DM n$^{\text{o}}$6

Premier exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels non nuls. On pose pour tout entier naturel n, $P_n := \prod_{k=0}^{n} a_k$.

Nous dirons que le produit infini associé, noté $\prod a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite *non nulle.*

1. Montrer que si $\prod a_n$ converge alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée.
   Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 1$.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ soit définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Nous attirons l'attention sur le fait que des expressions du type $\ln\left(\prod a_n\right)$ **ou** $\exp\left(\sum \ln(1+u_n)\right)$ **sont dépourvues de sens. On travaillera avec des produit et des somme partiels.**

3. On suppose en plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
   Étudier la nature du produit $\prod\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ et retrouver la nature de la série harmonique.

4. On ne suppose plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulemement si la série $\sum u_n^2$ converge.

Deuxième exercice

Fonctions convexes

Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$ convexe et ouverte et non vide.

Définition. *Une application f de C dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout couple (x, y) de points de C et tout élément t de* $]0,1[$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si de plus l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe.

1. Soit f une application de Ω de $\mathbf{R}^n$. Pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on note $I_{a,\vec{x}}$ l'ensemble des réels t tels que $a + t\vec{x} \in \Omega$, et $g_{a,\vec{x}}$ l'application

$$g_{a,\vec{x}}\ :;\ I_{a,\vec{x}} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto f(a+t\vec{x}).$$

   (a) Montrer que pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

   (c) On suppose de plus f différentiable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

      i. f est convexe ;

ii. Pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, $\mathrm{d}f(x) \cdot (y-x) \leq \mathrm{d}f(y) \cdot (y-x)$;
iii. Pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x) \cdot (y-x)$.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable). Montrer que f est convexe si et seulement si : Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

(a) Montrer que si $f_{|C}$ admet en un point c de C un minimum local, alors pour tout d élément de C,

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d-c) \geq 0.$$

(b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i. $f_{|C}$ atteint en un point u de C son minimum.
ii. Pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$.

3. Soit f une application strictement convexe de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

(a) Montrer que f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum si et seulement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle.

(b) On suppose que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$.
Montrer que ∇f est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.

Troisième exercice

Polynômes de Bernoulli

Nous considérerons la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ nous noterons, S sa somme, et pour tout entier n, strictement positif, R_n le reste d'ordre n et S_n la somme partielle d'ordre n.

1. En comparant la série et une intégrale donner l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

2. Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = S_n + \frac{1}{2\,(n+1)^2}$$

Pour quelle valeurs de l'entier n a-t-on :

$$|S - x_n| \leq 10^{-6}$$

3. Nous nous proposons de trouver une suite qui converge plus vite vers S que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4. (a) Montrer que les relations suivantes définissent une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$
$$P_n'(X) = P_{n-1}(X)\,, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*; \tag{2}$$
$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*. \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3. Montrer que $P_3(\frac{1}{2}) = 0$, en déduire que pour tout réel x élément de $[0,1]$,

$$|P_3(x)| \leq \frac{1}{24}.$$

(b) Soit f une application numérique, définie sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \tfrac{1}{12}(f'(1)-f'(0)) - \int_0^1 P_3(x) f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. En appliquant la formule précédente à l'application $f : [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{(k+x)^3}$, pour tout entier k supérieur ou égal à n, montrer que :

$$R_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Plus précisément, montrer que :

$$\left| S - \left(S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} \right) \right| \leq \frac{1}{2n^5}.$$

Donner une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

.

MP* Lycée Kerichen **2020-2021**

Indication pour le DM n°6

Premier exercice

1. Considérer $\frac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
2. Comme $a_n = 1 + u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $a_n > 0$ et donc $\ln(1+u_n)$ est bien défini.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$\prod_{p=0}^{n} a_p = K \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(1+u_p)\right), \tag{6}$$
   avec $K = \prod_{p=0}^{n_0-1} a_p$, ou de façon équivalente,
   $$\ln\left(\prod_{p=0}^{n} a_p\right) - \ln(K) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(1+u_p). \tag{7}$$
   - Supposer que la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.
   - Supposer ensuite que le produit $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.

3. • Supposer que le produit infini $\prod(a_n)$ converge.
   et utiliser
   $$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n, \tag{8}$$
   • Supposer ensuite que la série converge.
   Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$
4. On a, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, $\ln(1+u_n) = u_n + \alpha_n$, où $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n^2$....

Deuxième exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
   Considérer $\phi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ ;\ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que
   $$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$
   Noter que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a+\mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.
   • $0 \in I_{a,\vec{x}}$ puisque $\phi(0) = a$.
   • $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ comme image réciproque de l'ouvert Ω, par ϕ continue.
   • l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes....

