2)$$

Commentaires : il apparaît ici une incohérence entre les relations (1) et (2) ; en fait la seconde surface (S") qui plonge dans l'espace inter-armature du condensateur est traversée par des courants dont nous n'avons pas tenu compte. Ce sont les *courants de déplacement* évoqués dans l'équation de Maxwell-Ampère, et dont la densité volumique est :

$$\boxed{\overrightarrow{J_d} = \epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

■ <u>AVEC PRISE EN COMPTE DES COURANTS DE DÉPLACEMENT :</u>

Ces courants sont proportionnels au taux de variation du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et possède la même direction que ce dernier.

<u>VÉRIFICATION :</u>

En retenant l'hypothèse du condensateur plan idéal, le champ électrique en tout point de l'espace s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}_{ext} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{E}_{int} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_z} = \dfrac{Q}{\epsilon_0 S"}\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Reprenons la démarche précédente d'application du théorème d'Ampère sur les deux surfaces S et Σ en tenant cette fois compte des courants de déplacement :

- Sur S :

$$\mathcal{C}\left(\overrightarrow{B}\right) = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_{S/\mathcal{C}} [\overrightarrow{J} + \underbrace{\overrightarrow{J_D}}_{=\overrightarrow{0}}] \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 I$$

- Sur Σ :

$$\mathcal{C}\left(\overrightarrow{B}\right) = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_{\Sigma/\mathcal{C}} [\underbrace{\overrightarrow{j}}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{j_D}] \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0\epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0\epsilon_0 \iint_{S"} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$= \mu_0\epsilon_0 \iint_{S"} \frac{1}{\epsilon_0 S"} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{=\frac{dQ}{dt}=I} \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_{S"} \frac{1}{S"} I dS = \mu_0 I!!!!$$

<u>CONCLUSION :</u> On voit sur cet exemple simple que la prise en compte des courants de déplacement permet de corriger l'incohérence constatée et de généraliser le théorème d'Ampère aux régimes quelconques.

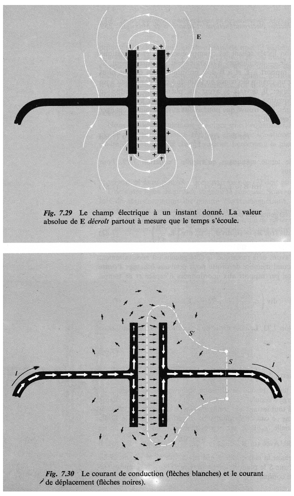


FIGURE XIII.5 – Courants de conduction et de déplacement lors de la décharge d'un condensateur (extrait cours de Physique Berkeley vol.II Edward Mills Purcell 1963 (Nobel de physique 1952)

II.2 Equation de Maxwell-Faraday : traduction locale de l'induction

a - Rappel de MPSI sur l'induction - définition de la force électromotrice (f.e.m.)

En mettant un aimant de moment dipolaire $\overrightarrow{M}$ en mouvement sur l'axe d'une spire fermée **immobile** de résistance totale R, on constate deux effets différents suivant le sens de déplacement de l'aimant :

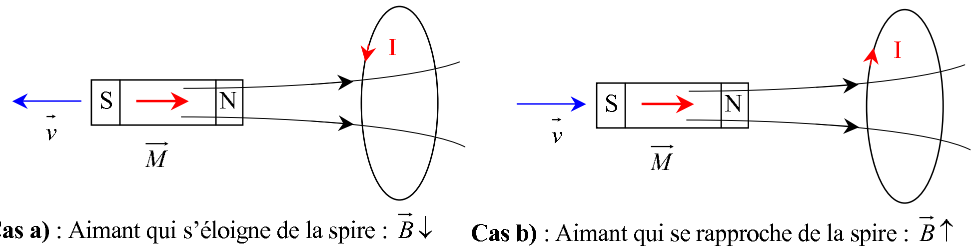


FIGURE XIII.6 – Mise en évidence expérimentale de l'induction (ici dans le cas de l'induction de Neumann)

OBSERVATIONS :

- AIMANT QUI S'ÉLOIGNE DE LA SPIRE (CAS A) :
  on a : $||\overrightarrow{B}|| \searrow$ sur la spire $\Rightarrow$ $\Phi_{spire}(\overrightarrow{B}) \searrow$ et il apparait $I > 0$ et donc un champ **induit** pour tenter d'augmenter le flux $\Rightarrow$ **effet de modération**
- AIMANT EN RAPPROCHEMENT :
  on a : $||\overrightarrow{B}|| \nearrow$ sur la spire $\Rightarrow$ $\Phi_{spire}(\overrightarrow{B}) \nearrow$ et il apparait $I < 0$ et donc un champ **induit** pour tenter de diminuer le flux $\Rightarrow$ **effet de modération**

IMPORTANT : le cas décrit ci-dessus d'une spire immobile soumise à un champ magnétique variable est appelé **induction de Newmann**. Le cas d'une spire mobile dans un champ magnétique stationnaire, appelé **induction de Lorentz** conduirait exactement aux mêmes conclusions, l'important étant la vitesse relative entre l'aimant et la spire, qui, si elle est non nulle, **engendre une variation de flux**.

