

## TD N° 5: OPTIQUE ONDULATOIRE 2

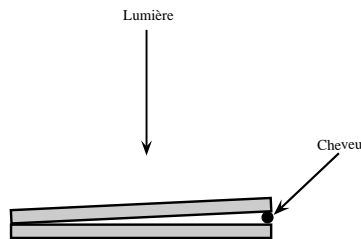
### Interférences à deux ondes par division d'amplitude

#### EXERCICE N°1: Mesure du diamètre d'un cheveu entre deux lames de verre

Un cheveu est "emprisonné" entre deux lames de verre identiques de longueurs  $l = 10 \text{ cm}$ . Ce dernier est disposé à l'extrémité droite du dispositif, tandis que les deux lames sont jointives à l'extrémité gauche. Un large faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 546 \text{ nm}$  éclaire le système sous incidence normale à la lame inférieure.

On admettra qu'une onde lumineuse se réfléchissant sur un milieu plus réfringent que son milieu de provenance subit une variation de phase de  $\pi$  (i.e. une différence de marche supplémentaire de  $\lambda/2$ ).

On négligera le phénomène de réfraction dans ce problème.



On constate la présence de  $N = 73$  franges brillantes

Déterminer le diamètre  $d$  du cheveu. Vérifier à posteriori s'il est pertinent de négliger la réfraction.

#### EXERCICE N°2: Champ d'interférences visible d'un interféromètre de

Michelson réglé en lame d'air

Soit un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur  $e = 100 \mu\text{m}$ . La source lumineuse employée est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 550 \text{ nm}$  et éclaire l'appareil avec un angle d'ouverture  $\theta = 10^\circ$ .

- ❶ Exprimer le nombre  $N$  d'anneaux visibles à l'infini en fonction de  $e$ ,  $\lambda_0$  et  $\theta_{\max}$ .
- ❷ Calculer la valeur numérique de  $N$  ainsi que la valeur des ordres d'interférences correspondant à chaque anneau visible.

#### EXERCICE N°3: Couleur d'une lame mince - spectre cannelé

Un faisceau de lumière blanche issue d'une source ponctuelle au foyer objet d'un collimateur  $L_0$  tombe sous incidence  $i = 30^\circ$  sur une lame de mica à faces rigoureusement parallèles, d'indice  $n = 1,5$  (supposé constant) et d'épaisseur  $e = 0,215 \mu\text{m}$ . Une lentille  $L$  forme l'image de la lame de mica sur un écran  $E$ .

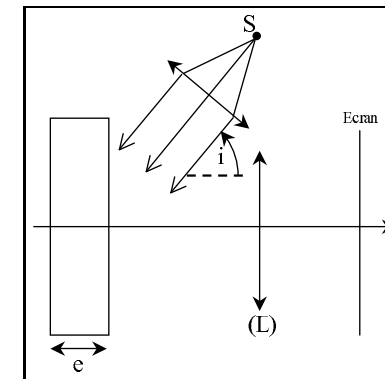


Figure 1: Couleur d'une lame mince

- ❶ On se place dans le cadre d'interférences à seulement deux ondes. Comment justifier une telle hypothèse?  
Calculer la différence de marche entre deux rayons qui interfèrent sur la lame de mica, et montrer que celle-ci s'écrit:

$$\delta_{2-1} = 2ne \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} + \frac{\lambda}{2}$$

Quel est l'aspect de l'image obtenue sur l'écran?

- ② Qu'observerait-on si la lumière réfléchie était recueillie dans un spectroscopie? Préciser alors la couleur obtenue sur l'écran.

#### EXERCICE N°4:

#### Changement de couleur des ailes de papillon: structures goniochrome et hydrochrome

Les ailes de nombreux papillons sont irridescentes, c'est à dire que leur couleur change en fonction de l'angle d'éclairage de ces dernières. On appelle cela une structure goniochrome. Par exemple, les ailes du *Papilio Ulysses* passent du bleu-violet au vert suivant qu'il est éclairé en incidences respectivement rasante ou bien normale.



