DM n°8

Ce DM est à destination des 3/2. La première partie devra être traité la semaine de la rentrée. La seconde est déjà accessible.

Fonction Γ

I. La fonction gamma

On va étudier la fonction Γ d'Euler, déjà rencontrée en exercice et définie, rappelons le, sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\Gamma\ :\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,$$

pour tout réel strictement positif.

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de ses dérivées.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. Montrer que Γ est convexe.
4. Montrer que la dérivée de Γ s'annule en un et un seul point de $\mathbf{R}_+^*$.
5. Donner la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0 de Γ. Tracer l'allure de la courbe représentative de Γ.
6. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, l'application

$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\ \text{si } t \leq n, \\ 0,\ \text{sinon.} \end{cases}.$$

   Montrer que $\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On considère dans le suite l'applications

$$I\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

7. Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

8. Montrer que pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul, $\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge.
9. Montrer que pour réel x, $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
   On dispose donc du prolongement à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ de Γ suivant :

$$\tilde{\Gamma}\ :\ \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

10. Montrer que $\tilde{\Gamma}$ est indéfiniment dérivable.

II. Caractérisation de la fonction gamma par convexité de son logarithme

On se propose de donner une caractérisation de la fonction Γ due à Bohr[1] et Mollerup, plus précisément :

l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ strictement positives, continues, telles que

i. $f(1) = 1$;

ii. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x+1) = xf(x)$;

iii. l'application $\ln \circ f$ est convexe[2].

possède un unique élément, la fonction Γ d'Euler.

1. Inégalité d'Hölder

   Soient p et q des réels conjugués, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   On rappelle l'inégalité d'Hölder vue en exercice en début d'année :

   Soit n un entier naturel non nul, pour tout n-uplets $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ de réels positifs ou nuls, on a

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

   Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.

   (a) Soient $[a, b]$ un segment non réduit à un point inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que

   $$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

   (b) On suppose que $|f|^p$ et $|g|^p$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que fg est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

   $$\left|\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

   (*Inégalité d'Hölder.*)

2. Montrer que $\Gamma \in \mathcal{F}$.

3. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. Possons $g = \ln \circ f$. Montrer que pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout entier naturel non nul n,

   $$\ln n \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

   En déduire, que pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout entier naturel non nul n,

   $$0 \leq g(x) - \ln\left(\frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots.(x+n)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

4. En déduire que $f = \Gamma$.

5. Montrer que pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots.(x+n)}\right)$.

6. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la question I. 6.

IV. Fonction B[3]

1. Le frère !
2. Ce qui veut dire que f est très convexe.
3. Il s'agit d'un *bêta* majuscule

1. Montrer que la quantité $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}\,t$ est bien définie pour tout élément x et tout élément y de $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout élément x et tout élément y de $\mathbf{R}_+^*$,

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

   On pourra utiliser la partie I.
3. Calculer $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}\,s$.
   Application : Une particule est attirée vers un point fixe O, par une force inversement proportionnelle à sa distance à O. Si la particule est initialement au repos, calculer le temps qu'elle mettra à atteindre le point O.