DM n^{o}6

Premier exercice

Inégalité de Jansen

Soit f une application d'un segment $[a, b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe.*

On sait que pour toute entier $n \geq 2$ et tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de $[a, b]$, et toute n-uplet de réels positifs $(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

On se propose de généraliser cette inégalité.

Soient x une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $[a, b]$continue et α une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ telle que :

$$\int_0^1 \alpha(t)\mathrm{d}t = 1..$$

1. Montrer que :
$$\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a, b].$$
2. Montrer que
$$f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t.$$

Facultatif

Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$, continue à valeurs *strictement positive.*

Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose :

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 (f(t))^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Etudier la limite de $I(\alpha)$ lorsque $\alpha \to +\infty$.
2. Comparer pour tout réel $\alpha > 0$, $I(\alpha)$ et $\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)$.
3. Étudier la limite, lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures, de $I(\alpha)$.

Second exercice

Fonctions convexes

Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$ convexe et ouverte et non vide.

Définition. *Une application f de C dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout couple (x, y) de points de C et tout élément t de $]0, 1[$,*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Si de plus l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe.

1. Soit f une application de Ω de $\mathbf{R}^n$. Pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on note $I_{a,\vec{x}}$ l'ensemble des réels t tels que $a + t\vec{x} \in \Omega$, et $g_{a,\vec{x}}$ l'application

$$g_{a,\vec{x}} \ :;\ I_{a,\vec{x}} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto f(a+t\vec{x}).$$

   (a) Montrer que pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

   (c) On suppose de plus f différentiable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.
      i. f est convexe ;
      ii. Pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, $\mathrm{d}f(x)\cdot(y-x) \leq \mathrm{d}f(y)\cdot(y-x)$;
      iii. Pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x)\cdot(y-x)$.

   (d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable). Montrer que f est convexe si et seulement si : Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$(\mathrm{d}^2 f(\chi(t))\cdot\vec{h})\cdot\vec{h} \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Montrer que si $f_{|C}$ admet en un point c de C un minimum local, alors pour tout d élément de C,

$$\mathrm{d}f(c)\cdot(d-c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $f_{|C}$ atteint en un point u de C son minimum.
      ii. Pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u)\cdot(v-u) \geq 0$.

3. Soit f une application strictement convexe de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

   (a) Montrer que f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum si et seulement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle.

   (b) On suppose que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$.
   Montrer que ∇f est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.

Indicationtions du DM n°5

Second exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
   Considérer $\phi \ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\,;\ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que

$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$

   Noter que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a+\mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.
   • $0 \in I_{a,\vec{x}}$ puisque $\phi(0) = a$.
   • $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ comme image réciproque de l'ouvert Ω, par ϕ continue.
   • l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes....

(b) • HYPOTHÈSE : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*
Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0,1]$.

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = ...$$

Doù la convexité de f.

• HYPOTHÈSE : *Supposons f convexe .*
Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0,1]$.

$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a + t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a + t_2\vec{x})).$$

....

Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

(c) • *Supposons i.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\vec{xy}}$ est définie sur $[0,1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ......
Pour tout $t \in [0,1]$

$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x + ty - x) \cdot y - x.$$

La convexité de $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ donne ii.
• *Supposons ii.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$.

$$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = ...$$

D'où iii.
• *Supposons iii.*
Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot ((t_2 - t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

En inversant les rôles on peut mopntrer

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe ... Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable).
Soit $x \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$. On considère l'application

$$\chi \ : \ I_{x,\vec{h}} \to \mathbf{R}^n \, ; \ t \mapsto x + t\vec{h}.$$

Ainsi : $g_{x,\vec{h}} = f \circ \chi$. Par composition g est dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$,

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = \mathrm{d}f(\chi(t)) \cdot \vec{h},$$

Soit en notant B l'application bilinéaire

$$B \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \ ; \ (\ell, \vec{x}) \mapsto \ell(\vec{x})$$

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{h}).$$

Or $\mathrm{d}f$ est différentiable et χ aussi, donc $\mathrm{d}f \circ \chi$ est différentiable, c'est-à-dire dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$:

$$(\mathrm{d}f \circ \chi)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(\chi(t)) \cdot \chi'(t) = \mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}.$$

L'application constante égale à $\vec{h}$ est aussi trivialement dérivable. Donc, d'après le cours, $g_{x,\vec{h}}$ est deux fois dérivable de dérivée en $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}, \vec{h}) + B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{0}) = \underbrace{(\underbrace{\mathrm{d}^2 f(\chi(t))}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))} \cdot \vec{h})}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})} \cdot \vec{h} \ldots\ldots.$$

On en déduit que f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2(f(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h}) \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.
   (a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0, 1]$, par convexité de C, est défini $f(c + t(d - c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

   $$\frac{f(c + t(c - d)) - f(c)}{t} \geq 0.$$

   En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a le résultat.....
   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C.
   • Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.
   • Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$. Utiliser iii. dont la preuve n'a pas utilisé le fait que dans question 1. (c) ......
3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).
   • Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.
   (b) • D'abord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.
   Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.
   Supposons que $\vec{\nabla} f$ s'annule en un autre point x_1 de $\mathbf{R}^n$ montrer que la strict convexié conduit à une absurdité !
   • A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. l'application $f_{\vec{h}}$ vérifie les même hypothèses que f...... (ch. exercice sur les fonctions convexes).

