DM n$^{\text{o}}$10

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier ≥ 1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\|\,\|$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0, x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ .$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = (h_{j,k}^{(n)})_{0\leq j,k\leq n-1} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \dfrac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0,\ 1, \cdots,\ n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$.

On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathscr{V}$ si et seulement si ${}^tXH_nX = \rho_n \|X\|^2$

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_{0H_nX_0} \leq {}^t|X_0|H_n|X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathscr{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathscr{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tXH_nX \leq \displaystyle\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tXH_nX \leq \pi\|X\|^2$

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n: E \longrightarrow E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre.
(On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.
On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\dfrac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.

11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$r_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t,$$

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

$\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n > 0$.

$\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$ pour tous réels $\alpha > 0, \beta > 0$.

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - J_n(x)\ .$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à determiner et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n = 0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x) = 0$ et où l'on montrera que $c = \varphi(0)$.)

14) Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t.$$

15) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0) = 1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} \mathrm{d}t.$$

18) En déduire que pour $n \geq 1$,

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0,1[} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0,1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n} \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin(\dfrac{1}{\omega_n})$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin \dfrac{1}{\omega_n}$ lorsque $n \to +\infty$.

FIN DU PROBLÈME

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) H_n est symétrique réelle.
$\displaystyle\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt = \int_0^1 \sum_{0\leq j,k\leq (n-1)} x_j x_k t^{j+k} dt = \sum_{0\leq j,k\leq (n-1)} \frac{x_j x_k}{j+k+1} =^T XH_nX.$
On a $\displaystyle\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt \geq 0$, donc ${}^TXH_nX \geq 0$, alors H_n est positive.
et si ${}^TXH_nX = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt = 0$, donc $\forall t \in [0,1]$; $\widetilde{X}(t) = 0$, donc $x_0 = ... = x_{n-1} = 0$, alors $X = 0$, donc H_n est définie. Conséquence H_n est définie positive.

2) Si $X \in \mathcal{V}$, alors $H_nX = \rho_n X$, donc ${}^TXH_nX = \rho_n^T XX = \rho_n \|X\|^2$.
H_n est orthogonalement diagonalisable, car symétrique réelle, donc si $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_r = \rho_n$ sont les valeurs propres de H_n, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^TXH_nX = \rho_n^T XX = \rho_n \|X\|^2$, alors $\exists (X_1, ..., X_r) \in E_{\lambda_1}(H_n) \times ... \times E_{\lambda_r}(H_n)$ tels que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^r X_i$, alors ${}^TXH_nX =^T X \displaystyle\sum_{i=1}^r \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i^T X_i X_i$, car la somme des espaces propres est ortogonale, alors la condition; ${}^TXH_nX = \rho_n^T XX$ donne $\rho_n \displaystyle\sum_{i=1}^r \|X_i\|^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i^T X_i X_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^r (\rho_n - \lambda_i)\|X_i\|^2 = 0$, donc pour $i \neq r$, $X_i = 0$, donc $X = X_r \in E_{\lambda_r}(H_n) = E_{\rho_n}(H_n) = \mathcal{V}$. D'où l'équivalence.

3) On a

$$\begin{aligned}
{}^TX_0H_nX_0 &= |{}^TX_0H_nX_0| \text{ car} H_n \text{ est positive}\\
&= \left| \sum_{0\leq j,k\leq (n-1)} \frac{x_j x_k}{j+k+1} \right|\\
&\leq \sum_{0\leq j,k\leq (n-1)} \frac{|x_j||x_k|}{j+k+1}\\
&\leq {}^T|X_0|H_n|X_0|
\end{aligned}$$