INTERPRÉTATION : LA FORCE ÉLECTROMOTRICE :

Dans l'expérience ci-dessus, un courant circule dans la spire $\mathcal{C}$; si nous supposons que le temps d'établissement du régime forcé est très faible (il peut s'agir d'un régime statique ou bien par exemple sinusoïdal), alors d'après le modèle de Drüde détaillé en chapitre IX, les porteurs de charge mobiles q sont forcément soumis à une force électrique $\overrightarrow{F}_q = q\overrightarrow{E}$ engendrée par le phénomène d'induction, et également une force de frottement $\overrightarrow{F}_f$ exercée par le réseau cristallin.

Lorsque le porteur de charge réalise un tour de la spire, les travaux dépensés par ces actions sont :

$$W_q = q\oint\limits_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} \quad \text{et} \quad W_f = \oint\limits_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F_f}\cdot\overrightarrow{dl} < 0 \quad \text{(travail résistant)}$$

En appliquant le TEC sur le porteur de charge réalisant ce tour de spire, il vient : $\Delta E_c = W_q + W_f$

En l'absence de champ électromoteur $\overrightarrow{E}$, on aurait de fait $\Delta E_c < 0$, c'est à dire que le porteur de charge soumis exclusivement à la force de frottement perdrait de l'énergie ; le courant finirait par s'annuler.

Cette dernière remarque montre donc qu'en régime établi, on a forcément :

$$W_q = q \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} \neq 0$$

Définition II-1: FORCE ÉLECTROMOTRICE

On appelle **force électromotrice** ou (f.e.m.), la circulation du champ électromoteur sur la totalité du circuit $\mathcal{C}$, soit :

$$e = \frac{W_q}{q} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Remarque II-2: CIRCULATION DU CHAMP ÉLECTRIQUE

On constate qu'en dehors du régime statique, le champ électrique **n'est plus à circulation conservative !**

Par ailleurs, l'expérience montre que la f.e.m. est réliée à la variation du flux $\Phi(t)$ du champ magnétique à travers la spire par :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad \text{loi de Lenz-Faraday}}$$

Remarque II-3: EFFET DE MODÉRATION

La présence du signe $-$ dans la loi de Lenz-Faraday traduit bien l'effet de modération constaté expérimentalement :

- aimant en rapprochement de la spire $\Longrightarrow \dfrac{d\Phi}{dt} > 0 \Longrightarrow I < 0 \Longrightarrow \boxed{e < 0}$
- aimant en éloignement de la spire $\Longrightarrow \dfrac{d\Phi}{dt} < 0 \Longrightarrow I > 0 \Longrightarrow \boxed{e > 0}$

b - Passage à l'échelle locale : l'équation locale de Maxwell-Faraday

On a :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{dt} \cdot d \left[\iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} \right] = -\frac{1}{dt} \left[\iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{B}(M, t+dt) \cdot \overrightarrow{dS} - \iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{B}(M,t) \cdot \overrightarrow{dS} \right]$$

soit :

$$\oint_{C} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{1}{dt} \left[\iint_{S/\mathcal{C}} \left[\overrightarrow{B}(M, t+dt) - \overrightarrow{B}(M,t) \right] \cdot \overrightarrow{dS} \right] = -\frac{1}{dt} \left[\iint_{S/\mathcal{C}} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \cdot dt \right) \cdot \overrightarrow{dS} \right]$$

$$= - \iint_{S/\mathcal{C}} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \right) \cdot \overrightarrow{dS}$$

ainsi en appliquant le théorème de Stokes-Ampère au premier membre de cette relation il vient :

$$\iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = - \iint_{S/\mathcal{C}} \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \right) \cdot \overrightarrow{dS}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \quad \text{équation de Maxwell-Faraday}}$$

