Programme de colles n^{o}1

1 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— *à venir : semaine prochaine Formes linéaires, hyperplans*
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  — Matrices de transvexions, de permutations, de dilatation ; opérations sur les lignes et colonnes ; pivot de Gauss, application au calcul du rang, à la détermination d'une base de l'image et du noyau.
— *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique) et révisions de probabilités de sup.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay.

2 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40).
2. Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalent à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ (Preuve algébrique cette semaine) .
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).
4. Effet de la multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par une matrice de transvection à droite ou à gauche. Inverse d'une matrice de transvection.

3 Récitation d'exercices

1. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ montrer l'équivalence des deux propositions
   (a) Pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$;
   (b) Il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k\mathrm{tr}$.
2. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. $\star$ Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une utilisant les opérations élémentaires, et une le déterminant.
4. — Théorème d'Hadamard —

   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$
   $$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\ldots,n, \\ j\neq i,}} |a_{i,j}|.$$
   Montrer que A est inversible.

5. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $(\vec{x}, u(\vec{x})$ soit lié. Montrer que u est une homothétie. En déduire le centre de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$.

6. Les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivants sont-ils semblables ?

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Soient n un élément de $\mathbf{N}^*$ et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ nilpotent d'ordre n.
   (a) Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) $\star$Montrer que le commutant de M est $\mathbf{R}([M])$, ensemble des polynômes en M.

8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Etudier le rang de $\mathrm{com}(M)$ en fonction de celui de M. Déterminer $\det(\mathrm{com}(M))$ et $\mathrm{com}(\mathrm{com}(M))$.
   $\star$ Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de M.

9. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.

10. $\star\star$ — Théorème de Frobenius-Zolotarev — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ *continue* telle que :
    i. $f(I_n) = 1$;
    ii. pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
    Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a, b) de complexes, telle que :

$$f = g \circ \det.$$

11. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères[1] de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.
    Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus $\mathbf{E}$ de dimension finie ?

12. $\star$ — Théorème de Burnside —[2] Soit G un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe un entier naturel N non nul tel que pour tout élément A de G, $A^N = I_n$. Soit $\mathbf{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ engendré par G et $(M_1, ...M_m)$ une base de $\mathbf{F}$, *constituée d'éléments de* G et l'application

$$f \ : \ G \to \mathbf{C}^m \ ; \ A \mapsto (\mathrm{Tr}(AM_1), ..., \mathrm{Tr}(AM_m)).$$

    (a) Soient A et B des éléments de G tels que $f(A) = f(B)$. Montrer que pour tout élément M de $\mathbf{F}$,

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$

    (b) On pose $D = AB^{-1}$. Montrer que $(D - I_n)$ est nilpotente.
    (c) Montrer que f est injective.
    (d) Montrer que G est fini.

1. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.
2. Les 3/2 admettront que les éléments de G sont diagonalisables

Programme de colles n^{o}2

4 Révivions de probabilités de sup.

— Probabilités sur un ensemble fini.
— Variables aléatoires.

5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans.
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  — Matrices de transvexions, de permutations, de dilatation ; opérations sur les lignes et colonnes ; pivot de Gauss, application au calcul du rang, à la détermination d'une base de l'image et du noyau.
— Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)
  On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \dots, m_k$.
  — Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  — Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
— *A venir : révisions sur les déterminants, critère de diagonalisabilité, trigonalisation, ...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay.

6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.
3. La somme de n variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, mutuellement indépendantes, suit une loi binomiale d'ordre n et de paramètre p, deux preuves.

7 Exercices

1. Soit f un edomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension n non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $N_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im} f^n$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq \ldots\ldots. \subsetneqq N_{n_0} = N_{n_0+1} = \ldots. = N_n = \ldots\ldots..$$
$$I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneqq \ldots\ldots. \supsetneqq I_{n_0} = I_{n_0+1} = \ldots. = I_n = \ldots\ldots..$$
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, (cf. TD 1).
2. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Comparer $\mathrm{com}(AB)$ et $\mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$. On commencera par le cas où A et B sont inversibles.

3. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, 1. par densité algébrique, 2. en utilsant l'équivalence de A à $J_{\mathrm{rg}(A)}$.
4. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
5. On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au hasard m boules.
   (a) Quelle est la probabilité $p_{m,n}$ de l'événement « la première urne contient k boules » ?
   (b) Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} ci$. Montrer que $p_{m_i,i}$ tend vers $e^{-c}\frac{c^k}{k!}$, lorsque i tend vers $+\infty$.
   (c) $\star$ Déterminer la probabilité $q_{m,n}$ de l'événement « Chaque urne contient au plus une boule ». Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} c\sqrt{i}$. Montrer que
$$q_{m_i,i} \underset{i\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$
6. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0,...,n\}$.
   Montrer que l'espérance de X est donnée par la formule
$$\mathrm{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(V \geq i).$$
   Soient X et Y des variables alatoires définies sur Ω, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0,...,n\}$. Calculer $\mathrm{E}(\min(X,Y))$.
7. Soient X_1, X_2,...,X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, définies sur un même univers fini Ω, et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\{1,...,n\}$ telle que $X_1,...,X_n,T$ soient mutuellement indépendante.
   On définit alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_T$.
   (a) Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
   (b) $\star$ Donner une formule analogue pour $\mathrm{V}(S)$.
   à suivre...
8. $\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de GL $(\mathbf{E})$. Montrer que
$$\dim\left(\bigcap_{g\in G}\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_{\mathbf{E}})\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(g).$$
9. $\star$ Déterminer les formes linéaires ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constantes sur les classes de similitude.
10. $\star$ Soir une suite de variables aléatoires de Rademacher $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ mutuellement indépendantes et toute définies sur un même espace probabilisé. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et l'on désigne par S_0 une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité 1.
    (a) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p}=0)$ diverge.
    (b) Soit la variable aléatoire R à valeurs dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, définie par :
$$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0},$$
    (c) Montrer que $\mathbf{P}(R=+\infty)=1$. Interpréter.
11. $\star$ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit S_n de la probabilité uniforme. Notons pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, d_k le nombre de dérangements d'un ensemble à k éléments. Exprimer au moyen de divers nombres de dérangements, la loi de la variable F_n définie sur S_n qui associe à un élément de S_n le nombre de ses points fixes.
    Montrer que pour tout $k\in\mathbf{N}$, $\mathbf{P}(F_m=k) \underset{m\to+\infty}{\to} \frac{e^{-1}}{k!}$, (loi de Poisson de paramètre 1).
12. $\star$
    (a) Par K on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même tout corps). Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

(b) $\star$ Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[BC] = BC - CB$ (crochet de lie de B et C). Montrer qu'il existe des matrices B et C telles que $BC - CB = A$.

13. $\star\star$ Soit E un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères[3] de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

    Le résultat demeure-t-il en dimension finie ?

14. $\star$ Forme de Jordan

    Notons pour tout entier $k \geq 2$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que $J_1 = O_1$.

    Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nilpotent d'ordre p.

    (a) On suppose que $p = 2$. Montrer que M est semblable à $\text{diag}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$, où $r = \text{rg}(M)$

    (b) Montrer dans le cas général que $\text{Im}(u)$ est stable par u. En déduire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k$, et $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$, tel que M soit semblable à la matrice $\text{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k})$.

    (c) $\star\star$ Etudier l'unicité d'une telle décomposition.

3. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

Programme de colles n^{o}3,

8 Révivions de sup.

— Déterminants, applications et calculs

9 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans.
— Matrices : Voir programme précédent.
— Diagonalisation. On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  — Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  — Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  — Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
  — Trigonalisation, un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si leur polynôme caractéristique est scindé. Application à la résolution de systèmes différentiels et de systèmes de relations de récurrences linéaires.
  — Matrices nilpotentes, définition, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable à valeurs propres nulles.
  — *A venir : espace vectoriels normés...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Antoine Bellay.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay.

10 Questions de cours

1. Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'un espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$. Au choix du colleur, l'hérédité se fera par les endomorphismes ou par les matrices en blocs.
2. Déterminants en blocs.

11 Exercices

1. Soit A un élément diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit B l'élément de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$: $B = \begin{pmatrix} A & 3A \\ 3A & A \end{pmatrix}$.

   (5/2) Montrer la réciproque.
2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

   (a) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.

(b) Montrer que l'ensemble $C(A)$ des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

(c) $\star$ Pour A diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes donner la dimension de $C(A)$

3. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, nilpotent d'ordre n. Déterminer le commutant de f ainsi que sa dimension.

4. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le cas où son polynôme caractéristique est scindé, montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.

5. On note les éléments de $\mathbf{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\\ \psi\end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$ tels que

$$\begin{cases} 2\phi' = \phi+\chi+2\psi, \\ 2\chi' = \phi+\chi-2\psi, \\ 2\psi' = -\phi+\chi+4\psi, \end{cases}$$

6. Déterminer les valeurs propres de la matrice L suivante. Est-elle diagonalisable ?

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Même question pour l'élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dont tous les coefficients diagonaux valent a et tous les autres b.

7. Soient n un entier strictement positif et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $n=3$, montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, $|t_{i,j}|\leq\varepsilon$.

$\star$ Montrer le résultat pour n quelconque.

8. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que pour tout entier $k\geq 1$, $\mathrm{Tr}A^k = 0$. Montrer que A est nilpotente.

9. $\star$ Soient $n\in\mathbf{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{i,i}=0$ pour $i=1,2,...n$ et $a_{i,j}\in\{-1,1\}$ pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,...n\}$. Montrer que si n est pair, alors A est inversible.
On dispose de $2n+1$ cailloux . On supose que chaque sous ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de même masse de n cailloux. Montrer que tous les cailloux on la même masse.

10. $\star\star$ Soit un entier $n\geq 1$ Déterminer k maximal tel qu'il existe $E_1, E_2, ..., E_k$ parties de $\{1,...,n\}$ vérifiant
    i. le cardinal de E_i est impair pour $i=1,...n$;
    ii. le cardinal de $E_i\cap E_j$ est pair pour tout couple d'éléments distincts de $\{1,...,n\}$.

11. $\star$
    (a) Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme

$$P = (X-z_1)(X-z_2)\dots(X-z_n)$$

On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q\geq 2$. Montrer que

$$Q = (X-z_1^q)(X-z_2^q)\dots(X-z_n^q)$$

est à coefficients entiers.

    (b) $\star$ — Théorème de Kronecker — Montrer que si P est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1 tel que $P(0)\neq 0$, alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

12. $\star\star$ Pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B}\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ \lambda\mapsto\det(B+\lambda A).$$

    (a) Montrer que pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
    (b) Montrer qu'un endomrphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

13. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de domension n et $k\in\{1,...,n\}$. Que peut on dire d'un endomorphisme u qui laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de dimension k ?

Programme de colles n°4

12 Algèbre linéaire : révision de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Programme de la semaine précédente.

13 Espaces vectoriels normés

Il s'agit d'un premier contact...
— Définition de norme, espace vectoriel normé, distance à une partie non vide.
— Ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Caractérisation de l'adhérence par les suites, caractérisation des fermés et des fermés relatifs par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— *A venir : limite des applications, compacité...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Antoine Bellay.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux.

14 Questions de cours

1. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que $N_\infty \; : \; \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\; f \mapsto \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|$ est une norme.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Caractérisation d'un fermé par les suites.

15 Récitation d'exercices

1. Montrer que la distance à une partie A non vide d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est $1-$lipschitzienne de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Montrer que la distance d'un élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ à A est nulle si et seulement si $\vec{x}$ est adhérent à A.
2. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs. Soient p et q des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On admet que pour tout a et tout b réels positifs,
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$
   (a) Montrer que :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   Que dire du cas $p = q = 2$?
   (b) Montrer que, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.

3. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$. Soit un réel $p>1$. On admet que n_p est une norme sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que
$$N_p\ :\ \mathbf{E}\to\mathbf{R}_+\ ;\ f\mapsto\left(\int_a^b|f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
est une norme sur $\mathbf{E}$.
4. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbf{R}\right)$, $N_p(f)\underset{n\to+\infty}{\to}N_\infty(f)$.
Ou version $\star$
Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n\geq 0$, $I_n=\int_{[a,b]}\phi f^n$.
   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
5. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non trivial. Montrer que, soit il est de la forme $k\mathbf{Z}$, avec k élément de $\mathbf{R}_+^*$, soit il est dense dans $(\mathbf{R},|\cdot|)$ (on discutera sur la valeur de $\inf(G\cap\mathbf{R}_+^*)$).
6. $\star$ Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, muni de la norme N_1 (resp. N_∞). Soit F l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ qui prennent en 0 la valeur 1. Quelle est l'intérieur de F ? Quelle est l'adhérence de F ? *L'étudiant fera de jolies figures claires et en couleur.*
7. Soit $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de $\mathbf{E}$ est d'intérieur vide. Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.
8. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.
Révision —
9. Soit A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
10. $\star$ Soit A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.
11. $\star$ Soit A une matrice stochastique d'ordre n, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficient strictements positifs et tel que la somme des coefficients de n'importe quelle colonne fasse 1 :
   (a) Montrer que $1\in\mathrm{sp}(A)$ et $\mathrm{sp}(A)$ est inclus dans le disque fermé unité de $\mathbf{C}$.
   (b) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda|\leq 1$.
   (c) Montrer qu'il existe un élément U de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives. On pourra, pour pour ${}^{\mathrm{t}}(x_1,...,x_n)$ vecteur propre associé à une valeur propre de module 1, considérer ${}^{\mathrm{t}}(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$.
   (d) Montrer que tout élément V de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à U.
   Indication : choisir λ tel que $U-\lambda V$ ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.
12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}U_n$ est dense. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}F_n=\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}\overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense.
13. $\star\star$ Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f.
   (a) Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose :
   $$F_{n,\varepsilon}:=\{\ x\in\mathbf{E}|\forall p\in\mathbf{N},(p\geq n)\Rightarrow(\|f_n(x)-f_p(x)\|\leq\varepsilon)\}$$
   et
   $$\Omega_\varepsilon:=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$
   Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.
   (b) Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x)-f(a)\|\leq 3\varepsilon$.
   (c) Montrons que f est continue sur un G_δ dense. Application aux dérivées.

