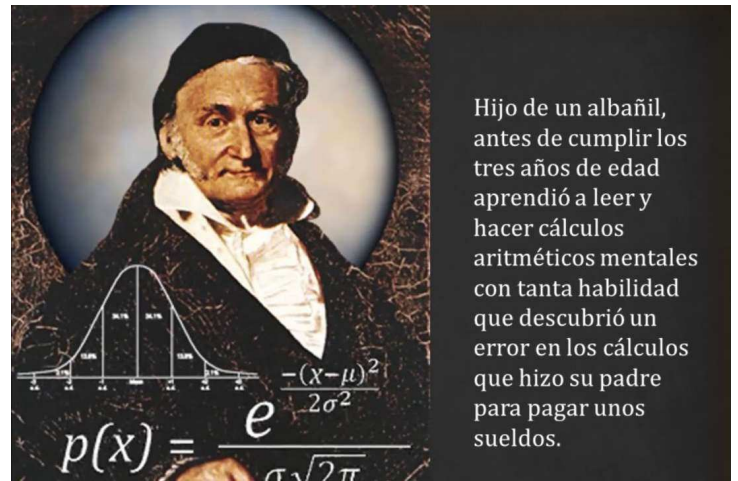


## Formulation locale de l'électrostatique - introduction aux opérateurs vectoriels



CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

### PLAN DU CHAPITRE

<b>I</b>	<b>Formulation locale du théorème de Gauss - opérateur divergence</b>	<b>3</b>
I.1	Démonstration	3
I.2	Conséquence : le théorème de Green-Ostrogradski	4
I.3	Signification de la divergence	5
<b>II</b>	<b>Formulation locale de la circulation conservative - opérateur rotationnel</b>	<b>5</b>
II.1	Démonstration	6
II.2	Conséquence : le théorème de Stokes-Ampère	7
II.3	Complément : signification du rotationnel	8
<b>III</b>	<b>Les équations locales du potentiel</b>	<b>8</b>
III.1	Préliminaire : l'opérateur Laplacien	8
	a - Laplacien scalaire	8

	b - Laplacien vectoriel . . . . .	9
III.2	Equation du potentiel en espace chargé : l'équation de Poisson - signification . . . .	9
	a - Formulation . . . . .	9
	b - Exemple de résolution : la diode à vide . . . . .	10
III.3	Equation du potentiel en espace vide : l'équation de Laplace . . . . .	11
	a - Formulation - existence et importance du potentiel-unicité . . . . .	11
	b - Exemple de résolution analytique possible : le cas d'un condensateur cylindrique . . . . .	12
	c - Exemple de méthode numérique de résolution de l'équation de Laplace : méthode des différences finies appliquée au condensateur plan . . . . .	13
<b>IV</b>	<b>Analogie électrostatique - gravitation . . . . .</b>	<b>13</b>
IV.1	Grandeurs analogues - Champ de gravitation . . . . .	13
IV.2	Potentiel de gravitation . . . . .	13
IV.3	Théorème de Gauss . . . . .	14
	a - Enoncé . . . . .	14
	b - Exemple d'exploitation : champ d'une distribution sphérique homogène . .	15
IV.4	Synthèse locale de l'analogie . . . . .	16

---

## I Formulation locale du théorème de Gauss - opérateur divergence

### I.1 Démonstration

Supposons un volume d'espace  $\mathcal{V}$  de surface fermée  $\mathcal{S}$ , de charge volumique  $\rho(\vec{r})$ . Isolons un petit élément  $d\tau$  de ce volume à l'échelle mésoscopique, de sorte que la grandeur caractérisant la charge demeure la densité volumique de charge  $\rho(\vec{r})$  nivelée à cette échelle (cf précédent chapitre). Par souci de simplification, le volume élémentaire sera "découpé" en coordonnées cartésiennes, soit un "mésocube" de volume  $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$  :