II.3 Bilan des équations locales de Maxwell- premières propriétés

Entre 1856 et 1864, J.C. Maxwell énonça et publia un ensemble quatre équations locales cohérentes contenant «tout l'électromagnétisme» ; ces résultats sont appelés **équations de Maxwell**, et contiennent toutes les propriétés du champ électromagnétique : structure, lien avec ses sources (ρ, $\overrightarrow{J}$), phénomène d'induction électromagnétique, prévisions de la propagation du champ électromagnétique etc...

$$div\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-flux ou Maxwell-Thomson} \qquad \text{(XIII.5)}$$

$$div\,\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss} \qquad \text{(XIII.6)}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday} \qquad \text{(XIII.7)}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0 \left(\overrightarrow{J}(M,t) + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère} \qquad \text{(XIII.8)}$$

avec : $\begin{cases} \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1} & \text{perméabilité magnétique du vide} \\ \epsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9}\ F.m^{-1} & \text{permitivité diélectrique du vide} \end{cases}$ et $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$

Remarque II-4:

- Les champs électrique et magnétique sont couplés dans deux des équations. Nous verrons plus bas que ce couplage est à l'origine de la propagation du champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right)$.
- Les équations de Maxwell sont linéaires. Ainsi, si les distributions sources de charge et courant $(\rho_i(M,t), \overrightarrow{J}_i(M,t))$ engendrent chacune le champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E_i}(M,t), \overrightarrow{B}_i(M,t)\right)$, alors toute combinaison linéaire de ces distributions de charge et courant $\sum_i \lambda_i \left(\rho_i(M,t), \overrightarrow{J}_i(M,t)\right)$ engendre le champ résultant $\left(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right) = \sum_i \lambda_i \left(\overrightarrow{E}_i(M,t), \overrightarrow{B}_i(M,t)\right)$
- Dans le cas stationnaire $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$, les équations de Maxwell-Gauss, et Maxwell-Thomson sont inchangées (mais ne comportent évidemment plus la variable temps) et les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère conduisent aux équations locales établies dans le cadre de la statique, soit :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0} \tag{XIII.9}$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M) = \mu_0 \overrightarrow{J}(M) \tag{XIII.10}$$

II.4 Traductions intégrales des équations de Maxwell

Les théorèmes de Green-Ostrogradski (GO) et Stokes Ampère (SA) permettent d'établir le lien entre formulations locale et intégrale. En effet, en intégrant les équations locales, on retrouve les principales propriétés et théorèmes intégraux de l'électromagnétisme déjà abordés :

$$\text{Maxwell-Gauss (MG)} \longrightarrow div\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \overset{GO}{\Leftrightarrow} \oiint_{S/V} \overrightarrow{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{V/S}\rho(M,t)\cdot d\tau \quad \textbf{Théorème de Gauss}$$

$$\text{Maxwell-Thomson (MT)} \longrightarrow div\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \overset{GO}{\Leftrightarrow} \oiint_{S/V} \overrightarrow{B}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS} = 0 \quad \textbf{Conservation du flux magnétique}$$

$$\text{Maxwell-Faraday (MF)} \longrightarrow \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \overset{SA}{\Leftrightarrow} e = \oint_{C/S} \overrightarrow{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{S/C}\overrightarrow{B}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS}$$

Loi de l'induction de Lenz-Faraday (MPSI)

$$\text{Maxwell-Ampère (MA)} \longrightarrow \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\left[\overrightarrow{J}(M,t) + \epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t}\right] \overset{SA}{\Leftrightarrow}$$

$$\oint_{C/S}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\iint_{S/C}\left[\overrightarrow{J}(M,t) + \epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t}\right]\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 I_{\text{enl. tot.}}$$

Théorème d'Ampère généralisé (XIII.11)

II.5 Substitution à la traversée des interfaces chargées et/ou de courant : les relations de passage

Rappel des relations de passage en live !

III L'approximation des régimes quasi-stationnaires - conséquences

III.1 ARQS magnétique dans le vide

a - Définition et critère de validité

Nous avons vu dans le chapitre XI consacré à la magnétostatique que le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}(M)$ produit par une distribution de courants $\mathcal{D}$ était solution des équations locales statiques suivantes : $\left[\begin{array}{l} div\overrightarrow{B_0}(M)=0 \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_0}(M)=\mu_0\overrightarrow{J_0}(M)\end{array}\right.$ dans lesquelles on constate le découplage complet d'avec le champ électrique.

