Hilbert

Ce problème est tiré en grande partie du bel article [Randé, 2021].

I. LE CAS EUCLIDIEN

Dans cette partie $(\mathbf{E}, (\cdot|\cdot)$ désigne un espace euclidien de dimension n et u une endomorphisme symétrique de $\mathbf{E}$. La norme euclidienne sera sobrement notée $|\cdot|$, tandis que $\|\cdot\|$ désignera la norme sur $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ subordonnée à $|\cdot|$, ainsi en désignant par S la sphère unité de $\mathbf{E}$, a-t-on :

$$\|u\| = \sup_{x\in S} |u(x)|.$$

Nous aurons également besoin de $R(u)$, défini par

$$R(u) = \{(u(x)|x), x \in S\}.$$

Enfin les n valeurs propres de u, nombres réels d'après le théorème spectral, distinctes ou non seront notées $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

1. Montrer que $\mathbf{R}(u)$ est un segment. On notera $m = \min(R(u))$ et $M = \max(R(u))$.
2. Montrer que $\|u\| = \sup_{x\in S} |(u(x)|x)|$.
3. Montrer que le spectre de M contient m et M et est inclus dans $[m, M]$.

   On dit que u est positif (resp. défini positif) si par définition pour tout $x \in \mathbf{E} \setminus \{0_{\mathbf{E}}\}$,

   $$(u(x)|x) \geq 0 \text{ (resp. } (u(x)|x) > 0).$$

   L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. l'ensemble des endomorphismes définis positifs) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbf{E})$, noté $\mathcal{S}^+(\mathbf{E})$, (resp. $\mathcal{S}^{++}(\mathbf{E})$
4. Montrer que u est positif si et seulement si $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbf{R}_+$ et que u est défini positif si et seulement si $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbf{R}_+^*$.
5. Supposons que u soit positif. Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme w de $\mathbf{E}$ tel que $w^2 = u$. On notera $\sqrt{u} := w$, et l'on dira que w est une racine carré de u.
6. montrer que $\mathcal{R} \,:\, \mathcal{S}^+(\mathbf{E}) \to \mathcal{S}^+(\mathbf{E}), v \mapsto \sqrt{v}$ est un homéomorphisme.
7. Décomposition polaire — Montrer que l'application

   $$\mathcal{P} \,:\, \mathcal{S}^{++}(\mathbf{E}) \times \mathrm{O}(\mathbf{E}) \to \mathrm{GL}(\mathbf{E})(\mathbf{E}), (v, w) \mapsto vw.$$

   est un homéomorphisme.

   Soit u' un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ semblable à u, c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme w de $\mathbf{E}$ tels que $wu = u'w$. Montrer que u' et u sont ortho-semblables, c'est-dire-qu'il existe un automorphisme orthogonal w_o, tel que $w_o u = u' w_o$.

Dans la seconde partie, c'est ces résultats et en particulier l'ultime que nous allons généraliser dans le cas de la dimension quelconque.

II. LE CAS DE ℓ^2

Dans cette partie $\mathbf{E}$ désigne l'espace des suites réelles de carré sommable ℓ^2. Les éléments de $\mathbf{E}$ seront notés, le plus souvent, simplement $x, y, ...$, et le cas échéant un élément x de $\mathbf{E}$ s'écrira $(x(i))_{i\in\mathbf{N}}$, ce qui perméttra de réserver la notation $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à une suite d'éléments de $\mathbf{E}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n = (x_n(0), x_n(1), ..., x_n(i), ...) = (x_n(i))_{i\in\mathbf{N}}.$$

Nous munirons $\mathbf{E}$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ usuel :

$$\mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbf{R}\quad (x,y)\mapsto\sum_{i=1}^{+\infty}x(i)y(i),$$

on renvoie au cours pour la définition de ce produit scalaire. La norme sur ℓ^2 associée sera notée sobrement $|\cdot|$. La norme sur $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ subordonnée à cette dernière sera notée $\|\cdot\|$.

