DM n$^{\text{o}}$2

Nous commençons par le rappels de deux théorème cruciaux du programme de MPSI, trop souvent ignorés ou mal maîtrisés. Ces théorèmes permettent de prouver qu'une application est une bijection. Il seront revu dans le chapitre 4, cette année. Ils sont utiles en début de ce DM.

Proposition 1 Théorème de la bijection monotone, ou de l'homéomorphisme monotone [1] —
Soit f une application d'un ensemble I à valeurs réelles. On supose :

1. *L'ensemble I est un intervalle.*
2. *L'application f est continue.*
3. *L'application f est strictement monotone.*

Alors on a :

i. *L'application f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*
ii. *L'ensemble $f(I)$ est un intervalle dont la forme est connue, par exemple, dans le cas où f est strictement décroissante et $I = [a, b[$, alors $f(I) =]\lim_b f, f(a)]$.*
iii. *La bijection réciproque est continue.*

On utilise quand f est régulière plutôt le théorème suivant.

Proposition 2 Théorème de la bijection $\mathcal{C}^k$, ou du $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme [2] —
Soient un entier $k \geq 1$ un f une application d'un ensemble I à valeurs réelles. On supose :

1. *L'ensemble I est un intervalle.*
2. *L'application f est de classe $\mathcal{C}^k$.*
3. *L'application f' ne s'annule pas sur I.*

Alors on a :

i. *l'application f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*
ii. *L'ensemble $f(I)$ est un intervalle dont la forme est connue, par exemple, dans le cas où f est strictement décroissante et $I =]a, b[$, alors $f(I) =]\lim_b f, \lim_a f[$.*
iii. *La bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^k$.*

1. Un homéomorphisme est une bijection continue dont la bijection réciproque est continue (terme hors programme).
2. Un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme est une bijection de classe $\mathbf{C}^k$, dont la bijection réciproque est de classe $\mathbf{C}^k$ (terme hors programme).

Les fonctions de Lambert

Objectifs

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi qu'une de leurs applications en probabilités.

I LES FONCTIONS DE LAMBERT

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x\mathrm{e}^x.$$

1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-, +\infty[$.
   Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W.
2. Justifier que W est continue sur $[-, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-, +\infty[$.
3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque X tend vers 0, ainsi qu'un équivalent de$W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscise $-$.
6. $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}^{\alpha} W$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?
7. $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}^{\alpha} W$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty]$?
8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-, 0[$. Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.
9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue réelle x,
   $$x\mathrm{e}^x = m. \tag{1}$$
   Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.
10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue réelle x,
    $$x\mathrm{e}^x \leq m. \tag{2}$$
    En utilisant les fonctions V et W déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de (2). Illustrer graphiquement les différents cas.
11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue réelle x,
    $$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0. \tag{3}$$
    Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II PROBABILITÉS

Par p on désigne un élément de $]0, 1[$ et par λ un réel strictement positif.

On étudie dans cette partie un problème probabiliste dont la résolution fait intervenir les fonctions de Lambert V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé [3] $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise, au cours d'une journée, une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité p.

On se donne une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de vraiables aléatoires de Bernoulli de paramètre p et N une variable aléatoire tels que les variables aléatoire $N, X_1, X_2, ..., X_n$ soient pour tout entier $n \geq 1$ mutuellement indépendantes.

La variable N représente le nombre de clients au cours de la journée de la tombola, et pour tout $\omega \in \Omega$ et tout entier $i \geq 1$, si $N(\omega) \geq i$ alors $X_i(\omega) = 1$ modélise le fait que le i^{e} client gagne. Enfin on pose $X = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, cela signifie que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + ... + X_{N(\omega)}(\omega).$$

On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire que $N(\omega) = \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(N = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité qu'au moins deux lots soient ganés durant la journée soit faible. On considère donc un élément de α de $]0, 1[$ et l'on souhaite réaliser la condition

$$\mathbf{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \tag{4}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (4).

1. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
   On rappelle que pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ coverge de somme e^x.
   Déterminer l'espérance de X.
2. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$, alors la condition (4) est satisfaite.
3. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (4) est équivalente à la condition
   $$x\mathrm{e}^x \leq -\alpha.$$
4. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question I.10, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha)$ l'existence d'une plus grande valeur pour p dans $]0, 1[$ telle que la condition (4) soit satisfaite.