   (b) • Hypothèse : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*
   Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0,1]$.
   $$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = ...$$
   Doù la convexité de f.
   • Hypothèse : *Supposons f convexe .*
   Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
   Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0,1]$.
   $$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a + t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a + t_2\vec{x})).$$
   ....

   Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

   (c) • *Supposons i.*
   Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\vec{xy}}$ est définie sur $[0,1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ......
   Pour tout $t \in [0,1]$
   $$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x + ty - x) \cdot y - x.$$
   La convexité de $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ donne ii.
   • *Supposons ii.*
   Soit $(x,y) \in \Omega^2$.
   $$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = ...$$

D'où iii.

• *Supposons iii.*
Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a+t_2\vec{x}) - f(a+t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a+t_1\vec{x}) \cdot ((t_2-t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a+t_2\vec{x}) - f(a+t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a+t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

En inversant les rôles on peut montrer

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe ... Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable).
Soit $x \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$. On considère l'application

$$\chi \ : \ I_{x,\vec{h}} \to \mathbf{R}^n\,;\ t \mapsto x + t\vec{h}.$$

Ainsi : $g_{x,\vec{h}} = f \circ \chi$. Par composition g est dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$,

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = \mathrm{d}f(\chi(t)) \cdot \vec{h},$$

Soit en notant B l'application bilinéaire

$$B \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n\,;\ (\ell, \vec{x}) \mapsto \ell(\vec{x})$$

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{h}).$$

Or $\mathrm{d}f$ est différentiable et χ aussi, donc $\mathrm{d}f \circ \chi$ est différentiable, c'est-à-dire dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$:

$$(\mathrm{d}f \circ \chi)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(\chi(t)) \cdot \chi'(t) = \mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}.$$

L'application constante égale à $\vec{h}$ est aussi trivialement dérivable. Donc, d'après le cours, $g_{x,\vec{h}}$ est deux fois dérivable de dérivée en $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}, \vec{h}) + B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{0}) = \underbrace{(\underbrace{\mathrm{d}^2 f(\chi(t))}_{\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}))} \cdot \vec{h})}_{\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})} \cdot \vec{h} \ldots\ldots.$$

On en déduit que f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2(f(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h}) \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

(a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0,1]$, par convexité de C, est défini $f(c+t(d-c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

$$\frac{f(c+t(c-d))-f(c)}{t} \geq 0.$$

En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a le résultat.....

(b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C.

• Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$.

• Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$. Utiliser iii. dont la preuve n'a pas utilisé le fait que dans question 1. (c) ......

3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).

• Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.

(b) • D'abord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.
Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.

Supposons que $\vec{\nabla} f$ s'annule en un autre point x_1 de $\mathbf{R}^n$ montrer que la strict convexié conduit à une absurdité !

• A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. l'application $f_{\vec{h}}$ vérifie les même hypothèses que f...... (ch. exercice sur les fonctions convexes).

Correction du DM n°6

Premier exercice

1. Supposons que $\prod u_n$ converge. Il existe un réel non nul L tel que $P_n \underset{n\to+\infty}{\to} L$. En particulier $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne s'annule pas. Alors $P_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L$ et donc
$$u_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

2. Comme $a_n = 1 + u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $a_n > 0$ et donc $\ln(1+u_n)$ est bien défini.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\prod_{p=0}^{n} a_p = K \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(1+u_p)\right), \tag{9}$$
avec $K = \prod_{p=0}^{n_0-1} a_p$, ou de façon équivalente,
$$\ln\left(\prod_{p=0}^{n} a_p\right) - \ln(K) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(1+u_p). \tag{10}$$
• *Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.*
L'égalité (9) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(1+u_p)$ assurent la convergence de la suite $\left(\prod_{p=0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $K \exp\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1+u_n)\right)$, réel non nul puisque $K \neq 0$ (les a_n, ne sont pas nuls). Donc $\prod a_n$ converge.
• *Supposons que le produit $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.*
Alors d'après (10) et la continuité du logarithme en $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$, réel non nul, on déduit que la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge de somme $\ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty} a_n\right) - \ln(K)$.
D'où le résultat.

3. • *Supposons que le produit infini $\prod(a_n)$ converge.*
Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 + u_n > 0$, la question 2. dit que $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.
Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (cf. 1.) ce qui du reste est supposé réalisé par l'énoncé, donc
$$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n, \tag{11}$$

Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

• *Supposons que la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc (11) est vérifiée et donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge. La question 2 assure donc que le produit $\prod a_n$ converge.

