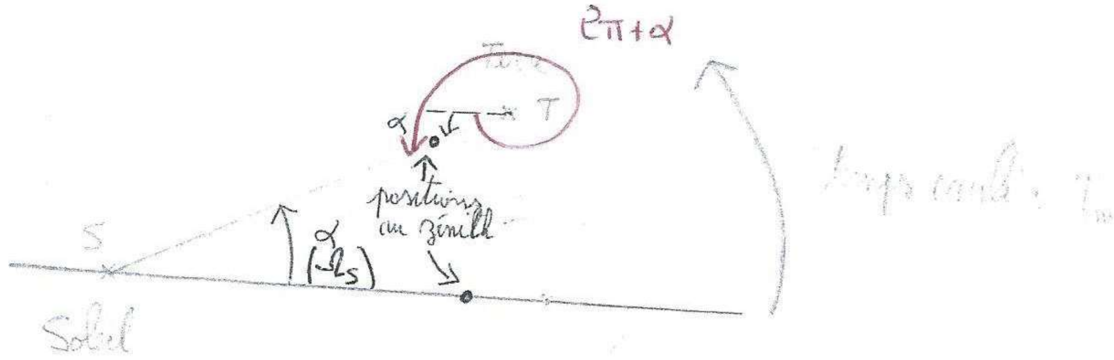
TD n°2

Exercice n°1 : Les différentes périodes des astres

① Le schéma ci-dessous représente les évolutions des angles au bout d'un jour solaire moyen :



[temps écoulé entre 2 positions au zénith : T_m
[angle parcouru ——————— : $2\pi + \alpha$

donc $2\pi + \alpha = \Omega_S T_m = \frac{2\pi}{T_S} T_m$ (1).

or $\alpha = \Omega_a T_m = 2\pi \frac{T_m}{T_a}$

soit (1) $\Rightarrow$ $2\pi + 2\pi \frac{T_m}{T_a} = 2\pi \frac{T_m}{T_S} \Rightarrow \frac{T_m}{T_S} = 1 + \frac{T_m}{T_a}$.

qui permet de dégager $T_S = \dfrac{T_m}{1 + \frac{T_m}{T_a}}$.

On peut alors former la différence demandée soit :

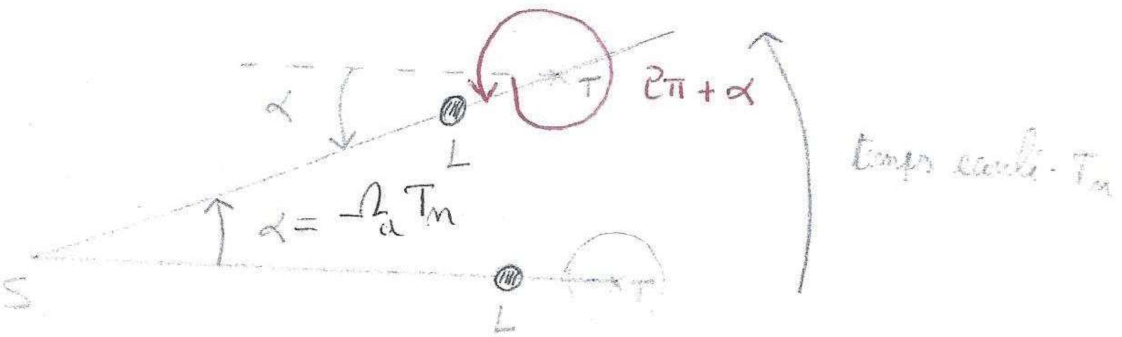
$$T_m - T_S = T_m - \frac{T_m}{1 + \frac{T_m}{T_a}} = \frac{T_m^2}{T_a} \times \frac{1}{\frac{T_a + T_m}{T_a}} \Rightarrow T_m - T_S = \frac{T_m^2}{T_m + T_a}$$

A.N. $T_m - T_s = 235,904\ s$

② On reprend ici la même démarche mais dans le cas de l'étude du mvt de la Lune ;

<u>Nouvelle lune</u> $\equiv$ situation d'alignement exact Soleil-Lune-Terre <u>dans cet ordre</u> ie la "Lune est "sombre"

T_n est la durée entre 2 nouvelles Lunes $\Rightarrow$ cf schéma



$$2\pi + \alpha = \Omega_s T_n \quad \text{or} \quad \alpha = \Omega_a T_n$$

$$\Rightarrow 2\pi + \Omega_a T_n = \Omega_s T_n \Rightarrow 2\pi + 2\pi \frac{T_n}{T_a} = \frac{2\pi}{T_S} T_n \Rightarrow 1 + \frac{T_n}{T_a} = \frac{T_n}{T_S}$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{1}{\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_a}} = \frac{T_S T_a}{T_a - T_S}$$

On forme enfin la différence $T_n - T_S = \frac{T_S T_a}{T_a - T_S} - T_S = \frac{T_S^2}{T_a - T_S}$

