Récapitulatif : suites et séries d'applications

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications d'une partie A d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie à valeurs dans $\mathbf{K}$ (ou éventuellement un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de dimension finie).

SUITES

Convergence simple
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement si, pour tout $\vec{x}\in A$, $f_n(\vec{x})$ converge.

Si c'est le cas $f : A \to \mathbf{K}\,;\ \vec{x} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\vec{x})$ est dite limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On a unicité de la limite simple.

☞ **Pour montrer la convergence simple on commence par se donner un élément de A :**

Soit $\vec{x}_0 \in A$, ...

...... *donc* $f_n(\vec{x}_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\vec{x}_0)$.

Conclusion : la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend simplement vers f.

Convergence uniforme
$(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une application f de A dans $\mathbf{K}$ (ou $\mathbf{F}$), si pour tout $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbf{N}$, si $n\geq n_0$, alors pour tout $\vec{x}\in A$: $$\lvert f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\rvert \leq \varepsilon.$$

La convergence uniforme vers f implique la convergence simple vers f (réciproque fausse).

Proposition : *On a l'équivalence des deux propositions :*

i. $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément vers une application* f.
ii. $f_n - f$ *est bornée pour* n *suffisamment grand et* $\|f-f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans la pratique pour prouver la convergence uniforme on évite si possible de calculer $\|f-f_n\|_\infty$ et on procède comme suit[1] :

☞ **Preuve pratique de la convergence uniforme**

Etape 1 : (On montre la convergence simple)

Soit $\vec{x}_0\in A$.

$\vdots$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une application f.

Etape 2 : (On montre la convergence uniforme vers la limite simple)

Soit $\vec{x}\in A$, pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\lvert f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\rvert \leq \ldots\ldots\ldots \leq a_n.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante de $\vec{x}$ et tend vers 0. Donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

1. pour prouver que la convergence simple n'est pas uniforme, ce qui n'est plus un objectif du programme, le calcul de $\|f-f_n\|_\infty$ est souvent le plus pratique.

SÉRIES

Convergence simple d'une série
On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement si la suite d'applications $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement.

☞ **Pratique** *Soit $\vec{x}_0 \in A$. ... ...donc $\sum f_n(x_0)$ converge. Donc la série $\sum f_n$ converge simplement.*

Si la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement alors on note S la limite simple de S_n et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n = S - S_n$ respectivement *somme* et *reste d'ordre* n de la série d'applications.

Convergence uniforme d'une série
On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément si $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément.

☞ **Preuve pratique la convergence uniforme**

Etape 1 : (On montre la convergence simple)

Soit $\vec{x}_0 \in A$. .... Donc $\sum f_n(\vec{x}_0)$ converge.

Donc $\sum f_n$ converge simplement.

Etape 2 : (On montre la convergence uniforme)

Soit $\vec{x} \in A$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|R_n(\vec{x})| \leq .... \leq A_n.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante de $\vec{x}$ et tend vers 0. Donc $\sum f_n$ converge uniformément vers f.

Convergence normale d'une série
On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement si :   1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est bornée, 2. $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Dans la pratique on évite (si ce n'est pas immédiat) de calculer $\|f_n\|_\infty$. On utilise plutôt[1] :

Critère de convergence normale
$\sum f_n$ converge normalement si et seulement si :   1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un réel a_n tel que pour tout $\vec{x} \in A$, $\lvert f_n(\vec{x})\rvert \leq a_n$.   2. La série numérique $\sum a_n$ converge.

Prop. : *La convergence normale de $\sum f_n$ implique la convergence uniforme de $\sum |f_n|$ et de $\sum f_n$.*

Avantage de la convergence normale —

- Simple à étudier ;
- La preuve préalable de la convergence simple n'est pas obligatoire.

Donc : *pour montrer la convergence uniformément on essaye d'abord de prouver la normale.*

☞ **Quand les f_n sont alternativement positives et négatives,** en l'absence de convergence normale on peut prouver la convergence uniforme (après preuve de la convergence simple) ainsi :

Soit $\vec{x} \in A$. Comme $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers 0, par le théorème spécial séries alternées, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|R_n(\vec{x})| \leq |f_{n+1}(\vec{x})| \leq .... \leq A_n.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante de $\vec{x}$ est tend vers 0.

1. Pour montrer qu'il n'y a pas de convergence normale, ce qui n'est plus un objectif du programme, on calcule le plus souvent $\|f_n\|_\infty$.

Récapitulatif : régularité des limites de suites d'applications

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications d'une partie A d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie à valeurs dans $\mathbf{K}$ (ou éventuellement un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de dimension finie).

CONTINUITÉ

Théorème de continuité

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une application f. Alors si pour tout entier naturel n, f_n est continue en un point $\vec{x}_0$ de A, (resp. continue), alors f est continue en $\vec{x}_0$ (resp. continue).

Corrolaire — *On suppose que la série $\sum f_n$ converge* uniformément *de somme S. Alors si pour tout entier naturel n, f_n est continue, alors S est continue.*

Souvent dans la pratique, on ne dispose pour montrer la continuité seulement de la convergence uniforme « locale » . On procède ainsi :

☞ **Preuve pratique la continuité**

- *Pour tout entier naturel n, f_n est continue ;*
- *Soit $B \subset A$*[1]

  $\vdots$

  La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. La série $\sum f_n$) converge uniformément sur B.
- *Tout point de A ayant un voisinage relativement à A de la forme de B, la limite f de la suite, (resp. la somme S de la série) est continue.*

LIMITE

Cadre :

1. $\vec{a} \in \bar{A}$;

   ou
2. $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, tout voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) rencontre A, $a = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Théorème de la double limite, suites

On supose :
- $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f ;
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $\vec{a}$.