Pour tenter d'expliquer ceci, on modélise les ailes de papillon par une couche de milieu transparent d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$ .

- ① Faire apparaître sur un schéma le trajet d'un rayon lumineux arrivant sous incidence  $\theta$  sur une aile modélisée de papillon. On mettra en évidence la division d'amplitude que provoque cette couche ( $e, n$ ). Montrer que la différence de marche entre deux rayons issus d'une source à l'infini et interférant en  $M$  à l'infini est:

$$\delta = 2ne \cdot \cos \theta_r \quad \theta_r \text{ désignant l'angle de réfraction dans le milieu d'indice } n$$

(on ne tiendra pas compte des éventuelles différences de marche de  $\frac{\lambda}{2}$  liées aux réflexions sur le milieu d'indice  $n$ ).

- ② Expliquer comment les interférences entre ces deux ondes peuvent engendrer une couleur irridescente. Vérifier que ce modèle est compatible avec le changement de couleur observé pour le *papilio Ulysses*.

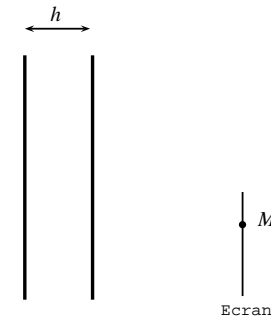
- ③ Un autre papillon, le *Notasacanta dorsalis* du groupe des cassides, possède naturellement des ailes de couleur verte lorsqu'il est éclairé en incidence normale. Lorsque ce dernier est effrayé, ses ailes peuvent devenir rouges par augmentation quasi-instantanée de leur hydratation: une solution physiologique que nous assimilerons à de l'eau pénètre dans la couche modélisant les ailes, augmentant alors l'épaisseur optique des ailes. Cette structure physiologique est dite hydrochrome.

Vérifier que notre modèle permet d'expliquer qualitativement ce mécanisme biologique.

#### EXERCICE N°5:

#### Lames d'air et de verre

On considère une source ponctuelle monochromatique  $S$  de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  qui éclaire un système de deux lames de verre à faces parallèles, parallèles entre elles, distantes de  $h$  et d'épaisseur négligeable devant  $h$ .



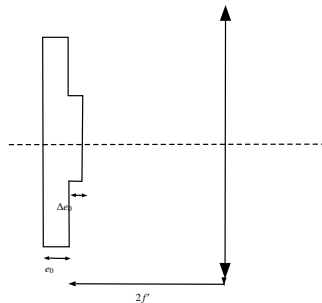
- ① On considère un point  $M$  à distance finie des lames situé du même côté de la première lame que la source  $S$
- Donner la position des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  pour des rayons réfléchis sur la première lame et des rayons transmis par la première lame et réfléchis par la deuxième. Que vaut la distance  $d = S_1 S_2$ ?
  - A quelle condition y a-t-il interférence constructive en  $M$ ? Observe-t-on des structures interférentielles en disposant un écran comme sur le schéma? Si non, pourquoi? Si oui, lesquelles?
- ② On considère maintenant un point  $M$  à l'infini situé du même côté de la première lame que  $S$  dans une direction qui fait l'angle  $\theta$  avec la normale au plan des lames. A quelle condition y a-t-il interférence constructive en  $M$ ? En déduire les directions

émergentes correspondant à des maxima d'intensité. Ce résultat dépend-t-il de la position du point source  $S$  ?

