DM n°3

Premier Problème

Grands ensembles de vecteurs presque orthogonaux —

Soit un entier $m \geq 1$. R^m sera dans la suite muni de sa structure euclidienne canonique, $\langle\cdot|\cdot\rangle)$ désignera le produit scalaire canonique, $\|\cdot\|$ la norme associée. On admettra qu'il existe une notion de volume sur $\mathbf{R}^m$ semblable à celle en domension 3 et que le volume d'une boule et proportionnel à la puissance m^{e} de son rayon.

Par S^{m-1} on désigne la sphère unité de $\mathbf{E}$. Soit $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de S^{m-1}, où I désigne un ensemble admettant au moins deux éléments. Nous appellerons paramètre de cohérence de la famille que nous noterons $C(u)$ le nombre réel :

$$C(u) = \sup\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}.$$

1. Justifier que le paramètre de cohérence de u est bien défini
2. Que dire d'une famille V à valeur dans S^{m-1} de paramètre de cohérence nul. Montrer qu'une telle famille est finie.
3. Soit ε un élément de $]0,1[$. On supose que $C(u)\leq\varepsilon$.
   (a) Soit R un réel strictement positif. Donner une codition sur R pour que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de I, les boules fermées de rayon R et de centre u_i et u_j soient disjointes.
   (b) Montrer que I est fini et que
   $$|I| \leq \left(1+\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right)^m.$$

   On appelle vecteur de Rademacher à valeur dans S^{n-1} tout vecteur aléatoire X, de $\mathbf{R}^m$ de la forme
   $$X = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1, X_2, ..., X_m),$$
   dont les composante $X_1, ...X_m$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Rademacher :
   $$\text{pour } i = 1,\dots,...m,\ \mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \tfrac{1}{2}$$
4. Soient $X = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1, X_2, ..., X_m)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{m}}(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ des vecteurs de Rademacher indépendants.
   (a) Montrer que pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$
   (b) Montrer que pour tout réel t,
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m$$
   (c) Montrer que
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2m}\right)$$
5. Soient σ et λ des éléments de $\mathbf{R}_+^*$ et Z une variable aléatoire réelle telle que pour tout $t\in\mathbf{R}$,
   $$\mathrm{E}(\exp(tZ) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$
   Montrer :
   $$\mathbf{P}(|Z|\geq\lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$
6. (a) Montrer que $\mathbf{P}\left(|\langle X|Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)$.

(b) Soient $X^1, X^2, \ldots, X^N$ des vecteurs de Randemacher à valeurs dans S^{m-1} mutuellement indépendants. Déduire de la sous-question précédente que :

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) < N^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right).$$

7. On suppose que $\delta \in]0,1]$ et $m \geq 2\frac{\ln(N^2/\delta)}{\varepsilon^2}$. Majorer $\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right)$.
8. Soit $N = \left\lfloor \exp\left(\frac{\varepsilon^2 m}{4}\right)\right\rfloor$ Montrer qu'il existe une famille w de vecteur de S^{m-1} de cardinal N dont le paramètre de cohérence est majorée par ε.

Second problème

Fonction à variations bornées —

Nous allons introduire la notion de fonction à variations bornées, notion due à Jordan.
Soit f une application d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$)dans $\mathbf{R}$.
Pour toute subdivision de $[a, b]$, $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, on pose

$$S_\sigma(f) = |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(b) - f(x_{n-1})|$$

On dit que f est à variation bornée si l'ensemble $\{S_\sigma(f), \sigma \in \Sigma([a, b])\}$, où $\Sigma([a, b])$ désigne l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$, est majoré.

Si f est à variation bornée alors $\{S_\sigma(f), \sigma \in \Sigma([a, b])\}$, qui est non vide, admet une borne supérieure appelée variation totale de f.

