DM n°1 facultatif

Devoir de vacances supplémentaire à l'usage des futurs $\frac{5}{2}$ préparant Centrale ou les Mines. Ce devoir est long et facile, il a le mérite de faire une bonne révision du programme d'algèbre linéaire de MPSI, il est abordable par les plus téméraires des futurs $\frac{3}{2}$.

TRANSVEXIONS, AUTOMORPHISMES DE $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

Notations

— Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2,
— $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
— Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n$ et tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on désigne par $m_{i,j}$ le coefficient de M situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.
— GL_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels inversible,
— SL_n désigne l'ensemble des élément de GL_n de déterminant 1.
— $\mathbf{E}$ désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, de dimension n,
— $\mathbf{E}^*$ désigne le dual de $\mathbf{E}$.
— $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ désigne une base de $\mathbf{E}$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ désigne sa base duale, c'est-à-dire que e_i^* est la i^{e} forme coordonnée dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, pour $i = 1, \ldots, n$.
— $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbf{E}$,
— $\text{GL}(\mathbf{E})$ désigne le groupe des automorphismes de $\mathbf{E}$,
— id désigne l'application identité sur $\mathbf{E}$,
— Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, $E_{i,j}$ est l'élément de de $\mathcal{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne,
— Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$ et tout réel λ non nul, $T_{i,j}(\lambda)$ désigne la matrice de transvection, $I_n + \lambda E_{i,j}$,
— Pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels, $\text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ désigne la matrice diagonale dont le terme sur la i^{e} ligne et la i^{e} colonne est $a_{i,i}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

Partie I
Générateurs de $\text{SL}_n(\mathbf{R})$

1. (a) Pour tout élément (i, j, h, k) de $\{1, \ldots, n\}^4$, calculer le produit matriciel $E_{i,j}E_{h,k}$.
   (b) Soient (i, j) et (h, k) des couples d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$ et λ et μ des réels non nuls. Calculer le produit matriciel $T_{i,j}(\lambda)T_{h,k}(\lambda)$.
   En déduire l'inversibilité et l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$.
2. Soient (i, j) un couple d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, λ un réel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n$. Pour tout élément k de $\{1, \ldots, n\}$ C_k désigne la k^{e} colonne de A et L_k sa k^{e} ligne.
   (a) Montrer que la matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ se déduite de A par une transformation élémentaire portant sur les colonnes de A que l'on précisera.
   (b) Doner un résultat analogue pour $T_{i,j}(\lambda)A$.

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$. On suppose que la première colonne ou la première ligne de A possède un élément non nul.
   Montrer qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels qu'en posant
   $$B = PAQ,$$
   i. $b_{1,1} = 1$;
   ii. $b_{i,1} = 0$, pour $i = 2, \ldots, n$;
   iii. $b_{1j} = 0$, pour $j = 2, \ldots, n$.
   Indication : On pourra envisager pour commencer le cas où $a_{1,1} = 1$.
4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$ de rang non nul r. Montrer qu'il existe deux éléments R et S de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels que : RAS soit diagonale égale soit à $\mathrm{diag}(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{r \text{ termes}}, 0 \ldots 0)$, soit à $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, d)$, avec $d = \mathrm{Det}(A)$, suivant que $r < n$ ou $r = n$.
   Indication : Le candidat a le choix entre démontrer ce résultat par récurrence, ou écrire en français un algorithme qui construit les matrices R et S.
5. (a) Montrer que SL_n est un sous-groupe de GL_n.
   (b) Déduire de la question 4. que l'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices de transvection d'ordre n engendre le sous groupe SL_n.
6. Petit théorème de Frobenius Zolotarev —
   On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n \geq 3$. Soit f une application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
   i. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$, $f(AB) = f(A)f(B)$;
   ii. Pour tout élément A de $\mathcal{M}_n$ diagonal, $f(A)$ est le produit des termes diagonaux.

   (a) Donner un exemple d'une telle application.
   (b) Soient a un réel non nul et (α, β) un couple d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Evaluer
   $$(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})(I_n + aE_{j,\beta})(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})^{-1}(I_n + aE_{j,\beta})^{-1}.$$
   (c) Calculer l'image par f d'une matrice T de transvection.
   (d) Déterminer f.

   Une forme forte du théorème de Frobenius-Zolotarev est la détermination des morphismes de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})\circ)$ *dans* $(\mathbf{C}^*, \times)$, *voir exercices d'algèbre linéaire.*

Partie II
Caractérisation de la Trace

1. Vérifier que l'application trace
   $$\mathrm{Tr} \ : \ \mathcal{M}_n \to \mathbf{R}, ; \ M \mapsto \mathrm{Tr(M)}$$
   est une forme linéaire, et que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$,
   $$\mathrm{Tr(AB)} = \mathrm{Tr(BA)}.$$
2. Soit σ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.
   (a) Montrer que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots n\}$, $\sigma(E_{i,j}) = 0$.

(b) Montrer que pour tout élément i de $\{1, \dots n\}$, $\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{1,1})$.

(c) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\sigma = \lambda \mathrm{Tr}$.