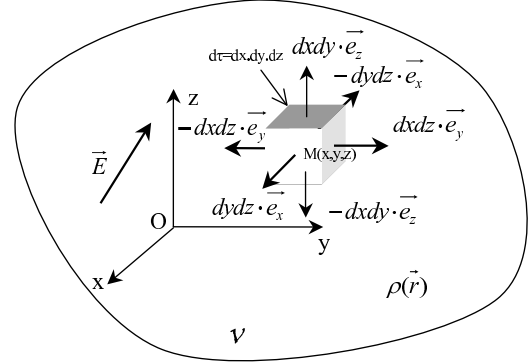


FIGURE X.1 – Flux élémentaire du champ électrique à travers un "cube mésoscopique"

Calculons le flux du champ électrique à travers la surface fermée de ce "mésocube" :

$$\delta\Phi = \oint\limits_{S \equiv 6 \text{ faces}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\stackrel{1^{\text{er}} \text{ ordre}}{\simeq} [E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dy dz + [E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)] dx dz + [E_z(x, y, z+dz) - E_z(x, y, z)] dx dy$$

qui donne en développant au premier ordre chaque terme :

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \oint\limits_{S \equiv 6 \text{ faces}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dx dy dz + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dx dy dz \\ &= \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \cdot d\tau \quad (1) \end{aligned}$$

En outre, le théorème de Gauss appliqué à ce petit volume donne :

$$\delta\Phi = \oint\limits_{S \equiv 6 \text{ faces}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\delta Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \cdot d\tau \quad (2)$$

En identifiant les seconds membres des équations (1) et (2) on dégage :

$$\left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

A RETENIR :

On pose alors l'opérateur divergence du champ électrique en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z}$$

et la forme locale du théorème de Gauss :

**Propriété I-1:** FORME LOCALE DU THÉORÈME DE GAUSS

Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est relié à la densité volumique de charge  $\rho(M)$  (source locale) par la **forme locale du théorème de Gauss** ou **équation de Maxwell-Gauss** :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad (\text{X.1})$$

formulation locale du théorème de Gauss ou équation de Maxwell-Gauss

**Remarque I-1:** OPÉRATEUR DIVERGENCE

L'opérateur divergence peut s'écrire, **en coordonnées cartésiennes uniquement**, à l'aide de l'opérateur "nabla" :

$$\operatorname{div} \vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{X.2})$$

On se reportera au fascicule MPP d'analyse vectorielle pour les expressions de la divergence dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

## I.2 Conséquence : le théorème de Green-Ostrogradski

Rappelons l'expression du flux "local" défini précédemment :

$$\delta\Phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$$

ce qui donne en intégrant le flux sur l'ensemble du volume  $\mathcal{V}$  :

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$$

et finalement en détaillant l'expression du flux :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$$

On peut généraliser ce résultat à tout champ de vecteur  $\vec{P}$  :

**Propriété I-2: THÉORÈME DE GREEN-OSTROGRADSKI**

Tout champ de vecteur  $\vec{P}(x, y, z)$  vérifie la relation suivante pour une surface fermée  $S$  contenant le volume  $V$

$$\oint_{S/V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V/S} \text{div} \vec{P} \cdot d\tau \quad (\text{Théorème de Green-Ostrogradski})$$

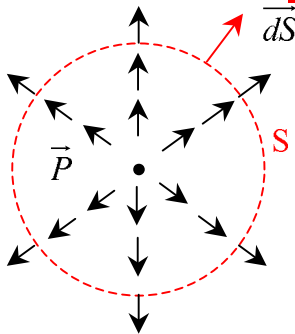
**Exercice de cours:** (I.2) - n° 1. Important!!! A l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, passer de la forme intégrale à la forme locale du théorème de Gauss.

