Introduction aux graphes

option informatique

Graphe non orienté

Définition

Un **graphe non orienté** G est la donnée d'un couple (V, E) où V et E sont deux ensembles finis.

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est l'ensemble des **sommets** (vertices en anglais) du graphe.
- $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ est l'ensemble des **arêtes** (edges en anglais) du graphe. Chaque arête e_i est définie par une **paire** de sommets de V appelés **extrémités** de e_i.

Dans la suite de cet exposé, seuls les **graphes simples** sont étudiés.

$$\forall v \in V, \{v, v\} \notin E$$

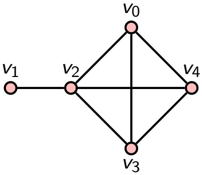
Dans un graphe non orienté, chaque paire de sommets est reliée par au plus une arête. Deux sommets reliés sont dits **adjacents**.

Représentation graphique

Les graphes peuvent être simplement **représentés par un dessin**.

- Chaque **sommet** est représenté par un **cercle**.
- Chaque **arête** est représentée par une **ligne courbe** reliant deux sommets adjacents.

Le graphe $G = (V, E)$ où V et E sont définis ci-dessous peut être représenté par le dessin suivant.

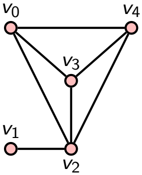


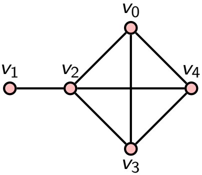
$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$$

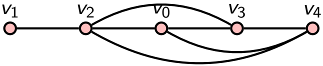
Lorsque deux lignes se croisent, elles n'établissent pas pour autant de lien entre elles.

Représentation graphique

- La représentation graphique n'est pas unique. Une infinité de représentation topologiquement équivalentes sont possibles.
- Les dessins suivants sont trois représentations graphiques équivalentes du graphe $G = (V, E)$ défini dans la diapositive précédente.





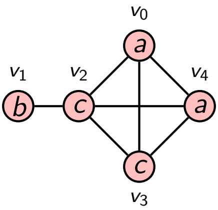


Graphe étiqueté

- Les sommets d'un graphe peuvent porter une information, appelée **étiquette**. On parle de **graphe étiqueté**.
- Formellement, un graphe étiqueté est la donnée des ensembles V, E et d'une fonction associant l'étiquette à chacun des sommets du graphe. Une telle définition autorise que deux sommets différents aient la même étiquette.
- Ajoutons qu'il est également possible d'étiqueter les arêtes.

Le graphe suivant est étiqueté par les lettres a, b, c.

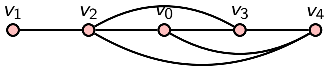
$$v_0 \mapsto a \qquad v_1 \mapsto b \qquad v_2 \mapsto c \qquad v_3 \mapsto c \qquad v_4 \mapsto a$$



Ordre et degrés

L'**ordre d'un graphe** est le nombre de ses sommets.
Le **degré d'un sommet** est le nombre de ses sommets adjacents.
Le **degré d'un graphe** est le degré maximum de ses sommets.

Le graphe représenté ci-dessous est d'**ordre 5**.



- Le sommet v_1 est de degré 1.
- Les sommets v_0, v_3, v_4 sont de degré 3.
- Le sommet v_2 est de degré 4.

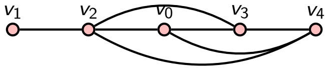
Le **degré du graphe** est 4.

Chemin

Dans un graphe non orienté, un **chemin** de longueur k reliant deux sommets s et e est une suite finie $(u_0 = s, u_1, \dots, u_k = e)$ de sommets tels que pour tout entier $i \in [\![0, k-1]\!]$, la paire $\{u_i, u_{i+1}\}$ soit une arête de G.

- S'il existe un chemin p de s à e, on dit que e est **accessible** à partir de s via p. On peut noter : $s \overset{p}{\rightsquigarrow} e$.
- Un chemin de s à e construit par la suite $(u_0, u_1, \dots, u_k)$ de sommets définit la **chaîne** $\langle u_0 = s, u_1, \dots, u_k = e \rangle$.