<u>Question :</u> à quelle(s) condition(s) est-il possible en régime variable des sources et **pour un point M du vide** de simplement remplacer $\overrightarrow{B_0}(M)$ par $\overrightarrow{B_0}(M,\mathbf{t})$ (on ajoute seulement la variable temps sans changer l'expression du champ qui dépend des courants source.) et de conserver la forme des équations de la statique ? Soit de faire :

$$\left[\begin{array}{l} div\overrightarrow{B_0}(M,t)=0 \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_0}(M,t)=\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t}\end{array}\right. \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} div\overrightarrow{B_0}(M,t)=0 \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_0}(M,t)=\overrightarrow{0}\end{array}\right.$$

Appelons : $\begin{cases} \text{D une distance caractéristique du problème, par exemple la taille de la distribution de courant } \mathcal{D} \\ T \text{ un temps caractéristique de variation des sources} \\ B_0 \text{ l'amplitude caractéristique de } \overrightarrow{B_0}(M,t) \end{cases}$

Conséquence sur les opérateurs : $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \sim \dfrac{1}{T} \\ ||\overrightarrow{grad}||, ||\overrightarrow{rot}||, div \sim \dfrac{1}{D} \end{cases}$

L'équation de Maxwell-Faraday implique l'existence d'un champ électrique induit $\overrightarrow{E_1}(M,t)$ dont on peu déduire l'ordre de grandeur :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_1}(M,t)=-\frac{\partial\overrightarrow{B_0}(M,t)}{\partial t} \Longrightarrow \frac{E_1}{D}\sim\frac{B_0}{T} \Longrightarrow \boxed{E_1\sim\frac{B_0 D}{T}}$$

Par ailleurs, le champ $\overrightarrow{E_1}(M,t)$ engendre lui même un champ magnétique induit d'après l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide) :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t)=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{B_0}(M,t)+\overrightarrow{B_1}(M,t)\right]=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E_1}(M,t)}{\partial t} \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{B_1}(M,t)\right]=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E_1}(M,t)}{\partial t}$$

ce qui donne en ordre de grandeur :

$$B_1\sim\frac{\mu_0\epsilon_0 D E_1}{T}=\frac{DE_1}{c^2T} \Longrightarrow \boxed{B_1\sim\frac{D^2}{c^2T}B_0}$$

NB : ce champ induit $\overrightarrow{B_1}(M,t)$ engendre lui même un champ électrique $\overrightarrow{E_2}(M,t)$, qui engendre un champ magnétique $\overrightarrow{B_2}(M,t)$ et ainsi de suite... Ainsi, la solution générale de notre problème en régime variable s'écrit donc :

$$\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{B}(M,t)=\overrightarrow{B_0}(M,t)+\overrightarrow{B_1}(M,t)+\overrightarrow{B_2}(M,t)+\dots\\ \overrightarrow{E}(M,t)=\overrightarrow{E_1}(M,t)+\overrightarrow{E_2}(M,t)+\dots\end{array}\right.$$

L'ARQS magnétique consiste simplement à négliger les champs "secondaires", et de poser

$$\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{B}(M,t)\simeq\overrightarrow{B_0}(M,t)\\ \overrightarrow{E}(M,t)\simeq\overrightarrow{E_1}(M,t)\end{array}\right.$$

Propriété III-1: CRITÈRE DE L'ARQS MAGNÉTIQUE

L'ARQS magnétique est valable dans le vide si $B_1 << B_0$, c'est à dire si D et T sont telles que :

$\boxed{D^2 << c^2T^2=\lambda^2}$ avec λ la longueur d'onde de la radiation rayonnée dans le vide par le système

b - Définition plus "pratique" du cadre de l'ARQS

Lorsqu'un champ est mesuré en un point M à la date t, et qu'il est engendré par des sources situées en des points P **distants de D=PM**, les modifications de l'état des sources doivent nécessairement se propager pour être ressenties au "point de mesure" M ; aussi, le champ électromagnétique se propageant à la célérité c dans le vide (cf cours à venir sur ondes électromagnétiques chap. XIV), le temps de parcours caractéristique τ de cette propagation est donc de l'ordre de :

$$\tau\sim\frac{D}{c}$$

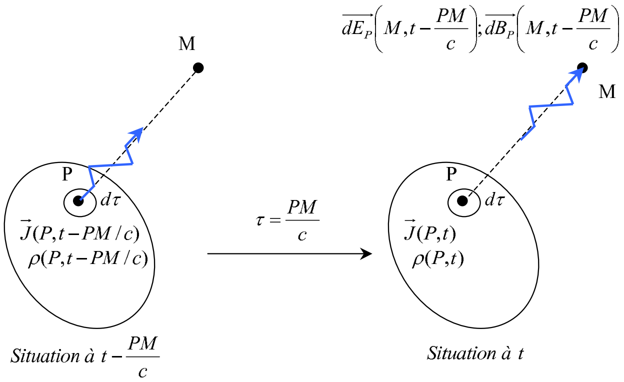


FIGURE XIII.7 – Temps de propagation des signaux électromagnétiques

en supposant une distribution source de dimension caractéristique faible par rapport à $D=PM$, afin de pouvoir choisir un point moyen P représentatif de celle-ci.

