I

Signaux périodiques analogiques - effet des filtres

«L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.»
JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER
(1768-1830)

PLAN DU CHAPITRE

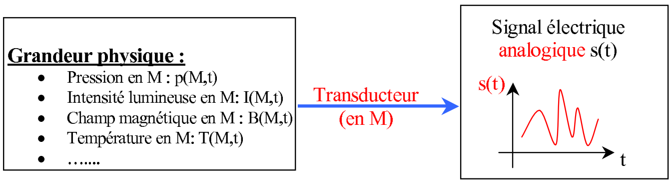
I Rappel sur la notion de signal électrique analogique

Définition I-1: SIGNAL ÉLECTRIQUE ANALOGIQUE

On appelle signal électrique analogique une grandeur électrique (souvent courant ou tension) variant de manière continue et transportant une information.
Il est parfois obtenu par transformation d'une grandeur physique (puissance lumineuse, pression acoustique...) par un capteur (transducteur).

L'information peut être codée :

- ◇ dans l'évolution temporelle de l'amplitude du signal (amplitude modulée → $cf\ TP$).
- ◇ dans l'évolution de la fréquence instantanée ou de la phase du signal électrique (fréquence modulée → $cf\ TP$).
- ◇ dans l'évolution simultanée de l'amplitude et de la fréquence du signal électrique ($s(t)$ est alors "image" de la grandeur physique si le capteur est linéaire)



II Signaux périodiques : décomposition en série de Fourier (SF)

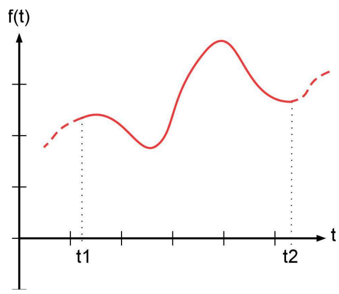
II.1 Préliminaire : valeurs moyenne et efficace d'un signal

■ VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL :

▶ **Cas d'un signal quelconque**

La valeur moyenne $< f >$ d'un signal temporel $f(t)$ de forme quelconque sur un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est définie par l'expression suivante :

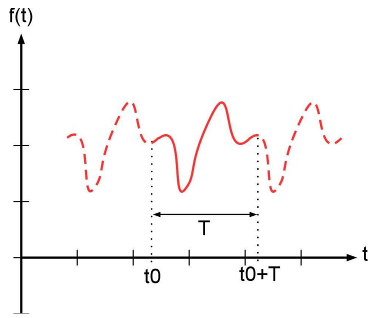
$$< f >= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt$$



▶ **Cas particulier d'un signal périodique**

S'agissant d'un signal périodique, l'intervalle de temps employé dans le calcul de la valeur moyenne est naturellement la période T du signal, soit :

$$< f >_{\forall t_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt$$



Le résultat étant indépendant de t_0, on le note finalement

$$\boxed{< f >= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt} \tag{I.1}$$

■ <u>VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE :</u>

<u>IDÉE :</u> on se propose de donner une définition purement électrocinétique de la valeur efficace d'un signal.

<u>HYPOTHÈSE :</u> on pose $f(t)$ un **signal de tension périodique**.

<u>Définition II-1</u>: VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL

Par définition, la valeur efficace f_{eff} d'un signal périodique $f(t)$ **de tension** est la valeur du signal de tension continue qui permettrait de dissiper dans une résistance électrique la même énergie durant le même intervalle de temps qu'avec le signal périodique $f(t)$.

En supposant un intervalle de temps d'une période T di sgnal $f(t)$, la traduction formelle de la définition précédente donne :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} P(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{f(t)^2}{R} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{f_{eff}^2}{R} \cdot dt = \frac{f_{eff}^2}{R} \times T$$

soit finalement :

$$\boxed{f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T f^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle}} \tag{I.2}$$

Remarque II-1: CAS DU SIGNAL SINUSOÏDAL

Dans le cas particulier d'un signal sinusoïdal pur d'amplitude f_0, la valeur efficace est :

$$f_{eff}(\sim) = \sqrt{\frac{f_0^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\cdot dt} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

Exercice de cours: **(II.1) - n° 1.** *Déterminer la valeur efficace d'un signal périodique triangulaire pair d'amplitude* v_0.

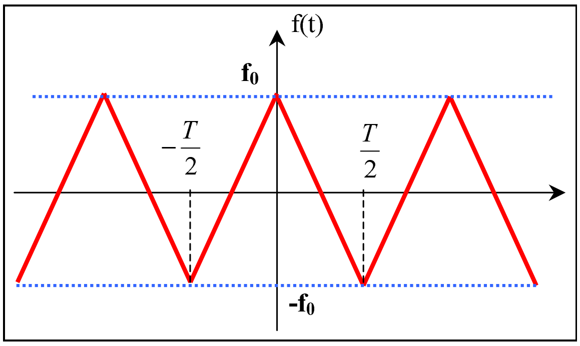


FIGURE I.1 – Signal triangulaire pair de période T

RÉPONSE : Le signal est défini par intervalle comme suit : $\begin{cases} f(t) = +f_0\left(1+\frac{4t}{T}\right) \ \forall t \in [-\frac{T}{2};0] \\ f(t) = +f_0\left(1-\frac{4t}{T}\right) \ \forall t \in [0;\frac{T}{2}] \end{cases}$

Le carré de f_{eff} s'écrit :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)^2\cdot dt \stackrel{f^2(t)\text{ pair}}{=} 2\frac{f_0^2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1-\frac{4t}{T}\right)^2\cdot dt$$

qui donne après calcul élémentaire :

$$\boxed{f_{eff} = \frac{f_0}{\sqrt{3}}}$$

II.2 Analyse de Fourier

a - Théorème de Fourier

On montre dans le cadre du cours de mathématiques, que toute fonction périodique $f(t)$ de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ peut, sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité, s'écrire comme la superposition de fonctions harmoniques appelée **série de Fourier** :

1ère forme :

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]} \tag{I.3}$$

$$= a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin[\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + ...$$

2nde forme : on peut également écrire la décomposition de Fourier de $f(t)$ sous la forme suivante :

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [d_n \cos(n\omega t + \varphi_n)]} \quad \text{avec } d_n \geq 0 \tag{I.4}$$

$$= a_0 + d_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + d_2 \cos[2\omega t + \varphi_2) + ...$$

3ième forme : sous la forme complexe suivante (la fonction $f(t)$ peut être complexe ou non) :

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n} \cdot e^{+jn\omega t}} \tag{I.5}$$

Vocabulaire :

- a_0 est appelée **composante continue** du signal.
- Les coefficients a_n et b_n, d_n ou $\underline{c_n}$ sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction f.
- Le coefficient d_n est appelé **amplitude de l'harmonique d'ordre n**.
- Les termes de pulsation ω sont appelés **composantes fondamentales du signal.**
- Les termes de pulsation $n\omega$ avec $n \geq 2$ sont appelés **composantes harmoniques du signal.**

A RETENIR : L'analyse de Fourier d'un signal consiste à déterminer les jeux de coefficients (a_0, a_n, b_n) ou (d_n, φ_n) ou $\underline{c_n}$. On se propose ici, connaissant la fonction $f(t)$, d'établir les relations permettant leur calcul.

b - Relations entre coefficients de Fourier

Exercice de cours: **(II.2) - n° 2.** *On considère un signal périodique sans parité particulière. Montrer que d_n, amplitude de l'harmonique d'ordre n, et le déphasage φ_n de cette harmonique sont donnés par :* $\mathbf{d_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}}$ *et* $\varphi_n = -\mathbf{arctan}\dfrac{\mathbf{b_n}}{\mathbf{a_n}}$ *avec* $\varphi_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice de cours: **(II.2) - n° 3.** *Etablir de même le lien entre c_n et a_n et b_n en montrant que :*

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = \underline{c_n} + \underline{c_{-n}} \\ b_n = j(\underline{c_n} - \underline{c_{-n}}) \end{cases} \qquad \textit{avec } n > 0$$

c - Forme complexe : coefficients c_n

La SF du signal est

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n} \cdot e^{jn\omega t}$$

en multipliant par $e^{-jp\omega t}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, et en intégrant entre $-T/2$ et $+T/2$, il vient (avec $p \in \mathbb{Z}$) :

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jp\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{j(n-p)\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n} \underbrace{\int_{-T/2}^{+T/2} \left[\cos((n-p)\omega t) + j\sin((n-p)\omega t)\right] dt}_{=K_p}$$

or :

$$\begin{cases} K_{p\neq n} = 0 \\ K_{p=n} = T \end{cases}$$

ainsi :

$$\boxed{\underline{c_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt} \tag{I.6}$$

En particulier :

