TD n° 13: Electromagnétisme
Propagation des OEM dans les plasmas - paquets d'onde

Propagation des OEM dans les plasmas

Exercice n°1: Blackout radio lors d'une rentrée atmosphérique

Les capsules spatiales de retour sur Terre utilisées lors des vols habités subissent un **"blackout" des communications** avec la Terre lorsqu'elles traversent l'atmosphère. En outre, elles ne peuvent plus non plus communiquer avec l'ISS (International Space Station), perchée en orbite basse (800km) et dont le transpondeur de pilotage fonctionne sur la fréquence $\nu_t \simeq 145,8\ MHz$; la capsule est alors en vol automatique complet. Depuis la Terre, il serait possible d'établir une communication de mauvaise qualité pour la bande hyperfréquence UHF ($\simeq 1-10\ GHz$)

Sur les illustrations ci-dessous: une "vue d'artiste" de la rentrée atmosphérique d'un vaisseau Apollo, ainsi qu'une photographie de la capsule une fois récupérée.

Figure 1: Entree atmosphérique et récupération d'une capsule Apollo

A partir de ces informations, expliquer le blackout de télécommunication avec l'ISS et estimer la concentration volumique des particules chargées à proximité de la surface de la capsule. Peut-on raisonnablement remédier à ce "blackout" de communication?

Exercice n°2: Estimation d'une distance Terre-pulsar

Un pulsar émet un large spectre de radiation électromagnétique qui est détecté sur Terre par une antenne accordée autour de 80 MHz. La dispersion en vitesse de groupe par le plasma interstellaire fait que chaque pulsation d'onde électromagnétique détectée sur Terre possède un glissement en fréquence d?environ $\dfrac{df}{dt} = -5\ MHz.s^{-1}$

❶ Rappeler la relation de dispersion des OEM dans un plasma dilué. En déduire les vitesses de phase et de groupe. Application numérique: déterminer la fréquence plasma $f_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi}$ dans le cas du plasma ionosphérique pour lequel $n_e = 10^{12}\ m^{-3}$.

❷ En supposant $\omega^2 >> \omega_p^2$ et en négligeant le champ magnétique dans l'espace interstellaire montrer que:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{c}{x}\frac{f^3}{f_p^2} \qquad \text{avec } x \text{ la distance entre la Terre et le pulsar}$$

❸ En supposant que la densité de plasma moyenne de l'espace est $n_{eO} = 2.10^6\ m^{-3}$, calculer numériquement x en *parsec*. On rappelle que 1 $parsec = 3.10^{16}\ m$.

Exercice n°3: Vitesse de l'énergie dans un plasma

On considère un plasma, milieu gazeux totalement ou partiellement ionisé, contenant N électrons libres et N ions par unité de volume. On note m et $-e$ la masse et la charge de l'électron.

On s'intéresse à la propagation d'une onde plane progressive selon $[Oz)$ de pulsation ω. On prendra le champ électrique de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \overrightarrow{u_x} \quad \text{avec } \omega > \omega_p \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

On négligera les chocs et on considérera toutes les vitesses très inférieures à la célérité de la lumière dans le vide ($v < c$).

Le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ est considéré galiléen et rapporté au trièdre direct $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

❶ Déterminer la relation de dispersion du milieu. On fera intervenir ω_p définie plus haut.

❷ Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Exprimer le résultat en fonction de la vitesse de phase (que l'on définira).

❸ Calculer la moyenne de la densité d'énergie totale.

❹ On note $\overrightarrow{v_e}$ la vitesse de propagation de l'énergie. Établir une relation entre la moyenne de la densité d'énergie totale et la valeur moyenne du vecteur de Poynting. En déduire $\overrightarrow{v_e}$. La comparer à la vitesse de groupe.

EXERCICE N°4: **Oscillation d'un plasma - application aux plasmas de sodium et d'aluminium.**

Pour décrire les propriétés électriques d'un métal, on adopte le modèle du gaz d'électrons libres (électrons de conduction) dans une matrice d'ions positifs et fixes. Seule l'interaction du champ électromagnétique avec les électrons est pour l'instant considérée, le reste de la matière étant assimilé au vide. Les électrons sont supposés non relativistes, leurs interactions mutuelles sont négligées, les pertes d'énergie par collision avec le réseau sont modélisées par une force d'amortissement $\overrightarrow{f} = -\dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ (pour un électron de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$). La densité électronique est n_0 à l'équilibre; sa valeur n hors équilibre reste très proche de cette valeur n_0.

❶ Établir l'équation différentielle liant le vecteur densité volumique de courant électrique $\overrightarrow{j}_v$ et le champ électrique $\overrightarrow{E}$.

