DS n$^{\text{o}}$1

Devoir de rentrée, filière MP pour les 3/2, à rendre complet le jour de la rentrée. Lire avant le plolycopié sur la rédaction et s'y conformer.

PREMIER PROBLÈME

1. Soit un réel x *distinct* de -1.

   (a) On suppose $x \geq 1$. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

   (b) On suppose $x > -1$. Déduire de la sous-question précédente que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

   (c) On suppose que $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

   (d) On suppose que $-1 < x \leq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{1+x}\ \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

   (e) Déduire des sous-questions précédentes que si $-1 < x \leq 1$, alors la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente de somme $\ln(1+x)$.

   (f) On suppose $|x| > 1$. Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$?

2. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un élément n de $\mathbf{N}^*$ pour lequel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près, dans les cas suivants :

   (a) $x = \frac{1}{3}$.

   (b) $x = \frac{1}{8}$.

   (c) $x = 1$.

3. (a) Justifiez que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Pour tout entier $p \geq 1$, on note $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

(c) Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que pour tout p et tout N, entiers tels que $0 < p \leq N$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+a} - \frac{1}{2N+a+2}\right) \leq \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+a-2} - \frac{1}{2N+a}\right).$$

Pour ce faire on comparera la somme centrale à des intégrales et on illustrera par une figure chaque inégalité.

(d) Déduire des sous-questions précédentes que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leq R_p \leq \frac{1}{4p-2}$$

et donner un équivalent de R_p lorsque p tend vers $+\infty$.

(e) Déterminer un entier $p \geq 1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{4p+4}$ soit une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-8} près. Comparer ce résultat avec celui de la question 2.

4. On se propose de calculer $\ln(2)$ et $\ln(3)$

(a) Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{8}\right)$.

(b) Les calculs de la question 2 donnent les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \text{ et } \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0.11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

5. Soit $x \in]-1,1[$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

(b) On suppose de plus $x \in [0,1[$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{1-x^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(c) Quelles valeur de x peut-on choisir dans la formule précédente pour en déduire une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?

(d) Donner un entier $n \geq 1$ permettant d'obtenir, à l'aide des valeurs de x précédentes, une valeur approchée de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.

(e) Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ avec celle étudiée à la question 4.

6. On se propose déterminer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

   (a) Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(n)$, pour tout nombre premier.

   (b) Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$, pour tout entier n tels que $2 \leq n \leq 20$.

SECOND PROBLÈME

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels, et id l'application identité de E. La composée de deux endomorphismes f et g de E sera simplement notée fg plutôt que $f \circ g$

Rappels.

— Un endomorphisme f de E est appelé *homothétie* s'il est de la forme $f = \lambda \mathrm{id}$, où $\lambda \in \mathbf{R}$.

— Un endomorphisme f de $\mathbf{E}$ est appelée *projecteur* de $\mathbf{E}$ si $f^2 = f$. On sait alors que $E = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)$ et que f est la projection sur $\mathrm{im}(f)$ selon $\ker(f)$ (voir feuilles de colles). Autrement dit tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \mathrm{im}(f)$ et $x_2 \in \ker(f)$ et $f(x) = x_1$.

1. Traces et projecteurs

1. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ ont même trace.

   On peut donc définir sans ambigüité la *trace* de f comme la valeur commune des traces des matrices de f. On note $\mathrm{tr}(f)$ la trace de f.

   Soit p un projecteur de E.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.
4. Soient f et g des endomorphismes de E. Montrer que :
$$\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$
5. Soit s un endomorphisme de E qui s'écrit :
$$s = \sum_{i=1}^{m} p_i,$$
   où p_1, p_2,...,p_m sont des projecteurs de E. Montrer que $\mathrm{tr}(s) \geq \mathrm{rg}(s)$.

2. Endomorphismes de trace nulle

Dans cette partie f désigne un endomorphisme de E.

6. On suppose dans cette question que f n'est pas une homothétie.
   (a) Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ dans laquelle la matrice de f est de la forme suivante :
$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$
   où $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$.
   (c) En déduire que si $\mathrm{tr}(f) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f a une diagonale nulle.

7. On suppose dans cette question que f est de la forme $f = f_1 f_2 - f_2 f_1$ avec f_1 et f_2 des endomorphismes de E. Montrer que $\mathrm{tr}(f) = 0$.

   On va étudier la réciproque.

8. On suppose à présent que $\mathrm{tr}(f) = 0$. On désigne par $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonaux et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ celui des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à diagonale nulle. Enfin on définit l'élément D de $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$, par

$$D = \mathrm{diag}(1, 2, ..., n).$$

   (a) Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ sont des espaces vectoriels dont on précisera les dimensions.

   Soit l'application linéaire $\Phi\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto DM - MD$.

   (b) Montrer que $\mathrm{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ et que $\ker(\Phi) \subset \mathcal{D}_n(\mathbf{R})$. En déduire que $\mathrm{im}(\Phi) = \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$.

   (c) Montrer qu'il existe f_1 et f_2, endomorphismes de E, tels que : $f = f_1 f_2 - f_2 f_1$.

3. Prescription de la diagonale

Dans cette partie on suppose que $\underline{n = \dim(E) = 2}$ et on désigne par f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

On se donne des réels t_1 et t_2 tels que : $t_1 + t_2 = \mathrm{tr}(f)$.

9. La question 6.(a) fournit une famille $(x, f(x))$ libre. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dont on exprimera les vecteurs au moyen de x et $f(x)$, telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} t_1 & c \\ b & t_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

   où b et c sont des réels.

10. On suppose que la trace de f est un entier et que :

$$\mathrm{tr}(f) \geq \mathrm{rg}(f) = 2.$$

   (a) On suppose que f n'est pas une homothétie. Montrer en utilisant la question 9 que f est une somme finie de projecteurs.

   (b) On suppose que f est une homothétie. Montrer que f est encore une somme finie de projecteurs.