Or $X_0 \in \mathcal{V}$, donc ${}^TX_0H_nX_0 = \rho_n \|X_0\|^2$, donc $\rho_n \|X_0\|^2 \leq^T |X_0|H_n|X_0|$, avec le même calcul fait en question 2, en écrivant $|X_0| = \displaystyle\sum_{i=1}^r X_i$ aboutit à ${}^T|X_0|H_n|X_0| = \displaystyle\sum_{i=1}^r \lambda_i^T X_i X_i$, alors ${}^T|X_0|H_n|X_0| \leq \rho_n \displaystyle\sum_{i=1}^r {}^TX_iX_i \leq \rho_n \|X_0\|^2$, en rassemblant on obtient $\rho_n \|X_0\|^2 \leq^T |X_0|H_n|X_0| \leq \rho_n \|X_0\|^2$, et X_0 et $|X_0|$ ont même norme, donc ${}^T|X_0|H_n|X_0| = \rho_n \||X_0|\|^2$, par la question 2) on aura $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) X_0 est non nul, alors toutes les composantes de $H_n|X_0|$ sont strictement positives, car les coefficients de H_n sont strictement positifs, et l'égalité $H_n|X_0| = \lambda|X_0|$, où λ est une valeur propre de H_n qui est définie positive, donc $\lambda > 0$, alors toutes les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives.

5) Supposons que $\dim \mathcal{V} \geq 2$, et soit (X_1, X_1') une famille libre de $\mathcal{V}$, et soit x_1, x_1' les premières composantes de X_1 et X_1' respectivement, alors la première composante de $x_1'X_1 - x_1X_1'$ est nulle, comme ce vecteur est dans $\mathcal{V}$ par la question précédente, $x_1'X_1 - x_1X_1' = 0$, alors $X_1 = \dfrac{x_1}{x_1'}X_1'$, donc (X_1, X_1') est liée, absurde, alors $\dim \mathcal{V} = 1$.

B. Inégalité de Hilbert

6) Supposons que $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta &= \int_0^\pi \sum_{j=0}^{N} a_j e^{i(j+1)\theta} d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{N} \frac{a_j}{(j+1)i}[e^{i\pi(j+1)} - 1] \\
&= -i\sum_{j=0}^{N} \frac{a_j}{(j+1)}[(-1)^{j+1} - 1]
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^1 P(t)dt\right| &= \left|\sum_{j=0}^{N} \frac{a_j}{(j+1)}[1 - (-1)^{j+1}]\right| \\
&= \left|\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|d\theta
\end{aligned}$$

Donc ${}^TXH_nX = \int_0^1 |\widetilde{X}(t)|^2dt \leq \int_{-1}^1 |\widetilde{X}(t)|^2dt \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2d\theta$

7) Or

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2d\theta &= \int_0^\pi \sum_{0\leq j,k\leq(n-1)} x_jx_ke^{i(j-k)\theta}d\theta \\
&= \sum_{0\leq j\neq k\leq(n-1)} x_jx_k\frac{1}{(j-k)}((-1)^{j-k} - 1) + \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2\pi
\end{aligned}$$

et $\sum_{0\le j\neq k\le(n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)}((-1)^{j-k}-1) = \sum_{0\le j<k\le(n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)}((-1)^{j-k}-1) + \sum_{0\le k<j\le(n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)}((-1)^{j-k}-1) = 0$ car en échangeant les roles des derniers indices, la parenthèse $((-1)^{j-k}-1)$ ne change mais $\frac{1}{(j-k)}$ devient $-\frac{1}{(j-k)}$, donc $\int_0^{\pi} |\widetilde{X}(e^{i\theta})|d\theta \le \pi \|X\|^2$, alors :

$$^{T}XH_nX \le \pi \|X\|^2$$

8) Si $X \in \mathcal{V}$ non nul, alors $^{T}XH_nX = \rho_n \|X\|^2 \le \pi \|X\|^2$, donc $\rho_n \le \pi$, la suite est donc majorée.

Soit $X_n \in \mathcal{V}$ tel que $X_n \neq 0$, et soit $X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}$, alors

$\rho_n \|X_n\|^2 = ^{T} X_nH_nX_n = ^{T} XH_{n+1}X \le \rho_{n+1} \|X\|^2 = \rho_{n+1} \|X_n\|^2$

Alors $\rho_n \le \rho_{n+1}$, la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, comme elle est majorée donc converge.

