# Révisions (induction et conduction thermique)

MP* LPK — À chercher en classe le jeudi 31 mars 2022

Extrait d'un sujet Centrale-Supélec 2011

## III Physique du skeleton

Le skeleton est un sport d'hiver qui se pratique dans un couloir de glace en pente : le coureur s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur des patins.

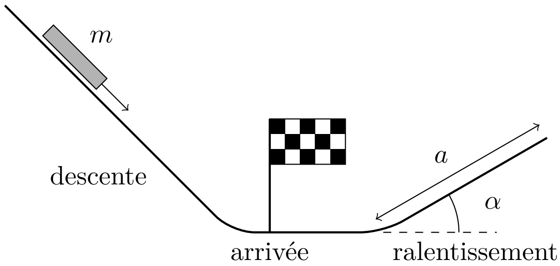


**Figure 6**

### *III.A – Question préliminaire*

L'ensemble coureur + skeleton est assimilé à un solide de masse $m = 100$ kg pouvant glisser sans frottement. Il franchit la ligne d'arrivée avec une vitesse $v_0$ et se ralentit simplement en montant une pente faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale. Déterminer la longueur $a$ de piste nécessaire au ralentissement.

Application numérique : on prendra $v = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et on considérera une pente de 5%.

L'infrastructure ne se prêtant pas à la réalisation d'une piste inclinée de décélération on envisage un autre type de freinage ; c'est ce freinage et ses conséquences que l'on va étudier dans la suite du problème.

### *III.B – Freinage du skeleton*

On fixe sous la planche un cadre métallique conducteur ayant la forme d'un rectangle de côtés $\ell \times L$.

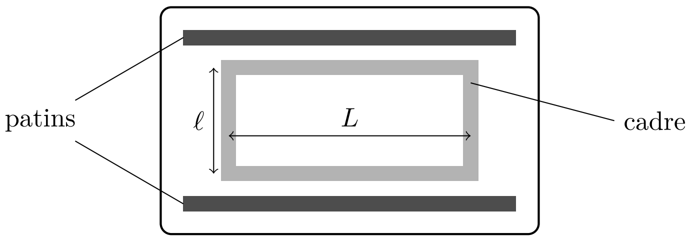


**Figure 7** Skeleton vu de dessous

La piste de décélération est horizontale ; on considérera un référentiel $(Oxyz)$ galiléen lié au sol : l'origine $O$ est prise au point d'arrivée, l'axe $Ox$ le long de la piste de décélération (qui correspond donc à $x > 0$), l'axe $Oy$ selon la verticale ascendante. Un dispositif adéquat crée un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ stationnaire et uniforme sur toute ou partie de la longueur de piste de décélération (et sur toute la largeur de la piste).

**III.B.1)** Le champ magnétique est étendu à toute la zone $x > 0$.

*a)* La position du cadre est repérée par l'abscisse $x$ de son extrémité avant et on suppose $x = 0$ à $t = 0$. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse $v = dx/dt$ ; on distinguera deux phases dans le mouvement.

Mettre en évidence un temps caractéristique $\tau$ que l'on exprimera en fonction de $B_0$, $m$, $\ell$ et $R$ (résistance du cadre).

 

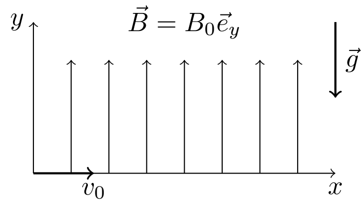


**Figure 8**

*b)* Déterminer $x(t)$ pendant la phase de décélération et montrer que l'engin ne stoppe qu'à condition que $L$ soit supérieure à une certaine valeur que l'on précisera. Montrer par une application numérique que ceci n'est pas réalisé et déterminer la vitesse finale du skeleton. En tout état de cause serait-il réaliste de n'envisager que ce freinage pour arrêter l'appareil ?

On donne : $\ell = 30$ cm, $L = 50$ cm, $B = 1{,}0$ T et $R = 1{,}0 \times 10^{-2}$ Ω.

**III.B.2)** On suppose à présent que le champ magnétique (stationnaire et uniforme) n'est non nul que dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = d$.

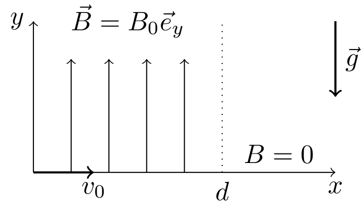


**Figure 9**

*a)* Si $L \geqslant d$, montrer qualitativement qu'il existe deux phases de freinage séparées par une phase où la vitesse reste constante et déterminer la vitesse à l'issue des deux phases de freinage.

*b)* Même question si $L \leqslant d$.

*c)* Quelle valeur doit-on donner à $d$, en fonction de $L$, pour optimiser le freinage ?

**III.B.3)** On place $N$ zones de freinage identiques à la précédente séparées les unes des autres d'une distance $D$. Quelle doit être la distance $D$ pour encore une fois optimiser le freinage ?

Quelle valeur donner à $N$ pour stopper le skeleton ? En déduire la distance d'arrêt et comparer sa valeur numérique aux valeurs trouvées à la **question III.B.1** et à la question préliminaire.

**III.B.4) Applications numériques**

*a)* Quelle est la durée de chaque phase de freinage ? Quelle devrait être la durée totale du freinage ? Conclusion ?