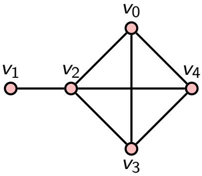
Dans le graphe suivant, la chaîne $\langle v_0, v_3 \rangle$ définit un chemin de longueur 1 reliant v_0 à v_3. La chaîne $\langle v_0, v_2, v_4, v_3 \rangle$ définit une chemin de longueur 3 reliant ces mêmes sommets.



Distance

S'il existe un chemin entre deux sommets u et v d'un graphe G, leur **distance** $\delta_G(u, v)$ est la plus petite longueur des chemins reliant u et v.

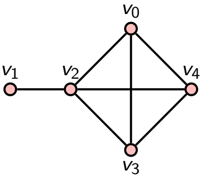
Dans le graphe G suivant, $\delta_G(v_1, v_4) = 2$ et $\delta_G(v_4, v_0) = 1$.



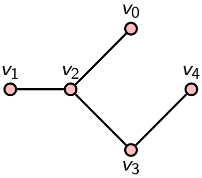
Cycle

Dans un graphe non orienté, une chaîne $\langle u_0, u_1, \ldots, u_k \rangle$ est un **cycle** si $k \geqslant 3$, $u_0 = u_k$ et $u_1, \ldots, u_k$ sont distincts.

Un graphe sans cycle est dit **acyclique**.



Graphe **cyclique**

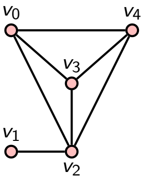


Graphe **acyclique**

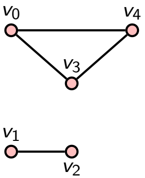
Graphe connexe

Un graphe non orienté est **connexe** si chaque paire de sommets est reliée par une chaîne.

Cela revient à dire que le graphe est d'un seul tenant.



Graphe **connexe**



Graphe **non connexe**

Un graphe non connexe se décompose en **composantes connexes** qui sont des sous-graphes connexes maximaux. Le graphe non connexe ci-dessus comporte 2 composantes connexes.
Ajoutons que dans un graphe connexe, tous les sommets sont à distance finie les uns des autres.

Graphe orienté

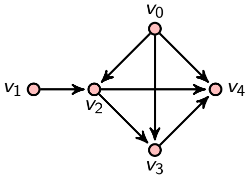
Définition

Un **graphe orienté** G est la donnée d'un couple (V, E) où V et E sont deux ensembles finis.

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est l'ensemble des **sommets** du graphe.
- $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ est l'ensemble des **arcs** du graphe, chaque arc e_i étant défini par un **couple** de sommets.

Noter les arêtes d'un graphe orienté sont appelées **arcs**.

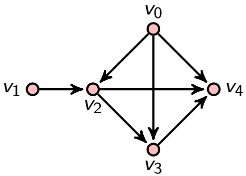
Dans la représentation graphique d'un graphe orienté, les arcs sont des lignes courbes dont les extrémités portent une **flèche**.



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

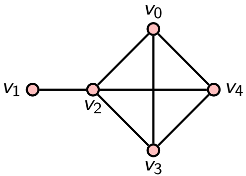
Notations

Il convient de bien distinguer les graphes.



Graphe **orienté**

$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$



Graphe **non orienté**

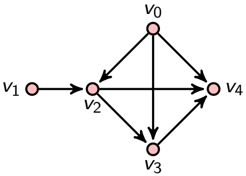
$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$

En pratique, des abus de notations sont fréquents, les paires (accolades) d'un graphe non orienté étant souvent remplacées par des couples (parenthèses). La définition des graphes donnée au début des énoncés permet de connaître leur nature.

Degrés sortant et entrant

Le **degré sortant** d'un sommet est le nombre d'arcs dont il est la première composante.
Le **degré entrant** d'un sommet est le nombre d'arcs dont il est la seconde composante.

Dans le graphe suivant, v_0 est de degré sortant 3, de degré entrant 0 ; v_2 est de degré sortant 2, de degré entrant 2.



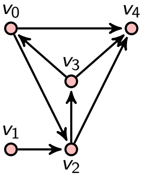
$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

Circuit et distance

Dans un graphe orienté G, la notion de chemin est identique à celle définie pour un graphe non orientée : c'est une chaîne $\langle u_0, u_1, \ldots, u_k \rangle$ de longueur k.