Programme de colles n°5 Prévisionnel

16 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— A venir : connexité par arcs, application linéaires continues, normes équivalentes, espace vectoriels de dimensions finie...

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Antoine Bellay.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux.

17 Questions de cours

1. $\star$ Compacité des segments de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, par dichotomie ou par le lemme du soleil levant (au choix du colleur).
2. Le produit de deux compacts est compact (on précisera soigneusement les normes).

18 Récitation d'exercices

1. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montre que l'ensemble D_n des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables est dense. Est il-ouvert ? fermé ?
3. $\star$ Montrer que toute matrice réelle M dont le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ est ortho-trigonalisable. En déduire l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables.
4. $\star$ Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ soit libre.
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cycliques est ouvert.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2...,λ_n ses valeurs propres. Montrer que si les λ_i, $i = 1, 2, ..n$ sont deux à deux distincts alors M est cyclique. (5/2) Etudier la réciproque.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices cyclique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.
5. $\star$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que 0_n est dans l'adhérence de la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.
6. On pose $A = \{\exp(\mathrm{i}n), n \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que $\bar{A} = \mathbf{U}$.
7. $\star\star$ Reprendre la question précédente avec $A = \{\exp(\mathrm{i}n), n \in \mathbf{N}\}$.
   On note L_7 l'ensemble des entiers naturels tel que le premier chiffre (celui le plus à gauche) dans l'écriture décimal de 2^n soit un 7. Montrer que L_7 est infini. Par ℓog on désigne ici le logarithme décimal.

8. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer par **deux méthodes** que f est uniformément continue.
9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui tend vers $-\infty$. Soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.
10. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite puis un équivalent simple de son terme général [4].
11. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite, puis montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite à déterminer.
12. $\star$ Soit K un compact d'un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε dont la réunion contient K. En déduire que K possède une partie dense dénombrable.
13. $\star\star$ Monter que la boule unité d'un espace vectoriel normée de dimension infinie n'est pas compacte.
14. $\star$ Soit E l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe K, réel positif, tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^{\frac{1}{2}}$.
    (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
    (b) Soit g un élément de E. Montrer que l'ensemble $\{K \in \mathbf{R}_+ | \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|^{\frac{1}{2}}\}$ admet un plus petit élément noté $k(f)$.
    (c) Montrer que l'application :
    $$H \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{R}_+ \ ; \ f \mapsto \|f\|_\infty + k(f)$$
    est une norme. On la notera $\|\cdot\|$
    (d) $\star\star$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{E}$, telle que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :
    $$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty [\![, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy).}$$
    Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément f de $\mathbf{E}$ dans $(\mathbf{E}\|\cdot\|)$.

4. Dans cet exercice et le suivant, les élèves doivent connaître la méthode sans pour le moment, en comprendre l'origine.

Programme de colle n°6
Prévisionnel

19 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), partie étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
— Applications linéaires continues.
— Normes équivalentes ; cas des espaces vectoriels de dimension finie.
— Espaces vectoriels de dimension finie, convergence des suites et des applications, continuité des applications à valeurs dans un espace de dimension finie, compacts d'un espace de dimension finie, théorème de Bolzano-Weierstrass.
— *A venir Séries... Le prochain programme sera plus axé sur les applications linéaires et leur continuité ainsi que sur la convexité.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Antoine Bellay.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux.

20 Questions de cours

1. Une suite d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.
2. Propriétés équivalentes à la continuité d'une application linéaire.
3. Toute application linéaire définie sur un espace de dimension finie est continue.
4. $\star$ En dimension finie toutes les normes sont équivalentes (on admet que dans $(\mathbf{K}^n, N_\infty)$ les compacts sont les parties fermées bornées, cf. semaine 5).

21 Récitation d'exercices

1. Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F k-contractante.
   (a) Montrer qu'elle admet un et un seul point fixe.
   (b) $\star$ Montrer que le résultat demeure si l'on suppose qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\vec{f}^N$ soit k-contractante.
   (c) $\star\star$ Dans le cas ou $\mathbf{K}$ est étoilé, montrer que le résultat demeure en ne supposant plus que f est k-contractante mais seulement 1-lipschitzienne.

2. Soient un entier $n \geq 2$ et r un élément de $\{0, ..., n\}$ On note S_r l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang supérieur ou égal à r et E_r celui des éléments de rang r. Montrer que S_r est un ouvert. Montrer que E_n est un ouvert et que pour $r < 0$, E_r est d'intérieur vide.
3. Soit F un fermé d'un espace vectorel de dimension finie. Montrer que pour tout élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$, il existe un élément $\vec{f}$ de $\mathbf{F}$ tel que $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$.
4. Montrer qu'un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est d'intérieur vide. Montrer que son adhérence est un sous-espace vectoriel. Montrer que si $\mathbf{F}$ est de dimension finie, alors il est fermé. Donner un exemple en dimension non finie de sous-espace vectoriel non fermé.
5. $\star$ Montrer qu'un hyperplan $\mathbf{H}$ d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, noyau d'une forme linéaire ℓ, est fermé si et seulement si ℓ est continue.

   $\star\star$ Montrer que $\mathbf{E} \setminus \mathbf{H}$ est conexe par arcs si et seulement si $\mathbf{H}$ n'est pas fermé.
6. $\star\star$ Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n.
   (a) Dans le cas où $\dim \mathbf{E}$ est finie donner un exemple de compact K tel que $\mathbf{E} \setminus K$ n'est pas connexe par arcs.
   (b) On suppose que $\mathbf{E}$ est de dimension infinie et l'on admet qu'en dimension infinie la sphère unité n'est pas compacte (cf. semaine 5). Montrer que pour tout compact K, $\mathbf{E} \setminus K$ est connexe par arcs.
7. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'est.
8. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.
9. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ l'est. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.
10. Soit F un fermé d'un espace vectorel de dimension finie. Montrer que pour tout élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$, il existe un élément $\vec{f}$ de $\mathbf{F}$ tel que $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$.
11. $\star$
    (a) Soit A un connexe par arcs d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que toute partie de A relativement ouverte et fermée est soit A soit vide.
    (b) Soit A un connexe par arcs ouvert d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que deux points quelconques de A peuvent être reliés par une ligne brisée incluse dans A.
12. (Révision) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
13. $\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ est connexe par arcs.

Programme de colles n°7
Numéro double spécial vacances

---

22 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), partie étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
— Applications linéaires continues.
— Normes équivalentes ; cas des espaces vectoriels de dimension finie.
— Espaces vectoriels de dimension finie, convergence des suites et des applications, continuité des applications à valeurs dans un espace de dimension finie, compacts d'un espace de dimension finie, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Antoine Bellay.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux Brieuc Toullic.

23 Questions de cours

1. (Révision) Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que
$$N_\infty \ : \ \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$
est une norme.

2. Matrice de transvections : définition, effet d'une multiplication à droite ou à gauche, inverse d'une matrice de transvection

3. $\star\star$ Dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

4. Image d'un connexe par arcs et d'un compact par une application continue. Que dire des images réciproques ?

24 Récitation d'exercices

1. Soient $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ des espaces vectoriels normés B_1 la boule fermée unité de $\mathbf{E}$ et $\vec{\ell}$ un élément de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Montrer que $\left\{\|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}}, \vec{x} \in \mathrm{B}_1\right\}$ admet une borne supérieure. Montrer que l'application
$$N \;:\; \mathcal{L}_c(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \to \mathbf{R}\,;\; \vec{\ell} \mapsto \sup_{\|\vec{x}\|_E \leq 1} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}}.$$
est une norme sur $\mathcal{L}_c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.
2. Avec les notations de la question précédente déterminer la norme de l'application linéaire L de $\mathbf{R}^2$ (noté en colonne), dans lui-même définie par,
$$L\,(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X,$$
pour tout élément X de $\mathbf{R}^2$, lorsque $\mathbf{R}^2$ est muni de la norme n_2.
3. On pose $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soit la forme linéaire
$$L : \mathbf{E} \to \mathbf{R}\;;\; f \mapsto \int_0^1 f\,(t)\,\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que L est continue de $(\mathbf{E}, N_1)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et donner sa norme (cf. question 1.).
$\star$ Prendre $\mathbf{E} = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$.
4. Soient un entier $n \geq 2$ et f une application de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continue. Soit a un réel.
   (a) Que dire de a lorsque : $f^{-1}(\{a\})$ est un singleton ?
   (b) $\star$ On suppose que $f^{-1}(\{a\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet une borne supérieure atteinte ou une borne inférieure atteinte.
5. Soit K un compact non vide d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soit $\vec{f}$ une application de K dans K, telle que pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de
$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$
Montrer que $\vec{f}$ admet un et un seul point fixe.
6. — PROJECTION SUR UN CONVEXE —
   (a) Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z - c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c sera noté $p(z)$.
   (b) $\star\star$ Variante. Traiter 6. (a) en prenant pour $(\mathbf{E}, \|\cdot\|) = (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ et comme convexe un hyperplan $\mathbf{H}$. Montrer que $\mathbf{E} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{\perp}$.
   (c) Soit y un élément de C, montrer que : $\langle y - p(z) \mid z - p(z)\rangle \leq 0$.
   (d) $\star$ Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que : $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$.
7. $\star$ On garde le cadre de l'exercice précédent. On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$.
   (a) On suppose que z n'appartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui
   (b) Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$
   (c) Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui.
8. $\star\star$ On garde le cadre de la question précédente.
   Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.
   Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).
9. (a) On appelle enveloppe convexe d'une partie A non vide d'un espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, notée $\mathrm{conv}(A)$ l'intersection de tous les convexes inclus contenant A, c'est donc le plus petit convexe contenant A (on fera un dessin). Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de points de A.

(b) $\star$ On suppose $\mathbf{E}$ de dimension n. Montrer que $\operatorname{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de A. Montrer que si A est compact alors $\operatorname{conv}(A)$ est compact. Donner un exemple de partie A fermée telle que $\operatorname{conv}(A)$ ne le soit pas.

10. (Révision) $\star$ Soient p et q des entiers naturels non nuls. Soient A et B des éléments respectivement de $\mathcal{M}_{p,n}$ et de $\mathcal{M}_{n,p}$.
Comparer χ_{AB} et χ_{AB}.

11. (Révision) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.
   (a) Montrer qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.
   (b) Montrer que l'ensemble des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Ce résultat serait-il vrai si A était diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes ?

12. (Révision) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, nilpotent d'ordre n. Déterminer le commutant de f ainsi que sa dimension.

13. (Révision) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$, $|t_{i,j}|\leq\varepsilon$.
$\star$ Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.

14. $\star\star$ (Théorème de CHUDNOVSKY) Soit I un segment inclus dans $]0,1[$
   (a) Soit l'application
   $$\varphi\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto 2x(1-x).$$
   Etudier le convergence sur I de la suite d'application $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où l'on a posé $\varphi_n=\underbrace{\varphi\circ\varphi\circ\ldots\circ\varphi}_{n\text{ termes}}$
   (b) Soit $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbf{Z}$ convergeant uniformément vers f sur I [5].
   (c) Le résultat est-il vrai sur $[0,1]$.

15. $\star\star$
Soit $[a,b]$ un segment de largeur de largeur strictement supérieur à 4.
   (a) Montrer que pour tout élément p de $\mathbf{R}[X]$ unitaire, $\sup\limits_{t\in[-1,1]}|p(t)|\geq\frac{1}{2^{n-1}}$.
   (b) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ à coefficients entiers. Montrer que $\mathcal{P}$ est fermé dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

PROGRAMME DU TEST N° 1

- Colles :
  — semaine 1, exercices 4 et 5,
  — semaine 2, exercices 6,
  — semaine 3, exercices 6,
  — semaine 4, exercices 2 et 3 ;
- DS1. I. A et I. B questions 1 à 6 ;
- DS2. Mines-Centrale. I questions 1,2,3 ; II question 2 ;
- DM1. I ;
- DM2. Questions 1 et 3.

5. C'est-à-dire qui converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On admettra que dans $(\mathcal{C}^0(I,\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$ tout élément f est limite uniforme d'une suite d'applications polynomiales

Programme de colles n°8

25 Séries

- Définition de la convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Dans un espace vectoriel de dimension finie la convergence absolue assure la convergence.
- Séries à termes positifs. Caractérisation de la convergence par la suite des sommes partielles. Théorèmes de comparaison directe, sommation des relations de comparaisons. Règle de d'Alembert, comparaison avec une intégrale.
- Espace vectoriel des séries convergentes, des séries absolument convergentes.
- Séries réelles, plan d'étude d'une série réelle. Séries alternées.
- Exemples de séries dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, séries géométriques et exponentielles.
- *A venir* Familles sommables, produit de Cauchy de deux séries. Révisions sur les fonctions d'une variable réelle...

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Antoine Bellay.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux Brieuc Toullic.

26 Questions de cours

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites de réels, positives à partir d'un certain rang, telles que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
2. Théorème spécial sur les séries alternées, (avec majoration du reste).

27 Exercices

1. Etudier les séries : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(\ln(n))}{n(\ln n)^2}$ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}\ln(\ln(n))}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln(n)))^3}$, β désigne un réel.
2. Nature de la série :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$
3. Donner en utilisant le théorème de sommation des équivalents, les équivalents des quantités suivantes, lorque n tend vers $+\infty$: $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$, où a est un réel strictement supérieur à 1, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}$, $\sum_{k=1}^{n} k^k$.
4. Mêmes questions pour la première en utilisant la comparaison à une intégrale. On fera DEUX dessins polychromes.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k, z_n = \frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ku_k$.
Montrer en utilisant les théorèmes de sommation des relations de comparaison que :
   - si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, alors $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$;
   - si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
   - si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$, alors $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$;
   - si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$;
   - etc.

