DM bis n°6

Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder

À traiter : pour tous parties I et II et IV. Les 5/2 traiteront la partie V. les élèves passant les ÉNS les parties III, V et VI.

Dans tout ce texte d désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Ce problème est pour l'essentiel consacré au théorème de Brouwer dont sera déduit à la fin du sujet, le théorème de Schauder.

Théorème de Brouwer — *Soient $\mathcal{C}$ un convexe compact non vide d'un espace euclidien $\mathbf{E}$ de dimension d et f une application continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe un élément x^* de $\mathcal{C}$ tel que $f(x^*) = x^*$.*

Plan : La première partie démontre un résultat technique classique et qui sera utilisé à la fin du problème : le théorème de projection sur un convexe. Toutes les questions de cette parties sont à connaitre pour les concours. La deuxième s'intéresse au théorème de Brouwer et à une généralisation en dimension 1. La troisième partie démontre le théorème Brouwer dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est un triangle de $\mathbf{R}^2$, par une méthode combinatoire. La quatrième partie déduit de la troisième le théorème de Brouwer en dimension 2, lorsque $\mathcal{C}$ est d'intérieur non vide. En admettant le résultat de la quatrième partie en dimension quelconque on montre enfin la forme générale du théorème dans la partie V. La sixième et ultime partie déduit du théorème de Brouwer le théorème de Schauder qui en est une généralisation en dimension infinie et un théorème crucial de l'analyse fonctionnelle.

Partie I

Théorème de projection sur un fermé convexe en dimension finie

1. (a) Soient $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $\mathcal{K}$ un compact non vide de $\mathbf{E}$ et x_0 un point de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe un élément y_0 de $\mathbf{K}$ tel que : $\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{K})$.

   (b) On suppose maintenant que $\mathbf{E}$ est de *dimension finie* et $\mathcal{F}$ désigne un fermé non vide de $\mathbf{E}$. Soit x_0 un point de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe un élément y_0 de $\mathcal{F}$ tel que :
$$\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{F}). \tag{1}$$
   Montrer brièvement sur un exemple qu'il n'existe pas forcément un et un seul élément y_0 vérifiant (1).

   (c) On ne suppose plus que $\mathbf{E}$ est de *dimension finie* mais $\mathcal{F}$ désigne un fermé non vide de $\mathbf{E}$ inclus dans un sous-espace vectoriel $\mathbf{H}$ de $\mathbf{E}$ de dimension finie. Montrer qu'il existe un élément y_0 de $\mathcal{F}$ tel que :
$$\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{F}).$$

   (d) On considère dans cette question $\mathbf{E}$ espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire, $\langle\cdot|\cdot\rangle$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $\mathbf{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ de dimension finie et $\mathcal{C}$ un fermé non vide de $\mathbf{E}$ *convexe* et inclus dans $\mathbf{H}$. Montrer que pour tout élément x de $\mathbf{E}$, il existe un et un seul élément de y de $\mathcal{C}$ tel que :
$$\|x - y\| = \mathrm{d}(x, \mathcal{C}), \tag{2}$$
   élément que dans la suite nous noterons $\pi_{\mathcal{C}}(x)$.
   Pour $x \in \mathbf{E}$, $\pi_{\mathcal{C}}(x)$ s'appelle projeté de x sur $\mathcal{C}$, l'application
$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ x \mapsto \pi_{\mathcal{C}}(x)$$
   s'appelle projection sur $\mathcal{C}$.
   Ce résultat se généralise dans le cadre d'espces de Hilbert.

2. *Etude de la projection sur un fermé convexe*

   Dans cette question on garde les notations de 1. (d)

   (a) Soit $x \in \mathbf{E}$. Montrer que pour tout élément y de $\mathcal{C}$, $\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \leq 0$.
   Indication : on pourra considérer $N \; : \; [0,1] \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \|x - (ty + (1-t)\pi_{\mathcal{C}}(x))\|^2$.

   (b) Réciproquement, montrer que si il existe un élément u de $\mathcal{C}$, tel que pour tout élément y de $\mathcal{C}$, $\langle x - u | y - u\rangle \leq 0$, alors $u = \pi_{\mathcal{C}}(x)$.

   (c) Montrer que pour tout x et tout y éléments de $\mathbf{E}$, $\langle x - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle \geq \|\pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2$. En déduire que $\pi_{\mathcal{C}}$ est 1-lipschitzienne.