A.N. $T_n - T_S = \frac{27,3^2}{365,25 - 27,3} = 2,205\ j$

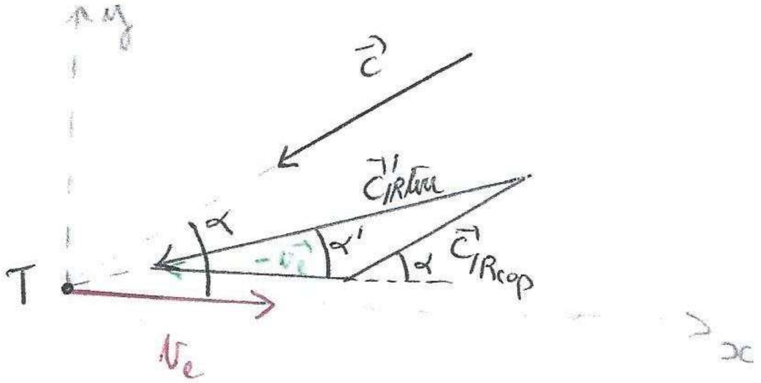
Exercice n°2 : Aberration de la lumière provenant des étoiles

① Cf cours : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ (R_{terr}/R_{cop})

soit si l'on postule la validité pour des vitesses $\sim c$:

$$(e) \Leftrightarrow \vec{C}_{/R_{cop}} = \vec{C}'_{/R_{terr}} + \vec{v}_e . (R_{terr}/R_{cop}) \Rightarrow \vec{C}'_{/R_{terr}} = \vec{C}_{/R_{cop}} - \vec{v}_e$$

②



Par projection sur les axes $[T;x)$ et $[T;y)$ on a :

$(e) . \vec{e}_x \Rightarrow c \cos\alpha + v_e = c' \cos\alpha'$ (L_1)

$(e) . \vec{e}_y \Rightarrow c \sin\alpha = c' \sin\alpha'$ (L_2)

$$(L_2)/(L_1) \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{v_e}{c}}}$$

③ A.N. $\alpha - \alpha' = \alpha - \mathrm{arctg}\left[\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha + \frac{v_e}{c})}\right] = 5{,}73 . 10^{-3}$ °

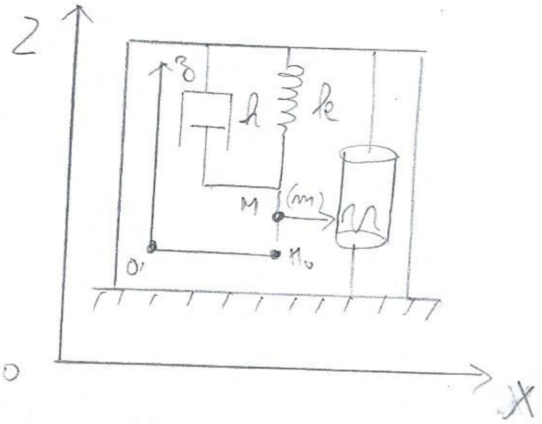
soit en seconde d'angle : $(\alpha - \alpha')_{('')} = (\alpha - \alpha')_{(°)} \times 3600 = 20{,}6''$

⇒ écart mesurable

TD n°2 :

Référentiels non galiléens

Exercice n°3 : Principe d'un sismographe



① Σ masselotte $M(m)$

(R) : réf terrestre

(R') : réf du sol local, non galiléen en translation $\Rightarrow \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$

donc $\vec{a}_e(R'/R) = \vec{a}(O')_R = \ddot{Z}(t)\,\vec{e_z}$

PFS ds R' immobile : $\Rightarrow \vec{0} = m\vec{g} + k(l_s - l_0)\vec{e_z}$

$\Rightarrow -mg + k(l_s - l_0) = 0$

PFD ds R' mobile : $m\vec{a}(M)_{/R'} = \underset{\text{autre que poids}}{\sum \vec{F}} + m\vec{g} \underbrace{- m\,\vec{a}_e(R'/R)}_{\vec{F}_{ie}}$

$m\vec{a}(M)_{/R'} = m\vec{g} + k(l_s - z(t) - l_0)\vec{e_z} - h\dot{z}(t)\vec{e_z} - m\ddot{Z}(t)\vec{e_z}$

$\cdot \vec{e_z} \longrightarrow m\ddot{z}(t) = \cancel{-mg} + \cancel{k(l_s - l_0)} - kz(t) - h\dot{z}(t) - m\ddot{Z}(t)$

d'où $\ddot{z}(t) + \frac{h}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = -\ddot{Z}(t)$

Posons : $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 m}{h} = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{h}\sqrt{mk} \end{cases}$

donc : $\boxed{\ddot{z}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = -\ddot{Z}(t)}$

Dimension de $\frac{Q}{\omega_0}$: $[\ddot{z}] = L.T^{-2} = \left[\frac{\dot{z}}{\frac{Q}{\omega_0}}\right] = \frac{L.T^{-1}}{\left[\frac{Q}{\omega_0}\right]}$

$\Rightarrow \left[\frac{Q}{\omega_0}\right] = \frac{\cancel{L}.T^{-1}}{\cancel{L}\,T^{-2}} = T \Rightarrow$ temps caractéristique d'amortissement du régime libre.

