TD N° 12: ELECTROMAGNÉTISME
Propagation des OEM dans le vide

EXERCICE N°1: Réception d'une OEM par un cadre quasi-fermé

Un émetteur de puissance moyenne $\mathscr{P}_m = 3\ kW$ émet des ondes électromagnétiques monochromatiques polarisées rectilignement, de fréquence $\nu = 1\ MHz$ de manière isotrope dans tout l'espace.
A une distance $r = 50\ km$ de l'émetteur, on place un cadre de réception plan carré de côté $a = 20\ cm$ sur lequel on a enroulé $N = 100$ spires de fil conducteur.
Soit U la f.e.m. qui apparaît aux bornes A et B du cadre en circuit ouvert. Ces deux bornes sont superposées, et très proches l'une de l'autre (quelques millimètres). On cherche à obtenir une valeur efficace U_{eff} de U la plus grande possible: déterminer l'orientation du cadre ainsi que la valeur correspondante de U_{eff}.

On donne: $\left[\begin{array}{l} c = 3.10^8\ m.s^{-1} \\ \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1} \end{array}\right.$

EXERCICE N°2: Propagation d'une onde radio

Une onde monochromatique plane, polarisée rectilignement suivant l'axe $[Ox)$, se propage dans le vide dans la direction des z croissants. L'amplitude du champ électrique est $E_m = 0{,}3\ V.m^{-1}$ et sa fréquence $\nu = 150\ MHz$.

❶ Calculer la longueur d'onde et l'amplitude du champ magnétique.

❷ Trouver les expressions des champs électrique et magnétique sachant que la valeur maximale du champ électrique E est atteinte au point $z = 25\ cm$ à l'instant pris comme origine.

❸ Quel est l'éclairement d'un écran, ie. la puissance reçue par cet écran, de surface $4\ cm^2$, placé perpendiculairement au vecteur de Poynting?

EXERCICE N°3: Caractéristique d'une onde électromagnétique

On cherche à analyser la totalité des caractéristiques d'une onde électromagnétique d'expression (avec E_0, α et ω des constantes positives.)

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \alpha(x+y))} \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right.$$

dans la base $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$.

❶ Cette onde se propage-t-elle? Si oui dans quelle direction? Est-elle stationnaire? S'agit-il d'une onde plane? Préciser le vecteur d'onde $\overrightarrow{K}$ le cas échéant.

❷ Que dire de sa polarisation?

❸ Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ de cette onde.

❹ Cette onde se propage en espace vide de charge. Montrer que l'expression choisie pour l'onde confirme cela.

❺ Cette onde se propage en espace vide de courant. Montrer que cela impose une relation entre α, ω et c la célérité de la lumière dans le vide.

❻ Calculer l'expression du vecteur de Poynting moyen. Commenter le résultat.

EXERCICE N°4: Propagation de l'énergie

On considère la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement selon $[Oz)$. Les deux ondes d'amplitude E_0 pour le champ électrique sont en phase à l'origine O du système de coordonnées. Les vecteurs d'onde de ces deux ondes sont respectivement:

$$\begin{cases} \overrightarrow{k_1} = k\left(\cos\alpha \cdot \overrightarrow{e_x} + \sin\alpha \cdot \overrightarrow{e_y}\right) \\ \overrightarrow{k_2} = k\left(\cos\alpha \cdot \overrightarrow{e_x} - \sin\alpha \cdot \overrightarrow{e_y}\right) \end{cases}$$

❶ Ecrire les champs électriques et magnétiques de chacune des deux ondes avant superposition en considérant leur phase nulle à l'origine en $t = 0$.

❷ Déterminer les champs électrique et magnétique résultant de la superposition des deux ondes en tout point de l'espace. Préciser la structure de l'onde résultante, et donner l'expression de la vitesse de phase v_φ.

❸ Calculer la moyenne temporelle $< u_{em} >_t$ de la densité volumique d'énergie électromagnétique de cette même onde résultante.

