DS n°1

Sujet Mines-Centrale.

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront **obligatoirement** [1] être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les formules ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) ou usage abusif de symboles logiques : -2 points.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.
Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{array}{rccl} \tau : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

I.A.1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

I.A.2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

I.A.3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.

I.A.4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ. L'application τ est-elle diagonalisable ?

1. Les résultats non soulignés ne seront pas rémunérés.

I.A.5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question I.A.2. pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

I.A.6. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.

I.A.7. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

I.A.8. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{I.2}$$

I.A.9. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

I.B L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

I.B.1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

I.B.2. En déduire le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.

I.B.3. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{I.3}$$

I.B.4. Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer δ^k en fonction des τ^j, pour $j \in [\![0, k]\!]$.

I.B.5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{I.4}$$

I.B.6. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

(a) Montrer que u et δ^2 commutent.

(b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Conclure.

I.B.7. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

(a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

(b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

II Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

II.A Quelques cas particuliers

II.A.1. Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?

II.A.2. Déterminer $S(n, n)$.

II.A.3. Déterminer $S(n+1, n)$.

II.B Recherche d'une expression générale

II.B.1. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

II.B.2. Pour $p \geqslant n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k) \tag{II.1}$$

où $S(p, 0) = 0$ par convention.

II.B.3. En déduire une expression de $S(p, n)$ pour $p \geqslant n$.

II.B.4. En relisant la question I.B.5., commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

II.C

II.C.1. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

III Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \qquad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

III.A Généralités

III.A.1. Montrer que la famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.A.2. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.

III.A.3. La matrice M définie à la question I.A.3. et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

III.A.4. Montrer que, pour $k, l \in [\![0,n]\!]$,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

III.A.5. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(P))(0) H_k$$

III.B Étude d'un exemple

III.B.1. Donner les coordonnées du polynômes $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

III.B.2. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

III.B.3. Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

III.C Polynômes à valeurs entières

III.C.1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

III.C.2. En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

III.C.3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

III.C.4. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont entières.

III.C.5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\,P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \delta(f) : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{array}$$

IV.A

IV.A.1. Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.

IV.A.2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $[\![0, n]\!]$).

IV.A.3. Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0, 1[$ tel que

$$(\delta(f))(x) = f'(x + y_1)$$

IV.A.4. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n) \tag{IV.1}$$

On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

IV.B

On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

IV.B.1. Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à $\mathbb{N}^*$.

IV.B.2. Montrer que α est positif ou nul.

IV.B.3. On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

IV.C

On applique la relation (IV.1) à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1. Montrer que l'expression

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$

est un entier relatif.

IV.C.2. Les notations sont celles de la question IV.A.4. ? Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?

IV.C.3. Conclure.