

## Ondes électromagnétiques et métaux : diffusion et réflexion

### PLAN DU CHAPITRE

<b>I</b>	<b>Pénétration des OEM dans les conducteurs - diffusion du champ</b>	<b>3</b>
I.1	Rappel sur la conductivité en modèle de Drüde - comportement des métaux	3
I.2	L'ARQS dans un conducteur - conséquences avec les OEM	3
	a - Courants : qui retenir ??? - charge	3
	b - Effet Kelvin ou effet de peau (skin effect)	4
I.3	Le modèle du conducteur parfait - conséquences	7
	a - définition	7
	b - Conséquences sur les principales équations locales	8
	c - Structure du champ à l'interface entre vide et cp : conditions aux limites	8
<b>II</b>	<b>Réflexion d'une OPPH incident sur un conducteur parfait</b>	<b>9</b>
II.1	Existence d'une onde réfléchie	9
II.2	Structure du champ réfléchi - inversion de phase à la réflexion métallique	10
	a - Vecteur d'onde réfléchi : lois de Descartes	10
	b - Ecriture complète de l'onde réfléchi (hors programme)	11
	c - Cas particulier de l'incidence normale (cadre du programme)	12
II.3	Champ total - ondes stationnaires (OS)	13
II.4	Charge et courant surfaciques	14
	a - Expressions	14
	b - Application : polariseur d'ondes hyperfréquences (utile pour le TP)	14
<b>III</b>	<b>Aspects énergétiques et dynamiques des ondes stationnaires</b>	<b>15</b>
III.1	Densité volumique d'énergie électromagnétique	16
III.2	Vecteur de Poynting	16

III.3	Pression de radiation . . . . .	16
<b>IV</b>	<b>"Confinement" d'une OEM : cavités unidimensionnelles - modes propres . . . .</b>	<b>19</b>
IV.1	Choix d'une forme de champ - conditions aux limites . . . . .	19
IV.2	EDA dans la cavité . . . . .	20
	a - Proposition de solution élémentaire à variables séparées (méthode à maîtriser!!!) . . . . .	20
	b - Exploitation des conditions aux limites - sélection des modes propres de la cavité . . . . .	21
	c - Solution complète : superposition des modes propres électriques . . . . .	22

---

## I Pénétration des OEM dans les conducteurs - diffusion du champ

### I.1 Rappel sur la conductivité en modèle de Drude - comportement des métaux

Comme pour le plasma, on peut retenir le modèle de Drude pour modéliser la conduction dans les métaux soumis à un champ électrique  $\vec{E}$ , en excluant cette fois totalement la contribution des ions au courant électrique puisqu'ils sont fixes dans ce cas (sommets du réseau cristallin).

On rappelle l'expression de la conductivité complexe d'un conducteur de temps de relaxation  $\tau$  lié au frottement, comportant  $N$  électrons libres par unité de volume, chacun de masse  $m$  :

$$\gamma(\omega) = \frac{Ne^2}{\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)m} \quad \text{avec pour les métaux : } \boxed{\tau_{Cu} \sim 10^{-15} \text{ s}}$$

Ainsi,  $\omega\tau \ll 1$  est valide **jusqu'aux IR** ; en effet en retenant comme cas limite  $\omega\tau \sim 0, 1$ , soit une pulsation  $\omega_{lim} = 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ , la longueur d'onde correspondante est :  $\lambda_{lim} = \frac{2\pi c}{\omega_{lim}} \sim 10 \text{ } \mu\text{m}$

CONSÉQUENCES :

- La conductivité du conducteur est un réel :

$$\boxed{\gamma_{\omega\tau \ll 1} \simeq \frac{Ne^2\tau}{m} \in \mathbb{R}}$$

- La puissance volumique moyenne cédée aux porteurs de charges est non nulle contrairement au cas du plasma :

$$\boxed{\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e [\vec{J} \cdot \vec{E}^*] = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e [\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^*] = \frac{\gamma}{2} |E|^2 \neq 0}$$

CONCLUSION : le champ électromagnétique pénètre dans le métal, et communique sa puissance aux porteurs de charge  $\Rightarrow$  le champ est nécessairement évanescent !

Objectifs :

- Déterminer l'expression complète du champ électrique d'une onde pénétrant dans un métal.
- Déterminer une épaisseur caractéristique de pénétration (existe puisque le champ est évanescent).

### I.2 L'ARQS dans un conducteur - conséquences avec les OEM

#### a - Courants : qui retenir ??? - charge

CAS DES COURANTS :

Comparons les amplitudes des courants de déplacement et de conduction dans un conducteur pour un champ  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  harmonique de période  $T$ . On a :

$$\alpha_{D/C} = \frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\gamma \vec{E}\|} \sim \frac{\epsilon_0 \frac{E}{T}}{\gamma E} = \frac{\epsilon_0}{\gamma T} = \frac{\epsilon_0 f}{\gamma}$$

**Exemple du cuivre :**

$$\gamma \simeq 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1} \quad \text{d'où : } \alpha_{D/C} \simeq 10^{-18} f$$

⇒ Ainsi, les courants de déplacements dans un conducteur sont négligeables jusqu'aux fréquences considérable de l'ordre de  $10^{18} \text{ Hz}$  (rayons X!!!)

CAS DES CHARGES :

A partir de l'équation de conservation de la charge, la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Gauss, il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

$$\text{SOLUTION : } \rho(M, t) = \rho_0(M) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \simeq 10^{-18} \text{ s!!!} \Rightarrow \rho(M, \forall t) \simeq 0$$

**Propriété I-1: CONDUCTEUR ET ARQS**

Aux fréquences "usuelles" (incluant le rayonnement visible tout de même!!!), on retiendra que dans un conducteur : les courants de déplacements sont totalement négligeables  $\vec{j}_D \simeq 0$  et l'électroneutralité est assurée à tout instant en tout point  $\rho \simeq 0$ .