   Le colleur choisira quelques items.

6. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. On note γ sa limite.

   $\star$ Donner un équivalent simple, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma$.

7. Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}+\,;\ M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}MM)}$$

   est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on notera $\|\cdot\|_F$. Montrer que pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

   Définir l'exponentielle d'une matrice. Calculer l'exponentielle des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
   .

   Bien évidemment, pour l'exemple 2, les $\frac{5}{2}$ peuvent (voire doivent) passer par une équation différentielle.

8. $\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0. Soit un entier $p \geq 2$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum p^n u_{p^n}$ converge. En déduire la nature des la séries $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^a}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$, où a est un réel.

9. Séries sans paramètre — Etudiez en utilisant des développement limités au **sens fort**, les séries de terme général

   Etudiez la série de terme général

   $u_n = \sin(\sqrt{1+n^2\pi^2})$ et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$. $(n \geq 2)$, etc.

10. Séries à paramètre — Etudiez en utilisant des développement limités (au sens faible) la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{5\alpha}}\right)$, où α est un réel strictement positif, etc., etc., etc...

11. $\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On note pour tout entier naturel n, S_n sa somme partielle d'ordre n et l'on suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouvez que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

12. $\star$ Etudier la série de terme général $u_n = \sin(n!\pi e)$.

13. $\star$ Nature de la série de terme général

$$u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n).$$

14. $\star\star$ Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n^{e} nombre premier. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{p_n}$ diverge.

15. $\star\star$ Soit K un convexe compact d'un e.v.n. de dimension finie $n \geq 2$. Montrer que $\overset{\circ}{K}$ est convexe et que son complémentaire est connexe par arcs. Montrer que la frontière de K est connexe par arcs.

Programme de colle n^{o}9

28 Séries

- Révision du programme précédant
- Exemples de séries dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: séries géométriques et exponentielles.
- Famille sommables de termes positifs ou nuls. Lien avec les séries à termes positifs ou nuls, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini Tonelli.
- Famille sommables de réels ou complexes. Lien avec les séries, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini-Lebesgues, théorème de sommation par paquets, application au produit de Cauchy de deux séries.
- Définition d'une probabilité sur un univers Ω dénombrable, caractérisation d'une probabilité par ses valeurs sur les événements élémentaires, variable aléatoire sur Ω, espérance d'une variable aléatoire, exemple la loi de Poisson.
- *A venir :* Révisions sur les fonctions d'une variable réelle, fonctions convexes.

  Avertissement pour les colleurs : *les familles sommables figurent au programme pour fonder rigoureusement les probabilités, elles ne doivent pas faire l'objets d'exercices autres qu'élémentaires. Les élèves ne sont pas sensés connaitre autre chose en probabilités que le cours de MPSI (Ω fini) et la définition donnée cette semaine, il y aura un chapitre entier consacré aux probabilités en fin d'année, les exercices doivent rester très élémentaires.*

  Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

  Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux Brieuc Toullic.

29 Questions de cours

1. $\star$ Enoncer et démontrer le résultat sur le produit de Cauchy de deux séries (par les familles sommables). Application : pour tout z et tout z' complexes, $\exp(z+z') = \exp(z) + \exp(z')$.
2. Définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω dénombrable, expression de l'espérance grâce à la loi de la X. Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

30 Exercices

1. (le retour) Montrer que que la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que cette suite converge vers 0.
Donner lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de u_n, de la forme cn^γ, avec c et γ réels.
$\star$ Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $a_n := u_n - cn^\gamma$. Donner un équivalent de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
Les élèves doivent savoir justifier la forme de la suite téléscopique utilisée en illustrant par un dessin la comparaison à une intégrale.
2. (a) $\star$ Soit b un élément de $]1, +\infty[$. Montrer que la relation de récurrence
$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \ln(x_n), \end{cases}$$
définit bien une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que cette suite converge vers $+\infty$.
   (b) Donner un équivalent simple de $\ln(x_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$, puis de x_n.
   (c) $\star\star$ Donner un développement asymptotique de v_n à deux termes, lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Soit σ une permutation de $\mathbf{N}^*$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

   $\star$ Déterminer la nature de la séries $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$.

4. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge.
   (a) Montrer que ℓ^2 est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que pour tout couple (u, v) d'éléments de ℓ^2, $\sum u_n v_n$ converge absolument.
   (c) Montrer que $\phi\ :\ \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbf{R}\,;\ (u, v) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 en décroissant.
   Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$.
   ABEL : COUPER-RÉINDEXER-RECOLLER

6. Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k a_k = \mathrm{o}(n)$.

7. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω (cf. 1.) à valeurs dans $\mathbf{N}$, d'espérance finie. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(X > n)$. au choix du colleur :
   (a) En utilisant une transformation d'Abel.
   (b) En utilisant le théorème de Fubini (on fera un joli dessin).

8. (a) Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires définies sur un ensemble discret Ω muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes On suppose que la loi de X_i est une loi de Poisson de paramètre λ_i (strictement positif), pour $i = 1, 2$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson à préciser.
   (b) Soient λ un réel strictement positif et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω, telle que pour tout entier $n \geq 1$, Y_n suive une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{n})$. Soit un entier $k \geq 0$. Montrer que $P_{Y_n}(\{k\}) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

9. Soit x un élément de $]-1, 1[$. Montrer l'égalité : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$

10. — FORMULE DE WALD (le retour) — Soit $(X_n)_{n\in N^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un univers dénombrable Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$, qui suivent une même loi. Soit N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{N}^*$ définie sur Ω. On suppose que la suite $(N, X_1, X_2, ..., X_n, ...)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On note pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{n=1}^{n} X_i$. On suppose que X_1 et N admettent une espérance finie. Montrer que la variable aléatoire S_N admet pour espérance $\mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(N)$.

11. (a) Définition de l'exponentielle d'une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{tr}(M))$.
   (b) On admet que $\exp(-M)$ est l'inverse de $\exp(M)$. Montrer que si M est antisymétrique réelle alors $\exp(M)$ est élément de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$, en utilisant la question précédente, puis en faisant un raisonnement par connexité par arcs (on admet la continuité de $t \mapsto \exp(tM)$).

12. $\star$ Les variables aléatoires sont toutes définies sur un univers dénombrable Ω. On désigne par λ un réel strictement positif, $p \in]0, 1[$, X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
   Pour tout $\omega \in \Omega$ on effectue $X(\omega)$ lancers indépendants d'une pièce truquée donnant pile avec la probabilité p et on note $Y(\omega)$ le nombre de faces obtenues.
   Montrer que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.
   Déterminer la loi de $X - Y$ et établir l'indépendance des variables Y et $X - Y$. En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.

13. $\star$ Soit $\sum u_n$ une série réelle telle que pour toute suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle, la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.
   Indication : On pourra montrer que sinon il existe une suite $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'entiers strictement croissante telle que pour tout $i \in \mathbf{N}$,
   $$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1} |u_n| \geq 1.$$

14. $\star\star$ Soit a élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On suppose que pour tout $b \in \ell^2$, la série $\sum a_n b_n$ converge. montrer que $a \in \ell^2$.
   Indication — On regardera TD 4 question III. (5).

15. $\star\star$ Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact de $\mathbf{R}^n$ dont l'intérieur contient 0 et telle que $\mathcal{C}$ soit symétrique par rapport à 0. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbf{R}^n$ tel que $\mathcal{C}$ soit la boule unité pour cette norme. Montrer que tous les convexes compacts de $\mathbf{R}^n$ d'intérieur non vide sont homéomorphes.

Programme de colle n°10,

31 Révision du cours sur les fonctions d'une variable réelle de MPSI

— Théorème de la limite monotone.
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de l'homéomorphisme croissant.
— Lemme de Rolle, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$.
— etc.

32 Fonction convexe

— Définition, interprétation géométrique en terme de corde, formule de Jansen.
— Lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
— Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables. Une fonction dérivable convexe est au dessus de ses tangentes.
— Inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$, inégalité de Young, Inégalité de Hölder.
— *A venir.* Révision sur le calcul des primitives, approximation uniforme...

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic.

33 Questions de cours

1. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

34 Exercices

1. Enoncer le théorème de Darboux et donner en une preuve utilisant le théorème de la borne atteinte.
   $\star$ Donner une autre preuve utilisant la connexité par arcs.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
   — en utilisant le théorème de la borne atteinte ;
   — en effectuant un changement de variable.
3. Inégalité de Kolmogorov —

   (a) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornée. On note $M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$.
   Montrer que pour tout réel x,
   $$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
   On pourra appliquer l'inégalité de Taylor lagrange entre x et $x + h$ et entre x et $x - h$, pour tout réel $h > 0$.

   (b) $\star\star$ *Spécial Loup.* Soient un entier naturel $n \geq 2$ et f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornée. Pour $k = 0, 1, \ldots, n$ on note $M_k := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|$, sous réserve que l'application $f^{(k)}$ soit bornée.
   Montrer que pour tout élément k de $\{0, \ldots, n\}$,
   $$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \text{ (inégalité de Kolmogorov).}$$
4. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexe et non constante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

5. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ strictement convexe continue [6]. On suppose que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f atteint sa borne supérieure en un et un seul point a de $\mathbf{R}$. montrer que si f est de plus dérivable, alors a est caractérisé par $f'(a) = 0$.
6. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et strictement convexe. On suppose de plus que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{1}$$

Montrer que f' est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
7. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f admet $n+1$ zéros comptés avec leurs ordres. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
8. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, soient enfin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a, b]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i
   (b) Montrer que pour tout élément x de $[a, b]$ il existe un élément y de $[a, b]$ tel que :

$$(f - P)(x) = f^{(n+1)}(y) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}{(n+1)!},$$

9. $\star$(En place de la précédente) — Égalité de Taylor Lagrange — Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, $n+1$ fois dérivable, soit enfin x_0 un point de $[a, b]$. Montrer que pour tout élément x de $[a, b]$, il existe un élément y de $\overleftrightarrow{]x_0, x[}$, tel que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_0)^i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} + (x - x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégrale.
10. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
    — en utilisant le théorème de la borne atteinte ;
    — en effectuant un changement de variable.
11. Enoncer et prouver les inégalités de Young et Hölder.
12. $\star$ Inégalité de Jansen-Le Saux—
    Soit f une application d'un segment $[a, b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe.* Soient x une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $[a, b]$continue et α une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ continue telle que :

$$\int_0^1 \alpha(t) \mathrm{d}t = 1..$$

   (a) Montrer que :

$$\int_0^1 \alpha(t) x(t) \mathrm{d}t \in [a, b].$$

   (b) Montrer que

$$f\left(\int_0^1 \alpha(t) x(t) \mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t) f(x(t)) \mathrm{d}t.$$

13. *Le retour !*
    Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, $N_p(f) \underset{n \to +\infty}{\to} N_\infty(f)$.
14. $\star\star$ Soit f une application d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ continue.
    (a) Montrer que si f admet en tout point un maximum local alors elle est constante.
    (b) Montrer que l'ensemble des valeurs extrémales de f est au plus dénombrable. On appelle valeur extrémal de f tout réel y tel qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$ et f admette en x un extremum local.
    (c) Montrer que si f admet en tout point de $[a, b]$ un extremum local alors f est constante.

6. la continuité des applications convexes sur l'intérieur de leur intervalle de définition n'est pas au programme

15. ⋆ —INÉGALITÉ DE HÖFDING — Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées, et $(c_i)_{1\leq i\leq 1}$ une suite de réels telles que pour $i = 1, 2, ..., n$ on ait presque sûrement $|X_i| \leq |c_i|$. On note $S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$ et $C_n = c_1^2 + c_2^2 + ...c_n^2$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout réel t, $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$.

(b) Soit X une variable aléatoire centrée tel que $|X| \leq 1$, p.s. Montrer que $\mathrm{E}(\exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

(c) En déduire que $\mathrm{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}C_n\right)$.

(d) Montrer que $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2C_n}\right)$.

16. ⋆⋆ Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

(a) On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.
Le résulat demeure-t-il pour f non continue [7].

(b) On suppose que tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il exise au moins un élément t de $]0, 1[$ tel que :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Montrer que f est convexe.

7. On admettra au besoin l'existence de bases du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

Programme de colles n°11

35 Approximation uniforme, fonction d'une variable réelle

— Convergence simple et uniforme de suites et de séries d'applications d'une partie A d'un e.v. de dimension finie à valeurs dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou un e.v. de dimension finie $\mathbf{F}$. Critère de convergence uniforme.
— Continuité d'une limite uniforme d'une suite d'applications continues. Résultats analogues pour les séries. Dans la pratique on montre pour tout point du domaine, la convergence uniforme dans un *voisinage relatif au domaine* de ce point.
— Limite en un point (ou en $+\infty$) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite. Résultat analogue pour les séries.
— Lien entre la convergence uniforme et la convergence en norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour A compact $\left(\mathcal{C}^0(A,\mathbf{F}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}(A,\mathbf{F}), \|\cdot\|_\infty)$.
— Convergence normale des séries d'applications. La convergence normale implique la convergence uniforme et uniforme absolue. Critère de convergence normale.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, .

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou..