### I.3 Signification de la divergence

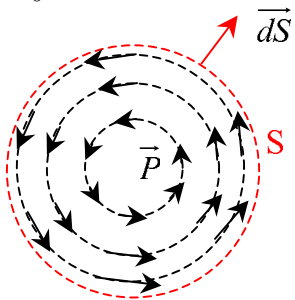
Supposons un champ de vecteur quelconque  $\vec{P}$ . Calculons le flux de  $\vec{P}$  sur une surface fermée  $S$  dans deux cas de champ  $\vec{P}$  d'allure très différente :

- les lignes de champ "fuient" les points  $M$  du volume contenu dans  $S$  :  $\Phi(\vec{P}) = \oint_S \underbrace{\vec{P} \cdot \vec{n} dS}_{\neq 0} \stackrel{GO}{=}$

$$\iiint_{V/S} \text{div}(\vec{P}) \cdot d\tau \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{div}(\vec{P}) \neq 0 \text{ les lignes de champ divergent !}}$$



- les lignes de champ restent "confinées" pour tous les points  $M$  du volume contenu dans  $S$  :  $\Phi(\vec{P}) = \oint_S \underbrace{\vec{P} \cdot \vec{n} dS}_{=0} \stackrel{GO}{=} \iiint_{V/S} \text{div}(\vec{P}) \cdot d\tau = 0 \Rightarrow \boxed{\text{div}(\vec{P}) = 0 \text{ les lignes de champ ne divergent pas !}}$



## II Formulation locale de la circulation conservative - opérateur rotationnel

Considérons un petit cadre  $d\Gamma$  de dimension mésoscopique d'origine  $M(x, y, z)$ , placé dans un plan parallèle au plan  $(xOy)$  et calculons la circulation élémentaire  $\mathcal{C}$  du champ électrostatique sur ce dernier contour. Pour aborder le calcul, on se placera là-encore en coordonnées cartésiennes.

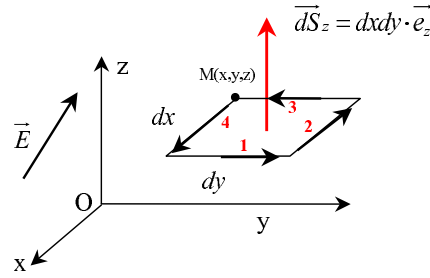


FIGURE X.2 – Circulation de  $\vec{E}$  sur un contour élémentaire fermé

Exprimons la circulation élémentaire du champ électrostatique sur ce contour fermé :

## II.1 Démonstration

$$\delta\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \oint_{cadre} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{E} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{=dy \cdot \vec{e}_y} + \int_2 \vec{E} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{=-dx \cdot \vec{e}_x} + \int_3 \vec{E} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{=-dy \cdot \vec{e}_y} + \int_4 \vec{E} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{=dx \cdot \vec{e}_x}$$

$$= E_y(x+dx, y, z) \cdot dy - E_x(x, y+dy, z) \cdot dx - E_y(x, y, z) \cdot dy + E_x(x, y, z) \cdot dx = \frac{\partial E_y}{\partial x} dxdy - \frac{\partial E_x}{\partial y} dxdy$$

soit :

$$\delta\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dxdy$$

Un étude identique avec des contours respectivement parallèles à  $yOz$  et  $xOz$  conduirait à :

$$\begin{cases} \parallel(yOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{yz}} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dydz \\ \parallel(xOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{xz}} = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dxdz \end{cases}$$

En outre, nous savons que pour chacun de ces contours fermés, la circulation est nulle soit :

$$\delta\mathcal{C} = \oint_{\forall d\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ainsi, les 3 circulations précédentes sont nulles :

$$\begin{cases} \parallel(xOy) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dxdy = 0 \\ \parallel(yOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{yz}} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dydz = 0 \\ \parallel(xOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{xz}} = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dxdz = 0 \end{cases}$$

On pose alors un nouvel opérateur vectoriel appelé "rotationnel" du champ  $\vec{E}$ , et dont le résultat est un vecteur, tel que :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dxdy = \vec{rot} \vec{E} \cdot \underbrace{dxdy \vec{e}_z}_{=d\vec{S}_z} = 0 \\ \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dydz = \vec{rot} \vec{E} \cdot \underbrace{dydz \vec{e}_x}_{=d\vec{S}_x} = 0 \\ \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dxdz = \vec{rot} \vec{E} \cdot \underbrace{dxdz \vec{e}_y}_{=d\vec{S}_y} = 0 \end{cases}$$

et donc d'expression :

$$\vec{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ainsi, il vient l'équation locale en coordonnées cartésiennes traduisant la nullité de la circulation de  $\vec{E}$  sur un contour fermé :