**Conclusion :** dans la pratique un conducteur est toujours en ARQS  $\forall \omega < \omega(RX)$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} MG & \text{métal bon conduct} \\ MA & \text{métal bon conduct} \\ \text{CONSERV.CHARGE} & \text{métal bon conduct} \end{array} \right. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \text{div } \vec{j} = 0 \end{array}$$

**b - Effet Kelvin ou effet de peau (skin effect)**

Dans le cadre de l'ARQS, on a :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} \Rightarrow \text{rot} [\text{rot } \vec{B}] = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{Equation de diffusion du champ magnétique}$$

De même, à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{rot} [\text{rot } \vec{E}] = \text{grad} \left[ \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{\substack{= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \simeq 0 \text{ ARQS}}} \right] - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\text{rot } \vec{B}] \stackrel{\text{ARQS}}{\simeq} -\frac{\partial}{\partial t} [\mu_0 \vec{j}] = -\mu_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}]$$

soit finalement :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{Equation de diffusion du champ électrique}$$

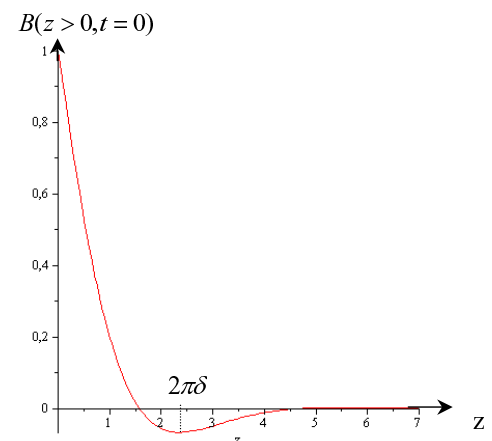
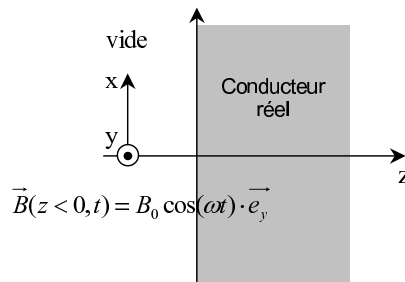
Enfin, et toujours avec la loi d'Ohm locale  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ , la même équation de diffusion régit l'évolution de la densité volumique de courant  $\vec{J}$  :

$$\boxed{\Delta \vec{J} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}} \quad \text{Equation de diffusion du courant volumique}$$

**NB :** on appelle  $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$  le **coefficient de diffusion**<sup>1</sup> du champ/courant avec  $[D] = L^2.T^{-1}$

EXEMPLE DE RÉOLUTION COMPLÈTE :  
à connaître!!!)

Supposons un conducteur semi-infini à partir de  $z > 0$  et invariant par translation selon  $x$  et  $y$ . On place un champ magnétique harmonique dans le domaine environnant  $z \leq 0$  (assimilé au vide) de sorte que :



$$\vec{B}(z \leq 0, t) = B_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_y$$

soit en formalisme complexe :

$$\vec{B}(z \leq 0, t) = B_0 e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y$$

FIGURE XVII.1 – Effet Kelvin (skin effect)

QUESTION : quelle est l'expression des champs magnétique et électrique dans le conducteur  $\vec{B}(z > 0, t)$  et  $\vec{E}(z > 0, t)$  ?

### Champ magnétique :

- **Invariances :** selon  $x$  et  $y \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(z, t)$
- **Symétrie :**  $xOz = \pi^+$  pour les sources du champ extérieur donc  $\pi^+$  pour les sources du champ induit dans le conducteur  $\Rightarrow \vec{B}(z > 0, t) \parallel \vec{e}_y$
- **C.L. :**  $\vec{j} \neq \vec{0}$  donc  $\vec{j}_s = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}(z = 0^-, t) = \vec{B}(z = 0^+, t)$

**BILAN :** On propose une solution compatible avec cette géométrie qui pourrait être en RSF (donc formalisme complexe) :

$$\vec{B}(z > 0, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{B}(z) e^{j\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. nous reviendrons sur cette notion lors de l'étude de la diffusion thermique

L'équation du champ est donc :

$$\frac{d^2 \underline{B}(z)}{dz^2} = j\mu_0\gamma\omega \underline{B}(z)$$

La solution s'écrit :

$$\underline{B}(z) = K_1 \cdot e^{\alpha_1 z} + K_2 \cdot e^{\alpha_2 z}$$

Avec l'équation caractéristique  $\alpha^2 = j\mu_0\gamma\omega = \mu_0\gamma\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$ , on tire la solutions :

$$\alpha = \sqrt{\mu_0\gamma\omega} e^{j\frac{\pi}{4}(\pi)}$$

soit :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\mu_0\gamma\omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\mu_0\gamma\omega} \left[ \frac{1+j}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1+j}{\delta} \\ \alpha_2 = \sqrt{\mu_0\gamma\omega} \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{\mu_0\gamma\omega} \left[ \frac{1+j}{\sqrt{2}} \right] = -\frac{1+j}{\delta} \end{cases}$$

avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$  appelée épaisseur de peau ( $[\delta] = L$ )

Pour assurer que  $B(z)$  ne diverge pas, on doit poser  $K_1 = 0$

ce qui conduit à la solution avec la C.L. en  $z = 0$  :

$$\underline{B}(z) = B_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{z}{\delta}}$$

d'où le champ magnétique en notation réelle :

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cdot \vec{e}_y$$

### Champ électrique :

On dégage facilement l'expression du champ électrique à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère en ARQS :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \gamma \vec{E} \implies \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{\partial B_y}{\partial z} \cdot \vec{e}_x$$

ce qui donne après calcul :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{B_0}{\delta \mu_0 \gamma} e^{-\frac{z}{\delta}} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] \cdot \vec{e}_x$$

soit :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{\sqrt{2} B_0}{\delta \mu_0 \gamma} e^{-\frac{z}{\delta}} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \cdot \vec{e}_x$$

### A RETENIR :

**Propriété I-2:** EFFET DE PEAU-ÉPAISSEUR DE PEAU

Le champ électromagnétique **diffuse dans un conducteur** sur une distance caractéristique  $\delta$  appelée "épaisseur de peau" :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \pi \nu}}$$

Cet effet porte le nom d'effet Kelvin ou **effet de peau**.