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt = \underline{\underline{< f(t) >}}} \tag{I.7}$$

d - En cosinus et sinus : a_n et b_n

Soit la fonction périodique $f(t)$ décomposable en série de Fourier :

■ <u>CAS DE a_0 :</u>

$$\boxed{a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt =< f(t) >} \tag{I.8}$$

■ Cas de a_n :

$$a_n = \underline{c_n} + \underline{c_{-n}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left(e^{-jn\omega t} + e^{jn\omega t}\right)\cdot dt$$

soit :

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos(n\omega t)dt} \tag{I.9}$$

■ Cas de b_n :

$$b_n = j(\underline{c_n} - \underline{c_{-n}}) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)j\left(e^{-jn\omega t} - e^{jn\omega t}\right)\cdot dt$$

soit :

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt} \tag{I.10}$$

e - En cosinus : coefficients d_n

On a :

$$\begin{cases} a_n = d_n\cos\varphi_n \;\Rightarrow\; \underline{c_n} + \underline{c_{-n}} = d_n\cos\varphi_n \;(L_1) \\ b_n = -d_n\sin\varphi_n \;\Rightarrow\; j(\underline{c_n} - \underline{c_{-n}}) = -d_n\sin\varphi_n \;(L_2) \end{cases}$$

En formant $(L_1) - j(L_2)$ il vient :

$$2\underline{c_n} = d_n e^{j\varphi_n} \overset{\text{on pose}}{=} \underline{d_n}$$

soit finalement

$$\boxed{\underline{d_n} = \frac{2}{T}\int_{T} f(t)e^{-jn\omega t}\cdot dt} \tag{I.11}$$

avec :

$$\boxed{d_n = |\underline{d_n}| = |2\underline{c_n}| \quad \text{et} \quad \varphi_n = arg(\underline{d_n}) = -\arctan\frac{b_n}{a_n}} \tag{I.12}$$

NB : d_n représente l'amplitude de l'harmonique de rang n

f - Propriétés importantes de symétrie des signaux - conséquences

Propriété II-1: SIGNAL PAIR

Si $f(t)$ est une fonction paire, alors :

$$f(t) = f(-t) \overset{\forall t}{\Leftrightarrow} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega t) - b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

On en déduit que :

$$\boxed{b_n = 0 \quad \forall n}$$

Propriété II-2: SIGNAL IMPAIR

Si $f(t)$ est une fonction impaire, on déduit par démarche analogue que :

$$\boxed{a_n = 0 \quad \forall n}$$

en particulier $a_0 = 0$ (pas de composante continue)

Propriété II-3: NULLITÉ DES COEFFICIENTS DE RANG PAIR

Si $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ alors :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t + n\pi) + b_n \sin(n\omega t + n\pi) = -a_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

soit : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n \cos(n\omega t + n\pi) = -a_n \cos(n\omega t) \\ b_n \sin(n\omega t + n\pi) = -b_n \sin(n\omega t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{2p} = b_{2p} = 0 \quad p \in \mathbb{N}}$

Conclusion : la SF de $f(t)$ ne comporte que des harmoniques de rangs impairs. (exemple : créneau quelconque))

Propriété II-4: NULLITÉ DES $a_{\forall n \geq 1}$

Si $\tilde{f}(t) = f(t) - < f(t) >= f - a_0$ est impair alors :

$$\boxed{a_n = 0 \ \forall n \geq 1}$$

Remarque II-2: MESURE DA LA COMPOSANTE CONTINUE

MESURE À L'OSCILLOSCOPE DE LA COMPOSANTE CONTINUE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

- En couplage DC (**D**irect **C**oupling) : tracé du signal complet i.e. avec composante continue.
- En couplage AC : tracé du signal privé de sa composante continue (très forte capacité ajoutée en série : explication en "live")

$\Longrightarrow$ **la différence d'amplitude entre les deux tracés (à tout instant) est égale à la composante continue du signal.**

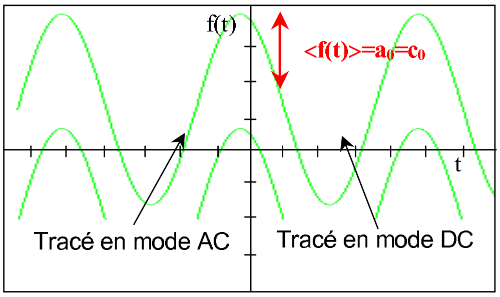


FIGURE I.2 – Mesure de la composante continue d'un signal (valeur moyenne) à l'oscilloscope

II.3 Quelques exemples classiques de signaux

a - Signal créneau impair

Prenons l'exemple d'un signal créneaux impair :

La parité de ce signal entraîne la nullité des coefficients a_n ; ainsi :

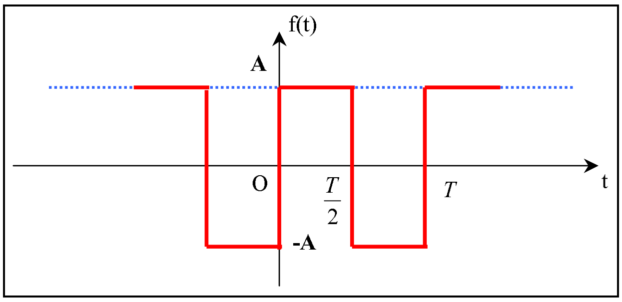


FIGURE I.3 – Signal créneau impair de période T

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overbrace{f(t)\cdot\sin(n\omega t)}^{\text{pair}}\,dt$$

$$= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\cdot\sin(n\omega t)\cdot dt = \frac{4A}{n2\pi}\left[-\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{2A}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{b_n = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{1-(-1)^n}{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2A}{\pi} \times \begin{cases} 2 \ (n=1) \\ 0 \ (n=2) \\ \frac{2}{3} \ (n=3) \\ 0 \ (n=4)) \\ \frac{2}{5} \ (n=5) \\ \ldots \end{cases}$$

On constate effectivement que seuls les coefficients d'indices impairs sont non nuls (propriétés $f(t) = -f(t+T/2)$.

Ainsi, en faisant le changement d'indice $n = 2k+1$, on écrit plus synthétiquement :

$$\boxed{b_{2k+1} = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1}} \quad \text{avec } k = 1, 2, 3 \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{4A}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{1} \ (k=0) \\ \frac{1}{3}(k=1) \\ \frac{1}{5}(k=2) \\ \ldots \end{cases}$$

et donc :

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4A}{(2k+1)\pi} \sin\left[(2k+1)\omega t\right]} \quad \Rightarrow \text{ Evolution en } 1/n\,!!$$

b - Signal triangle pair $F(t)$

On considère un signal triangulaire $F(t)$ d'amplitude B. On peut remarquer que $F(t) = \int f(t') \cdot dt' + Cste$, avec $f(t)$ le signal créneaux précédent, à condition que $\frac{4B}{T} = A$, donc :

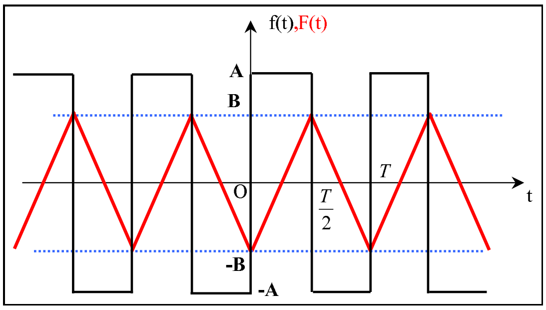


FIGURE I.4 – Signal triangle pair $F(t)$ de période T

$$F(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2k+1)} \sin\left[(2k+1)\omega t'\right] \right] \cdot dt' + \underbrace{cste}_{=0 \text{ pas de comp. cont.}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4AT}{2\pi^2(2k+1)^2} \cos\left[(2k+1)\omega t\right]$$

soit :

$$\boxed{F(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8B}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left[(2k+1)\omega t\right]} \quad \Rightarrow \text{ Evolution en } 1/n^2\,!!$$

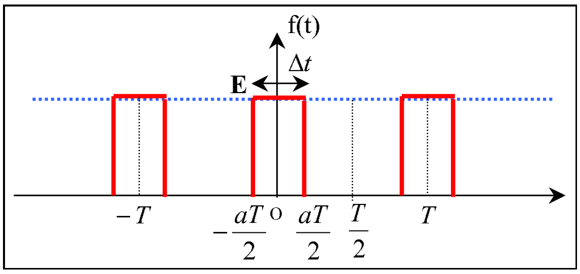


FIGURE I.5 – Signal impulsionnel périodique de rapport cyclique a

c - Signal impulsionnel de rapport cyclique a (très utile en TP ! ! !)