**Propriété II-1:** FORME LOCALE DE LA CONSERVATION DE LA CIRCULATION DE  $\vec{E}(M)$

Dans le cas d'un champ électrostatique  $\vec{E}$ , on a en tout point de l'espace :

$$\vec{rot} [\vec{E}(M)] = \vec{0} \quad (X.3)$$

formulation locale de la conservation de la circulation de  $\vec{E}$

ou équation de Maxwell-Faraday de la statique

**Remarque II-1:** OPÉRATEUR NABLA ET ROTATIONNEL

En coordonnées cartésiennes **uniquement**, on peut écrire le rotationnel à l'aide de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  en remarquant que :

$$\vec{rot} [\vec{E}(M)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M)$$

## II.2 Conséquence : le théorème de Stokes-Ampère

Rappelons l'expression de la circulation sur le contour  $\parallel(xOy)$  :

$$\delta C_{d\Gamma_{xy}} = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dxdy = \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_z$$

En intégrant sur un contour fermé macroscopique  $\Gamma \parallel (xOy)$  de surface  $S$  s'appuyant sur le contour, on obtient :

$$C = \iint_{S/\Gamma} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

soit finalement en détaillant l'expression de la circulation :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_{S/\Gamma} \vec{\text{rot}} [\vec{E}] \cdot \vec{dS}$$

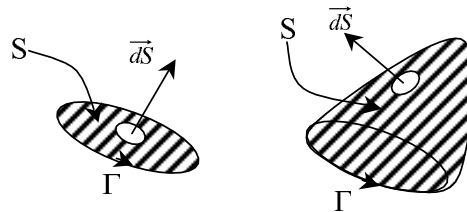
On peut généraliser ce résultat à tout champ de vecteur avec :

### Propriété II-2: THÉORÈME DE STOKES-AMPÈRE

Tout champ de vecteur  $\vec{P}(x, y, z)$  vérifie la relation suivante pour un contour fermé  $\Gamma$  sur lequel s'appuie une surface quelconque  $S$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot \vec{dl} = \iint_{S/\Gamma} \vec{\text{rot}} [\vec{P}] \cdot \vec{dS} \quad (\text{Théorème de Stokes-Ampère})$$

La seule contrainte pour la surface  $S$  est qu'elle s'appuie sur le contour  $\Gamma$  ; cela laisse une grande liberté de choix, souvent guidé par la situation du problème à résoudre (cf exercice de TD). Un exemple ci-dessous :



## II.3 Complément : signification du rotationnel

En live!!!

## III Les équations locales du potentiel

### III.1 Préliminaire : l'opérateur Laplacien

#### a - Laplacien scalaire

On définit, en coordonnées cartésiennes<sup>1</sup>, l'opérateur laplacien scalaire d'une fonction scalaire  $f(x, y, z)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  par :

1. on se reportera au fascicule distribué en début d'année pour les expressions dans les autres systèmes de coordonnées



$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{X.4})$$

**Remarque III-1:**

On notera la relation importante :

$$\Delta f = \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}} f]$$

**Exercice de cours:** (III.1) - n° 2. Démontrer cette dernière relation.

RÉPONSE :

$$\begin{aligned} \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}} f] &= \frac{\partial}{\partial x} (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{e}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{e}_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \Delta f \end{aligned}$$

**b - Laplacien vectoriel**

L'opérateur laplacien vectoriel appliqué à un champ de vecteur  $\vec{P} = (P_x(x, y, z), P_y(x, y, z), P_z(x, y, z))$  correspond simplement à un vecteur dont les coordonnées sont les laplaciens scalaires de chaque coordonnée du champ de vecteur, soit :

$$\Delta \vec{P} = [\Delta P_x] \cdot \vec{e}_x + [\Delta P_y] \cdot \vec{e}_y + [\Delta P_z] \cdot \vec{e}_z \quad (\text{X.5})$$