**Remarque I-1:** DIFFUSION DU CHAMP

L'effet de peau est un effet d'induction, il se produit à toute fréquence, et on parle souvent abusivement de propagation d'onde dans un conducteur alors qu'il s'agit d'un **phénomène de diffusion du champ**.

QUELQUES ORDRES DE GRANDEUR DE  $\delta$  :

	$\nu \sim 10^6 \text{ Hz}$ HF radio	$\nu \sim 10^9 \text{ Hz}$ hyperfréq. ondes	$\nu \sim 10^{13} \text{ Hz}$ IR
Cuivre ( $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ )	$\delta = 65 \text{ } \mu\text{m}$	$\delta = 2 \text{ } \mu\text{m}$	$\delta = 20 \text{ nm}$
Acier ( $\gamma = 1 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ )	$\delta = 0,15 \text{ mm}$	$\delta = 5 \text{ } \mu\text{m}$	$\delta = 50 \text{ nm}$
Plomb ( $\gamma = 4,8 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ )	$\delta = 0,23 \text{ mm}$	$\delta = 7,2 \text{ } \mu\text{m}$	$\delta = 72 \text{ nm}$

**I.3 Le modèle du conducteur parfait - conséquences****a - définition****Définition I-1:** CONDUCTEUR PARFAIT

Dans le modèle du conducteur parfait, la conductivité est infini :  $\gamma_{cp} \rightarrow \infty$

En conséquence la profondeur de peau est nulle :  $\delta_{cp} \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  le champ électromagnétique ne pénètre pas dans un conducteur parfait : 
$$\begin{cases} \vec{E}_{cp} = \vec{0} \\ \vec{B}_{cp} = \vec{0} \\ \vec{J}_{cp} = \vec{0} \end{cases}$$

**Remarque I-2:** AUTRE DÉFINITION

On peut également approcher de manière énergétique la définition du conducteur parfait :

Supposons un champ non nul dans un conducteur parfait, la puissance volumique fournie aux porteurs de charge du conducteur s'écrit :

$$P_{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2$$

or  $\gamma_{cp} \rightarrow \infty$

ce qui impose pour garder une puissance volumique finie que :

$$\vec{E}_{cp} = \vec{0}$$

**b - Conséquences sur les principales équations locales**

CONSEQUENCES :

$$MG : \operatorname{div} \vec{E}_{cp} = \frac{\rho_{cp}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho_{cp} = 0}$$

$$MF : \operatorname{rot} \vec{E}_{cp} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{cp} = \text{cste}^{\text{rég. perm. exclu}} \vec{0}}$$

$$MA : \operatorname{rot} \vec{B}_{cp} = \mu_0 \vec{J}_{cp} \Rightarrow \boxed{\vec{J}_{cp} = \vec{0}}$$

Ainsi la puissance volumique est nulle :  $\boxed{P_{vol_{cp}} = \vec{J}_{cp} \cdot \vec{E}_{cp} = 0}$

BILAN : à retenir : "rien ne se passe dans le volume du conducteur parfait".

**Remarque I-3:** CONDUCTEUR HORS D'ÉQUILIBRE

Ces résultats sont établis ici dans le cas d'un conducteur hors d'équilibre, et généralisent donc pour le conducteur parfait les résultats établis en électrostatique des conducteurs.

**c - Structure du champ à l'interface entre vide et cp : conditions aux limites**

On considère une interface vide-conducteur parfait et la présence d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans le demi-espace vide :



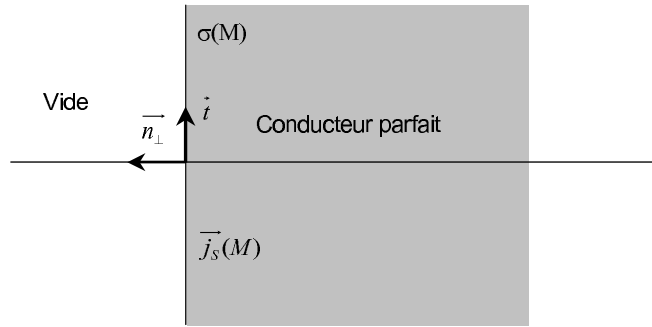


FIGURE XVII.2 – Interface vide conducteur-parfait ; charge et courant surfacique

Les relations de passage à l'interface s'écrivent :

$$\begin{cases} \left( \vec{E}_{vide_{proxi}} - \vec{E}_{cond} \right)_{interface} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}_{\perp} \\ \left( \vec{B}_{vide_{proxi}} - \vec{B}_{cond} \right)_{interface} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{\perp} \end{cases}$$

or pour un conducteur parfait, les champs électrique et magnétique transmis sont nuls ; les relations de passage précédentes deviennent donc :

$$\begin{aligned} \left( \vec{E}_{vide_{proxi}} - \vec{0} \right)_{interface} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}_{\perp} \\ \left( \vec{B}_{vide_{proxi}} - \vec{0} \right)_{interface} &= \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{\perp} \end{aligned}$$

soit :

A RETENIR :

$$\begin{cases} \vec{E}_{proxi} // = \vec{0} & \text{et} & \vec{E}_{proxi} \perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\perp} \\ \vec{B}_{proxi} \perp = \vec{0} & \text{et} & \vec{B}_{proxi} // = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{\perp} \end{cases}$$

CONSÉQUENCE : si un champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  est incident sur l'interface, alors présence possible de courants et charges surfaciques  $\sigma$  et  $\vec{J}_s$  en fonction de la polarisation du champ incident.