❹ Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde résultante $< \overrightarrow{R} >_t$.

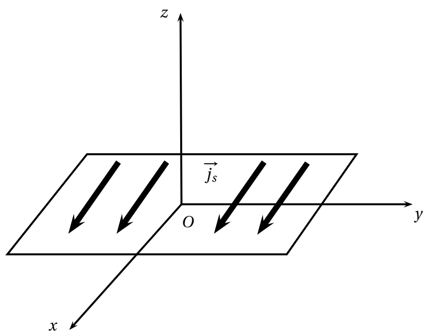
❺ Quelle est la période spatiale λ_p du vecteur de Poynting? En déduire la moyenne temporelle et spatiale de ce vecteur $< \overrightarrow{R} >_{t,y}$ (y étant la seule variable spatiale dont dépend la moyenne temporelle de $\overrightarrow{R}$).

❻ Calculer de même la valeur moyenne temporelle et spatiale de la densité d'énergie électromagnétique $< u_{em} >_{t,y}$.

EXERCICE N°5: **Champ créé par une nappe de courant**

On considère une nappe surfacique de courant uniforme dans le plan $z = 0$, mais dépendant du temps de façon harmonique. La densité surfacique de courant est:

$$\overrightarrow{j_s} = J_{s_0} \cos(\omega t) \cdot \overrightarrow{e_x}$$



❶ Rappeler (pour $z \neq 0$) les équations de Maxwell dans le vide. En déduire l'équation de propagation du champ $\overrightarrow{B}(z,t)$.

❷ En notation complexe, le champ $\overrightarrow{B}(z,t)$ s'écrit $\overrightarrow{B} = f(z)e^{j\omega t} \cdot \overrightarrow{e_y}$.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$ et donner sa solution générale. Indiquer pourquoi on doit choisir des solutions du type:

$$\underline{B}(z,t) = B_0 e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \cdot \overrightarrow{e_y} \qquad \text{pour } z > 0$$

et

$$\underline{B}(z,t) = B_0' e^{j\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)} \cdot \overrightarrow{e_y} \qquad \text{pour } z < 0$$

Préciser la signification physique de chacune de ces solutions. Déterminer les expressions correspondantes du champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}}(z,t)$ pour $z > 0$ et $z < 0$.

❸ En utilisant les conditions de passage en $z = 0$, déterminer les constantes B_0 et B_0'.
Vérifier que le champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}}(z,t)$ est donné par:

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_{s_0} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \cdot \overrightarrow{e_x} \qquad \text{pour } z > 0$$

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_{s_0} e^{j\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)} \cdot \overrightarrow{e_x} \qquad \text{pour } z < 0$$

EXERCICE N°6: **<u>Suite de l'exercice 5:</u> mouvement sinusoïdal d'un plan infini uniformément chargé-génération d'ondes électromagnétiques**

On considère le plan infini $[Oxy)$, uniformément chargé avec la densité surfacique de charge σ. A l'instant que l'on prendra comme origine des temps, on impose à ce plan un mouvement sinusoïdal avec la vitesse $\overrightarrow{v} = v_0 \sin(\omega t) \cdot \overrightarrow{e_x}$.

❶ **a·** Déterminer avant que la plaque ne soit mise en mouvement, l'expression du champ électrique créé par la distribution de charge dans les deux demi-espaces $z < 0$ et $z > 0$.

b· En vous appuyant sur les résultats de l'exercice précédent, déterminer, aux instants $t > 0$, les champs électriques et magnétique en tout point de l'espace.

❷ Déterminer la force électrique que le champ variable, créé par le déplacement du plan, exercice sur une surface S de ce plan. En déduire la puissance moyenne de la force que doit exercer un opérateur pour maintenir la plaque en mouvement.

❸ Déterminer la puissance moyenne rayonnée par une surface S de ce plan. Conclure.

