

TD N° 9: MAGNÉTOSTATIQUE

**Lois intégrales et locales - révisions de MPSI sur les forces de Laplace**

**LOIS INTÉGRALES DE LA MAGNÉTOSTATIQUE**

**EXERCICE N°1: Champ électromagnétique d'un faisceau de particules**

Un faisceau homocinétique de particules chargées est représenté ci-contre. La géométrie du faisceau est cylindrique de rayon  $R$ , et celui-ci est supposé infini selon l'axe  $[Oz]$ ; les particules portent chacune une charge  $q$  et sont animées par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  supposé galiléen d'une vitesse  $\vec{V}$  constante. La densité volumique de particules est notée  $n$ .

**1 Champ électrique**

- a. Préciser l'expression de la densité volumique de charge  $\rho$  en tout point.
- b. Déterminer le champ électrique en tout point à l'extérieur du faisceau.
- c. Faire de même à l'intérieur du cylindre délimitant le faisceau.

**2 Champ magnétique**

- a. Définir la densité de courant dans le faisceau.
- b. Exprimer le champ magnétique à l'intérieur comme à l'extérieur du faisceau.
- c. Proposer une relation vectorielle liant  $\vec{V}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , qui soit valable en tout point.

On utilisera la relation  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$  avec  $c$  célérité de la lumière<sup>1</sup>

**3 Etude dans le référentiel lié aux particules.**

Reprendre le problème dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel les particules composant le faisceau sont fixes.

<sup>1</sup>Cette relation sera démontrée dans le cours sur la propagation des OEM dans le vide.

**EXERCICE N°2: Tubes de champ magnétique dans un supraconducteur**

Les matériaux supraconducteurs présentent plusieurs propriétés remarquables. Par exemple, lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique extérieur de faible intensité, une "nappe" de courants surfaciques apparaît et annule le champ magnétique dans le volume du supraconducteur. Néanmoins, dans les supraconducteurs de type II, lorsque le champ magnétique appliqué augmente, des tourbillons de courant apparaissent sur le bord de l'échantillon pour migrer ensuite dans le reste du volume du supraconducteur.

L'apparition de ce phénomène appelé "vortex" explique la pénétration progressive du champ dans ce type de matériau. On se propose d'étudier ce phénomène, et pour cela on modélise la répartition de courant par une distribution volumique orthoradiale de type:

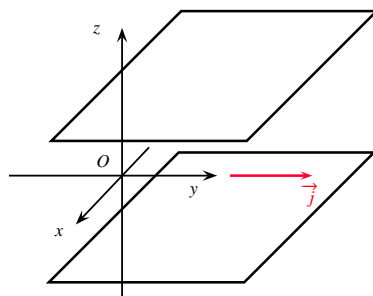
$$\vec{j} = j_\theta \cdot \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j_\theta(r) = j_m \frac{r}{\xi} & \text{pour } r < \xi \\ j_\theta(r) = j_m e^{-\left(\frac{r-\xi}{\lambda}\right)} & \text{pour } r > \xi \end{cases} \quad \text{avec } \xi = 10 \text{ nm et } \lambda = 100 \text{ nm}$$

- 1 Déterminer les caractéristiques du champ magnétique en tout point du matériau en notant  $B_0$  la valeur du champ magnétique sur l'axe du vortex.
- 2 Donner la valeur de  $B_0$  en notant que le champ magnétique s'annule à grande distance de l'axe du vortex. Tracer le graphe de la fonction  $B_z(r)$ .

### EXERCICE N°3: Nappe de courant volumique

On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par la distribution de courant suivante:

$$\begin{cases} \vec{j} = j_0 \cdot \vec{e}_y & \text{pour } -a < z < a \\ \vec{j} = \vec{0} & \text{pour } |z| > a \end{cases}$$



- ❶ Que pensez-vous de la parité de la fonction  $B = f(z)$ ? Justifier complètement votre réponse.
- ❷ Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace. Tracer la fonction  $B = f(z)$  (valeur algébrique du champ magnétique).
- ❸ On passe à la limite surfacique en considérant que l'épaisseur  $e$  de la distribution volumique tend vers 0:  $e = 2a \rightarrow 0$ . Donner l'expression de la densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$  et celle du champ magnétique engendré en tout point de l'espace. Ce résultat est-il en accord avec la relation de passage pour  $\vec{B}$  en présence de courant surfacique donnée ci-dessous (continuité de la composante normale et discontinuité de la composante parallèle):