## II Réflexion d'une OPPH incident sur un conducteur parfait

### II.1 Existence d'une onde réfléchie

HYPOTHÈSE : on considère une OPPH polarisée selon  $\vec{e}_x$  et arrivant sous incidence quelconque sur la surface  $z = 0$  d'un conducteur parfait :

$$\vec{E}_i(z < 0, t) = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_x$$

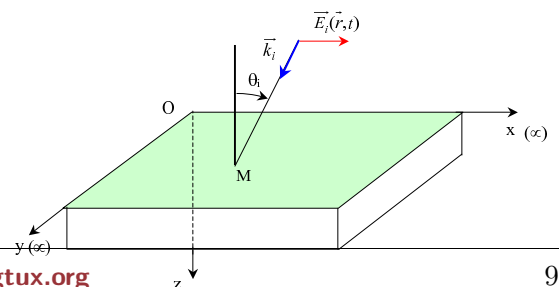


FIGURE XVII.3 – Existence onde réfléchie

or d'après les résultats dégagés plus haut, la composante parallèle du champ doit s'annuler  $\forall M \in \text{surface cond.}$  (i.e. en  $z = 0$ ) :

$$CL \Leftrightarrow \vec{E}_{//}(M \in \text{surface cond.}, t) = \vec{E}(M \in \text{surface cond.}, t) = \vec{0}$$

or

$$\underline{E}_{//}(M \in \text{surface cond.}, t) = \underline{E}_i(M \in \text{surface cond.}, t) = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \underbrace{\vec{k}_i \cdot \vec{OM}}_{=cste})} \vec{e}_x \neq \vec{0} \quad \forall t \Rightarrow \text{Problème!!!}$$

CONCLUSION : au moins une des CL sur le conducteur parfait ne peut pas être vérifiée si l'on ne considère que l'onde incidente.

$\Rightarrow$  IDÉE : il existe une onde réfléchie à l'interface pour satisfaire la C.L. !

### Propriété II-1: ONDE RÉFLÉCHIE

Lors de l'incidence d'une OPPH sur un conducteur parfait, les conditions aux limites imposent l'existence d'une onde réfléchie.

## II.2 Structure du champ réfléchi - inversion de phase à la réflexion métallique

On cherchera dans cette partie à déterminer complètement les champs réfléchis  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$ .

### a - Vecteur d'onde réfléchi : lois de Descartes

#### HYPOTHÈSES :

- Toujours un conducteur dans le demi-espace en  $z \geq 0$
- OPPH arrivant sous incidence quelconque et polarisée selon  $\vec{e}_x$  :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} \cdot \vec{e}_x$$

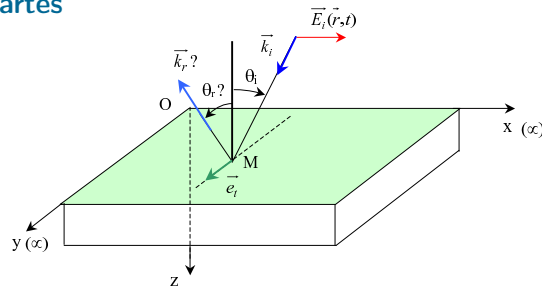


FIGURE XVII.4 – Lois de Descartes de la réflexion

PRINCIPE DE CURIE : l'onde incidente plane et l'interface *vide-cp* sont tous deux invariants par translation suivant  $x$  et  $y$ , et sont à l'origine de l'onde réfléchie (qui est donc créée en tout point de l'interface). Par principe de Curie, celle-ci doit au moins posséder les mêmes symétries et invariances :

L'onde réfléchie est une onde plane :  $\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0r} \cdot e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})}$

Pour tout point  $M$  de la surface du conducteur, la condition d'annulation de la composante parallèle du champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_{//}(M \in \text{surf}) = \vec{E}_i(M \in \text{surf}, t) + \vec{E}_r(M \in \text{surf}, t) = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} \cdot \vec{e}_x + \underline{\vec{E}}_{0r} \cdot e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{//}(M \in \text{surf}) = \left[ E_0 \cdot \vec{e}_x + \vec{E}_{0r//} \cdot e^{j[(\omega_r - \omega)t - (\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM}]} \right] \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} = \vec{0}$$

Cette relation, qui doit être vérifiée à tout  $t$  et en tout point  $M$  de l'interface air-cp, impose :

$$\left[ \begin{array}{l} (\omega_r - \omega) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega} \\ (\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM} = \text{cste} \stackrel{\text{pour } O}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k}_r - \vec{k}_i = K \cdot \vec{e}_z} \end{array} \right. \text{ forme vectorielle de la loi de Descartes}$$

#### CONSÉQUENCES : LES LOIS DE DESCARTES DE LA RÉFLEXION

- $\vec{k}_r$  est dans le plan d'incidence défini par  $(\vec{k}_i, \vec{e}_z)$
- en projetant la forme vectorielle précédente sur le vecteur unitaire tangent à l'interface  $\vec{e}_t$ , il vient :

$$(\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{e}_t = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \sin \theta_r = \frac{\omega}{c} \sin \theta_i \Leftrightarrow \boxed{\theta_r = \theta_i}$$

$$\text{NB : } E_0 \cdot \vec{e}_x + \vec{E}_{0r//} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{0r//} = -E_0 \cdot \vec{e}_x}$$

#### b - Ecriture complète de l'onde réfléchie (hors programme)

L'équation de Maxwell-Gauss écrite dans le domaine  $z < 0$  (vide) donne :

$$\text{div}(\vec{E}) = \text{div}(\vec{E}_i) + \text{div}(\vec{E}_r) = 0 \Rightarrow \underbrace{-j\vec{k}_i \cdot \vec{E}_i}_{= 0 \text{ car } \vec{E}_i \text{ transverse}} - j\vec{k}_r \cdot \vec{E}_r = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_r \text{ est transverse}}$$

En projetant la relation de passage sur les 3 axes, il vient :

$$\left( \vec{E}_{\text{vide}} \right)_{\text{interface}} \stackrel{M \in \text{interf.}}{\Leftrightarrow} \left( E_0 \cdot \vec{e}_x + \vec{E}_{0r} \right) \cdot e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} (1) E_{0rx} = -E_0 \\ (2) E_{0ry} = 0 \\ (3) E_{0rz} \cdot e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

La relation (2)  $E_{0ry} = 0$  ajoutée au caractère transverse de l'onde impose  $E_{0rz} = 0$  soit  $\boxed{\sigma = 0}$ .

