

Lois du frottement solide

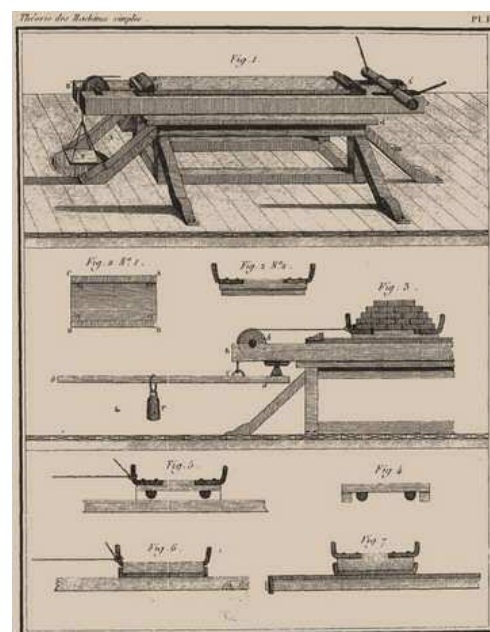


FIGURE IV.1 – *Chariot utilisé par Coulomb pour la mesure des forces de frottement.*

CHARLES-AUGUSTIN DE COULOMB
(1736-1806)

PLAN DU CHAPITRE

I	Rappels et éléments fondamentaux de cinématique et dynamique du solide	3
I.1	Les mouvements du solide et des solides en contact	3
	a - Relation du champ des vitesses d'un solide (RCVS) - translation d'un solide	3

	b - Vitesse de glissement entre deux solides	5
	c - Condition de roulement sans glissement (CRSG hors programme))	6
I.2	Rappels des théorèmes de dynamique du solide (MPSI)	7
	a - Théorème de la résultante cinétique	7
	b - Théorème du moment cinétique (TMC)	8
II	Actions de contact entre deux solides - lois empiriques	12
II.1	Situation du problème	12
II.2	Lois d'Amontons-Coulomb	12
	a - Lois d'Amontons	13
	b - Lois de Coulomb	13
III	Mise en oeuvre des lois de frottement solide : effets sur les solides en translation	16
III.1	Approche simple : le pavet sur un plan incliné	17
	a - Première possibilité : l'équilibre - phénomène d'arc-boutement . .	17
	b - Seconde possibilité : le glissement avec frottement	18
	c - Troisième possibilité : le basculement	18
III.2	Autres applications simples	19
	a - La marche à pied	19
	b - Le monte charge	20
IV	Aspects énergétiques du frottement solide	21
IV.1	Puissance des actions appliquées à un solide	21
	a - Définition - forme "générique"	21
	b - Forme "utile" - cas du solide en translation (à retenir)	21
	c - Puissance des actions de contact entre deux solides	22
IV.2	Quelques théorèmes utiles d'énergétique : TPC et TEC	23
IV.3	Exemple de bilan énergétique : le monte charge de déménagement	24

I Rappels et éléments fondamentaux de cinématique et dynamique du solide

I.1 Les mouvements du solide et des solides en contact

a - Relation du champ des vitesses d'un solide (RCVS) - translation d'un solide

Considérons un solide S et deux points A et B quelconques de ce solide. Le solide S est en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, et on lui associe son référentiel propre \mathcal{R}' , c'est à dire rigidement lié à lui¹, d'origine O' .

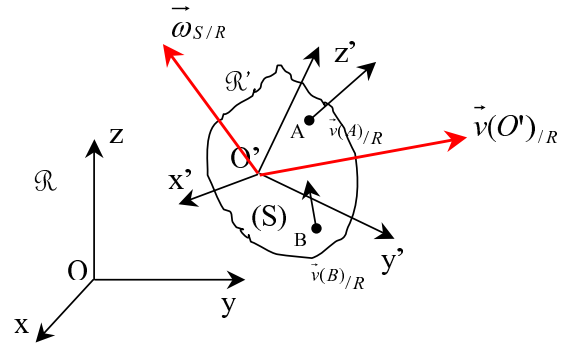


FIGURE IV.1 – Degrés de liberté d'un solide

Pour décrire complètement la cinématique de S dans \mathcal{R} , il est nécessaire de :

- décrire le mouvement de $O' \in S$ de vitesse $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$

$$\Rightarrow \text{3}\delta^\circ \text{ de liberté de translation : } \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{O'} \\ \dot{y}_{O'} \\ \dot{z}_{O'} \end{pmatrix}$$

- décrire la rotation de \mathcal{R}' avec le vecteur rotation $\vec{\omega}(R'/R) = \vec{\omega}(S/R)$

$$\Rightarrow \text{3}\delta^\circ \text{ de liberté de rotation : } \vec{\omega}(S/R) = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

QUESTION : quel lien entre les vitesses des points d'un solide ?

RÉPONSE : relation du champ des vitesses d'un solide

Appliquons la relation de dérivation d'un vecteur à \vec{AB} en appelant $\vec{\omega}_{R'/\mathcal{R}}$ le vecteur rotation du solide par rapport au référentiel \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{S/R} \wedge \vec{AB} \quad \text{soit :} \quad \underbrace{\left(\frac{d\vec{AO}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{=-\vec{v}(A)/\mathcal{R}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{OB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{=\vec{v}(B)/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \vec{AB}$$

On retiendra le résultat suivant :

1. S est donc un "solide de référence" du référentiel \mathcal{R}'

Propriété I-1: RELATION DU CHAMP DES VITESSES D'UN SOLIDE

Lors du mouvement d'un solide S , les vitesses respectives de deux de ses points A et B sont reliées entre-elles par la relation du champ des vitesses dans un solide (RCVS) :

$$\vec{v}(B \in S)_{/R} = \vec{v}(A \in S)_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (\text{IV.1})$$

CADRE DU PROGRAMME :

$$\text{UNIQUEMENT LES SOLIDES } S \text{ EN TRANSLATION} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \\ \vec{v}(A \in S)_{/R} = \vec{v}(B \in S)_{/R} = \vec{v}(\forall M \in S)_{/R} \end{array} \right]$$

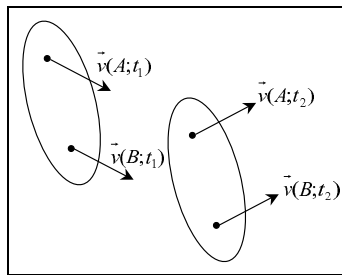


FIGURE IV.2 – Translation d'un solide

Remarque I-1: TRANSLATION DE $S \neq$ MOUVEMENT "RECTILIGNE" DE S

Lorsque l'on évoque la translation d'un solide, il faut bien noter que celle-ci n'implique absolument pas que les trajectoires des points du solide soient rectilignes.