**III.2 Equation du potentiel en espace chargé : l'équation de Poisson - signification**

**a - Formulation**

On a défini un peu plus haut la formulation locale du théorème de Gauss :

$$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

or dans le cas d'un champ électrostatique, la relation entre le champ et le potentiel est :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

donc :

$$\text{div} [-\overrightarrow{\text{grad}} V(M)] = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

que l'on retient finalement sous la forme de l'équation de Poisson du potentiel scalaire :

**Propriété III-1:** EQUATION DE POISSON

Le potentiel électrostatique  $V$  est relié à ses sources, c'est à dire la densité volumique de charge  $\rho$  par l'équation de Poisson :

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{X.6})$$

**Solutions** : on admettra sans démonstration la forme des solutions de l'équation de Poisson du potentiel scalaire électrostatique  $V$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{charges}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

Dans le cas d'une répartition bidimensionnelle des charges de densité surfacique  $\sigma(P)$  le potentiel devient :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{charges}} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

et enfin dans le cas d'une répartition unidimensionnelle (filiforme) de densité linéique  $\lambda(P)$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{charges}} \frac{\lambda(P)}{PM} dl$$

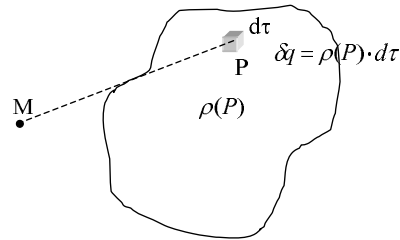


FIGURE X.3 – Potentiel engendré par une distribution volumique

**b - Exemple de résolution : la diode à vide**

On considère une **diode à vide** 1D constituée de deux électrodes planes distantes de  $a$ , supposées de dimensions infinies et portées à des potentiels respectifs  $V = 0$  pour la cathode et  $V(a) = V_a > 0$  pour l'anode. La cathode est chauffée de sorte que des électrons s'en échappent par et emplissent l'espace entre les électrodes que l'on caractérise par la densité volumique de charge  $\rho(x)$ .

Le problème étant à 1D (axe  $[Ox]$ ), l'équation de Poisson prend la forme simple suivante :

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = 0$$

EN LIVE : On montrera que :  $\rho(x) \sim V(x)^{-\frac{1}{2}}$

Posons une solution de type  $V = kx^\alpha$  où  $k$  et  $\alpha$  sont des constantes et injectons la dans l'équation de Poisson qui devient alors :

$$k\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} = \frac{cste}{\epsilon_0} V^{-\frac{1}{2}} = cste' \cdot V^{-\frac{1}{2}} = cste' \cdot k^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{\alpha}{2}}$$

AUTRE EXEMPLE DE RÉOLUTION FORMELLE SIMPLE : cf TD exercice sur les colloïdes (modèle de Yukawa)

On en conclut que  $\alpha = \frac{4}{3}$  soit :

$$V = k \cdot x^{\frac{4}{3}}$$

On peut également dégager l'expression de la différence de potentiel  $U = V(a) - V(x=0) = V(a)$  entre les deux électrodes en intégrant le potentiel  $V$  :

$$U = k \cdot a^{\frac{4}{3}}$$

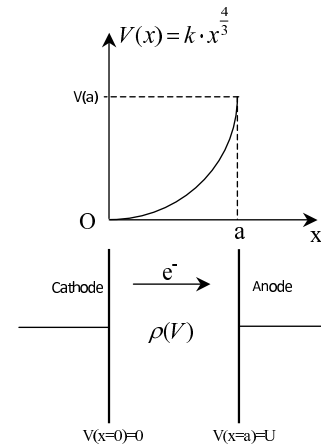


FIGURE X.4 – Potentiel dans une diode à vide 1D

### III.3 Equation du potentiel en espace vide : l'équation de Laplace

#### a - Formulation - existence et importance du potentiel-unicité

La démarche naturelle de l'électrostatique est la recherche du champ électrique engendré par une distribution de charges puisque ce dernier est à l'origine de la force ressentie par une charge d'essai, et que cette force est mesurable expérimentalement. Cependant, on peut formuler tout problème d'électrostatique en terme de recherche de potentiel puisque la relation champ-potential :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$$

permet de remonter immédiatement au champ.