1. Montrer que l'opposé d'une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ à variation bornée est à variation bornée, montrer que la somme de deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ à variation bornée est à variation bornée
2. *On suppose dans cette question que f à variations bornée.*
   (a) Montrer que pour tout x et tout x' réels tels que $a \leq x \leq x' \leq b$, la restriction de f à $[x, x']$, $f_{|[x,x']}$, est à variation bornée. On notera la variation totale de $f_{|[x,x']}$, $V_x^{x'}(f)$ ou simplement $V_x^{x'}$ s'il n'y a pas d'ambiguité. Ainsi $V_a^b(f)$ désigne-t-il la variation totale de f.
   (b) Montrer que pour tout x et tout x' réels tels que $a \leq x \leq x' \leq b$, $V_a^{x'} \geq V_a^x + V_x^{x'}$.
   En déduire que l'application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, $x \mapsto V_a^x(f)$ est croissante.
   (c) Etudier la monotonie de l'application

   $$g \ : \ [a, b] \to \mathbf{R}\,; \ x \mapsto V_a^x(f) - f(x).$$

   (d) Déduire de la sous-question précédente que toute fonction de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ à variation bornée est la différence de deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ croissantes.
   (e) Montrer que réciproquement si ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ croissantes, alors $\phi_1 - \phi_2$ est à variation bornée.
3. Montrer que le produit de deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ f_1 et f_2, à variation bornée est encore à variation bornée.
   Montrer que si de plus il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ $f(x) \geq A$, alors $\frac{1}{f}$ est à variation bornée.
4. Montrer que si f est à variation bornée, alors ses points de discontinuité sont de première espèce et que leur ensemble est au plus dénombrable.
5. Montrer que toute application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ lipschitzienne est à variation bornée.
6. Donner un exemple d'application continue sur un segment et qui n'est pas à variation bornée.
7. une application g dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ et telle que g' soit continue par morceaux, est-elle à variation bornée ?

Correction du DM n°5

Premier Problème

GRANDS ENSEMBLES DE VECTEURS PRESQUE ORTHOGONAUX —

1. • $\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ est *non vide*, (si l'on suppose que $|I|\geq 2$ erreur du texte).
   • Par Cauchy-Schwarz, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de I,

   $$|\langle u_i|u_j\rangle|\leq \|u_i\|\|u_j\|=1,$$

   si bien que $\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ est *majorée* par 1.

   Donc $\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ admet une borne supérieure, et donc : le paramètre de cohérence est donc bien défini.

2. Supposons V de paramètre de cohérence nul. Alors V est une famille orthonormale, donc libre, et donc I est fini et

   $$\boxed{|I|\leq m}$$

3. Soit ε un élément de $]0,1[$. On supose que $C(u)\leq\varepsilon$.

   (a) Comme $\varepsilon<1$, il est loisible de choisir un réel strictement positif $R<\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$.
   Soit alors un couple (i,j) d'éléments distincts de I.

   $$\|u_i-u_j\|^2=\|u_i\|^2+\|u_i\|^2-2\langle u_i|u_j\rangle\geq 1^2+1^2-2\varepsilon=2(1-\varepsilon).<(2R)^2$$

   Donc les boules fermées B_i et B_j de centres respectifs u_i et u_j de rayon R sont disjointes.

   (b) Pour tout réel strictement positif $R\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$ Les boules fermées B_k de centre u_k et de rayon R, $k\in I$, sont incluses dans la boule B de centre $(0,0,...,0)$ et de rayon $1+R$. Ces boules étant d'après ce qui précède deux à deux disjointes on a que I est fini et que :

   $$\sum_{k\in I}\mathrm{vol}(B_k)=\mathrm{vol}\left(\bigcup_{k\in I}B_k\right)\leq\mathrm{vol}(B),$$

   $\mathrm{vol}(A)$ désignant le volume d'une partie A de $\mathbf{R}^n$.
   En notant v_m le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^m$ (non nul) on a donc, Pour tout réel R tel que $0<R<\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$:

   $$|I|R^m v_m\leq(1+R)^m v_m.$$

   et donc en laissant tendre R dans l'inégalité précédente vers $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$.

   $$|I|\leq\left(1+\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right)^m.$$

(a) Pour tout réel t, $\mathrm{ch}t=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$, or pour tout entier $n\geq 0$,

$$2^n n!=2\times 4\times 6\times ...\times 2n\leq(2n)!$$

donc $\mathrm{ch}t\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!}=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