NB : rapport cyclique : $a = \dfrac{\Delta t}{T}$, avec $0 \leq a \leq 1$

Composante continue= valeur moyenne : $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t) \cdot dt = \dfrac{\Delta t}{T}E = aE$

Calcul du coefficient de Fourier complexe $\underline{c_n}$ (par exemple) :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jn\omega t} \cdot dt = \frac{1}{T}\int_{-aT/2}^{+aT/2} Ee^{-jn\omega t} \cdot dt$$

$$= E\textcolor{red}{a}\left[\frac{e^{-jna\pi} - e^{+jna\pi}}{-2jn\textcolor{red}{a}\pi}\right] = E\textcolor{red}{a}\left[\frac{\sin(na\pi)}{2jn\textcolor{red}{a}\pi}\right]$$

soit :

$$\boxed{\underline{c_n} = Ea \cdot sinc(na\pi)}$$

et donc :

$$\boxed{a_n = \underline{c_n} + \underline{c_{-n}} = 2Ea \cdot sinc(na\pi)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b_n = 0}$$

II.4 Spectre d'un signal périodique

a - Définition

On rappelle que l'harmonique de rang n peut s'écrire selon les deux premières formes de la SF :

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = d_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ avec } d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Définition II-2: SPECTRE

On appelle spectre du signal, la représentation graphique de $d_n = f(\omega)$

Exemples :

■ Signal créneau impair :

$$d_{2k+1} = \sqrt{a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2} = |b_{2k+1}| = \frac{4A}{(2k+1)\pi} \quad (k \in \mathbb{N})$$

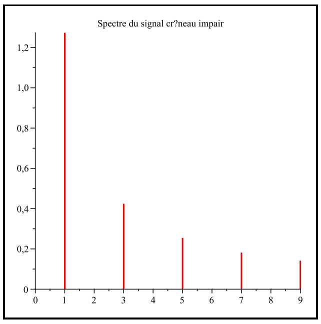


FIGURE I.6 – Spectre d'amplitude du signal créneau impair ($\omega_n = (2k+1)\omega \ k \in \mathbb{N}$)

■ Signal triangle pair : $d_{2k+1} = \sqrt{a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2} = |a_{2k+1}| = \dfrac{8B}{(2k+1)^2\pi^2} \quad (k \in \mathbb{N})$

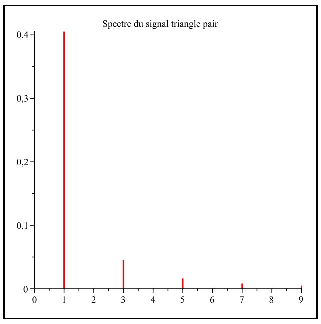


FIGURE I.7 – Spectre d'amplitude du signal triangle pair

A RETENIR : la dépendance en $\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{1}{n^2}$ de l'amplitude spectrale engendre une atténuation bien plus rapide des harmoniques que dans le cas du créneau.

■ TRAIN D'IMPULSIONS vers PEIGNE de DIRAC
On rappelle que pour le train d'impulsions les coefficients complexes s'écrivent : $\left[\begin{array}{l} c_0 = d_0 = E \cdot a \\ c_n = Ea \cdot sinc(n\pi a) \end{array} \right.$
donc :

$$d_n = |a_n| = |2\underline{c_n}| = 2Ea \cdot |sinc(na\pi)|$$

Si $a \longrightarrow 0$, le signal devient un "Peigne de Dirac" (succession de "pics" de Dirac) **pour lequel on impose la contrainte** $E\Delta t = 1$, et que l'on note :

$$f(t) = E \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \text{ avec la "fonction" (plutôt "distribution") de Dirac} \qquad \delta(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ si } t \neq 0 \end{cases}$$

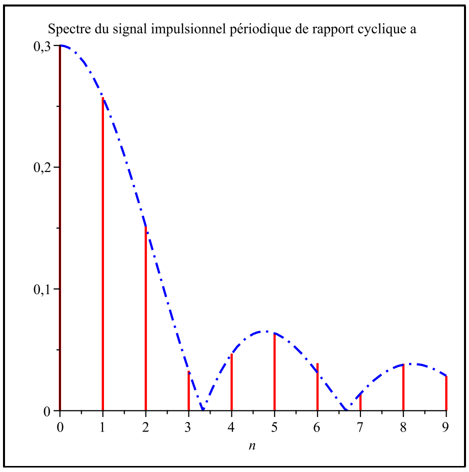


FIGURE I.8 – Spectre du signal impulsionnel périodique de rapport cyclique a

et son spectre est également un "Peigne de Dirac" fréquentiel :
$$\begin{cases} d_0 = c_0 = Ea \overset{a\to 0}{\longrightarrow} Ea = \dfrac{E\Delta t}{T} = \dfrac{1}{T} \\ d_{n\geq 1} = |2\underline{c_n}| \overset{|sinc(na\pi)|\to 1 \forall n}{\longrightarrow} 2\dfrac{E\Delta t}{T} = \dfrac{2}{T} \end{cases}$$

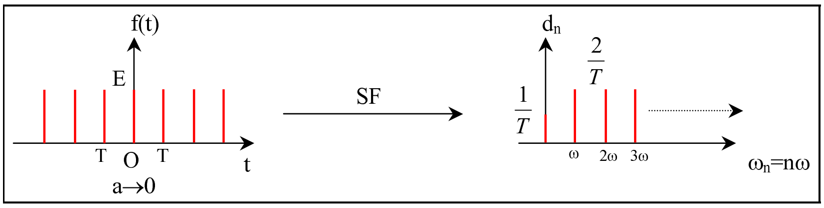


FIGURE I.9 – Allure et spectre d'un Peigne de Dirac ($a \to 0$)

NB : on représente parfois le spectre en traçant simplement $|c_n| = f(\omega)$.

Propriété II-5: SPECTRE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE
Le spectre d'un signal périodique est toujours discret et d'étendue infinie.

b - Synthèse de Fourier (opération réciproque de la SF)

Si la décomposition de Fourier consiste en la recherche des amplitudes d'harmoniques (et leurs phases respectives), la synthèse de Fourier est l'opération réciproque qui consiste à reconstituer le signal initial en calculant pour chaque date t la valeur de la série de Fourier. Evidemment, comme la décomposition comporte un nombre infini d'harmoniques, la synthèse ne pourra être calculée **en pratique** qu'en sommant un nombre N fatalement limité de composantes ; or pour toute fonction «physique», on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ce qui assure que le calcul approché de $f(t)$ est valide lorsque l'on prend N assez grand.

$$f(t) \xrightarrow[\text{de Fourier}]{\text{Analyse}} \left| \begin{array}{l} (a_n, b_n) \\ (d_n, \varphi_n) \\ \underline{c_n} \end{array} \right. \xrightarrow[\text{de Fourier}]{\text{Synthèse}} f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

<u>Exemple :</u> On rappelle la série de Fourier du signal créneau impair :

$$f_N(t) = 4\frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{\sin\left[(2k+1)\omega t\right]}{2k+1}$$

Les tracés ci-dessous correspondent aux sommes partielles $f_N(t)$ de la série de Fourier de la fonction créneau, limitées à la somme des N premières harmoniques non nulles.

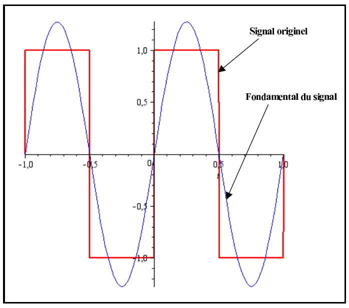


Figure I.10 – Reconstruction du signal à partir du fondamental

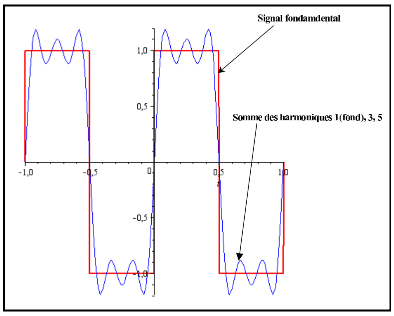


Figure I.11 – Reconstruction du signal à partir des 3 premières composantes non nulles (N=2 donc k=0,1,2)

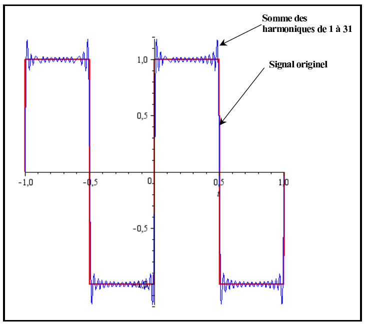


Figure I.12 – Reconstruction du signal à partir des 16 premières composantes non nulles (N=15 donc k=0,1...15)

c - Retour sur la valeur efficace : calcul à partir du spectre (d_n)

Soit un signal périodique $f(t)$ de décomposition de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Le carré de la valeur efficace de $f(t)$ est par définition :

$$f_{eff}^2 =< f^2(t) >= \frac{1}{T} \int_{(T)} f^2(t) \cdot dt$$

L'intégrant une fois développé comprend les termes suivants :

$$f^2(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \cdot \cos^2(n\omega t + \varphi_n) + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq n}}^{\infty} d_n \cdot d_p \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n) \cdot \cos(p\omega t + \varphi_p)$$

On vérifie sans trop de calcul que :

- La valeur moyenne du premier terme qui est constant est égale à lui même, soit a_0^2.
- La valeur moyenne du second terme vaut
$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$
- La valeur moyenne sur une période du troisième terme est nulle puisqu'il s'agit d'un signal sinusoïdal pur.
- Enfin, la valeur moyenne du 4$^{\text{ième}}$ terme est nulle car la valeur moyenne du produit de deux fonctions sinusoïdales de fréquence différente est nulle.

