Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E, on appelle *enveloppe convexe de H*, notée $\mathrm{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A. On rappelle que le *groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U\,{}^tU = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. On note $\|\ \|_2$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|=1} \|AX\|.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle$.

2) Montrer que l'application $(A,B) \to \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle\ ,\ \rangle$.

On note $\|\ \|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.*

3) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B \rangle \geqslant 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

4) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.

5) Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.

6) Montrer que la restriction de h à $\operatorname{Im} h$ induit un automorphisme de $\operatorname{Im} h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.

7) Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\operatorname{Ker} h$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\operatorname{Ker} h$ sur $(\operatorname{Im} f)^\perp$ qui conserve la norme.

8) À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.

9) En déduire que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

10) Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

11) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leqslant 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

12) Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'*au plus* $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n+2$.

13) Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

14) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\mathrm{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15) Si H est une partie compacte de E, montrer que $\mathrm{conv}(H)$ est compacte.
On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \ldots, t_{n+1}),\ \text{avec } t_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}.$$

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16) Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathscr{B}$ la boule unité fermée de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \| \ \|_2)$.

17) Montrer que $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathscr{B}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{B}$ telle que M n'appartient pas à $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\| \ \|_1$, et on pose $A = {}^t(M - N)$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

18) Montrer que pour tout $V \in \mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\mathrm{tr}(AV) \leqslant \mathrm{tr}(AN) < \mathrm{tr}(AM)$. En déduire que $\mathrm{tr}(S) < \mathrm{tr}(USM)$.

19) Montrer que $\mathrm{tr}(MUS) \leqslant \mathrm{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1).

20) Conclure : déterminer $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $A \in \mathscr{B}$ est dit *extrémal* dans $\mathscr{B}$ si l'écriture $A = \frac{1}{2}(B + C)$, avec B, C appartenant à $\mathscr{B}$, entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{B}$.

21) On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \frac{1}{2}(V + W)$, avec V, W appartenant à $\mathscr{B}$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathscr{B}$.

Soit A appartenant à $\mathscr{B}$ mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

22) Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont positifs ou nuls.

23) Montrer que $d_i \leqslant 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $d_j < 1$.

24) En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à $\mathscr{B}$ telles que $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.

FIN DU PROBLÈME