

Fonctions holomorphes

On admettra le résultat suivant (voir TD).

Pour toute application g de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^1 , la série d'applications (série de Fourier)

$$c_0(g) + \sum_{n \geq 1} c_n(g) \exp(in \cdot) + c_{-n}(g) \exp(-in \cdot),$$

où pour tout $n \in \mathbf{Z}$

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt,$$

converge normalement de somme g .

DÉFINITIONS PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une application d'un ouvert U non vide de \mathbf{C} (vu comme un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 2), à valeurs complexes. On dit que f est \mathbf{C} -dérivable en un point z_0 de U si, par définition, $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite lorsque z tend vers z_0 par valeurs distinctes. Si f est \mathbf{C} -dérivable en z_0 on note $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ et l'on appelle cette quantité *dérivée complexe de f en z_0* .

1. Montrer que f est \mathbf{C} -dérivable en un point z_0 de U si et seulement si il existe un complexe c tel que

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad (z \rightarrow z_0).$$

2. L'application f est dite holomorphe si, par définition, f est dérivable en tout point z de U et si son application *dérivée complexe*, $f' : U \rightarrow \mathbf{C}; z \mapsto f'(z)$, est continue.

3.Exemples

Parmis les applications de \mathbf{C} dans \mathbf{C} suivantes déterminer celles qui sont holomorphes :

$$z \mapsto 1; \quad z \mapsto z; \quad z \mapsto \Re(z); \quad z \mapsto \bar{z}$$

4. Soit f_1 et f_2 des applications de U dans \mathbf{C} holomorphes et λ et μ des nombres complexes. Montrer que $\lambda f_1 + \mu f_2$, $f_1 \times f_2$ et si f_1 ne s'annule pas, $\frac{1}{f_1}$ sont holomorphes ; préciser leur applications dérivées complexes.

5. Soit g une application d'un ouvert V non vide de \mathbf{C} à valeurs complexes holomorphe. On suppose que $f(U) \subset V$. Montrer que $g \circ f$ est holomorphe et préciser son application dérivée complexe.

6. Montrer que toute application polynômiale de \mathbf{C} dans \mathbf{C} est holomorphe.

CARACTÉRISATION RÉELLE

On va voir que si f est holomorphe, alors, vue comme une application de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 , elle est de classe \mathcal{C}^1 , mais que la réciproque est fausse, et qu'il faut adjoindre au caractère \mathcal{C}^1 une condition supplémentaire pour obtenir l'holomorphicité.

7. On désigne par U^* l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $x + iy \in U$. Montrer que U^* est un ouvert de \mathbf{R}^2 .

8. On désigne par f^* l'application de U^* dans \mathbf{C} , qui à (x, y) associe $f(x + iy)$, on désigne par \tilde{f} l'application de U^* dans \mathbf{R}^2 qui à (x, y) associe $(\Re(f(x + iy)), \Im(f(x + iy)))$, enfin on note P et Q les première et seconde composantes de \tilde{f} . Ainsi pour tout $(x, y) \in U^*$

$$f(x + iy) = f^*(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y), \quad \tilde{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Montrer que les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

- i f est holomorphe.
- ii f^* est de classe \mathcal{C}^1 et $\frac{\partial f^*}{\partial y} = i \frac{\partial f^*}{\partial x}$.
- iii \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 et $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$.

Dans le cas où f est holomorphe, exprimer pour (x, y) élément de U^* , $f'(x + iy)$ en fonction des dérivées partielles, de f^* puis des dérivées partielles de P et de Q .

9. Montrer que la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul, est une application holomorphe.

10. On dira qu'une application h d'un ouvert W de \mathbf{C} non vide, à valeurs dans une partie V de \mathbf{C} est holomorphe si l'application $W \rightarrow \mathbf{C}$; $z \mapsto h(z)$ est holomorphe.

On suppose que f est holomorphe et injective. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que df est une similitude directe de \mathbf{R}^2 , muni de sa structure euclidienne canonique.

ANNULÉE (Montrer que f induit une bijection de U sur $f(U)$, et que la bijection réciproque g est holomorphe.)

ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

11. On suppose que f est analytique, c'est-à-dire développable en série entière au voisinage de tout point de U . Montrer que f est holomorphe.

