# DS n°7

## Étude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

## Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel $x$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

## I - Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

**Q1.** Montrer que la fonction $R$ est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

**Q2.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

**Q3.** Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

## II - Étude de la dérivabilité de $R$ en $0$

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour tout $h > 0$, on pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

**Q4.** Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi_h : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & f\left(\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array}.$$

**Q5.** Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t$.

**Q6.** Montrer que, pour tous $h \in ]0;1]$ et $t \in [1;+\infty[$, on a :

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

**Q7.** En déduire que

$$S(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Q8.** En déduire un équivalent de $R(x)$ quand $x$ tend vers $0$ par valeurs strictement positives.
La fonction $R$ est-elle dérivable en $0$ ?

## III - Formule sommatoire de Poisson

On note désormais $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.
Si $u$ est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt}\,\mathrm{d}t.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si $u$ et $v$ sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs $C_1$ et $C_2$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2}.$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}.$$

**Q9.** Montrer que la fonction $F$ est bien définie, $2\pi$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

**Q10.** Montrer que la fonction $G$ est bien définie, $2\pi$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

**Q11.** Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

**Q12.** Montrer que, pour tout réel strictement positif $a$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

## IV - Étude de la dérivabilité de $R$ en $\pi$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it^2}-1}{t^2} \text{ si } t \neq 0 \\ i \text{ si } t = 0 \end{cases}.$$

**Q13.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un développement en série entière.

**Q14.** Établir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.

**Q15.** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

**Q16.** Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2}.$$

**Q17.** En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes $a$ et $b$ tels que $F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2})$ quand $x \to 0$ par valeurs strictement positives.

Préciser la valeur de $b$, et exprimer $a$ en fonction de $I$.
(l'intégrale $I$ a été définie à la question 15)

**Q18.** Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x+\pi)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.

**Q19.** Déduire de ce qui précède que la fonction $R$ est dérivable en $\pi$, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

# V - Bonus

*Partie à destination des étudiants ayant, avant la fin de l'épreuve terminé, de traiter le sujet.*
Nous nous proposons d'établir l'égalité admise dans le sujet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Q20.** Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$, cette intégrale s'appelle intégrale de FRESNEL.

**Q21.** Soit $H$ la fonction de la variable réel $x$ définie par $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\mathrm{d}t$.

**Q22.** Montrer que $H$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**Q23.** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

**Q24.** Montrer que la restriction de $H$ à $\mathbb{R}_+$ est $\mathcal{C}^0$ et celle à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{C}^1$ .

**Q25.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$H'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}.$$

**Q26.** Montrer alors que $H(0) = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$.

**Q27.** En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$, puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.