L'onde réfléchie s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{E}_r(\vec{r}, t) = -E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_x = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \pi)} \cdot \vec{e}_x}$$

**Conclusion :** lors de la réflexion d'un champ électrique de polarisation tangente à la surface, le champ électrique réfléchi possède la même polarisation et subit une inversion de phase (déphasage de  $\pi$ )

### c - Cas particulier de l'incidence normale (cadre du programme)

HYPOTHÈSES :

- Incidence normale :  $\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{e}_z$
- Le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{e}_x$$

et le champ magnétique a pour expression :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{e}_y$$

ONDE RÉFLÉCHIE :

On a, compte tenu de la loi de Descartes,  $\theta_r = \theta_i = 0$  donc :  $\vec{k}_r = -\vec{k}_i = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_z$

- Cas de  $\vec{E}$  :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_x = E_0 \cdot e^{j(\omega t + kz + \pi)} \cdot \vec{e}_x$$

- Cas de  $\vec{B}$  : par la relation de structure, soit

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-\frac{\omega}{c} \vec{e}_z \wedge (-E_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_x)}{\omega}$$

$$\vec{B}_r(z, t) = \frac{E_0}{c} \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_y$$

On peut également définir les coefficients de réflexion en amplitude pour les deux champs avec :

$$\begin{cases} r_{E\parallel} = \frac{E_r}{E_i} \Big|_{z=0} = -1 \\ r_{B\parallel} = \frac{B_r}{B_i} \Big|_{z=0} = +1 \end{cases}$$

#### Propriété II-2: INVERSION

Une OPPH arrivant sous incidence normale sur un conducteur parfait subit une réflexion totale, avec une inversion de phase (déphasage de  $\pi$ ) pour le champ électrique, alors que la phase du champ magnétique  $\vec{B}$  demeure inchangée.

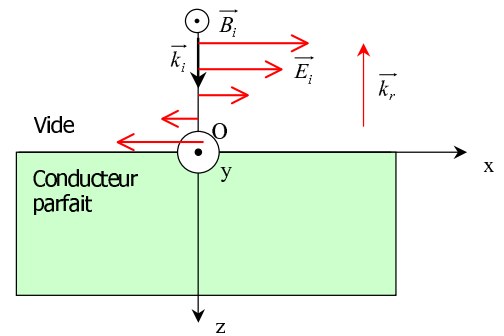


FIGURE XVII.5 – OPPH en incidence normale sur le conducteur

### II.3 Champ total - ondes stationnaires (OS)

On reprend ici le cas de l'OPPH électromagnétique arrivant sous incidence normale à la surface d'un conducteur en  $z = 0$ . Le demi-espace  $z < 0$  étant le siège d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, recherchons la structure de l'onde électromagnétique résultant d'une telle superposition :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \cdot e^{j\omega t} \times (e^{-jkz} - e^{+jkz}) \cdot \vec{e}_x = -2jE_0 \cdot \sin(kz) \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cdot e^{j\omega t} \cdot (e^{-jkz} + e^{+jkz}) \cdot \vec{e}_y = 2\frac{E_0}{c} \cdot \cos(kz) \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y \end{cases}$$

soit en adoptant la notation réelle :

$$\begin{cases} \vec{E} = +2E_0 \sin(kz) \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_x \\ \vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(kz) \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_y \end{cases}$$

#### Commentaires :

On constate que les champs électrique et magnétique apparaissent tous deux comme des **produits de fonctions à variables d'espace et de temps séparées**, ce qui est caractéristique d'une telle superposition de deux ondes respectivement incidente et réfléchie. En effet, l'absence des groupements de variables  $u = t - \frac{z}{c}$  et  $v = t + \frac{z}{c}$  montre qu'il n'y a plus de propagation ;

**Il s'agit d'ondes stationnaires.**

CF. SIMULATION  $\implies$  apparition de ventres et noeuds.

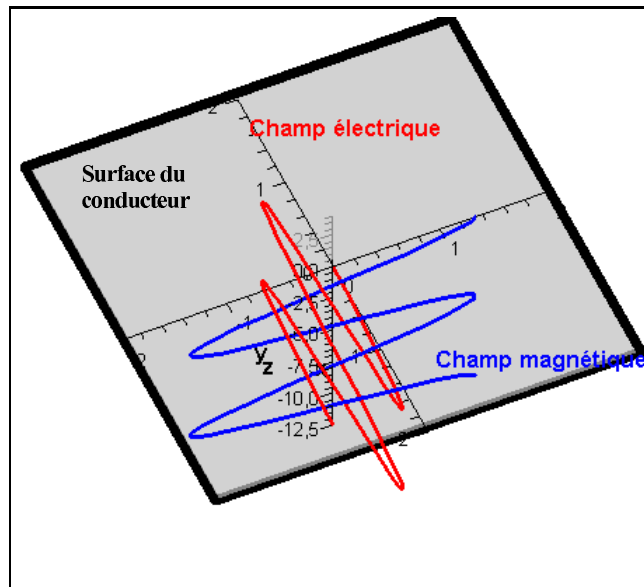


FIGURE XVII.6 – Système d'ondes électromagnétiques stationnaires dans le demi-espace  $z < 0$

**ATTENTION :** toujours exprimer les champs en notation réelle pour caractériser cette séparation de variables espace et temps.

**Exercice de cours:** (II.3) - n° 1. Déterminer les abscisses des positions nodales et ventrales pour  $\vec{E}^2$  et  $\vec{B}^3$ .

## II.4 Charge et courant surfaciques

### a - Expressions

- Cas de la charge surfacique : par relation de passage

On a à l'interface  $z=0$ ,

$$\vec{E}(z=0, t) - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

or  $\vec{E}(z=0, t) = \vec{0}$   
ainsi :

$$\boxed{\sigma = 0}$$

- Cas des courants surfaciques :

De même, à l'interface pour le champ magnétique on a :

$$\vec{B}(z=0, t) - \vec{0} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_\perp = -\mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_z$$

soit

$$2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \underbrace{\vec{e}_y}_{=\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x} = -\mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_z$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{\vec{J}_s = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x}$$

### b - Application : polariseur d'ondes hyperfréquences (utile pour le TP)

On peut exploiter l'interaction entre le champ électrique et un conducteur pour fabriquer un polariseur d'ondes (généralement des ondes centimétriques voire des micro-ondes i.e. domaine hyperfréquence).

Ce polariseur est une simple grille comportant des tiges conductrices très fines alignées et faiblement espacées ( $< \lambda$ ).