12. On suppose que f est holomorphe. Soient z_0 un point de U de partie réelle x_0 de partie imaginaire y_0 et r un réel strictement positif tel que $B_0(Z_0, r) \subset U$. Soit enfin l'application

$$F :]0, r[\times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} ; (\rho, \theta) \mapsto f^*(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) = f(z_0 + \rho e^{i\theta})$$

- a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.
- b) Montrer que pour tout élément ρ de $]0, r[$, il existe une famille $(\alpha_n(\rho))_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que :

$$f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(\rho) e^{in\theta}.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, l'application $\alpha_n :]0, r[\rightarrow \mathbf{C}$; $\rho \mapsto \alpha_n(\rho)$ est dérivable et que pour tout $\rho \in]0, r[$, $\alpha'_n(\rho) = \frac{n}{\rho} \alpha_n(\rho)$.

d) En déduire qu'il existe une famille $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, telle que pour tout complexe z tel que $0 < |z - z_0| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On donnera l'expression des a_n , $n \in \mathbf{Z}$, au moyen d'une intégrale.

- e) Montrer que pour tout entier $n < 0$, $|a_n| = 0$. En déduire que f est analytique.

13. Montrer que toute application de U dans \mathbf{C} , holomorphe est indéfiniment dérivable au sens complexe.

- 14. Montrer qu'une application de \mathbf{C} dans \mathbf{C} , holomorphe et majorée, est constante.
- 15. Déduire de ce qui précède le théorème de d'Alembert-Gauß.

Intégrales sur un chemin

On ne suppose pas connue l'analyticité des fonctions holomorphes.

U désigne un ouvert U de \mathbf{C} , on lui associe la partie de \mathbf{R}^2 , $U^* := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | (x + it) \in U\}$.

PREMIÈRES DÉFINITIONS

On appelle chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de U toute application γ d'un segment $[a, b]$ à valeurs dans U continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que le chemin est un lacet. A un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de U , on associe l'arc géométrique orienté Γ^* de U^* , dont un représentant est $([a, b], (\Re(\gamma), \Im(\gamma)))$.

Soient f une application de U dans \mathbf{C} continue et γ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de U , et (a_0, a_1, \dots, a_n) une subdivision de $[a, b]$ adaptée à γ . On appelle intégrale de f le long du chemin γ la quantité notée $\int_{\gamma} f(z)dz$ définie par :

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Cette quantité est indépendante de la subdivision adaptée choisie, ce que l'on admettra dans la suite. On appelle la longueur de γ la longueur de Γ^* , c'est-à-dire :

$$\int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\vec{\Gamma}'(t)\|dt.$$

On définit de même pour un champ de vecteur $\vec{V} = (V_1, V_2)$, défini sur U^* , continue, l'intégrale (ou circulation) de \vec{V} le long du chemin Γ^* , quantité notée $\int_{\Gamma^*} \vec{V}$, par :

$$\int_{\Gamma^*} \vec{V} := \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \vec{V}(\Gamma^*(t)) | \vec{\Gamma}'^*(t) \rangle dt.$$

Cette quantité est également indépendante de la subdivision adaptée choisie.

1. Soit ϕ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme croissant d'un segment $[c, d]$ sur $[a, b]$. On pose $\delta := \gamma \circ \phi$. montrer que δ est un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de U et que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\delta} f(z)dz.$$

2. On reprend les notations de l'exercice précédent (question 8. Montrer qu'il existe deux champs de vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sur U^* telles que :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma^*} \vec{V}_1 + i \int_{\Gamma^*} \vec{V}_2.$$

On exprimera \vec{V}_1 et \vec{V}_2 en fonction de P et Q .

3. On suppose dans cette question que U est convexe et que f est holomorphe. Montrer que V_1 et V_2 dérivent d'un potentiel, voir annexe.

Que dire de $\int_{\gamma} f(z)dz$ si γ est un lacet. On note pour $i = 1, 2$, Φ_i un potentiel dont dérive \vec{V}_i , ($\vec{\nabla}\Phi_i = \vec{V}_i$), et l'on pose :

$$F : U \rightarrow \mathbf{C}; z \mapsto \Phi_1(x, y) + i\Phi_2(x, y),$$

avec $x = \Re(z), y = \Im(z)$. Montrer que F est holomorphe et que $F' = f$. On dit que F est une primitive de f .

FORMULE DE GOURSAT

Soient γ_1 et γ_2 des chemins \mathcal{C}^1 par morceaux de U définies respectivement sur les segments $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$. On définit un nouveau chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de U noté $\gamma_1 \cup \gamma_2$ par

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow \mathbf{C}; t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{pour } t \in [a_1, b_1], \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1), & \text{pour } t \in]b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]. \end{cases}$$

On dispose ainsi d'une opération sur les chemins \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathbf{C} , qui est visiblement associative.

Enfin pour u et v points quelconque de \mathbf{C} , on note $\gamma_{u,v}$ le chemin $[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}; t \mapsto (1-t)u + tv$.