### EXERCICE N°6: Mesure du défaut d'épaisseur d'une lame

Une lame en verre (indice  $n$ ), parfaitement transparente d'épaisseur  $e_0$ , possède une irrégularité  $\Delta e_0 \ll e_0$

- ❶ Cette lame est éclairée en incidence normale par un faisceau de lumière parallèle issue d'une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide. On forme à l'aide d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ , l'image de la lame sur un écran, de telle manière que la distance lame-lentille vaille  $2f'$ . L'épaisseur  $e_0$  est supposée très faible afin de pouvoir assimiler la lame à un objet plan situé dans un plan perpendiculaire à l'axe optique. Où se situe l'écran? Quel est le grandissement du montage?
- ❷ Peut-on mettre en évidence le défaut d'épaisseur sur l'image?
- ❸ On considère un interféromètre de Michelson réglé au contact optique. Il est éclairé par le faisceau parallèle utilisé précédemment. On place la lame contre l'un des miroirs, et on fait l'image des miroirs sur l'écran grâce à une lentille. Qu'observe-t-on sur l'écran?
- ❹ A quelle condition le défaut d'épaisseur n'est-il pas visible? Comment remédier à cette situation?

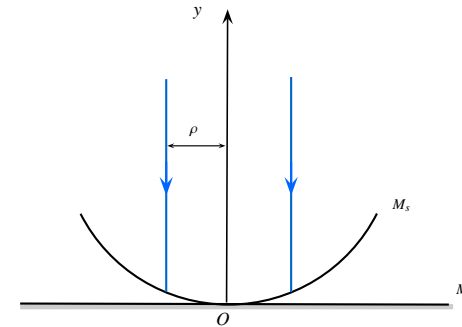


### EXERCICE N°7: Interféromètre de Newton

On considère le dispositif de Newton constitué d'un miroir sphérique  $M_s$  partiellement réfléchissant d'épaisseur négligeable, de rayon  $R$ , de centre  $C$ , reposant sur un miroir

plan  $M_p$ . Le point de contact est  $O$ .

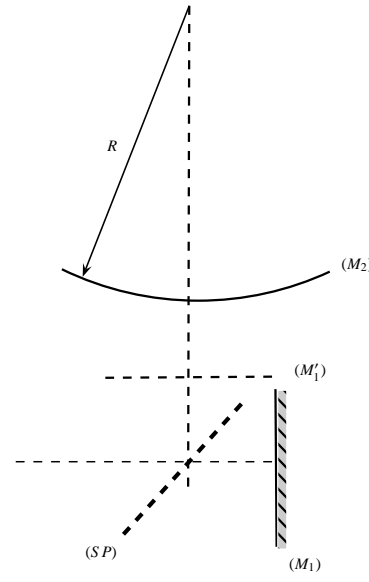
On éclaire le système par un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , parallèle à l'axe de révolution  $[Oy]$ .



- ❶ Expliquer le fonctionnement de cet interféromètre. Où visualise-t-on les franges?
- ❷ Donner l'expression de l'intensité lumineuse obtenue à cet endroit. (On supposera que les deux rayons qui interfèrent ont la même intensité et on s'intéressera à des points situés à une distance  $\rho$  de l'axe telle que  $\rho \ll R$ ). On démontrera que  $\rho^2 \approx 2eR$  avec  $e$  l'épaisseur du coin d'air ainsi formé.
- ❸ Décrire le système d'interférences observé (allure, écartement des franges brillantes...). **Application numérique:**  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  et  $R = 5 \text{ m}$

### EXERCICE N°8: Interféromètre de Michelson à miroir sphérique

Le miroir ( $M_2$ ) d'un interféromètre de Michelson est sphérique de rayon algébrique  $R$  tel que  $|R| \gg e$ , en désignant par  $e$  l'épaisseur de lame en tout point du coin d'air formé par les deux miroirs. On éclaire avec une source étendue monochromatique  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  en incidence quasi-normale et on observe ( $M'1$ ). La lame séparatrice introduit un déphasage de  $\pi$  (du à un traitement spécifique d'une des faces). On observe des anneaux de rayons  $r_n$  pour le  $n^{\text{ième}}$  anneau noir en partant du centre de la figure d'interférences.



