DS n$^{\text{o}}$5

Les élèves traiteront un et un seul des trois sujets suivants

1. Sujet type CCP.
2. Sujet type Centrale-Mines.
3. Sujet type Polytechnique -'ENS.

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

SUJET 1
CCP

Ce sujet porte sur l'interpolation polynomiale d'une fonction et comprend trois parties.
Dans la première partie, on définit des polynômes d'interpolation.
Dans la deuxième partie, on étudie une fonction définie sur un segment. La troisième partie conduit à une forumule barycentrique.

- Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel, $n \geq 2$.
- Etant donnés deux entiers naturels $m \leq n$, on note $[|m, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $m \leq k \leq n$.
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On identifie polynômes et fonctions polynomiales.
- Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un entier naturel p, on note $C^p(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions p fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont la dérivée p-ième, notée $f^{(p)}$ est continue sur I. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est quant à lui noté $C(I, \mathbb{R})$. Lorsque I est le segment $[a, b]$, on considère sur cet espace la norme N_∞ définie par
$$\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}),\ N_\infty(f) = \sup\{|f(x)|,\ x \in [a, b]\}.$$
- Pour tout $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ telque $p \leq m$, on note $\binom{m}{p}$ l'entier $\frac{m!}{p!(m-p)!}$.

Première partie.

Dans cette partie, on considère $n+1$ nombres réels, deux à deux distincts, notés $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et on définit la forme bilinéaire B sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
$$\forall f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ B(f, g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)$$

Pour tout $k \in [|0, n|]$, on définit $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ par $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$.

I.1. Définition d'une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.1. Justifier rapidement l'affirmation : B définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2. Pour $j, k \in [|0, n|]$, calculer $L_k(x_j)$. Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire B.

I.2. Définition de $P_n(f)$.

A toute fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe le polynôme $P_n(f)$ défini par

$$P_n(f) = \sum_{i=0}^{n} B(f, L_i) L_i$$

2.1. Pour tout $k \in [|0, n|]$, exprimer $B(f, L_k)$ en fonction de $f(x_k)$. En déduire que $P_n(f)$ vérifie $P_n(f)(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in [|0, n|]$.

2.2. Montrer que $P_n(f)$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_k) = f(x_k)$, pour tout $k \in [|0, n|]$.

2.3. Expliciter $P_n(f)$ lorsque $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Préciser le polynôme $\sum_{k=0}^{n} L_k(X)$ et, pour x réel, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} L_k(x)$.

Pour $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dira que $P_n(f)$ est le polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n, de la fonction f aux points $x_i, x_1, ..., x_n$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on notera simplement P_n au lieu de $P_n(f)$.

Dans la suite de cette partie, on considère un segment $[a, b]$ contenant les points $x_i, x_1, ..., x_n$.

I.3. Une application linéaire.

Soit Λ l'application linéaire

$$\Lambda \ : \ C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[X] \, ; \ f \mapsto P_n(f).$$

On considère l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞. En identifiant tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ avec la fonction polynôme associée, on munit également $\mathbb{R}_n[X]$ de la même norme N_∞. On définit sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(C([a, b])$ des endomorphismes continus de $C([a, b])$ la norme subordonnée à la norme N_∞, notée $\| \cdot \|$ par

$$\mathcal{L}_c(C([a, b]) \to \mathbb{R}_+ \, ; \ L \mapsto \sup\{N_\infty(L(f)), \ N_\infty(f) \leq 1\}$$

On considère enfin l'application Φ élément de $C([a, b], \mathbb{R})$

$$\Phi \ : \ [a, b] \to \mathbb{R} \, ; \ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} |L_k(t)|.$$