Conclusion :

le produit infini $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n}\frac{p+1}{p} = \frac{2\times 3\times 4\times\cdots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n} = n+1,$$

donc

$$\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

Autrement dit le produit $\prod\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$ diverge, et donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ diverge.

4. On a, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, $\ln(1+u_n) = u_n + a_n$, où $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n - \frac{1}{2}u_n^2$. Comme $\sum u_n$ converge $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge si et seulement si converge $\sum a_n$, c'est-à-dire si et seulement si converge $\sum u_n^2$. Donc par la question 2, $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n^2$ converge.

Deuxième exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
   Posons $\phi\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n\,;\ t\mapsto a+t\vec{x}$, de sorte que

$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$

   Notons que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a+\mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.

   • $0 \in I_{a,\vec{x}}$ puisque $\phi(0) = a$.

   • $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ comme image réciproque de l'ouvert Ω, par ϕ continue.

   • l'intersection de la droite $a+\mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes , donc *a fortiori* connexe par arcs, mais $I_{a,\vec{x}}$ est l'image direct par ψ, application continue, de $a+\mathbf{R}\vec{x}\cap\Omega$, donc lui-même connexe par arcs, donc un intervalle de $\mathbf{R}$.

   Nous avons prouvé : $\underline{I_{a,\vec{x}}\text{ est un intervalle ouvert contenant } 0.}$

   (b) • HYPOTHÈSE : *pour tout* $a\in\Omega$ *et tout* $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ *est convexe.*
   Soient p et q des points de Ω et $\lambda\in[0,1]$.

$$f(\lambda p+(1-\lambda)q) = f(q+\lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda\times 1+(1-\lambda)\times 0).$$

Donc par convexité de $g_{q,\overrightarrow{qp}}$ voila que :

$$f(\lambda p+(1-\lambda)q) \leq \lambda g_{q,\overrightarrow{qp}}(1)+(1-\lambda)g_{q,\overrightarrow{qp}}(0) \leq \lambda f(p)+(1-\lambda)f(q).$$

Doù la convexité de f.

• HYPOTHÈSE : *Supposons f convexe .*
Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0,1]$.

$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a+t_1\vec{x})+(1-\lambda)(a+t_2\vec{x})).$$

La convexité de f nous assure que :

$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(a+t_1\vec{x})+(1-\lambda)f(a+t_2\vec{x}) = \lambda g_{a,\overrightarrow{x}}(t_1)+(1-\lambda)g_{a,\overrightarrow{x}}(t_2).$$

Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

<u>Donc f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.</u>

(c) • *Supposons i.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est définie sur $[0,1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ composée de f différentiable et de l'application affine donc dérivable,

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\,;\ t \mapsto x+t\overrightarrow{xy}$$

est dérivable et pour tout $t \in [0,1]$

$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x+ty-x)\cdot y-x.$$

Donc

$$\mathrm{d}f(x)\cdot(y-x) = g'_{x,\overrightarrow{xy}}(0) \leq g'_{x,\overrightarrow{xy}}(1) = \mathrm{d}f(y)\cdot(y-x).$$

D'où ii.
• *Supposons ii.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$.

$$f(y)-f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1)-g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(x+t(y-x)\cdot(y-x)\mathrm{d}t.$$

mais par ii., pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathrm{d}f(x)\cdot(t(y-x)) \leq \mathrm{d}f(x+t(y-x))\cdot(t(y-x)),$$

donc

$$f(y)-f(x) \geq \int_0^1 \mathrm{d}f(x)\cdot(y-x)\mathrm{d}t = \mathrm{d}f(x)\cdot(y-x).$$

D'où iii.
• *Supposons iii.*
Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a+t_2\vec{x})-f(a+t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a+t_1\vec{x})\cdot((t_2-t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

En inversant les rôles de $t_2 x$ et t_1, on obtient :

$$f(a + t_1\vec{x}) - f(a + t_2\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_2\vec{x}) \cdot ((t_1 - t_2)\vec{x}),$$

soit puisque $t_1 - t_2 < 0$,

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_1) - g_{a,\vec{x}}(t_2)}{t_1 - t_2} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2).$$

Finalement

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe. Comme a et $\vec{x}$ sont quelconques f est convexe (cf. (b)). Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable).
Soit $x \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$. On considère l'application

$$\chi \ : \ I_{x,\vec{h}} \to \mathbf{R}^n \, ; \ t \mapsto x + t\vec{h}.$$

Ainsi : $g_{x,\vec{h}} = f \circ \chi$. Par composition g est dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$,

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = \mathrm{d}f(\chi(t)) \cdot \vec{h},$$