4. Soit (z_1, z_2, z_3) un triangle direct de \mathbf{C} . On suppose que le triangle plein T de sommets z_1, z_2, z_3 est inclus dans U . On note γ_T le lacet $\gamma_{z_1, z_2} \cup \gamma_{z_2, z_3} \cup \gamma_{z_3, z_1}$

On suppose que f est holomorphe sur $U - \{z_0\}$, où z_0 est un point quelconque de U et continue sur U . On se propose démontrer que $\int_{\gamma_T} f(z)dz = 0$: « l'intégral de f sur un triangle est nulle »

a) Montrer que le résultat pour f constante et pour $f : z \mapsto z$.

b) On suppose dans cette sous question que $z_0 \notin T$. On pose $T_0 = T$ et T_0^1, \dots, T_0^4 les triangles semblables à T_0 de rapports respectifs $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ obtenus en prenant les milieux des segments qui forment la frontière de T .

i) Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, 4\}$ tel que $\left| \int_{\gamma_{T_0^j}} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma_T} f(z)dz \right|$. On notera $T_0^j = T_1$

ii) Montrer plus généralement qu'il existe une suite $(T_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de triangles telle que :

— $T_0 = T$,

— Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $T_{k+1} \subset T_k$,

— Pour tout $k \in \mathbf{N}$ la longueur de $\gamma_{T_{k+1}}$ est la moitié de celle de $\frac{1}{2}\gamma_{T_k}$,

— $\left| \int_{\gamma_T} f(z)dz \right| \leq 4^k \left| \int_{\gamma_{T_k}} f(z)dz \right|$.

iii) Montrer que $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} T_k$ est un singleton $\{u\}$. Et en déduire le résultat.

Indication : On pourra remarquer que $\int_{\gamma_{T_k}} f(z)dz = \int_{\gamma_{T_k}} f(z) - f(u) - (z - u)f'(u)dz$.

c) Montrer le résultat dans le cas général. On pourra commencer en décomposant T en triangles, à se ramener au cas où z_0 est un sommet de T .

5. On suppose toujours que f est holomorphe sur $U - \{z_0\}$ et que U est un ouvert *convexe*. Déduire de la question 4. que f admet une primitive F sur U . On vient de généraliser 3. En déduire que l'intégrale de f sur tout lacet \mathcal{C}^1 par morceaux de U est nulle.

INDICE D'UN LACET PAR RAPPORT À UN POINT

γ est un lacet \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathbf{C} , défini sur $[a, b]$, enfin z_0 est un point de \mathbf{C} qui n'est pas élément de $\gamma([a, b])$.

On pose $\text{Ind}_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$.

6. En étudiant l'application $G : [a, b]; t \mapsto \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds\right)$, montrer que $\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est un élément de \mathbf{Z} .

7. On considère le cas particulier où $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}; t \mapsto z_0 + r \exp(int)$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminer $\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$.

8. On admet que $\mathbf{C} - \gamma([a, b])$ admet deux composantes connexes par arcs dont une est non bornée. Montrer que $z \mapsto \text{Ind}_z(\gamma)$ est constante sur les composantes connexes par arcs de $\mathbf{C} - \gamma([a, b])$ et nulle sur la composante connexe par arcs non bornée.

FORMULE DE LA MOYENNE

5. On suppose que U est un ouvert *convexe*. Soit z_0 un point de U et γ un lacet C^1 par morceaux de U , définie sur $[a, b]$ et tel que $z_0 \notin \gamma([a, b])$.

En considérant l'application $g : U \rightarrow \mathbf{C}; z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{pour } z \neq z_0, \\ f'(z_0), & \text{pour } z = z_0, \end{cases}$ montrer que :

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

6. Dédurre de la question précédente qu'une fonction holomorphe sur un ouvert U est analytique. Plus précisément, pour tout point z_0 de U f est développable en série entière au voisinage de z_0 dans tout disque ouvert centré en z_0 et inclus dans U .

ANNEXE

Par \vec{V} on désigne une application de U^* supposé convexe et contenant $(0, 0)$, dans \mathbf{R}^2 de classe \mathcal{C}^1 ; V_1 désigne la première composante de \vec{V} , V_2 la seconde.

1. On suppose dans cette question que \vec{V} est le gradient d'une application \mathcal{U} de U^* dans \mathbf{R} *a priori* de classe \mathcal{C}^1 , $\vec{V} = \vec{\nabla}\mathcal{U}$. On dit que \vec{V} dérive du potentiel $-\mathcal{U}$ (ou parfois \mathcal{U}).
Montrer que

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} \quad (1)$$

2. Réciproquement supposons que la condition (1) soit satisfaite. On pose :

$$\mathcal{U} : U^* \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto \int_0^1 xV_1(tx, ty) + yV_2(tx, ty)dt.$$

Montrer que \mathcal{U} est de classe \mathcal{C}^1 et que $\vec{V} = \vec{\nabla}\mathcal{U}$.