- ❶ Montrer que la différence de marche vaut:

$$\delta = 2e_0 + \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

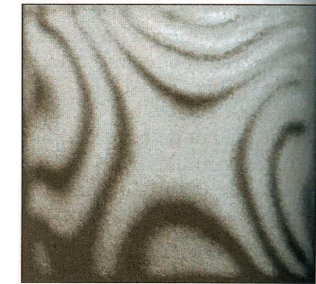
avec  $r$  désignant le rayon de l'anneau visible mesuré par rapport à l'axe optique.

- ❷ Nommer les deux types de miroir ( $M_2$ ) possibles. En diminuant  $e_0$ , les anneaux rentrent. On mesure  $r_1 = 5,7 \text{ mm}$  et  $r_{112} = 6 \text{ cm}$ . En déduire la nature de ( $M_2$ ) et la valeur de  $R$ . Conclure sur la capacité d'un tel dispositif à détecter d'éventuels défauts de planéité d'un miroir.

### EXERCICE N°9:

### Contrôle de qualité de surface par interférométrie

Un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air est éclairé par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  issue d'une source étendue. Ce faisceau est quasi-parallèle et assez large pour couvrir la surface des miroirs sur lesquels il arrive en incidence normale. A la sortie de l'appareil, la lumière est collectée par une lentille mince convergente



de distance focale  $f$ , formant l'image des miroirs sur un écran placé à distance  $D$  de la lentille.

- ❶ Préciser le rôle de la lentille. On veut obtenir sur l'écran situé à distance  $D = 2 \text{ m}$  une image agrandie 10 fois. Quelle valeur de  $f$  doit-on prendre?
- ❷ On suppose ici que les deux miroirs sont parfaitement plans (ceux d'un interféromètre de TP le sont à  $\lambda/20$  près, c'est à dire que la variation de relief sur toute la surface est garantie à moins d'un vingtième de longueur d'onde, soit environ  $25 \text{ nm}$ !) et que l'interféromètre est réglé au contact optique. Définir cette expression et décrire l'éclairement sur l'écran.
- ❸ Même question si l'angle du coin d'air  $\alpha$  est non nul, mais très petit, avec une arête verticale. Sur quel réglage de l'appareil faut-il agir (et comment) pour annuler l'angle  $\alpha$ ?
- ❹ On remplace l'un des deux miroirs par un miroir dont on souhaite contrôler la planéité. On règle son orientation de façon à obtenir le moins de franges possibles sur l'écran. L'image ci-contre montre le réseau de franges obtenu. Commenter: que peut-on dire (qualitativement et quantitativement) à propos du relief de ce miroir? (la longueur d'onde est  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ )
- ❺ Quelle est la hauteur du plus petit relief détectable avec cette technique?

### EXERCICE N°10:

### Interféromètre de Michelson en lumière blanche: structure

#### d'un spectre cannelé

On considère un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source de lumière blanche.

- ❶ La source comporte donc toutes les longueurs d'onde du visible. Estimer sa largeur en fréquence  $\Delta\nu$  en fonction de  $\nu_0$ , fréquence centrale du domaine visible.

- 2 Que peut-on en déduire sur le nombre de franges visibles?
- 3 Décrire la frange centrale  $\delta = 0$ . Comment sont colorés ses bords?
- 4 Pour la frange correspondant à une différence de marche  $\delta = \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ , calculer les longueurs d'onde "éteintes", c'est à dire interférant destructivement. Quelle est la couleur de cette frange? On prend  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .
- 5 Pour la frange correspondant à une différence de marche de  $\delta = 10\lambda_0$ , calculer les longueurs d'onde éteintes c'est à dire interférant destructivement. Quelle est la couleur de cette frange? Pourquoi parle-t-on de blanc d'ordre supérieur?
- 6 On perce un trou dans l'écran à ce niveau et on décompose la lumière passant à travers le trou à l'aide d'un prisme. Expliquer ce qu'on observe.