On dégage ainsi le **théorème de Parseval**, soit :

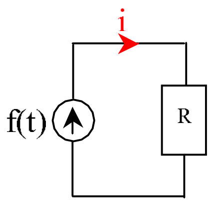
Propriété II-6: Théorème de Parseval

$$\boxed{f_{eff}^2 = a_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2}_{\text{carré val. eff. harm. rang n}} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \quad \text{(relation de Parseval)}} \tag{I.13}$$

NB : $\frac{1}{2} d_n^2$ est simplement le carré de la valeur efficace de l'harmonique de rang n

Illustration en terme de puissance :

On pose le circuit élémentaire composé d'un générateur de tension $f(t)$ alimentant une résistance électrique R.Le calcul de la puissance moyenne dissipée par la résistance donne :



$$< P(t) >=< f(t) \cdot i(t) >= \left\langle \frac{f^2(t)}{R} \right\rangle = \underbrace{\frac{a_0^2}{R}}_{\text{Puissance dissipée par la CC}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{d_n^2}{2R}}_{\text{Puissance dissipée par l'harmonique de rang } n}$$

Propriété II-7: Additivité des puissances

La puissance moyenne dissipée par un signal périodique quelconque dans une résistance est égale à la somme des puissances moyennes dissipées par chaque composante du signal (composante continue+terme fondamental+ tous ses harmoniques).

Conclusion : il y a linéarité pour la puissance, plutôt «inhabituel» dans la mesure où c'est une grandeur quadratique ! ! !

III Signaux quelconques : introduction à la transformée de Fourier (TF) (hors programme)

III.1 La TF comme limite de la série de Fourier

On considère un signal $f(t)$ non nécessairement périodique. On définit une fonction $f_T(t)$ périodique de période T coincidant avec $f(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}]$; $f_T(t)$ est appelée **la périodisée de $f(t)$** :

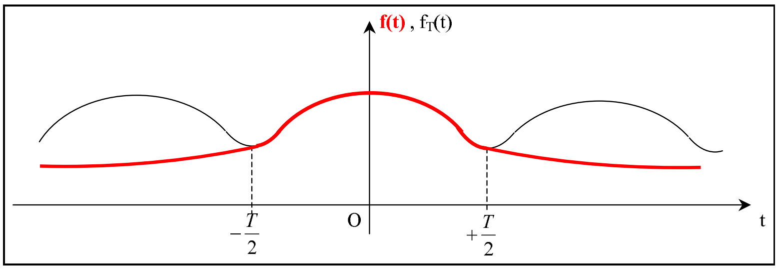


Figure I.13 – Fonctions $f(t)$ et $f_T(t)$

Question : on souhaite définir et déterminer le spectre du signal quelconque $f(t)$.

$f_T(t)$ étant périodique, on peut la développer en série de Fourier avec pour la forme complexe :

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n} e^{+jn\omega t}$$

avec comme il a été vu plus haut :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

IDÉE : si on fait $T \to \infty$ alors $f_T(t)$ se confond avec f(t). Les expressions précédentes peuvent alors être réécrites :

Notons tout d'abord que $\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\frac{2\pi}{T} - n\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$, soit $\frac{1}{\underbrace{T}_{\to\infty}} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} \to \frac{\overbrace{d\omega}^{\text{infin. petit !}}}{2\pi}$

CONSÉQUENCE : L'écart fréquentiel entre les harmoniques est donc maintenant un infiniment petit d'ordre 1, soit $d\omega$; ainsi la pulsation à considérer n'est plus celle d'un harmonique de rang n ($n\omega$), **la variable ω variant désormais de manière continue**.

On peut ainsi transformer l'écriture du coefficient de développement $\underline{c_n}$ qui devient :

$$\underline{c_n} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-T/2\to-\infty}^{T/2\to+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \overset{\text{réorg.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-T/2\to-\infty}^{T/2\to+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt\right]}_{=\hat{\mathbf{f}}(\omega)} \cdot d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) \cdot d\omega$$

Ainsi, le développement de $f_T(t)$ en SF devient un développement de $f(t)$ sous forme d'une intégrale lorsque $T \to \infty$:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{c_n} \cdot e^{jn\omega t} \quad \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \quad \boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega}$$

Bilan :

Définition III-1: TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UN SIGNAL

- $\hat{f}(\omega)$ est appelé **transformée de Fourier de $f(t)$**, aussi appelée abusivement **spectre** de $f(t)$ avec :

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (\text{"spectre à partir du signal"})} \tag{I.14}$$

- La "décomposition" de la fonction s'écrit alors :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (\text{"signal à partir du spectre"})} \tag{I.15}$$

qui constitue la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(\omega)$.

Remarque III-1:

■ $\hat{f}(\omega)$ est donc l'amplitude complexe de la composante de fréquence ω, c'est donc la fonction spectrale de $f(t)$ avec $\omega \in]-\infty; +\infty[$.
■ **Pour le signal $f(t)$ non périodique, le spectre est continu.**

III.2 Exemple classique : fonction porte - relation temps fréquence

On considère le signal "porte" défini comme suit :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{A}{\tau} & |t| < \dfrac{\tau}{2} \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La transformée de Fourier donne :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{A}{\tau} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

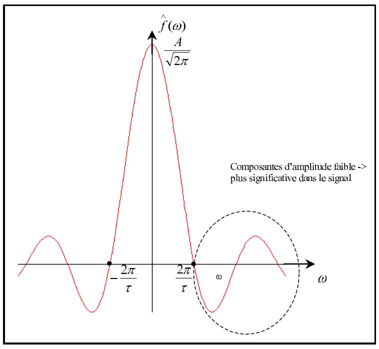


FIGURE I.14 – Transformée de Fourier de la fonction "porte"

En excluant les "lobes latéraux" du spectre (faible amplitude de ces composantes spectrales), ainsi que la partie négative du spectre (pas de sens physique), la largeur spectrale "significative" est donc : $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$.

Propriété III-1: RELATION TEMPS-FRÉQUENCE

On peut **généraliser le résultat précédent** à tout signal de durée caractéristique τ et dont la largeur spectrale caractéristique est $\Delta\omega$:

$$\boxed{\tau \cdot \Delta\omega \sim 2\pi} \quad \text{Relation temps-fréquence} \tag{I.16}$$

$\Longrightarrow$ plus le signal est bref et plus son spectre est large et inversement ($\rightarrow$ illustration graphique "en live" !)

IV Effets des filtres linéaires sur les signaux périodiques

IV.1 Cas d'un signal sinusoïdal pur : fonction de transfert complexe (harmonique) en sortie ouverte (FTSO) - caractérisation des filtres

a - Expression

La suite du cours concentre l'effort sur l'étude des circuits de type **quadripôles**, comme les filtres, dont la sortie est dite ouverte, c'est à dire courant de sortie nul : $i_s(t) = 0$.

En outre, le cours de MPSI a permis de dégager des **relations linéaires** traduisant le comportement des principaux composants discrets :

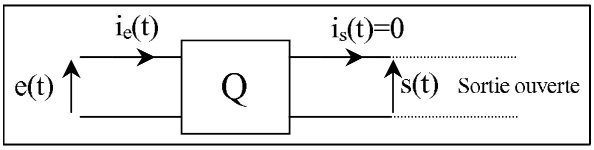


FIGURE I.15 – Schéma d'un quadripôle type filtre en boucle ouverte

$$\underbrace{\overset{R}{\downarrow}\; u_R = R \cdot i_R \;\Big|\; \overset{C}{\downarrow}\; i_C = C \cdot \frac{du_c}{dt} \;\Big|\; \overset{L}{\downarrow}\; u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}}_{\text{Relations linéaires entre tension et courant}}$$

Enfin, les relations fondamentales de Kirchhoff de l'électrocinétique, à savoir la **loi des mailles** et la **loi des noeuds sont également linéaires**.