EXERCICE N°7: **Propagation d'une onde transverse dans un câble coaxial**

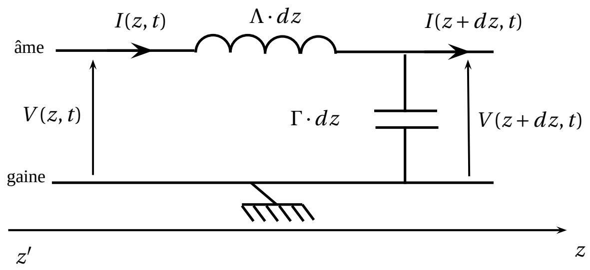


Figure 1: Modèle de câble coaxial

Les expressions des capacités Γ et inductance Λ linéiques d'un câble coaxial dont l'âme et la gaine ont pour rayons respectifs a et b, sont:

$$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon}{ln\frac{b}{a}} \qquad et \qquad \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} ln\frac{b}{a}$$

où $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ est la permittivité diélectrique du manchon isolant en polyéthylène séparant les deux conducteurs.

On donne également les relations utiles suivantes:

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}(a\vec{A}) = a\cdot\overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{grad}(a)\wedge\vec{A} \\ \overrightarrow{rot}(\vec{e_r}) = \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{grad}(r)\right] = \vec{0} \end{cases}$$

❶ Déterminer les équations de couplage et de propagation vérifiées par le courant $I(z,t)$ et la tension $V(z,t)$. Quelle est la célérité v des ondes se propageant dans la ligne électrique ?

❷ En procédant à une analyse harmonique en notation complexe c'est à dire en posant des solutions de type:

$$\underline{I}(z,t) = \underline{I}(z)\cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{V}(z,t) = \underline{V}(z)\cdot e^{j\omega t}$$

montrer que la forme générale des solutions $\underline{I}(z,t)$ et $\underline{V}(z,t)$ de ces équations s'écrit:

$$\underline{I}(z,t) = \underline{I}_0 e^{j(\omega t-kz)} + \underline{I}'_0 e^{j(\omega t+kz)} \quad \text{et} \quad \underline{V}(z,t) = Z_c\left[\underline{I}_0 e^{j(\omega t-kz)} - \underline{I}'_0 e^{j(\omega t+kz)}\right]$$

On donnera les expressions de k en fonction de ω et v, puis Z_c en fonction de μ_0, ϵ, b et a.

❸ On admettra que le champ électrique de l'onde, pour $a < r < b$, s'écrit en notation complexe:

$$\underline{\vec{E}}(r,\theta,z,t) = \underline{E}(r,z)e^{j\omega t}\cdot\vec{e_r}$$

Commenter ce choix.

❹ Montrer que le champ magnétique associé à l'onde est, dans l'espace interarmatures du câble, de la forme:

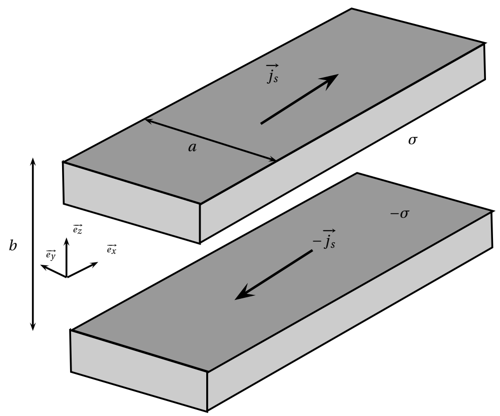
$$\underline{\vec{B}}(r,\theta,z,t) = \underline{B}(r,z)\vec{e_\theta}\cdot e^{j\omega t}$$

en précisant la valeur de $\underline{B}(r,z)$ en fonction de $\underline{E}(r,z)$ ou de ses dérivées.

❺ Relier le champ $\vec{B}$ au courant $I(z,t)$ circulant dans l'âme du câble.