### EXERCICE N°11: Variante de l'interféromètre de Michelson en lumière blanche (spectre cannelé là-encore)

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source émettant de manière uniforme dans l'intervalle de fréquence  $[\nu_1, \nu_2]$ .

L'intensité lumineuse émise dans la bande élémentaire de fréquence  $d\nu$  appartenant à cet intervalle est:

$$dI_0(\nu) = I_{0,\nu} \cdot d\nu$$

- 1 Montrer que l'intensité totale récupérée en sortie de l'appareil peut s'écrire:

$$I(\delta) = K(1 + f(\delta))$$

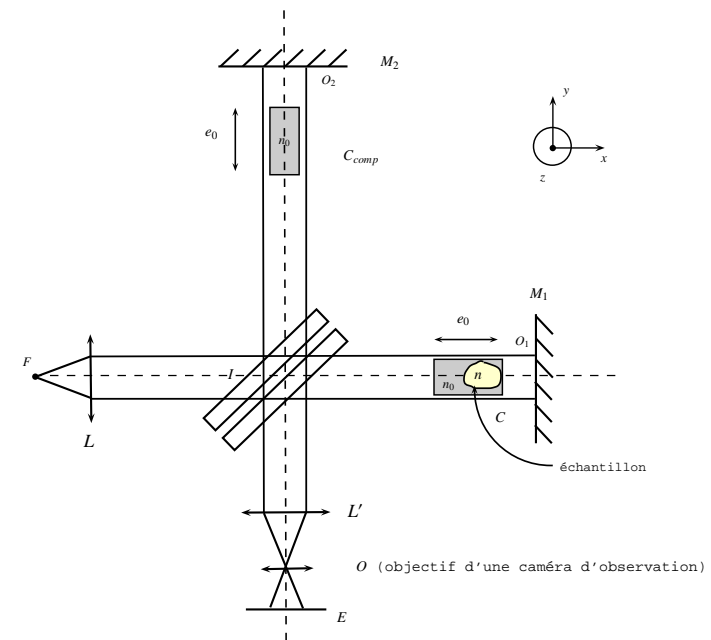
avec  $f(\delta)$  que l'on explicitera ( $\delta$  étant la différence de marche), ainsi que  $K$ .

- 2 La source utilisée est une source de lumière blanche modélisée par une bande spectrale très large d'intensité homogène. En retenant que les radiations extrêmes significatives de ce spectre sont de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 650 \text{ nm}$ , tracer l'intensité lumineuse "réduite"  $I/I_0$  en fonction de la différence de marche  $\delta$  variant entre  $-0.2\mu\text{m}$  et  $+0.2\mu\text{m}$ . En déduire une méthode de réglage de l'interféromètre au contact optique.
- 3 On place un écran à la place du détecteur et on appelle  $F'$  le foyer image de la lentille  $L_2$ . On fixe la différence de marche  $\delta$  à une valeur supérieure à  $2\mu\text{m}$ . Qu'observe-t-on en  $F'$ ?

On place à la sortie de l'interféromètre un spectroscopie dont on superpose la fente d'entrée avec le foyer  $F'$ . Montrer que l'on obtient un spectre comportant des bandes sombres ou cannelures. Cette structure porte le nom de *spectre cannelé*. Evaluer le nombre  $N$  de cannelures dans le domaine visible en fonction de  $\delta$ . Proposer alors une méthode de réglage au contact optique du Michelson.

### EXERCICE N°12: Réfractométrie interférométrique

On souhaite déterminer l'indice de réfraction  $n$  d'un échantillon solide, transparent et immergé dans une cuve (C) remplie d'un milieu liquide d'indice  $n_0$ . Cet ensemble est introduit dans le bras du miroir  $M_1$  d'un interféromètre de Michelson de manière à ce que la cuve soit éclairée entièrement et uniformément:



On introduit dans le bras du miroir  $M_2$  une cuve ( $C_{comp}$ ) identique à la cuve (C), de même épaisseur  $e_0$  contenant le même milieu liquide d'indice  $n_0$ . On considère que les parois de chaque cuve sont parallèles entre elles et d'épaisseurs nulles. Les faisceaux incidents sont normaux aux parois des cuves.