En outre, le potentiel électrostatique est solution de l'équation de Poisson  $\Delta V(\vec{r}) + \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = 0$ .

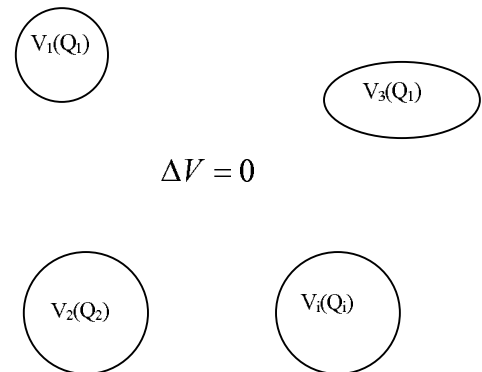
Dans le cas où la charge volumique est nulle, i.e. en espace localement vide de charge, l'équation de Poisson devient l'équation de Laplace :

$$\Delta V(\vec{r}) = 0 \quad \text{Equation de Laplace du potentiel électrostatique}$$

soit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{X.7})$$

Considérons un espace vide de charge, mais comportant par exemple une distribution de  $N$  conducteurs chargés dans l'espace et imposant un potentiel sur leur surface ; le problème électrostatique consiste donc à dégager une fonction  $V(x, y, z)$  solution de l'équation de Laplace et satisfaisant aux conditions aux limites existant à la surface de ces conducteurs  $CL = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_i, \dots\}$ .



**NB :** on montre (ancien programme) qu'un conducteur à l'équilibre est un volume isopotentiel

**Propriété III-2: PROPRIÉTÉ DU POTENTIEL**

On montre que le potentiel  $V(x, y, z)$ , solution de l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$  avec conditions aux limites données sur les conducteurs :

- existe toujours.
- est unique

$$\Delta V(x, y, z) = 0 + C.L. \Leftrightarrow \exists V(x, y, z) \text{ unique}$$

**b - Exemple de résolution analytique possible : le cas d'un condensateur cylindrique**

Les armatures d'un condensateur cylindrique sont deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et de hauteur  $h$ . Par souci de simplification, on supposera la hauteur  $h$  très grande face aux rayons  $R_1$  et  $R_2$  ce qui revient concrètement à négliger les effets de bord dans ce problème.

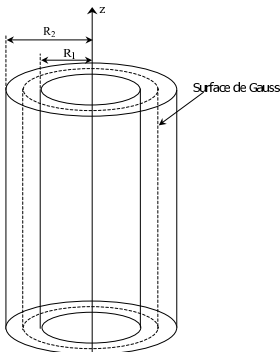


FIGURE X.5 – Condensateur cylindrique

L'étude des invariances et des symétries conduit à une expression de la forme suivante pour le champ électrique régnant entre les deux armatures :

$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}}\right)_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} = \begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = V(r)}$$

**HYPOTHÈSE :** la donnée du problème est la valeur des potentiels aux limites  $V_1 = V(R_1)$  et  $V_2 = V(R_2)$

L'équation de Laplace valable dans l'espace entre armatures s'écrit :

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} V(r) \right) = 0$$

qui conduit à  $V(r) = K_1 \ln(r) + K_2$

La traduction des conditions aux limites donne : 
$$\begin{cases} V(R_1) = K_1 \ln R_1 + K_2 = V_1 \\ V(R_2) = K_1 \ln R_2 + K_2 = V_2 \end{cases}$$

d'où après calcul : 
$$\begin{cases} K_1 = \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \\ K_2 = V_2 - \frac{(V_1 - V_2) \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \end{cases}$$
 et ainsi : 
$$\boxed{V(r) = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2}}$$

c - Exemple de méthode numérique de résolution de l'équation de Laplace : méthode des différences finies appliquée au condensateur plan

cf cours IPT

## IV Analogie électrostatique - gravitation

### IV.1 Grandeurs analogues - Champ de gravitation

La loi de force de Coulomb et la loi de force de la gravitation sont toutes les deux des lois en  $\frac{1}{r^2}$ . On parle de champ de force **newtonien** :