Une onde plane incidente est toujours décomposable dans la base de deux vibrations perpendiculaires<sup>4</sup>, par exemple pour une OPPH se déplaçant vers  $z$  croissant :

- 
- réponse :  $z_{pE} = \frac{p\pi c}{\omega} = \frac{p\lambda}{2}$  et  $z_{vE} = \frac{p\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$
  - réponse :  $z_{pB} = \frac{(2p+1)\pi c}{2\omega} = \frac{p\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$  et  $z_{vB} = \frac{p\lambda}{2}$
  - cf cours OEM dans le vide III.3)

$$\vec{E}_i(z, t) = \begin{pmatrix} E_{ix} = E_{0x} \cdot \cos(\omega t - kz) \\ E_{iy} = E_{0y} \cdot \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On fait arriver cette onde sur la grille telle que la composante  $\vec{E}_x$  soit alignée avec les tiges et donc la composante  $\vec{E}_y$  perpendiculaire à celles-ci :

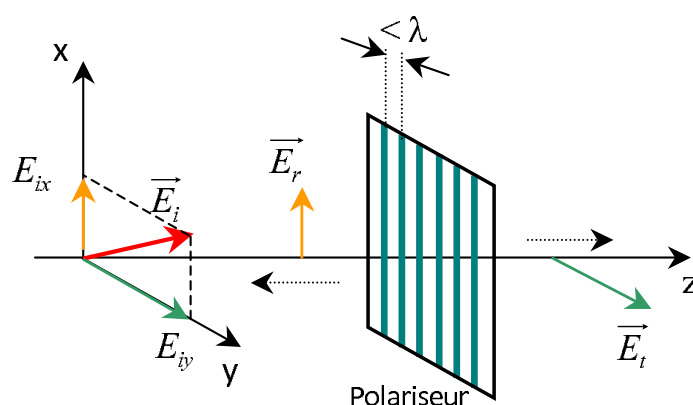


FIGURE XVII.7 – Polariseur pour ondes hyperfréquences

PRINCIPE :

- la composante  $\vec{E}_{ix}$  parallèle aux tiges métalliques entraîne l'existence d'un courant de surface et est réfléchi.
- la composante  $\vec{E}_{iy}$  perpendiculaire aux tiges métalliques ne génère aucun courant de surface dans les tiges (courant dans la "largeur" de la tige supposée fine) et est transmise.

⇒ la grille joue ainsi un rôle de polariseur.

#### Remarque II-1:

Les courants engendrés par la composante parallèle dans les tiges conductrices sont à l'origine de l'émission de l'onde réfléchi; en outre, l'orientation de ces courants détermine également la direction de polarisation de cette onde réfléchi. Ces notions seront abordées plus précisément dans le prochain chapitre (rayonnement dipolaire).

### III Aspects énergétiques et dynamiques des ondes stationnaires

### III.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Calculons à partir des expressions précédentes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  la densité d'énergie électromagnétique associée à l'onde stationnaire :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = 4E_0^2 \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \sin^2(kz) \cdot \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \cos^2(kz) \cdot \cos^2(\omega t) \right]$$

soit :

$$u_{em} = 2E_0^2 \varepsilon_0 [\sin^2(kz) \cdot \sin^2(\omega t) + \cos^2(kz) \cdot \cos^2(\omega t)]$$

et finalement une valeur moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = 2E_0^2 \varepsilon_0 [\sin^2(kz) \cdot \underbrace{\langle \sin^2(\omega t) \rangle}_{=\frac{1}{2}} + \cos^2(kz) \cdot \underbrace{\langle \cos^2(\omega t) \rangle}_{=\frac{1}{2}}]$$

$$\boxed{\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2} \quad (\text{XVII.1})$$

### III.2 Vecteur de Poynting

Le calcul du vecteur de Poynting est également élémentaire :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = +4 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(kz) \cdot \sin(\omega t) \times \cos(kz) \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

soit :

$$\vec{R} = + \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kz) \cdot \sin(2\omega t) \vec{e}_z$$

qui donne finalement une valeur moyenne nulle :

$$\boxed{\langle \vec{R} \rangle = + \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kz) \cdot \langle \sin(2\omega t) \rangle \vec{e}_z = \vec{0}} \quad (\text{XVII.2})$$

Ce résultat n'a rien de surprenant dans la mesure où les ondes stationnaires ne correspondent plus à un phénomène propagatif, et ainsi la valeur moyenne du vecteur de Poynting, dont la norme est la densité surfacique moyenne de puissance propagée, est nulle!!!

**Exercice de cours:** (III.2) - n° 2. Vérifier l'identité de Poynting dans le cas de l'onde stationnaire évoquée ci-dessus.

### III.3 Pression de radiation

PAR MODÈLE ONDULATOIRE SUR conducteur réel ( $\gamma$  finie! exception pour ce paragraphe!):



HYPOTHÈSES : champ électromagnétique incident sur un conducteur réel en  $z = 0 \Rightarrow$  pénétration sur une profondeur de quelques  $\delta$  !

$$\begin{cases} \vec{E} = E_x(z < 0, t) \cdot \vec{e}_x \\ \vec{B} = B_y(z < 0, t) \cdot \vec{e}_y \end{cases}$$

Dans la couche de pénétration de l'onde, si l'on néglige les courants de déplacement<sup>5</sup>, l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

soit compte tenu de la polarisation choisie :

$$\vec{j} = - \left( \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{\partial B_y}{\partial z} \cdot \vec{e}_x$$

QUESTION : courant+champ magnétique dans une épaisseur superficielle  $\Rightarrow$  quelle est l'expression de la force (Laplace) exercée par ce champ sur le conducteur ?