Exercice n°8: **Etude d'une ligne à rubans (Extrait Centrale)**

Une ligne électrique est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur a, distants de b, l'espace entre les rubans étant vide. Les rubans sont parcourus par des courants de densité surfaciques $\vec{j_s} = j_s(x,t)\vec{e_x}$ et $-\vec{j_s}$, et présentent sur leurs faces en regard des densités surfaciques de charge $\sigma(x,t)$ et $-\sigma(x,t)$.On étudie les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniquement dans l'espace situé entre les rubans et on suppose que ces champs en un point ne dépendant que de l'abscisse x du point considéré et de l'instant t (on néglige donc tout effet de bord).



❶ Exprimer en fonction des constantes électromagnétiques du vide ϵ_0 et μ_0, et des densités j_s et σ, les champs $\overrightarrow{E}(x,t)$ et $\overrightarrow{B}(x,t)$ dans l'espace vide entre les rubans. On considère dans toute la suite une onde de courant dans la ligne, d'intensité complexe de la forme $i(x) = I_0 \cdot e^{j\omega t - kx}$ avec k constante positive et I_0 une constante réelle.

❷ A partir des équations de Maxwell, exprimer deux relations liant $\sigma(x,t)$ et $i(x,t)$. En déduire la vitesse de phase v_φ de l'onde et montrer que la structure du champ est celle d'une onde plane dans le vide illimité.

❸ Déterminer l'énergie magnétique δW_m d'une tranche d'épaisseur dx de la ligne. En déduire le coefficient d'inductance propre linéique L de la ligne.

❹ Déterminer l'énergie électrique δW_e de la même tranche d'épaisseur dx. En déduire la capacité linéique C de la ligne.

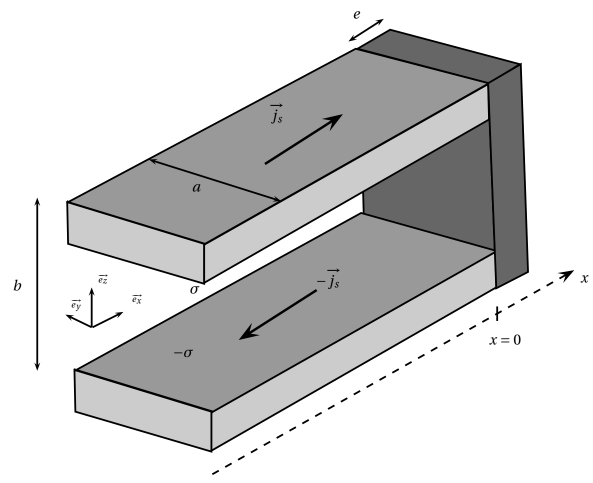
❺ On propose le circuit élémentaire suivant à l'abscisse x comme modélisation d'une portion de longueur dx de la ligne à rubans:

- deux inductances élémentaires de valeur $\dfrac{Ldx}{2}$ chacune
- une capacité élémentaire de valeur Cdx reliant le noeud commun des deux inductances et la ligne de masse.

Dégager l'équation de propagation du signal de courant, et montrer que la vitesse de propagation est bien en accord avec la vitesse de phase dégagée plus haut.

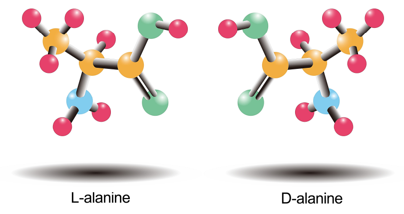
❻ **a·** L'impédance caractéristique ou itérative de la ligne est l'impédance à placer en fin de ligne de façon à ce que le rapport $\dfrac{u(x,t)}{i(x,t)}$ soit le même en tout point de la ligne. En reprenant le modèle électrique, déterminer Z_c en fonction de ϵ_0, μ_0, a, et b.
On désire fermer la ligne sur son impédance caractéristique Z_c en introduisant entre les rubans, à l'abscisse $x = 0$, une plaque conductrice de résistivité ρ, d'épaisseur e, de largeur a, et de longueur b. On supposera dans cette question que l'épaisseur e est suffisamment faible pour que l'on puisse admettre que le courant traversant la plaque soit réparti de manière uniforme.

b· Déterminer Z_c en fonction de ρ, e, a, et b. Montrer que la résistance R_c d'un morceau carré de la plaque de côté quelconque s'exprime en fonction des seules constantes ϵ_0 et μ_0 en choisissant convenablement a et b. Calculer ce rapport et commenter.