3.0. Justifier que $\| \cdot \|$ est bien une norme.

3.1. Justifier la continuité de Λ et l'inégalité $\|\Lambda\| \leq N_\infty(\Phi)$.

3.2. Montrer qu'il existe un nombre réel $\tau \in [a, b]$ tel que $N_\infty(\Phi) = \Phi(\tau)$.

3.3. Soit $\tau \in [a, b]$ tel que $N_\infty(\Phi) = \Phi(\tau)$. Pour tout $k \in [|0, n|]$, on définit ε_k par $\varepsilon_k = 0$ lorsque $L_k(\tau) = 0$ et $\varepsilon_k = \frac{|L_k(\tau)|}{L_k(\tau)}$ lorsque $L_k(\tau) \neq 0$. Soit ψ la fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ψ est continue sur $[a, b]$,
- pour tout $k \in [|0, n|]$, $\psi(x_k) = \varepsilon_k$,
- pour tout $k \in [|0, n-1|]$ la restriction de ψ à chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est de la forme $\psi(t) = a_k t + b_k$ où a_k et b_k sont des réels. Les restrictions de ψ à $[a, x_0]$ et $[x_n, b]$ sont constantes.

En calculant $\Lambda(\psi)(\tau)$, déterminer $\|\Lambda\|$.

+

I.4. Un résultat auxiliaire.

Soit p un entier naturel non nul et soit $g \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction s'annulant en $p+1$ points distincts $c_0 < c_1 < \cdots < c_p$ de l'intervalle $[a, b]$.

4.1. Montrer qu'il existe un point $\alpha \in [a, b]$ tel que $g^{(p)}(\alpha) = 0$.

I.5. Une expression de $f - P_n$.

On note T_{n+1} le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini pour x réel par $T_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Soit f une fonction appartenant à $C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ et soit y un réel de $[a, b]$, distinct de tous les x_i, pour $i \in [|0, n|]$. On note P_n (resp. P_{n+1}) le polynôme d'interpolation de f de degré inférieur ou égal à n (resp. $n+1$) aux points x_i pour $i \in [|0, n|]$ (resp. $[|0, n+1|]$).

5.1. Montrer qu'il existe un réel r tel que pour tout réel x,

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = rT_{n+1}(x).$$

5.2. En appliquant à la fonction $g = f - P_{n+1}$ un résultat obtenu en $I.4$, montrer qu'il existe un réel $\beta \in [a, b]$ tel que $f^{(n+1)}(\beta) = r(n+1)!$.
En déduire que pour tout $y \in [a, b]$, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que

$$f(y) - P_n(y) = \frac{1}{(n+1)!} T_{n+1}(y) f^{(n+1)}(\beta). \tag{1}$$

5.3. Montrer que l'égalité (1) est aussi vérifiée lorsque l'on remplace y par l'un des x_i pour $i \in [|0, n|]$.

Deuxième partie.

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On considère la fonction φ définie sur le segment $[0, n]$ par $\phi(t) = |t(t-1)\dots(t-n)|$.

II.1. Etude du maximum de φ.

1.1. Montrer que φ admet un maximum sur l'intervalle $[0, n]$.

1.2. Soit $t \in [0, n]$; comparer $\varphi(n-t)$ et $\varphi(t)$.

1.3. On suppose $t > 1$ et $t \notin \mathbb{N}$. Calculer $\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}$.
En déduire que pour $t \in \left[1, \frac{n}{2}\right]$, on a $\varphi(t-1) \geq \varphi(t)$.

1.4. On suppose n pair et on note $n = 2p$. Montrer que φ atteint son maximum en un point de l'intervalle $[0, 1]$ en supposant d'abord que $p = 1$ puis $p \geq 2$.
On admettra que pour n impair, φ atteint son maximum en un point de $[0, 1]$.

II.2. Abscisse du maximum de φ.

2.1. Soit $t \notin \mathbb{N}$; expliciter $\ln(\varphi(t))$. En déduire $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t-k}$.

2.2. Pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, déterminer le signe de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k}$. En déduire que $\varphi'(t)$ est strictement négatif sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

2.3. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$.
Déterminer le sens de variation de g. En déduire que φ' s'annule en au plus un point de $]0, 1[$.

2.4. Montrer que le mximum de φ est atteint en un unique point de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, noté t_n. Quelle est la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k}$?

II.3. Etude de l'abscisse t_n du maximum de φ.

3.1. On suppose $k \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité $\frac{1}{k-t_n} > \frac{1}{k}$. En déduire une minoration de $\frac{1}{t_n}$.