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, on a : $D << cT$, soit : $\boxed{\tau=\frac{D}{c}<<T}$

Propriété III-2: L'ARQS EN PRATIQUE

Le cadre de l'ARQS consiste à négliger le temps τ de parcours du champ électromagnétique entre ses sources en P et le point de mesure en M, par rapport à toute durée caractéristique du problème.

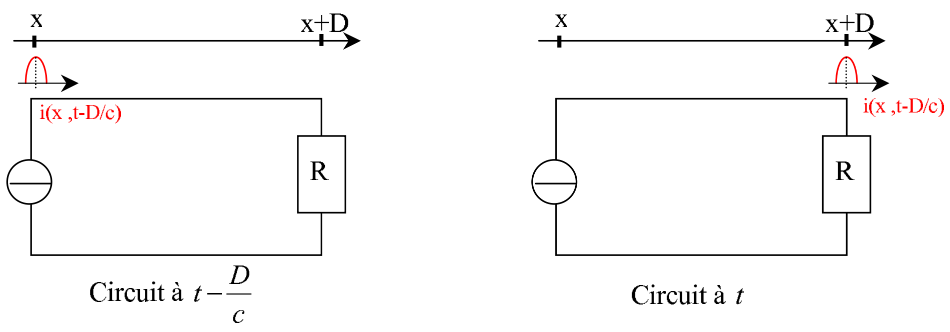


FIGURE XIII.8 – Illustration électrocinétique de l'ARQS

ILLUSTRATION : considérons un circuit comportant un générateur d'impulsions de courant et une résistance ;

Le signal de courant s'étant propagé de x à $x+D$ pendant la durée D/c, on peut écrire : $i(x+D,t) = i(x, t-D/c)$

qui devient si l'on postule un temps de propagation du phénomène très court par rapport à tout temps caractéristique (par exemple ici le temps de montée du signal, ou bien si celui-ci est périodique, la période T du courant) :

$$i(x+D,t) = i(x,t)$$

Conclusion : le courant est identique dans tout le circuit série en ARQS à tout instant.

Exemple numérique : en live

c - Bilan des équations locales de l'ARQS magnétique

Dans l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$div\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-flux} \tag{XIII.12}$$

$$div\,\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss} \tag{XIII.13}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday (on conserve l'induction !)} \tag{XIII.14}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}(M,t) \simeq \mu_0\,\overrightarrow{J}(M,t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère (modifiée !)} \tag{XIII.15}$$

MODIFICATION DE LA LOI DE CONSERVATION DE LA CHARGE - RETOUR SUR LA LOI DES NOEUDS

En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère "revisitée" en ARQS magnétique, on obtient :

$$div\left[\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}(M,t)\right] = \mu_0 \cdot div\,\overrightarrow{J}(M,t)$$

or avec l'identité $div\left[\overrightarrow{rot}\right] \equiv 0$

on retrouve la traduction locale de la loi des noeuds évoquée en début de chapitre (§I.1.b) :

$$\boxed{div\,\overrightarrow{J}(M,t) \simeq 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} \simeq 0} \tag{XIII.16}$$

CONCLUSION : en ARQS magnétique (la plus fréquente) on retrouve toutes les propriétés du champ magnétique statique, en revanche il existe un champ électrique induit. On retrouve par exemple cette situation dans l'espace vide d'une solénoïde dans lequel existe un champ électrique induit (cf exemple ci-dessous).

d - Exemple : champ électrique induit dans un solénoïde infini en ARQS (magnétique)

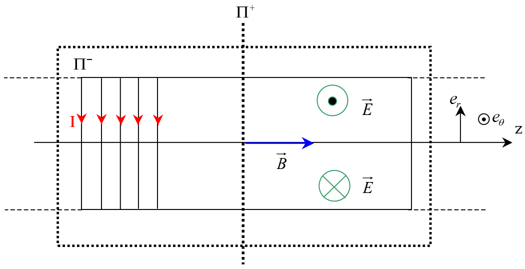
Considérons maintenant un solénoïde de longueur L et de rayon a, tels que $L >> a$ donc supposé infini, d'axe $[Oz)$ comportant n spire par unité de longueur et parcouru par un courant sinusoïdal $I(t)$ de fréquence $f = \frac{1}{T}$ dont le domaine de fréquence est compatible avec l'ARQS magnétique, soit $\frac{L}{c} << T$; ainsi le courant est identique dans tout le solénoïde à chaque instant t :