Ainsi, si l'on appelle $e(t)$ et $s(t)$ respectivement les signaux de tension en entrée et en sortie du système linéaires, le lien entre eux est **une équations différentielle linéaire** :

$$\boxed{D_0 s(t) + D_1 \frac{ds(t)}{dt} + \quad .... \quad + D_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} \quad = \quad N_0 e(t) + N_1 \frac{de(t)}{dt} + \quad .... \quad + N_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}} \tag{I.17}$$

avec D_0, D_1, ... D_n et N_0, N_1, ... N_m coefficients constants.

La réponse de ce système linéaire s'écrit donc :

$$\boxed{s(t) = \underbrace{s_H(t)}_{solution\ ESSM} + \underbrace{s_P(t)}_{solution\ particuliere}}$$

<u>Hypothèses :</u>

- On suppose une excitation $e(t)$ sinusoïdale
- On suppose le système stable i.e. $s_H(t)$ **évanescent** $\left(\lim\limits_{t\to\infty} s_H(t) = 0\right)$. (Notion hors programme)

$\Longrightarrow$ **On étudie la réponse au régime sinusoïdal forcé (RSF) :**

$$\begin{cases} \bullet \text{ entrée : } e(t) = E \times cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \underline{e} = E \times e^{j\omega t} \\ \\ \bullet \text{ sortie : } s(t) = S(\omega) \times cos(\omega t + \varphi) \quad \longrightarrow \underline{s}(t) = S(\omega) \times e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

L'équation différentielle ci-dessus devient alors en formalisme complexe (i.e. en espace des pulsations) pour lequel $\dfrac{d^p}{dt^p} \longrightarrow (j\omega)^p$:

$$[D_0 + (j\omega)D_1 + \ \dots . \ + (j\omega)^n D_n] \times \underline{s} = [N_0 + (j\omega)N_1 + \ \dots . \ + (j\omega)^m N_m] \times \underline{e} \tag{I.18}$$

Définition IV-1: Fonction de transfert

On appelle **fonction de transfert complexe**, le rapport $H(j\omega)$ défini par :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{N_0 + (j\omega)N_1 + (j\omega)^2 N_2 + \ \dots \ + (j\omega)^m N_m}{D_0 + (j\omega)D_1 + (j\omega)^2 D_2 + \ \dots \ + (j\omega)^n D_n}} \tag{I.19}$$

Remarque IV-1: Lien fonction de transfert - équation différentielle

- L'établissement de la fonction de transfert permet de retrouver facilement l'équation différentielle régissant le système, et ce bien plus facilement que par l'emploi direct des lois électrocinétiques habituelles, en particulier pour les systèmes d'ordre > 2.
- $\underbrace{j\omega}_{\text{domaine fréquentiel}} \leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{domaine temporel}}$

b - Principales relations utiles : rappels

■ Relation du diviseur de tension

Principe : On recherche la tension complexe $\underline{V_B}$ aux bornes du dipôle d'impédance Z_2.

$$\boxed{\underline{V_B} = Z_2 \cdot \underline{i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\underline{V_A}}$$

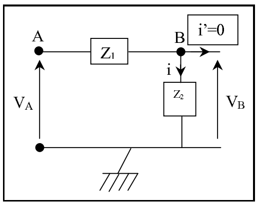


Figure I.16 – Diviseur de tension

Exemple d'exploitation : Filtre de Wien
à faire en "live" ! ! !

■ Loi des noeuds en terme de potentiels (théorème de Millman)

On considère le réseau linéaire ci-contre pour lequel on recherche l'expression du potentiel V_M en fonction des potentiels $[V_1, V_2, \dots\dots, V_N]$ et des courants $[i'_1, i'_2, \dots\dots i'_P]$.

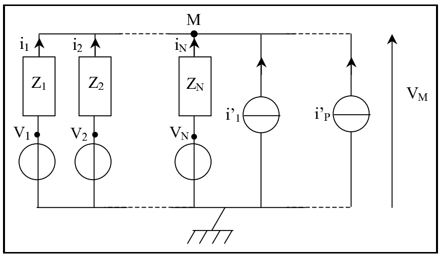


Figure I.17 – Théorème de Millman

La loi des noeuds permet d'écrire en M :

$$\sum_{j=1}^{N} i_j + \sum_{k=1}^{P} i'_k = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{V_j - V_M}{Z_j} + \sum_{k=1}^{P} i'_k = 0$$

soit :

$$V_M \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{Z_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{V_j}{Z_j} + \sum_{k=1}^{P} i'_k$$

et enfin le théorème de Millman généralisé : $\boxed{V_M = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{V_j}{Z_j} + \sum_{k=1}^{P} i'_k}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{Z_j}}}$

<u>EXEMPLE D'EXPLOITATION : toujours Wien !</u>

c - Réponse en gain - réponse en phase d'un filtre : diagramme de Bode

Par définition, la fonction de transfert est le rapport complexe :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{E \cdot e^{j\omega t}} = \frac{S(\omega)}{E} \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

soit :

$$H(j\omega) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{=G(\omega) = \frac{S(\omega)}{E}} \cdot e^{j\varphi(\omega)} = G(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Ainsi, on pose : $\begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega|) = \dfrac{S(\omega)}{E} \text{ le gain} \\ \varphi(\omega) = arg[H(j\omega)] \text{ la phase} \end{cases}$

On caractérise enfin le système en donnant le diagramme de Bode qui réunit les courbes de réponse en gain (en dB) et en phase (en rad) avec :

$$\boxed{\begin{cases} G_{dB} = 20 \log_{10} G(\omega) = fct(\log_{10} \omega) \\ \\ \varphi = fct(\log_{10} \omega) \end{cases}}$$

d - Bande passante

<u>Définition IV-2</u>: BANDE PASSANTE

La bande passante d'un filtre est, par définition, le domaine de fréquence pour lequel le gain de ce dernier vérifie la relation suivante :

$$G(\omega) \geq \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad G_{dB}(\omega) \geq G_{dB_{max}} - \underbrace{20 \log \sqrt{2}}_{\simeq 3dB}$$

IV.2 Cas d'un signal périodique quelconque : de l'utilité de la linéarité

a - Action d'un système linéaire sur un signal périodique

Les systèmes étudiés sont linéaires, par conséquent les grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire.

<u>Conséquences :</u>
La réponse d'un système linéaire à toute combinaison linéaire de signaux harmoniques (S.F.) est la combinaison linéaire des réponses du système à chacun des harmoniques du signal d'entrée. Cette propriété est résumée dans le synoptique ci-dessous :

<u>Entrée</u>

$$u_e(t) = a_{0e} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{ne}\cos(n\omega t + \varphi_{ne})$$

cplx

$$\Rightarrow \underline{u_e} = a_{0e} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} d_{ne}\cdot e^{j(n\omega t+\varphi_{ne})}$$

→ Filtre linéaire →

<u>Sortie</u>

$$u_s(t) = a_{0s} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{ns}\cos(n\omega t + \varphi_{ns})$$

cplx

$$\Rightarrow \underline{u_s} = a_{0s} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} d_{ns}\cdot e^{j(n\omega t+\varphi_{ns})}$$

avec :
$$\boxed{\begin{cases} \text{Composante continue } (\omega = 0) : \ \mathbf{a_{0s}} = |\mathbf{H(0)}|\cdot \mathbf{a_{0e}} = \mathbf{G(0)}\cdot\mathbf{a_{0e}} \\ \text{Fondamental et harmoniques } (\omega \neq 0) : \ \mathbf{d_{ns}} = |\mathbf{H(jn\omega)}|\cdot\mathbf{d_{ne}} = \mathbf{G(n\omega)}\cdot\mathbf{d_{ne}} \\ \varphi_{\mathbf{ns}} = \varphi_{\mathbf{ne}} + \mathbf{arg}\,[\mathbf{H(jn\omega)}] \end{cases}}$$

Remarque IV-2: Erreur classique !

<u>Attention :</u>il est totalement faux d'écrire dans le cas d'un signal périodique, non harmonique pur :

$$\boxed{\cancel{|u_s| = G(\omega)\cdot|u_e|}}$$

puisque u_e contient plusieurs fréquence et pas seulement ω !

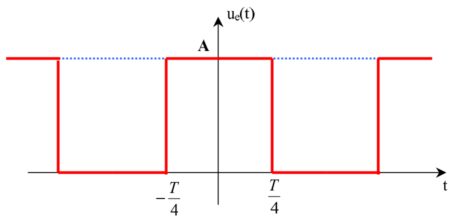
Propriété IV-1: Conservation des harmoniques (très important :)

Le spectre du signal de sortie d'un dispositif linéaire comporte au plus le même nombre d'harmoniques et aux mêmes fréquences que celui du signal d'entrée.