3.2. Préciser la nature de la série $\sum(1/k)_{k \geq 1}$. En déduire la limite de $\frac{1}{t_n}$ et par suite celle de t_n lorsque $n \to +\infty$.

II.4. Une majoration de φ.

4.1. Montrer l'inégalité $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4.2. Montrer l'inégalité $t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}$.

4.3. En déduire que pour tout $t \in [0, n]$, on a $\varphi(t) < \frac{n!}{\ln(n+1)}$.

II.5. Une majoration de $N_\infty(f - P_n)$.

Dans cette question, on reprend les notatations de la partie I.
Soit $[a, b]$ un segment. On note $h = \frac{b-a}{n}$ et on considère les $n+1$ points équidistants $x_i = a + ih$ de $[a, b]$ pour $i \in [|0, n|]$.

5.1. Pour $x \in [a,b]$, on note $t = \frac{x-a}{h} \in [0,n]$. On note T_{n+1} le polynôme défini en $I.5$ par $T_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$. Exprimer $|T_{n+1}(x)|$ en fonction de h et de $\varphi(t)$.

5.2. Soit $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ et soit P_n son polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n, aux points équidistants x_i pour $i \in [|0,n|]$, défini en $I.2$. Montrer l'inégalité

$$N_\infty(f-P_n) \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} N_\infty(f^{(n+1)}). \tag{2}$$

Troisième partie.

On conserve les notations des parties I et II, avec en particulier des réels x_i, pour $i \in [|0,n|]$, sistincts. On définit les $n+1$ réels $w_k = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)}$ pour $k \in [|0,n|]$.

III.1. Soit x un réel et $k \in [|0,n|]$. Exprimer $T_{n+1}(x)$ en fonction de $L_k(x)$, $x - x_k$ et w_k.

III.2. Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit P_n son polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n, aux points x_i pour $i \in [|0,n|]$. On suppose x différent de tous les x_i. Montrer l'égalité

$$P_n(x) = T_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k}. \tag{3}$$

Calculer $T_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}$.
En déduire la formule barycentrique

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{w_k f(x_k)}{x-x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}}. \tag{4}$$

III.3. Dans cette question, on suppose les points x_i équidistants. On note $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i \in [|0,n|]$. On se propose d'établir une formule barycentrique en remplaçant les w_k par des coefficients entiers relatifs.

3.1. Exprimer w_k en fonction de h, n et k.
Soit $w_k^* = (-1)^n h^n n! W_k$. Exprimer w_k^* à l'aide d'un entier de la forme $\binom{m}{p}$ où m et p sont à préciser en fonction de n et k.

3.2. On suppose x différent de tous les x_i. Montrer la formule

$$P_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f(x_k)}{x-x_k}}{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x-x_k}}. \tag{5}$$

III.4. Une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$**.**

On suppose que $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et on considère les $4n+1$ points équidistants compris entre $x_0 = -2n$ et $x_{4n} = 2n$.

4.1. Déterminer x_k pour $k \in [|0, 4n|]$.

4.2. Montrer que

$$P_{4n}(x) = \frac{\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{4n}{2k+2n} \frac{1}{x-2k}}{\sum_{j=-2n}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{k+2n} \frac{1}{x-k}}. \tag{6}$$

est, pour x différent de tous les x_i, la valeur en x d'un polynôme dinterpolation de f en des points équidistants que l'on précisera.

4.3. Soit $x \in [-2n, 2n]$ et soit p la partie entière de x. Montrer l'inégalité

$$\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| \leq (2n+p+1)!(2n-p)!\ .$$

4.4. Montrer que pour x fixé dans $[-2n, 2n]$ et non entier, on a :

$$|f(x) - P_{4n}(x)| \leq (2n+p+1)!(2n-p)! \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}}{(4n+1)!} = \theta(n,p).$$

Quelle est la limite de $\theta(n,p)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

SUJET 2
Mines-Central

L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.
Dans tous le problème d désigne un entier naturel non nul et l'on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille $d \times d$. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., d\}$ le coefficient d'indice (i, j) d'une matrice A de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sera noté $A_{i,j}$.
Les parties I, II, et III sont indépendantes de la parties IV.