Alors :
1. $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément ℓ.
2. f admet ℓ comme limite en $\vec{a}$.

$$\boxed{\lim_{\vec{a}}\left(\lim_{n} f_n\right) = \lim_{n}\left(\lim_{\vec{a}} f_n\right)}$$

Théorème de la double limite, séries

On supose :
- $\sum f_n$ converge uniformément de somme S ;
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $\vec{a}$.

Alors :
1. $\sum \ell_n$ converge.
2. S admet $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ comme limite en $\vec{a}$.

$$\boxed{\lim_{\vec{a}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{\vec{a}} f_n\right)}$$

☞ **Résultat hors programme à savoir prouver**[2] **:**

La série $\sum f_n$ converge **simplement** de somme S et les f_n sont **positives**.
On supose :
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} \ell_n$;
- la série $\sum \ell_n$ diverge.

On a alors : $S(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{a}}{\longrightarrow} +\infty$.

---

1. Quand I est un intervalle, B peut par exemple être un segment, un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ etc., quand A est une partie de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, B peur être un pavé, une boule, etc.
2. Notamment en vue de l'étude des séries génératrices.

INTÉGRATION

Suite : interversion $\int_{[a,b]}$ / $\lim\limits_{n\to+\infty}$

On supose :
- — Les f_n sont continues sur un **segment** $[a,b]$.
- — $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge **uniformément** vers f.

Alors :

$$\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

« L'intégrale de la limite est la limite des inté. »

Série : interversion $\int_{[a,b]}$ / $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$

On supose :
- — Les f_n sont continues sur un **segment** $[a,b]$.
- — $\sum f_n$ converge **uniformément**.

Alors : $\sum \int_a^b f_n\mathrm{d}t$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\mathrm{d}t.$$

« La somme des intégrales est l'int. de la somme. »

Généralisation :
Les f_n sont continues sur un intervalle I. Soit $a\in I$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $F_n\ :\ I\ni x\mapsto \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

Proposition — *Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f, uniformément sur tout segment de I. Alors $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers F, uniformément sur tout segement de I, où $F\ :\ I\ni x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.*

DÉRIVATION

Soit un entier $k\geq 1$. $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est défini sur un intervalle I

Suites

On suppose :
1. Pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$.
2. Pour $i=0,1,\ldots,k-1$, $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une application g_i.
3. $(f_n^k)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une application g_k, uniformément sur tout segment de I.

Alors :
- i) Pour $i=0,1,\ldots,k$, $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers g_i, uniformément sur tout segment de I.
- ii) La limite g_0 de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, est de classe $\mathscr{C}^k$.
- iii) Pour $i=0,1,\ldots,k$, $g_0^{(i)}=g_i$.

« La dérivée i^{e} de la limite est la limite de la suite des dérivées i^{e} »

Séries

On suppose :
1. Pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$.
2. Pour $i=0,1,\ldots,k-1$,…$\sum f_n^{(i)}$ converge simplement de somme g_i.
3. La $\sum f_n^k$ converge de somme g_k, uniformément sur tout segment de I.

Alors :
- i) Pour $i=0,1,\ldots,k$, $\sum f_n^i$ converge uniformément sur tout segment de I.
- ii) L'application g_0, somme $\sum f_n$, est de classe $\mathscr{C}^k$.
- iii) Pour $i=0,1,\ldots,k$, $g_0^{(i)}=g_i$

« La dérivée i^{e} de la somme est la somme des dérivées i^{e} »

Remarque : On peut dans les hypothèses de ces théorèmes remplacer la convergence uniforme sur tout segment par de la convergence uniforme au voisinage, relativement à I, de tout point de I.

☞ **Fonction de plusieurs variables, dérivation partielle** : pas de résultats au programme on procède en utilisant ce qui précède.
Rédaction d'un cas classique : pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f_n\in\mathscr{C}^1(I\times K)$, où I et K sont des intervalles.

« $\sum f_n$ converge simplement de somme S. Montrons que S est $\mathscr{C}^1$.
- Soit $y\in K$.
  - — $\sum f_n(\cdot,y)$ converge simplement (car $\sum f_n$ converge simplement),
  - — Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f_n(\cdot,y)$ est $\mathscr{C}^1$ de dérivée $\frac{\partial f_n}{\partial x}(\cdot,y)=$ ....,
  - — $\sum\frac{\partial f_n}{\partial x}(\cdot,y)$ converge uniformément sur tout segment de I,

  donc $\frac{\partial S}{\partial x}(\cdot,y)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial f_n}{\partial x}(\cdot,y)$;
- $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ est continue sur $I\times K$ et $\sum\frac{\partial f_n}{\partial x}$ converge uniformément[1] sur $I\times K$. Donc $\frac{\partial S}{\partial x}$ est continue.

On procède de même pour $\frac{\partial S}{\partial y}$. »

1. Ou uniformément dans un voisinage relatif à $I\times K$ de chaque point.