C. Un opérateur intégral

9) K_n est une fonction polynômiale donc bornée sur $[0,1]$, si $f \in E$, alors K_nf est continue et intégrable sur $[0,1[$, T_n est donc une application de plus, $T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^1 t^k f(t)dt\right)x^k$, donc $T_n(f) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc $T_n(f) \in E$, T_n est linéaire c'est simple.

On remarque $T_n(E) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$, or E est de dimension infinie, et $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ est de dimension finie, donc l'application T_n n'est pas injective, donc $\exists f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = 0$, donc 0 est une valeur propre de T_n.

Autre méthode : posons $f(t) = \left[(t(t-1))^n\right]^{(n)}$ convient aussi car elle vérifie $\forall k \in \{0,1,..,(n-1)\}$, $\int_0^1 t^k f(t)dt = 0$.

10) $T_n(\widetilde{X})(x) = \int_0^1 (\sum_{k=0}^{n-1} x^k t^k)(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k)dt = \sum_{0\le i,j\le(n-1)} x^i x_j \int_0^1 t^{i+j}dt = \sum_{0\ i,j\le(n-1)} \frac{x^i x_j}{i+j+1}$

Donc $T_n(\widetilde{X})(x) = (x_0,...,x_{n-1})H_n \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} = (1,...,x^{n-1})H_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$

H_n est définie positive, donc 0 n'est pas une valeur propre de H_n, par contre 0 est une valeur propre de T_n.

Soit λ une valeur propre de H_n, donc $\exists X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $H_n X = \lambda X$, dans l'égalité précédente, on remplace et $T_n(\widetilde{X})(x) = \lambda(1,...,x^{n-1})X = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} x_j x^j = \lambda \widetilde{X}(x)$, donc :

$$T_n(\widetilde{X}) = \lambda \widetilde{X}$$

Alors λ est une valeur propre de T_n car $\widetilde{X} \neq 0$.
Maintenant si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de T_n, donc $\exists f \in E$ non nul tel que $T_n(f) = \lambda f$, comme $\lambda \neq 0$, alors $f = \dfrac{1}{\lambda} T_n(f) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc f est une fonction polynômiale, posons $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j x^j = \widetilde{X}(x)$, alors $T_n(\widetilde{X})(x) = \lambda \widetilde{X}(x) = \langle (1,x,...,x^{n-1}) | \lambda X \rangle$, or $T_n(\widetilde{X})(x) = \langle (1,x,...,x^{n-1}) | H_n X \rangle$, donc :
$H_n X - \lambda X \in [\mathrm{Vect}(1,x,...,x^{n-1})]^{\perp}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Posons $F_x = (1,x,...,x^{n-1})$, et soient $a_1, a_2, ...a_n$ des réels distincts deux à deux, alors :
$H_n X - \lambda X \in [\mathrm{Vect}(F_{a_1},...,F_{a_n})]^{\perp}$ dans $\mathbb{R}^n$, or la famille $(F_{a_1},...,F_{a_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ par Vandermonde, donc $H_n X - \lambda X = 0$, alors λ est une valeur propre de H_n.
Remarque Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors X est un vecteur propre de H_n associé à λ si et seulement si $\widetilde{X}$ est un vecteur propre de T_n associé à λ.

11) Soit $f \in E$ non nul tel que $T_n(f) = \rho_n f$, on a déjà montrer que f est une fonction polynômiale car $\rho_n \neq 0$, posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k$ alors $H_n X = \rho_n X$ où $X \in \mathbb{R}^n$ de composantes $x_0, ...x_{n-1}$, on a par la question 3), $H_n |X| = \rho_n |X|$, posons $\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k| x^k$; on a bien ψ est strictement positive sur $]0,1[$ et les x_k sont tous non nuls par la question 4), donc $\dfrac{1}{\psi}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, donc $\psi \in \mathscr{A}$ et $T_n(\psi) = \rho_n \psi$, donc
$\forall x \in [0,1], \rho_n = \dfrac{1}{\psi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\psi(t)dt$, alors $\rho_n = \sup_{x \in]0,1[} \dfrac{1}{\psi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\psi(t)dt$, donc inf est atteint et il y'a donc égalité dans l'inégalité suivante :

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt$$

L'inégalité est laissé au lecteur.