En fait de même que tout espace euclidien est isométrique à $\mathbf{R}^n$, grâce à l'application de coordonnées dans une base orthonormée, tout espace de Hilbert, c'est-à-dire tout espace vectoriel de dimension infinie, muni d'un produit scalaire tel que toute série absolument convergente pour la norme associée soit convergente est isométrique à l'espace ℓ^2, pour peu qu'il admette une partie dense dénombrable et donc qu'il possède une suite orthonormée totale. Nous traitons en fait le cas presque général des espaces de Hilbert.

1. Soit $\sum x_n$ une série d'éléments de $\mathbf{E}$. On suppose que $\sum x_n$ converge absolument, c'est-à-dire que la série réelle $\sum |x_n|_2$ converge. Montrer que $\sum x_n$ converge dans $\mathbf{E}$, autrement dit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, où, pour tout entier $n\geq 0$, l'on a noté $S_n=\sum\limits_{p=0}^{n}x_p$.

   On pourra pour commencer étudier pour un entier naturel k, la convergence de la série réelle $\sum u_n(k)$.

   Solution —

   • Pour tout k $\sum\limits_{n\geq 0}(x_n(k))$ converge car $|x_n(k)|\leq |x_n|_2$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note $S(k)$ la somme.

   • $S\in\ell_2$ en effet, pour K et N entiers :

$$\sum_{k=0}^{K}(S_N(k))^2\leq\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{K}(x_n(k))^2\right)^{1/2}\right)^2,$$

   inégalité triangulaire de la norme 2 sur $\mathbf{R}^{k+1}$, puis

$$\sum_{k=0}^{K}(S_N(k))^2\leq\left(\sum_{n=0}^{N}|x_n|_2\right)^2\leq\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|_2\right)^2.$$

   Laissons tendre N vers $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{K}(S(k))^2\leq\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|_2\right)^2.$$

   Sans problème $S\in\ell_2$.

   • Convergence de $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers S. on recommence comme au point 2, pour K et N,P entiers avec $P>N$:

$$\sum_{k=0}^{K}(S_N(k)-S_P(k))^2\leq\left(\sum_{n=N+1}^{P}\left(\sum_{k=0}^{K}(x_n(k))^2\right)^{1/2}\right)^2,$$

   inégalité triangulaire de la norme 2 sur $\mathbf{R}^{k+1}$, puis

$$\sum_{k=0}^{K}(S_N(k)-S_P(k))^2\leq\left(\sum_{n=N+1}^{P}|x_n|_2\right)^2\leq\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|_2\right)^2.$$

Laissons tendre P vers $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{K}(S_N(k)-S(k))^2 \leq \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|_2\right)^2,$$

puis K !

$$|S_N-S|_2^2 \leq \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|_2\right)^2,$$

et on achève sans mal.

Par u nous désignerons un endomorphisme de $\mathbf{E}$, pour le moment quelconque que nous prendrons *continu.*

Soit un réel λ. On adopte la terminologie suivante :

— le réel λ est dit valeur spectrale de u si $u-\lambda\mathrm{id}$ est non bijective. l'ensemble des valeurs spectrales de u est appelé spectre de u et noté $\mathrm{sp}(u)$;

— si $u-\lambda\mathrm{id}$ est non injectif on dit que λ est une valeur propre de u on notera $\mathrm{VP}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u ;

— enfin si le réel λ est tel que $u-\lambda\mathrm{id}$ soit inversible on dit que ce réel est une valeurs résolvantes de u, l'ensemble des valeurs résolvantes sera noté $\varrho(u)$.

Comme dans la première partie, on définit $R(u) := \{(u(x)|x), x \in S\}$.

2. UN EXEMPLE —
   Soit $D_{\leftarrow}$ le décalage à gauche : $D_{\leftarrow}\ :\ \ell^2 \to \ell^2$; $u \mapsto (u(1), u(2), ..., u(n+1), ...)$.
   Montrer que $\mathrm{VP}(\ D_{\leftarrow}) =]-1,1[$. Montrer que 1 est une valeur spectrale de $D_{\leftarrow}$.