Second exercice

Questions Facultatives

1. $I(\alpha)$ tend vers $\|f\|_\infty$, lorsque $\alpha \to +\infty$ déjà vu ! (merci pour les dessin).
2. En utilisant l'inégalité de l'inégalité Jansen intégrale par concavité du logarithme et croissance de l'exponentielle il vient pour tout réel $\alpha > 0$:

$$I(\alpha) \geq \ldots\ldots. \exp\left(\int_{[0,1]} \ln(f)\right).$$

3. Pour tout réel $\alpha > 0$, par concavité du logarithme.

$$I(\alpha) \leq \ldots.. \exp\left(\frac{1}{\alpha}\left(\int_{[0,1]} (f^\alpha - 1)\right)\right).$$

La convexité de $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ p_z : \alpha \mapsto z^\alpha$,

$$I(\alpha) \leq \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) f^\alpha(t)\mathrm{d}t\right).$$

Reste à prouver par un théorème quelconque, ou encore la convexité de $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ p_z : \alpha \mapsto z^\alpha$, que

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) f^\alpha(t)\mathrm{d}t\right) \underset{\alpha\to 0+}{\to} \exp\left(\int_{[0,1]} \ln(f(t))\mathrm{d}t\right).$$

Donc

$$I(\alpha) \underset{\alpha\to 0+}{\to} \exp\left(\left(\int_{[0,1]} \ln(f)\right)\right).$$

On peut aussi utiliser lorsque l'on est 5/2 le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour obtenir un développement limité à l'ordre 1 de :

$$\exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \left(\int_{[0,1]} f^\alpha - 1\right)\right)\right)$$

Correction du DM n°6

Second exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
Posons $\phi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ ;\ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que

$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$

Notons que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a+\mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.

• $0 \in I_{a,\vec{x}}$ puisque $\phi(0) = a$.

• $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ comme image réciproque de l'ouvert Ω, par ϕ continue.

• l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes , donc *a fortiori* connexe par arcs, mais $I_{a,\vec{x}}$ est l'image direct par ψ, application continue, de $a + \mathbf{R}\vec{x} \cap \Omega$, donc lui-même connexe par arcs, donc un intervalle de $\mathbf{R}$.

Nous avons prouvé : $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

(b) • Hypothèse : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*
Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0, 1]$.

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0).$$

Donc par convexité de $g_{q,\overrightarrow{qp}}$ voila que :

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda g_{q,\overrightarrow{qp}}(1) + (1-\lambda) g_{q,\overrightarrow{qp}}(0) \leq \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q).$$

Doù la convexité de f.

• Hypothèse : *Supposons f convexe .*
Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0, 1]$.

$$g_{a,\vec{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a + t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a + t_2\vec{x})).$$

La convexité de f nous assure que :

$$g_{a,\vec{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(a+t_1\vec{x}) + (1-\lambda) f(a+t_2\vec{x}) = \lambda g_{a,\vec{x}}(t_1) + (1-\lambda) g_{a,\vec{x}}(t_2).$$

Donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.

Donc f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

(c) • *Supposons i.*
Soit $(x, y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est définie sur $[0, 1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ composée de f de classe $\mathcal{C}^1$ et de l'application affine donc $\mathcal{C}^1$,

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ ;\ t \mapsto x + t\overrightarrow{xy}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x + ty - x) \cdot y - x.$$

Donc

$$\mathrm{d}f(x) \cdot (y - x) = g'_{x,\overrightarrow{xy}}(0) \leq g'_{x,\overrightarrow{xy}}(1) = \mathrm{d}f(y) \cdot (y - x).$$

D'où ii.

• *Supposons ii.*

Soit $(x, y) \in \Omega^2$.

$$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(x + t(y - x) \cdot (y - x)\mathrm{d}t.$$

mais par ii., pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathrm{d}f(x) \cdot (t(y - x)) \leq \mathrm{d}f(x + t(y - x)) \cdot (t(y - x)),$$

donc

$$f(y) - f(x) \geq \int_0^1 \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)\mathrm{d}t = \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x).$$

D'où iii.