❷ En déduire l'équation régissant l'évolution de la densité volumique de charge électrique ρ_v au sein du milieu.

❸ Un milieu métallique est initialement perturbé: sa répartition de charges initiale fausse localement sa neutralité électrique globale. Quel ordre de grandeur peut-on prévoir pour le temps de retour à la neutralité électrique du milieu métallique?

❹ Montrer que si on néglige les forces d'amortissement, il peut exister dans le gaz d'électrons un mode propre d'oscillations de charges, de pulsation ω_p à préciser (ω_p est la pulsation plasma).

❺ Calculer ω_p pour le sodium et l'aluminium (en considérant que tous les électrons de valence d'un atome deviennent électrons de conduction) dont les concentrations atomiques sont $C_{Na} = 2,65.10^{28}\ m^{-3}$ et $C_{Al} = 6,02.10^{28}\ m^{-3}$.
Situer ces valeurs dans le spectre électromagnétique.

DONNÉES:
masse de l'électron $m = 9,1.10^{-31}\ kg$ et charge de l'électron $e = 1,6.10^{-19}\ C$

❻ Pour un plasma, dans lequel les collisions peuvent-être négligées, discuter l'influence du possible mouvement des ions, de masse M et de charge αe, sur la valeur de ω_p. Evaluer et commenter l'ordre de grandeur de la modification apportée à la valeur de la pulsation plasma par la prise en compte du mouvement des ions.

EXERCICE N°5: **Réflexion et transmission à l'interface de séparation entre le vide et un plasma sous incidence normale**

Le problème qui suit propose d'étudier en détail les mécanismes de réflexion et transmission qui se produisent à l'interface entre le vide et un plasma dilué; on dégagera en particulier les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance à l'interface.

On considère un plasma occupant le demi-espace $z \geq 0$, le demi-espace $z < 0$ étant vide. Une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, arrive en incidence normale sur ce plasma. On la note:

$$\overrightarrow{E_i} = E_0 \cdot e^{j(\omega t - k_0 z)} \cdot \overrightarrow{u_x} \qquad \text{avec } k_0 = \frac{\omega}{c}$$

On rappelle que dans le plasma, la relation de dispersion est $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique.

❶ Ecrire la forme des champs électrique et magnétique, réfléchis et transmis.

❷ Que pensez-vous de la continuité des champs à l'interface entre le vide et plasma en $z = 0^-$ et $z = 0^+$. Justifier clairement.

❸ En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{k}$ et k_0.

❹ En déduire les coefficients de réflexion R et transmission T définis comme le rapport des normes des vecteurs de Poynting moyens réfléchis ou transmis avec celle du vecteur de Poynting incident à l'interface. On les exprimera en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

❺ Calculer explicitement $\underline{n}$, puis R et T dans le cas $\omega < \omega_p$. Que conclure?

❻ Dans le cas où $\omega > \omega_p$, calculer R et T en fonction de $\underline{n}$, dont on donnera aussi l'expression. Commenter le cas $\omega_p = 0$.

❼ Quelle relation existe-t-il entre R et T? Interprétation physiquement cette expression.

EXERCICE N°6: **Réflexion et transmission à l'interface de séparation entre le vide et un plasma sous incidence quelconque**

On cherche dans cet exercice à étudier le phénomène de réflexion-transmission d'une onde sur une inteface vide-plasma mais cette fois sous incidence quelconque; c'est précisément dans ces conditions angulaires que l'on réalise les communications spatiales et terrestres.

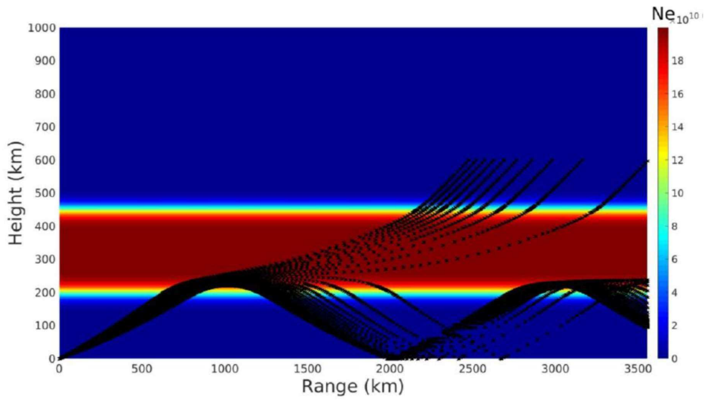


Figure 2: Réflexion et transmission des OEM sur l'ionosphère

On considère un plasma homogène, dilué, situé dans le demi-espace $z > 0$. Le plasma globalement neutre est constitué d'électrons de masse m_e de charge $-e$, et de protons de masse m_p et de charge $+e$. Les particules chargées sont non relativistes. On note n_e le nombre d'électrons par unité de volume. On néglige toute interaction entre particules chargées au sein du plasma.