III THÉORÈME BINOMIAL D'ABEL

Le but de cette partie est d'établir un résultat algébrique utile à la suivante.

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, ..., A_n)$ en posant :

$$A_0 = 1 \text{ et, pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ A_k = \frac{1}{k!}X(X - ka)^{k-1}.$$

3. Les 3/2 ne se soucieront pas de ce point de formalisme

On note $\mathbf{C}[X]_n$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

1. Démontrer que la famille $(A_0, A_1, ..., A_n)$ est une base de $\mathbf{C}[X]_n$.
2. Démontrer que pour tout pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$A'_k(X) = A_{k-1}(X - a).$$

3. En déduire, pour tout j et tout k éléments de $[\![1, \mathrm{n}]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera les trois cas $j < k$, $j = k$ et $j\ k$.

   Soit P un élément de $\mathbf{C}[X]_n$ et soient $(a_0, a_1, ...a_n)$ le $n + 1$-uplet de ses coordonnées dans la base $(A_0, A_1, ..., A_n)$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k A_k$$

4. Démontrer que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $a_j = P^{(j)}(ja)$.
5. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{C}^2,\ (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} x(x - ka)^{k-1}(y + a)^{n-k}.$$

6. Établir pour tout $y \in \mathbf{C}$, la relation,

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} (-ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}.$$

IV DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE LA FONCTION W

Cette partie est réservée au 5/2.

Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ où pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.$$

On désigne par S la somme de la série entière dela variable réelle x, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.
2. Montrer que S est définie sur $[-R, R]$
3. Démontrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$x(1 + S(x))S'(x) = S(x).$$

   On pourra utiliser $III.6$.

   Soit l'application

$$h\ :\ ] - R, R[\to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto S(x) \exp(S(x))$$

4. Démontrer que h est solution sur $] - R, R?[$ de l'équation différentielle

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0. \tag{5}$$

5. Résoudre l'équation différentielle (5) sur l'intervalle $] - R, R[$.

6. En déduire que, S et W coïncident sur $]-R, R[$.
7. Est-ce-que S et W coïncident sur $[-R, R]$?

IV APPROXIMATION DE W

Cette partie est facultative.

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.

Pour tout réel positif x, on considère la fonction

$$\phi_x \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ t \mapsto x\exp(-x\exp(-t).$$

et on définit, sur $\mathbf{R}_+$, une suite de fonctions $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par récurrence :

$$\begin{cases} W_0 = 1, \\ \forall x \in \mathbf{R}, \ W_{n+1}(x) = \phi_x(W_n(x)). \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x.
2. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 1$, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et que :
$$0 \leq \phi_x' \leq \frac{x}{\mathrm{e}}.$$
3. En déduire que pour tout $x \in [0, \mathrm{e}[$ et tout entier $n \geq 0$,
$$|W_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|$$
4. $\mathbf{\frac{3}{2}}$ Justifier que pour tout $x \in]0, \mathrm{e}[$, la suite de réels $(W_n(x))_{n_i n\mathbf{N}}$ converge vers $W(x)$
$\mathbf{\frac{5}{2}}$ Justifier que pour tout réel $a \in [0, \mathrm{e}[$, la suite de fonctions $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.
5. $\mathbf{\frac{5}{2}}$ La suite de fonctions $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, \mathrm{e}]$?