FORCE DE COULOMB : entre 2 charges  $q_A$  et  $q_B$

$$\vec{F}_{Coul_{A/B}} = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$$

FORCE DE GRAVITATION : entre 2 masses  $m(A)$  et  $M(B)$

$$\vec{F}_{grav_{A/B}} = -G \frac{Mm}{AB^2} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$$

La comparaison entre ces deux lois similaires permet de dégager les premières analogies suivantes :

	Electrostatique	Gravitation
Cste caractéristique	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Acteur	charge $q$	masse $m$
Champ caractéristique 1 acteur	$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$	$\vec{G}_m = -G \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}$
Champ caractéristique n acteurs	$\vec{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$	$\vec{G}_n = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$
Champ caractéristique distrib. contin.	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P) \cdot d\tau}{PM^2} \cdot \vec{u}_{PM}$	$\vec{G} = -G \iiint \frac{\rho_s(P) \cdot d\tau}{PM^2} \cdot \vec{u}_{PM}$

### IV.2 Potentiel de gravitation

$$\vec{F}_m = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M_i A^2} \frac{\vec{M_i A}}{M_i A} = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i^2} \frac{\vec{R_i}}{R_i}$$

en posant  $\vec{R_i} = \vec{M_i A} = \vec{M_i O} + \vec{OM} = \vec{r} - \vec{r_i}$

Calculons le travail élémentaire de la résultante de gravitation sur la masse  $m$  dépensé lors d'un déplacement  $\vec{dr}$  :

Considérons un ensemble de points matériels  $(M_1, \dots, M_n)$  de masses  $(m_1, \dots, m_n)$  et de positions  $(\vec{r}_1 = \vec{OM}_1, \dots, \vec{r}_n = \vec{OM}_n)$ .

Supposons un point matériel A de masse  $m$  de position  $\vec{r}$  plongé dans cette distribution de masses ponctuelles. La force de gravitation ressentie par  $m$  est :

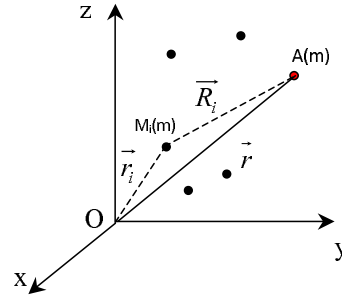


FIGURE X.6 – Potentiel en A d'une distribution de charges

$$\delta W = \vec{F}_m \cdot d\vec{r} \stackrel{d\vec{r}_i=0}{=} \vec{F}_m \cdot d\vec{R}_i = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i^2} \frac{\vec{R}_i}{R_i} \cdot d\vec{R}_i$$

soit :

$$\delta W = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i^2} \cdot dR_i = +Gm \sum_{i=1}^n m_i d\left(\frac{1}{R_i}\right) = md \left( \sum_{i=1}^n \frac{+Gm_i}{R_i} \right)$$

RAPPEL : travail de la force de Coulomb :  $\delta W_{Coul} = -q dV$

En exploitant l'analogie  $q \leftrightarrow m$  il vient  $\delta W_{grav} = -md\varphi$  et on en déduit la différentielle du potentiel de gravitation  $\Phi$  :

$$d\varphi = d \left( - \sum_{i=1}^n \frac{+Gm_i}{R_i} \right)$$

soit finalement le potentiel de gravitation en posant nulle la constante d'intégration :

A RETENIR :

$$\varphi = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i} \stackrel{\text{Analogie}}{\leftrightarrow} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i}$$

### IV.3 Théorème de Gauss

#### a - Enoncé

On dégage le théorème de Gauss de la gravitation en exploitant l'analogie précédente et en notant que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = -G \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow -4\pi G}$$

Il vient alors :

A RETENIR :