Un onde plane de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i}$ et de champ électrique $\overrightarrow{E_i} = \overrightarrow{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{r})}$, se propage dans le vide et atteint en $z = 0$ la surface de séparation vide-plasma avec l'angle d'incidence $\theta_i = (\overrightarrow{k_i}, \overrightarrow{e_z})$. La discontinuité du milieu de propagation est à l'origine d'une onde réfléchie et d'une onde transmise de même polarisation que l'onde incidente.

On pose la masse réduite $\mu = \dfrac{m_p m_e}{m_e + m_p}$

et on notera $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\mu\epsilon_0}}$

❶ Montrer que l'on peut associer au plasma la conductivité complexe $\underline{\gamma} = -i\dfrac{n_e e^2}{\omega\mu}$.

❷ Etablir l'équation de propagation du champ électrique au sein du plasma. En déduire la relation de dispersion $k(\omega)$. Donner les expressions des vitesses de phase v_φ et de groupe v_g. A quelle condition la propagation est-elle possible au sein du plasma?

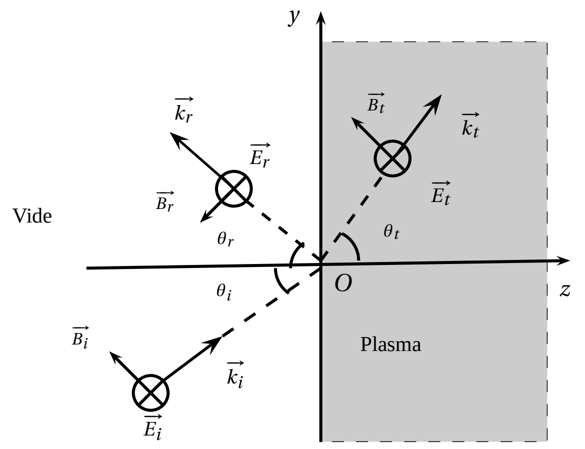
❸ On envisage que l'onde incidente soit polarisée normalement au plan d'incidence, soit:

$$\overrightarrow{E_i} = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{r})} \cdot \overrightarrow{e_x}$$

a· Explicitez les expressions des ondes réfléchie et transmise en fonction de leur caractéristique de propagation et des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, respectivement r_p, et t_p. On explicitera également les expressions des vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_i}$, $\overrightarrow{k_r}$, et $\overrightarrow{k_t}$ en fonction des angles du schéma ci-contre.

b· Déterminer les expressions des champs magnétiques des ondes incidente, réfléchie, et transmise.

c· Enfin, déterminer les coefficients de réflexion r_p et de transmission t_p en amplitude pour le champ électrique.



EXERCICE N°7: **Caractère transverse d'une onde dans un plasma**

Dans un plasma de densité électronique n_0 à l'équilibre, on s'intéresse à la propagation d'une O.P.P.H. électromagnétique dont le champ électrique est noté:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \cdot e^{j(\omega t - \underline{\overrightarrow{k}} \cdot \overrightarrow{r})}$$

❶ Écrire l'équation du mouvement des charges, non relativistes, les collisions au sein du plasma étant négligées.

❷ Déterminer en régime sinusoïdal la conductivité du plasma?

❸ Quelle est la relation liant $\underline{\overrightarrow{k}}$, ω et $\overrightarrow{E}$ imposée par l'équation de propagation de l'onde? Expliciter celle-ci en séparant les composantes longitudinale $\overrightarrow{E}_{/\!/}$ et transverse $\overrightarrow{E}$ du champ électrique, dont l'amplitude est:

$$\overrightarrow{E}_0 = \overrightarrow{E}_{0/\!/} + \overrightarrow{E}_{0_\perp}$$

❹ Que peut-on dire des ondes longitudinales susceptibles d'exister au sein du plasma?

❺ Quelle est la relation de dispersion caractérisant la propagation des ondes transverses?

EXERCICE N°8: **Plasma interstellaire**

La présence d'une étoile émissive comme le soleil au sein des systèmes planétaires entraîne l'existence de nombreuses particules dans l'espace interstellaire. On y trouve notamment des particules chargées, résultat de la collision des neutrons thermonucléaires avec les corps microscopiques en "errance". On supposera ici ce plasma interstellaire constitué d'électrons de masse m et de charge $-e$ de densité particulaire n, et d'ions de charge q et de densité particulaire N. La densité totale de charge est nulle. Le mouvement des ions est négligé et celui des électrons, considérés non relativistes, est décrit par le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$.

Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équa tions de MAXWELL (à l'exclusion de champs statiques) sous la forme d'ondes planes monochromatiques de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, dont le champ électrique complexe est noté:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})}$$

❶ Montrer que le champ magnétique de l'onde est aussi décrit par une onde plane de mêmes pulsation et vecteur d'onde.
Quelle est la structure du trièdre
$$(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k})$$
de l'onde?

❷ Déterminer l'amplitude $\overrightarrow{j}_{v_0}$ du vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}_v$ de l'onde:

$$\overrightarrow{j}_v = \overrightarrow{j}_{v_0} \cdot e^{j(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})}$$

en fonction de celle du champ électrique de l'onde.

❸ En étudiant le mouvement des électrons, exprimer la constante α telle que:

$$\overrightarrow{j}_v = -j\frac{\alpha}{\omega}\overrightarrow{E}$$

❹ En déduire la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ liant la pulsation de l'onde et la norme de son vecteur d'onde.

❺ En posant $\alpha = \epsilon_0 c^2 K^2$, calculer les vitesses de phase et de groupe de l'onde en fonction de k et K. Quelle est la relation liant ces vitesses?

❻ Deux trains d'ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par un objet stellaire situé à distance L. En supposant $\begin{cases} K^2\lambda_1^2 << 1 \\ K^2\lambda_2^2 << 1 \end{cases}$, montrer que ces signaux sont reçus avec un décalage $\delta t = t_2 - t_1$ à déterminer en fonction de L, K, c et des longueurs d'onde λ_1 et λ_2.

EXERCICE N°9: **Prise en compte des frottements dans un plasma: propagation avec atténuation**

On considère une onde électromagnétique se propageant dans un plasma de densité électronique n_e. Les électrons du plasma, de charge $-e$ et de masse m, se déplacent sous l'effet du champ électrique de l'onde de pulsation ω, et subissant en outre des collisions avec les autres particules. L'effet moyen des collisions est équivalent à une force de frottement $\overrightarrow{f} = -\alpha m \overrightarrow{v}$ agissant sur les électrons, α désignant une constante positive. Le déplacement des électrons est à l'origine de courants de densité volumique $\overrightarrow{j}$.

Le modèle retenu permet de dégager une conductivité complexe d'expression (démonstration faite en cours en posant $\alpha = \dfrac{1}{\tau}$):

$$\underline{\gamma} = -i\frac{n_e e^2}{m(\omega - i\alpha)}$$

❶ On considère le champ électrique $\overrightarrow{E} = E_z(z) \cdot e^{i(\omega t - kz)} \cdot \overrightarrow{e_x}$ d'une onde se propageant dans un plasma **dilué**. La fréquence de l'onde et la densité du plasma sont telles que l'indice du milieu peut être assimilé à celui du vide. Etablir l'expression du champ magnétique de l'onde dans le plasma en fome complexe $\underline{\overrightarrow{B}}$, puis réelle $\overrightarrow{B}$.

❷ En déduire la relation liant les valeurs moyennes temporelles $< \overrightarrow{R} >$ et $< E^2 >$ respectivement du vecteur de Poynting et du carré du champ électrique.

❸ Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}. Conclure quant à la valeur moyenne de sa dérivée temporelle $\langle \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \rangle$.

❹ Montrer que le vecteur densité volumique de courant s'écrit en forme réelle:

$$\overrightarrow{j} = E_0 \left(\gamma_r \cos\phi - \gamma_i \sin\phi \right) \cdot \overrightarrow{e_x} \quad \text{avec } \phi = \omega t - kz$$

et γ_r et γ_i que l'on exprimera.

❺ La grandeur $< E^2(z) >$ est appelée intensité lumineuse et est notée $I(z)$. Montrer que l'évolution de l'intensité lumineuse est régie par l'équation:

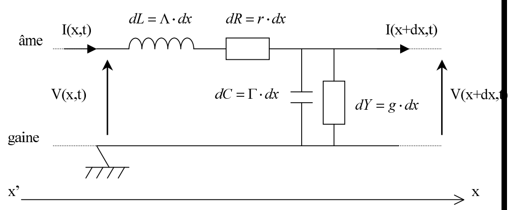
$$\epsilon_0 c \frac{dI(z)}{dz} = -\gamma_r I(z)$$

En déduire l'expression de $I(z)$.