⋆ ⋆
⋆

Correction du DM n°2

Les fonctions de Lambert

I LES FONCTIONS DE LAMBERT

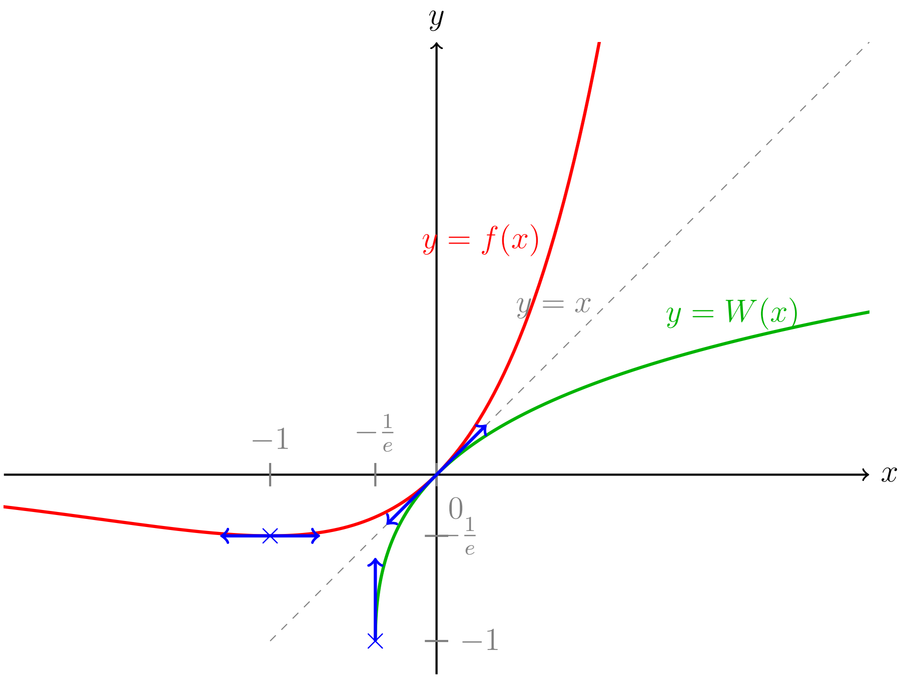
1. L'application $f_{|[-1,+\infty[}$ est :
   — définie sur un **intervalle** ;
   — **continue** par continuité de l'exponentielle et de l'identité ;
   — **strictement croissante**, en effet cette application est dérivable (dérivabilité de l'exponentielle et de l'identité) et sa dérivée, $x \mapsto (1+x)e^x$ est positive et nulle en un seul point le point -1 .

   Par le théorème de la bijection monotone,
   — l'application f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $f([-1,+\infty[)$;
   — on a $f([-1,+\infty[) = [f(-1), \lim\limits_{+\infty} f = [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$;
   — la bijection W réciproque est continue.
2. Que W soit continue sur $[-,+\infty[$ a été vu dans 1. L'application $f_{|]-1,+\infty[}$ est de **classe** $\mathcal{C}^k$ sur l'**intervalle** $]-1,+\infty[$ (l'exponentielle et de l'identité le sont), f' ne **s'annule pas** sur $]-1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection de classe $\mathcal{C}^k$, f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{-1} f, \lim\limits_{+\infty} f[$ qui vaut $]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$, la bijection réciproque — qui est la restriction de W à $]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ — est de classe $\mathcal{C}^k$.
3. On remarque sans trop d'efforts que :
   $$f(0) = 0 \in [-,+\infty[.$$
   Composons par W,
   $$W(f(0)) = W(0),$$
   mais comme $0 \in [-1,+\infty[$, $\underline{0 = W(0)}$.
   Le théorème de dérivation d'une application réciproque affirme :
   $$\underline{W'(0) = W'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = 1}$$
4. • D'après la formule de Taylor-Young, on a :
   $$W(x) = W(0) + W'(0)x + \underset{x\to 0}{o}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)(x),$$
   Donc $\underline{\underset{x\to 0}{\sim} x}$.

   • Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x = f(W(x)) = W(x)e^{W(x)}$ et $W(x) > 0$, en passant au logarithme dans cette égalité :
   $$\ln(x) = \ln(W(x)) + W(x)$$
   Comme $W(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, on a $W(x) = \ln(x) - \ln(W(x)) = \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{0}(W(x)$. Donc
   $$\underline{W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).}$$

5. Nous savons que le graphe de f et celui de W sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Tracer l'un suffit donc à en déduire l'autre. Nous avons déjà assuré que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$; de plus, notons que $f'(-1) = 0$, ce qui permet de préciser l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de -1 (tangente horizontale), et par symétrie on a l'allure de $\mathcal{C}_W$ au voisinage de $-\mathrm{e}^{-1}$ (tangente verticale).