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Le champ magnétique au sein de solénoïde est donc homogène et vaut : $\overrightarrow{B} = \mu_0 n I_0 \cdot \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$, et nul à l'extérieur

Le caractère variable du courant et donc du champ magnétique du solénoïde entraîne en ARQS l'existence d'un champ électrique dans son espace vide, ce que montre l'équation de Maxwell-Faraday inchangée en $ARQS$ magnétique :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \neq \overrightarrow{0}$$



- Topographie du champ électrique
  Tout plan contenant $[Oz) \equiv \Pi^-$ $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{E} \,/\!/\, \overrightarrow{e_\theta}$ $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{E} = E(\rho, \theta, z, t) \cdot \overrightarrow{e_\theta}$

  Invariance par rotation d'angle $\forall\theta$ $\Longrightarrow$ $E(\rho, \cancel{\theta}, z, t)$
  Invariance par translation le long de l'axe $[Oz)$ $\Longrightarrow$ $E(\rho, \cancel{z}, t)$
  Bilan :
  $$\overrightarrow{E} = E(\rho, t) \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

- Détermination de la norme du champ électrique

  Compte tenu de la topographie du champ électrique, choisissons là-encore **un contour circulaire $\mathcal{C}$ d'axe $[Oz)$ de rayon ρ** sur lequel s'appuie la surface S plane pour intégrer l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = -\iint_{S/\mathcal{C}} \frac{d\overrightarrow{B}(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{dS}$$

qui devient en utilisant le théorème de Stokes-Ampère :

$$\oint_{\mathcal{C}/S} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS}$$

On trouve sans problème après intégration :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\rho > a, t) = \frac{a^2}{2\rho}\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\cdot\overrightarrow{e_\theta}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\rho < a, t) = \frac{\rho}{2}\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\cdot\overrightarrow{e_\theta}}$$

III.2 ARQS électrique dans le vide

a - Définition et critère de validité

Le chapitre X consacré à la formulation locale de l'électrostatique a permis de dégager qu'en régime statique les propriétés du champ électrique $\overrightarrow{E_0}(M)$ étaient déterminées par le jeux d'équations suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} div\overrightarrow{E_0}(M) = \dfrac{\rho(M)}{\epsilon_0} \\ \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_0}(M) = \overrightarrow{0} \end{array}\right.$$

pour lesquelles on constate le découplage d'avec le champ magnétique.

<u>Question</u> : exactement comme pour le cas magnétique, on peut se demander à quelle(s) condition(s) il est possible en régime variable des sources et pour un point M du vide de remplacer $\overrightarrow{E_0}(M)$ par $\overrightarrow{E_0}(M, \mathbf{t})$ et de conserver la forme des équations de la statique ? Soit de faire :

$$\left[\begin{array}{l} div\overrightarrow{E_0}(M,t) = 0 \\ \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_0}(M,t) = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \end{array}\right. \overset{?}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} div\overrightarrow{E_0}(M,t) = 0 \\ \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_0}(M,t) = \overrightarrow{0} \end{array}\right.$$

On note désormais :

$$\begin{cases} \text{D toujours une distance caractéristique du problème, par exemple la taille de la distribution de courant } \mathcal{D} \\ T \text{ un temps caractéristique de variation des sources} \\ E_0 \text{ l'amplitude caractéristique de } \overrightarrow{E_0}(M,t) \end{cases}$$

En régime variable, l'équation de Maxwell-Ampère implique l'existence d'un champ magnétique induit $\overrightarrow{B_1}(M,t)$ en tout point M du vide, dont on peut déduire l'ordre de grandeur :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B_1}(M,t) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E_0}(M,t)}{\partial t} \Longrightarrow \frac{B_1}{D} \sim \frac{1}{c^2}\frac{E_0}{T} \Longrightarrow \boxed{B_1 \sim \frac{D}{c^2 T} E_0}$$

En outre, l'équation de Maxwell-Faraday montre que ce champ magnétique $\overrightarrow{B_1}(M,t)$ engendre à son tour un champ électrique :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E_0}(M,t) + \overrightarrow{E_1}(M,t)\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{B_1}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_1}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B_1}(M,t)}{\partial t}$$

soit en ordre de grandeur :

$$E_1 \sim \frac{B_1 D}{T} \Rightarrow \boxed{E_1 \sim \frac{D^2}{c^2 T^2} E_1}$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ induit lui-même un champ électrique $\overrightarrow{E_2}$, qui donne naissance à un champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$, et ainsi de suite ; ainsi la solution générale de notre problème en régime variable s'écrit donc :