La force volumique de Laplace s'exerçant dans le conducteur est :

$$\vec{f}_{vol} = \vec{j} \wedge \vec{B} = - \left( \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{\partial B_y}{\partial z} \cdot \vec{e}_x \wedge B_y \vec{e}_y$$

$$\text{soit : } \vec{f}_{vol} = - \left( \frac{1}{2\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial z} [B_y^2(z, t)] \cdot \vec{e}_z$$

La force subie par le conducteur est obtenue par intégration de la force volumique :

$$\vec{F} = \iiint_{cond} \vec{f}_{vol} \cdot \underbrace{dxdy}_{dS} dz = - \left( \frac{1}{2\mu_0} \right) S \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} [B_y^2(z, t)] \cdot dz \vec{e}_z$$

**NB** : ce résultat est identique dans le cas d'un conducteur parfait  $\gamma \rightarrow \infty$  !

soit :

$$\vec{F} = - \left( \frac{S}{2\mu_0} \right) \left[ \underbrace{B_y^2(\infty, t)}_{=0} - B_y^2(0, t) \right] \cdot \vec{e}_z$$

donc

$$\vec{F} = \left( \frac{S}{2\mu_0} \right) 4 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{soit une norme de valeur moyenne : } \langle \|\vec{F}\| \rangle = \frac{E_0^2 S}{\mu_0 c^2}$$

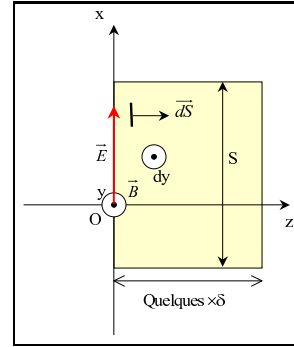


FIGURE XVII.8 – Force de radiation s'exerçant sur un conducteur

5. nous avons vu que cette approximation était totalement légitime dans un conducteur.

On peut alors isoler la **pression de radiation moyenne** (obtenue par ce modèle ondulatoire) exercée sur la surface du conducteur avec :

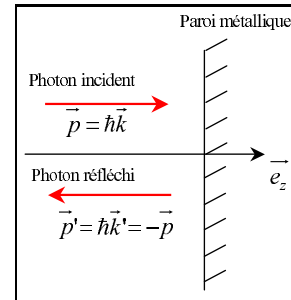
$$\langle P_{ond} \rangle = \frac{\langle \|\vec{F}\| \rangle}{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E_0^2 \quad (\text{XVII.3})$$

### PAR MODÈLE CORPUSCULAIRE :

QUESTION : pression des photons sur la paroi du conducteur ?

En théorie corpusculaire chaque photon incident possède les caractéristiques suivantes (cf dualité onde-corpuscule MPSI) :

$$\begin{cases} \text{Vitesse : } \vec{c} = c\vec{e}_z \\ \text{Energie : } \epsilon = h\nu = \hbar\omega \\ \text{Quantité de mouvement : } \underbrace{\vec{p}_i = \hbar\vec{k}}_{\text{relation de De Broglie}} = \frac{h}{\lambda}\vec{e}_z = \frac{h\nu}{c}\vec{e}_z \end{cases}$$



- On note  $n_i$  la densité volumique moyenne des photons incidents.
- On suppose tous les photons réfléchis; ils possèdent chacun une quantité de mouvement :

FIGURE XVII.9 – Force de pression des photons sur un conducteur

$$\vec{p} = -\frac{h\nu}{c}\vec{e}_z$$

$\Rightarrow$  la paroi exerce une action sur les photons !

Appelons  $\delta\vec{F}_{par \rightarrow phot}$  la force exercée par la paroi de surface  $dS$  sur les photons.

**Variation de quantité de mouvement pour chaque photon :**  $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = -2\frac{h\nu}{c}\vec{e}_z$

**Nombre de photons qui arrivent sur une surface  $dS$  pendant  $dt$  :**  $\delta^2 N = n_i \cdot c \cdot dt \cdot dS$

**Variation totale de quantité de mouvement des  $\delta^2 N$  photons pendant  $dt$  :**  $d^2\vec{P} = \delta^2 N \times \Delta\vec{p} = -2n_i h\nu dS \cdot \vec{e}_z \cdot dt$

Finalement, la force élémentaire exercée par la paroi sur les photons s'écrit :

$$\delta\vec{F}_{par \rightarrow phot} = -\frac{d^2\vec{P}}{dt} = -2n_i h\nu dS \cdot \vec{e}_z$$

ce qui permet de déduire par principe d'action réciproque la force exercée par les photons sur la paroi :

$$\boxed{\delta\vec{F}_{phot \rightarrow par} = 2n_i h\nu dS \cdot \vec{e}_z}$$

soit une pression de radiation exercée sur la paroi par les photons :

$$P_{corp} = \frac{\delta F}{dS_{phot \rightarrow par}} = 2n_i h\nu$$

**QUESTION :** y-a-t-il équivalence des résultats obtenus par les deux modèles ?

→ On reconnaît dans le résultat précédent  $n_i h\nu = \langle u_{em_{inc}} \rangle$ , la densité moyenne d'énergie des photons incidents, qui vaut en description ondulatoire :

$$\langle u_{em_{inc}} \rangle = \langle \epsilon_0 \frac{E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_0} \rangle = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} + \frac{E_0^2}{4\mu c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

d'où :

$$P_{corp} = \epsilon_0 E_0^2 = P_{ond}$$

Ainsi, les deux descriptions conduisent à des résultats équivalents!!!

### Remarque III-1: REFROIDISSEMENT LASER

Cette action de pression, liée au champ électromagnétique incident, est à l'origine de nombreuses applications, notamment la lévitation L.A.S.E.R. inventé par Arthur Ashkin à l'Université Cornell, et dont les travaux posèrent les bases du refroidissement laser développé concomitamment par S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et D. Phillips tous trois récompensés du prix Nobel de Physique 1997.

## IV "Confinement" d'une OEM : cavités unidimensionnelles - modes propres

### IV.1 Choix d'une forme de champ - conditions aux limites

**IDÉE :** on souhaite confiner une onde électromagnétique en exploitant les réflexions multiples.

Considérons un ensemble de **deux plans conducteurs parfaits parallèles** formant une cavité unidimensionnelle remplie de vide entre les abscisses  $z = 0$  et  $z = a$  (cf figure).