On peut voir clairement la différence dans le cas du vol d'un hélicoptère dans deux cas de figure :

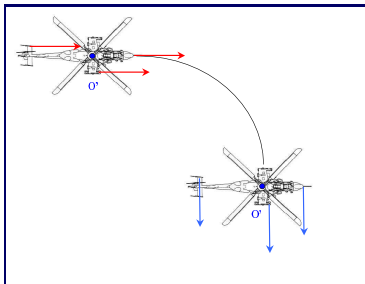


FIGURE IV.3 – Corps de l'hélicoptère en mouvement de translation "circulaire"

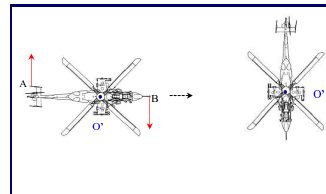


FIGURE IV.4 – Corps de l'hélicoptère en mouvement de rotation

$$\left[\begin{array}{l} \vec{v}(O') = \vec{v}(A \in S, t) = \vec{v}(B \in S, t) \neq \overrightarrow{cste} \\ \vec{\omega}_{S/R'} = \vec{0} \end{array} \right] \Rightarrow \text{translation}$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{v}(O') = \overrightarrow{cste} = \vec{0} \\ \vec{\omega}_{S/R'} \neq \vec{0} \end{array} \right] \Rightarrow \text{rotation}$$

b - Vitesse de glissement entre deux solides

On envisage deux solides : S_1 un pavé et S_2 le sol ; S_1 est en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} et en contact avec S_2 .

Le contact entre les deux solides peut se faire de 3 façons :

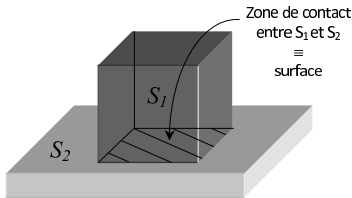


FIGURE IV.5 – Contact surfacique

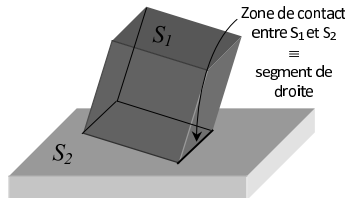


FIGURE IV.6 – Contact linéique

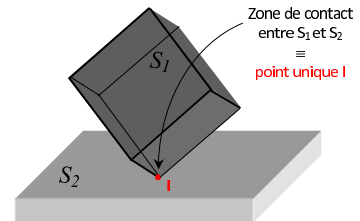


FIGURE IV.7 – Contact ponctuel

Cadre du programme : le programme se limite à l'analyse des solides en contact en translation, i.e. dont tous les points ont la même vitesse $\Rightarrow \forall$ contact, on réalise l'analyse du mouvement relatif des solides en un seul point, que l'on appellera $I \Rightarrow$ on étudie dans ce cours uniquement le modèle du contact ponctuel.

QUESTION : comment calculer la vitesse de glissement d'un solide par rapport à un autre en un point de contact I unique ?

On suppose donc le contact ponctuel (fig.6) ; appelons :

- $\rightarrow I$ point géométrique de contact
- $\rightarrow I_1$ point de S_1 coïncident avec I à l'instant considéré
- $\rightarrow I_2$ point de S_2 coïncident avec I à l'instant considéré

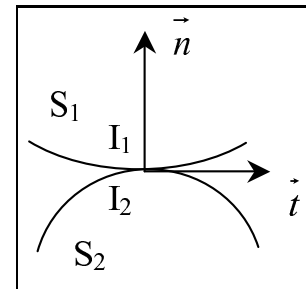


FIGURE IV.8 – Contact ponctuel de deux solides

Définition I-1: VITESSE DE GLISSEMENT

On appelle vitesse de glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2 en contact ponctuel notée $\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_g(I) = \vec{v}_g$ la vitesse du point $I_1 \in S_1$ par rapport à S_2 :

$$\boxed{\vec{v}_{1/2} = \vec{v}(I_1)_{/S_2}} \quad (\text{IV.2})$$

EXPRESSION :

En utilisant la loi de composition des vitesses, en exprimant la vitesse de I_1 on obtient :

$$\vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I_1)_{/S_2} + \underbrace{\vec{v}_e(S_2)}_{\text{vitesse } I_2 \text{ coïncid.}} = \vec{v}(I_1)_{/S_2} + \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}$$

d'où l'on tire l'expression analytique de la vitesse de glissement :

$$\boxed{\vec{v}_{1/2} = \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}} \quad (\text{IV.3})$$

Remarque I-2:

Par un raisonnement similaire, on montre que la vitesse de glissement du solide 2 par rapport au solide 1 est simplement l'opposé de $\vec{v}_{1/2}$.

$$\vec{v}_{2/1} = -\vec{v}_{1/2} \quad (\text{IV.4})$$

Exercice de cours: (I.1) - n° 1. Direction de la vitesse de glissement.

En évaluant $\vec{v}(I)_{/\mathcal{R}}$ (vitesse du point I) par composition des vitesses avec S_1 puis S_2 , montrer que $\vec{v}_{1/2}$ appartient au plan tangent de contact entre les deux solides.

Réponses :

$$\vec{v}(I)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I)_{/S_2} + \underbrace{\vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{v}_e} = \vec{v}(I)_{/S_1} + \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}}$$

soit :

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}(I_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_2)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(I)_{/S_2} - \vec{v}(I)_{/S_1}$$

or par définition, le point tangent I possède une vitesse appartenant au plan tangent, soit

$$\begin{cases} \vec{v}(I)_{/S_1} \in \mathcal{P}_{tang} \\ \vec{v}(I)_{/S_2} \in \mathcal{P}_{tang} \end{cases}$$

ce qui conduit par force à : $\boxed{\vec{v}_{1/2} \in \mathcal{P}_{tang}}$

c - Condition de roulement sans glissement (CRSG hors programme))

Lors de l'étude du mouvement de deux solides en contact, il peut arriver sous certaines conditions d'adhérence que la vitesse de glissement soit nulle. On parle alors de **roulement sans glissement**.

Définition I-2: CONDITION DE ROULEMENT SANS GLISSEMENT

Lors d'un roulement sans glissement, on a :

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}(I_1)/\mathcal{R} = \vec{v}(I_2)/\mathcal{R} \quad (\text{IV.5})$$

EXEMPLE : Transport à rouleaux

NB : le cadre du programme restreint notre travail au cas des solides en translation. Néanmoins, on propose ci-dessous l'exemple classique du transport à rouleaux, dispositif par lequel on translate un solide en en faisant tourner d'autres :

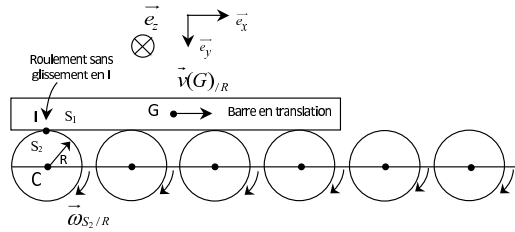


FIGURE IV.9 – Principe d'un transport à rouleaux en phase de non glissement

Si le transporteur à rouleaux fonctionne sans glissement, on peut écrire la CRSG au point I de contact entre un des rouleaux et la planche translattée, soit :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_1 \in S_1)/\mathcal{R} - \vec{v}(I_2 \in S_2)/\mathcal{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{v}(C)/\mathcal{R}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}(S_2/\mathcal{R}) \wedge \vec{CI} = \vec{v}(G)/\mathcal{R} + \underbrace{\vec{\omega}(S_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{GI}}_{=\vec{0}}$$

soit : $\boxed{\vec{v}(G)/\mathcal{R} = R\omega \cdot \vec{e}_x}$

1.2 Rappels des théorèmes de dynamique du solide (MPSI)

a - Théorème de la résultante cinétique

■ RÉSULTANTE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE :

On considère un solide en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. Si l'on "dé-coupe" le solide en volume élémentaire $d\tau$ de masse dm , la résultante cinétique dans \mathcal{R} de ce système s'écrit par définition :

$$\vec{P}/\mathcal{R} = \int_{sol} d\vec{p}(M) = \int_M \vec{v}(M) \cdot dm$$

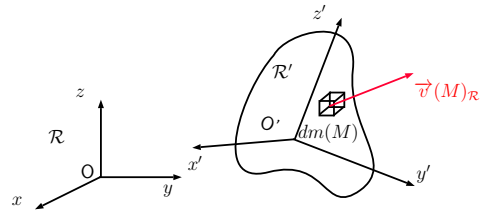


FIGURE IV.10 – Masse élémentaire dm dans le solide

or

$$\vec{v}(M) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}}$$

d'où

$$\vec{P}_{/\mathcal{R}} = \int_M \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_M \vec{OM} \cdot dm$$

et la relation définissant le centre de masse $\int_M \vec{OM} \cdot dm = m \cdot \vec{OG}$ permet finalement d'obtenir :

$$\boxed{\vec{P}_{/\mathcal{R}} = m \cdot \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = m \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{La résultante cinétique du so-} \\ \text{lido est égale à celle de son} \\ \text{centre de masse affecté de} \\ \text{toute la masse du solide.} \end{array} \right.$$

■ THÉORÈME DE LA RÉSULTANTE CINÉTIQUE (TRC) :

On montre (facilement) que la résultante des forces extérieures est égale à la dérivée temporelle de la résultante cinétique $\vec{P}_{/\mathcal{R}}$ du système, soit :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{R}_{ext}} \quad \text{Théorème de la Résultante Cinétique ou TRC} \quad (\text{IV.6})$$

ou bien son équivalent :

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{R}_{ext}} \quad \text{Théorème du Centre de Masse TCM} \quad (\text{IV.7})$$

avec la résultante des actions extérieures :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{R}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{ext}(M_i) \text{ pour des forces discrètes, } M_i \text{ étant le point d'application de la force } \vec{F}_{ext}(M_i) \\ \vec{R}_{ext} = \int_{sol} d\vec{F}(M) = \int_V \vec{f}(M) \cdot d\tau(M) \text{ pour un champ de force volumique } \vec{f}(M) \text{ réparties sur le solide} \end{array} \right.$$

b - Théorème du moment cinétique (TMC)

MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN POINT (VECTEUR!) :

On reprend le cas du solide en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. Le moment cinétique dans $\mathcal{R}[O; x, y, z]$ de ce solide est par définition :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \int_{sol} \vec{OM} \wedge d\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = \int_M \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot dm$$

soit :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \int_V \rho(M) \cdot \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot d\tau$$

MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN AXE (SCALAIRE!) : pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ_O passant par O , il est très pratique de projeter le moment cinétique sur cet axe pour dégager une formulation scalaire simple et qui sera très utile par la suite :

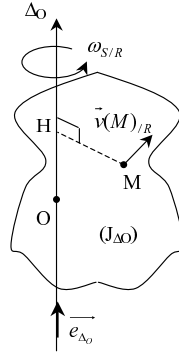


FIGURE IV.11 – Solide en rotation autour de l'axe Δ_O fixe

$$L_{\Delta_O} = \vec{L}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_{\Delta_O} = \int_M (\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}) \cdot \vec{e}_{\Delta_O} \cdot dm = \int_M \left(\underbrace{\vec{e}_{\Delta_O} \wedge \vec{OM}}_{=HM\vec{e}_\theta} \right) \cdot \underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}_{=HM\omega_{S/R}\vec{e}_\theta} \cdot dm$$

soit :

$$L_{\Delta_O} = \omega_{S/R} \underbrace{\int_M HM^2 \cdot dm}_{=J_{\Delta_O} \text{ moment d'inertie du solide } / \Delta_O} = J_{\Delta_O} \cdot \omega_{S/R} \quad (\text{IV.8})$$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN SOLIDE :

■ En un point fixe O

On considère un point fixe O du référentiel d'étude supposé galiléen \mathcal{R} . On montre (facilement là-encore) que le moment résultant des forces extérieures appliquées à un solide et calculé en un point O fixe de \mathcal{R} est égal à la dérivée temporelle du moment cinétique cinétique en O de ce solide $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ soit :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{M}_O(ext) \quad TMC \quad (\text{IV.9})$$

avec le moment résultant des forces extérieures :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{M}_{O_{ext}} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}(M_i)) \quad \text{pour les distributions discrètes de forces} \\ \vec{M}_{O_{ext}} = \int_V \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ext}(M) \cdot d\tau(M) \quad \text{pour un solide soumis à la densité de force volumique } \vec{f}_{ext}(M) \end{array} \right.$$

Forme utile : toujours pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ_O passant par O , il est très avantageux de donner une formulation scalaire au TMC par simple projection du TMC vectoriel sur cet axe :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_{\Delta_O}}{dt} = \vec{M}_O(ext) \cdot \vec{e}_{\Delta_O}$$

soit :

$$J_{\Delta_O} \frac{d\omega_{S/\mathcal{R}}}{dt} = M_{\Delta_O}(ext) \quad TMC_{\Delta_O} \quad (IV.10)$$

avec : $M_{\Delta_O} = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_{\Delta_O}$ projection de la résultante de force sur l'axe de rotation.

EXEMPLE (EN LIVE !) : moteur entraînant une charge en rotation et soumis à un action moment de frottement.

■ **En un point mobile P** (hors programme, mais bien utile !)

On discrétise le solide pour plus de commodité (n'enlève rien à la généralité au raisonnement !!)

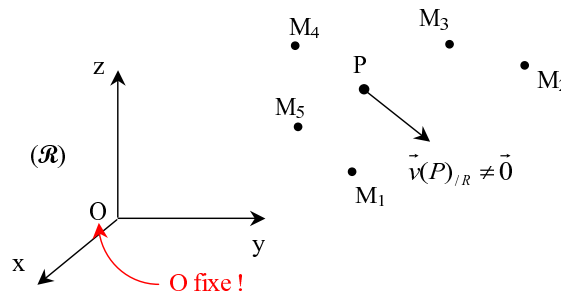


FIGURE IV.12 – TMC en un point P mobile

$$\vec{L}_{P/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}$$

soit :

$$\frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{PM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}} + \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}{dt}$$

$$= \sum_i \overbrace{\frac{d\vec{PO}}{dt}}^{=-\vec{v}(P)_{\mathcal{R}}} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}} + \sum_i \overbrace{\frac{d\vec{OM}_i}{dt}}^{=\vec{0}} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}} + \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}{dt}$$

donc :

$$\frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = -\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} + \sum_i \vec{PM}_i \wedge m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}}{dt}}_{=\vec{f}_{i_{int}} + \vec{f}_{i_{ext}}}$$

or on montre très facilement que : $\sum_i \vec{PM}_i \wedge \vec{f}_{i_{int}} = \vec{0}$ (moment des forces intérieures toujours nul dans un solide/système de points)

$$\text{donc : } \frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = -\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} + \sum_i \vec{PM}_i \wedge \vec{f}_{i_{ext}}$$

soit :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{P/\mathcal{R}}}{dt} = -\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} + \vec{M}_P(ext)} \quad (IV.11)$$