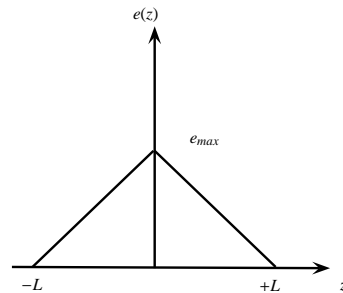
Dans tout ce qui suit, les longueurs  $IO_1$  et  $IO_2$  des deux bras sont supposées égales. L'interféromètre est éclairé par une source monochromatique, légèrement étendue, cen-

trée sur  $F$ , foyer objet de la lentille collimatrice (L). La séparatrice est supposée parfaitement compensée et est inclinée ainsi que la compensatrice à  $45^\circ$  sur la direction  $IO_1$ . L'interféromètre est préalablement réglé en coin d'air par rotation du miroir  $M_1$  autour de l'axe  $O_1z$ . On note  $\epsilon$  l'angle positif que fait  $M_1$  avec l'image  $M'_2$  de  $M_2$  par la séparatrice. La lentille (L), stigmatique, parallèle au miroir  $M_2$ , forme l'image des franges d'interférences dans le plan (E) avec un grandissement égal à -1.

- ❶ Etudier, sans calcul lourd, l'effet de la présence de la cuve ( $C_{comp}$ ) sur le contraste.
- ❷ Déterminer la valeur de la différence de marche en un point du plan (E).

On suppose que l'échantillon est un biprisme de largeur  $2L$ , d'arête parallèle à  $O_1y$ ; l'épaisseur traversée  $e$  ne dépend ici que de la coordonnée  $z$  et vérifie:

$$\frac{e}{e_{max}} + \frac{|z|}{L} = 1 \quad \text{avec } L = 1 \text{ m}$$

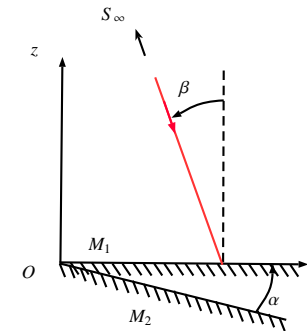


- ❸ Quelle est l'image du biprisme par la séparatrice?
- ❹ Représenter dans ce cas l'allure des franges, et montrer qu'elles ne peuvent redevenir véritablement rectilignes que si  $n$  et  $n_0$  sont égaux.
- ❺ Quelle valeur de la différence entre les indices du liquide et de l'échantillon peut-on déceler si un détecteur d'image placé en (E) est capable de détecter un déplacement de frange de l'ordre de  $0,1 \text{ mm}$ ? On donne:  $e_{max} = 5 \text{ mm}$ ,  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  et  $\lambda_0 = 628 \text{ nm}$ . On suppose  $n - n_0$  de l'ordre de  $10^{-3}$ .

### EXERCICE N°13: Sensibilité de la configuration coin d'air de l'interféromètre de Michelson à la cohérence spatiale de source.

On considère l'interféromètre de Michelson configuré en coin d'air d'angle  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . L'éclairage est assuré par une source monochromatique  $S$  située à l'infini, de longueur

d'onde  $\lambda = 683 \text{ nm}$ . La source est dans un premier temps ponctuelle et l'onde incidente arrive sous un angle  $\beta$  sur le miroir  $M_1$  (cf schéma ci-dessous).