I UNE NORME UTILE

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'application

$$f_P \ : \ \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})\,; \ A \mapsto P(A)$$

   est continue.
   On rappelle que si $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et si A est un élément de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors :

$$P(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i.$$

2. Montrer que l'application

$$\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,; \ (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$$

   est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
   Dans toute la suite on note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
3. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., d\}$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ comparer $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$.
4. montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$.

II SÉRIES ENTIÈRES DE MATRICES

(**5/2**) Dans cette partie on se donne une série entière à coefficients complexes $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.
(**3/2**) Dans cette partie on se donne un élément R de $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout élément z de $\mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et si $|z| > R$ alors elle diverge.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$. Montrer que l'application
$$\phi \ : \ \mathcal{B} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \, ; \ A \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} a_i A^i$$
est bien définie et est continue.
2. Soit A un élément non nul de $\mathcal{B}$.
   (a) Établir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(A^k)_{0\leq k\leq r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0\leq k\leq r}$ soit liée.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ établir l'existence et l'unicité d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, ..., \lambda_{r-1,n}\}$ de réels tel que :
$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k.$$
   (c) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C\|A^n\|.$$
   (d) En déduire que pour tout élément k de $\{0, 1, ..., r-1\}$ la série de nombres complexes $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente.
   (e) Conclure qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(A) = P(A)$ et $\deg(P) < r$.
   (f) Déterminer ce polynôme P lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \frac{1}{n!}$, pour tout entier naturel n.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \phi(A) = P(A).$$

III DEUX APPLICATIONS

1. **Première application : une formule trigonométrique matricielle**

   (a) Rapper la définition du produit de Cauchy de deux série de nombres complexes et l'énoncé du théorème au programme qui concerne le produit de cauchy.

   On admet dans la suite de la partie III que ce théorème est encore valable pour des séries de matrices éléments de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

   (b) Pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA$, montrer que :

   $$\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B) = \exp\left(\mathrm{i}(A+B)\right).$$

   (c) Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on pose :

   $$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $(\cos(A))^2 + (\sin(A))^2 = I_d$.

2. **Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton**

   On se donne un élément A de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que pour tout réel positif R assez grand, et tout réel θ, la matrice $(Re^{\mathrm{i}\theta}I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, et que son inverse est la matrice :

   $$(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-n}A^n.$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel positif R assez grand, la matrice

   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{\mathrm{i}\theta})^n(Re^{\mathrm{i}\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta$$

   vaut A^{n-1}. On note χ_A le polynôme caractéristique de A, polynôme qui se décompose en :

   $$\chi_A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

   Montrer que pour R assez grand :

   $$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{\mathrm{i}\theta})\chi_A(Re^{\mathrm{i}\theta})(Re^{\mathrm{i}\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta.$$

(c) En déduire que $\chi_A(A)$ ets la matrice nulle.
On pourra faire intervenir des comatrices.

IV ÉTUDE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

Soit $M \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $f \ :]-\infty, M[\to \mathbb{R}$, une application continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \left]-\infty, \frac{M}{2}\right[^2, 2f(x+y) = f(2x) + f(2y). \qquad (1)$$

1. Soit α un nombre strictement inférieur à $\frac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α. Montrer que pour tout x et tout y éléments de $\left]-\infty, \frac{M}{2}\right[$, tels que $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}.$$

2. En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, M[$.
3. Montrer que $f'' = 0$. Montrer que l'ensemble des applications continues qui satisfont à (1), est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une base.

Une cinquième partie de ce long sujet à été supprimée

SUJET 3

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}$, par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f telles que $f(0) = f(1) = 0$.
$\log_2$ est la fonction définie pour $t \in]0,+\infty[$, par $\log_2(t) = \dfrac{\ln t}{\ln 2}$, où ln est le logarithme népérien.