INTÉRÊT : si on choisit $P \equiv G$ (G centre de masse) alors $-\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}_{\mathcal{R}} = \vec{0}$
alors :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{G/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{M}_G(ext)} \quad \text{TMC}_{\Delta_G} \quad \text{valable } \forall \text{ mouvement de } G!!! \quad (IV.12)$$

FORME UTILE : par ailleurs, si la rotation se fait autour d'un axe de symétrie (axe principal d'inertie), on a (MPSI) : $\vec{L}_{G/\mathcal{R}} = J_G \vec{\omega}_{S/\mathcal{R}}$
donc :

$$\boxed{J_G \frac{d\vec{\omega}_{S/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{M}_G(ext)} \quad (IV.13)$$

qui projeté sur l'axe de rotation Δ_G donne la forme scalaire du TMC :

$$\boxed{J_G \frac{d\omega_{S/\mathcal{R}}}{dt} = M_{\Delta_G}(ext)} \quad \text{Forme scalaire du TMC (MPSI)} \quad (IV.14)$$

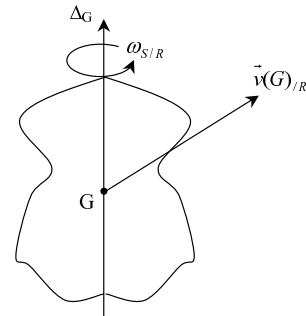


FIGURE IV.13 – Solide en rotation autour d'un axe Δ_G de symétrie

II Actions de contact entre deux solides - lois empiriques

II.1 Situation du problème

Considérons un solide (S_1) de masse m en contact avec un plan incliné (S_2) d'un angle α par rapport à l'horizontale.

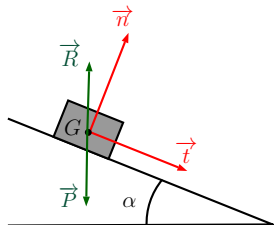


FIGURE IV.14 – Solide sur plan incliné

- EN SITUATION STATIQUE : le maintien en équilibre du solide S_1 implique l'existence d'une action de contact \vec{R} de S_2 sur S_1 compensant le poids, c'est à dire telle que :

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

- EN SITUATION DE MOUVEMENT DE S_1 : on constate expérimentalement qu' S_1 subit des résistances au mouvement dépendant de la nature des surfaces de S_1 et S_2 en contact.

- à la translation de pénétration de S_1 dans $S_2 \Rightarrow$ **force normale de contact de S_2 sur S_1** \vec{R}_{nS_2/S_1}
- à la translation de glissement de S_1 sur $S_2 \Rightarrow$ **force tangentielle de frottement de glissement de S_2 sur S_1** \vec{R}_{tS_2/S_1}
- à la rotation de pivotement de S_1 sur $S_2 \Rightarrow$ **moment normal de frottement de pivotement de S_2 sur S_1** \vec{M}_{nS_2/S_1}
- à la rotation de roulement de S_1 sur $S_2 \Rightarrow$ **moment tangentiel de frottement de roulement de S_2 sur S_1** \vec{M}_{tS_2/S_1}

OBJECTIFS : exprimer les composantes des actions de contact entre deux solides.

Remarque II-1: CONTACT PONCTUEL

Si le contact en I est ponctuel $\Rightarrow \vec{M}_{nI} = \vec{M}_{tI} = \vec{0}$.

CADRE DU PROGRAMME : On se limitera au cas des solides en translation i.e. **pas de pivotement et pas de roulement** donc même si le contact en I est non ponctuel, on a toujours $\Rightarrow \vec{M}_{nI} = \vec{M}_{tI} = \vec{0}$.

CONSÉQUENCE : on ne recherchera que $\vec{R}_{t_{2/1}}$ et $\vec{R}_{n_{2/1}}$.

II.2 Lois d'Amontons-Coulomb

Choisissons un point I appartenant au **domaine surfacique de contact** ; les actions résultantes au point I peuvent s'écrire :

$$\text{la résultante : } \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} = \underbrace{\vec{R}_{n_{2/1}}}_{\text{"contact"}} + \underbrace{\vec{R}_{t_{2/1}}}_{\text{"frott. gliss."}}$$

$$\text{le moment résultant en } I \text{ pour tout point } M \text{ de la surface : } \vec{\mathcal{M}}_{I_{2/1}} = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{I_{t_{2/1}}}}_{\text{moment de roulement}} + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{I_{n_{2/1}}}}_{\text{moment de pivotement}}$$

$\vec{\mathcal{M}}_{nI}(M)$ et $\vec{\mathcal{M}}_{tI}(M)$ s'appellent respectivement les moments élémentaires de **pivotement** et de **roulement** en I .

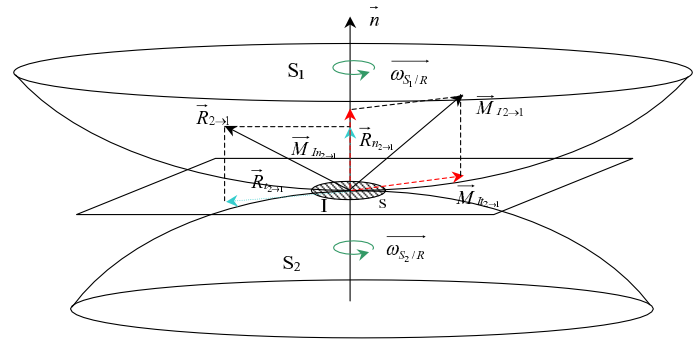


FIGURE IV.15 – Actions de deux solides en contact

a - Lois d'Amontons

Propriété II-1: LOIS D'AMONTONS

Amontons détermine expérimentalement en 1699 que \vec{R}_t et \vec{R}_n sont indépendants des valeurs des surfaces des solides en contact.

b - Lois de Coulomb

■ COMPOSANTE NORMALE (ÉVITE L'INTERPÉNÉTRATION DE S_1 ET S_2)

Cette composante constitue la projection sur la normale au plan de contact de la résultante d'action de (S_2) sur (S_1) :

$$R_n = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{n} \quad (\text{IV.15})$$

On l'interprète à l'échelle microscopique comme la résultante en I des forces de répulsion atomiques, empêchant les deux solides de s'interpénétrer.

Sa norme est directement dépendante de la situation (sa connaissance dépend des conditions du problème posé. Cf exercices résolus de ce chapitre).

Remarque II-2: RUPTURE DE CONTACT

S'il y a rupture de contact entre les deux solides alors $R_n = 0$. Ainsi, cette force normale est souvent nommée appelée réaction de support.

■ COMPOSANTE TANGENTIELLE

La composante tangentielle \vec{R}_t constitue la résistance à la translation \Rightarrow **RESPONSABLE DU FROTTEMENT** :

$$R_t = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{t}$$

avec \vec{t} vecteur unitaire tangentiel dans le sens du mouvement spontané possible.