• *Supposons iii.*

Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot ((t_2 - t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

En inversant les rôles de t_2x et t_1, on obtient :

$$f(a + t_1\vec{x}) - f(a + t_2\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_2\vec{x}) \cdot ((t_1 - t_2)\vec{x}),$$

soit puisque $t_1 - t_2 < 0$,

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_1) - g_{a,\vec{x}}(t_2)}{t_1 - t_2} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2).$$

Finalement

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe. Comme a et $\vec{x}$ sont quelconques f est convexe (cf. (b)). Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable).

Soit $x \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$. On considère l'application

$$\chi \ : \ I_{x,\vec{h}} \to \mathbf{R}^n \, ; \ t \mapsto x + t\vec{h}.$$

Ainsi : $g_{x,\vec{h}} = f \circ \chi$. Par composition g est dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$,

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = \mathrm{d}f(\chi(t)) \cdot \vec{h},$$

Soit en notant B l'application bilinéaire

$$B \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \ ; \ (\ell, \vec{x}) \mapsto \ell(\vec{x})$$

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{h}).$$

Or $\mathrm{d}f$ est différentiable et χ aussi, donc $\mathrm{d}f \circ \chi$ est différentiable, c'est-à-dire dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$:

$$(\mathrm{d}f \circ \chi)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(\chi(t)) \cdot \chi'(t) = \mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}.$$

L'application constante égale à $\vec{h}$ est aussi trivialement dérivable. Donc, d'après le cours, $g_{x,\vec{h}}$ est deux fois dérivable de dérivée en $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}, \vec{h}) + B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{0}) = \underbrace{(\underbrace{\mathrm{d}^2 f(\chi(t))}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))} \cdot \vec{h})}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})} \cdot \vec{h}$$

• Supposons f convexe, alors $g_{x,\vec{h}}$ l'est aussi et donc sa dérivée croît et donc pour tout $t \in I_{x,\vec{h}}$

$$(\mathrm{d}^2 f(x + t\vec{h}) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} = g''_{a,\vec{h}}(t) \geq 0,$$

en particulier : $(\mathrm{d}^2 f(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} \geq 0$.
• Supposons $(\mathrm{d}^2 f(a) \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} \geq 0$, pour tout $a \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$.
Alors, d'après ce qui précède, pour tout $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = (\mathrm{d}^2 f(x + t\vec{h}) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} \geq 0.$$

Donc $g'_{x,\vec{h}}$ croît et donc $g_{x,\vec{h}}$ est convexe et partant, comme x et $\vec{h}$ sont quelconque, f est convexe.

Concluons : f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2(f(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h}) \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0, 1]$, par convexité de C, est défini $f(c + t(d - c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

$$\frac{f(c + t(c - d)) - f(c)}{t} \geq 0.$$

   En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a : $\mathrm{D}_{\overrightarrow{cd}} f(c) \geq 0$, ou, autrement dit

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d - c) \geq 0.$$

(b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

• Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$.

• Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$.

Alors la convexité de f donc de $f_{|C}$ et 1.(c) iii. donne que pour tout $v \in C$,

$$f(v) - f(u) \geq \mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0,$$

en effet la preuve de iii. n'a pas utilisé le fait que dans question 1. (c) Ω était ouvert.

Donc $f_{|C}$ atteind en u son minimum.

D'où l'équivalence demandée.

3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).

• Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.

(b) • D'abbord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.

Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.

Supposons que $\vec{\nabla} f$ s'annule en un autre point x_1 de $\mathbf{R}^n$, alors par (a)

$$f(x_1) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) = f(x_0).$$

Mais la stricte convexité de f exigerait que $f\left(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)\right)$ fût strictement inférieur à

$$\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x),$$

ce qui est absurde.

Concluons : $\vec{\nabla} f$ s'annule en un et un seul point de $\mathbf{R}^n$.

• A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. D'une part $f_{\vec{h}}$ est strictement convexe car f l'est et $-\frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$, lineaire est convexe, d'autre part $\frac{\|f_{\vec{h}}(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, en effet, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\left| \frac{\langle \vec{h} | x \rangle}{\|x\|} \right| \leq \|\vec{h}\|,$$

par Cauchy-Schwarz. Enfin $f_{\vec{h}}$ est $\mathcal{C}^1$ comme somme de telles fonctions et :

$$\nabla f_{\vec{h}} = \vec{\nabla} f - \vec{h}$$

Donc le premier point dit qu'il existe un et un seul point x de $\mathbf{R}^n$ en lequel $\vec{\nabla} f_{\vec{h}}$ s'annule donc en lequel $\vec{\nabla} f$ prend la valeur $\vec{h}$.