(b) Pour commencer, notons que $X_1,...,X_m,Y_1,...Y_m$ sont mutuellement indépendants. En effet, soient $\varepsilon_1,...,\varepsilon_m,\eta_1,...,\eta_m$ des éléments de $\{-1,1\}$.

$$\mathbf{P}(X_1=\varepsilon_1,...,X_m=\varepsilon_m,Y_1=\eta_1,...,Y_m=\eta_m)=\mathbf{P}(\sqrt{m}X=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m);\sqrt{m}Y=(\eta_1,...,\eta_m))$$

Donc par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{P}(X_1=\varepsilon_1,...,X_m=\varepsilon_m,Y_1=\eta_1,...,Y_m=\eta_m)=\mathbf{P}(\sqrt{m}X=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m))\mathbf{P}(\sqrt{m}Y=(\eta_1,...,\eta_m)).$$

Mais l'indépendance mutuelle d'une part des X_i, $i = 1, ..., m$, et d'autre part celle des Y_i, $i = 1, ..., m$ assurent alors :

$$\mathbf{P}(X_1 = \varepsilon_1, ..., X_m = \varepsilon_m, Y_1 = \eta_1, ..., Y_m = \eta_m) = \mathbf{P}(X_1 = \varepsilon_1), ..., \mathbf{P}(X_m = \varepsilon_m)\mathbf{P}(Y = \eta_1), ..., \mathbf{P}(Y_m = \eta_m)..$$

D'après le cours on en déduit par une récurrence immédiate l'indépendances mutuelle de :

$$\exp\left(\frac{t}{m}X_1Y_1\right), \exp\left(\frac{t}{m}X_2Y_2\right), ..., \exp\left(\frac{t}{m}X_mY_m\right)$$

Donc

$$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{m}\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right)$$

Or par la formule de transfert, pour $i = 1, ..., m$,

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right) = \exp\left(\frac{t}{m}\right)\mathbf{P}(X_iY_i = 1) + \exp\left(-\frac{t}{m}\right)\mathbf{P}(X_iY_i = -1),$$

Mais

$$\mathbf{P}(X_iY_i = 1) = \mathbf{P}((X_i = 1, Y_i = 1) \cup (X_i = -1, Y_i = -1)) = \mathbf{P}(X_i = 1, Y_i = 1) + \mathbf{P}(X_i = -1, Y_i = -1) =$$

$$\mathbf{P}(X_i = 1)\mathbf{P}(Y_i = 1) + \mathbf{P}(X_i = -1)\mathbf{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2},$$

par disjonction de $(X_i = 1, Y_i = 1)$ et $(X_i = -1, Y_i = -1)$ puis indépendance de X_i et Y_i, et donc en passant à l'événement contraire $\mathbf{P}(X_iY_i = -1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, pour $i = 1, ..., m$. Donc

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right).$$

Donc enfin :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m}$$

(c) La question (a), vient en renfort du résultat de (b) pour dire :

$$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) \leq \left(\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t}{m}\right)^2\right)\right)^m = \exp\left(\frac{t^2}{2m}\right)$$

4. L'inégalité de Markov au programme, l'exponentielle étant positive, raconte que pour tout réel t :

$$\mathbf{P}(e^{tZ} \geq e^{t\lambda}) \leq \frac{\mathrm{E}(\exp(tZ))}{e^{\lambda t}} \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Comme l'exponentiel est croissante

$$\mathbf{P}(Z \geq \lambda) = \mathbf{P}(e^{tZ} \geq e^{t\lambda}) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Mais le trinôme en t, $\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t$ atteint son minimum, $-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}$, en $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{2\lambda}{\sigma^2 t^2}\right)$. Et pout cette valeur de t, la précédente inégalité devient :

$$\mathbf{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

Par ailleurs

$$\mathbf{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbf{P}((Z \geq \lambda) \cup (Z \leq \lambda)) = \mathbf{P}((Z \geq \lambda) + \mathbf{P}((Z \leq -\lambda) = \mathbf{P}((Z \geq \lambda) + \mathbf{P}((-Z \geq \lambda),$$

car $(|Z| \geq \lambda)$ est l'union disjointe de $(Z \geq \lambda)$ et $(Z \leq \lambda)$.
Or la variable $-Z$ satisfait la même hypothèse que Z et donc $\mathbf{P}(-Z \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$. Donc au final :

$$\boxed{\mathbf{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

5. (a) D'après 4. (c) et 5. on a immédiatement :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(|\langle X|Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)}$$