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}(M,t) + \overrightarrow{E_1}(M,t) + \overrightarrow{E_2}(M,t) + \ldots \\ \overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{B_1}(M,t) + \overrightarrow{B_2}(M,t) + \ldots \end{array}\right.$$

L'ARQS électrique consiste simplement à négliger les champs "secondaires" dans les expressions ci-dessus, et donc de poser

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{E}(M,t) \simeq \overrightarrow{E_0}(M,t) \\ \overrightarrow{B}(M,t) \simeq \overrightarrow{B_1}(M,t) \end{array}\right.$$

Propriété III-3: CRITÈRE DE L'ARQS ÉLECTRIQUE

L'ARQS électrique est valable dans le vide si $E_1 << E_0$, c'est à dire si D et T sont telles que :

$\boxed{D^2 << c^2T^2 = \lambda^2}$ avec λ la longueur d'onde de la radiation rayonnée dans le vide par le système

b - Bilan des équations locales de l'ARQS électrique

Dans l'ARQS électrique, les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$div\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-flux} \qquad \text{(XIII.17)}$$

$$div\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Gauss} \qquad \text{(XIII.18)}$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}(M,t) \simeq \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Faraday (on élimine l'induction !)} \qquad \text{(XIII.19)}$$

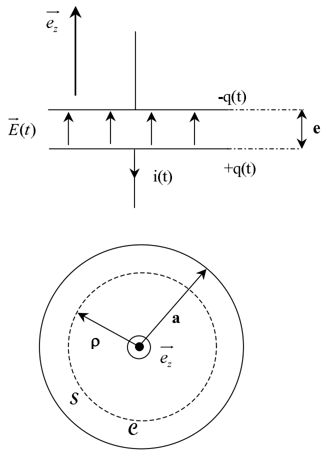
$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\overrightarrow{J}(M,t) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equation de Maxwell-Ampère (conservée !)} \qquad \text{(XIII.20)}$$

Compte tenu du fait que les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère sont inchangées en ARQS électrique, il en est de même pour l'équation de conservation de la charge.

c - Exemple : champ magnétique induit dans un condensateur plan en ARQS (électrique)

On considère ici un condensateur plan d'armatures circulaires de rayon a intégré dans un circuit en régime harmonique dont le domaine de fréquence est compatible avec l'ARQS électrique, soit $\dfrac{a}{c} << T$. Ainsi, on néglige les temps de propagation du rayonnement émis, et on peut alors poser que le champ électrique est homogène entre les armatures à tout instant t, et nul à l'extérieur.

$$\overrightarrow{E}(t) = E_0 \cos\omega t \cdot \overrightarrow{e_z}$$



Le régime étant variable, le champ électrique entre armature est variable au cours du temps : $\overrightarrow{E}(t)$. L'équation de Maxwell-Ampère, inchangée en ARQS électrique, montre l'existence d'un champ magnétique entre les armatures du condensateur (pas de courant physique dans cet espace, mais des courants de déplacement ! !) :

$$\overbrace{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}}^{\neq\overrightarrow{0}} = \mu_0 \left[\underbrace{\overrightarrow{J}}_{=\overrightarrow{0}} + \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}_{\neq\overrightarrow{0}} \right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

QUESTION : déterminer complètement le champ magnétique entre les armatures du condensateur.

- GÉOMÉTRIE DU PROBLÈME : axe de symétrie $[Oz] \Longrightarrow$ on adopte les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)
- TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Tout plan contenant $[Oz] \equiv \Pi^+ \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{B} \,/\!/\, \overrightarrow{e_\theta} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{B} = B(\rho, \theta, z, t) \cdot \overrightarrow{e_\theta}$

Invariance par rotation d'angle $\forall\theta \quad \Longrightarrow \quad B(\rho, \cancel{\theta}, z, t)$

Bilan :

$$\overrightarrow{B} = B(\rho, z, t) \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

- DÉTERMINATION DE LA NORME DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Choisissons une surface S s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$ entre les deux armatures et intégrons l'équation de Maxwell-Ampère, ce qui revient à appliquer le théorème d'Ampère généralisé :

$$\iint_{S/\mathcal{C}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} = \frac{1}{c^2}\iint_{S/\mathcal{C}} \frac{d\overrightarrow{E}(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{dS}$$

qui devient en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oint_{\mathcal{C}/\mathcal{S}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{1}{c^2}\iint_{S/\mathcal{C}} \frac{d\overrightarrow{E}(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{dS}$$