   Nous connaissons également $W'(0) = 1$, ce qui nous permet de tracer la tangente en 0 à la courbe de W. Tout ceci étant considéré, voici les graphes demandés :



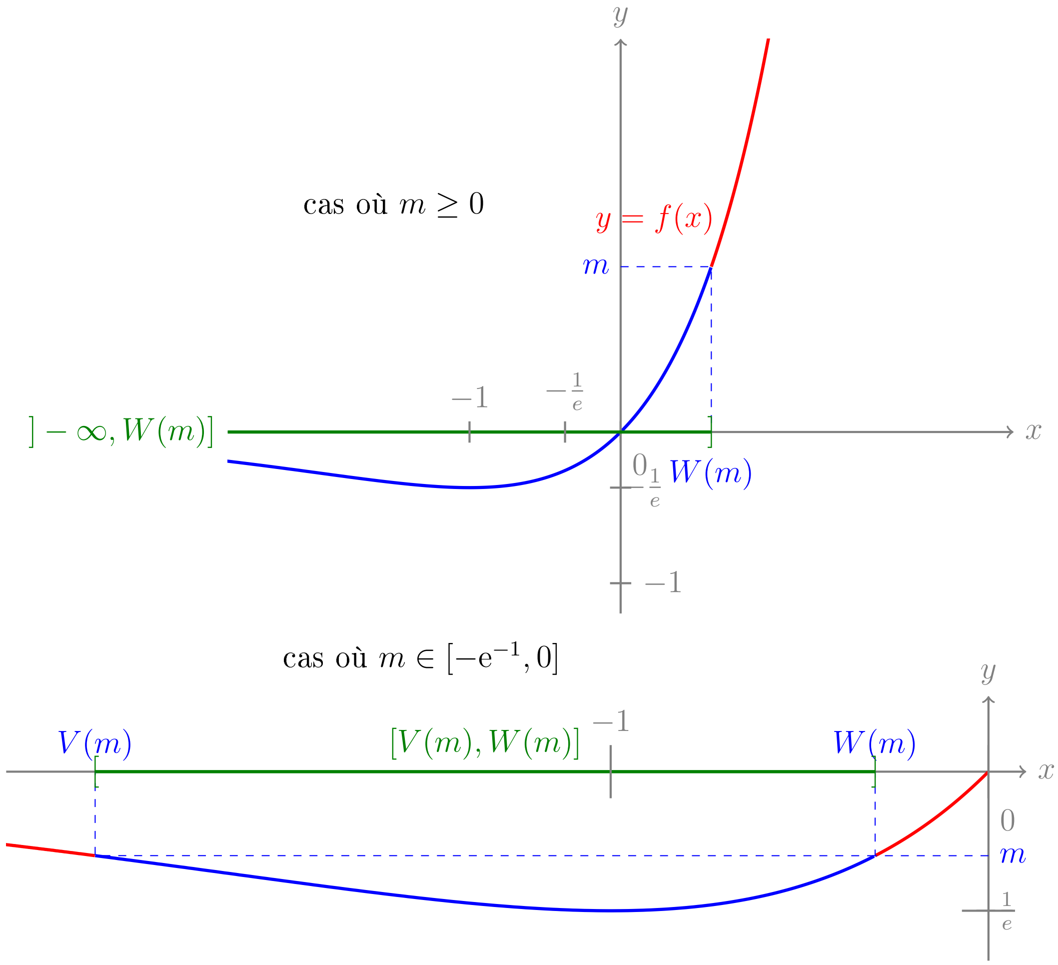
6. $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$
7. $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$
8. La restriction de f à **l'intervalle** $]-\infty, -1]$ et **continue** et **strictement décroissante** (même preuve que pour 1) ; le théorème de la bijection monotone implique que f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ dans $[f(-1), \lim\limits_{-\infty} f[= [-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0[$ (la limite est nulle en $-\infty$ d'après le théorème des croissances comparées). D'où le résultat.
9. Soit $m \in \mathbf{R}$. On rappelle que par définition d'une bijection :
   — $W(m)$ est l'unique solution à l'équation $f(x) = m$ d'inconnue t DANS $[-1, +\infty[$, pour m DANS $[-, +\infty[$;
   — $V(m)$ est l'unique solution à l'équation $f(x) = m$ d'inconnue t DANS $]-\infty, -1]$, pour m DANS $[-, 0[$;

   Enfin, notons que l'étude de f a montré que cette fonction atteint en -1 son minimum qui vaut $-\mathrm{e}^{-1}$.