- ❶ Comment fabriquer en pratique au laboratoire une telle source  $S$ ?
- ❷ Déterminer les directions des ondes réfléchies par les lames  $L_1$  et  $L_2$  et en déduire les vecteurs d'ondes  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  correspondants.
- ❸ L'origine des phases et de l'espace étant prise au point  $O$  de l'arête du coin d'air, exprimer l'ordre d'interférences  $p$  en un point  $M$  en fonction de  $\lambda$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $\alpha$ , et  $\beta$ .
- ❹ La source est étendue, elle constitue une source large caractérisée (puisque'elle est à l'infini) par son diamètre angulaire  $2\beta_m$ . Quel est maintenant le domaine de variation de l'angle  $\beta$ ?
- ❺ Evaluer la variation de l'ordre d'interférences en fonction de  $\beta$  en un point  $M$  du miroir  $M_1$  à la distance  $d = 1 \text{ cm}$  de  $O$ , pour  $\beta_m = 10^{-2} \text{ rad}$ , et ensuite pour  $\beta_m = 1 \text{ rad}$ . Commenter.
- ❻ Déterminer le lieu géométrique des points  $M(x, y)$  pour lesquels  $\frac{dp}{d\beta} = 0$  pour  $\beta = 0$ . Commenter ce calcul, ainsi que son résultat.

### EXERCICE N°14: Spectrométrie interférentielle (principe de la spectrométrie par TF)

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. On place à la sortie de l'appareil une lentille mince convergente, suivie d'un photorécepteur de petite dimension placé au point focal image de la lentille. On suppose que ce photorécepteur est linéaire: il délivre un signal électrique  $I$  proportionnel à l'éclairement reçu. Un système d'acquisition permet de numériser le signal  $I$  au cours du temps  $t$ , pendant qu'un moteur translate l'un des deux miroirs à vitesse  $V = \text{cte}$ . On obtient ainsi sur ordinateur une courbe  $I(t)$ , appelée

interférogramme, dont on veut déduire des informations qualitatives et quantitatives sur le spectre de la lumière envoyée dans l'interféromètre. L'expérience est réalisée dans l'air, dont on considère l'indice égal à 1.

- ❶ On part du contact optique à  $t = 0$ . On appelle  $\delta$  la différence de marche entre les ondes interférant au niveau du photorécepteur. Relier  $\delta$  et  $t$ .
- ❷ L'interféromètre est d'abord éclairé par un laser  $He - Ne$ , dont on supposera l'émission parfaitement monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  (cette valeur est supposée connue: ce laser sert à étalonner l'appareil). Montrer que l'interférogramme est de la forme:

$$I(t) = I_0 \left[ 1 + \cos \frac{4\pi Vt}{\lambda_0} \right]$$

où  $I_0$  est une constante qu'on ne cherchera pas à exprimer (dépendant de la puissance du laser et de la sensibilité du photorécepteur). Tracer cette courbe.

On enregistre 100 franges pendant une durée de  $57,5 \text{ s}$ . En déduire la valeur de la vitesse  $V$  du miroir mobile ainsi que son incertitude de mesure. Préciser les conditions sur les paramètres d'acquisition (fréquence d'échantillonnage, nombre de points) permettant d'acquérir cet interférogramme.

- ❸ L'interféromètre est maintenant éclairé par une lampe à vapeur de mercure basse pression, associée à un filtre permettant d'isoler sa raie verte ( $\lambda_1 = 546,1 \text{ nm}$ ). A cause de l'agitation thermique, les différents atomes de mercure contenus dans l'ampoule n'ont pas tous la même vitesse. La lumière émise par l'ensemble de la vapeur atomique n'est donc pas parfaitement monochromatique. Son spectre présente un profil gaussien en raison de l'effet Doppler, de largeur spectrale  $\delta\lambda \simeq 1 \text{ pm}$ .
  - a. Que pouvez-vous dire de la courbe  $I(t)$  obtenue avec cette lampe, par rapport à celle donnée par le Laser?
  - b. Définir puis calculer la valeur de la longueur de cohérence temporelle  $L_c$  associée à cet élargissement spectral. Commenter, sachant que les interféromètres courants utilisés en  $TP$  permettent d'obtenir des différences de marche maximales de quelques  $cm$ .