Donc $\underline{\nabla f \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^n \text{ sur } \mathbf{R}^n.}$

Premier exercice

Inégalité de Jansen

1. Par multiplication par α, application positive, de l'inégalité $a \leq x \leq b$, il vient :

$$\alpha a \leq \alpha x \leq \alpha b.$$

Par positivité de l'intégrale on a alors :

$$a = a\int_{[0,1]} \alpha \leq \int_{[0,1]} \alpha x \leq b\int_{[0,1]} \alpha = b$$

Finalement

$$\boxed{\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a,b]}$$

2. En tant que suite de sommes de Riemann, puisque α est continue (par morceaux), $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha\left(\frac{i}{n}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\int_{[0,1]} \alpha$, c'est-à-dire 1. Donc cette suite est à partir d'un certain rang, appelons le n_0, non nulle.
Posons pour tout entier $n \geq n_0$, et $i = 1, 2, ..., n$,

$$\alpha_{i,n} = \frac{1}{n}\frac{\alpha\left(\frac{i}{n}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha\left(\frac{j}{n}\right)}.$$

On a par positivité de α celle des $\alpha_{i,n}$, de plus par construction $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} = 1$, pour tout entier $n \geq n_0$. C'est assez pour appliquer l'inégalité de Jansen :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} x\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} f\left(x\left(\frac{i}{n}\right)\right). \tag{1}$$

• D'une part, par continuité (par morceaux) de α et αx,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} x\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha\left(\frac{j}{n}\right)} \sum_{i=1}^{n} \alpha\left(\frac{i}{n}\right) x\left(\frac{i}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\int_{[0,1]}\alpha}\int_{[0,1]} \alpha x = \int_{[0,1]} \alpha x.$$

• D'autre part, par continuité de $\alpha f \circ x$, on a de même :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} f\left(x\left(\frac{i}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{[0,1]} \alpha f \circ x.$$

Donc en passant à la limite dans (1), grâce à la continuité de f il vient :

$$\boxed{f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t}$$

Facultatif

1. Etudier la limite de $I(\alpha)$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Vue en exercices !

2. En utilisant l'inégalité de l'inégalité Jansen précédemment démontrée, pour $f = -\ln$ et α l'application constante de valeur 1 et par croissance de l'exponentielle, il vient pour tout réel $\alpha > 0$:

$$\underline{I(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(\int_{[0,1]} f^\alpha\right)\right) \geq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\int_{[0,1]} \ln(f^\alpha)\right) = \exp\left(\int_{[0,1]} \ln(f)\right).}$$

3. Pour tout réel $\alpha > 0$, par concavité du logarithme.

$$I(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(\int_{[0,1]} f^\alpha\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\left(\int_{[0,1]} f^\alpha - 1\right)\right)\right) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\left(\int_{[0,1]} (f^\alpha - 1)\right)\right).$$

La convexité de $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ p_z : \alpha \mapsto z^\alpha$ pour tout réel $z > 0$ dit que :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}+^*,\ \frac{z^\alpha - z^0}{\alpha} \leq p_z'(\alpha) = \ln(z)z^\alpha. \tag{2}$$

Donc pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\exp\left(\int_{[0,1]} \ln(f)\right) \leq I(\alpha) \leq \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))f^\alpha(t)\mathrm{d}t\right).$$

Admettons un instant :

$$\int_0^1 \ln(f(t))f^\alpha(t)\mathrm{d}t \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(f(t)). \tag{3}$$

Alors, par continuité de l'exponentielle, le lemme des gendarmes affirme :

$$\boxed{I(\alpha) \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\right)}$$

Au tour de (3).

$$\left|\int_0^1 \ln(f(t))f^\alpha(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(f(t))\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |\ln(f(t))||f(t)^\alpha - f(t)^0|\mathrm{d}t\,;$$

comme pour tout $t \in [0,1]$, l'application $P_{f(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\left|\int_0^1 \ln(f(t))f^\alpha(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(f(t))\mathrm{d}t\right| \leq \alpha\int_0^1 |\ln(f(t))|^2(f(t)+1)\mathrm{d}t\,;.$$

En effet pour tout $t \in [0,1]$, et tout $\beta \in \mathbf{R}_+^*$,

$$|p_{f(t)}{}'|(\beta) = |\ln(f(t))|f(t)^\beta \leq |\ln(f(t))|(f(t)+1)^\beta \leq |\ln(f(t))|(f(t)+1),$$

par croissance de $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto x^\beta$ puis de $p_{f(t)}$ sur $[1,+\infty[$. D'où (3).
Les 5/2 eussent sans mal pu utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour obtenir un développement limité à l'ordre 1 de :

$$\exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\left(\int_{[0,1]} f^\alpha - 1\right)\right)\right)$$