(b) L'événement $\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$ est la réunion des événements $\left(|\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$, $1 \leq i < j \leq N$. En effet si ω est élément de $\left(|\langle X^{i_0}|Y^{j_0}\rangle| \geq \varepsilon\right)$, où (i_0, j_0) est un élément de $\{1, ..., N\}$ tel que $1 \leq i_0 < j_0 \leq N$, alors

$$\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle|(\omega) \geq |\langle X^{i_0}|Y^{j_0}\rangle|(\omega) \geq \varepsilon$$

et donc $\omega \in \left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$.

Inversement si ω est élément de $\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$, comme $\{(i,j) \in \{1, ..., n\} | 1 \leq i < j \leq N\}$ est fini, on dispose d'un élément un élément (i_0, j_0) tel que

$$(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle|)(\omega) = |\langle X^{i_0}|X^{j_0}\rangle|(\omega),$$

et donc $\omega \in \left(|\langle X^{i_0}|X^{j_0}\rangle| \geq \varepsilon\right) \subset \bigcup_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$.

Ceci étant

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)\right) \leq \sum_{1\leq i<j\leq N} \mathbf{P}\left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$$

Or $|\{(i,j) \in \{1, ..., n\} | 1 \leq i < j \leq N\}| = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, donc par 5.(a),

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{N(N-1)}{2} 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right) < \underline{N^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)}.$$

6. Par la question précédente : $\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < \delta$.

7. On a $N \leq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 m}{4}\right)$ et donc par croissance de l'exponentielle, $m \geq 2\frac{\ln(N^2)}{\varepsilon^2}$. Donc par la question précédente :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1.$$

En passant à l'événement contraire :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \leq \varepsilon\right)\right) > 0$$

Donc il existe au moins un élément ω tels que $|\langle X^i(\omega|X^j(\omega)\rangle|) \leq \varepsilon$, pour tout les couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, ..., N\}$ donc tel que La famille $((X_i(\omega))_{i=1,...,N}$ soit une famille d'éléments de S^{n-1} de paramètre de cohérence majorée par ε.

Second problème

Fonction à variations bornées —

1. Soient f et g des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ à variation bornées. Comme pour tout réel x, $|-x| = |x|$,

$$\{S_\sigma(-f), \sigma \in \Sigma([a,b])\} = \{S_\sigma(f), \sigma \in \Sigma([a,b])\}$$

Donc $\underline{-f \text{ est à variation bornée,}}$
de plus avec les notations

- Comme pour tout réel x, $|-x| = |x|$,

$$\{S_\sigma(-f), \sigma \in \Sigma([a,b])\} = \{S_\sigma(f), \sigma \in \Sigma([a,b])\}$$

Donc $-f$ est à varaiation bornée,
de plus avec les notations de 2. $V_a^b(-f) = V_a^b(f)$.

- Soit $\sigma_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$.

$S_{\sigma_0}(f+g) = |f(x_1)-f(a)+g(x_1)-g(a)|+|f(x_2)-f(x_1)+g(x_2)-g(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})+g(b)-g(x_{n-1})| \leq$

$|f(x_1)-f(a)|+|g(x_1)-g(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+|g(x_2)-g(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})|+|g(b)-g(x_{n-1})| = S_{\sigma_0}(f)+S_{\sigma_0}(g$

Donc f et g étant à variation bornée et la borne supérieure étant un majorant :

$$S_{\sigma_0}(f+g) \leq \Sigma_a^b(f) + \Sigma_a^b(g).$$

Donc, σ_0 étant quelconque $\{S_\sigma(f), \sigma \in \Sigma([a,b])\}$ est majorée par $\Sigma_a^b(f) + \Sigma_a^b(g)$.
Donc $f+g$ est à variation bornée.