*b)* On peut alors choisir un freinage « hybride » : freinage électromagnétique d'abord jusqu'à ce que la vitesse soit $v_1 = 10$ m · s$^{-1}$, puis freinage mécanique ensuite. Déterminer la durée du freinage électromagnétique ainsi que le nombre de zones de champ nécessaire.

### *III.C – Refroidissement du cadre*

**III.C.1)** Dans un milieu homogène et isotrope caractérisé par sa masse volumique $\mu$, sa capacité thermique massique $c$ et sa conductivité thermique $\lambda$ établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit le champ de température $T$.

On se préoccupe de l'élévation de température dans le cadre consécutive au passage du courant.

**III.C.2)** On modélise les côtés du cadre comme des cylindres de rayon $a$ (et de section $s = \pi a^2$) dans lequel la température $T$ ne dépend que de $r$, distance à l'axe, et du temps $t$. Le cadre est en cuivre :

- de masse volumique $\mu = 8{,}9 \times 10^3$ kg · m$^{-3}$,
- de résistivité électrique $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω · m,
- de conductivité thermique $\lambda = 390$ W · K$^{-1}$ · m$^{-1}$,
- et de capacité thermique massique $c = 390$ J · K$^{-1}$ · kg$^{-1}$ ;
- sa section est $s = 1{,}0$ cm$^2$.

Donner et calculer le temps caractéristique des transferts thermiques dans le cylindre et comparer ce temps au temps d'arrêt de l'engin calculé à la question **III.B.4b**. Commenter.

Dans toute la suite du problème la température du cadre sera considérée comme uniforme : $T$ ne dépendant que du temps éventuellement.

**III.C.3)** Considérant qu'on puisse négliger les transferts thermiques vers l'extérieur pendant la phase d'échauffement, déterminer ainsi la variation de température $\Delta T$ du cadre en fonction de $m'$ (masse du cadre), $m$, $v_0$ et $c$ (on considérera, pour simplifier, que la vitesse est nulle à l'issue de la phase de freinage électromagnétique). On fera l'application numérique.

**III.C.4)** Après arrêt du skeleton le cadre se refroidit. Au cours de cette phase de refroidissement, la température $T_C$ du cadre est supposée uniforme mais dépendant du temps : $T_C(t)$ passe ainsi de $T_1$ à $T_0$ température de l'air, supposée uniforme et constante. Les transferts thermiques entre le cadre et l'air ont lieu selon un mode dit conducto-convectif ; il y a une discontinuité de température entre le cadre et l'air : la température $T_0$ est différente de $T_C$. La puissance thermique transférée vers l'air par unité de surface latérale du cylindre est $P_{\text{th}} = h(T_C - T_0)$ où $h$ est un coefficient supposé positif et constant.

*a)* Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $T_C(t)$ et donner le temps caractéristique du refroidissement en fonction des paramètres déjà introduits.

*b) Application numérique*

Déterminer ce temps avec $h = 10\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

**III.C.5)** On a l'idée d'entourer le cadre cylindrique d'un manchon isolant thermique. Le manchon isolant est de conductivité thermique $\lambda_{\text{is}}$ et de rayon $b$.

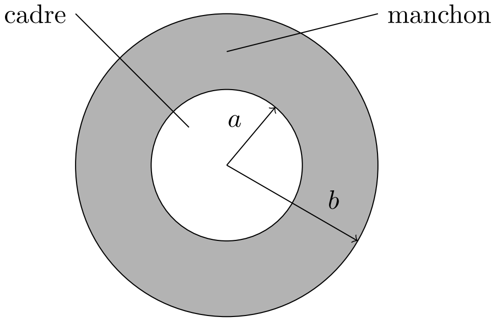


**Figure 10** Manchon isolant

*a)* On commence par raisonner en régime supposé permanent : la température du cadre est $T_C$ indépendante de $t$. Le champ de température dans l'isolant ne dépend que de $r$ : on note $T_{\text{is}}(r)$ la température dans l'isolant. Entre l'isolant et l'air (de température toujours supposée égale à $T_0$) existe encore un transfert thermique de type conducto-convectif possédant les mêmes caractéristiques que précédemment à ceci près que la température $T_C$ doit être remplacée par $T_{\text{is}}(b)$ : $P_{\text{th}} = h(T_{\text{is}}(b) - T_0)$. Ce mode de transfert n'existe pas entre le cadre et l'isolant, on a donc $T_{\text{is}}(a) = T_C$.

Établir l'équation différentielle vérifiée par $T_{\text{is}}(r)$ puis montrer que la puissance thermique $P$ cédée par l'unité de longueur du cadre peut s'écrire

$$P = K \frac{x}{1 + \frac{ha}{\lambda_{\text{is}}} x \ln x}$$

où $x = b/a$, $K$ étant une constante que l'on exprimera en fonction de $h$, $a$, $T_0$ et $T_C$. À quoi correspond cette constante $K$ ?

*b)* Tracer la courbe montrant la dépendance de $P$ avec $x$ ; on fera apparaître deux types de comportement possibles que l'on interprétera physiquement.

On donne $\lambda_{\text{is}} = 0{,}10\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ déterminer l'épaisseur d'isolant à placer pour que le refroidissement s'effectue le plus rapidement possible.

*c)* On suppose le régime quasi-permanent : les résultats précédents sont supposés pouvoir être appliqués à chaque instant. Déterminer le nouveau temps caractéristique du refroidissement du cadre lorsque l'isolant a l'épaisseur calculée ci-dessus.

• • • FIN • • •