EXERCICE N°9: **Onde polarisée rectilignement dans un milieu chiral**

On appelle molécule chirale une molécule non superposable à son symétrique par rapport à un plan. Le couple formée par ses deux molécules objet et image par rapport au plan de symétrie constitue alors un ensemble de deux isomères appelés **énantiomères**.



Deux énantiomères ont des propriétés différentes vis à vis des OEM: une des formes chimiques impose à une onde polarisée circulairement gauche de se déplacer à la célérité c_g, alors que l'autre énantiomère impose une célérité c_d à une onde de polarisation circulaire droite.

On considère une OPPH de pulsation ω se propageant selon l'axe $\overrightarrow{e_x}$, polarisée selon $\overrightarrow{e_y}$ et incidente en $x = 0$ sur une cuve de longueur L contenant un milieu chiral.

❶ Dégager l'expression du champ électrique en $x = L$.

❷ En déduire que le plan de polarisation de l'OPPH a tourné d'un angle α que l'on exprimera en fonction de c_g, c_d, ω et L.

Exercice n°10: **Superposition d'ondes planes issues d'un laser**

Un faisceau laser monochromatique ($\lambda = 632{,}8\ nm$), polarisé rectilignement, traverse un dispositif optique permettant de l'étendre spatialement. Ainsi, on dispose d'une onde de section de quelques cm^2 que l'on considèrera comme plane et monochromatique. Ce faisceau laser se propage dans l'air.

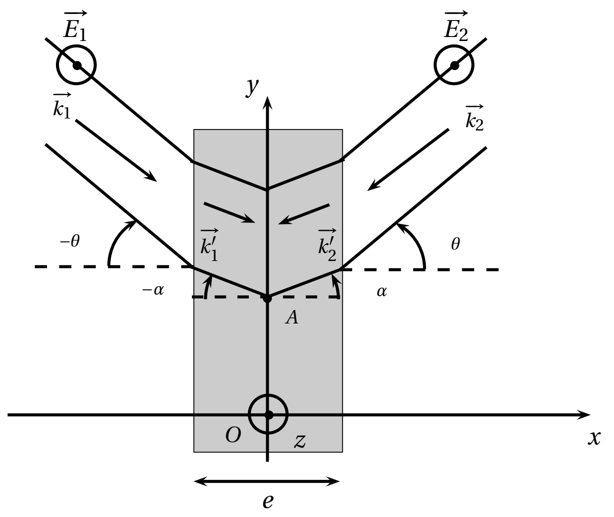
❶ Donner le schéma d'un dispositif permettant d'étendre spatialement le faisceau lumineux.

❷ On divise ensuite ce faisceau en deux faisceaux d'égale intensité.

On désigne par $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ les vecteurs d'onde des deux faisceaux, dont le module dans l'air a pour valeur k_0. Ces vecteurs d'onde sont contenus dans le plan (xOy) et sont caractérisés par les angles $-\theta$ et θ comme indiqué sur le schéma. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ de chacun des faisceaux est polarisé rectilignement suivant $[Oz)$ et a pour amplitude $\overrightarrow{E_0}$.

On fait interférer ces deux faisceaux dans un film de gélatine photosensible d'épaisseur e.

Le film est considéré comme un milieu transparent d'indice $n_g = 1{,}5$. Les faces du film sont parallèles au plan $[Oyz)$, la normale étant l'axe $[Ox)$. Dans le film, les vecteurs d'onde des deux faisceaux, $\overrightarrow{k_1'}$ et $\overrightarrow{k_2'}$ sont caractérisés par les angles $-\alpha$ et α. On amdet que les modules de $\overrightarrow{k_1'}$ et $\overrightarrow{k_2'}$ sont égaux à $n_g k_0$ et que les directions de polarisation sont conservées lors du passage air-gélatine.