Soit en notant B l'application bilinéaire

$$B \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \, ; \ (\ell, \vec{x}) \mapsto \ell(\vec{x})$$

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{h}).$$

Or $\mathrm{d}f$ est différentiable et χ aussi, donc $\mathrm{d}f \circ \chi$ est différentiable, c'est-à-dire dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$:

$$(\mathrm{d}f \circ \chi)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(\chi(t)) \cdot \chi'(t) = \mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}.$$

L'application constante égale à $\vec{h}$ est aussi trivialement dérivable. Donc, d'après le cours, $g_{x,\vec{h}}$ est deux fois dérivable de dérivée en $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}, \vec{h}) + B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{0}) = \underbrace{(\underbrace{\mathrm{d}^2 f(\chi(t))}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))} \cdot \vec{h})}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})} \cdot \vec{h}$$

• Supposons f convexe, alors $g_{x,\vec{h}}$ l'est aussi et donc sa dérivée croît et donc pour tout $t \in I_{x,\vec{h}}$

$$(\mathrm{d}^2 f(x + t\vec{h}) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} = g''_{a,\vec{h}}(t) \geq 0,$$

en particulier : $(\mathrm{d}^2 f(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} \geq 0.$

• Supposons $(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot \vec{k})\cdot \vec{k} \geq 0$, pour tout $a \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$.
Alors, d'après ce qui précède, pour tout $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = (\mathrm{d}^2 f(x+t\vec{h})\cdot \vec{h})\cdot \vec{h} \geq 0.$$

Donc $g'_{x,\vec{h}}$ croît et donc $g_{x,\vec{h}}$ est convexe et partant, comme x et $\vec{h}$ sont quelconque, f est convexe.

Concluons : f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2(f(x)\cdot \vec{h})\cdot \vec{h}) \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0,1]$, par convexité de C, est défini $f(c+t(d-c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

$$\frac{f(c+t(c-d))-f(c)}{t} \geq 0.$$

   En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a : $\mathrm{D}_{\vec{cd}} f(c) \geq 0$, ou, autrement dit

$$\mathrm{d}f(c)\cdot(d-c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   • Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u)\cdot(v-u) \geq 0$.

   • Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u)\cdot(v-u) \geq 0$.
   Alors la convexité de $f_{|C}$ et 1.(c) iii. donne que pour tout $v \in C$,

$$f(v) - f(u) \geq \mathrm{d}f(u)\cdot(v-u) \geq 0,$$

   en effet la preuve de iii. n'a pas utilisé le fait que dans question 1. (c) Ω était ouvert.
   Donc $f_{|C}$ atteind en u son minimum.
   D'où l'équivalence demandée.

3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).

   • Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.

   (b) • D'abord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieure à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule fermé B de centre 0 et de rayon R. Mais f_B étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.
   Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.

   Supposons que $\vec{\nabla} f$ s'annule en un autre point x_1 de $\mathbf{R}^n$, alors par (a)

$$f(x_1) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) = f(x_0).$$

Mais la stricte convexité de f exigerait que $f\left(\frac{1}{2}(x_0+x_1)\right)$ fût strictement inférieur à

$$\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_1)=\min_{x\in\mathbf{R}^n}f(x),$$

ce qui est absurde.
Concluons : $\vec{\nabla}f$ s'annule en un et un seul point de $\mathbf{R}^n$.
• A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}}=f-\frac{1}{2}\langle\vec{h}|\cdot\rangle$. D'une part $f_{\vec{h}}$ est strictement convexe car f l'est et $-\frac{1}{2}\langle\vec{h}|\cdot\rangle$, lineaire, est convexe, d'autre part $\frac{\|f_{\vec{h}}(x)\|}{\|x\|}\to+\infty$, lorsque $\|x\|\to\infty$, en effet, pour tout $x\in\mathbf{R}^n$,

$$\left|\frac{\langle\vec{h}|x\rangle}{\|x\|}\right|\leq\|\vec{h}\|,$$

par Cauchy-Schwarz. Enfin $f_{\vec{h}}$ est $\mathcal{C}^1$ comme somme de telles fonctions et :

$$\nabla f_{\vec{h}}=\vec{\nabla}f-\vec{h}.$$

Donc le premier point dit qu'il existe un et un seul point x de $\mathbf{R}^n$ en lequel $\vec{\nabla}f_{\vec{h}}$ s'annule donc il existe un seul point en lequel $\vec{\nabla}f$ prend la valeur $\vec{h}$.

Donc $\underline{\nabla f \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^n \text{ sur } \mathbf{R}^n.}$

Troisième exercice