<u>Illustration :</u> en live ! ! ! (un peu plus loin)

b - Filtrage de composantes

Considérons **un signal créneau pair de période** T de valeur moyenne $\dfrac{A}{2}$ représenté ci-contre et attaquant l'entrée d'un filtre linéaire :



Sa décomposition spectrale s'écrit :

$$u_e(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cos\left[(2k+1)\omega t\right]$$

La suite propose de passer en revue l'effet des principaux filtres sur le signal $u_e(t)$.

i) Passe-bas

Objectif "classique" : ne garder que la composante continue d'un signal.

Le filtre est passif type RC de fonction de transfert :

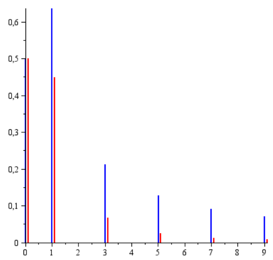
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \implies H(jx) = \frac{1}{1+jx} \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} x = \omega/\omega_c \\ \omega_c = \dfrac{1}{RC} \end{array}\right.$$

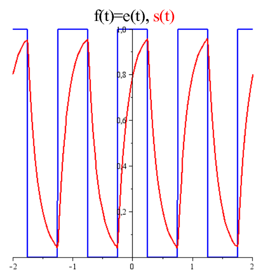
On cherche à isoler la composante continue $a_0 = \dfrac{A}{2}$ du signal.

- Choisissons dans un premier temps une pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{2\pi}{T} = \omega$,soit :

$$x = RC\omega = 1$$

  Le résultat du filtrage est simulé numériquement ci-dessous. On constate un taux d'ondulation encore trop fort. L'analyse spectrale révèle néanmoins que le seul terme résiduel significatif est le fondamental.





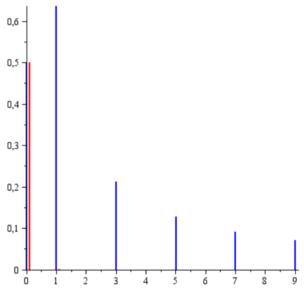
- Choisissons maintenant une pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{1000}\dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\omega}{1000}$, soit :

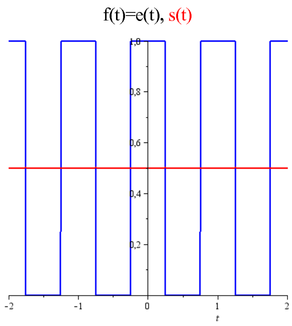
$$x = RC\omega = 1000$$

  Le résultat est naturellement plus satisfaisant, avec un taux d'ondulation résiduel à peine perceptible.

ii) Passe-haut

Objectif "classique" : supprimer la composante continue d'un signal tout en préservant une fidélité maximale de restitution du fondamental et des harmoniques.
Reprenons le signal créneaux pair (comportant un "offset" a_0), représenté plus haut.





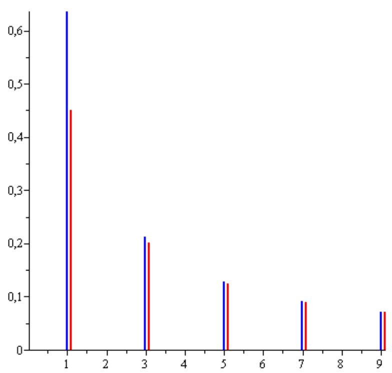
En prenant le cas d'un filtre passif RC du premier ordre de fonction de transfert : $H(jx) = \dfrac{jx}{1+jx}$

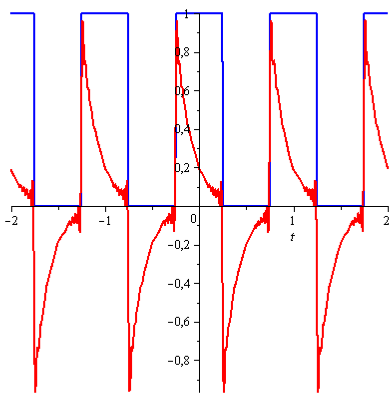
- On choisit dans un premier temps une pulsation de coupure de :

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

soit :

$$x = RC\omega = 1$$





<u>Observations :</u>
Le fondamental est fortement altéré. Un tel filtrage est donc inacceptable.

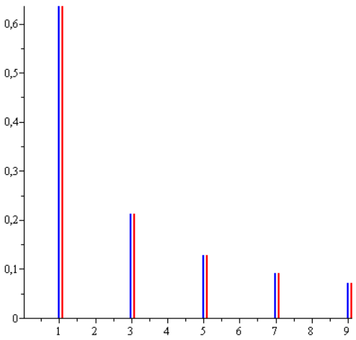
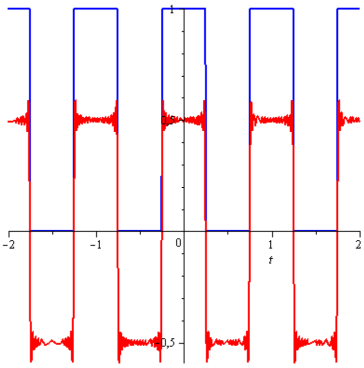
- En prenant cette fois :

$$\omega_c = \frac{1}{1000}\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{1000}\omega \text{ i.e. } RC\omega = 1000$$

le résultat est le suivant :
<u>Observations :</u>
La partie variable du signal est maintenant correctement transmise ; le filtrage est ainsi satisfaisant.

iii) <u>Passe-bande</u>

<u>Objectif "classique" :</u> ne garder qu'une composante sinusoïdale du signal, par exemple le fondamental.
On filtre par exemple le signal créneau pair avec un RLC passe-bande passif de fonction de transfert :

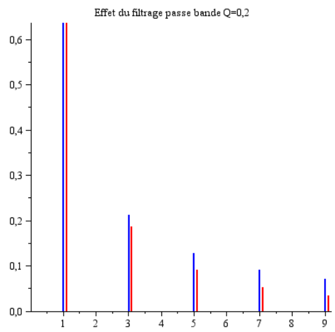



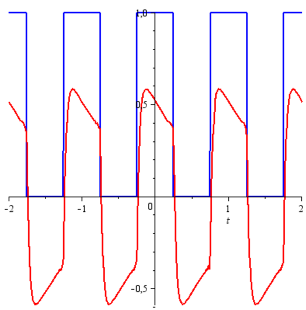
$$H(jx) = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} Q = \dfrac{1}{2m} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ x = \dfrac{\omega}{\omega_0} \end{array}\right.$$

ATTENTION(!!!) : on doit "centrer" le filtre sur la pulsation du signal (i.e. du fondamental) avec $\omega_0 = \omega$.

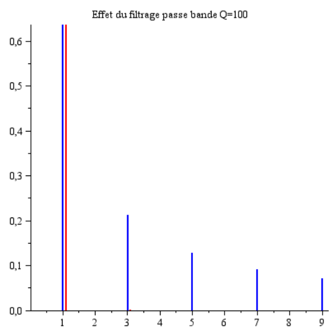
Observons le résultat en fonction de la valeur du facteur de qualité :

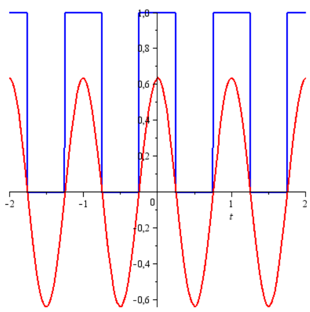
- $Q = 0,2$:





- $Q = 100$:





Conclusion : l'isolement complet du fondamental (ou d'une harmonique) nécessite une forte acuité du filtre.

c - Rôle des harmoniques de haut rang

En considérant un signal $e(t)$ créneaux de front montant pour $t = 0^+$ avec composante continue que l'on applique à l'entrée de deux systèmes, respectivement **passe-bas** puis **passe-haut** ; observons dans ces deux cas le signal de sortie $s(t)$ sur les simulations numériques suivantes :

- FILTRE PASSE-BAS

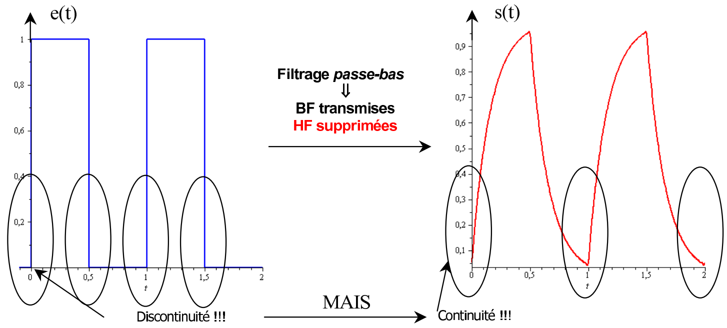


FIGURE I.18 – La suppression des HF ne permet pas de restituer les variations rapides du signal

