ÉCOLE POLYTECHNIQUE ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2017 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES – A – (XLCR)

(Duré: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Dans tout le problème
• E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
• Id est l'application identité sur E: $\mathrm{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$,
• $\mathrm{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E,
• $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E,
• $E^* = \mathrm{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E,
• $\mathrm{A}(E)$ est l'espace vectoriel des applications $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ qui sont bilinéaires et anti-symétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit $(x, y, z) \in E^3$ et quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\omega(\lambda x + y, z) = \lambda\omega(x, z) + \omega(y, z)\,, \qquad \omega(x, \lambda y + z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z)\,,$$

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x)\,.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{cccc} \omega(x,\cdot): & E & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \omega(x,y) \end{array}\right.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$, on note φ_ω l'application linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{cccc} \varphi_\omega: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array}\right.$$

Un élément ω de $\mathrm{A}(E)$ est appelé **forme symplectique sur** E si φ_ω est un isomorphisme de E sur E^*.
Un élément J de $\mathrm{L}(E)$ est appelé **structure complexe sur** E s'il vérifie $J^2 = -\mathrm{Id}$.
On dit qu'une forme symplectique ω sur E **dompte** une structure complexe J si $\omega(x, J(x)) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On note
• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
• $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients réels,
• I_n la matrice unité de taille n,
• lorsque n est pair, J_n la matrice carrée de taille n définie par blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

• det l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
• ${}^tM$ la transposée de la matrice M.
On identifie tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un nombre réel.

La partie I est utilisée dans les parties III et IV. Les parties II et III indépendantes entre elles, sont utilisées dans la partie IV.

Partie I: Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n.

2. Montrer que $\omega(x,x)=0$ pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et pour tout $x \in E$.

3. Soit $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $\mathcal{B}=(b_1,\ldots,b_n)$ une base de E.

   (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telle que pour tout $(x,y)\in E^2$, $\omega(x,y)={}^tXMY$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont les matrices colonnes représentant respectivement x et y dans la base $\mathcal{B}$:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\qquad \begin{array}{l} x=x_1b_1+\cdots+x_nb_n\,,\\ \\ y=y_1b_1+\cdots+y_nb_n\,.\end{array}$$

   On notera alors $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.

   (b) Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire que ${}^tM=-M$.

   (c) Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{A}(E)$ est de dimension 1 lorsque E est de dimension 2.

   (d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
   ($\mathcal{E}_1$): ω est une forme symplectique sur E.
   ($\mathcal{E}_2$): Pour tout $x \in E\setminus\{0\}$, il existe $y\in E$ tel que $\omega(x,y)\neq 0$.
   ($\mathcal{E}_3$): $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ est inversible.

4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur E, alors E est de dimension paire.

   Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n ***est un entier pair*** $\geqslant 2$.

5. Montrer que l'application ω_0 définie par

$$\begin{array}{cccc}\omega_0: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ & (X,Y) & \mapsto & {}^tXJ_nY\end{array}$$

   est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

   Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω ***sur*** E.

   Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ ***de*** E ***telle que*** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)=J_n$.

6. Traiter le cas où E est de dimension 2.

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Montrer que, pour toute forme linéaire $u : F \to \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire $\widetilde{u} : E \to \mathbb{R}$ dont la restriction à F coïncide avec u.

On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E \,:\, \forall y \in F,\, \omega(x,y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{cccc} \psi_F : & E & \to & F^* \\ & x & \mapsto & \varphi_\omega(x)|_F \end{array}\right.$$

où $\varphi_\omega(x)|_F$ est la restriction de $\varphi_\omega(x)$ à F.

(b) Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega = \{0\}$.

(c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F?

(d) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$.

(e) Montrer que, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F, alors $E = F \oplus F^\omega$ et la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω.

8. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

9. Conclure. En déduire que ω dompte au moins une structure complexe sur E.

Partie II: Deux outils sur les polynômes

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant d$ à coefficients réels, pour tout $d \in \mathbb{N}$.

10. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls de degrés respectifs p et q strictement positifs. Montrer que l'application linéaire $L_{P,Q}$ définie par

$$\left|\begin{array}{cccc} L_{P,Q} : & \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{p+q-1}[X] \\ & (V,W) & \mapsto & VP + WQ \end{array}\right.$$

est un isomorphisme si et seulement si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

11. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Construire une application

$$\left|\begin{array}{cccc} r : & \mathbb{R}_d[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & r(P) \end{array}\right.$$

polynomiale en les coefficients de P, telle que, si $r(P)$ est non nul, alors les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.
Indication: On pourra utiliser la question précédente.

12. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que la fonction f est non nulle. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{R}^d$.
<u>Indication</u>: *On pourra utiliser le fait qu'un polynôme non nul à une variable n'a qu'un nombre fini de racines.*

Dans les parties III et IV, on fixe deux formes symplectiques ω et ω_1 sur E.

Partie III: Réduction simultanée

13. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. Montrer alors que u appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$ défini par

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in \mathrm{GL}(E) \;:\; \forall (x, y) \in E^2,\, \omega\big(x, u(y)\big) = \omega\big(u(x), y\big) \right\} .$$

Dans les questions 14 à 19, on suppose que E est de dimension 4.

14. Soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_4$. Soit $U \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
    (a) Quelle relation y a-t-il entre les matrices J_4 et U?
    (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
    $$U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^t N \end{pmatrix} .$$
    (c) Déterminer, en fonction de N, α et β les coefficients du polynôme T défini par $T(X) = \det(N - XI_2) + \alpha\beta$. Montrer que T est un polynôme annulateur de U.

Dans les questions 15 à 19, on suppose que u n'admet aucune valeur propre réelle.

Le but des questions 15 à 19 est de montrer qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = J_4 \quad \textbf{\textit{et}} \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega_1) = r \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

15. Montrer que U est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et des vecteurs Z et Y de $\mathbb{C}^4$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que $UZ = \lambda Z$ et $UY = \lambda Y$.

16. Soient Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que $Z = Z_1 + iZ_2$ et $Y = Y_1 + iY_2$. Soient $(z_1, z_2, y_1, y_2) \in E^4$ de coordonnées respectives Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\widetilde{\mathcal{B}} := (z_1, z_2, y_1, -y_2)$ est une base de E.

17. Montrer que

$$\begin{aligned} &\omega(z_1, z_2) = \omega(y_1, y_2) = 0\,, \\ &\omega(z_1, y_1) = -\omega(z_2, y_2)\,, \\ &\omega(z_1, y_2) = \omega(z_2, y_1)\,. \end{aligned}$$

18. Montrer que, quitte à remplacer Y par ξY avec $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bien choisi, on a $\omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, y_2) = 0$.

19. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u) = r \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$$

et conclure.

Jusqu'à la fin de cette partie, on ne fait plus d'hypothèse sur la dimension de E ni sur l'endomorphisme u. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de u et une décomposition $P = P_1 \cdots P_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{R}[X]$. On note $F_j = \ker[P_j(u)]$ pour $j = 1, \ldots, r$.

20. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ et que F_j est stable par u pour $j = 1, \ldots, r$.

21. Montrer que, pour tous j et k appartenant à $\{1, \ldots, r\}$ et distincts, on a $F_k \subset F_j^\omega$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$ (la notation F^ω est définie en question 7).

On dit alors que $F_1, \ldots, F_r$ sont deux à deux orthogonaux pour ω et pour ω_1.

22. En déduire que, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, les restrictions de ω et ω_1 à $F_j \times F_j$ sont des formes symplectiques sur F_j.

23. On suppose que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que E est la somme directe de sous-espaces de dimension 2 ou 4, deux à deux orthogonaux pour ω et ω_1, et sur lesquels les restrictions de ω et ω_1 sont des formes symplectiques.

Partie IV: Structures complexes domptées simultanément

Dans cette partie, nous allons étudier les liens entre les propositions

$(\mathcal{F}_1)$: ***Il existe une structure complexe domptée par ω et par ω_1.***
$(\mathcal{F}_2)$: ***Le segment $[\omega, \omega_1] = \{(1-\theta)\omega + \theta\omega_1 ; \theta \in [0,1]\}$ est inclus dans l'ensemble des formes symplectiques sur E.***

24. Soit u l'automorphisme de E défini en question 13. On suppose que $(\mathcal{F}_2)$ est satisfaite et que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que $(\mathcal{F}_1)$ est satisfaite.
Indication: On pourra démontrer puis utiliser le fait que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ${}^tXR_\phi X > 0$ et ${}^tXR_{\theta+\phi}X > 0$.

25. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble défini en question 13. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$, dont le polynôme caractéristique P est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$, est dense dans $\mathcal{S}$.
Indication: On pourra utiliser $r(P')$ où l'application r est définie en question 11.

26. Que peut-on conclure?