DM BIS n°2

Pour les $\frac{5}{2}$ préparant l'X ou les ENS. La première partie est abordable par les $\frac{3}{2}$

Les trois parties sont indépendantes

1 Notations

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathbb{P}[A]$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et intégrables, alors

$$\mathbb{E}[Y_1 \cdots Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdots \mathbb{E}[Y_n]$$

On note log la fonction logarithme népérien. Par convention, on pose $\log(0) = -\infty$.

Première partie

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \log\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right)$$

1. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ est d'épérance finie pour tout $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[Z \geq t] \leq \exp(-\lambda t)\mathbb{E}[\exp(\lambda Z)]$$

2. Montrer que $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq t]) \leq \inf_{\lambda \geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t)$$

Pour chaque $\lambda \geq 0$, on pose

$$m(\lambda) = \frac{\mathbb{E}[X_1 \exp(\lambda X_1)]}{\mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)]}$$

ainsi que

$$D_n(\lambda) = \exp(\lambda n S_n - n\psi(\lambda))$$

4. Montrer que la fonction m est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $t \in [0, 1[$, il existe un unique $\lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t$.
5. (a) Pour $n \geq 2$ et $\lambda \geq 0$, montrer que

$$\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0$$

   (b) En déduire que, pour $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq \frac{4}{n}$$

Pour tous $n \geq 1$, $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on note $I_n(\lambda, \varepsilon)$ la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Montrer que

$$\mathbb{P}[|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon] \geq \mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon) \exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon))]$$

7. Montrer que

$$\mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda)] \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}$$

8. (a) En déduire, pour chaque $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'une suite $(u_n(\varepsilon))_{n \geq 1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et telle que

$$\frac{1}{n} \log(\mathbb{P}[S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon]) \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda\varepsilon + u_n(\varepsilon)$$

   (b) Conclure que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\mathbb{P}[S_n \geq t]) = \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t)$$

   (c) La formule précédente est-elle encore valide pour $t = 1$?

Deuxième partie

On admet l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$$

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. Appelons (H) l'hypothèse suivante : il existe un unique point $x_0 \in [a, b]$ où f atteint son maximum, on a $a < x_0 < b$, et $f''(x_0) \neq 0$.

9. Montrer que sous l'hypothèse (H), on a $f''(x_0) < 0$.
10. Sous l'hypothèse (H), montrer que pour tout $\delta > 0$ tel que $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$, on a l'équivalent, quand $t \to +\infty$,

$$\int_a^b e^{tf(x)}\, dx \sim \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{tf(x)}\, dx$$

11. Sous l'hypothèse (H), montrer l'équivalent, quand $t \to +\infty$,

$$\int_a^b e^{tf(x)}\, dx \sim e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$

12. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt$$

(b) En utilisant les résultats précédents, retrouver la formule de Stirling donnant un équivalent asymptotique de $n!$.

Troisième partie

13. Montrer que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a |\sin(x^2)|\, dx = +\infty$$

14. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^a \sin(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$$

15. Montrer que les limites

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \sin(x^2)\, dx \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \cos(x^2)\, dx$$

existent et sont finies.

On admet les identités

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \sin(x^2)\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

16. Montrer qu'il existe des nombres réels $c, c' \in \mathbb{R}$ tels que, pour $a \to +\infty$, on a

$$\int_0^a \sin(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{c}{a}\cos(a^2) + \frac{c'}{a^3}\sin(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right)$$

On admettra qu'il existe de même des des nombres réels $d, d'' \in \mathbb{R}$ tels que, pour $a \to +\infty$, on a

$$\int_0^a \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{d}{a}\sin(a^2) + \frac{d'}{a^3}\cos(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right)$$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'énoncé, f désigne une fonction infiniment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un unique point $x_0 \in [0,1[$ où f' s'annule. On suppose également que $f''(x_0) > 0$. On se donne également une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable.

17. Montrer qu'on a, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{x_0}^1 g(x)\sin(tf(x))\, dx = g(x_0)\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\, dx + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Pour tout $x \in [x_0, 1]$, on définit

$$h(x) = \sqrt{|f(x) - f(x_0)|}$$

18. (a) Montrer que la fonction h définit une bijection de $[x_0, 1]$ sur $[0, h(1)]$.

    (b) Montrer que la fonction h est dérivable en x_0 à droite, et que $h'(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$.

    On admet que la bijection

$$h \ : \ \begin{cases} [x_0, 1] \to [0, h(1)] \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$$

    admet une application réciproque $h^{-1} : [0, h(1)] \to [x_0, 1]$ qui est infiniment dérivable.

19. Montrer que, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{x_0}^{1} \sin(tf(x))\, dx = \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

20. On suppose que $x_0 \in]0, 1[$. Montrer que pour $t \to +\infty$,

$$\int_{0}^{1} g(x) \sin(tf(x))\, dx = g(x_0) \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$