On choisit un contour $\mathcal{C}$ circulaire de rayon ρ et d'axe $[Oz)$ afin de pouvoir transformer le produit scalaire $\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl}$ en produit des normes $B\cdot dl$ avec $B = cste$ sur le contour $\mathcal{C}$; ainsi, l'intégration est immédiate et ne pose aucune difficulté. On trouve : $B(\rho,z,t) = \dfrac{1}{2\pi\rho c^2}\dfrac{d\Phi_S(t)}{dt}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\rho<a,t) = \frac{\rho}{2c^2}\frac{dE(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{\rho}{2c^2}E_0\omega\times sin(\omega t)\cdot\overrightarrow{e_\theta}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\rho>a,t) = \frac{a^2}{2c^2}\frac{dE(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{a^2}{2c^2}\frac{E_0}{\rho}\omega\times sin(\omega t)\cdot\overrightarrow{e_\theta}}$$

Remarque III-1:

A l'extérieur du condensateur $\rho > a$, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$, et il n'y a aucun courant physique non plus $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{0}$ ainsi :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(\rho>a,z,t) = \mu_0\left[\overrightarrow{J} + \epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right] = \overrightarrow{0}$$

mais on a cependant $\overrightarrow{B}(\rho>a,z,t) \neq \overrightarrow{0}$!!! Donc $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \not\Longrightarrow \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$

IV Les équations de propagation des champs dans le vide : premier contact et quelques premières conclusions !

IV.1 Etablissement - Nécessité du couplage des équations

Considérons un point M d'une région d'espace vide de charge et de courant : $\begin{cases}\rho(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{J}(M,t) = \overrightarrow{0}\end{cases}$

Les équations de Maxwell de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, ou **équations de couplage des champs** $(\overrightarrow{E},\overrightarrow{B})$ en M sont :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t}$$

et

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t}$$

Formulaire : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\right) = \overrightarrow{grad}(div) - \overrightarrow{\Delta}$

En prenant le rotationnel de l'équation de MF, et en tenant compte de l'absence de charge, on obtient :

$$\overrightarrow{grad}\underbrace{\left[div\overrightarrow{E}(M,t)\right]}_{=0} - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t}$$

ce qui devient avec l'équation de Maxwell-Ampère indiquée plus haut :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}(M,t) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}(M,t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}} \quad \text{Equation de d'Alembert à 3D} \tag{XIII.21}$$

Expression développée en coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Exercice de cours: **(IV.1) - n° 2.** *Reprendre cette démarche avec le champ magnétique, et montrer que :*

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B}(M,t) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}} \tag{XIII.22}$$

Ainsi, les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont tous deux régis par la même équation aux dérivées partielles appelée **Equation de d'Alembert à 3D**.

Nous montrerons dans le cours sur les ondes électromagnétiques que cette équation caractérise la propagation du champ $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$ à la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$.

Propriété IV-1: Couplage et propagation

L'équation de D'Alembert $3D$ que vérifie le champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right)$ décrit la propagation de celui-ci dans le vide, et découle du **couplage** des champs électrique et magnétique présents dans les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère.

Conclusion : Le couplage des champs électrique et magnétique dans les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère est à l'origine du phénomène de propagation du champ électromagnétique.

IV.2 Retour sur l'ARQS

Considérons un point M de l'espace vide. Si l'on se place dans le cadre de l'ARQS, par exemple l'ARQS magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{0}$.

En calculant le rotationnel de cette équation, il vient :

$$\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t)\right] = \overrightarrow{grad}\left[\underbrace{div\overrightarrow{B}(M,t)}_{=\overrightarrow{0}}\right] - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{0}$$

soit : $\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{0}$

et également en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}(M,t)\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M,t)\right]$$

$$\overrightarrow{grad}\left[\underbrace{div\overrightarrow{E}(M,t)}_{=\overrightarrow{0}}\right] - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0}$$

soit : $\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0}$

Le cadre de l'ARQS électrique, qui consiste cette fois à négliger le couplage de $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ dans l'équation de Maxwell-Faraday, conduit évidemment aux mêmes équations

Propriété IV-2:

Dans le cadre de l'ARQS, les équations régissant les évolutions des champs électrique et magnétique dans le vide sont (sans suprise) identiques en forme à celles obtenues en régime statique :

$$\left.\begin{cases}\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{0}\end{cases}\right\} \neq \text{EDA}$$

$\Rightarrow$ Les solutions de ces équations ne sont donc pas propagatives.