② (H) RSF $\Rightarrow$ $Z(t) = Z_0 \cos(\omega t) \rightarrow \underline{Z}(t) = Z_0 e^{j\omega t}$

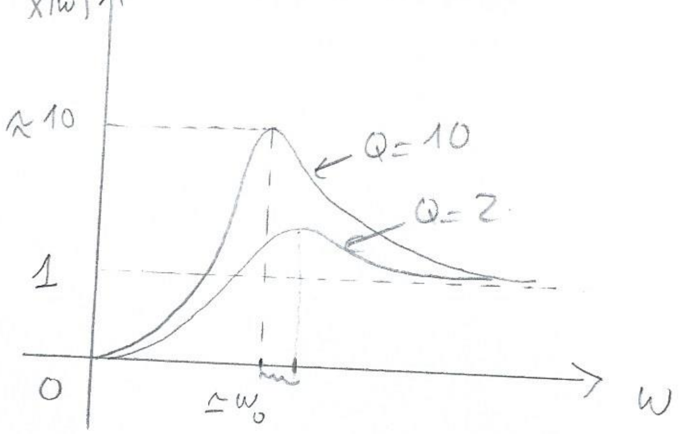
$z(t) = z_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{z}(t) = z_0(\omega)e^{j(\omega t+\varphi)}$

(e) $\Rightarrow -\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = +\omega^2 \underline{Z}$

$\Rightarrow \underline{z} = \frac{+\omega^2 \underline{Z}}{(\omega_0^2-\omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} \Rightarrow \boxed{\underline{z} = \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\underline{Z}}$

Soit : $\begin{cases} z_0(\omega) = \frac{\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2\right]^{1/2}} Z_0 \\ \varphi(\omega) = -\arg\left[(\omega_0^2-\omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right] = -\arctan\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)} \end{cases}$

Tracé de la réponse en amplitude : $X = \frac{z_0(\omega)}{Z_0}$ (on adimensionne !)



tracé pour $Q = 10$

$\omega_0 = 100\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

($f_0 \approx 15\ \mathrm{Hz}$)

$\lim_{\omega\to\infty} z_0(\omega) \rightarrow Z_0 \Rightarrow \boxed{X \rightarrow 1}$

③

Commentaires : fidélité plus ou moins bonne du sismographe suivant le choix des paramètres k, m, et h.

idéal : assurer que $\omega \gg \omega_0$ ie ω_0 faible par rapport à ω et Q faible

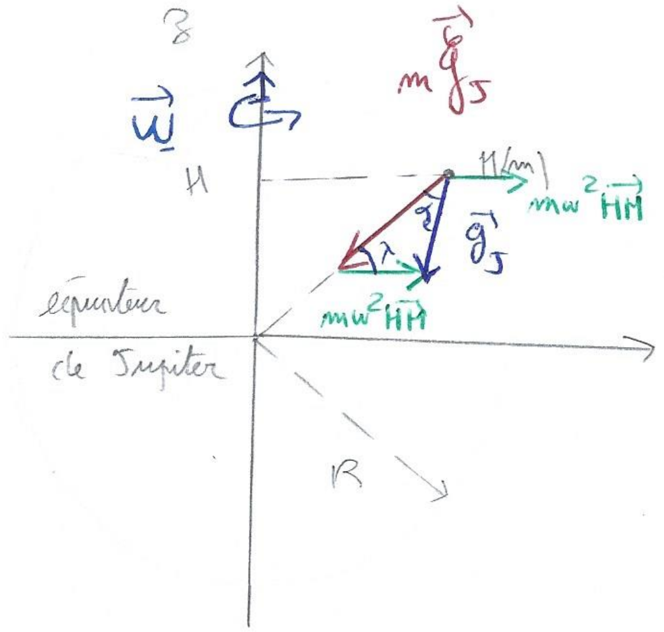
$$\Longrightarrow X(\forall \omega \gg \omega_0) \simeq 1 \text{ ie } \Rightarrow \boxed{B_0(\omega) \simeq Z_0}$$

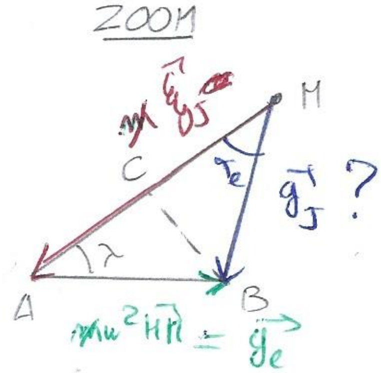
le sismographe enregistre exactement les amplitudes du mvt du sol.

exemple de valeurs numériques :

$$\begin{aligned} m &= 100g \\ k &= 1\,N.m^{-2} \\ h &= 1\,kg.s^{-1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_0 = 3{,}16 \text{ rad}.s^{-2} \Rightarrow f_0 = 0{,}5\ Hz \\ Q = 0{,}316 \end{cases}$$

Exercice n° 5 : Pesanteur apparente (Jupiter)





Géométriquement on tire 2 équations :

$$\begin{cases} g_J \cos\alpha_e + g_e \cos\lambda = g_J & (1) \\ g_e \sin\lambda = g_J \sin\alpha_e & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{g_J = g_e \frac{\sin\lambda}{\sin\alpha_e}}$$

$$(1) \Rightarrow g_e \frac{\sin\lambda \cos\alpha_e}{\sin\alpha_e} + g_e \cos\lambda = g_J$$

$$\Rightarrow \cos\lambda + \sin\lambda \underbrace{\frac{\cos\alpha_e}{\sin\alpha_e}}_{\frac{1}{tg\,\alpha_e}} = \frac{g_J}{g_e}$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha_e = \frac{\sin\lambda}{\frac{g_J}{g_e} - \cos\lambda}$$