#### HYPOTHÈSES :

- on injecte un champ électromagnétique dans la cavité, engendré par exemple par une antenne émettrice, et polarisé selon  $\vec{e}_x$  :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_x$$

- compte tenu de la géométrie de la cavité, on pose l'invariance selon  $[Ox)$  et  $[Oy)$  :

$$\vec{E} = E(z, t) \cdot \vec{e}_x$$

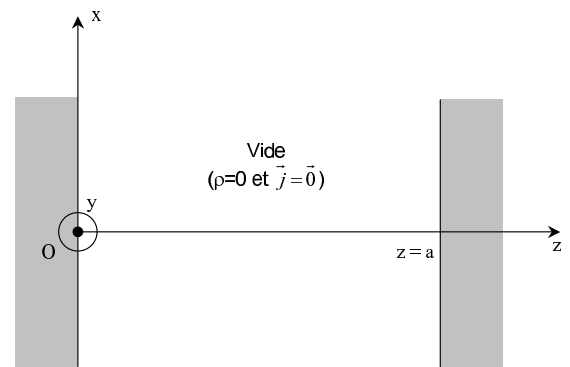


FIGURE XVII.10 – Cavité unidimensionnelle

A RETENIR :

La présence des deux plans conducteurs imposent les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{E}_{//}(z=0, t) = \vec{E}(z=0, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{//}(z=a, t) = \vec{E}(z=a, t) = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{\perp}(z=0, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\perp}(z=a, t) = \vec{0}$$

## IV.2 EDA dans la cavité

### a - Proposition de solution élémentaire à variables séparées (méthode à maîtriser !!!)

L'espace dans la cavité est vide de charge et de courant ( $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = \vec{0}$ )  $\Rightarrow$  l'évolution du champ électromagnétique dans la cavité est régi par l'EDA, soit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \xrightarrow{\text{Pb 1D}} \quad \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} = 0$$

A RETENIR :

En supposant que l'on injecte une OPPH polarisée selon  $\vec{e}_x$  dans la cavité, la présence des deux plans conducteurs parfaits en vis à vis entraîne des réflexions multiples et donc *a priori* l'existence d'un système d'ondes stationnaires.

$\Rightarrow$  on envisage une solution à variables séparées :

$$\vec{E}(z, t) = f(z) \cdot g(t) \cdot \vec{e}_x$$

En injectant cette forme de solution dans l'EDA 1D il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[f(z) \cdot g(t)] - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}[f(z) \cdot g(t)] = 0$$

puis :

$$f(z) \cdot g''(t) - c^2 \cdot f''(z) \cdot g(t) = 0$$

et enfin en divisant cette équation par  $f(z) \cdot g(t)$  on a finalement :

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(z)}{f(z)}$$

Ces deux membres dépendent de variables indépendantes, ils sont donc forcément tous deux égaux à une constante :

$$\underbrace{\frac{g''(t)}{g(t)}}_{\text{fonc. de } t; \text{ indép. de } z} = c^2 \underbrace{\frac{f''(z)}{f(z)}}_{\text{fonc. de } z; \text{ indép. de } t} \stackrel{\text{donc}}{=} K = \text{cste}$$

RÉSOLUTION :

3 cas de figure à envisager :

- $K = \alpha^2 > 0$  :  $g''(t) - \alpha^2 g(t) = 0$  et  $f''(z) - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 f(z) = 0$   
SOLUTIONS :

$$\begin{cases} g(t) = \underbrace{Ae^{\alpha t}}_{\text{divergent}} + \underbrace{Be^{-\alpha t}}_{\text{transitoire} \rightarrow 0} \\ f(z) = A'e^{\frac{\alpha}{c}z} + B'e^{-\frac{\alpha}{c}z} \end{cases} \Rightarrow \text{à rejeter}$$

- $K = 0$  :  $g''(t) = 0$  et  $f''(z) = 0$   
SOLUTIONS :

$$\begin{cases} g(t) = \underbrace{At + B}_{\text{divergent}} \\ f(z) = A'z + B' \end{cases} \Rightarrow \text{à rejeter}$$

- $K = -\omega^2 < 0$  :  $g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$  et  $f''(z) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(z) = 0$   
SOLUTIONS :

$$\begin{cases} g(t) = A \sin(\omega t + \varphi_t) \\ f(z) = B \sin\left(\frac{\omega}{c}z + \varphi_z\right) \end{cases} \Rightarrow \text{à retenir}$$

Une solution élémentaire à variables séparées est donc :  $E(z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c}z + \varphi_z\right) \times \sin(\omega t + \varphi_t)$

### b - Exploitation des conditions aux limites - sélection des modes propres de la cavité

On rappelle la forme générale d'une solution élémentaire à variables séparées :

$$E(z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c}z + \varphi_z\right) \times \sin(\omega t + \varphi_t)$$

Chaque solution élémentaire doit vérifier les CL du problème, soit :

- $E(z = 0, \forall t) = 0 \Rightarrow \sin \varphi_z = 0 \Rightarrow \varphi_z = m\pi$   
on retient une seule solution, soit par exemple  $m = 0$  donc :  $\varphi_z = 0$
- $E(z = a, \forall t) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega}{c}a\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}a = p\pi$

soit finalement la pulsation appelée **pulsation modale** du mode  $p$  :  $\omega_p = p \frac{\pi c}{a}$

La solution élémentaire appelée **mode de la cavité** s'écrit finalement :

$$E_p(z, t) = E_{0p} \sin\left(p\pi \frac{z}{a}\right) \times \sin\left(p\pi \frac{ct}{a} + \varphi_{t_p}\right) \Leftrightarrow \text{un mode propre de la cavité}$$

#### A RETENIR :

Ce sont les C.L. imposées par la présence des frontières de la cavité qui **sélectionnent** les pulsations compatibles des ondes stationnaires.

**Exercice de cours:** (IV.2) - n° 3. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_p(z, t)$  du mode  $p$  de la cavité.

**c - Solution complète : superposition des modes propres électriques**

L'EDA1D est linéaire  $\implies$  une superposition des modes est donc également solution ; on montre par ailleurs que l'ensemble des modes (non dénombrables) constitue une base de décomposition des oscillations du champ dans la cavité (les modes sont orthogonaux) ; ainsi une solution générale périodique dans la cavité s'écrit :

$$E(z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} E_{0p} \sin\left(\frac{p\pi}{a}z\right) \times \sin\left(\frac{p\pi c}{a}\omega t + \varphi_{t_p}\right)$$

**Remarque IV-1:**

Les coefficients  $E_{0p}$  et  $\varphi_{t_p}$  sont déterminés par exploitation des conditions initiales.