2. *On suppose dans cette question que f à variations bornée.*

(a) soient x et x' des réels tels que $a \leq x \leq x' \leq b$. Soit $(x, x_1, \ldots x_{n-1}, x')$ une subdivision s de $[x, x']$.On considère la subdivision de σ de $[a,b]$, définie par :

$$\sigma = \begin{cases} (a, x, x_1, \ldots x_{n-1}, x', b) & \text{si } a < x \text{ et } x' < b, \\ (a, x, x_1, \ldots x_{n-1}, x') & \text{si } a < x \text{ et } x' = b, \\ (x, x_1, \ldots x_{n-1}, x', b) & \text{si } a = x \text{ et } x' < b, \\ (, x, x_1, \ldots x_{n-1}, x') & \text{si } a = x \text{ et } x' = b. \end{cases}$$

Dans tous les cas :

$$S_s(f_{|[x,x']}) \leq |f(x) - f(a)| + S_s(f_{|[x,x'} + |f(b) - f(x')|) = S_\sigma(f) \leq V_a^b(f).$$

Donc $f_{|[x,x']}$, est à variation bornée.

(b) Soient x et x' des réels tels que $a \leq x \leq x' \leq b$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. La propriété de la borne supérieure nous fourni une subdivision $\sigma_1 = (a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ de $[a,b]$ et une $\sigma_2 = (x, y_1, \ldots y_{m-1}, x')$ de $[x, x']$ telles que :

$$V_a^x - \frac{\varepsilon}{2} < S_{\sigma_1}(f_{|[a,x]}) \leq V_a^x, \; V_x^{x'} - \frac{\varepsilon}{2} < S_{\sigma_2}(f_{|[x,x']}) \leq V_x^{x'}.$$

Mais $(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x, y_1, \ldots y_{m-1}, x')$ est une subdivision σ_3 de $[a, x']$. On a alors :

$$V_a^x - \frac{\varepsilon}{2} + V_x^{x'} - \frac{\varepsilon}{2} = S_{\sigma_1}(f_{|[a,x]}) + S_{\sigma_2}(f_{|[x,x']}) = S_{\sigma_3}(f_{|[a,x']}) \leq V_a^{x'}.$$

Soit $V_a^x + V_x^{x'} \leq V_a^{x'} + \varepsilon$. Come ε est quelconque :

$$\boxed{V_a^{x'} \geq V_a^x + V_x^{x'}}$$

Comme $V_x^{x'}$ est positif ou nul, $V_a^{x'} \geq V_a^x$. Donc l'application de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, $t \mapsto V_a^t$ est croissante.

(c) Etudier la monotonie de l'application Soient x_1 et x_2 des élément de $[a,b]$ tels que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

$$g(x_2) - g(x_1) = V_a^{x_2} - V_a^{x_1} + f(x_1) - f(x_2) \geq V_a^{x_2} - (V_a^{x_1} + |f(x_2) - f(x_1)|).$$

Or (x_1, x_2) étant une subdivision de $[x_1, x_2]$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq V_{x_1}^{x_2}$, donc

$$g(x_2) - g(x_1) \geq V_a^{x_2} - (V_a^{x_1} + V_{x_1}^{x_2}).$$

Donc , d'après (b), $g(x_2) - g(x_1) \geq 0$, et donc :
$g \;:\; [a,b] \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto V_a^x - f(x)$ croît.

(d) L'application f, à variation bornée s'écrit $f = V_a^{\cdot} - (V_a^{\cdot} - f)$, or d'après (b) et (c), $V_a^{\cdot}$ et $(V_a^{\cdot} - f)$ croissent :
L'application f est la différence de deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ croissantes.

(e) Montrer que réciproquement si ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ croissantes, alors $\phi_1 - \phi_2$ est à variation bornée. Remarquons que pour $i = 1, 2$, ϕ_i est à variation bornée, puisque pour tout subdivision $(a, x_1, ..., x_{n-1}, b)$ de $[a,b]$,

$$S_\sigma(\phi_i) = |f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})| = f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1}) = f$$

Donc par 1., ϕ_2, puis $\phi_1 - \phi_2$ sont à variations bornées.

