Correction du DS n°1

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

I.A.1) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré d (en particulier. $a_d \neq 0$).
Pour $k = 1, ..., d$, par le binôme de Newton, $(X+1)^k$ est unitaire de degré k.
Donc $\underline{\tau(P) \text{ est de degré } d}$ de coefficient dominant celui de $a_d(X+1)^d$ soit : $\underline{\mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)}$.

I.A.2) Par une *récurrence* immédiate :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

I.A.3) D'après la formule du *binôme de Newton*, pour tout $j \in \mathbb{N}_{n+1}$,

$$\tau(P_j) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i,$$

par changement de variable « $i = h+1$ ». Donc M est donc triangulaire supérieure et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$\boxed{(M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1}, & \text{pour} \quad i \leqslant j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.
Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}}$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à celle-ci.
Donc :

$$\boxed{M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}}$$

I.A.5) On considère l'endomo $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,
Trivialement : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$: donc τ est inversible et $\underline{\tau^{-1} = \overline{\tau}}$.
Remarque. *Comme* 0 *n'est pas valeur propre de* τ*, on retrouve que* τ *est bijectif.*
Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.
Donc, la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

I.A.6) La matrice M^{-1} est la matrice de τ^{-1} dans la base canonique, or pour tout $j \in \mathbb{N}_{n+1}$,

$$\tau^{-1}(P_j) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$

$$\boxed{(M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

I.A.7) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j = \sum_{i=1}^{n+1} M[i, k+1] u_{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} M^{\mathrm{T}}[k+1, i] u_{i-1}$$

Donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}$$

I.A.8) M est inversible donc

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (M^{\mathrm{T}})^{-1} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (M^{-1})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j}$$

I.A.9) On a alors par la formule du binôme :

$$\boxed{v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda + 1)^k}$$

On vérifie bien (toujours le binôme) :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1) - 1)^k = u_k}$$

I.B - L'opérateur de différence

I.B.1) Soit P un élément *non constant* de $\mathbb{R}[X]_n$ de degré d
Le binôme de Newton montre que $k = 0, \ldots, d$, $\tau(X^k)$ est comme X^k unitaire de degré k et $\tau(X^d)$ a comme terme de degré $d-1$ le polynôme dX^{d-1} (même pour $d = 1$!)
Donc

$$\boxed{\deg(\delta(P) = \deg(P) - 1 \,;\, \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(\delta(P) \mathrm{cd}(P).}$$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.
Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après la formule du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
Donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

I.B.3) Montrons par récurrence pour $j \in [\![1,n]\!]$ la propriété :

$$\boxed{\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]} \qquad (\mathrm{H}_j)$$

• En I.B. nous avons prouvé H_1.
• Supposons pour $j \in [\![1,n]\!]$ que H_j soit vraie. Alors $P \in \ker(\delta^{j+1})$ si et seulement si $\delta(P) \in \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, soit si et seulement si, par I.B.1. $P \in \mathbb{R}_j[X]$. D'où H_j
Le résultat vient de tomber par récurrence.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$.
• L'application itérée de I.B.1 veut que $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
• La formule du rang montre grâce à la première partie de la question que :

$$\dim\Big(\mathrm{Im}(\delta^j)\Big) = n+1-((n-j)+1) = j = \dim\Big(\mathbb{R}_{n-j}[X]\Big).$$

De ces deux points vient :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

Remarque. *Cette question se traite fort bien matriciellement.*

I.B.4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Les endomorphismes de l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ que sont δ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$ *commutent*, donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j}$$

I.B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors, par I.B.3 :

$$0 = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\tau^j(P)] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j).$$

En particulier en substituant 0 à X,

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0}$$

I.B.6) a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.
Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Comme $\mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$,

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.
Par conséquent [1]

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On peut aussi citer le cours.

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.
Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Remarque. *Un 5/2 eût, plus volontiers, écrit $A^4 = 0_4$ donc A est nilpotente donc $\chi_A = X^2$ et donc A^2 est nulle, voici la contradiction.*

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.
Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors A^2 est égale à la matrice de l'endomorphisme induit par δ sur $\mathbf{R}_1[X]$ qui est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

I.B.7) a) On a vu (questions *I.B.3)*) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille échelonnée en degré (de d à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit V stable par δ non réduit à 0.

Soit P un élément de V de *degré maximum d*.
• Par définition de d,

$$V \subset \mathbb{R}_d[X].$$

• Pour $i = 0, 1, ..., d$, $\delta^i(P) \in V$, et donc par (a),

$$\mathbb{R}_d[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) \subset V.$$

Donc $\boxed{V = \mathbb{R}_d[X]}$.

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

II.A.1) Si φ est une surjection de E sur F, alors nécessairement $|F| \leqslant |E|$. Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$\boxed{S(n, n) = n!}$$

II.A.3) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des surjection de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Pour tout élément f de $\mathcal{S}$ un élément de $[\![1, n]\!]$ a deux antécédents, tous les autres un et un seul. Donc S est la réunion disjointe des $\binom{n+1}{2}$ parties $S_{\{i,j\}}$, prise sur toutes les parties $\{i, j\}$ à deux éléments de $[[1, n+1]$, où $S_{\{i,j\}}$ désigne l'ensemble des éléments de S pour lesquels i et j sont les deux éléments partageant la même image.
Soit $\{i, j\} \subset [[1, n{+}1]$. A tout élément f de $S_{\{i,j\}}$, on associe l'application f' de $\{\{1\}, \{2\}, ..., \{i, j\}, ..., \{n\}\}$ dans $[\![1, n]\!]$ qui à un singleton $\{k\}$ associe $f(k)$ et à $\{i, j\}$ associe $f(i)$.