- FILTRE PASSE-HAUT

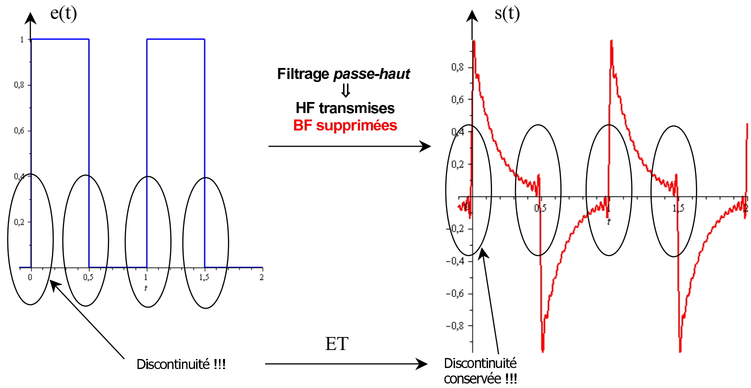


FIGURE I.19 – La conservation des HF assure la conservation des variations rapides du signal

Les discontinuités, et par extension les variations temporelles rapides présentes dans le signal d'entrée, sont éliminées une fois ce dernier traité par un filtrage passe-bas et conservées par un filtrage passe-haut $\Longrightarrow$

Propriété IV-2: RÔLE DES HARMONIQUE DE HAUT RANG

Les harmoniques de haut rang d'un signal contribuent aux variations temporelles rapides de celui-ci.

IV.3 Caractère intégrateur des filtres

a - Conditions d'intégration

Supposons un signal d'entrée de forme sinusoïdale :

$$e(t) = E \cdot cos(\omega\ t + \varphi) \qquad \stackrel{cplx}{\longrightarrow} \qquad \underline{e}(t) = E \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Sa primitive complexe s'écrit :

$$\underline{s}(t) = \int \underline{e}(t) \cdot dt = \frac{E}{j\omega} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\frac{E}{\omega}}_{\rightarrow G \sim \frac{1}{\omega}} \cdot e^{j(\omega\ t + \varphi \underbrace{- \frac{\pi}{2}}_{\text{déphasage requis}})}$$

soit en notation réelle :

$$s(t) = \int e(t) \cdot dt = \frac{E}{\omega} \cdot cos\left(\omega\ t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Propriété IV-3: Condition d'intégration pour un filtre

Les deux conditions pour qu'un filtre présente un caractère intégrateur pour une composante de pulsation ω sont donc :

- ◇ un signal de sortie déphasé de $-\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée et ce quelque soit la pulsation ω.
- ◇ un signal de sortie d'amplitude divisée par ω par rapport au signal d'entrée de pulsation ω, soit une pente de $-20\ dB/\text{décade}$ dans la courbe de réponse en gain pour la fréquence considérée.

Conséquence pour un signal périodique : chaque composante doit être intégrée donc :
si le signal périodique possède un développement en SF :

$$e(t) = \sum_n d_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

alors le signal de sortie doit s'écrire

$$s(t) = \int e(t) \cdot dt = \sum_n \frac{d_n}{n\omega} \cos(n\omega t + \varphi_n - \frac{\pi}{2})$$

ainsi on doit assurer en sortie du filtre **pour toutes les composantes du signal** $e(t)$:

[un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$
[une amplitude divisée par la pulsation pour chaque harmonique soit pour le rang n $\times \frac{1}{n\omega}$

b - Filtres intégrateurs

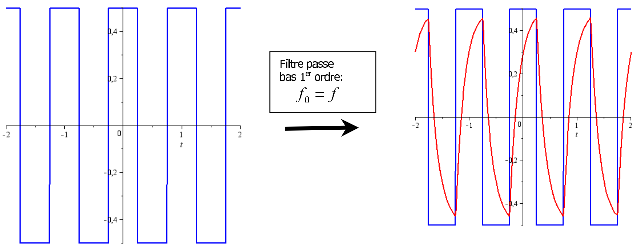
Exercice de cours: **(IV.3) - n° 4.** *Quels sont les filtres présentant les conditions requises pour réaliser une opération d'intégration. Confirmer vos résultats à l'aide de la fonction de transfert correspondante.*

(Résultat : PB1 et PBde2)

Exemple avec un passe-bas passif du premier ordre

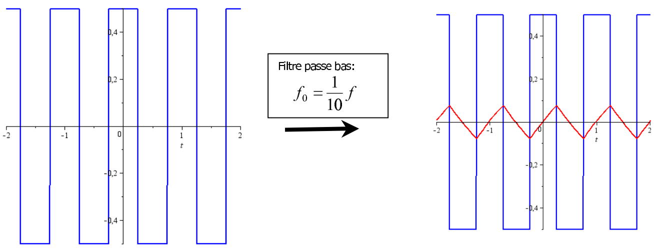
Cherchons par exemple à intégrer un signal créneau pair de pulsation ω :

- $\omega_c = \omega$



$\Longrightarrow$ non satisfaisant.

- $\omega_c = \dfrac{\omega}{10}$



$\Longrightarrow$ satisfaisant.

c - Exemple : recherche des conditions d'intégration

On considère le circuit RC ci-contre :

❶ Montrer que la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

$$\text{avec :} \quad \omega_2 = \frac{1}{RC'} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{1}{R(C + C')}$$

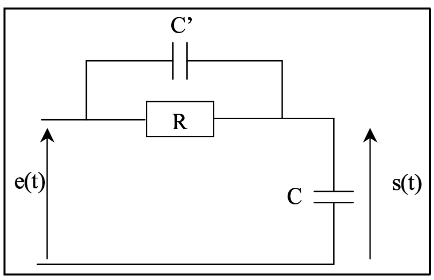


Figure I.20 – Filtre RC passe-bas)

En choisissant $C >> C'$ on a $\omega_1 << \omega_2$

❷ Montrer que le caractère intégrateur est obtenu pour les pulsations comprises dans l'intervalle :

$$\omega_1 << \omega << \omega_2$$

NB : les harmoniques d'ordre trop élevé ne sont pas dans l'intervalle d'intégration.

IV.4 Caractère dérivateur des filtres

a - Conditions de dérivation

On reprend ici un signal d'entrée de forme sinusoïdale :

$$e(t) = E \cdot cos(\omega\ t + \varphi) \qquad \xrightarrow{cplx} \qquad \underline{e}(t) = E \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Sa dérivée complexe s'écrit :

$$\underline{s}(t) = \frac{d}{dt}\underline{e}(t) = j\omega \cdot E \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = \underbrace{\omega \cdot E}_{\to G\sim\omega} \cdot e^{j(\omega t+\varphi+\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{déphasage requis}})}$$

qui donne en notation réelle :

$$s(t) = \omega \cdot E \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Propriété IV-4: CONDITIONS DE DÉRIVATION POUR UN FILTRE

Les deux conditions pour qu'un filtre présente un caractère dérivateur sont donc :

- ◇ un signal de sortie déphasé de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée et ce quelque soit la pulsation ω.
- ◇ un signal de sortie d'amplitude multipliée par ω par rapport au signal d'entrée de pulsation ω, soit une pente de $+20\ dB/\text{décade}$ dans la courbe de réponse en gain pour la fréquence considérée.

CONSÉQUENCE POUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE : de la même manière, chaque composante doit être dériveé donc :

$$e(t) = \sum_n d_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ donc : } s(t) = \frac{d}{dt}e(t) = \sum_n n\omega \cdot d_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \frac{\pi}{2})$$

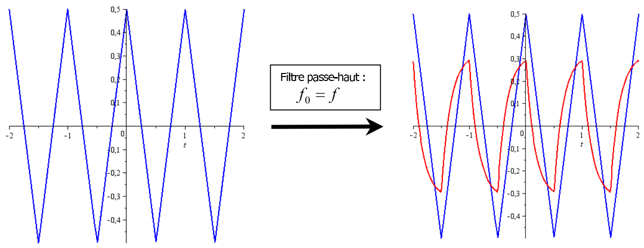
b - Filtres dérivateurs

Exercice de cours: **(IV.4) - n° 5.** *Quels sont les filtres présentant les conditions requises pour réaliser une opération de dérivation. Confirmer vos résultats à l'aide de la fonction de transfert correspondante.*

Exemple avec un passe-haut passif du premier ordre.