Une majoration explicite des rayons spectraux

12) $\forall x \in]0,1[$, l'application $t \longmapsto \dfrac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)}$ est continue sur $[0,1]$ (φ se comporte comme une fonction continue sur $[0,1]$).

$\forall t \in [0,1]$, l'application $x \longmapsto \dfrac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)} = \dfrac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}$.

$\forall x \in]0,1[$ l'application $t \longmapsto \dfrac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}$ est continue sur $[0,1]$.

Donc J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. et

$\forall x \in]0,1[, J_n'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt.$

Alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt - J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} - \frac{t^n(1-tx)\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt = xJ_n(x).$

13) En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-t}{1-tx}\varphi'(t)dt &= \left[\frac{1-t}{1-tx}\varphi(t)\right]_0^1 - (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt \\ &= -\varphi(0) + (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt\end{aligned}$$

Alors $0 = \varphi(0) + (x-1)\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt + \int_0^1 \frac{1-t}{1-tx}\varphi'(t)dt$

Ici $c = \varphi(0)$.

Toujours une intégration par parties donne dans le cas de $n \geq 1$:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-tx}\varphi'(t)dt = -\int_0^1 \frac{nt^{n-1}(1-xt) - nt^n(1-xt) + (x-1)t^n}{(1-xt)^2}\varphi(t)dt$, Donc

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-tx}\varphi'(t)dt + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt + nJ_{n-1} - nJ_n = 0$

Alors $c = 0$.

14) En remplaçant $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}dt$ par $xJ_n'(x) + J_n(x)$ dans la question 13) et en remarquant que $nJ_{n-1}(x) = n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)dt + nxJ_n(x)$, on obtient le résultat.

15) Sur $[0,1[$, l'équation différentielle donnée est équivalente à $y' = \dfrac{-\gamma}{1-t}y$ dont l'ensemble des solutions est l'ensemble des applications $y \longmapsto \lambda(1-t)^\gamma$. Pour qu'une solution vérifie les conditions sur φ il faut et il suffit que $\lambda > 0$ et $\gamma \leq 0$ et $\gamma + 1 > 0$.

La condition voulue est donc $-1 < \gamma \leq 0$ et $\lambda > 0$.

16) Alors $\varphi(t) = (1-t)^\gamma$.

φ et J_n sont dérivables sur $]0,1[$, donc ϕ_n aussi, et

$\phi_n'(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}(nx^{n-1}J_n(x)+x^nJ_n'(x)) - x^nJ_n(x)\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = n\dfrac{\phi_n(x)}{x} + \dfrac{x^nJ_n'(x)}{\varphi(x)} + \dfrac{\gamma}{(1-x)^{\gamma+1}}x^nJ_n(x)$,

Alors $\phi_n'(x) = (\dfrac{n}{x} + \dfrac{\gamma}{1-x})\phi_n(x) + \dfrac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}[x(1-x)J_n'(x)]$

Et puisque $(1-t))\varphi'(t) = -\gamma\varphi(t)$, et par application de la question 14, alors

$\phi_n'(x) = (\dfrac{n}{x}+\dfrac{\gamma}{1-x})\phi_n(x)+\dfrac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left[c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,dt-\gamma J_n(x)\right]$.

Donc $\phi_n'(x) = (\dfrac{n}{x}+\dfrac{\gamma}{1-x})\phi_n(x)-\dfrac{(n+1)}{x}\phi_n(x)-\dfrac{\gamma}{x(1-x)}\phi_n(x)+\dfrac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left[c+n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,dt\right]$.