Première partie : définition de l'exposant de Hölder ponctuel

Soit $x_0 \in [0,1]$. Pour tout $s \in [0,1[$, on désigne par $\Gamma^s(x_0)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f qui vérifient :

$$\sup_{x\in[0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} < +\infty.$$

1a. Montrer que $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, puis que, pour tous réels s_1 et s_2 vérifiant $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, l'on a $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$. Enfin, déterminer $\Gamma^0(x_0)$.

1b. Soit $f \in \mathcal{C}$. Si f est dérivable en x_0, montrer que $f \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0,1[$.

1c. Montrer que pour tout $x_0 \in]0,1[$, il existe $f \in \mathcal{C}$ non dérivable en x_0 tel que pour tout $s \in [0,1[$, $f \in \Gamma^s(x_0)$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $x_0 \in [0,1]$, on pose

$$\alpha_f(x_0) = \sup\{s \in [0,1] | f \in \Gamma^s(x_0)\}.$$

Le réel $\alpha_f(x_0)$ est appelé *exposant de Hölder ponctuel de f en x_0* ; il permet de mesurer finement la régularité locale de f au voisinage du point x_0.

2. Soit $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|1-4x^2|}$. Déterminer l'exposant de Hölder ponctuel de p en $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on définit la fonction $\omega_f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ par

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h\}.$$

3a. Montrer que ω_f est croissante, et continue en 0.

3b. Montrer que pour tous $h, h' \in [0,1]$ tels que $h \leq h'$, ω_f vérifie

$$\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h).$$

3c. En déduire que ω_f est continue sur $[0,1]$.

4a. Soit $s \in [0,1[$. On suppose que la fonction $h \mapsto \dfrac{\omega_f(h)}{h^s}$ est bornée sur $]0,1]$. Pour tout $x_0 \in [0,1]$, montrer que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4b. Soit $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} q(x) = x \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) \text{ pour } x > 0, \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x_0 \in [0,1]$, $\alpha_q(x_0) = 1$, mais que $\dfrac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0.

Deuxième partie : le système de Schauder

On note $\mathcal{I} = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 | j \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k < 2^j\}$; pour $j \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{T}_j$ l'ensemble

$$\mathcal{T}_j = \{k \in \mathbb{N} | 0 \leq k < 2^j\}.$$

Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, soit $\theta_{j,k} : [0,1] \to [0,1]$ la fonction de $\mathcal{C}_0$, définie pour tout $x \in [0,1]$ par

$$\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 1 - |2^{j+1}x - 2k - 1| & \text{si } x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La famille des fonctions $(\theta_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{I}}$ est appelée *système de Schauder*.
On note $\tilde{k}_j(x)$ la partie entière du réel $2^j x$, c'est donc l'unique entier tel que

$$\tilde{k}_j(x) \leq 2^j x < \tilde{k}_j(x) + 1.$$

5a. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathcal{T}_{j+1}$, il existe un unique entier $k' \in \mathcal{T}_j$ tel que

$$[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}].$$

On précisera le lien entre k et k'.

5b. Calculer $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1})$ pour tous $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$, $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$.

5c. Montrer que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue, affine sur chaque intervalle de la forme $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$ où $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$.

5d. Prouver que pour tous $(j,k) \in \mathcal{I}$ et $(x,y) \in [0,1]^2$, on a

$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x-y|.$$

Dans le reste de cette partie f est un élément de $\mathcal{C}_0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n f$ la fonction de $\mathcal{C}_0$ définie par

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k},$$

où pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, on a posé

$$c_{j,k}(f) = f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2}.$$

6. Montrer que $\lim\limits_{j\to+\infty} \max\limits_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7a. Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, $(i,\ell) \in \mathcal{I}$, calculer $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$.

7b. Soit $a_{j,k}$ une famille de réels indexée par $(j,k) \in \mathcal{I}$. On note $b_j = \max\limits_{k\in\mathcal{T}_j} |a_{j,k}|$, et on suppose que la série $\sum b_j$ est convergente.
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit f_j^a la fonction définie par

$$f_j^a(x) = \sum_{k\in\mathcal{T}_j} a_{j,k}\theta_{j,k}(x).$$

Montrer que la série $\sum f_j^a$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ vers une fonction f^a, qui appartient à $\mathcal{C}_0$ et qui vérifie, pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, $c_{j,k}(f^a) = a_{j,k}$.