   Donc le nombre de solutions à l'équation $x\mathrm{e}^x = m$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$, est :
   — zéro si $m \in]-\infty, -\mathrm{e}^{-1}[$;
   — une si $m = -\mathrm{e}^{-1}$ ou si $m \geq 0$: dans ce cas l'unique solution est $W(m)$;
   — deux si $m \in]-\mathrm{e}^{-1}, 0[$: dans ce cas les solutions sont $W(m)$ et $V(m)$.
10. Soit un réel m On en déduit que si $m \in \mathbf{R}$, alors l'ensemble des solutions à l'inéquation (2), d'inconnue $x \in \mathbf{R}$, est :
   — vide, si $m \in]-\infty, -\mathrm{e}^{-1}[$;
   — $]-\infty, -1] \cup [-1, W(m)] =]-\infty, W(m)]$ si $m \geq 0$;
   — $([V(m), +\infty[\cap]-\infty, -1]) \cup (]-\infty, W(m)] \cap [-1, +\infty[) = [V(m), W(m)]$, enfin si $m \in]-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.

Représentons graphiquement ces intervalles de solutions (sauf le premier) sur la figure 10 (page 8) ; en vert l'intervalle sur lequel l'inéquation $xe^x \leq m$ est vérifiée, et en bleu la portion de graphe correspondante.

FIGURE 1 – Représentation graphique des solutions à l'inéquation $xe^x \leq m$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.



11. Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}^*)^2$. Soit x ubn réel. x est solution de (3) si et seulement si

$$f(-ax) = \frac{a}{b}.$$

Donc d'après 9,
- si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, alors (3) n'a pas de solution ;
- si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$ ou $\frac{a}{b} \geq 0$, alors cette équation admet pour unique solution $x = -\frac{1}{a} W\left(\frac{a}{b}\right)$;
- si $\frac{a}{b} \in]-e^{-1}, 0[$, alors les solutions de (3) sont $-\frac{1}{a} W\left(\frac{a}{b}\right)$ et $-\frac{1}{a} V\left(\frac{a}{b}\right)$.

II PROBABILITÉS

1. Clairement $X(\Omega) = \mathbf{N}$. Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme $(\{N = n\}, n \in \mathbf{N})$ est un système complet d'événements, la formule des probabilité totales sous sa forme première dit :

$$\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n, X = k).$$

Mais $\{N = n, X = k\} = \left\{N = n, \sum_{i=1}^{N} X_i = k\right\} = \left\{N = n, \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right\}$

Mais par mutuelle indépendance de $X_1, ...X_k$ et N et par le lemme de coalition $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et N sont inépendantes, et donc :

$$\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)$$

Toujours par mutuelle indépendance des X_i, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$, et donc, avec la convention usuelle de nullité des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $n < k$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = k) =& \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\ =& = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!}(1-p)^j = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!} \exp(\lambda(1-p)) \\ =& \frac{\mathrm{e}^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Donc $\underline{X \sim \mathcal{P}(p\lambda).}$

Donc, par le cours (ch. 4), X admet une espérance et une variance, et qu'on a :

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{V}(X) = \lambda p.$$

2. Comme X est **positive** (et 2>0) l'inégalité de Markov, non triviale puisque $\mathrm{E}(X)$ est finie affirme :

$$\mathbf{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2}.$$

Donc si $p \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$, alors $\lambda p \leq 2(1-\alpha)$ et donc :

$$\mathbf{P}(X \geq 2) \leq \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1 - \alpha,$$

Autrement dit, <u>la condition (4) est satisfaite.</u>

3. D'abord :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p).$$

On en déduit ensuite que $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha$ si et seulement si $-(1+\lambda p)\mathrm{e}^{-(\lambda \mathrm{p}+1)} \leq -\alpha \mathrm{e}^{-1}$, soit si et seulement si $\underline{x\mathrm{e}^x \leq -\alpha.}$