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

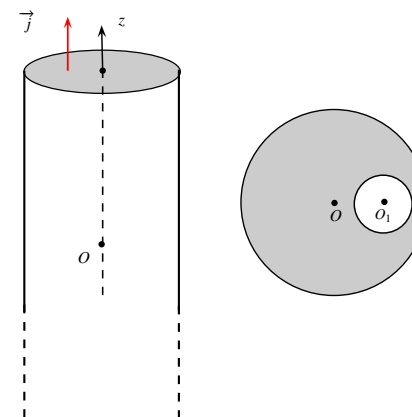
où  $\vec{n}_2$  désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2;  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  désignant le champ magnétique respectivement dans les milieux 1 et 2.

### EXERCICE N°4: Utilisation du principe de superposition pour le champ magnétique

On considère un conducteur cylindrique plein, d'axe  $[Oz]$  et de rayon  $R$  parcouru par un courant de densité volumique uniforme  $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_z$

- ❶ Montrer que le champ  $\vec{B}(M)$  en un point  $M$  intérieur à ce cylindre peut s'exprimer vectoriellement en fonction de  $\mu_0 \vec{j}$  et  $\vec{OM}$
- ❷ Le conducteur précédent présente une cavité cylindrique «décentrée» dont l'axe  $[O_1z_1]$  est parallèle à  $[Oz]$ . Dans la partie grisée circule toujours un courant de densité volumique uniforme  $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_z$ .

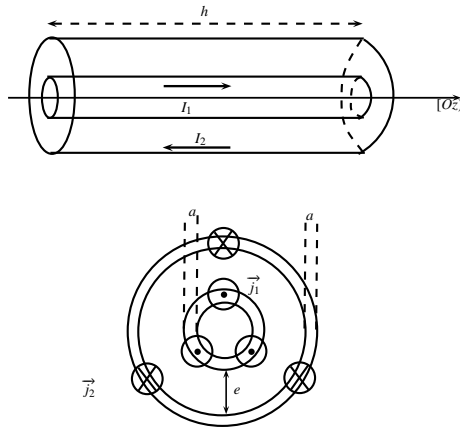
En exploitant le principe de superposition, que l'on admettra valable pour le champ magnétique, déterminer le champ magnétique engendré par cette nouvelle distribution de courant.



### EXERCICE N°5: Inductance linéique d'un câble coaxial

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits infiniment longs de même axe  $(Oz)$ , de sections circulaires. Le premier de rayon  $R_1$  est appelé l'**âme**, et le second de rayon intérieur  $R_2$  est appelé la **gaine**. L'espace

entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique non magnétique, homogène, linéaire et isotrope que l'on assimilera au vide. On se place en coordonnées cylindriques d'axe  $[Oz]$ . On considère que l'âme véhicule une intensité  $I_1 = I$ , tandis que la gaine véhicule l'intensité opposée  $I_2 = -I$ . Les courants sont volumiques et considérés comme uniformément distribués sur une pellicule cylindrique de faible épaisseur  $a$  localisée au voisinage de la surface des conducteurs. On note  $\vec{j}_1 = j \cdot \vec{e}_z$  et  $\vec{j}_2 = -j \cdot \vec{e}_z$  les densités volumiques des courants correspondantes.



- ❶ Donner les expressions de  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  en fonction de  $I$  et de  $a$ .
- ❷ La distribution surfacique est la limite d'une réalité volumique où les courants sont répartis sur une petite épaisseur  $a$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$ , la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme:

$$\vec{j}_s = \lim_{a \rightarrow 0} (a \vec{j})$$

Dans le cadre de cette modélisation, quelle serait l'expression des densités de courant surfaciques  $\vec{j}_{s1}$  et  $\vec{j}_{s2}$  associées.