3. ADJONCTION —
   Montrer que pour tout élément v de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ il existe un et un seul élément de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$, noté v^* tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{E}^2, (v(x)|y) = (x|v^*(y)).$$

   Indication. On utilisera l'exercice sur la représentation des formes linéaires (théorème de Rietz).

   On appelle $v*$ adjoint de v. On dit que v est *symétrique* si par définition $v = v^*$ et *orthogonal* si v est inversible d'inverse v^*. On note $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ symétrique et $\mathrm{O}(E)$ celui des des éléments de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ orthogonaux.

4. (a) Montrer que toute série à valeurs dans $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ absolument convergente, converge dans $(\mathcal{L}_c(\mathbf{E})), \|\cdot\|)$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$ des éléments inversibles de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ dont l'inverse[1] est dans $\mathcal{L}_c(\mathbf{E})$ est un ouvert.
5. Soit λ un réel
   (a) On suppose : $\lambda > \|u\|$. Montrer que $\lambda \in \varrho(u)$.
   (b) Montrer que $\varrho(u)$ est ouvert.
   (c) Montrer que $\mathrm{sp}(u)$ est un compact qui contient l'adérence de $\mathrm{VP}(u)$.

   Dans la suite on suppose que u est **symétrique**.

1. En fait la continuité de l'inverse est automatique.

6. (a) Montrer que $R(u)$ est un segment.

   Solution, pour $\lambda > \|u\|$ l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{id}$ est inversible (développement en série géométrique de l'inverse).

   On notera $m = \min(R(u))$ et $M = \max(R(u))$ et $\gamma = \sup_{x \in S} |(u(x)|x)|$.

   (b) Montrer que $m \in [-\|u\|, \|u\|]$ et $M \in [-\|u\|, \|u\|]$ et que $\gamma \leq \|u\|$.

   (c) Soient λ un réel et x et y des éléments de $\mathbf{E}$. Montrer que :

$$\lambda^2(u(y)|y) + 2\lambda(u(y)|x) + (u(x)|x) \leq \gamma|x + y|^2$$

   Solution Partir de $(u(x + y)|x + \lambda y)$ que l'on développe. En déduire :

$$4\lambda(u(y), x) \leq 2\gamma(|x|^2 + |\lambda||y|^2).$$

   Solution On fait la somme de l'inégalité précédente et celle obtenue en changeant λ en $-\lambda$.

   (d) En déduire que $\|u\| = \gamma$. Montrer que $\|u\| = -m$ ou M.

   Solution Discriminant. Et à la fin $x = u(y)$.

7. Nous allons montrer que m et M sont dans le spectre de U.

   (a) Soit $v = u - m\mathrm{id}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{E}$,

$$|(v(x)|y)|^2 \leq (v(x)|x)(v(y), y)$$

   (b) Justifier que l'on dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'élément de S tel que $(u(x_n)|x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} m$. Quelle est la limite de la suite $((v(x_n)|x_n))_{n\in\mathbf{N}}$?

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$|(v(x_n)|v(x_n))|^2 \leq (v(x_n)|x_n)(v^2(x_n)|v(x_n)).$$

   en déduire que $|v(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   (d) Conclure.

   Solution v ne peut être inversible car alors $x_n = v^{-1}v(x_n)$ tendrait avce n vers $0_{\mathbf{E}}$.

8. — Racine carrée d'un opérateur symétrique positif—

   Dans cette question on suppose que u est *un endomormisme symétrique positif*, c'est à dire que pour tout $(x, y) \in \mathbf{E}^2$,

$$(u(x)|y) = (x|u(y) \text{ et } (u(x)|x) \geq 0.$$

   L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de $\mathbf{E}$ sera noté $\mathcal{S}^+$.
   Écrivons le développement en série entière de l'application $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ sous la forme :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sqrt{1 - x} = \alpha(0) - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(k)x^k$$

   (a) Que vaut $\alpha(0)$? Montrer la positivité des $\alpha(n)$. Montrer que $\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} = 1 - \frac{c}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{k}\right)$, où c est un réel à déterminer. En déduire la convergence de la série $\sum \alpha(k)$.