↳ à expliciter

$$\frac{g_J}{g_e} = \frac{GM_J}{R^2\omega^2 R\cos\lambda}$$

$$\text{d'où } tg\,\alpha_e = \frac{\sin\lambda}{\frac{GM_J}{R^2\omega^2 R\cos\lambda} - \cos\lambda} = \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\underbrace{\frac{GM_J}{R^2\omega^2 R}}_{A} - \cos^2\lambda}$$

Calcul de λ_{max} pour α_e maxi

$$\frac{d \tan \alpha_e}{d\lambda} = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)(A-\cos^2\lambda) + \sin\lambda\cos\lambda \times 2\cos\lambda\sin\lambda}{D^2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2\lambda)(A-\cos^2\lambda) + 2\sin^2\lambda\cos^2\lambda = 0 \quad (e)$$

A résoudre numériquement : $A = \dfrac{GM_J}{R^3\omega^2} = \dfrac{g_J}{R\left(\frac{2\pi}{T_J}\right)^2}$

$$= \frac{26{,}5}{7.10^7 \times \left(\frac{2\pi}{(9\times3600+52\times60)}\right)^2}$$

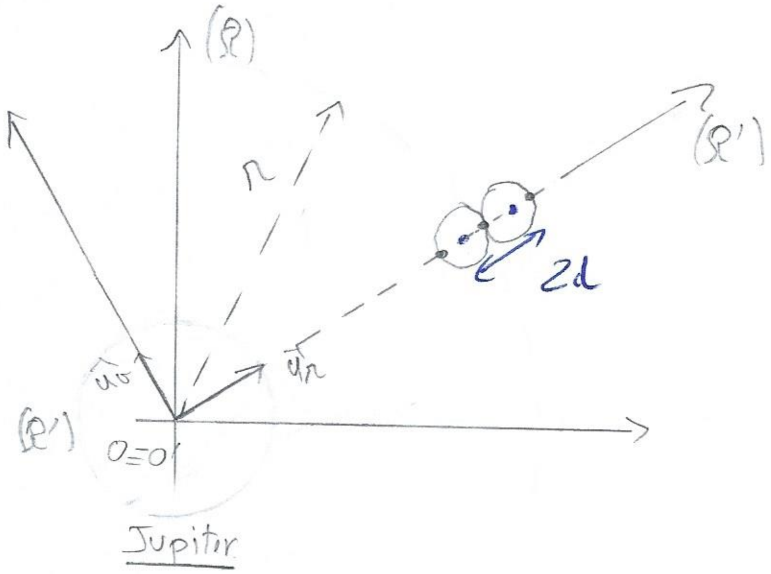
$$= 12{,}05$$

$(e) \Rightarrow \lambda_{max} = 43{,}76°$

d'où $\tan \alpha_e = \dfrac{\sin\lambda\cos\lambda}{A-\cos^2\lambda} = 0{,}043.$

soit $\alpha_e = 2{,}479 \simeq 2{,}48°$

Exercice n° 11 : Comète SHOEMAKER-LEVY 9



① ⚠ comète constituée de 2 masses m_1 en C_1
m_2 en C_2

$$\begin{cases} m\,\vec{a}(C_1)_{/R_J} = -\dfrac{GM_J m}{(r-d)^2}\vec{u_r} + \vec{F}_{C_2/C_1} \\ \\ m\,\vec{a}(C_2)_{/R_J} = -\dfrac{GM_J m}{(r+d)^2}\vec{u_r} + \vec{F}_{C_1/C_2} \end{cases}$$

⚠ C_1 et C_2 : mvt circulaire $\vec{a}(C_1)_{/C_2} = -r_{C_1/C_2}\, w^2\, \vec{u_r}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m(r-d)\,w^2\,\vec{u_r} = -\dfrac{GM_J m}{(r-d)^2}\vec{u_r} + \vec{F}_{C_2/C_1} \quad (L_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{F}_{C_1/C_2} \\ -m(r+d)\,w^2\,\vec{u_r} = -\dfrac{GM_J m}{(r+d)^2}\vec{u_r} + \vec{F}_{C_1/C_2} \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{L_1}{m(r-d)} + \frac{L_2}{m(r+d)} \overset{d \ll r}{\Rightarrow} 2w^2 \simeq GM_J\left[\frac{1}{(r-d)^3} + \frac{1}{(r+d)^3}\right] \right.$$

$$\text{d'où} \quad w^2 \simeq \frac{GM_J}{2r^3}\left(\frac{1}{(1-\frac{d}{r})^3} + \frac{1}{(1+\frac{d}{r})^3}\right) \simeq \frac{GM_J}{2r^3}\left(1+\frac{3d}{r}+1-\frac{3d}{r}\right)$$

$$\omega^2 \simeq \frac{GM_J}{r^3} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM_J}{r^3}}}$$

② $\vec{\omega}_{R'/R} \neq \vec{0} \Rightarrow$ réf (R') non galiléen.