- ❸ Etudier les symétries et invariances de la distribution de courant et en déduire la direction du champ ainsi que sa dépendance spatiale.
- ❹ En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour dont le choix sera justifié avec précision, donner l'expression du champ magnétostatique  $\vec{B}$  en un

point  $M$  dans l'espace à la distance  $r = OM$  de l'axe  $(Oz)$ . Tracer l'allure de  $\|\vec{B}\|$  en fonction des coordonnées spatiales d'intérêt.

- ❺ On admet que l'énergie magnétique a pour expression:

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot d\tau$$

où  $L$  est l'inductance du câble.

- a. On considère à présent une portion de longueur  $h$  de câble. Sur quel volume  $v$  doit-on alors faire porter la triple intégrale ci-dessus?
- b. En déduire l'expression de l'inductance linéique  $L_l$  du câble en fonction de  $\mu_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . On fera l'application numérique pour:

$$\left[ \begin{array}{l} R_1 = 1 \text{ mm} \\ R_2 = 2,5 \text{ mm} \\ \text{On rappelle que } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \end{array} \right.$$

- c. On donne l'expression de la capacité  $C$  d'un condensateur cylindrique de hauteur  $h$  et de rayons d'armature intérieure et extérieure  $R_1$  et  $R_2$ :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

soit une capacité linéique:

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Evaluer le produit  $C_l \cdot L_l$ .

## LOIS LOCALES DE LA MAGNÉTOSTATIQUE

### EXERCICE N°6:

**Composante radiale approchée d'un champ magnétique de révolution**

On considère un champ magnétique ayant la symétrie de révolution autour d'un axe  $[Oz]$ , par exemple le champ créé par une spire circulaire d'axe  $[Oz]$ . En un point de l'axe, le champ magnétique  $\vec{B}$  se réduit à sa composante suivant  $[Oz]$ , que nous noterons  $B_z(z)$ .

On donne l'expression de la composante du champ magnétique sur l'axe de la spire:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- ❶ En vous appuyant sur la conservation du flux magnétique à travers une surface fermée ( $\Phi_{S_{\text{ferm}}}(\vec{B}) = 0$ ), montrer que la composante radiale du champ magnétique  $B_r(r, z)$  vérifie au premier ordre:

$$B_r(r, z) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}$$

$r$  étant la coordonnée radiale en système cylindrique. Vous choisirez judicieusement pour cela une surface fermée d'intégration du flux (par exemple une "petite surface fermée"!!!)  
Evaluer complètement  $B_r(r, z)$ .

- ❷ Retrouver ce résultat en exploitant la forme locale de conservation du flux magnétique. On donne l'expression de la divergence en système cylindrique:

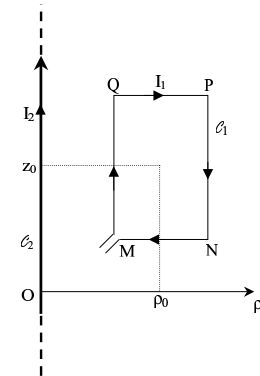
$$\text{div} \vec{B} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

## FORCE DE LAPLACE

### EXERCICE N°7:

#### Force magnétique sur un cadre

On considère un circuit  $C_1 = MNPQ$  rectangulaire indéformable avec  $MN = PQ = a$  et  $NP = QM = b$  parcouru par un courant  $I_1$  stationnaire, et pouvant se déplacer dans son plan. Ce circuit évolue librement sous l'action du champ magnétique  $\vec{B}_2$  créé par un fil rectiligne supposé infini  $C_2$  parcouru par un courant d'intensité  $I_2$  constant.



On négligera le flux propre du circuit  $C_\infty$ , et on désignera par la variable  $\rho$  la distance radiale entre le point courant et l'axe  $[Oz]$  du dispositif.

- ❶ Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_2$  engendré par le fil  $C_2$ .  
❷ Montrer que le circuit  $C_1$  subit une résultante force de Laplace d'expression:

$$\vec{F}_L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left( \frac{1}{\rho_0 + \frac{a}{2}} - \frac{1}{\rho_0 - \frac{a}{2}} \right) \cdot \vec{e}_\rho$$

en désignant par  $\rho_0$  la coordonnée radiale du centre de la spire rectangulaire (cf schéma).