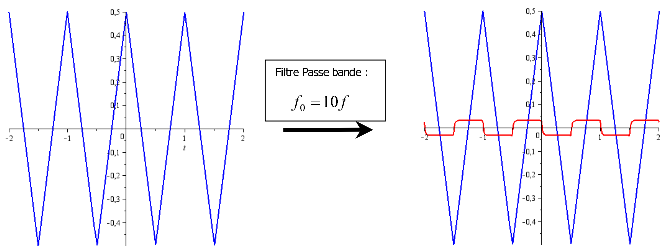
Cherchons par exemple à dériver un signal triangle pair de pulsation ω :

- $\omega_c = \omega$



$\Longrightarrow$ non satisfaisant.

- $\omega_c = 10\omega$



$\Longrightarrow$ satisfaisant.

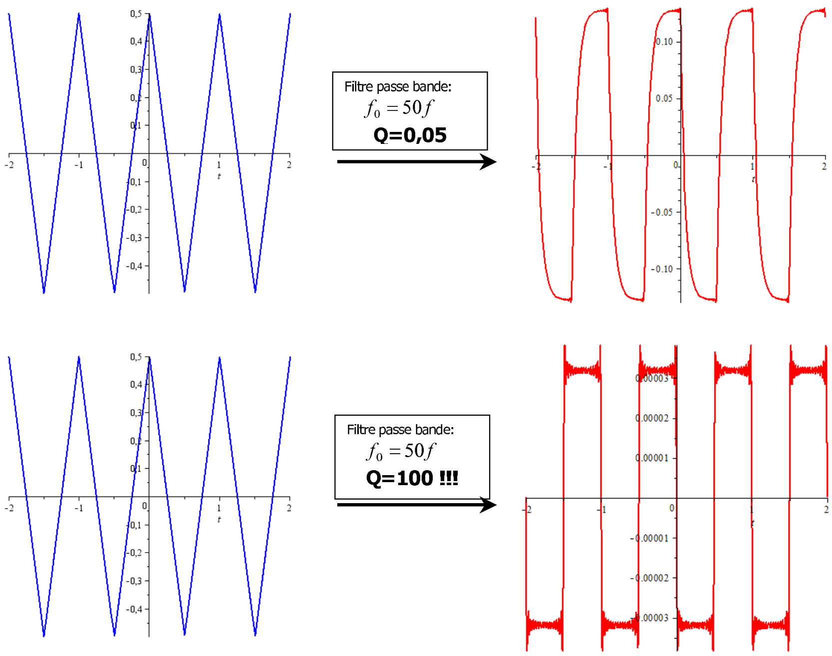
c - Cas particulier du filtre passe-bande : problème de l'acuité du filtre

Considérons un filtre passe-bande passif RLC dont on rappelle l'expression de la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

En attaquant l'entrée de ce filtre par un signal triangle $e(t)$ de pulsation $\omega << \omega_0$, on s'attend à observer en sortie un signal $s(t)$ correspondant à la dérivée de $e(t)$. Envisageons néanmoins deux cas de figure concernant la valeur du facteur de qualité :

- $Q = 0,05$, valeur très faible et donc filtre peu sélectif :
  $\Longrightarrow$ la dérivation du signal $e(t)$ est assez satisfaisante.
- $Q = 100$, valeur très forte et donc filtre très sélectif :
  $\Longrightarrow$ la dérivation du signal $e(t)$ est cette fois médiocre, avec de fortes "ondulations" du signal autour des discontinuités attendues dans un signal créneau.
  Ceci est une conséquence de la trop forte amplification des harmoniques de haut rang qui, du fait du fort facteur de qualité Q, ne sont pas situées dans une zone de pente $+20\ dB/decade$ dans le diagramme de réponse en gain, mais dans le pic de résonance du filtre :



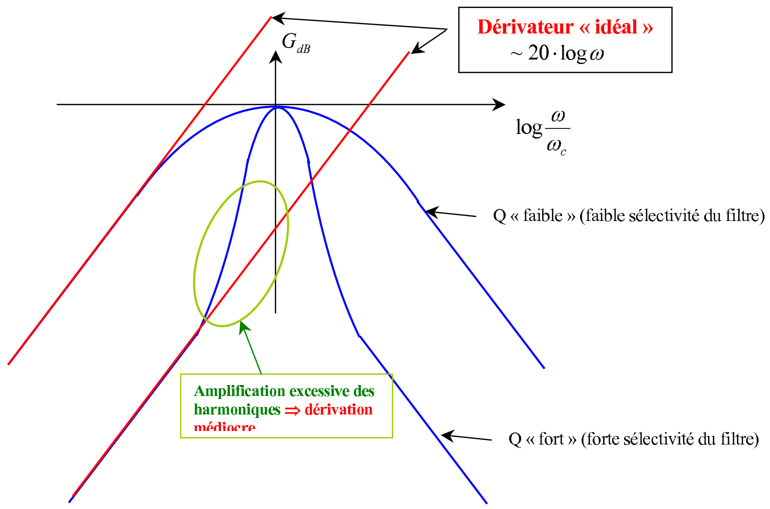


FIGURE I.21 – Problème de suramplification des harmoniques de rang élevé.

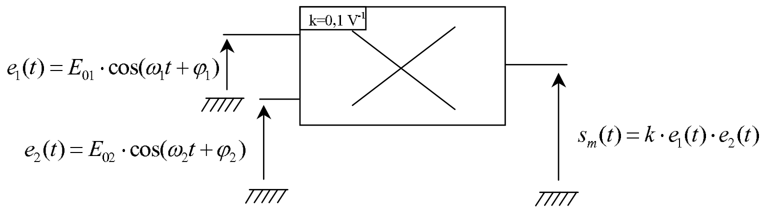
Propriété IV-5: CONDITION SUPPLÉMENTAIRE DE DÉRIVATION POUR UN PASSE-BANDE

Dans le cas des filtres passe-bande, l'opération de dérivation est assurée moyennant la vérification d'un 3$^{\text{ième}}$ critère :

$$\boxed{Q << 1}$$

V Petite approche des circuits non linéaires

V.1 Un exemple classique : le multiplieur

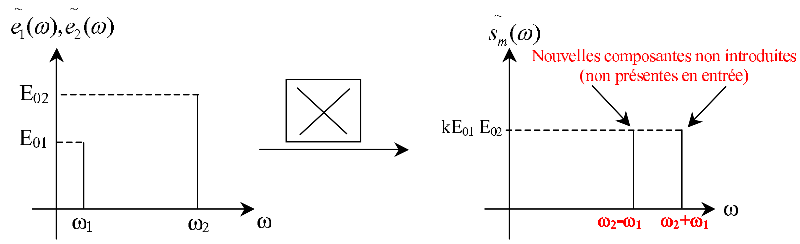


Le signal de sortie s'écrit :

$$s_m(t) = k \cdot e_1(t) \times e_2(t) = kE_{01}E_{02} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

soit :

$$s_m(t) = k\frac{E_{01}E_{02}}{2}\left[\cos\left(\underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{\text{nvlle fréquence introduite}} t + (\varphi_2 - \varphi_1)\right) + \cos\left(\underbrace{(\omega_2 + \omega_1)}_{\text{nvlle fréquence introduite}} t + (\varphi_2 + \varphi_1)\right)\right]$$



<u>CONCLUSION :</u> deux nouvelles fréquences non présentes dans le spectre du signal d'entrée sont introduites dans le signal de sortie du circuit $\Rightarrow$ **circuit non linéaire**

V.2 Exemples d'applications :

- <u>MODULATEUR D'AMPLITUDE</u> : La transmission d'un signal par voie hertzienne nécessite d'amener celui-ci en haute fréquence. On peut réaliser ceci par **modulation d'amplitude** à l'aide d'un circuit multiplieur.

  Exemple :

  $\left[\begin{array}{l} e_1(t) \text{ à transmettre (BF) : } f_1 = f_e = 100\ Hz \\ e_2(t) \text{ porteuse (HF) : } f_2 = f_p = 10\ kHz \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ 2 fréquences HF en sortie : $\left[\begin{array}{l} f_2 - f_1 = 9,9\ kHz \\ f_2 + f_1 = 10,1\ kHz \end{array}\right.$

- <u>EXTRACTEUR DE VALEUR EFFICACE :</u>
  <u>Exercice de cours:</u> **(V.2) - n° 6.** *On souhaite pouvoir mesurer la valeur efficace d'un signal $e(t)$. Proposer un montage sachant que l'on dispose d'un composant multiplieur et d'un composant extracteur de racine carré.*

- <u>DÉMODULATION PAR DÉTECTION SYNCHRONE :</u> en TP ! ! !