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}\right) \neq \vec{0}$$

③ Dans R':

$$\vec{F}_{T/R'} = \vec{F}_{grav\,J/②} + \vec{N}_{2/1} + \vec{F}_{ie}(R'/R) + \vec{F}_{grav\,2/1}$$

$$= -\frac{GM_J m}{(r-d)^2}\vec{u}_r + \vec{N}_{2/1} + m\omega^2\vec{OM} + \frac{Gm^2}{4d^2}\vec{u}_r$$

$$= -\frac{GM_J m}{r^2\left(1-\frac{d}{r}\right)^2} + \vec{N}_{2/1} + m\omega^2(r-d)\,\vec{u}_r + \frac{Gm^2}{4d^2}\vec{u}_r$$

Si sphère ① en équilibre dans R': $\vec{F}_{T/R'} = \vec{0}$

$$\vec{N}_{2/1} = \frac{GM_J m}{r^2\left(1-\frac{d}{r}\right)^2}\vec{u}_r - m\omega^2(r-d)\,\vec{u}_r - \frac{Gm^2}{4d^2}\vec{u}_r$$

$$= \left(\frac{GM_J m}{r^2}\left(1+\frac{2d}{r}\right) - \frac{GM_J m}{r^3}(r-d) - \frac{Gm^2}{4d^2}\right)\vec{u}_r$$

$$= \left(\frac{GM_J m}{r^2}\left(1 \overset{-1}{+} \frac{2d}{r} + \frac{d}{r}\right) \overset{-\frac{GM_J m}{r^2}}{-} \frac{Gm^2}{4d^2}\right)\vec{u}_r$$

$$= \left(\frac{GM_J m}{r^2}\left(1 \overset{-2}{+} \frac{3d}{r}\right) - \frac{Gm^2}{4d^2}\right)\vec{u}_r$$

$$\vec{N}_{2/1} = \frac{GM_J m}{r^2}\left(\frac{3d}{r} - \frac{\cancel{G}m\cancel{s}^2}{4d^2}\frac{r^2}{\cancel{G}M_J\cancel{s}}\right)\vec{u_r}$$

soit $$\vec{N}_{2/1} = \frac{GM_J m}{r^2}\left(\frac{3d}{r} - \frac{m}{4M_J}\left(\frac{r}{d}\right)^2\right)\vec{u_r}$$

soit : $$\boxed{\vec{N}_{2/1} = \frac{GM_J m}{r^2}\left(3\varepsilon - \frac{m}{4M_J}\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vec{u_r}}$$

⑤ Contact rompu : $\vec{N}_{2/1} = \vec{0}$

$$3\varepsilon - \frac{m}{4M_J}\frac{1}{\varepsilon^2} = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = \frac{m}{12M_J} = \left(\frac{d}{r_{lim}}\right)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{lim} = d\left(\frac{12M_J}{m}\right)^{1/3}}$$

$$2m = 2\rho_c\frac{4}{3}\pi d^3 \quad \text{d'où} \quad r_{lim} = d\left(\frac{12M_J}{\frac{4}{3}\rho_c\pi d^3}\right)^{1/3}$$

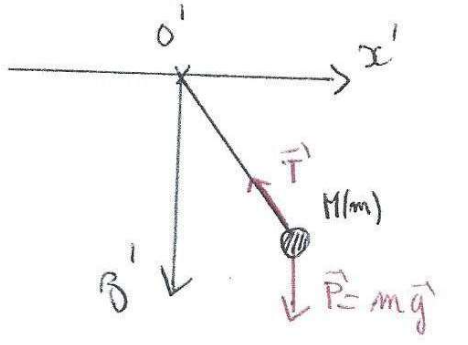
$$\Rightarrow r_{lim} = \left(\frac{3\times 12M_J}{4\rho_c\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{9M_J}{\rho_c\pi}\right)^{1/3}$$

A.N. $r_{lim} = 1{,}76.10^5$ km

⑥ $r_0 = 1{,}5\,R_J = 1{,}07.10^5$ km $< r_{lim}$

$\Rightarrow$ les forces de cohésion permettent de s'approcher plus près avant que les forces de marée ne disloquent la comète.

Exercice n°10 un salarié vraiment pointilleux



$\vec{a_e} = -a_e \vec{e_z}$ en montée

$\vec{a_e} = +a_e \vec{e_z}$ en descente $(a_e > 0)$

PFD dans R' : (e) $m\vec{a}(M)_{|R'} = \sum \vec{F}_{vraies} + \underbrace{\vec{F}_{ic}}_{=0} + \vec{F}_{ie} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{ic} - m\vec{a_e}$

Cas de la montée :

(e) : $m[l\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}] = -T\vec{e_r} + ma_e\vec{e_z} + mg\vec{e_z}$

$\xrightarrow{\cdot \vec{e_\theta}} \ddot{\theta} = -\frac{(g+a_e)}{l}\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \Omega_{0m}^2\,\theta \approx 0$

donc période en montée : $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_e}}$ avec $\left|\begin{array}{l}\sin\theta \approx \theta \\ \Omega_{0m}^2 = \sqrt{\frac{g+a_e}{l}}\end{array}\right.$

$\Rightarrow T_m = \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T_0}\,\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{a_e}{g}\right)}_{x}}}$

$\Rightarrow T_m = T_0\,\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

4/

Cas de la descente :

en reprenant la même démarche et en inversant le sens de $\vec{a}_e$ il vient :

$$T_d = T_0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Ecarts entre temps mesuré et temps "véritable" :

en montée : $T_m - T_0 = T_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right] < 0$

en descente $T_d - T_0 = T_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right] > 0$