Et puisque $\dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$, alors :

$\phi_n'(x) = -(\gamma+1)\dfrac{\phi_n(x)}{x} + c_n\dfrac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$

où $c_n = c+n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,dt = c+n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{(\gamma+1)-1}\,dt = c+n\frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}$.

Or $\Gamma(n+\gamma+1) = (n+\gamma)((n+\gamma-1)...(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1))$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$c_n = c+n\dfrac{(n-1)!}{(n+\gamma)((n+\gamma-1)...(\gamma+1)} = c+\dfrac{n!}{(n+\gamma)((n+\gamma-1)...(\gamma+1)}$ et $c_0 = c = \varphi(0) = 1$.

17) Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = -(\gamma+1)y+c_n\dfrac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$ sont de la forme $x \longmapsto \dfrac{c_n}{x^{1+\gamma}}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,dt + \frac{\lambda}{x^{1+\gamma}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et puisque $\phi_n(0) = 0$, alors $\lambda = 0$ et $\phi_n(x) = \dfrac{c_n}{x^{1+\gamma}}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,dt$.

18) On a :

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{(1-x)^\gamma}\int_0^1 K_n(xt)(1-t)^\gamma\,dt \\
&= \frac{1}{(1-x)^\gamma}\int_0^1 \frac{1-(xt)^n}{1-xt}(1-t)^\gamma\,dt \\
&= \frac{1}{(1-x)^\gamma}\int_0^1 \frac{1}{1-xt}(1-t)^\gamma\,dt - \frac{x^n}{(1-x)^\gamma}\int_0^1 \frac{t^n}{1-xt}(1-t)^\gamma\,dt \\
&= \phi_0(x)-\phi_n(x)
\end{aligned}$$

Or $\varphi(0) = 1 = c_0$, alors :

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\,dt - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,dt \\
&= \frac{1}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{1-c_nt^n}{t^{-\gamma}(1-t)^{1+\gamma}}\,dt
\end{aligned}$$

On prend $\alpha = -\gamma$ et $\theta_n = c_n$, par la question 11) $\rho_n(x) \leq \sup\limits_{x\in]0,1[} \dfrac{1}{\varphi(x)}\displaystyle\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in \mathscr{A}$, en particulier pour $\varphi(t) = (1-t)^\gamma$. On a $\rho_n \leq \sup\limits_{x\in]0,1[} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1-c_nt^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}dt$ et l'inégalité est vrai pour tout $\alpha \in]0,1[$, alors $\rho_n(x) \leq \inf\limits_{\alpha\in]0,1[} \sup\limits_{x\in]0,1[} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1-c_nt^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}dt$

19) Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ dans l'égalité admise et puisque dans ce cas :

$\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})....(n-\frac{1}{2})} = \dfrac{n!}{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}} = \dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}$, donc $\theta^{\frac{1}{2n}} = 2\left(\dfrac{n!^2}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} = \omega_n$

et puisque $\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = \dfrac{2}{\sqrt{4t-4t^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}$, alors;

$t \longmapsto \arcsin(2t-1) = 2\arcsin(\sqrt{t}) - \pi$ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, alors :

$$\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$$

20) Par stirling

$$\begin{aligned}\omega_n^{2n} &\underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n}\frac{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}}{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}\end{aligned}$$

Donc
$\omega_n \underset{n\to+\infty}{=} (\sqrt{\pi n}+o(\sqrt{n}))^{\frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{2n}\ln(\sqrt{\pi n}+o(\sqrt{n}))} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\dfrac{\ln(n\pi)}{4n}+o(\dfrac{\ln(n\pi)}{4n})$

Donc un équivalent de $\omega_n - 1$ quand $n \to +\infty$ est $\dfrac{\ln(n\pi)}{4n}$ ou $\dfrac{\ln(n)}{4n}$.

Donc $\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour les remarques sadikoulmeki@yahoo.fr
Omar SADIK CPGE My Driss Fès.