8a. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tous $(j,k) \in \mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leq M2^{-j}$.
En déduire que la suite de fonctions $S_n f$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ lorsque n tend vers ∞.

8b. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une constante $M' \geq 0$ telle que pour tous $(j,k) \in \mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leq M'4^{-j}$.

9a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, la fonction $S_n f$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.

9b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, $(S_{n-1}f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$. Montrer que l'on a aussi que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$. On pourra distinguer les cas suivant la parité de ℓ.

9c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

10a. Déduire de la question **9** que pour tout f de $\mathcal{C}_0$, $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.

10b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que S_n est un projecteur sur $\mathcal{C}_0$, dont la norme subordonnée (à $\|\cdot\|_\infty$) vaut 1.

11a. Soit $s \in]0,1[$. Montrer que si $a, b \geq 0$, alors $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.

11b. Montrer que si $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$, alors il existe un réel $c_1 > 0$, tel que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, on a,

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1 \left(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|\right)^s.$$

Troisième partie : minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

L'objectif de cette partie est d'établir une forme de réciproque du résultat de la question **11b**. Dans toute cette partie, on désigne par $f \in \mathcal{C}_0$ une fonction vérifiant la propriété suivante :

$(\mathcal{P}_1)$ il existe $x_0 \in [0,1]$, $s \in]0,1[$ et $c_1 \in]0,+\infty[$, tels que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$,

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1 \left(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|\right)^s.$$

Dans tout le reste de cette partie, on fixe les x_0, s et c_1 de la propriété $\mathcal{P}_1$ et $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$.

12. Montrer qu'il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$.

13. On rappelle que la notation $\tilde{k}_j(x)$ a été introduite en préambule de la deuxième partie. On pose

$$W_j = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \, .$$

Montrer que

$$W_j \leq \left(|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)|\right) 2^{j+1}|x - x_0|.$$

14a. Montrer que pour $j \leq n_0$ (n_0 est déterminé dans la question **12**), on a

$$W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0|.$$

14b. En déduire que, en posant $c_2 = 8(2^{1-s}-1)^{-1}(3/2)^s c_1$,

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq c_2 |x - x_0|^s.$$

15. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq 2^{s(1-j)} c_1$. En déduire, en posant $c_3 = (1-2^{-s})^{-1} 2^s c_1$,

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x_0)| \leq c_3 |x - x_0|^s.$$

Dans la suite du problème, on suppose $\|f\|_\infty = 1$ et on rappelle que la fonction ω_f a été définie à la question **3**.

16. Montrer qu'il existe un unique $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$.

17. Montrer que pour tout $n \geq n_1$, où n_1 est déterminé à la question **16**, on a

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1} |x - x_0|^s.$$

On pourra utiliser les résultats des questions **9a** et **9c**.

18a. Montrer que lorsque $n_0 < n_1$, on a,

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 3^s (n_1 - n_0) |x - x_0|^s.$$

On suppose de plus dans la suite que la fonction ω_f vérifie la propriété suivante :

($\mathcal{P}_2$) pour tout entier $N \geq 1$, il existe un réel $c_4(N) > 0$ tel que pour tout $h \in]0, 1]$,

$$\omega_f(h) \leq c_4(N)(1 + |\log_2 h|)^{-N}.$$

18b. Pour tout entier $N \geq 1$, on pose $c_5(N) = 3^s c_1 (c_4(N))^{\frac{1}{N}}$. Montrer que

$$n_1 - n_0 \leq n_1 + 1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{\frac{1}{N}}$$

et en déduire $\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\, |\theta_{j,k}(x)| \leq c_5(N) |x - x_0|^{\left(1-\frac{1}{N}\right)s}$.

19. Déduire de ce qui précède que $\alpha_f(x_0) \geq s$.
On pourra distinguer les cas $n_0 \geq n_1$ et $n_0 < n_1$.

⋆ ⋆
⋆