Etude de la dispersion

EXERCICE N°10: Propagation avec dispersion et absorption dans une ligne électrique coaxiale

On considère une ligne électrique bifilaire coaxiale dont un tronçon de longueur dx est schématisé ci-contre. Les pertes sont liées à la résistance des conducteurs (âme et gaine du câble coaxial) et aux fuites dans l'isolant les séparant. On appelle r la résistance **linéique** de la ligne et g son admittance **linéique** de fuite ($[r] = \Omega.m^{-1}$ et $[g] = \Omega^{-1}.m^{-1}$). Les autres notations sont précisées sur le schéma ci-contre.



❶ Etablir les équations de couplage liant la tension $V(x,t)$ et le courant $I(x,t)$.

❷ Montrez que l'équation de propagation des ondes électriques dans la ligne est:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2\frac{K}{c}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\Omega^2}{c^2} V = 0$$

avec les notations suivantes:

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} \\ g\Lambda + r\Gamma = 2\dfrac{K}{c} \\ rg = \dfrac{\Omega^2}{c^2} \\ Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}} \\ R = \sqrt{\dfrac{r}{g}} \end{cases}$$

❸ En injectant dans l'équation de propagation des solutions de type OPPH se propageant selon l'axe x:

$$\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 \cdot e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

où $\underline{k}$ est complexe: $k = k' - jk"$
montrer que la relation de dispersion s'écrit:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2} - 2j\omega\frac{K}{c}$$

❹ Indiquer la signification physique des parties réelles k' et imaginaire $k"$ de $\underline{k}$, et du signe du produit $k'k"$. On ne cherchera pas à calculer k' et $k"$ dans cette question.

Quelle est la vitesse de phase de cette onde?

Définir une longueur caractéristique de l'absorption de l'onde par la ligne électrique.

❺ **Correction de la dispersion**

a· Montrer que:

$$k' = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - \Omega^2}{2c^2} + \sqrt{\left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{2c^2}\right)^2 + \omega^2\frac{K^2}{c^2}}}$$

b· A quelle condition sur k' la ligne ne présenterait-elle pas de dispersion?

c· Montrer alors qu'avec ce modèle de ligne il est possible de corriger totalement la dispersion en ajustant les caractéristiques de la ligne de façon à avoir:

$$Z_c = R$$

EXERCICE N°11: **Propagation d'un paquet d'onde en milieu dispersif**

Une impulsion lumineuse se propage dans un milieu transparent dispersif. On suppose que l'équation de propagation est linéaire. Pour simplifier, on suppose que cette onde est engendrée en $z = 0$ et se propage selon $\overrightarrow{e_z}$.

L'émetteur crée donc un champ d'amplitude $E(z=0,t) = E_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2T^2}} \cdot e^{j\omega t}$, où T est une constante telle que $\omega_0 T >> 1$.

❶ Expliquer la forme d'une telle onde.

❷ Sachant que le spectre du signal en $z = 0$ est naturellement obtenu en calculant sa TF, soit:

$$\tilde{E}(0,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(z=0,t)\cdot e^{j\omega t}\cdot dt$$

donner l'expression de $E(z=0,t)$ sous forme d'une intégrale, en fonction de $\tilde{E}(0,\omega)$.

❸ Sachant que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$, on a les égalités suivantes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x+\beta)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}$$

vérifier que: $\tilde{E}(0,\omega) = E_0 \cdot \dfrac{T}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\dfrac{T^2(\omega-\omega_0)^2}{2}\right)}$

❹ Quelles sont les largeurs temporelle et spectrale de la source? Quelle relation les lie généralement? Est-ce le cas ici?

❺ La relation de dispersion est notée $k(\omega)$ $k(\omega)$. Exprimer $E(z,t)$ sous forme d'une intégrale.

❻ On utilise le développement $k(\omega) = k_0 + k'_0(\omega-\omega_0) + k"_0\dfrac{(\omega-\omega_0)^2}{2}$. Justifier une telle relation de dispersion.
On montre que:

$$E(z,t) = \frac{TE_0}{\sqrt{T^2 - ik"_0 z}} \cdot e^{-\frac{(t-k'_0 z)^2(T^2+ik"_0 z)}{2\left(T^4+(k"_0 z)^2\right)}} \cdot e^{-j(\omega_0 t - k_0 z)}$$

❼ Quelle est la forme temporelle de l'onde en $z \neq 0$?

❽ A quelle vitesse se propage le maximum de l'impulsion?

❾ Montrer que la largeur temporelle de l'onde vaut, pour les grandes valeurs de z, $T' = \dfrac{|k"_0|z}{T}$. Quelle est la raison de l'élargissement?