Il convient de considérer deux cas de figure :

► SI LA VITESSE DE GLISSEMENT EST NULLE : $\vec{v}_{1/2} = \vec{0}$

Propriété II-2: 1^{ÈRE} LOI DE COULOMB

L'expérience montre que le glissement ne se produit pas tant que la composante tangentielle exercée par (S_2) sur (S_1) n'atteint pas une valeur limite $\|\vec{R}_{tmax}\|$. On a donc :

$$\text{Condition de non glissement} \Leftrightarrow \|\vec{R}_t\| \leq \mu_s \|\vec{R}_n\| = \|\vec{R}_{tmax}\|$$

avec μ_s facteur sans dimension appelé **coefficient de frottement statique**.

On retiendra également les trois propriétés suivantes :

Propriété II-3: A PROPOS DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT

- ❶ μ_s est indépendant de l'aire des surfaces en contact.
- ❷ μ_s est indépendant de la norme R_n (dans le modèle choisi!!)
- ❸ μ_s dépend du poli des surfaces.

On donne à titre d'exemple, quelques valeurs du coefficient de frottement statique :

Matériaux en contact	μ_s
acier-acier	0,2
acier-glace	0,02
acier-garniture de frein ($T < 200^\circ C$, $P = 2.10^7 Pa$)	0,4
pneu - route sèche	1
pneu - route mouillée	0,6

Remarque II-3: CÔNE DE FROTTEMENT STATIQUE

Dans le cas du non glissement des solides en contact, la résultante \vec{R} est contenue dans un cône de révolution d'axe $[I; \vec{n}]$ appelé «cône de frottement statique». En effet, pour une composante normale donnée, la composante tangentielle possède une valeur maximale (cf schéma ci-contre), ce qui impose l'inscription de la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ dans un cône de sommet le point de contact considéré I entre les deux solides.

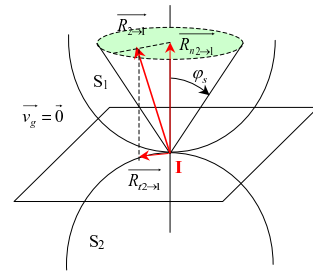


FIGURE IV.16 – Visualisation du cône de frottement statique

Exercice de cours: (II.2) - n° 2. Exprimer l'angle au sommet φ_s du cône de frottement en fonction du coefficient de frottement statique μ_s .

- SI LA VITESSE DE GLISSEMENT EST NON NULLE $\vec{v}_{1/2} \neq \vec{0}$.
Dans ce cas de figure, on retiendra les lois suivantes :

Propriété II-4: 2^{DE} LOI DE COULOMB

- ① La composante \vec{R}_t ou force de frottement (toujours exercée par S_2 sur S_1) est colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{v}_{1/2} \neq \vec{0}$, ce qui entraîne : $\vec{R}_t \wedge \vec{v}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$
- ② La force de frottement \vec{R}_t possède un sens opposé à la vitesse de glissement, que l'on traduit par : $\vec{R}_t \cdot \vec{v}_{1/2} = -\|\vec{R}_t\| \times \|\vec{v}_{1/2}\| \leq 0$
- ③ Dans le cas du frottement de glissement, la force de frottement \vec{R}_t a atteint sa valeur maximale, et est proportionnelle à la réaction normale du support :

$$\|\vec{R}_t\| = \mu_d \|\vec{R}_n\| \quad \text{avec } \mu_d \text{ coefficient de frottement dynamique } [\mu_d] = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Exercice de cours: (II.2) - n° 3. Expliquer, en vous appuyant sur des expériences simples "du quotidien", comment on peut montrer que $\mu_d < \mu_s$.

RÉPONSE :

Supposons par exemple qu'un opérateur décide de mettre en mouvement une armoire en fournissant une force constante \vec{F}_{op} . On constate par expérience qu'une fois le mouvement amorcé, l'opérateur doit fournir un effort nettement moins conséquent.

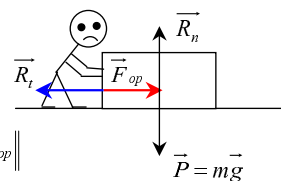
- si $\vec{v}_g = \vec{0}$ et limite du mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{op} + \vec{R}_n + \vec{R}_{t_{max}} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_n = mg \\ F_{op}(v_g = 0) = R_{t_{max}}(v_g = 0) = \mu_s R_n = \mu_s mg \end{cases}$$

$$\bullet \vec{v}_g = \vec{0}$$

et limite du mouvement : $\|\vec{R}_{t_{max}}\| = \|\vec{F}_{op}\|$



- si $\vec{v}_g = \vec{cste} \neq \vec{0}$ (mouvement uniforme) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = \vec{F}_{op} + \vec{R}_n + \vec{R}_{t_{max}} + m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_n = mg \\ F_{op}(v_g \neq 0) = R_{t_{max}}(v_g \neq 0) = \mu_d R_n = \mu_d mg < \underbrace{F_{op}(v_g = 0)}_{\text{constat expérimental}} = \mu_s mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu_s > \mu_d}$$

$$\bullet \vec{v}_g \neq \vec{0}$$

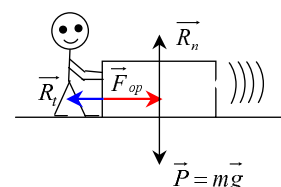


FIGURE IV.17 – Mise en mouvement d'une armoire

NB : souvent on considère $\mu_d \simeq \mu_s$

Remarque II-4: CÔNE DE FROTTEMENT DYNAMIQUE

Dans le cas du glissement des solides en contact, la résultante \vec{R} est sur un cône de révolution d'axe $[I; \vec{n}]$ appelé «cône dynamique de frottement». En effet, pour une composante normale donnée, la norme de la composante tangentielle possède une valeur fixée (cf schéma ci-contre), ce qui impose l'inscription de la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ sur un cône de sommet le point de contact considéré I entre les deux solides.

L'angle au sommet du cône dynamique vérifie naturellement : $\tan \varphi_d = \mu_d$ et le cône de frottement dynamique est contenu dans le cône de frottement statique puisque $\mu_d = \tan \varphi_d < \mu_s = \tan \varphi_s$.

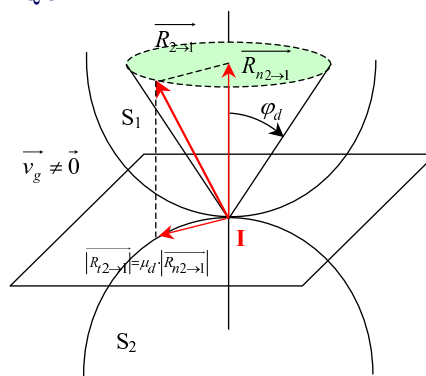


FIGURE IV.18 – Visualisation du cône de frottement dynamique

III Mise en oeuvre des lois de frottement solide : effets sur les solides en translation

III.1 Approche simple : le pavé sur un plan incliné

a - Première possibilité : l'équilibre - phénomène d'arc-boutement

Posons un pavé de masse m sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale faible. On pose R_t et R_n algébriques avec $\vec{R} = R_t \cdot \vec{e}_x + R_n \cdot \vec{e}_z$. L'application du TRC au pavé permet de traduire l'équilibre statique :

$$\begin{cases} R_t + mg \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_t = -mg \sin \alpha \\ R_n - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_n = mg \cos \alpha \end{cases}$$

La condition de non glissement s'écrit : $\frac{|R_t|}{|R_n|} = \tan \alpha < \mu_s = \tan \varphi_s$

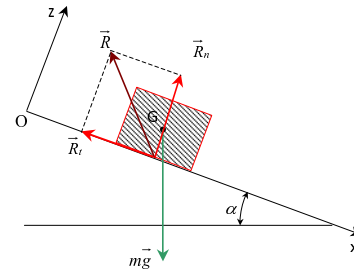


FIGURE IV.19 – Pavé sur un plan incliné

CONCLUSION IMPORTANTE : on constate qu'il y a absence de glissement tant que $\alpha < \varphi_s$ et ce $\forall m$ donc $\alpha \neq fct(m)!!!$

EXEMPLE D'APPLICATION : ARC-BOUTEMENT D'UNE VIS

Lorsqu'une vis est vissée dans son support, la réaction statique de celui-ci sur le filet de la vis assure l'absence de glissement de cette dernière qui reste donc en place ; en outre on constate expérimentalement que la vis reste généralement en place **quelque soit la contrainte qui lui est appliquée, en poussée ou en traction** à condition de bien choisir l'angle d'inclinaison du filet.