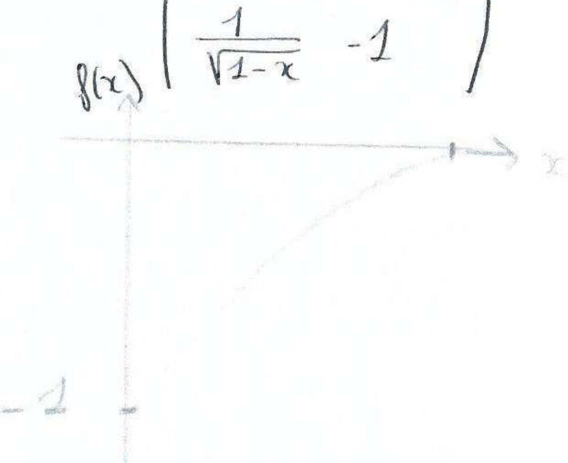
Conclusion : $T_m < T_0 \Rightarrow \Omega_m > \Omega_0 \Rightarrow$ liftier surpayé en montée

$T_d > T_0 \Rightarrow \Omega_d < \Omega_0 \Rightarrow$ —— souspayé en descente

question : compensation montée-descente ?

Idée : on peut tracer $f(x) = \frac{T_m - T_0}{T_d - T_0}$ pour $x \in]0;1[$ (NB : $a_e < g$)

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1} \right)$$



Bilan : $\forall\, a \in]0;g[$ on a

$f(x = \frac{a}{g}) > -1$

donc le liftier est sous payé puisque la compensation exacte serait $f(x) = -1$

Exercice n°13 : Les enfants qui chahutent en voiture

① Par définition : $\vec{a}(O') = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y$

$= a_y = \frac{d}{dt} v_y$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\dot{x}$ or $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = cte$

$\Rightarrow v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}^2 f'(x)^2$

d'où : $v_y = f' \frac{v}{(1+f'^2)^{1/2}}$ $\Rightarrow \dot{x} = \frac{v}{(1+f'^2)^{1/2}}$

On dérive à nouveau pour obtenir a_y :

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv_y}{dx} = \dot{x}\frac{d}{dx}\left[f' \frac{v}{(1+f'^2)^{1/2}}\right]$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{v}{(1+f'^2)^{1/2}} \times \left[f'' \frac{v}{(1+f'^2)^{1/2}} - f' \frac{v\, 2f'f''}{2(1+f'^2)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{v}{(1+f'^2)^{1/2}} \times \left[\frac{f''(1+\cancel{f'^2}) - \cancel{f'^2 f''}\, v}{(1+f'^2)^{3/2}}\right] \Rightarrow \boxed{a_y = \frac{f'' v^2}{(1+f'^2)^2}}$$

2) $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0} \Rightarrow R'$ réf rattaché au chassis est en translation (non rectiligne) accélérée car $\vec{a}(O')_{/R} \neq 0$

csq : A subit ds R' une $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O')_{/R}$

RFD sur $A(m)_{/R'}$: $m\,\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_{ress} - m\vec{a}(O')_{/R}$

$\cdot \vec{e}_y \Rightarrow$ $\boxed{m\ddot{y}' = -mg - k(y_1 - l_0) - m\frac{v^2 f''}{(1+f'^2)^2}}$

③ Si retour rapide à l'équilibre dans R' $\Rightarrow$ A en déplacement à $v' =$ cte

donc $a_y = \ddot{y}' = 0$ soit $-mg - k(y_1 - l_0) - \frac{m v^2 f''}{(1+f'^2)^2} = 0$

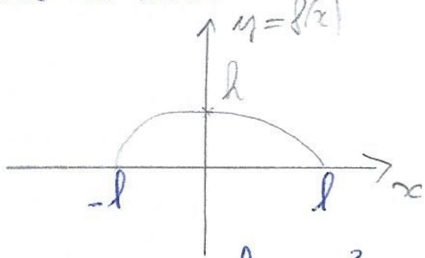
$$\vec{T} = -k(y_1 - l_0)\,\vec{e_y} = \left(mg + \frac{m v^2 f''}{(1+f'^2)^2} \right) \vec{e_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{T}\| = \left| mg + \frac{m v^2 f''}{(1+f'^2)^2} \right|}$$

<u>Si bosse</u> : $f'' < 0 \Rightarrow \|\vec{T}\| < mg$ $\Rightarrow$ la tension ne compense pas le poids
$\rightarrow$ soulèvement d'estomac

<u>Si creuse</u> $f'' > 0 \Rightarrow \|\vec{T}\| > mg$ $\Rightarrow$ la tension va ramener le pt A' vers le haut $\Rightarrow$ écrasement d'estomac.