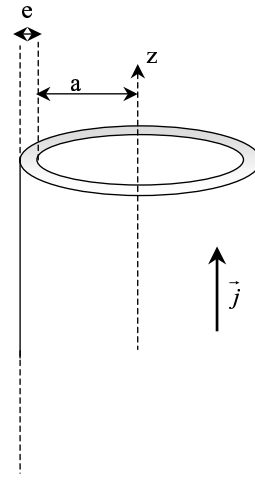
### EXERCICE N°8:

#### Compression magnétostatique

On considère un cylindre métallique creux, de rayon **intérieur**  $a$ , et d'épaisseur  $e$ , parcouru par un courant de densité volumique  $\vec{j}$  supposé uniforme.

- ❶ Etudier le champ magnétique créé par cette distribution de courant en tout point de l'espace.
- ❷ Rappeler l'expression de la force de Laplace par unité de volume  $\vec{f}_v$ .
- ❸ Si l'on suppose que l'épaisseur  $e$  est très faible face au rayon intérieur  $a$ , on peut utiliser le modèle du courant surfacique  $\vec{j}_s$ . Déterminer alors la relation liant  $\vec{j}$  et  $\vec{j}_s$ .
- ❹ En intégrant judicieusement la force volumique, montrer que les efforts de Laplace résultant sur le cylindre engendrent une pression magnétique d'expression (composante radiale uniquement):

$$P_{\text{magn}} = -\frac{\mu_0 j_s^2}{2}$$



frappe. On montre qu'un conducteur chargé engendre un champ électrique plus fort sur les zones où sa surface est la plus courbée (mécanisme nommé «Effet de pointe»). Ainsi, le paratonnerre possède en général une forme allongée et très pointue, dirigée vers le ciel, en mesure alors d'attirer la foudre.

En outre, les premiers paratonnerres, étaient équipés d'une pastille de radium (élément radioactif émettant des rayonnements ionisants) permettant de maintenir une charge de surface permanente sur la tige. (cf figures ci-dessous)



Figure 1: Foudre frappant l'Empire State Building

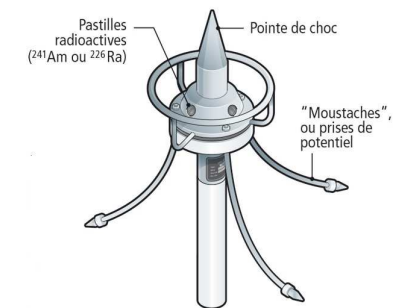


Figure 2: Schéma de principe d'un paratonnerre à pastille de radium

## EXERCICES CONTEXTUALISÉS

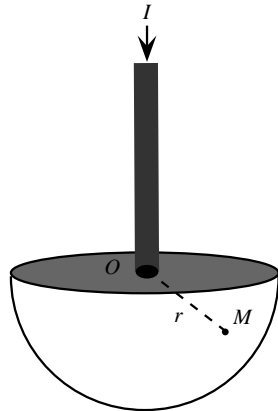
### EXERCICE N°9:

### Paratonnerre

Un paratonnerre est un dispositif conducteur, installé au sommet d'un bâtiment, et capable de le protéger en évacuant dans le sol les charges lorsque la foudre le

On propose de modéliser ce système par une longue tige rectiligne et verticale d'axe  $[Oz]$ , dirigée vers le bas, plantée en  $O$  dans le sol supposé conducteur, de conductivité  $\gamma = 10^{-2} \Omega^{-1}.m^{-1}$ . Lors d'un coup de foudre direct sur le paratonnerre, le courant  $I$  de la foudre s'écoule par cette tige puis dans le sol.

En supposant une isotropie des propriétés électriques du sol, on posera que la densité volumique de courant dans le sol est radiale en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et ne dépende que de la distance  $r = d(OM)$ .