   (b) Dans cette sous question on suppose que u est de norme inférieure ou égal à 1 : $\|u\| \leq 1$. On notera $v := \mathrm{id} - u$.

i. En étudiant $R(u)$ montrer que $\|\mathrm{id}-u\| \leq 1$. En déduire la convergence de la série $\alpha(0)\mathrm{id} - \sum \alpha(k)v^k$. On notera la somme de cette série w :

$$w = \alpha_0 \mathrm{id} - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(k)v^k$$

ii. Pour tout entier $k \geq 0$ on pose $c(k)$ le terme général de la série produit de Cauchy de la série $\alpha_0 - \sum_{k\geq} \alpha(k)$ par elle même. Montrer que la série d'éléments de $\mathbf{E}$, $\sum c(k)v^k$ converge, puis que :

$$w^2 = u.$$

iii. Montrer que w est un endomorphisme symétrique et positif.
solution $\|\mathrm{id} - w\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(k)\|v\|^k = 1 - \sqrt{1-\|v\|} \leq 1$ et 5. b) fait le reste.

La norme de u est de nouveau quelconque.

(c) Déduire de ce qui précède l'existence d'un élément w_1 de $\mathcal{S}^+$ tel que $w_1^2 = u$

(d) Soit w_2 un endomorphisme de $\mathbf{E}$ symétrique et positif tel que $w_2^2 = u$.

i. Soit $y \in \mathbf{E}$ tel que $(w_i(y), y) = 0$, pour $i = 1$ ou 2. Montrer que pour $i = 1, 2$ on a :$w_i(y) = 0$
Solution Caychyschwarziser.

ii. En déduire que $w_2(w_2 - w_1) = 0$ et $w_1(w_2 - w_1) = 0$

iii. Conclure que $w_1 = w_2$.

Solution $0 = (w_1 - w_2)(w_1 - w_2) = (w_1 - w_2)(w_1 - w_2)^*$ Donc pour tout x, $|(w_1 - w_2)(x)|^2 = 0$.

On dit que w_1 est la racine carrée de u et l'on n'hésite pas à noter : $w_1 = \sqrt{u}$.

(e) Montrer que l'application

$$\mathcal{S}^+ \to \mathcal{S}^+\,;\ v \mapsto \sqrt{v}$$

est continue.

Remarque. On a donc immédiatement que

$$\mathcal{S}^+ \to \mathcal{S}^+\,;\ v \mapsto v^2$$

est un homéomorphisme.

Solution La restriction à toute boule fermée est continue par convergence normale.

9. Décomposition polaire —
On note $\mathcal{S}^{++}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}^{++}$ inversible.

(a) Soit $v \in \mathrm{GL}$ montrer que vv^* est élément de $\mathcal{S}^{++}$.

(b) montrer que l'application

$$\mathcal{S}^{++} \times \mathrm{O}(\mathbf{E}) \to \mathrm{GL}\,;\ (a, v) \mapsto av.$$

est un homéomorphime.

10. Ortho-similitude —

Soient u_1 et u_2 des élément de $\mathcal{S}(\mathbf{E})$, et w un élément de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$. On suppose que

$$wu_2 = u_1 w.$$

La question précédente fournit $s \in \mathcal{S}^{++}(\mathbf{E})$ et $w_{\mathrm{o}} \in \mathrm{O}(\mathbf{E})$ tels que $w = w_{\mathrm{o}} s$.

(a) Montrer que $s^2 u_1$ est symétrique et en déduire que u et s^2 commutent.

(b) Montrer que s commute avec u_1.
Indication. On pourra vérifier que s est élément de l'adhérence de $\mathbf{R}[s^2]$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{S}(E); \|\cdot\|)$.

(c) Montrer que l'égalité :

$$w_{\mathrm{o}} u_1 = u_2 w_{\mathrm{o}}.$$

Références

[Randé, 2021] Randé, b. (2021). Autoadjoints semblables dans un hilbert. *RMS*, janvier(2):24–30.