36 Questions de cours

1. Continuité de la limite uniforme d'une suite d'applications continues.
$\star\star$ En remplacement : limite en un point (ou en $+\infty$) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite (théorème de la double limite).
2. Soient I un intervalle non réduit à un point et a un élément de I. Soit f une application de I dans $\mathbf{R}$ continue, dérivables en tout point de $I \setminus \{a\}$. On suppose que $f'(x) \underset{x\to a, x\neq a}{\longrightarrow} = \ell$, où ℓ est élément de $\mathbf{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$. Montrer [8] que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a, x\neq a}{\longrightarrow} \ell$. En déduire qu'une dérivée d'une application à valeurs réelles n'a pas de discontinuité de première espèce.

37 Exercices

1. *Révision.* Étudier la nature de la série de terme général $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^a}$, $(n \geq 2)$, où a est un réel.
2. Montrer la convergence simple de la série d'applications $\sum u_n$, où, pour tout entier naturel n,
$$u_n : [-1, 1[\to \mathbf{R};\ x \mapsto \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|^n x^n}{(n+1)^{\frac{1}{4}}}\ .$$
La somme de cette série est-elle continue ?
3. $\star$ Soit la série d'applications $\sum u_n$, où pour tout entier naturel n,
$$u_n : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R};\ x \mapsto \frac{|\sin x|}{(n+1)^a},\ \text{pour } x \in [n\pi, (n+1)\pi],\ 0 \text{ sinon.}$$
et a un réel positif. Etudier la convergence simple, uniforme et normale. Discutez suivant la valeur de a. On illustrera de beaux dessins.
4. Soit la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que le domain de définition de f est $]1, +\infty[$. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition. Montrer que f admet une limite finie à déterminer en $+\infty$ et en 1, **puis** donner un équivalent de f en 1_+.

8. l'étudiant pourra utiliser l'axiome du choix dénombrable et ne pas faire de raisonnement « en ε ».

5. $\star$ Soit la fonction f du couple (x,y) de variables réelles, définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x(\ln(n))^y}$. Etudier le domaine de définition D de f. Etudier la continuité de f sur D. On fera de belles figures.
6. Pour tour entier $n \geq 2$ on pose , $f_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.
   (a) Déterminer le domaine D de convergence de la série $\sum_{n\geq 2} f_n$. On note $\varphi \ : \ D \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge-t-elle normalement sur son domaine de définition ?
   (d) Etudier la continuité de φ en 0.
7. $\star$ Que dire d'une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, limite uniforme d'une suite d'applications polynômiales. Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue est limite simple d'une suite d'applications polynomiales
8. (a) Donner deux exemples de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Définir l'exponentielle d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que l'application $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto \exp(M)$ est continue.
   (c) On admet que pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent entre eux, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Montrer que l'exponentielle d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commute avec sa transposée est le produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale.
   Les formules du type $\ell(\exp(M)) = \exp(\ell(M))$ où ℓ est linéaire doivent être justifiée par passage aux sommes partielles et continuité de ℓ.

Cesàro forme intégrale

9. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Déterminer la limite, lorque n tend vers $+\infty$ de la quantité suivante : $I_n := n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.
10. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, de limites nulles en $\pm\infty$. Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues, à valeurs positives, chacune nulle en dehors d'un segment. On suppose de plus que pour tout entier naturel n, $\int_{\mathbf{R}} K_n = 1$ et, pour tout réel $\delta > 0$, $\int_{-\delta}^{+\delta} K_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
    Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose : $K_n \star f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(K_n \star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f [9].
11. $\star\star$ Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, supposée, elle aussi, continue.
    (a) Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit croissante (c'est-à-dire que la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit croissante pour tout élément x de $[0,1]$).
    Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.
    (b) **Ou bien,** supposons que pour tout entier naturel n, l'application f_n soit convexe. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans $]0,1[$.

    On pourra montrer que les applications $f_n, n \in \mathbf{N}$ sont équi-lipschitziennes sur de tels segments.
12. $\star$. Théorème de Weierstrass-Bernstein-Girard — On considère f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère le polynôme : $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}$.
    (a) On considère un élément x de $[0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, de même paramètre x. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots X_n$. Donner pour tout entier $n \geq 1$, l'espérance de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, au moyen de B_n. Donner la variance de $\frac{S_n}{n}$.
    (b) Pour tout réel $h > 0$, on pose : $\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, (x,y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x-y| \leq h\}$, $A_h = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq h\right\}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $h > 0$,
    $$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\mathbf{P}(\bar{A}_h)\|f\|_\infty + \mathbf{P}(A_h)\omega(h)$$
    (c) Montrer la convergence uniforme de la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers f.
13. $\star\star$ Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

    Considérer pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\phi_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto a_n\left(\cos\dfrac{t}{2}\right)^{2n}$, où a_n est tel que $\int_{[-\pi,\pi]} \phi_n = 1$.
    .

9. On n'embêtera pas les 3/2 avec des problèmes de convergence d'intégrales

MP* **2021-22**

Programme de colle n°12
Numéro double spécial Noël !

38 Fonction d'une variable réelle, approximation

— Approximation uniforme (cf. programme précédent).

— Dérivation d'applications à valeurs vectorielles.
  - — Dérivée d'une fonction à valeurs dans un e.v. de dimension finie $\mathbf{F}$, propriétés de la dérivation.
  - — Arcs paramétrés : définition, points réguliers, tangentes en un point régulier (aucune autre connaissance spécifique).
  - — Dérivées d'ordres supérieurs, espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I,\mathbf{F})$, algèbre $\mathcal{C}^k(I,\mathbf{C})$, formule de Leibni(t)z. Dans le cas d'une application numérique, généralisation à une application bilinéaire, formule de Taylor-Young vectoriel à l'ordre n pour une application de classe $\mathcal{C}^n$ (avec un petit o).

— Intégrale
  - — Construction de l'intégrale sur un segment d'une application continue par morceaux à valeurs dans $\mathbf{F}$. Propriétés de l'intégrale.
  - — Inégalité des accroissements finis pour une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{F}$.
  - — Formule de Taylor avec reste intégrale (vectorielle), inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (avec un grand O).
  - — Intégrale sur un segment de la limite uniforme d'une suite d'applications.

39 Calcul différentiel

Les exercices sur les équations aux dérivées partielles et l'études des extremums seront vus la semaine prochaine

Toutes les applications sont définies sur un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. $\mathbf{E}$ sera le plus souvent vu comme un espace affine.

— Continuité, continuité directionnelle

— Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application $\vec{f}$ ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U vérifie, pour tout point a de U :

$$\vec{f}\left(a+\vec{h}\right) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i.D_i\vec{f}(a) + \mathrm{o}\left(\|\vec{h}\|\right),\ \left(\vec{h}\to\vec{0}_{\mathbf{E}}\right) \tag{2}$$

— Une application ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U, admet des dérivée dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$

— Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de U. Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où $\mathbf{E}$ est $\mathbf{R}^2$ (plan tangent).

— Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.

— Différentiabilité de la composée. La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.

— *À venir : matrice jacobienne, gradient, fonction fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou..

40 Questions de cours

1. Dérivation en un point a de $t \mapsto \vec{b}(\overrightarrow{f_1}(t), \overrightarrow{f_2}(t))$ où $\vec{b}$ est bilinéaire, et $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ dérivables en a, applications aux mouvements circulaires uniformes et à accélération centrale.
2. $\star\star$ Soit $\vec{f}$ une application d'un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dans laquelle $\vec{f}$ admet p applications dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ continue. Montrer que pour tout $a \in U$:
$$\vec{f}(a+\vec{h}) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i \vec{f}(a) + \vec{\mathrm{o}}(\|\vec{h}\|)\,;\ (\vec{h} \to \vec{0}_{\mathbf{E}}).$$
3. Sous les hypothèses de la question précédente montrer l'équivalence des deux propositions :
   i. L'application $\vec{f}$ admet sur U des applications dérivées directionnelles dans toutes les directions continues.
   ii. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dans laquelle $\vec{f}$ admet p applications dérivées partielles continues.

41 Exercices

1. Soit l'arc paramétré de $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique,
$$\begin{cases} x = 2t^3, \\ y = 3t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$
   (a) Déterminer l'ensemble D des réels t tels que le point de paramètre t de l'arc soit régulier. Pour un élément t_0 de D donner une équation cartésienne de la tangente T et de la normale au point de paramètre t_0.
   (b) Montrer que pour tout $t \in D$, il existe un et un seul élément t' de D tel que les tangentes à l'arc aux points de paramètres t et t' soient orthogonales.
   (c) Montrer qu'il existe deux et seulement deux éléments de D, t_1 et t_2 tels que les tangentes aux points de paramètres t_1 et t_2 soient aussi des normales à la courbe.
2. Soit f une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$; continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$
   $\star$ Par $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ on désigne un espace euclidien, la norme euclidienne associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sera notée $\|\cdot\|$.
   Soit $\vec{f}$ une application d'un segment $[a,b]$ à valeur dans $\mathbf{E}$, continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :
$$\left\|\int_a^b \vec{f}(t)\mathrm{d}t\right\| = \int_0^b \|\vec{f}(t)\|\mathrm{d}t.$$
3. $\star$ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x \in \mathbf{R}$,
$$u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(....(\sin(x))...))}_{n \text{ fois}}$$
   (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\|u_n\|_\infty = |u_{n-1}(1)|$.
   (c) Déterminer un équivalent de $\|u_n\|_\infty$.
   (d) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement mais converge uniformement.

Sommes de Riemann

4. (a) Déterminer la limite éventuelle de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

(b) Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

5. $\star$ Soient x une application de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ continue et α une application de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ telle que : $\int_{[0,1]}\alpha = 1$. Montrer que

$$\exp\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)\exp(x(t))\mathrm{d}t.$$

6. Théorème de Dirichlet — Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$. On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$D_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C},\ t \mapsto \frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)\right).$$

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x non congru à zéro modulo 2π,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(b) Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ (cf. TD. séries de Fourier).

7. $\star$ Même question que précédemment, f n'étant que $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

8. Soit la série d'applications $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{x^{\sqrt{n}}}{\mathrm{sh}(nx)}.$$

(a) Montrer que la série d'applications $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.

(b) montrer que sa somme est continue.

9. — Théorème des moments —
Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$, $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.
$\star$ Même question pour f à valeurs complexes.

10. $\star$ — Inégalité de Hardy —
(Inégalité de Hardy faible).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ Pour tout $x \in]0,1]$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F(0) = f(0)$. Montrer que :

$$\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Calcul différentiel

11. Etudier la continuité en $(0,0)$ $g\ :\ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3xy^2}{x+y}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Soit l'application $f\ :\ \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Montrer que f admet en $(0,0)$ dans toute direction une dérivée directionnelle. Est-elle continue en ce point ?

Version $\star$ Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F l'application :

$$F \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\; (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}, \text{ pour } x \neq y, \\ g'(x)\,, \text{ pour } x = y. \end{cases}$$

Montrer que F est continue.

Version $\star\star$ Montrer que si g est deux fois dérivable en $a \in \mathbf{R}$, alors F est différentiable en (a,a).

12. Soient p un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et l'application $\Phi_p \;:\; \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;M \mapsto M^p$. Montrer que Φ_2, puis Φ_3 sont différentiables, et donner leurs différentielles. Montrer que la fonction exponentielle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est différentiable en 0.
$\star$ Montrer par récurrence que Φ_p est différentiable et donner sa différentielle.
13. Soit $\delta \;:\; \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;M \mapsto \det(M)$. Montrer que δ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner sa différentielle, au moyen du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:
— en calculant les dérivées partielles ;
— en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
14. Soit l'application $f \;:\; \mathbf{E}\backslash\{\vec{0}_{\mathbf{E}}\} \to \mathbf{E}\,;\; \vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.

EQUIRÉPARTITION —

15. $\star\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. Pour tous réels a et b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose :
$$X_n(a,b) := |\{k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b]\}|.$$
Prouvez l'équivalence des 3 propositions suivantes :
   i. Pour pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \leq b$,
   $$\frac{X_n(a,b)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} b-a.$$
   ii. Pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, on a :
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
   iii. (*Critère de Weyl.*) Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp 2\mathrm{i}\pi p u_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
   On admettra le résultat suivant, vu en TD.
   THÉORÈME DE WEIERSTRASS TRIGONOMÉTRIQUE : *toute application de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$, 1*-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*
   Un polynôme trigonométrique est un élément de $\mathrm{vect}((\exp(\mathrm{i}2\pi p\,\cdot)_{p\in\mathbf{Z}}))$.
16. $\star\star$ *Théorème de Bedford.*
Pour $i = 1, 2, ..., 9$ on note $N_i(n)$ le nombre d'éléments de $\{2, 2^2, ..., 2^n\}$ dont le premier chiffre dans l'écriture décimale est un i. Montrer que
$$\frac{N_i(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\ln(i+1)-\ln(i)}{\ln(10)}.$$

RÉVISION

17. Soient n un élément de $\mathbf{N}^*$ et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ nilpotent d'ordre n.
   (a) Montrer que M est semblable à la matrice
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer que le commutant de M est $\mathbf{R}[M]$, ensemble des polynômes en M.
18. Déterminer les éléments M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ tels que : $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Même question pour : $M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Programme de colle n°13

42 Calcul différentiel

Toutes les applications sont définies sur un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. $\mathbf{E}$ sera le plus souvent vu comme un espace affine.

— Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application $\vec{f}$ ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U vérifie, pour tout point a de U :

$$\vec{f}\left(a+\vec{h}\right) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i.D_i\vec{f}(a) + \mathrm{o}\left(\|\vec{h}\|\right),\ \left(\vec{h} \to \vec{0}_{\mathbf{E}}\right) \tag{3}$$

— Une application ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U, admet des dérivée dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$
— Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de U. Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où $\mathbf{E}$ est $\mathbf{R}^2$ (plan tangent).
— Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.
— Différentiabilité de la composée. La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.
— Matrice jacobienne.
— Dans le cas d'un espace euclidien, définition du gradient, coordonnée dans une base orthonormée.
— Condition nécessaires du première ordre pour avoir un extremum local.
— Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorèmes de transfert pour les applications de classe $\mathcal{C}^k$.
— Théorème de Schwarz (admis).
— *A venir : groupes, anneaux...*

La notion de vecteur tangent à un ensemble, et plus généralement la géométrie différentielle feront l'objet de l'avant dernier chapitre.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou..