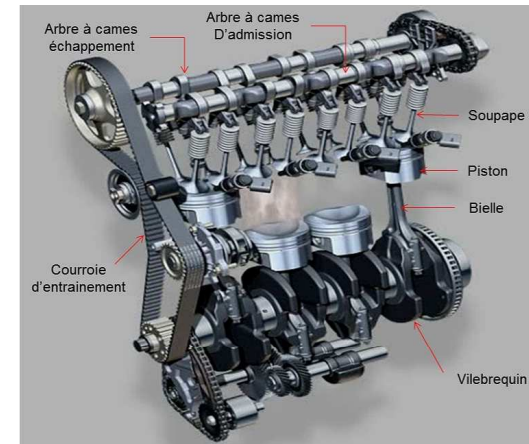
Etablir l'expression du champ magnétique engendré par ces courants considérés comme continus en fonction de l'angle  $\theta = (\vec{e}_z, \vec{OM})$  et de  $r$  et  $I$ .

**NB:** on supposera la composante radiale  $j_r$  de la densité volumique de courant indépendante de  $\theta$  et de  $\varphi$ , et on déterminera le champ magnétique en utilisant le théorème d'Ampère.

### EXERCICE N°10: Principe des moteurs "camless": la soupape magnétique

Les moteurs à explosion 4 temps comportent tous des soupapes nécessaires à l'entrée des gaz frais (soupapes d'admission) et à la sortie des gaz un fois brûlés (soupapes d'échappement). L'ouverture et la fermeture des soupapes est assurée par un arbre rotatif comportant des cames excentriques appelé **arbre à cames**; ce système malgré sa grande fiabilité mécanique présente de multiples inconvénients: difficulté de mise en œuvre des systèmes de distribution variable nécessaire à la souplesse du moteur, grande consommation d'énergie pour assurer la rotation de l'arbre, et enfin l'usure des pièces par contacts mécaniques

répétés.

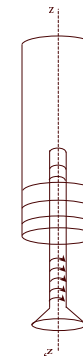


L'objectif de cet exercice est d'étudier le principe d'une soupape dont l'ouverture et la fermeture sont commandées non pas classiquement par une came, mais par interaction magnétique.

La soupape sera modélisée par un solénoïde indéformable  $S_1$  de rayon  $R_1$ , contraint de se déplacer sur son axe  $[zz']$ , et comportant  $n_1$  spires par unité de longueur.

$S_1$  est partiellement plongé dans son guide (guide de soupape) modélisé par un second solénoïde  $S_2$  coaxial avec  $S_1$ , de rayon  $R_2$ , comportant  $n_2$  spires par unité de longueur et **supposé infini**.

$S_2$  est en permanence parcouru par un courant stationnaire  $I_2$ . Lorsque l'on veut attirer la soupape  $S_1$  vers le haut afin qu'elle pénètre plus profondément dans son guide, il suffit de faire parcourir  $S_1$  par un courant stationnaire  $I_1$  dans le même sens que  $I_2$ .



- ❶ En observant la topographie du champ magnétique  $\vec{B}_2$  crée par le siège  $S_2$  à ses bords, expliquer pourquoi la soupape  $S_1$  est aspirée lorsque elle est parcourue par un courant.
- ❷ Quelle composante du champ  $\vec{B}_2$  est responsable de cette force? On notera  $B_{2z}$  la composante axiale du champ et  $B_{2\rho}$  sa composante radiale.
- ❸ Déterminer la force élémentaire  $d\vec{f}_{1z}$  exercée sur une spire de  $S_1$ . En déduire la force élémentaire  $d\vec{F}_{dz}$  s'exerçant sur une tranche de  $S_1$  comportant  $n_1 \cdot dz$  spires.
- ❹ Montrer alors rapidement que la force totale exercée sur  $S_1$  est donnée par:

$$\vec{F}_z = -n_1 I_1 \cdot \phi_{1,lat} \cdot \vec{e}_z$$

où  $\phi_{1,lat}$  est le flux du champ  $\vec{B}_2$  à travers la surface latérale de  $S_1$ .

- ❺ Déterminer  $\phi_{1,lat}$ . On supposera que l'une des extrémités de  $S_1$  est initialement largement plongée dans  $S_2$ , et que son autre extrémité est dans une zone où l'on peut supposer  $\vec{B}_2$  nul.

- ❻ En déduire l'expression finale de la force  $\vec{F}_z$ .