En tout point A de l'axe $[Oy$, les vecteurs champ électrique des faisceaux 1 et 2 sont en phase. On néglige les pertes par réflexion sur les faces avant et arrière du film de gélatine. L'amplitude du champ électrique de chacun des deux faisceaux est de ce fait égal à E_0 à l'intérieur du film.

a· Donner dans le système d'axe $Oxyz$ les expressions des composantes des vecteurs $\overrightarrow{k_1'}$ et $\overrightarrow{k_2'}$.

b· Donner en un point M quelconque du film, les expressions des vecteurs champ électrique, champ magnétique, ainsi que la moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour chacune des ondes 1 et 2.

On considère l'onde résultant de l'interférence des faisceaux 1 et 2.

c· Dans le cas où $\theta = 0$, quelle est la nature de l'onde résultant de la superposition des deux faisceaux? Par quel dispositif optique peut-on réaliser la condition $\alpha = \frac{\pi}{2}$? Montrer que l'onde résultante possède des dépendances spatiale et temporelle séparées. On parle alors d'onde stationnaire.
Qu'en est-il dans le cas intermédiaire $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

Exercice n°11: **Description d'un faisceau LASER: modèle du faisceau gaussien**

Du fait de son extension spatiale (transverse) infinie, l'onde plane ne peut prétendre décrire de manière réaliste l'onde émise par un LASER dont la section transverse est au plus d'un mm^2. Dans un modèle plus réaliste, on considère l'onde électromagnétique émise dans le vide par un LASER en $z = 0$. Cette onde se propage selon $\overrightarrow{u_z}$ et peut être mise sous la forme:

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \underline{E}(r,z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \overrightarrow{e_x} \qquad \text{pour la zone } z \geq 0$$

avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

En exploitant les coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'amplitude du champ s'écrit:

$$\underline{E}(r,z) = E_0 \frac{i z_0}{z + i z_0} \cdot e^{-ik \frac{r^2}{2(z + i z_0)}}$$

où E_0 et z_0, appelée distance de Rayleigh, sont des constantes positives.

❶ Montrer que le carré du module de $\overrightarrow{E}$ se met sous la forme:

$$|\underline{E}(r,z)| = A^2(z) \cdot e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}$$

avec $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_0^2}}$.

Déterminer la constante w_0 nommée *waist* en fonction de z_0 et λ.

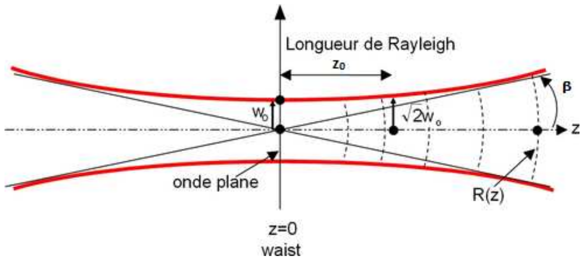
❷ Montrer que $w(z)A(z) = w_0 E_0$

❸ Représenter le graphe de $w(z)$ pour $z \geq 0$.

❹ Représenter le graphe du module $|\underline{\text{E}}(\text{r,z})|$ du champ électrique en fonction de r pour $z = 0$, puis pour une valeur $z > 0$ fixée.

❺ Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$ ainsi qu'au *waist* w_0?

❻ Montrer que lorsque $z >> z_0$, le faisceau LASER possède la forme d'un cône de sommet O et de demi-angle au sommet β, qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0, puis de ω_0 et λ.



❼ Calculer β en degrés pour un LASER $YAG - Nd^{3+}$ possédant les caractéristiques $w_0 = 0,5\ mm$ et $\lambda = 1,1\ \mu m$, puis pour un laser à CO_2 de même *waist* et de longueur d'onde 10× plus importante. Commenter.

❽ Que dire du comportement du faisceau LASER pour $z << z_0$?