3. Soient $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$, avec A et B des éléments de $\mathcal{M}_n$,

$$\mathcal{C} = \mathrm{vect}\big((AB - BA)_{(A,B)\in\mathcal{M}_n^2}\big),$$

et $\mathcal{H}$ la droite vectorielle de $\mathcal{M}_n$ engendré par id.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans le noyau de Tr.

(b) Exhiber une famille libre de $\mathcal{C}$ de cardinal $n^2 - 1$.
Indication : on pourra considérer la base canonique de $\mathcal{M}_n$.

(c) Montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et que $\mathcal{M}_n = \mathcal{C} \oplus \mathcal{H}$.

4. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Soient (i, j) un couple d'éléments de $\{1, \dots n\}$ et (h, k) un couple d'éléments distincts de $\{1, \dots n\}$, calculer le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.

5. Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ tel que pour tout élément A de $\mathcal{M}_n$ et tout élément B de GL_n,

$$\theta(AB) = \theta(BA).$$

Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\theta = \lambda \mathrm{Tr}$.

Partie III
Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

On appelle automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, tout morphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans elle-même qui est bijectif. L'ensemble des automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sera noté $\mathcal{AUT}(E)$, on admet, fait trivial, que $\mathcal{AUT}(E)$ est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathcal{L}(E)$. Pour tout élément g de GL_n, on désigne par A_g l'application de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ qui à un élément u associe $g \circ u \circ g^{-1}$,

$$A_g \;:\; \mathcal{L}(\mathbf{E}) \to \mathcal{L}(\mathbf{E}), ;\; u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}.$$

1. (a) Montrer que pour tout élément g de GL_n, A_g est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$, un tel automorphisme est dit intérieur.
Montrer que

$$\chi \;:\; \mathrm{GL}_n \to \mathcal{AUT}(\mathbf{E}) \,;\; g \mapsto A_g$$

est un morphisme du groupe $\mathcal{GL}(E)$ dans le groupe $\mathcal{AUT}(E)$. L'application χ est elle injective ?

2. (a) Soit g un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, la famille $(x, g(x))$ soit liée. Montrer que g est élément de $\mathcal{H}$.

(b) Déduire de la sous-question précédente le noyau de χ.

3. Soit $(\phi, \vec{x})$ un élément de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$, on définit l'application

$$u_{\phi,\vec{x}} \;:\; \mathbf{E} \to \mathbf{E} \,;\; \vec{y} \mapsto \phi(\vec{y})\vec{x}.$$

On admettra, résultat évident, qu'une telle application est un endomorphisme.

(a) Déterminer l'image et le noyau de $u_{\phi,\vec{x}}$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(\phi, \vec{x})$ pour que $u_{\phi,\vec{x}}$ soit un projecteur non nul.

4. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $u_{i,j} = u_{e_j^* \vec{e}_i}$.
   (a) Soient i, j, h, k des éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.
   (b) Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\{1,n\}^2}$
5. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de $\mathbf{E}$. On définit sur $\mathcal{P}$ la relation $\prec$ par, pour tout p et tout q éléments de $\mathcal{P}$, $p \prec q$ si $p = p \circ q = q \circ p$.
   (a) Montrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Est-ce une relation d'ordre totale ?
   (b) On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$, tout élément p de $\mathcal{P}$ tel que pour tout élément q de $\mathcal{P}$, si $q \prec p$ alors $q = p$.
   Soit p un élément de $\mathcal{P}$. Etablir l'équivalence des énoncés suivants :
      i. p est de rang 1 ;
      ii. p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$;
      iii. Il existe un élément $(\phi, \vec{x})$ de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$ tel que : $p = u_{\phi,\vec{x}}$ et $\phi(\vec{x}) = 1$.
6. Soient A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ et p un élément de $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que $A(p)$ est un projecteur.
   (b) On suppose que p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$. Montrer $A(p)$ est encore un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$.
   (c) En déduire qu'il existe une famille $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2 \ldots \vec{\epsilon}_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}$ et une famille $(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}^*$ telle que, pour tout élément i de $\{1, \ldots, n\}$:
      i. $\phi_i(\vec{\epsilon}_i) = 1$;
      ii. $A(u_{i,i}) = u_{\phi_i,\vec{\epsilon}_i}$.
   (d) Calculer pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, $\phi_i(\vec{\epsilon}_j)$.
   Que peut-on en déduire sur les familles $(\vec{\epsilon}_1, \ldots \vec{\epsilon}_n)$ et $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$?
7. Soit un couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$.
   (a) pour tout élément k de $\{1, \ldots n\}$ distinct de j calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_k}$.
   En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.
   (b) Calculer $A(u_{i,j}) \circ A_(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,i})$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que : $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j,\vec{\epsilon}_i}$
8. Soient i, j et k des éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
   En déduire que $\lambda_{i,j} = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.
9. (a) Montrer qu'il existe une base $(\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n)$ de $\mathbf{E}$, telle que si $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ désigne sa base duale, alors, pour tout élément (i, j) de $\{1, \ldots, n\}$,

$$A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*,\vec{\alpha}_i}.$$

   (b) Posons g l'automorphisme de $\mathbf{E}$ qui envoie la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ sur la base $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, alors A et A_g coïncident sur la base $(u_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$, d'après (a), donc $A = A_g$.
   (c) Tout automorphisme de $\mathcal{L}$ est intérieur.

$\star \quad \star$

$\star$