Partie II

Théorème de Brouwer en dimension 1

1. Dans cette question on prend $d = 1$ et $\mathbf{E} = \mathbf{R}$.
2. Montrer le théorème de Brouwer.
3. Montrer que le théorème de Brouwer est encore vrai si l'on ne suppose plus f continue, mais croissante.
4. Le théorème de Brouwer est-il encore vrai si l'on ne suppose plus f continue, mais décroissante.

Partie III

Théorème de Brouwer dans le cas d'un triangle

On considère les trois points de $\mathbf{R}^2$, $A = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $C = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et T le triangle plein de sommets A, B et C, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de ces trois points, encore noté $[A, B, C]$. Dans la suite le mot *triangle* désignera un triangle plein

Soit f une application continue de T dans T. Nous allons montrer que f admet un point fixe. Nous commencerons par des résultats de combinatoire qui fourniront le lemme de Sperner qui constitue en quelque sorte une version discrète du théorème de Brouwer.

1. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{R}$ celui de ses arêtes. Pour tout élément s de $\mathcal{S}$ on note $\deg(s)$ et on appelle degré de s, le nombre d'arêtes dont s est une extrémité. On rappelle la formule due à Euler :
$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \deg(s) = 2|\mathcal{R}|.$$
   Montrer que le nombre de sommets de degré impair est pair (lemme des poignées de mains).

2. On note A' le milieu de $[B, C]$, B' celui de $[A, C]$ et C' celui de $[A, B]$. On dispose de 4 triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{2}$, $[A, B', C']$, $[A', B, C']$, $[A', B', C]$ et $[A', B', C']$ et on note $\mathcal{T}_1$ l'ensemble de ces quatre triangles. en divisant alors de même façon chaque triangle de $\mathcal{T}_1$ en 4 triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{4}$, on obtient un ensemble $\mathcal{T}_2$ de 16 triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{4}$. Plus généralement on construit en répétant l'opération, pour tout entier $n \geq 1$, un ensemble $\mathcal{T}_n$ de 4^n triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{2^n}$ et l'on note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de ces 4^n triangles, que l'on appelle triangulation d'ordre n de T.

   (a) Représenter $\mathcal{T}_3$.

   (b) Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On définit une application c_{n_0} de l'ensemble $\mathcal{N}_{n_0}$ des sommets de $\mathcal{T}_{n_0}$ dans $\{1, 2, 3\}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

      i. $c_{n_0}(A) = 1, c_{n_0}(B) = 2, c_{n_0}(C) = 3$.

      ii. L'image par c_{n_0} d'un élément S de $\mathcal{N}_{n_0}$ qui appartient à un des côté du triangle T est égal à l'une des deux valeurs que prend f_{n_0} en les extrémités de ce côté, par exemple si $S \in [A, B]$ alors $c_{n_0}(S) = 1$ ou 2.

   On dit d'une telle application que c'est un *bon coloriage de* la triangulation $\mathcal{T}_{n_0}$.

   Par ailleurs on introduit le graphe non orienté $\mathcal{G}_{n_0}$ dont l'ensemble des sommets est la réunion de $\mathcal{T}_{n_0}$ et de $\{Z\}$, où Z est le complémentaire de l'intérieur de T, deux sommets de G sont reliés par une arête s'ils ont en commun un côté telle que l'image par c_{n_0} d'une de ses extrémité soit 1, l'autre 2.

   Attention! *le mot* sommet *désigne dorénavant deux choses distinctes : les sommets du graphe $\mathcal{G}$, et les sommets des éléments de $\mathcal{T}_{n_0}$.*

   Montrer que le degré de Z est impair. Montrer que le degré d'un sommet de $\mathcal{G}$ autre que Z est 2 ou 1 ou 0. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les images de ses sommets par c_{n_0}, pour que son degré soit 1.

   (c) Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{T}_{n_0}$ tel que c_{n_0} prenne sur ses sommets les trois valeurs 1, 2 et 3. *Ceci constitue un cas particulier en dimension 2 du lemme de* Sperner.

3. On note $g = f - \mathrm{id}_T$, application de T dans $\mathbf{R}^2$ et l'on note g_1 sa première composante et g_2 sa seconde. Enfin on définit l'application

$$c \; : \; T \to \{1, 2, 3\} \, ; \; (x, y) \mapsto \begin{cases} 3, & \text{si } g_2 < 0, \\ 1, & \text{si } g_2 \geq 0 \text{ et } g_1 \geq 0, \\ 2, & \text{si } g_2 \geq 0 \text{ et } g_1 < 0. \end{cases}$$

   (a) On suppose que f est sans point fixe. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction c_n de c à l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des sommets de $\mathcal{T}_n$ est un bon coloriage.