43 Questions de cours

1. Vecteur gradient, définition par l'isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual, coordonnées dans une base orthonormée, interprétation, on illustrera par des dessins.
2. $\star$ Différentielle d'une forme linéaire, d'une forme bilinéaire et de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.
3. $\star\star$ Différentabilité de la composée de deux applications différentiables.

44 Exercices

1. Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. $\mathbf{C}$ désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que pour tout élément X de C et tout élément t de $\mathbf{R}_+^*$, $t \cdot X \in C$. Soit f une application de C dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α, si et seulement si, pour tout $X \in C$, $\mathrm{d}f(X) \cdot X = \alpha f(X)$.
   Déterminer la forme générale des applications de $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x > 0\}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telles que pour tout élément (x,y) de C, $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}y = \sqrt{x^4+y^4}$.

2. $\star$ Soit a un réel strictement positif, et f l'application,

$$g\ :\ ]0,+\infty]^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}.$$

Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point à déterminer.

GRADIENT

3. (a) Soient $(E, < \cdot | \cdot >)$ espace euclidien $a \in E$ et $f_a \; : \; E \setminus \{a\} \; \to \mathbf{R}\,; \; m \mapsto \|\overrightarrow{am}\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à $< \cdot | \cdot >$. Montrer que f_a est différentiable et donner son gradient.

   Expliquer en vous appuyant sur la signification du gradient et un dessin que le résultat était évident.

   (b) $\star$ LOI DE SNELL-DESCARTES

   Soit $(\mathbf{R}, F)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ régulier. Soient A et B des points de $\mathbf{R}^2$ en dehors du support de l'arc. On considère l'ensemble L des lignes brisées (A, M, B) où M est un point du support $\mathcal{C}$ de l'arc. Donner une condition géometrique nécessaire pour qu'un élément (A, M_0, B) de L soit de longueur minimale.

4. Expression du gradient ≪ en coordonnées polaires ≫. On motivera les calculs par des remarques géométriques et/ou expression du laplacien ≪ en coordonnées polaires ≫.

   $\star$ *En remplacement.* Expression de la divergence en ≪ coordonnées en polaires ≫. Retrouver ainsi l'expression du laplacien en ≪ coordonnées en polaires ≫.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Les exercices 5,6 et 7, seulement à partir de mercredi(compris)

5. $\star$ Déterminer l'ensemble S (rep. S') des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \text{ (resp. } x).$$

6. On pose $U = \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_- \times \{0\})$. Déterminer l'ensemble S_U des éléments f de $C^1(U, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,
$$-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0,.$$

   On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes des champs de vecteurs associées à ces équations ainsi que les champs.

7. Déterminer l'ensemble S (rep. S') des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,
$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \text{ (resp. } f).$$

   On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes du champ de vecteurs associées à cette équation ainsi que le champ.

ACCROISSEMENTS FINIS

8. Soit $(\mathbf{E}, < \cdot | \cdot >)$ espace euclidien, (vu comme un espace affine) $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée à $< \cdot | \cdot >$ et C un ouvert convexe de $\mathbf{E}$. Soit f une application de C dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que pour tout point m de $\mathbf{E}$, $\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq 2019$

   (a) Montrer que pour couple (a, b) d'éléments de C, $|f(a) - f(b)| \leq 2019\|\overrightarrow{ab}\|$.

   (b) $\star$ On suppose à présent que $\mathbf{E}$ est $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. On suppose que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$ et qu'il existe un réel M tel que pour tout élément (x, y) de C, $|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)| \leq M$, $|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)| \leq M$, $|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)| \leq M$. Montrer que pour $(x, y) \in C$,
$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq 2M\|(x,y) - (x_0,y_0)\|^2.$$

   (c) $\star\star$(*En remplacement de (a) et (b)*). Soit B une boule ouverte de $\mathbf{R}^2$ et f une application de B dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, bornée. On suppose que $f^{-1}([1, +\infty[)$ est un fermé non vide et que pour tout $m \in B$, les valeurs propres de $(\partial^2_{i,j} f(m))_{\substack{i=1,2\\j=1,2}}$ sont inférieures ou égales à -1. Montrer que f atteint son maximum en un et un seul point de B.

9. Soit F l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ $F \; : \; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,; \; (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, mais pas $\mathcal{C}^2$.

MATRICE JACOBIENNE

10. (a) On admet que l'application $\mathbf{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\to \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbf{R}_-\}$; $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la bijection réciproque ϕ est $\mathcal{C}^1$. Déterminer, sans calculer ϕ, J_ϕ, en un point (x,y) de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbf{R}_-\}$.

    (b) $\star$ Expliciter ϕ et vérifier pour un ou deux coefficients de J_ϕ le résultat trouvé.

11. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$.

    (a) Soit a un élément $\mathbf{R}^n$. On pose $r = \mathrm{rang}(\mathrm{d}f(a))$. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $r \leq \mathrm{rang}(\mathrm{d}f(x)$.

    (b) $\star\star$ Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\mathrm{rang}(\mathrm{d}f)$ soit localement constant sur U.

FONCTIONS HARMONIQUES

12. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}^n \setminus \{(0,...,0)\}$ dans $\mathbf{R}$, radiales, de classe $\mathcal{C}^2$ et telles que $\Delta f = 0$. Que dire dans le cas $n = 3$.

13. $\star$

    (a) Soit B la boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre $(0,0,...0)$ et de rayon strictement positif $\mathbf{R}$. Soit f une fonction continue sur $\bar{B}$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que si f admet en un point m de B un maximum local, alors $\Delta f(m) \leq 0$.

    (b) On suppose f harmonique (i.e. Δf nul). Montrer que

$$\sup_{x \in \bar{B}} f(x) = \sup_{x \in \mathrm{Fr}(B)} f(x).$$

    On pourra considérer $f_\varepsilon \ : \ x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$;

Programme de colle n°14

45 Groupes, anneaux, corps

- Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
- Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupe
- Sous-groupes de $\mathbf{Z}$, groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
- Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
- Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
- Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
- Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.
- Dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{Z}$, PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
- Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans $\mathbf{Z}[X]$ ou $\mathbf{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$
- **A venir :** *L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Equivalence de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, et n premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

46 Questions de cours

1. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$, où $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.
2. Structure des groupes monogènes (avec deux dessins).

47 Exercices

1. FONCTIONS CONVEXES
   Voir DM. 6.
   Soit soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
   (a) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \mathbf{R}^2$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$, $f_{a,\vec{x}}$ l'est.
   (b) Montrer que si f est différentiable et convexe alors : $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$; en déduire que f atteint en a point de $\mathbf{R}^2$ sa borne inférieure si et seulement si $\mathrm{d}f(a)$ est nulle.
   (c) $\star$ On suppose que f est strictement convexe et que $\frac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Montrer que ∇f est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.
2. $\star$ On munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, on désignera par $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique et par $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ à valeurs <u>positives ou nulles</u>, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un réek $k > 0$ tel que pour tout $m \in U$:
$$\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq k f(m). \tag{4}$$
   (a) Soient $[a, b]$ un segment non réduit à un point et $\gamma\ :\ [a, b] \to \mathbf{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$. Enfin, on pose $m_0 = \gamma(a)$ et $m_1 = \gamma(b)$.
   Montrer que l'application $f \circ \gamma$, notée g, est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que pour tout élément t de $[a, b]$,
$$g'(t) \leq k\|\vec{\gamma}\,'(t)\|g(t).$$

(b) Montrer que $f(m_1) \leq f(m_0)e^{k\ell}$, où ℓ désigne la longueur de l'arc γ.

(c) On suppose que U est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.

(d) $\star\star$ Reprendre la présédente sous-question, en supposant simplement que U est connexe par arcs.

3. Soit P un élément de $Q[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
4. *Révision.* Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il est soit dense, soit de la forme $a\mathbf{Z}$, où a est un réel.
   Version $\star\star$. Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbf{C}, \times)$.
5. Montrer de deux manières que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
6. Montrer dans le cas commutatif le cas particulier du théorème de Lagrange (cours).
   $\star$ Montrer dans le cas général le théorème de Lagrange.
7. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 5. Quel est le cardinal minimal d'un groupe non commutatif ? On utilisera l'exercice précédent.
   $\star\star$ Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7. On utilisera l'exercice précédent et le suivant.
8. $\star$ Soit $(G,+)$ un groupe dont tout élément distinct de e_G est d'ordre 2. Montrer que $(G,+)$ est commutatif. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2. On donnera deux preuves.
9. (a) Soient un entier $n \geq 2$, $c = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un p cycle de S_n et φ un élément de S_n. Déterminer la permutation $\varphi \circ c \circ \varphi^{-1}$.
   (b) En utilisant la question précédente montrer que l'ensemble $\{(1, 2, \ldots, n); (1, 2)\}$ engendre S_n.
   (c) $\star$ On supose $n \geq 3$. Montrer que l'ensemble des tricycles engendre A_n.
   (d) $\star\star$ Quel est le nombre minimal de transpositions qui engendrant S_n ?
10. $\star\star$ Soit G un groupe fini et a un de ses éléments. Montrer que le nombre de conjugués de a est égal à l'indice dans G du centralisateur de a (c'est-à-dire de $\{g \in \mathbf{G} | ag = ga\}$).
    On suppose que G est de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le centre de G est d'ordre p^h où $h \in [\![1, k]\!]$.
11. (a) Soient a et b des entiers strictements positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
    — Les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$;
    — $\mathrm{pgcd}(a', b') = 1$;
    — $\mathrm{ppcm}(a, b) = a'b'$.
    Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.

    (b) $\star$ Soient g et g' des éléments d'un groupe *abélien* G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que

$$\omega(gg') = mm'.$$

    Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(gg') = \mathrm{ppcm}(m, m')$?

    (c) $\star\star$ On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple ϵ des ordres des ses éléments. Déduire de ce qui précède que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.

Programme de colle n°15 prévisionnel

48 Groupes, anneaux, corps

— Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
— Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupe
— Sous-groupes de $\mathbf{Z}$, groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
— Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
— Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
— Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
— Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.
— Dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{Z}$, PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
— Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$
— L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Equivalence de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, et n premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.
— Algèbre, définition, sous-algèbre définition et caractérisation, morphisme d'algèbres, exemples au programme.

49 Suites et séries d'applications $\mathcal{C}^k$, séries entières

— Convergence simple et uniforme des suites et séries d'applications, convergence normale des séries.
— Continuité de la la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I.
— Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I. Résultat analogue pour les séries.
— Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp. d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie.
— Etude de la régularité de l'application $\mathbf{R} \to A\,;\ t \mapsto \exp(ta)$, où a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie A. Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.
— *A venir : séries entières*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

50 Questions de Cours

1. Equivalence : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, n premier.

2. Indicatrice d'Euler φ : si p et q sont premiers entre eux alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$, expression en fonction des facteurs premiers.

3. Dérivabilité de l'application $\mathbf{R} \to A\,;\ t \mapsto \exp(tM)$, où M est un élément de algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$). Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

51 Exercices

1. (a) Soit l'élément $P_0 = X^3 - X - 1$ de $\mathbf{Q}[X]$. Montrer que P_0 n'a pas de racines rationnelles, mais une racine ω réelle. Montrer qu'il est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

   (b) $\star$ Soit K le sous-espace vectoriel du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ engendré par $(\omega^i)_{i\in\mathbf{N}}$. Donner une base de K. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbf{R}$ et le plus petit sous-corps contenant ω.

2. Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique. Soit d_0 un diviseur positif de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d_0 éléments. On désigne par φ l'indicatrice d'Euler. Montrer que : $\sum_{\substack{1\leq d\leq n\\ d|n}} \varphi(d) = n$,

3. $\star$ Retrouver l'expression de l'indicatrice d'Euler d'un entier $n \geq 2$, en fonction de ses facteurs premiers par un argument probabiliste.

4. $\star$ Soit un entier $n \geq 2$ Montrer que $(n-1)! \equiv -1\,[n]$ si et seulement si n est un nombre premier.

5. (a) Résoudre dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$.

   (b) Résoudre dans $\mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$.

   (c) Résoudre dans $\mathbf{Z}/221\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \overline{0}$.

   Abèleries

6. Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=0}^{n} ka_k = \mathrm{o}(n)$.

7. Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Cf. DM 7.

   Régularité de sommes de séries

8. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne l'application

$$u_n :]1, +\infty] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

   (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1, +\infty]$.
   Nous noterons f la somme de cette série, application de $]1, +\infty]$ dans $\mathbf{R}$.

   (b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty]$.

   (c) Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures.

9. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne l'application

$$u_n :]1, +\infty] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto \frac{1}{n^x \ln(n)^y}.$$

   (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement.
   Nous noterons f la somme de cette série.

   (b) Montrer que f est continue.

   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa différentielle.

10. Soit f la fonction de la variable réel x, définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

   (a) Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.

   (b) Montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$ et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (c) Etudier la limite de f en $+\infty$.

   (d) f est elle dérivable en a.

11. $\star\star$

   (a) Soient p et q deux nombre premiers distincts et G un groupe abélien de cardinal pq. Montrer que G est cyclique.

   (b) Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

12. $\star$ On dit qu'un polynôme non nul élément de $\mathbf{Z}[X]$ est primitif si le pgcd de ses coefficients est 1.

   (a) Montrer que le produit de polynômes non nuls P et Q éléments de $\mathbf{Z}[X]$ primitifs est primitif.