Pour tout $f \in S_{\{i,j\}}$, l'application f' est clairement bijective, de plus l'application de $S_{\{i,j\}}$ dans l'ensemble des bijections de $\{\{1\},\{2\},\dots,\{i,j\},\dots,\{n\}\}$ dans $[\![1,n]\!]$ qui à f associe f' est non moins clairement une bijection. Donc $S_{\{i,j\}} = n!$

Donc $\boxed{S(n+1,n) = |S| = \binom{n+1}{2} n! = \dfrac{n\times(n+1)!}{2}}$.

II.B - Recherche d'une expression générale

II.B.1) D'après le cours :

$$\boxed{\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } [\![1,n]\!] \text{ est donc } n\times n\cdots\times n = n^p}$$

II.B.2) Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de $[\![1,p]\!]$ et pour $k=0,\dots p$ notons $\mathcal{P}_k$ celui des parties à k éléments. Partitionnant l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ en fonction de leurs images puis du cardinal de celles-ci, on a :

$$\mathcal{E} = \biguplus_{A\in\mathcal{P}} \{f\in\mathcal{E}, f([\![1,p]\!]) = A\} = \biguplus_{k=1}^{p}\left(\biguplus_{A\in\mathcal{P}_k}\{f\in\mathcal{E}, f([\![1,p]\!]) = A\}\right)$$

Or tout élément f de $\mathcal{E}$ induit une surjection sur $f([\![1,p]\!])$, donc pour tout $A\in\mathcal{P}_k$,

$$|\{f\in\mathcal{E}, f([\![1,p]\!]) = A\}| = S(p,k),$$

et donc

$$n^p = |\mathcal{E}| = \sum_{k=1}^{p}\sum_{A\in\mathcal{P}_k} S(p,k) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)$$

Et avec la convention sur $S(p,0)$,

$$\boxed{n^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)}$$

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en $I.A.8$), (p constant) avec pour tout $v = (n^p)_{n\in\mathbf{N}}$, $u = (S(p,k))_{k\in\mathbf{N}}$:

$$\boxed{\forall p \in [\![n,+\infty[\![, S(p,n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p}$$

II.B.4) Pour $p<n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après $I.B.5$),

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = 0 = S(p,n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p}$$

II.C) Avec les questions précédentes :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n = S(n,n) = n! \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1} = S(n+1,n) = \frac{n\times(n+1)!}{2}}$$

III Etude d'une famille de polynômes

III.A - Généralités

III.A.1) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(H_k) = k$.
Donc la famille $(H_0, H_1, \dots H_n)$ est une famille de degrés échelonnés,
Donc

$$\boxed{(H_0, H_1, \dots H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

III.A.2) $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.
Et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\delta(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right) = \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) - (X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)$$

$$\delta(H_k) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)((X+1)-(X-k+1)) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) \times k = H_{k-1}$$

Bilan :

$$\boxed{\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \delta(H_k) = H_{k-1}}$$

III.A.3) Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$.
Par conséquent,

$$\boxed{M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}}$$

III.A.4) Pour tout k, ℓ éléments de $[\![0,n]\!]$, on a (*par récurrence pour $\ell \geqslant k$*) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si} \quad \ell \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme pour tou naturel $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.
Par conséquent :

$$\boxed{\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

III.A.5) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $(a_0, a_1, \dots a_n)$ le n-uplets des coordonnées de P dans la base $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$.
Par linéarité de δ :

$$\delta^k P(0) = \delta^k\left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell H_\ell\right) = \sum_{\ell}^{n} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k}$$

III.B - Étude d'un exemple

III.B.1) Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.
On a :

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7\,,\ \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8\,,\ \delta^2(T)(X) = 6X + 10\,,\ \delta^3(T)(X) = 6.$$

On a donc

$$\boxed{T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

III.B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\boxed{\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ alors } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

III.B.3) Avec le notations de III.B.2, $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$. Donc $(P(k))_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie la relation demandée.

Par ailleurs l'ensemble des suites u vérifiant :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$$

est, par le cours de sup., l'espace vectoriel S_0 engendré par $(1)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(k)_{k\in\mathbf{N}}$. Donc le théoréme de structure des solution d'une équation linéaire avec second membre nous dit que l'ensemble S des suites vérifiant l'égalité demandée est $S_0 + (P(k))_{k\in\mathbf{N}}$. Conclusion :

$$S = \{(a + bk + P(k))_{k\in\mathbf{N}}, (a,b) \in^2\}.$$

Enfin, comme pour tout entier naturel k, si $k \geqslant h$, alors $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots(k-(h-1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et sinon $H_k(h) = 0$; on a

$$\boxed{S = \left\{(a + bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2})_{k\in\mathbf{N}}, (a,b) \in^2\right\},}$$

avec la convention usuelle : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$

III.C - Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.

Si $k < 0$, en notant $p = -k$, alors on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1)) = \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$\boxed{H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si} \quad k \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}}$$

III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisqu'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$$

III.C.3) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)}$$

III.C.4) Si P est à valeurs entières sur les entiers,

alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;

et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entières.

Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,

alors $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).

Bilan :

$$\boxed{P \text{ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans } (H_k) \text{ sont entières}}$$

III.C.5) Supposons que P, de degré d, soit à valeurs entières sur les entiers,
Alors les questions précédentes fournissent des entiers $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$.
Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^{d} a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^{d} \left(a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (X-j) \right)$$

$$\boxed{\text{Il s'agit bien d'un polynôme } d!P \text{ à coefficients entiers.}}$$

Soit $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 :
on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$$