**Propriété IV-1:**

Le flux du champ de gravitation  $\vec{G}$  engendré par une distribution quelconque de masses sur une surface fermée  $S$  quelconque de l'espace vaut :

$$\Phi = \oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_i m_{i_{int}} = -4\pi G M_{int} \quad \text{cas des distributions discrètes}$$

Ce résultat peut-être immédiatement étendu au cas des distributions continues de masse, caractérisées par la masse volumique  $\rho_m(M)$  :

$$\Phi = \oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_s(M) \cdot d\tau = -4\pi G M_{int} \quad \text{cas des distributions continues}$$

en appelant  $\rho_s$  la masse volumique dans le volume  $V$  de frontière la surface  $S$ .

**b - Exemple d'exploitation : champ d'une distribution sphérique homogène**

Considérons une masse  $M$  sphérique de rayon  $R$ . On recherche le champ de gravitation  $\vec{G}(r)$  en tout point de l'espace.

- Par raison de symétrie et invariance, on a :  $\vec{G} = G(r) \cdot \vec{e}_r$
- Appliquons le théorème de Gauss à la sphère  $S$  de rayon  $r$ . 2 cas à envisager :
  - ◇ CAS  $r > R$  (POINTS EXTÉRIEURS À LA SPHÈRE) :

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_S G(r) \cdot dS = 4\pi r^2 G(r) = -4\pi G \underbrace{M_{int}}_{=M}$$

donc :

$$\vec{G}(r > R) = -\frac{GM}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

On retrouve ici le champ de gravitation engendré par une masse ponctuelle  $M$  placé en  $O$ .

- ◇ CAS  $r < R$  (POINTS INTÉRIEURS À LA SPHÈRE) :

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_S G(r) \cdot dS = 4\pi r^2 G(r) = -4\pi G \iiint_{V/S} \underbrace{\rho(r)}_{=\rho_0=cste} \cdot d\tau = -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

donc

$$\vec{G}(r < R) = -\frac{4}{3}\pi \rho_0 G r \cdot \vec{e}_r = -GM \frac{r}{R^3} \cdot \vec{e}_r$$

#### IV.4 Synthèse locale de l'analogie

L'analogie électrostatique  $\leftrightarrow$  gravitation peut être prolongée localement, soit :

- LIEN CHAMP-POTENTIEL :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \leftrightarrow \boxed{\vec{G}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi(M)}$$

**Exemple d'exploitation** : détermination du potentiel de gravitation  $\varphi_g$  de la distribution de charge sphérique homogène précédente :

$$\vec{G}(r > R) = -\overrightarrow{\text{grad}}[\varphi_g]$$

soit :

$$G(r > R) \cdot \vec{e}_r = -\frac{GM}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_g}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{d\varphi_g}{dr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad d\varphi_g(r) = -G(r) \cdot dr$$

qui donne après intégration et en posant la constante d'intégration nulle par convention :

$$\boxed{\varphi_g(r > R) = -\frac{GM}{r}}$$

**Exercice de cours:** (IV.4) - n° 3. Sachant que le potentiel est continue en  $r = R$ , montrer que :

$$\boxed{\varphi_g(r < R) = \frac{GM}{2R} \left( \frac{r^2}{R^2} - 3 \right)}$$

- FORME LOCALE DU THÉORÈME DE GAUSS :

$$\text{div} [\vec{E}(M)] = \frac{\rho_{elec}(M)}{\epsilon_0} \leftrightarrow \boxed{\text{div} [\vec{G}(M)] = -4\pi G \rho_m(M)}$$

- EQUATION DE POISSON :

Enfin, on peut dégager l'équation de Poisson de la gravitation par la même démarche que celle adoptée en électrostatique, soit :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}[\varphi] \\ \text{div} \vec{G} = -4\pi G \rho_m \end{array} \right\} \Rightarrow \text{div} [-\overrightarrow{\text{grad}}[\varphi]] = -4\pi G \rho_m \Rightarrow \boxed{\Delta \varphi(M) - 4\pi G \rho_m(M) = 0}$$