   (b) En appliquant le lemme de Sperner à $\mathcal{T}_n$ pour tout entier $n \geq 1$, déduire que f admet un point fixe.

On a montré la forme particulière du théorème de Brouwer :
Toute application de T dans T continue admet un point fixe.

Partie IV

Théorème de Brouwer Dans le cas d'un compact convexe d'intérieur non vide

On se donne $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension d.
Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact de $\mathbf{E}$. On suppose que $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.
Soit l'application

$$j \; : \; \mathbf{E} \to \mathbf{R} \, ; \; x \mapsto \inf \left\{ \alpha \in \mathbf{R}_+^* \,\middle|\, \frac{1}{\alpha} \cdot x \in \mathcal{C} \right\}$$

1. Montrer que j est bien définie et que pour tout x et tout y vecteurs de $\mathbf{E}$, tout réel $\lambda \geq 0$, on a $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ et $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$.
2. Montrer qu'il existe des réels m et M strictement positifs tels que pour tout $x \in \mathbf{E}$, $m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|$.
3. Montrer que $\mathcal{C} = \{x \in \mathbf{E} | j(x) \leq 1\}$.
4. On pose $h \; : \; \mathbf{E} \to \mathbf{E} \, ; \; x \mapsto \begin{cases} \frac{j(x)}{\|x\|} \cdot x, & \text{pour } x \neq 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$ Montrer que h réalise un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ sur la boule unité de $\mathbf{E}$, $B_{\mathrm{f}}(0, 1)$.
5. Montrer que Les convexes compacts de $\mathbf{E}$ d'intérieurs non vides sont homéomorphes.
6. Déduire de la question précédente que dans le cas où $d = 2$, toute application f d'un convexe compact de $\mathbf{E}$ d'intérieur non vide dans lui-même, continue, admet un point fixe.

   On admet dans la suite que ce résultat se généralise dans le cas où d est un entier naturel non nul quelconque

Partie V

Théorème de Brouwer Dans le cas général

1. Dans cette sous-question K désigne un convexe compact de $\mathbf{R}^d$ contenant 0 et non réduit à un point. On note E_K le sous-espace vectoriel engendré par K.
   Montrer qu'il existe p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de K linéairement indépendants tels que E_K soit engendré par $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
   Soit l'application $\theta \; : \; \mathbf{R}^p \to E_K \, ; (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \mapsto \lambda_1 x_1 + \ldots, + \lambda_p x_p$. Montrer que si l'on pose

$$\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p | \lambda_1 > 0, \ldots \lambda_p > 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_p < 1\} \, ,$$

   alors $\theta(\Delta) \subset K$,
2. Déduire de ce qui précède que K est d'intérieur non vide pour la topologie induite sur E_K.
3. Démontrer le théorème de Brouwer.

Partie VI

Théorème de Schauder

Dans cette partie on utilisera la forme général du théorème de Brouwer, pour le généraliser en dimension quelconque sous la forme suivante :

Théorème de Schauder — *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$ *de dimension quelconque, muni d'un produit scalaire. Soient* $\mathcal{C}$ *un convexe compact non vide de* $\mathbf{E}$ *et* f *une application de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{C}$*, continue. Alors* f *admet un point fixe.*

Dans la suite $\mathbf{E}$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbf{E}$, $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, $\mathcal{C}$ un convexe compact non vide de $\mathbf{E}$ et et f une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, continue.

1. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\mathrm{o}}(x_i, \varepsilon)$. On pourra raisonner par l'absurde.
2. Soit ε un réel strictement positif.
   (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathbf{E}_\varepsilon$ de $\mathbf{E}$ de dimension finie tel que si l'on pose $F_\varepsilon := \mathbf{E}_\varepsilon \cap \mathcal{C}$ on ait, pour tout élément x de $\mathcal{C}$, :
   $$\mathrm{d}(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$
   (b) Montrer que F_ε est fermé. On désignera, cf. première partie par π_{F_ε} la projection sur F_ε.
   (c) Montrer que $\pi_{F_\varepsilon} \circ f$ admet un point fixe.
3. En déduire le théorème de Schauder.

Le théorème de Schauder s'utilise dans la preuve d'existence de solutions d'équations différentielles.

⋆ ⋆

⋆