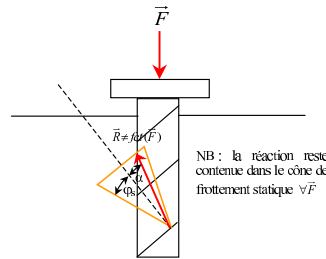


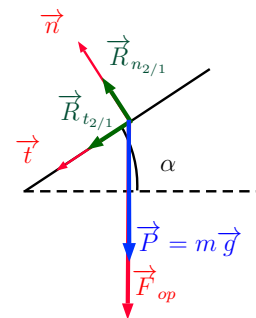
FIGURE IV.20 – Effet d'arc-boutement sur une vis

On propose de justifier plus formellement cette observation ; en appliquant le principe fondamental de la statique à une portion quelconque du filet de la vis, en appliquant également une force \vec{F}_{op} sur la vis dirigée selon \vec{g} :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F}_{op} + \vec{R}_{n2/1} + \vec{R}_{t2/1} = \vec{0}$$

En projetant cette relation selon \vec{n} et \vec{t} , il vient :

$$\blacktriangleright \cdot \vec{n} : -(mg + F_{op}) \cos \alpha + R_{n2/1} = 0 \Rightarrow R_{n2/1} = (mg + F_{op}) \cos \alpha$$



► $\cdot \vec{t}$: $(mg + F_{op}) \sin \alpha + R_{t_{2/1}} = 0 \implies R_{t_{2/1}} = -(mg + F_{op}) \sin \alpha$

Ainsi : $\frac{\|\vec{R}_{t_{2/1}}\|}{\|\vec{R}_{n_{2/1}}\|} \stackrel{\forall F_{op}}{=} \underbrace{\tan \alpha}_{\text{inchangé!!!}} (\leq \mu_s \text{ pour assurer l'immobilité}) \Rightarrow \text{la vis est arc-boutée}$

b - Seconde possibilité : le glissement avec frottement

On envisage maintenant de déposer le pavé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle supérieur à l'angle limite de frottement statique $\alpha > \varphi_s \implies \vec{R}$ sort du cône de frottement statique et on est en condition de glissement :

$$|\vec{R}_t| = \mu_d \cdot |\vec{R}_n|$$

Le TRC donne :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = R_n - mg \cos \alpha = 0 \implies R_n = mg \cos \alpha \\ m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu_d R_n \implies \ddot{x} = g \sin \alpha (1 - \mu_d \cotan(\alpha)) \end{cases}$$

Soit finalement avec les CI imposées : $x = \frac{1}{2} g \sin \alpha (1 - \mu_d \cotan(\alpha)) \cdot t^2$

c - Troisième possibilité : le basculement

On envisage enfin la situation où le pavé bascule sans glissement, et effectue une rotation sur son arête aval (point I si l'on considère la situation dans le plan de la figure).

QUESTION : Angle minimal assurant le basculement ?

RÉPONSE : Rotation \Rightarrow application du théorème du moment cinétique.

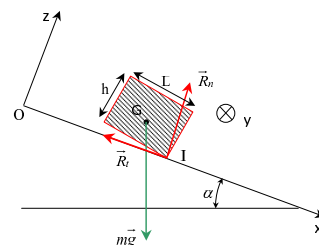


FIGURE IV.21 – Pavé en basculement sur un plan incliné

► Approche formelle :

Lorsque la rotation s'amorce, le pavé est en contact ponctuel en I . Le théorème du moment cinétique appliqué au pavé en I donne :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \overbrace{\vec{M}_I(\vec{R}_N)}^{=\vec{0}} + \overbrace{\vec{M}_I(\vec{R}_T)}^{=\vec{0}} + \vec{M}_I(\vec{P}) = \vec{IG} \wedge (m\vec{g})$$

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = (\vec{IH} + \vec{HG}) \wedge (m\vec{g}) = \left(-\frac{L}{2} \cdot \vec{e}_x + \frac{h}{2} \cdot \vec{e}_z\right) \wedge (mg \sin \alpha \cdot \vec{e}_x - mg \cos \alpha \cdot \vec{e}_z)$$

soit :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \left(-\frac{L}{2}mg \cos \alpha + \frac{h}{2}mg \sin \alpha \right) \cdot \vec{e}_y$$

Soit en projection sur \vec{e}_y : $J_{Iy} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \left(-\frac{L}{2}mg \cos \alpha + \frac{h}{2}mg \sin \alpha \right)$

Si le basculement s'opère, on a : $\frac{d\omega}{dt} > 0$

soit :

$$\tan \alpha > \frac{L}{h} = \tan \alpha_l$$

Ainsi, l'angle limite pour avoir basculement **sans glissement vérifie** :

$$\tan \alpha_l = \frac{L}{h} < \tan \varphi_s = \mu_s$$

► Approche intuitive : en live !

III.2 Autres applications simples

a - La marche à pied

On considère une personne de masse m marchant sur un sol horizontal dans le champ de pesanteur terrestre. On appelle C son centre de masse.

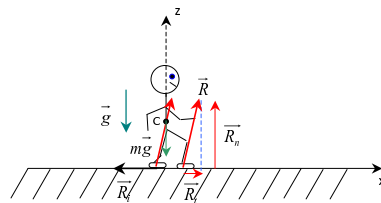


FIGURE IV.22 – Principe dynamique de la marche à pied

QUESTION : quel est le rôle des actions de frottement dans le mécanisme de la marche ?

Appliquons le théorème de résultante cinétique à la personne dans le référentiel du sol galiléen :

$$m\vec{a}(C)_{/\mathcal{R}} = \vec{R} + m\vec{g} \implies \begin{cases} m\ddot{z} = R_n - mg \simeq 0 \quad \forall t \implies R_n = mg \\ m\ddot{x} = R_t? \end{cases}$$

Pour obtenir \vec{R}_t , chaque jambe (les muscles) du personnage applique sur le pied concerné une force (intérieure au personnage global) vers l'arrière \vec{R}_i et la troisième loi de Newton des **actions réciproques** permet de conclure à l'existence d'une réaction du sol sur le pied \vec{R}_t , ou force de frottement, opposée à \vec{R}_i (et vérifiant les lois de Coulomb !) :

$$\vec{R}_t = -\vec{R}_i \quad \text{telle que :} \quad |\vec{R}_t| = |\vec{R}_i| < \mu_s |\vec{R}_n| = \mu_s mg$$

b - Le monte charge

On considère un monte charge de déménagement, dispositif utilisé pour faire entrer des colis directement par la fenêtre d'un appartement en hauteur en évitant escalier et ascenseur. Les colis de masse m sont lâchés sur le tapis roulant du monte charge sans vitesse initiale en $x = 0$ à $t = 0$ par le déménageur. On appelle $\vec{v}_t = v_t \cdot \vec{e}_x$ la vitesse du tapis.