   (b) On appelle contenu un polynôme P non nul élément de $\mathbf{Z}[X]$, le pgcd de ses coefficients, et on note $c(P)$ cette quantité. Montrer que pour des polynômes non nuls P et Q éléments de $\mathbf{Z}[X]$,

$$c(PQ) = c(P)C(Q).$$

   (c) $\star\star$ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$. On suppose que P est le produit dans $\mathbf{Q}[X]$ de deux polynômes unitaires A et B Montrer que A et B sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$. En déduire qu'il existe une matrice M à coefficients entiers, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et dont le polynôme caractéristique est P.

13. $\star$ Soient p un nombre premier et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} a^k = 0 \text{ ou } -1.$$

   Préciser à quelle condition on est dans l'un ou l'autre cas (on pourra regarder si $p-1$ divise k ou non).

Programme de colle n°16

52 Suites et séries d'applications de classe $\mathcal{C}^k$

— Continuité de la la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I.
— Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I. Rrésultat analogue pour les séries.
— Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie.
— Etude de la régularité de l'application $\mathbf{R} \to A$; $t \mapsto \exp(ta)$, où a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie A. Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

53 Séries entières

— Définition du rayon de convergence (lemme d'Abel).
— Sommes et produits de séries entières, rayons de convergence de la série somme et de la série produit.
— Séries entières dérivée et produit, rayons de convergence de la série dérivée et de la série produit.
— Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle (dérivation et primitivation termes à termes).
— Fonctions développables en séries entières. Définition. Unicité du développement en série entière, série de MacLaurin. Exemples au programme.
— *A venir : Fonction génératrice d'une variable aléatoire, intégrale généralisée, intégrale à paramètre...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

54 Questions de cours

1. Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence.
2. Rayon de convergence de la série somme et de la série produit.

55 Exercices

1. Soient p un réel et la série d'applications, $\sum_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier $n \geq 2$, $u_n : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$.
   (a) Pour quelles valeurs de p la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbf{R}$? Nous noterons f, pour ces valeurs de p, la somme de cette série.
   (b) Pour quelles valeurs de p la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbf{R}$?
   (c) Montrer que si $p > 1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit la série d'applications, $\sum_{n\geq 2} u_n$, où pour tout entier $n \geq 2$, $u_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.
   (a) Montrer que la série converge simplement sur $[-1, 1]$. Notons f sa somme, application de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Monter que f est somme de sa série de Taylor-MacLaurin. Donner le développement de f en série entière au voisinage de 0.

(d) $\star$ Retrouver ce résultat par une autre méthode.

3. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de la variable réelle t,

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)t^n$$

4. (a) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

(b) Soit a un entier. Pour tout entier $n\geq 1$, a_n désigne la n^{e} décimale de $\sqrt{a}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.

5. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme :

$$S :]-1,1[\to \mathbf{R};\ x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que la série complexe $\sum a_n$ converge.

(a) Montrer que : $S(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\to} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ Dans les deux cas suivants :

i. La série $\sum a_n$ converge absolument.

ii. Il existe une suite décroissante de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telle que pour tout naturel n,

$$a_n = (-1)^n u_n.$$

(b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Montrer la convergence et donner la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$, en utilisant les séries entières, puis par une autre méthode.

6. $\star$ On reprend l'exercice précédent sans hypothèse sur les a_n autre que la convergence de $\sum a_n$. Montrer que le résultat demeure on pourra introduire pour tout n, p et q entiers naturels et tout élément x de $]-1,1[$, les quantités $R_{n,p}(x) := \sum\limits_{k=0}^{p} a_{n+k}x^{n+k}$; et $A_{n,q}(x) := \sum\limits_{k=0}^{q} a_{n+k}$ et déterminer une relation entre elles.

7. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme On suppose que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $a_n\geq 0$ et que la série complexe $\sum a_n$ diverge. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1}{\to} +\infty$.

On suppose que a_n est élément de $\mathbf{N}$, pour tout entier naturel n. Montrer que si f est bornée sur $\mathrm{B_o}(0,1)$, alors c'est un polynôme.

8. $\star\star$ suite de la question précédente

Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence 1. On note g sa somme. On suppose que pour tout entier naturel n, $b_n\in\mathbf{Z}$ et que g est bornée sur $\mathrm{B_o}(0,1)$. Montrer que g est un polynôme.

On pourra montrer que pour tout élément r de $]0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

9. $\star$ Théorème de liouville —

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence R non nul. On note f sa somme : $f\ :\ \mathrm{B_o}(0,R)\to\mathbf{C}\,;\ z\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

(a) Soit p un entier $n\geq 0$ et un réel r tel que $0<r<\mathbf{R}$. Exprimer a_p au moyen de $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta$.

(b) On suppose que $R=+\infty$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

10. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par, $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Développer f en série entière au voisinage de 0. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x+2)^2}$. Développer f en série entière au voisinage de 0.

11. Calculer la somme de la série entière de la variable réelle t, $\sum(n^3 + 2n + 5)t^n$, puis de $\sum \frac{n+1}{(n+3)n!} t^n$.

12. $\star\star$ Soit f une application d'un un ouvert convexe dans $\mathbf{C}$ développable en série entière au voisinage de chaque point. On veut montrer que si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0, alors f est constante.

   (a) On suppose que f n'est pas constante. Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ la série de Taylor de f au voisinage de z_0. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$. On note k le plus petit élément n de $\mathbf{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$.

   (b) On notera, pour tout entier naturel n, ρ_n le module de a_n, θ_n son argument, élément de $]-\pi, +\pi]$, Pour $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $\phi \in]-\pi, +\pi]$, montrer que

$$f(z_0 + re^{i\phi}) = \rho_0 e^{i\theta_0} + \rho_k r^k e^{i(\theta_k + k\phi)} + \mathrm{o}(r^k)(r \to 0).$$

   (c) Conclure par un choix inspiré de ϕ.

   (d) A quelle condition $|f|$ peut-elle admettre un minimum local.

RÉVISIONS

13. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$,
   1. par densité algébrique.
   2. en utilisant l'équivalence de A à $J_{\mathrm{rg}(A)}$.

Programme de colle n°17

56 Séries entières

- Révisions
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire. Application au calcul de l'espérance et de la variance, application à la loi géométrique. (*Le cours de probabilité n'a pas été traité, les exercices resterons très élémentaires*).

57 Complément sur l'intégrale

- Intégrale sur un intervalle quelconque.
  - Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
  - Théorèmes de comparaison, intégration des relations de comparaison.
  - Changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.
  - Théorème de comparaison série/intégrale.
- *A venir : Intégrales à paramètre, polynômes d'endomorphismes .*

oupsss

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan, Luciano Millot.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

58 Questions de cours

1. Rayon de convergence de la série somme et de la série produit.
2. Rayon de convergence de la série dérivée et primitive.

59 Exercices

1. Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{t^n}{4n+1}$
   (a) Etudier le rayon de convergence R de cette série.
   (b) Déterminer la somme de cette série sur $]-R,0]$.
   (c) Etudier la convergence de la série entière aux point R et $-R$, donner la some éventuelle en ses points
2. $\star$ Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie au voisinage de 0. On suppose que $f(0)$ est non nul et que f est développable en série entière au voisinage de 0.
   Montrer que $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de 0 et développable en série entière.
3. $\star$ On note pour tout entier $n \geq 0$, R_n le nombre de relations d'équivalences sur un ensemble de cardinal n, $(R_0 = 1)$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} R_{n-k}$.
   (b) Soit la série entière de la variable réel x, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{R_n}{n!} x^n$. Montrer que son rayon de convergence R est non nul, on pourra par exemple montrer que R_n est pour tout entier naturel n inférieur à $n!$.
   (c) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre que vérifie la somme S de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{R_n}{n!} x^n$. En déduire que $S = \frac{1}{e} \exp \circ \exp$.

(d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$R_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}.$$

4. $\star$ Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle dérangement de $\{1, \ldots, n\}$ toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe, et on note d_n le cardinal de l'ensemble des dérangements de $\{1, \ldots, n\}$; enfin on pose $d_0 = 1$. Soit la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Montrer que son rayon n'est pas nul ; déterminer sa somme. En déduire son rayon et que pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

5. $\star$ Notons D le disque des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. Soit f une application de $\bar{D}$ dans $\mathbf{C}$, continue et qui est sur D la somme d'une série entière.
   (a) Montrer que si f est nulle sur le cercle unité U alors f est nulle.
   (b) $\star\star$ On suppose f nulle sur un arc du cercle unité de longeur α strictement positive. Montrer que f est nulle.
6. $\star$ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z de rayon de convergence R non nul. Montrer que sa somme,

$$S \ : \ \mathrm{B_o}(0, \mathrm{R}) \to \mathbf{C} \, ; \ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est développable en série entière au voisinage de chaque point de $\mathrm{B_o}(0, \mathrm{R})$.

7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \, , n \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer pour tout entier naturel n, la valeur de u_n, on pourra considérer la série entière $\sum u_n t^n$.

8. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$ converge mais ne converge pas absolument.
9. Montrer la convergence et donner la valeur des l'intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{artan}(3t) - \operatorname{artan}(2t)}{t} \mathrm{d}t, \ \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t) - \exp(-3t)}{t} \mathrm{d}t.$$

10. Soit g une application d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t) \sin(nt) \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
11. Déterminer des équivalents simples, lorsque x tend vers $+\infty$, des quantités suivantes : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^c} \, \mathrm{d}t$, pour c élément de $]1, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t, \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$; puis des développements asymptotiques à deux termes des deux dernières.
    $\star$ Donner un développement asymptotique à tout ordre de $\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$
12. $\star\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable.
    (a) Montrer que f n'est pas nécessairement bornée.
    (b) On supose de plus que f' est de carré intégrable (sur $\mathbf{R}_+$). Montrer que f est bornée.
13. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels non nulle périodique de période p et de moyenne nulle sur une période.
    (a) Déterminer le rayon de convergence R et la somme f de la série entière de la variable réel t, $\sum a_n t^n$.
    (b) Montrer que f se prolonge à $]-1, 1]$ en une application rationnelle.

Abeleries

14. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω (cf. 1.) à valeurs dans $\mathbf{N}$, d'espérance finie. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{n \geq 0} \mathbf{P}(X > n)$, en utilisant une transformation d'Abel.

    En déduire l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique (on l'interprétera comme la loi du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli).

15. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbf{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ indépendante des précédentes. On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.
    Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

    (a) Montrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

    (b) En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.

16. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, ..., n-1\}$. Montrer que la loi de X est déterminée par les réels $\mathrm{E}(X^k)$, pour $k \in \{1, ..., n-1\}$.

    (b) $\star\star$ Soit Y une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{N}^*$. On suppose qu'il existe un élément a de $]0, 1[$, tel que $\mathbf{P}(Y = k) = \mathrm{o}(a^k)$ lorsque $k \to +\infty$. Montrer que la famille $(\mathrm{E}(Y^k))_{k\in\mathbf{N}}$ détermine la loi de Y.

17. $\star\star$Théorème de Biberbach réel (Dieudonné) —
    Soit f la somme d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$, de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 de la variable complexe z, On suppose que tous les coefficients de la série entière sont réels, que $a_1 = 1$ et que la restriction de f à $\mathrm{D}_\mathrm{o}(0, 1)$ est injective.

    (a) Soit z_0 un élément de $\mathrm{D}_\mathrm{o}(0, 1)$. Montrer que $f(z_0)$ est réel si et seulement si z_0 est réel. En déduire que si $\mathrm{Im}(z_0) \geq 0$ alors $\mathrm{Im}(f(z_0)) \geq 0$.

    (b) Calculer pour tout élément de $]0, 1[$ et tout entier $n \geq 0$, $\int_0^\pi \mathrm{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

    (c) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq n$.
    Indication on poura montrer que $|\sin(n\theta| \leq n|\sin(\theta)|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout réel θ.

    (d) La majoration est-elle optimale ?

Programme de colle n°18

60 Complément sur l'intégrale

- Intégrale sur un intervalle quelconque.
  - Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
  - Théorèmes de comparaison, intégration des relations de comparaison.
  - Changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.
  - Théorème de comparaison série/intégrale.
- Théorèmes d'interversion de limites
  - Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
  - Théorème d'interversion d'une intégrale et de la somme d'une série de fonctions $\sum u_n$, lorsque pour tout entier naturel n, u_n est continue par morceaux intégrable et $\sum \int_I |u_n|$ converge.
  - Théorème de continuité d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre.
  - Théorème de dérivation d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre, généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.
- *A venir : polynômes d'endomorphismes, espaces préhilbertiens.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan, Luciano Millot.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

61 Questions de cours

1. Théorème de comparaison série/intégrale.
2. *Révision* : Un élément M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement si il est équivalents à J_r.

62 Exercices

1. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée. Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de $J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-n^2t^2} f(t)\mathrm{d}t$.
   (a) $\star$ Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer. On pourra utiliser 9.)
   (b) (Pour tous) Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de convergnce dominée.
2. $\star\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, tendant vers 0 en $\pm\infty$. Soit K une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue, à valeurs positives, nulle en dehors d'un segment et tel que $\int_{\mathbf{R}} K = 1$.
   Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K_n = nK(n\cdot)$ et : $K_n \star f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\, x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite $(K_n \star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.
   (b) On suppose de plus K indéfiniment dérivable. Etudier la régularité de $K_n \star f$.
   (c) Existe-t-il vraiment une telle application K ?
3. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives ou nulles, continue. On suppose f intégrable.
   (a) $\star$ A-t-on $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?
   (b) On suppose de surcroît f décroissante. Montrer que $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Cette dernière condition suffit-elle à prouver l'intégrabilité de f ?
   (c) Enoncer et prouver un résultat analogue pour une série à termes positifs.