3. D'abord, toute fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ à variation bornée est bornée, puisque pour tout élément x de $[a,b]$,

$$|f(x)| \leq |_2(a)| + |f(x) - f(a)| = |f(a)| + S_{(a,x)} f_{|[a,x]} \leq |f(a)| + V_a^x \leq |f(a)| + V_a^b.$$

Ensuite si $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, est une subdivision de $[a,b]$, alors, pour $i = 1, ...n$,

$$|(f_1 f_2)(x_i) - f_1 f_2(x_{i-1})| = |f_1(x_i)(f_2(x_i) - f_2(x_{i-1})) + f_2(x_i)(f_1(x_i) - f_1(x_{i-1}))| \leq$$
$$\|f_1\|_\infty |f_2(x_i) - f_2(x_{i-1}| + \|f_2\|_\infty |f_1(x_i) - f_1(x_{i-1}|.$$

Donc

$$S_\sigma(f_1 f_2) \leq \|f_1\|_\infty S_\sigma(f_2) + \|f_2\|_\infty S_\sigma(f_1) \leq \|f_1\|_\infty V_a^b(f_2) + \|f_2\|_\infty V_a^b(f_1).$$

Le produit de f_1 et f_2 est donc à variation bornée.

Supposons qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) \geq A$. Si $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, est une subdivision de $[a,b]$, alors, pour $i = 1, ...n$,

$$\left|\frac{1}{f}(x_i) - \frac{1}{f}(x_{i-1})\right| = \left|\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{f(x_{i-1} f(x_i)}\right| \leq \frac{1}{A^2}|f(x_i) - f(x_{i-1}|$$

Donc

$$S_\sigma\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{A^2} S_\sigma(f) \leq \frac{V_a^b(f)}{A^2}.$$

Donc $\frac{1}{f}$ est à variation bornée.

4. Supposons f à variation bornée. D'après (d) on dispose de ϕ_1 et ϕ_2 applications, croissantes telles que $f = \phi_1 - \phi_2$. L'ensemble des points de discontinuité de f est inclus dans la réunion de l'ensemble D_1 des points de discontinuité de ϕ_1, et de D_2 ensemble des point de discontinuité de ϕ_2. Or D_1 et D_2 sont au pire dénombrables (preuve déjà vue à rédiger).

Donc L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

5. Exercice (Très facile).

6. Soit l'application

$$f \ : \ [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{pour } x \neq 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

L'application f est continue, c'est le prolongement par continuité de l'application $]0,1] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, qui est bien continue en vertu des théorèmes géneraux et qui admet 0 comme limite en 0, puisque :

$$0 \leq \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x.$$

Soit n in $\mathbf{N}^*$. Considérons la subdivision $\sigma_n = \left(0, \frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{(2n-1)\pi}, ..., \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}, 1\right)$ de $[0,1]$.

$$S_{\sigma_n}(f) = \left|f(0) - f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\right| +$$
$$\left|f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(2n-1)\pi}\right)\right| + ... + \left|f\left(\frac{1}{4\pi}\right) - f\left(\frac{1}{3\pi}\right)\right| + \left|f\left(\frac{1}{3\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right| +$$
$$\left|f\left(\frac{1}{2\pi}\right) - f\left(\frac{1}{\pi}\right)\right| + \left|f\left(\frac{1}{\pi}\right) - f(1)\right|$$

Donc

$$S_{\sigma_n}(f) \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{2n} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Comme la série harmonique diverge $S_{\sigma_p}(f) \underset{p \to +\infty}{\to} +\infty$ et donc f n'est pas à variations bornées.

7. La dérivée de g étant continue par morceaux sur le *segment* $[a,b]$ elle est bornée[1]. Donc pour toute subdivision σ de $[a,b]$, l'inégalité des accroissements finis prétend à raison que :

$$S_\sigma(g) \leq (b-a)\|g'\|_\infty.$$

Donc g est à variation bornée.

1. Dans un début de problème il conviendrait de la démontrer.