DM bis n°26

MInes-Ponts 3 h

On note E l'ensemble des fonctions f continues, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles et vérifiant l'équation : $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Lorsqu'elle existe, la *fonction caractéristique* de $f \in E$ est la fonction $\phi_f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par la formule

$$\phi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\mathrm{d}x.$$

Lorsque, pour un entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \longmapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle moment d'ordre k de f la quantité

$$a_k(f) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\mathrm{d}x.$$

Si, pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \longmapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on dit que f admet des moments de tous ordres.
On admettra que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda x - \frac{x^2}{2})\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\exp(\frac{\lambda^2}{2}).$$

A. Questions préliminaires

Les résultats de ces questions, indépendantes les unes des autres, pourront être utilisés dans la suite du problème.

1) Soit $f \in E$. On suppose, dans cette question, que f admet des moments de tous ordres.
Montrer l'existence de ϕ_f et de ses dérivées successives que l'on exprimera à l'aide de f.

2) Montrer que, pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la fonction $h_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} & si \quad t \neq 0 \\ b - a & si \quad t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que, pour tout réel t, $|h_{a,b}(t)| \leqslant b - a$.

5) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $e^k \geqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

B. La fonction ϕ_f caractérise f

On considère la fonction R définie pour tout $(\theta, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par la formule

$$R(\theta, T) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(\theta t)}{t} \mathrm{d}t$$

et la fonction S définie pour tout $T \in \mathbb{R}$ par la formule

$$S(T) = \int_{0}^{T} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

On admet que $\lim\limits_{T \to +\infty} S(T) = \dfrac{\pi}{2}$.

6) Exprimer $R(\theta, T)$ à l'aide de S.

7) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de $R(x, T) - R(y, T)$ quand T tend vers $+\infty$ (on discutera de cette limite en fonction des signes de x et y).

8) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t) \phi_f(t) \mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t) \mathrm{d}t.$$

9) En déduire qu'étant données deux fonctions f et g de E, si $\phi_f = \phi_g$, alors $f = g$.

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

On définit la fonction f_0 par

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x} & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

10) Montrer que $f_0 \in E$.

11) Montrer que f_0 admet des moments de tous ordres et calculer $a_k(f_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On introduit, pour $a \in [-1, 1]$, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$f_a(x) = f_0(x)(1 + a \sin(2\pi \ln x)).$$

12) Montrer que $f_a \in E$ et que $a_k(f_0) = a_k(f_a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

Dans cette partie, f est une fonction de E qui admet des moments de tous ordres et vérifie en outre la condition (**U**) suivante :

(**U**) il existe $M > 0$ tel que pour tout entier $k > 0$, $0 \leqslant \dfrac{(a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leqslant M$.

On pose $b_k(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x) \mathrm{d}x$ pour tout entier $k > 0$.

13) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$(b_{2k+1}(f))^2 \leqslant a_{2k}(f).a_{2k+2}(f).$$

14) En déduire que la suite de terme général $\dfrac{(b_k(f))^{\frac{1}{k}}}{k}$ est majorée par $2M$.

15) Montrer que, pour tous x et h réels et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left|\phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{|h|^n}{n!} b_n(f).$$

16) Montrer que, pour un certain $A > 0$ que l'on exprimera en fonction de M, on a l'égalité :

$$\phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x)$$

pour tout réel x et pour tout h tel que $|h| < A$.

17) En déduire que, si l est un entier strictement positif et g une fonction de E admettant des moments de tous ordres tels que $a_k(f) = a_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\phi_f(x) = \phi_g(x)$ pour tout $x \in [-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}]$ (on pourra procéder par récurrence).

18) Conclure.

E. Application

19) Résoudre en $f \in E$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{2k}(f) = (2k-1)a_{2k-2}(f) \\ a_{2k-1}(f) = 0 \end{cases}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$ (on pourra utiliser la fonction caractéristique de f).