(d) $\star\star$ On ne suppose plus f décroissante. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que : $x_n f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

En déduire que pour tout application g de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et de carré intégrable,

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 g^2(x)\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} g'^2(x)\mathrm{d}x} \leq +\infty$$

4. Fubini série/intégrale — Démontrer l'existence de la quantité $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur au moyen de la somme d'une série réelle.
5. Quand Fubini série/intégrale ne s'applique pas ! — Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ et donner deux ou trois méthodes pour exprimer cette intégrale à l'aide de la somme d'une série.
6. Montrer que la fonction de la variable réelle x définie par $f(x)\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\mathrm{ch}t}\mathrm{d}t$, est définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que f est développable en séries entières et exprimer son développement.
7. Transformée de Fourier — Soit l'application. $f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{C} \;;\; x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$, Montrer que pour tout réel k est définie la quantité : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\exp(-i2\pi kt)\,\mathrm{d}t$, noté $\hat{f}(k)$. Montrer que l'application $\hat{f} \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\; k \mapsto \hat{f}(k)$ est dérivable et donner sa dérivée. En déduire $\hat{f}$.
8. Soient f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un réel. On suppose que $f(a) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe g élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que pour tout réel x, $f(x) = (x-a)\,g(x)$
   (b) On suppose de plus que $f'(a) = 0$, Montrer qu'il existe g élément de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que pour tout réel x, $f(x) = (x-a)^2\,g(x)$
9. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

   Indication : on étudiera les applications $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$
10. Soit la fonction de la variable réel x définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Déterminer son domaine de définition D et montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. Pour tout $x \in D$ montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Donner les variations de Γ ainsi que la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.
11. $\star$ Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application

$$u_n \;:\; \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{si } t \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}.$$

   Montrer que $\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots.(x+n)}\right)$.
12. $\star$ Montrer que

$$\tilde{\Gamma} \;:\; \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}_- \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

   est un prolongement indéfiniment dérivable de Γ.

13. $\star\star$. On note les n-uplets de réels en colonne Et on munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$. Soit F une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$
   (a) On suppose que pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, la matrice $\mathrm{J}_F(X)$ est symétrique.
   Montrer que F dérive d'un potentiel.
   (b) On suppose que pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, la matrice $\mathrm{J}_F(X)$ est antisymétrique.
   Montrer que $\mathbf{F} \;:\; \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\,;\; X \mapsto BX + C$, où $B \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $C \in \mathbf{R}^n$.

Programme de colle n^{o}19

63 Polynômes d'endomorphismes

Par u on désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

— Polynôme en u en M : la substitution dans un polynôme de l'indéterminée par U ou M est un morphisme d'algèbres.

— Si λ est valeur propre de u (M) alors $p(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ $(p(M)$.

— Idéal annulateur de u (M). Définition du polynôme minimal μ_u. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit, les valeurs propre de u (M) sont racines de tout polynôme anulateur. Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres. Si d est le degré de μ_u, $(u^0, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbf{K}[u]$. Théorème de Cayley-Hamilton.

— Lemme des noyaux. Si M admet un polynôme annulateur scindé, $\mathbf{E}$ est la somme d'espaces stables sur lesquels, u induit la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent.

— l'endomorphisme u (la matrice M) est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé. Un endomorphisme induit par un endomorphisme est diagonalisable, u (M) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan, Luciano Millot.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

64 Questions de cours

1. L'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme est un idéal non trivial, définition du polynôme minimal, racine de celui-ci.
2. Lemme des noyaux (pour deux polynômes).
3. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé.

65 Exercice

1. Transformée de Laplace cas général — Soit f une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-p_0x)\mathrm{d}x$ converge. Montrer que pour tout réel $p > p_0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\mathrm{d}x$ converge.
   Montrer que l'application $\mathcal{L}(f)\ :\ [p_0, +\infty[\to \mathbf{R}\,;\ p \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\mathrm{d}x$, est continue en p_0.
2. Montrer l'existence et, en admettant la question précédente, donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.
3. $\star$ Fubini intégrale/intégrale — Soit f une application de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbf{R}$ continue, où $[a, b]$ et $[c, d]$ sont des ségments non réduits à un point.
   Montrer que
   $$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$
4. Soit M un élément de $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}()$. On suppose que M^3 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
   (*Version* $\star$) Soit M un élément de $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}()$. On suppose que M^3 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^2)$. Montrer que M est diagonalisable.

5. Soit n un entier strictement positif et soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tous deux diagonalisables. On suppose que $\exp(A) = \exp(B)$. En comparant les espaces propres de A et de $\exp(A)$ montrer que $A = B$. Reprendre la question précédente en montrant que A est un polynôme en $\exp(A)$.
6. Soit M un élément non nul de $\mathcal{M}_{29}(\mathbf{R})$ tel que $M^3 = -M$. Déterminer son spectre complexe. Montrer qu'elle est semblable à $\mathrm{diag}(0_q, J, J, ...J)$, où q est un entier naturel impair et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Soient n un entier strictement positif, A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et B l'éléments de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$, $\begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ 4A & -2A \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
8. Déterminer les sous-espaces de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A où :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. (a) $\star$ Montrer que l'ensemble des matrices nilpotente éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est un fermé. Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si M est nilpotente.
   (b) $\star\star$ Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.
10. Le retour de la matrice compagnon — Soient un entier $n \geq 2$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des éléments de $\mathbf{K}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Donner par le calcul le polynôme caractéristique de M.
11. $\star$ Retrouver ce résultat sans calculs en utilisant le polynôme minimal de M.
12. (a) Soit P le polynôme $P = X^3 - X - 1$. Montrer P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. Montrer que P a une racine réelle que l'on notera ω.
    (b) Soit K le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par $\left(\omega^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Exhiber une base de K.
    (c) Montrer que K est le plus petit des sous-corps de $\mathbf{R}$ qui admettent ω comme élément.
13. Soit n un entier strictement positif et soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tous deux diagonalisables. On suppose que $\exp(A) = \exp(B)$. En comparant les espaces propres de A et de $\exp(A)$ montrer que $A = B$. Reprendre la question précédente en montrant que A est un polynôme en $\exp(A)$.
14. Soit u et v des endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie n non nulle, qui commutent. Montrer qu'ils sont codiagonalisables. Même question pour une famille quelconque $(u_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes diagonalisables.
15. $\star$ Soit u et v des endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie n non nulle, qui commutent. Montrer qu'ils sont cotrigonalisables.
16. $\star\star$ Soit l'application $\varphi\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n))$.
    (a) Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentiel en un point quelconque M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
    (b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{d}\varphi)(M) = \deg(\mu_M)$.
    (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme minimal est le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
17. $\star\star$ Spécial Loup. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle n sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
    (a) Montrer que tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, l'ensemble $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ des polynômes P, éléments de $K[X]$ tels que $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$ est un idéal non nul de $K[X]$.
    On notera $\pi_{\vec{x}}$ son générateur unitaire.
    (b) Montrer qu'il existe un élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$ tel que $\pi_{\vec{a}} = \mu$.
    (c) Montrer que l'ensemble A des éléments $\vec{x}$ tel que $\pi_{\vec{x}} = \mu$ est un ouvert dense.

Programme de colle n° 20 prévisionnel

66 Espaces préhilbertiens

— Produit scalaire, propriétés, formules de polarisations, égalité du parallélogramme. Formule de Cauchy-Schwarz cas d'égalité, norme associée à un produit scalaire.
— Supplémentaire orthogonal, quand il existe il est unique et c'est l'orthogonal, existence pour un sous-espace de dimension finie, théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie.
— Suites totales orthonormées, inégalité de Bessel, égalité de Parseval.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan, Luciano Millot.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

67 Questions de cours

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz, pour une forme bilinéaire symétrique positive, cas d'égalité dans le cas d'un produit scalaire.
2. Inégalité de Bessel et égalité de Parseval pour une suite totale orthonormée.

68 Exercices

1. Décomposition de Dundford — Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, (D, N) tel que $M = N + D$, N et D commutent,
   $\star$ Montrer en plus l'unicité de la décomposition de Dundford.
   $\star\star$ Montrer que dans la précédente décomposition D et N sont des polynômes en M, puis montrer que $\exp(M)$ est diagonalisable si et seulement si M l'est.
2. $\star$ Soit N une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe élément de A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\exp(A) = I + N$.
   $\star$ En déduire : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
3. $\star\star$. (On utilisera 1.) Soit M un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
   (a) Montrer que $\exp(M)$ est un polynôme en M.
   (b) Montrer l'existence d'un polynôme p à coefficients complexes tel que $M = \exp(p(M))$.
   (c) Montrer les égalités suivantes : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \{B^2, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\}$ et que $< \exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) >= \mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.
4. Cayley-Hamilton — Soit $\vec{x}$ un élément de $\mathbf{E}$ non nul, Soit $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ l'ensemble des éléments P de $\mathbf{K}[X]$ tels que $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$.
   (a) Montrer que $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$, non réduit à 0, $\Pi_{\vec{x}} = \sum_{i=0}^{d} b_i X^i$ avec $b_d = 1$, désigne le générateur unitaire de $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$.
   (b) Montrer $\mathrm{vec}((u^i(\vec{x}))_{i\in\mathbf{N}})$ est de dimension d, et que $(u^i(\vec{x}))_{i=0;1,\dots,d-1}$, en est une base notée $\mathcal{B}$.
   (c) Montrer que $\mathbf{F}$ est stable par u. En étudiant la matrice de v dans $\mathcal{B}$, montrer le théorème de Cayley Hamilton.
5. Soit $(\mathbf{E}, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. On appelle déterminant de Gram d'une famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}$ (où $n \in \mathbf{N}^*$), le déterminant de la matrice $(\langle x_i \mid x_j\rangle)_{\substack{i=1,\dots,n\\ i=1,\dots,n}}$ (matrice de Gram), on le notera $\mathrm{Gram}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$.
   a) Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de de $\mathbf{E}$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si, $\mathrm{Gram}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) \neq 0$.

b) Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ une base de $\mathbf{F}$, et $\vec{a}$ un élément de $\mathbf{E}$ montrer que :

$$\frac{\operatorname{Gram}(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)}{\operatorname{Gram}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)} = \mathrm{d}(\vec{a}, \mathbf{F})^2 .$$

Pour $n = 2$, interpréter géométriquement le résultat.

6. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien. Soit $\mathbf{F}$ un espace de dimension n contenant ces vecteurs et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{F}$. On note A la matrice de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ dans $\mathcal{B}$. Exprimer $\operatorname{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ en fonction de A. Retrouver le 2. a)

   Par un choix judicieux de $\mathcal{B}$ montrer que $0 \leq \operatorname{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{x}_i\|^2$. Dans quel cas a-t-on égalité !

7. $\star$ Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ une famille liée de vecteurs d'un espace préhilbertien, deux à deux distincts, unitaires et tel que le produit scalaire de deux d'entre eux soit égal à un même réel α.
   (a) Donner la valeur de α, la somme des vecteurs de la famille et de **deux manières** le rang de la famille.
   (b) Dans une molécule de méthane déterminer l'angle entre les demi-droites d'origine le centre de l'atome de carbone et passant pas le centre d'un des atomes d'hydrogène.

8. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide, et w une application de I dans $\mathbf{R}$, continue, à valeurs strictement positives. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications f de I dans $\mathbf{R}$, continues telles que wf^2 soit intégrable sur I. On suppose de plus que $\mathbf{E}$ contient les applications polynomiales de I dans $\mathbf{R}$. Montrer que l'application suivante est bien définie sur $\mathbf{E}^2$ et est un produit scalaire.

$$\varphi \ : \ \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}, \ (f, g) \mapsto \int_I fgw$$

   Montrer qu'il existe une et une seule suite d'éléments unitaires de $\mathbf{R}[X]$, orthogonale, étagée, on la note $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   Montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, p_n admet n racines distinctes, éléments de I.

9. Vérifier que $I =]-1, 1[$ et $w \ : \ I \to \mathbf{R};\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ rentre dans le cadre de la question précédente. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) ,$$

   pour tout élément x de $[-1, 1]$ (polynômes de Tchebychev).

   On note U_n l'ensemble des applications polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ de degré égal à n, unitaires. Montrer que

$$\inf\left\{\|p\|_\infty , p \in U_n\right\} = \|p_n\|_\infty .$$

10. On garde les notations de la question précédente. Montrer que la suite $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\tilde{p}_n = \frac{p_n}{\|p_n\|}$ est une suite orthogonale totale.

11. Soit $C^0_{2\pi}$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue 2π-périodiques, $\mathbf{P}$ le sous espace vectoriel de $C^0_{2\pi}$ des application paires et $\mathbf{I}$ celui des applications impaires. On munit $C^0_{2\pi}$ du produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$.

$$(C^0_{2\pi})^2 \to \mathbf{R} \ ; (f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{[|\pi\pi]} fg.$$

   Montrer que la suite $(\cos(n\ \cdot)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite orthonormée (au premier terme près) totale de $\mathbf{P}$. On pose pour tout $f \in \mathbf{P}$ et tout entier $n \geq 0$, $a_n(f) = \langle f |\cos(n\ \cdot)\rangle$.
   En admettant que la la suite $(\sin(n\ \cdot))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite orthonormée totale de $\mathbf{I}$, montrer que pour f élément de $\mathbf{P}$ de classe $\mathcal{C}^1$, la série de Fourier de f, $\frac{a_0((f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f) \cos(n\ \cdot)$ converge normalement de somme f.

12. Soit $(\mathbf{H}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{H}$. L'espace $\mathbf{H}$ sera muni de la norme $\| \cdot \|$, associée au produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

   Montrer que : $\mathbf{F}^\perp$ est fermé, $(\bar{\mathbf{F}})^\perp = \mathbf{F}^\perp$ et $\bar{\mathbf{F}} \subset \left(\mathbf{F}^\perp\right)^\perp$.