④ <u>Idée</u> : choisir la vitesse telle que au sommet de bosse nous ayons $\|\vec{T}\| = 0$



ie $mg + \frac{m v^2}{(1+\underbrace{f'^2}_{=0})^2} f'' = 0$

$y(x) = h - ax^2$ $\quad a = \frac{h}{l^2}$

$f' = -2ax$

$f'' = -2a < 0$

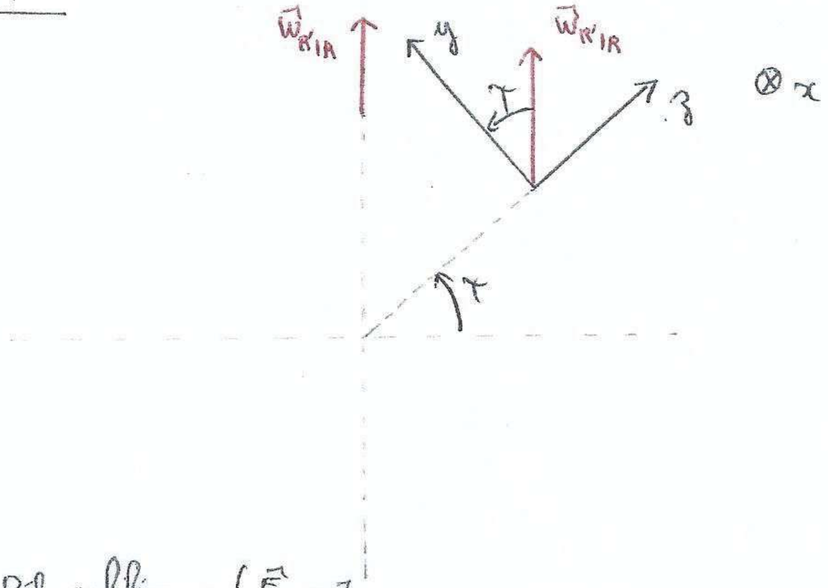
$\Rightarrow f'' = -\frac{2h}{l^2}$

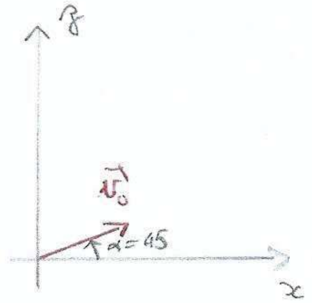
$$\Rightarrow g - v^2 \frac{2h}{l^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v = l\sqrt{\frac{g}{2h}}}$$

vitesse à acquérir pour assurer la sensation d'impesanteur au sommet de la bosse.

Exercice n° 14





1) Ⓗ Réf galiléen $\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ie} = \vec{0} \\ \vec{F}_{ic} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}(M)_{/R_{terre}} = -g\,\vec{e}_z \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha . t \end{cases}$

Pour $x(t_v) = v_0 \cos\alpha\, t_v = x_{final} \Rightarrow t_v = \dfrac{x_{final}}{v_0 \cos\alpha}$ A.N $t_v = 11{,}8\ min$

$z(t_v) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} g t_v^2 + v_0 \sin\alpha\, t_v = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} g \dfrac{x_{final}^{\cancel{2}}}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \dfrac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} \cancel{x_{final}} = 0$

$\Leftrightarrow v_0 = \left[\dfrac{g\, x_{final}}{2\cos^2\alpha\, \tg\alpha}\right]^{1/2}$ A.N $v_0 = 5000\ m.s^{-2}$

②_On suppose toujours que la pesanteur corrigée est selon la verticale du lieu

PFD dans R_{terre} :

NB: calcul idem ex 5

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} - 2m\vec{\omega}\begin{pmatrix}0\\ \cos\lambda\\ \sin\lambda\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\ddot{x} = -2w\left[\cos\lambda\,\dot{z} - \sin\lambda\,\dot{y}\right] & (1)\\ \ddot{y} = -2w\sin\lambda\,\dot{x} & (2)\\ \ddot{z} = -g + 2w\cos\lambda\,\dot{x} & (3)\end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \dot{y} = -2w\sin\lambda\, x + \underbrace{cte}_{=0}$ or à $t=0$ $\begin{cases}\dot{y}(0)=0\\ x(0)=0\end{cases} \Rightarrow cte = 0$

$(3) \Rightarrow \dot{z} = -gt + 2w\cos\lambda\, x + cte$ or à $t=0$ $\begin{cases}\dot{z}(0) = v_0\sin\alpha\\ x(0)=0\end{cases}$

donc $cte = v_0 \sin\alpha$

soit $(3) \Rightarrow \dot{z} = -gt + 2w\cos\lambda\, x + v_0\sin\alpha$

On injecte ces 2 équations dans (1):

$(1) \Rightarrow \ddot{x} = -2w\left[\cos\lambda(-gt + 2w\cos\lambda\, x + v_0\sin\alpha) + \sin\lambda\, 2w\sin\lambda\, x\right]$

$(1) \Rightarrow \ddot{x} + 4w^2 x = +2w\cos\lambda\, g\, t - 2w v_0 \sin\alpha\cos\lambda$

(1) Comme en exercice n°5, $4w^2 \ll \ddot{x}$ par hypothèse

$\Rightarrow \dot{x}(t) = w\cos\lambda\, g t^2 - 2wv_0\sin\alpha\cos\lambda\, t + \underbrace{cte}_{v_0\cos\alpha}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3} w\cos\lambda\, g t^3 - wv_0 \sin\alpha\cos\lambda\, t^2 + v_0\cos\alpha\, t$

donc $\dot{y} = -2\omega \sin\lambda \left[\frac{1}{3} \omega \cos\lambda\, g t^3 - \omega v_0 \sin\alpha \cos\lambda\, t^2 + v_0 \cos\alpha\, t \right]$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{6}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4 + \frac{2}{3}\omega^2 v_0 \sin\lambda \cos\lambda \sin\alpha\, t^3 - \omega v_0 \sin\lambda \cos\alpha\, t^2$$