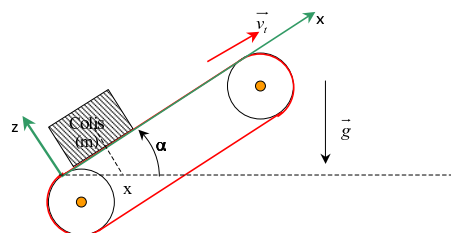


FIGURE IV.23 – Colis sur un monte-charge

QUESTION : quelles sont les différentes phases du mouvement du colis sur le monte-charge ?

► A $t = 0$, $\vec{v}_g = \underbrace{\vec{v}(I_1 \in \text{colis})}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{v}(I_2 \in \text{tapis})}_{\neq \vec{0}} \Rightarrow$ **Phase de glissement.**

• Le TRC appliqué au colis donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + \mu_d R_n \Rightarrow \ddot{x} = g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \\ R_n = mg \cos \alpha \end{cases}$$

donc $\ddot{x} = g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot t \Rightarrow$ $x = \frac{g}{2}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot t^2$

• La vitesse de glissement est :

$$v_g = v_{\text{col.}/\text{tapis}} = v(\text{col})/\mathcal{R} - v(\text{tap})/\mathcal{R} = \dot{x} - v_t = g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \cdot t - v_t$$

Important : on constate que le glissement peut cesser ("accrochage" du colis sur le tapis) à condition que $|v_g| \downarrow$ i.e. $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha > 0$ soit α tel que $\tan \alpha < \mu_d$ donc $\tan \alpha < \mu_s$ puisque $\mu_d < \mu_s$; cela correspond bien à la condition de non glissement du colis sur le tapis \Rightarrow fonctionnement normal du tapis

Le glissement cesse lorsque $v_g = 0$ soit

$$\begin{cases} t_1 = \frac{v_t}{g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \\ x_1 = \frac{1}{2} \frac{v_t^2}{g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \end{cases}$$

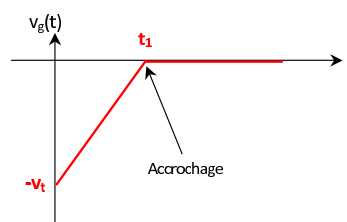


FIGURE IV.24 – Evolution de la vitesse de glissement sur le monte charge

► Pour $t > t_1$ le colis est « accroché » !

IV Aspects énergétiques du frottement solide

IV.1 Puissance des actions appliquées à un solide

a - Définition - forme "générique"

Pour un point matériel M soumis à une force \vec{F} , le travail élémentaire dépensé par la force pour un mouvement \vec{dr} de M est :

$$\delta W_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{dr}(M) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M) dt$$

soit une puissance :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$$

Pour un système de points, la puissance totale des actions est obtenue par sommation :

$$\mathcal{P}(\Sigma)_{\mathcal{R}} = \sum_i^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

La transposition aux cas d'un solide \mathcal{S} soumis au champ volumique local de force $\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{d\tau}$ est immédiate avec :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{\Sigma} d\vec{F}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \iiint_V \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot d\tau$$

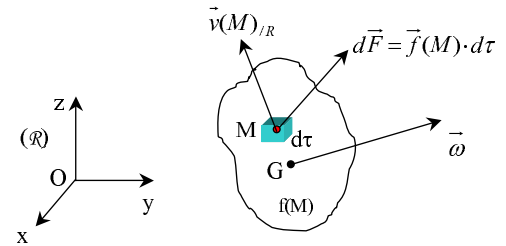


FIGURE IV.25 – Puissance des actions sur un solide indéformable

EXEMPLE DE CHAMP DE FORCE VOLUMIQUE :

champ de pesanteur volumique

$$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau} \vec{g} = \rho(M) \cdot \vec{g}$$

b - Forme "utile" - cas du solide en translation (à retenir)

Considérons un point P du solide; la RCVS permet d'exprimer la vitesse de tout point M du solide en fonction de celle de P avec :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

En injectant cette relation dans l'expression de la puissance totale des actions exercée sur un solide, on tire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_V \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot d\tau \\
 &= \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} \cdot \iiint_V \vec{f}(M) \cdot d\tau + \iiint_V \vec{f}(M) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}) d\tau
 \end{aligned}$$

soit en utilisant la propriété de permutation du produit mixte :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} \cdot \iiint_V \vec{f}(M) \cdot d\tau}_{\vec{R}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \iiint_V \overrightarrow{PM} \wedge d\vec{f}(M)}_{\vec{M}_P}$$

Donc, pour un solide \mathcal{S} soumis aux actions $\{\vec{R}; \vec{M}_P\}_P$ (ensemble dit "réduit" des actions, appelé "torseur") (NB : calculé au point P), la puissance dépensée par ces actions est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}} = \frac{\delta W_{dt}}{dt} = \left(\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{R} + \vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot \vec{M}_P \right)} \quad (\text{IV.17})$$

INTÉRÊT : cette relation est valable $\forall P \in \mathcal{S}$, on choisira donc en général un point P qui facilite le calcul de la puissance.

CADRE DU PROGRAMME (À RETENIR) : solides en translation uniquement, donc :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(P \in \mathcal{S}) = \vec{v}(\forall M \in \mathcal{S})$$

$$\text{donc : } \boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}} = \frac{\delta W_{dt}}{dt} = \vec{v}(\forall M \in \mathcal{S})_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{R}} \quad (\text{IV.18})$$

Remarque IV-1: PUISSANCE DES ACTIONS INTÉRIEURES

Les résultantes des actions intérieures sur un solide (résultante de forces et moment résultant) étant nulles, soit $\vec{R}_{int} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{P_{int}} = \vec{0}$, on a naturellement : $\boxed{\mathcal{P}_{int} = 0}$

c - Puissance des actions de contact entre deux solides

Considérons deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en contact et en translation l'un par rapport à l'autre.

Le travail élémentaire des actions de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 s'écrit :

$$\delta W_{2/1/\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} \right] \times dt$$

et avec la loi des actions réciproques, le travail élémentaire

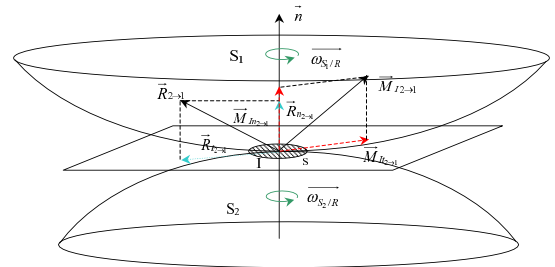


FIGURE IV.26 – Puissance du torseur des actions de contact

des actions de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 est :

$$\delta W_{1/2/\mathcal{R}} = - \left[\vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}(I_2 \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} \right] \times dt$$

soit pour le travail élémentaire total des actions entre les deux solides :

$$\delta W_{/\mathcal{R}} = \delta W_{2/1/\mathcal{R}} + \delta W_{1/2/\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{2/1} \cdot \underbrace{\left[\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_2 \in \mathcal{S}_2)_{/\mathcal{R}} \right]}_{=\vec{v}_{1/2}} \right] \cdot dt$$

en introduisant la vitesses de glissement entre les deux solides $\vec{v}_{1/2}$.

