MP* KERICHEN **2020-2021**

DS n^{o}1 bis (X, ENS)

Il sera, dans la notation, tenu compte de la prsentation et de la qualit de la rdaction. Les rsultats devront obligatoirement tre souligns ou encadrs *la rgle*, le texte et les *formules* ponctues, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pnalits :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathmatiques non ponctues : -1 point,

— Recours des abrviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Trigonalisation simultanée d'endomorphismes unipotents

Notations. On désignera par K le corps des réels ou celui des complexes ; pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $M(n,K)$ l'espace des matrices à n-lignes et n-colonnes à coefficients dans K et on l'identifie à l'espace des endomorphismes de K^n. On note $SO(n,\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M(n,\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales de déterminant 1.

La lettre E désignera toujours un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$; $L(E)$ désignera l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ désignera celui des endomorphismes inversibles. On dit qu'une partie F de E est *laissée stable* par un endomorphisme T si l'on a $T(F) \subset F$.

On appelle *commutant* d'une partie X d'une algèbre l'ensemble des éléments de Y qui commutent à tous les éléments de X.

Première partie

1. Soit A une matrice de $M(n,\mathbb{R})$, diagonale avec coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$; on suppose qu'il existe deux indices i et j tels que $a_i \neq a_j$. Vérifier que si une matrice B commute avec A, on a $b_{i,j} = 0$.

2. Déterminer le commutant de $SO(2,\mathbb{R})$ dans $M(2,\mathbb{R})$.

3. a) Montrer que, si $n \geqslant 3$, le commutant de $SO(n,\mathbb{R})$ dans $M(n,\mathbb{R})$ est formé de matrices diagonales.

b) Déterminer ce commutant.

Deuxième partie

Une partie W de $L(E)$ sera dite *irréductible* si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces vectoriels de E laissés stables par tous les éléments de W.

4. Vérifier que, si $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $SO(n, \mathbb{R})$ est irréductible.

5. Vérifier que, si deux élément A et B de $L(E)$ commutent, tout sous-espace propre de l'un d'eux est laissé stable par l'autre.

6. Montrer que, si $K = \mathbb{C}$, le commutant d'une partie irréductible de $L(E)$ est réduit aux multiples scalaires de l'endomorphisme identité id_E.

7. Ce résultat subsiste-t-il lorsque $K = \mathbb{R}$?

Troisième partie

Un élément A de $L(E)$ est dit *unipotent* si $A - id_E$ est nilpotent (c'est-à-dire s'il existe un entier $k > 0$ tel que $(A - id_E)^k = 0$).

On se propose de démontrer que, si $K = \mathbb{C}$ et si G est un sous-groupe de $GL(E)$ formé d'éléments unipotents, E admet une base dans laquelle tous les éléments de G sont représentés par des matrices triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux égaux à 1.

8. Montrer que tout élément unipotent A est inversible, et déterminer la somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} (id_E - A)^n$.

9. Traiter le cas où $n = 2$ et où G est l'ensemble des puissances d'un élément g_0. Dans ce cas, est-il nécessaire de supposer $K = \mathbb{C}$?

On suppose maintenant $n \geqslant 1$. On rappelle que $K = \mathbb{C}$.

10. Vérifier que le sous-espace vectoriel W de $L(E)$ engendré par G est une sous-algèbre de $L(E)$.

11. Calculer $\mathrm{tr}\,(g - id_E)$, $\mathrm{tr}\,(g)$, $\mathrm{tr}\,((g - id_E)g')$ pour $g, g' \in G$.

12. Supposant en outre G irréductible, montrer que G est réduit à id_E et préciser la valeur de n.

[On pourra utiliser le résultat suivant, qui sera démontré dans la **quatrième partie** : si $K = \mathbb{C}$ et si W est une sous-algèbre de $L(E)$, irréductible et contenant id_E, alors $W = L(E)$].

13. Ne supposant plus G irréductible, démontrer l'existence d'un vecteur non nul x de E tel que $g(x) = x$ pour tout $g \in G$.

14. Conclure.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat admis à la question **12**. Procédant par l'absurde, on suppose $W \neq L(E)$.

On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et on identifie les éléments de $L(E)$ à leurs matrices représentatives dans cette base. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on désigne par :

— V_i l'ensemble des matrices A telles que $a_{k,l} = 0$ si $l \neq i$;

— L_i l'application de E dans V_i définie par

$$(L_i(x))_{k,l} = \delta_{i,l} x_k$$

— P_i l'application de $L(E)$ dans V_i définie par

$$(P_i(A))_{k,l} = \delta_{i,l} A_{k,i}.$$

Enfin on note Φ l'application linéaire de $L(E)$ dans $L\left(L(E)\right)$ définie par :

$$\Phi(A)(B) = A \circ B.$$

15. Démontrer les assertions suivantes :

a) V_i est invariant par tous les $\Phi(A)$, $A \in L(E)$ et $\Phi(A)\left(L_i(x)\right) = L_i\left(A(x)\right)$.

b) $\Phi(A) \circ P_i = P_i \circ \Phi(A)$.

c) $W \cap V_i$ est nul ou égal à V_i.

16. Construire un sous-espace vectoriel W' de $L(E)$, supplémentaire de W et laissé stable par tous les $\Phi(A)$, $A \in L(E)$.

On note π le projecteur de $L(E)$ sur W parallèlement à W' ; pour $i, j = 1, \ldots, n$, on pose :

$$A_{i,j} = L_j^{-1} \circ P_j \circ \pi \circ L_i \in L(E).$$

17. Montrer que $A_{i,j}$ est un multiple scalaire de id_E, que l'on notera $a_{i,j} id_E$.

18. Vérifier les égalités suivantes :

a) $\pi(id_E) = id_E$.

b) $\sum\limits_i L_i(e_i) = id_E$.

c) $P_i(id_E) = L_i(e_i)$.

19. Déterminer $a_{i,j}$.

20. Conclure.

⋆ ⋆
⋆