$(+ cte = 0)$

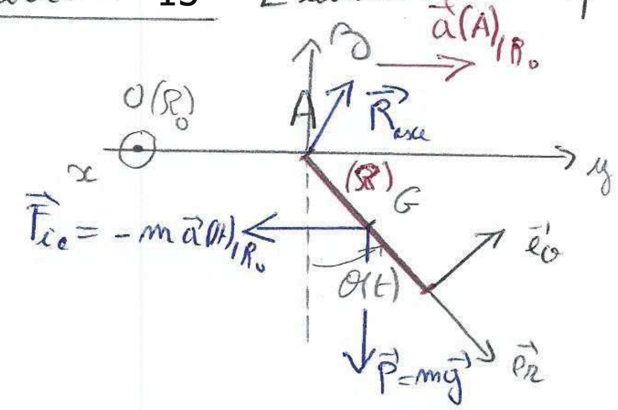
et $z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6}\omega^2 \cos^2\lambda\, g t^4 - \frac{2}{3}\omega^2 v_0 \sin\alpha \cos^2\lambda\, t^3$
$+ v_0 \omega \cos\lambda \cos\alpha\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t$

Temps de vol corrigé : résolution de $z(t'_v) = 0 \Rightarrow t'_v = 748{,}2\,s$

Point d'impact pour $t'_v = 748{,}2\,s$: $\begin{cases} x(t'_v) = 2613{,}95 \text{ km} \\ y(t'_v) = -100{,}49 \text{ km} \end{cases}$

Conclusion : le missile frappera la banlieue sud-est de Moscou.

Exercice n° 15 Excitation d'un pendule - résonance



$\left(J_{Ax} = \frac{1}{3} m l^2\right)$

(H) $\vec{OA} = y_A(t) \cdot \vec{e}_y$

① R en translation / R_0
La barre oscille dans le référentiel R non galiléen

② Bilan des actions ⟹ cf schéma

③ $\vec{M}_A(\vec{R}_{axe}) = \vec{0}$; $\vec{M}_A(\vec{P}=m\vec{g}) = \vec{AG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2} \vec{e}_r \wedge (-mg\,\vec{e}_z)$

$= \frac{l}{2}(-\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_y) \wedge (-mg\,\vec{e}_z)$

$= -mg\frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{e}_x \Rightarrow M_{\Delta_{Ax}}(\vec{P}) = -\frac{mgl}{2}\sin\theta$

enfin : $\vec{M}_A(\vec{F}_{ie}) = \vec{AG} \wedge (-ma\,\vec{e}_y) = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge (-ma\,\vec{e}_y)$

$= -ma\frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{e}_x \Rightarrow M_{\Delta_{Ax}}(\vec{F}_{ie}) = -\frac{mal}{2}\cos\theta$

④ TMC$/_{\Delta_{(Ax)}}$: $\boxed{J_{(Ax)}\ddot{\theta} = -\frac{ml}{2}(g\sin\theta + a\cos\theta)}$ (e)

⑤ $y_A(t) = Y\cos(\omega t) \Rightarrow a = \ddot{y}_A(t) = -\omega^2 Y\cos(\omega t)$

⚠ RSF donc $\theta(t) = \theta_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)) \xrightarrow{\text{cplx}} \underline{\theta} = \theta_0(\omega)\, e^{j(\omega t+\varphi)}$

$a = -\omega^2 Y\cos\omega t \rightarrow \underline{a} = -\omega^2 Y e^{j\omega t}$

(e) si petites oscillations ⟹ $\begin{cases}\sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1\end{cases}$ (ordre 1)

(e) ⟹ $J_{(Ax)}\ddot{\theta}(t) = -\frac{ml}{2}g\,\theta(t) - \frac{ml}{2}a \longrightarrow J_{(Ax)}(-\omega^2)\underline{\theta} = -\frac{ml}{2}g\,\underline{\theta} + \frac{ml\omega^2}{2}\underline{Y}$

$$\Rightarrow \left(\frac{ml}{2}g - J_{[Ax]}\,w^2\right)\underline{\theta} = \frac{ml}{2}w^2\,\underline{y}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ml}{2}g - J_{[Ax]}\,w^2\right)\theta_0\, e^{j(wt+\varphi)} = \frac{ml}{2}w^2\, Y\, e^{jwt}$$

<u>relation sur les modules:</u> $|\theta| = \theta_0 = \dfrac{\frac{ml}{2}w^2}{\frac{ml}{2}g - J_{[Ax]}w^2}\,Y$

$$= \frac{w^2}{g\left(1 - \frac{J_{[Ax]}}{\frac{ml}{2}g}w^2\right)}\,Y$$

soit $$\boxed{\theta_0 = \frac{w^2}{1 - \frac{J_{[Ax]}\,w^2}{\frac{ml}{2}g}}\,\frac{Y}{g}}$$

La résonance d'oscillation se produit pour $\theta_0 \nearrow \infty$ soit $\dfrac{J_{[Ax]}}{\frac{ml}{2}g}w_0^2 = 1$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{mlg}{2J_{[Ax]}}} = \sqrt{\frac{3\cancel{m}\cancel{l}g}{2\cancel{m}l^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}\quad [\ldots] = T^{-1}\ (\text{ok})$$