A RETENIR : La puissance totale des actions de contact de deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en glissement est finalement :

$$\mathcal{P}_{cont} = \frac{\delta W_{contact}}{dt} = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}_{1/2} = \vec{R}_{t_{2/1}} \cdot \vec{v}_{1/2} = -\mu_d ||\vec{R}_n|| \cdot ||\vec{v}_g|| < 0$$

($\vec{R}_{t_{2/1}}$ et $\vec{v}_{1/2}$ étant de sens opposé, la puissance des actions de contact est toujours négative.)

Remarque IV-2: GLISSEMENT PARFAIT

Si le glissement est parfait, i.e. $\mu_d = 0$, $\vec{R}_{t_{2/1}} = \vec{0}$ on a :

$$\mathcal{P}_{cont \text{ gliss parf}} = 0$$

IV.2 Quelques théorèmes utiles d'énergétique : TPC et TEC

On considère un système mécanique quelconque ; découpons le en N points discrets (démarche non restrictive et plus simple). L'énergie cinétique d'un tel système dans le référentiel galiléen \mathcal{R} s'écrit :

$$E_{C/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v^2(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

La puissance cinétique ou taux de variation de l'énergie cinétique dans le référentiel \mathcal{R} d'étude est donc :

$$\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i^N \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_i v^2(M_i)_{/\mathcal{R}} \right] = \sum_i^N m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \cdot \left(\frac{d\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

or d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M_i :

$$m_i \left(\frac{d\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}_{ext \rightarrow i} + \vec{F}_{int \rightarrow i} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{int \rightarrow i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

ce qui finalement permet d'écrire :

$$\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\sum_i^N \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}_{=\mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}}} + \underbrace{\sum_i^N \vec{F}_{int \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}}_{=\mathcal{P}_{int}}$$

A RETENIR : Théorème de la puissance cinétique (TPC)

- pour un système quelconque : $\left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{int}$
- pour un solide : $\left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}}$

Remarque IV-3: INDÉPENDANCE DE P_{int}

On montre que \mathcal{P}_{int} est indépendant du référentiel choisi pour l'étude.

En outre, intégrons le théorème de la puissance cinétique entre deux instants t_1 et t_2 :

$$dE_{C/\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{ext/\mathcal{R}} \cdot dt + \mathcal{P}_{int} \cdot dt$$

soit :

A RETENIR : Théorème de l'énergie cinétique (TEC) pour un système quelconque

$$\Delta E_{C/\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2) = W_{ext/\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2) + W_{int}(t_1 \rightarrow t_2)$$

IV.3 Exemple de bilan énergétique : le monte charge de déménagement.

On reprend ici le cas du monte charge.

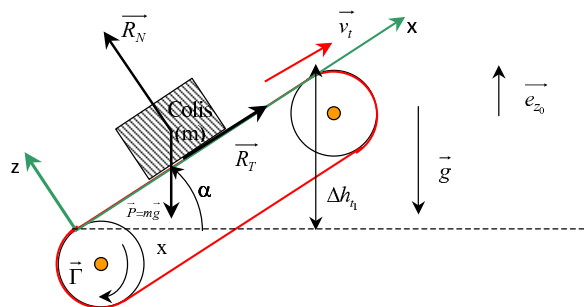


FIGURE IV.27 – Bilan énergétique sur le monte-charge

RAPPELS :
$$\begin{cases} v_g = g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)t - v_t \\ t_1 = \frac{v_t}{g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \\ x_1 = \frac{v_t^2}{2g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \end{cases}$$

QUESTION : travail fourni par le moteur du tapis durant la phase de glissement $W_{t_1}(\text{moteur})$?

Système :

tapis + colis (hors moteur)

judicieux car le moteur n'agit pas directement sur le colis \Rightarrow ne pas choisir le colis seul

Le TEC appliqué au système s'écrit entre t_0 et t_1 :

$$\Delta E_c = \underbrace{\Delta E_c(\text{colis})}_{=\frac{1}{2}mv_t^2} + \underbrace{\Delta E_c(\text{tapis})}_{=0} = W_{ext} + W_{int} \quad (\text{IV.19})$$

Bilan des actions :
$$\begin{cases} \text{intérieures : } \vec{R}_n(\text{tapis/colis}), \vec{R}_t(\text{tapis/colis}), \vec{R}_n(\text{colis/tapis}), \vec{R}_t(\text{colis/tapis}) \\ \text{extérieures : } \vec{P}(\text{colis}) = m\vec{g}, \vec{P}(\text{tapis}) = M\vec{g}, \vec{\Gamma}(\text{moment moteur}) \end{cases}$$

Bilan des travaux :

► TRAVAIL DU POIDS DU COLIS :

$$W_{t_1}(\vec{P}) = \int_0^{\vec{r}_{t_1}} \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg \int_0^{\vec{r}_{t_1}} \underbrace{\vec{e}_{z_0} \cdot d\vec{r}}_{dh} = -mg \int_0^{h_{t_1}} dh = -mg\Delta h_{t_1}$$

soit :

$$W_{t_1}(\vec{P}) = -mg \sin \alpha \cdot x_1 = -mg \sin \alpha \frac{v_t^2}{2g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} = -\frac{1}{2}mv_t^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha}$$

► TRAVAIL TOTAL DES RÉACTIONS NORMALES :

$$W_{t_1}(\vec{R}_n(\text{tot})) = \int_0^{t_1} \vec{R}_n(\text{tapis/colis}) \cdot \vec{v}_g \cdot dt = 0$$

► TRAVAIL TOTAL DES RÉACTIONS TANGENTIELLES :

$$W_{t_1}(\vec{R}_t(\text{tot})) = \int_0^{t_1} \vec{R}_t(\text{tapis/colis}) \cdot \vec{v}_g \cdot dt = \int_0^{t_1} \mu_d mg \cos \alpha [g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)t - v_t] \cdot dt$$

$$\begin{aligned} &= \mu_d m g \cos \alpha \left[g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \frac{t_1^2}{2} - v_t t_1 \right] \\ &= \mu_d m g \cos \alpha \left[\frac{g}{2} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \frac{v_t^2}{g^2 (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)^2} - \frac{v_t^2}{g (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)} \right] \end{aligned}$$

soit :

$$W_{t_1}(\vec{R}_t(tot)) = -\frac{1}{2} m v_t^2 \frac{\mu_d \cos \alpha}{\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha}$$

On peut finalement préciser le bilan énergétique de la phase de glissement en reprenant l'équation IV.19 qui s'écrit finalement :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_t^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_n) + W(\vec{R}_t) + W(moteur)$$

qui donne :

$$W(moteur) = \frac{1}{2} m v_t^2 \left[1 + \frac{\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha}{\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha} \right] > \frac{1}{2} m v_t^2 > 0$$