13. $\star$ Soit H un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ de codimension finie.
   (a) Montrer que $H^\perp$ est de dimension finie, inférieure ou égale à la codimension de H.

(b) On suppose que $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est l'espace vectoriel des application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continues, muni du produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $H := \{f \in \mathbf{E} | f(0) = 0\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ dont on précisera la codimension. Comparer la codimension de H et la dimension de $H^\perp$.

14. $\star\star$

Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soient un réel $C > 0$ et $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ tel que :

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2,$$

pour toute élément f de $\mathbf{F}$.

(a) Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathbf{F}$ sont équivalentes.

(b) Montrer que $\mathbf{F}$ est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.

Programme de colle numéro 21 l'ultime

Dernière semaine de colles, merci à tous les colleurs

69 Equations différentielles linéaires

On désigne par $\mathbf{K}$ le corps des réels ou des complexes, par $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et par I un intervalle d'intérieur non vide.

- Equation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient constant

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \tag{5}$$

avec $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.

— Expression grâce à une exponentielle, de la solution de l'équation homogène et de la solution d'un problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée sur un intervalle J est un espace vectoriel de dimension n. Application au calcul de l'exponentielle de la somme de deux matrices ou endomorphismes qui commutent.

— Résolution pratique de la forme matricielle de l'équation homogène associée à (5) par réduction de la matrice.

— Résolution de l'équation (5) par abaissement du degré (« variation de la constante »). Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour (5) (formule).

- Equation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient non constant

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \tag{6}$$

avec $a \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{L}(\mathbf{E})\right)$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.

— Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, mais la mise sous forme intégrale du problème de Cauchy est au programme). L'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (6) est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (6) est un espace affine.

— Wronskien dans une base d'une famille de n solutions de l'équation homogène. Condition de liberté de la famille.

— Résolution de l'équation (6) lorsque l'on connait une famille $\mathcal{F}$ de solutions indépendantes de l'équation homogène associée, méthode de la base mobile (ou variation des constantes). Application à l'équation scalaire d'ordre n.

- Equation différentielle linéaire du deuxième ordre scalaire à coefficients non constants

$$a(t)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c(t)y = d(t), \tag{7}$$

avec a, b, c et d éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée. Système linéaire du premier ordre associé.

— Structure de l'ensemble des solutions de (7) et de l'équation homogène associée sur un intervalle J sur lequel a ne s'annule pas, théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

— Wronskien d'une famille (φ_1, φ_2) de deux solutions de l'équation homogène associée à (7). Equation différentielle vérifiée par le wronskien. Caractérisation de la liberté de (φ_1, φ_2).

— Résolution de l'équation (7), lorsque l'on dispose d'une famille (φ_1, φ_2) de deux solutions sur J de l'équation homogène associée : méthode de la base mobile.

— Etude sur des exemples, de solutions sur un intervalle sur lequel a s'annule.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Marius Gonidec, Romain Girard, Loup Le Saux, Quentin Moreau, Gégoire Legay, Brieuc Toullic, Corentin Cornou, Marius Pallier, Yanis Jouanaud, Cédric Sallafranque, Clément Guardia, Simon Hamelin, Adrien Stéphan, Luciano Millot.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin Moreau, Gégoire Legay, Loup Le Saux, Brieuc Toullic, Corentin Cornou.

70 Questions de Cours

1. Montrer, en admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (6) est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (6) est un espace affine. Donner une norme simple sur l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (6).
2. Résolution (6) lorsque l'on connait une base de solutions de l'équation homogène associée
3. $\star\star$ Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour (6), on se limitera à un segment.

71 Exercice

1. Au choix (a) ou (b)
   (a) — Petit lemme de Gronwall —
   Soient t_0 un réel, u_1 un reél strictement positif et f une application de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ continue. Soient ϕ_1 la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)y, \\ y(t_0) = u_1. \end{cases}$ et ϕ une application de$[t_0, +\infty[$ dérivable telle que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi'(t) \leq f(t)\phi(t)$ et $\phi(t_0) \leq u_1$. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi_1(t)$.
   (b) $\star\star$Lemme de Gronwall, le vrai—
      i. Soient u et v des applications continues de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs *positive* et C un réels tels que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,
      $$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\mathrm{d}s.$$
      Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,
      $$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}(s)\right).$$
      ii. Soit l'équation différentielle
      $$x'' + q\,(t)\,x = 0, \tag{8}$$
      où q est une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} s|q(s)|\mathrm{d}s$ converge.
      Soit ϕ une solution sur $\mathbf{R}_+$ de (8). Montrer que $t \mapsto \frac{\phi(t)}{t}$ est bornée sur $[1, +\infty]$.
2. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} + 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$.
3. (a) Soit $\vec{\psi}$ une solution de (6) définie sur $I = \mathbf{R}$. On suppose que et que a et b sont impaires. Montrons que $\vec{\psi}$ est paire.
   (b) On suppose que les coefficients a, b, c et d de l'équation (7) sont définis sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques et que a ne s'annule pas. Montrer qu'une solution ψ sur $\mathbf{R}$ de (7) est 2π-périodique si et seulement si $\psi(0) = \psi(2\pi)$, et $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$.
4. Etudier les éventuelles solutions maximales du problème de Cauchy
   $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = |x + e^t|, \\ x(0) = -1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -1. \end{cases}$$
   $\star$ En remplacement : étudier le problème de Cauchy suivant. $x'' - |x| = 0, \quad x\ (0) = a, x'\ (0) = 0$. où a est un réel.

5. Déterminer des solutions de l'équation différentielle $\left(1+x^2\right)\ y''+x\ y'-\ \frac{1}{4}\ y=0$, développables au voisinage de 0 en série entière.

   En déduire la forme générale des solutions de l'équation sur $]-1,1[$.
6. Déterminer les éléments f de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*,\mathbf{R})$ tels que pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$, $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
7. Au choix (a) ou (b).
   (a) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f+f'+f''$ admet 2022 comme limite en $+\infty$. Montrer que f admet 2022 comme limite en $+\infty$.
   (b) Soit a un réel, et b une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue bornée.

   Soit l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=ay+b(t)$. On suppose que a est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur $\mathbf{R}$ qui soit bornée. Que dire si a est négatif ?

   (Ou bien) $\star$ Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On supose A diagonalisable. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   i. Pour tout application B de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ continue et bornée, l'équation différentielle
   $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+B(t) \tag{9}$$
   admet une et une seule solution sur $\mathbf{R}_+$ bornée.
   ii. Les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement positive.

   (Ou bien) $\star\star$ Reprendre la question sans supposer A diagonalisable.
8. $\star$ Soient $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}=a(t)\cdot\vec{y}$ avec $a\in\mathcal{C}^0\left(I,\mathcal{L}(\mathbf{E})\right))$. Soient t_1 et t_2 des élément de I. Montrer qu'il existe un réel $k>0$ tel que pour tout élément $\vec{\phi}$ de S, $\|\vec{\phi}(t_1)\|\leq k\|\vec{\phi}(t_2)\|$.
9. $\star\star$ Soit A une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout réel $t>0$, $A(t)$ ait tous ses coefficients strictement positifs. On s'intéresse à l'équation différentielle :
   $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=-A(t)X. \tag{10}$$
   (a) On note $\mathbf{1}$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ayant tous ses coefficients égaux à 1. Pour tout entier $k\geq 1$, on note Φ_k la solution sur $\mathbf{R}_+$ du problème de Cauchy $\begin{cases}(10),\\ X(k)=\mathbf{1}.\end{cases}$ Montrer que pour tout $t\in[0,k]$, les n composantes de $\Phi_k(t)$ sont supérieures ou égales à 1.
   (b) En déduire l'existence d'une solution Φ de (10) sur $\mathbf{R}_+$, non identiquement nulle et dont toutes les composantes sont à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

   Indication : On peut considérer la suite $\left(\frac{\Phi_k}{\|\Phi_k(0)\|}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
10. Soit (f,g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :
   $$x''+p(t)x'+q(t)x=0, \tag{11}$$
   où p et q sont des applications de I dans $\mathbf{R}$ continues.
   (a) Montrer que les zéros de f sont isolés.
   (b) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g. On pourra étudier le signe du wronskien de f et g. On représentera les orbites de (12), on interprétera géométriquement w et on justifiera l'idée de son emploi.
11. Soit l'ensemble S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
   $$f(x+y)+f(x-y))=2f(x)f(y).$$
   (a) Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0)=1$ et que f est paire.
   (b) Soit f un élément de S non nul est deux fois dérivable. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,
   $$f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$
   (c) Déterminer S.

   Ou bien

   $\star\star$ Sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$

   Soit Φ un élément de $\mathcal{C}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}),\mathbf{R})$, telle que pour tout t et tout s réels , $\varphi(s+t)=\varphi(s)\varphi(t)$. Montrer qu'il existe $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :
   $$\forall t\in\mathbf{R},\varphi(t)=\exp(tA).$$

Programme de colles fantôme n$^{\text{o}}$22

72 Espace euclidien

$(\mathbf{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
— Endomorphisme symétrique. Structure d'espace vectoriel et dimension de $\mathcal{S}(\mathbf{E})$.
— Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales, cas de la dimension 2.
— Diagonalisation des endomorphisme symétriques dans une base orthonormée. diagonalisation des matrices symétriques réelles dans le groupe orthogonal.
— Réduction des automorphismes orhogonaux, forme réduite des matrices orthogonales, Cas de la dimension 3.
— *Á venir, non évalué : géométrie différentielle, mise au point finale sur les probas...*

73 Questions de Cours

1. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En prime : montrer que $\exp(A) \in \mathbf{K}[A]$, dans le cas où A est diagonalisable donner une méthode constructive de détermination de $P_A \in \mathbf{K}[X]_n$ tel que $\exp(A) = P_A(A)$.
2. Réduction des automorphismes orthogonaux. Application aux matrices orthogonales.
3. Diagonalisation des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.

74 Exercices

1. Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :
$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{12}$$
où p et q sont des applications de I dans $\mathbf{R}$ continues.
   (a) Montrer que les zéros de f sont isolés.
   (b) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g.
2. Soit un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ de dimension non nulle n.
Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ unitaires. Montrer qu'il existe des éléments $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p$ de $\{-1, 1\}$ tels que :
$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \vec{v}_i \right\| \leq \sqrt{p}$$
On pourra considérer p variables de Rademacher mutuellement indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ et R la variable aléatoire
$$R = \left\| \sum_{i=1}^{p} X_i \vec{v}_i \right\|^2$$
On considère à présent $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ de norme inférieure ou égale à 1.
Soient $q_1, \ldots, q_p$ des éléments de $[0, 1]$, on pose $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} q_i \vec{u}_i$. $\vec{v}$ est un vecteur du parallélépipède $\mathcal{P}$ construit sur les $\vec{v}_i$. Pour tout partie I de $\{1, \ldots, p\}$, on pose
$$\vec{v}_I = \sum_{i \in I} \vec{u}_i,$$
(sommets du paralléllépipède $\mathcal{P}$). Montrer qu'il existe un sommet de $\mathcal{P}$ distant de $\vec{v}$ de moins de $\frac{\sqrt{n}}{2}$. on pourra considérer p variables de Bernoulli $X_1, \ldots, X_p$ indépendantes et la variable aléatoire
$$S = \left\| \sum_{i=1}^{p} X_i \vec{u}_i - \vec{v} \right\|^2.$$

3. Identification d'un automorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^3$ par sa matrice dans une base orthonormée, sur de exemples.
4. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ l'est-il ?
5. Soit $\mathbf{E}$ un espace euclidien de dimension 3. A quelle condition deux rotations r et r' distinctes et différentes de l'identité commutent-elles ?
6. On considère un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$
   (a) Une symétrie de $\mathbf{E}$ est-elle un endomorphisme symétrique ?
   (b) Une projection orthogonale de $\mathbf{E}$ est-elle un endomorphisme orthogonal ?
   (c) Quelles sont les matrices, éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, orthogonales et symétriques ?
   (d) Quelles sont les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables.
7. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n n'ayant que des valeurs propres strictement positives. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, T, telle que $A = {}^tTT$.
8. $(\mathbf{E}, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2.On note $\mathcal{S}$, l'ensemble des symétries orthogonales de $\mathbf{E}$ par rapport à un hyperplan (réfléxion) et $\mathcal{R}$ celui des symétries orthogonales par rapport à des droites (retournement).
   (a) Montrer pour $n = 3$ que $\mathcal{S}$ engendre $\mathrm{O}(\mathbf{E})$, par des considération géométrique et que $\mathcal{R}$ engendre $\mathrm{SO}_3(\mathbf{E})$
   (b) $\star$ Pour n quelconque montrer que $\mathcal{S}$ engendre $\mathrm{O}(\mathbf{E})$, par des considérations géométriques et une récurrence, puis matriciellement.
9. $\star\star$ Montrer que $SO_3(\mathbf{R})$ est simple.
10. (a) On désigne par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n à valeurs propres strictement positives. Montrer que pour tout élément A de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ il existe un et un seul élément B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $B^2 = A$.
   (b) Soit $\phi\,:\,\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n\mathbf{R}\,;\,(O, S) \times OS$. Montrer que ϕ est une bijection.
   (c) $\star$ En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.
11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Posons $B =^{\mathrm{t}} AA$ et notons a et b les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés respectivement à a et b. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sastructure euclidienne canonique.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Ker}(a)$ et que les valeurs propres de b sont positives ou nulles. On notera r le rang de b, donc aussi celui de a.
   (b) $\star$ Montrer qu'il existe des matrices orthogonales P et Q et une matrice diagonale D à coefficients positifs ou nuls telles que :
   $$A = PDQ.$$