4. Soit $p \in]0, 1[$. D'après 3, la condition (4) équivaut à l'inégalité $f(x) \leq -\alpha \mathrm{e}^{-1}$. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a $-\alpha \mathrm{e}^{-1} \in]-\mathrm{e}^{-1}, 0[$, donc l'étude de la question 9 montre que cette inégalité est vérifiée si et seulement si : $x \in [V(-\alpha \mathrm{e}^{-1}), W(-\alpha \mathrm{e}^{-1})]$. L'ensemble A des valeurs de p qui assurent (4) est donc

$$A = \left[-\frac{W(-\alpha \mathrm{e}^{-1}) + 1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha \mathrm{e}^{-1}) + 1}{\lambda}\right] \cap [0, 1[.$$

Premier cas : $-\frac{V(-\alpha \mathrm{e}^{-1})+1}{\lambda} < 1$

Alors $A = \left[-\frac{W(-\alpha \mathrm{e}^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha \mathrm{e}^{-1})+1}{\lambda}\right]$. Il existe donc une plus grande valeur pour p dans $]0, 1[$ telle que la condition (4) soit satisfaite. c'est $\boxed{-\frac{V(-\alpha \mathrm{e}^{-1}) + 1}{\lambda}}$

Second cas : $-\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda} \geq 1$
Alors $A = \left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, 1\right[$. Il n'existe donc pas de plus grande valeur pour p dans $]0,1[$ telle que la condition (4) soit satisfaite.

III THÉORÈME BINOMIAL D'ABEL

1. Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on a $\deg(A_k) = k$ (binome de Newton). La famille $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ est donc une famille de $\mathbf{C}_n[X]$ échelonnée en degré : elle est libre. De plus son cardinal égale $n+1 = \dim(\mathbf{C}_n[X])$, donc c'est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.
2. Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Si $k = 1$ la vérification est immédiate. Supposons donc $k \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} A_k'(X) &= \frac{1}{k!}(X-ka)^{k-1} + \frac{1}{k!}X \cdot (k-1)(X-ka)^{k-2} \\ &= \frac{1}{k!}\left((X-ka)+(k-1)X\right)(X-ka)^{k-2} \\ &= \frac{1}{k!}\left(kX-ka\right)(X-ka)^{k-2} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}(X-a)\left((X-a)-(k-1)a\right)^{k-2} = A_{k-1}(X-a), \end{aligned}$$

d'où le résultat.
3. Soient $k \in \{0, ...n\}$ et $j \in \{0, ..., n\}$.
Premier cas $j > k$

Alors $A_k^{(j)} = 0$ car A_k est de degré k, et donc $A_k^{(j)}(ja)$ est nul.
Deuxième cas $j = k$
Le terme dominant de A_k est $\frac{1}{k!}X^k$ donc $A_k^{(k)} = X^0$, et donc $A_k^{(j)}(ka) = 1$.
Troisème cas $j < k$

La question précédente donne, par une récurrence immédiate :

$$A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja),$$

et donc : $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0) = \frac{1}{(k-j)!}ja(ja-ja)^{k-j} = 0$. En conclusion :

$$\boxed{A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}}$$

4. Soit $j \in \{0, ..., n\}$. Dérivons j fois P et substituons ja à X

$$\underline{P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) = \alpha_j,}$$

par la question précédente
5. Soit $(x, y) \in \mathbf{C}^2$. Par la question précédente appliquée au polynôme $P = (X+y)^n$, :

$$(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka)A_k = P^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}P^{(k)}(ka)X(X-ka)^{k-1}.$$

Or $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, donc :

$$(X+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} X(ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1}.$$

En substituant x à X on a :

$$(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(ka+y)^{n-k}(x-ka)^{k-1}.$$

6. Soit $y \in \mathbf{C}$. L'identité demandée est triviale pour $n = 0$ soit donc $n \geq 1$. Par dérivation formelle du polynôme $(X+y)^n$, la question précédente donne :

$$n(X+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(ka+y)^{n-k}(k-1)(X-ka)^{k-2}.$$

En substituant 0 à X la seconde somme s'annule, donnant :

$$\underline{ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ka+y)^{n-k}(-ka)^{k-1}.}$$