Un chemin $\langle u_0, u_1, \ldots, u_k \rangle$ qui contient au moins un arc et pour lequel $u_0 = u_k$ forme un **circuit**. Ce circuit est **élémentaire** si $u_1, \ldots, u_k$ sont distincts.

Le graphe ci-dessous comporte 1 circuit élémentaire : $\langle v_0, v_2, v_3 \rangle$.

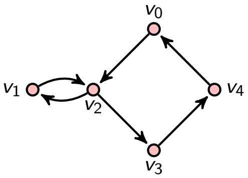


La notion de **distance** s'étend naturellement aux graphes orientés.

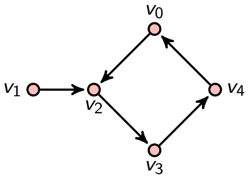
Forte connexité

Un graphe orienté peut être connexe sans que tous les sommets soient accessibles entre eux. Cela tient à l'orientation des arcs qui peuvent rendre certains **sommets non accessibles** depuis un sommet donné.

Un graphe orienté est **fortement connexe** lorsque pour tout couple de sommets (u, v), il existe un chemin reliant u à v **et** un chemin reliant v à u.



Graphe **fortement connexe**



Graphe **non fortement connexe**

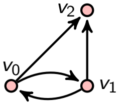
Composantes fortement connexes

Une **composante fortement connexe** (CFC) d'un graphe orienté est un sous-ensemble **maximal** de sommets tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par un chemin.

- Les composantes fortement connexes d'un graphe forment une **partition du graphe**.
- Un **graphe** est **fortement connexe** si et seulement si il a une seule composante fortement connexe.
- Le sous-graphe induit par une composante fortement connexe est fortement connexe.

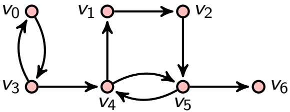
Composantes fortement connexes

Le graphe suivant a **2 composantes fortement connexes**.



CFC : $\{v_0, v_1\}$, $\{v_2\}$

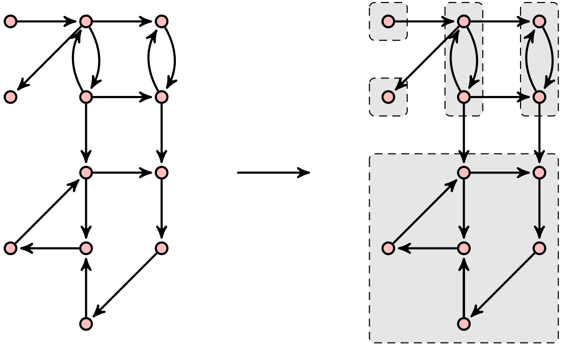
Le graphe suivant a **3 composantes fortement connexes**.



CFC : $\{v_0, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, $\{v_6\}$

Décomposition en composantes fortement connexes

L'illustration suivante met en évidence les composantes fortement connexes d'un graphe.



Un exercice nous permettra de découvrir un algorithme qui permet leur construction.

Graphe pondéré

Pondération

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ (orienté ou non), une **pondération** de G est une application w de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (v, v') \in (V \times V) \setminus E, \quad w(v, v') = \begin{cases} 0 & \text{si } v = v' \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$w(v, v')$ est le **poids de l'arc** reliant v à v'.

w n'est rien d'autre qu'un étiquetage des arêtes.

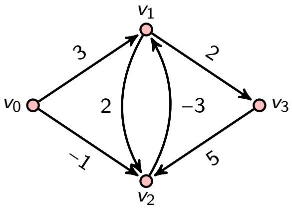
Pondération

- Dans un **graphe fini**, les sommets étant dénombrables, on peut toujours les numéroter de 0 à $n-1$ où n est l'ordre du graphe.
- Cette numérotation permet d'associer une matrice W aux poids d'un graphe.

$$W = \begin{pmatrix} w(v_0, v_0) & w(v_0, v_1) & \dots & w(v_0, v_{n-1}) \\ w(v_1, v_0) & w(v_1, v_1) & \dots & w(v_1, v_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(v_{n-1}, v_0) & w(v_{n-1}, v_1) & \dots & w(v_{n-1}, v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Graphe pondéré

Un **graphe pondéré** est un graphe muni d'une pondération.



Le **poids d'un chemin** est la somme des poids des arêtes qui le composent.

