Devoir de rentrée, filière MP

Notations

Pour tout couple d'entiers naturels (n, p) on note $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial p *parmi* n, égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

I Suites et séries hypergéométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *hypergéométrique* lorsqu'il existe deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbf{R}[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}. \tag{1}$$

On dit alors que P et Q sont des polynômes associés à la suite hypergéométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. Montrer qu'une suite géométrique est hypergéométrique.
2. Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite de terme général

   $$u_n = \binom{n}{p}$$

   est hypergéométrique.
3. Démontrer que l'ensemble des suites vérifiant la relation (1), avec

   $$P = X(X-1)(X-2) \text{ et } Q(X) = X(X-2),$$

   est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite hypergéométrique de polynômes associés P et Q. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $p(n_0 = 0)$ et, pour tout entier $n \geq n_0$, $Q(n) \neq 0$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

II Les polynômes de Laguerre

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, on définit les applications Φ_n et L_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi_n(x) = \mathrm{e}^{-x}x^n \text{ et } L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x).$$

1. Déterminer L_0 , L_1, L_2 et L_3.

   Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.
2. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n.

   Préciser pour $k = 0, 1, ..., n$, le coefficient $c_{n,k}$ dans l'écriture de cette application :

   $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k.$$
3. Pour tout nombre réel x, exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L_n'(x)$.

4. En remarquant que $\Phi_{n+1}^{(n+1)}$ est la dérivée n^{e} de l'application $x \mapsto x\Phi_n(x)$ démontrer l'égalité
$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x),$$
valable pour tout nombre réel x.
5. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+2)} = (\Phi'_{n+1})^{(n+1)}$ pour démontrer l'égalité
$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x),$$
valable pour tout nombre réel x.
6. En déduire que L_n est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle
$$xy''(x) + (1-x)y' + ny(x) = 0. \tag{2}$$
7. Soit P une application polyomiale non constante solution sur $\mathbf{R}$ de (2). Montrer que son degré est n.
8. Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de (2) polynomiales est un espace vectoriel dont on donnera une base.

III La loi hypergéométrique

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ [1].

Soient deux entiers naturels A et n tels que $n \leq A$ et p un nombre réel compris strictement entre 0 et 1. On suppose $pA \in \mathbf{N}$ et on note $q = 1 - p$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que Y suit la loi *hypergéométrique de paramètre* (n, p, A), lorsque $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{\binom{pA}{k}}{\binom{qA}{n-k}\binom{A}{n}}. \tag{3}$$
On note alors $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

A Premiers résultats

1. Formule de Vandermonde
En étudiant le coefficient de degré N du polynôme $(1+X)^{u+v}$, montrer pour tout u, tout v et tout N entiers naturels, la *formule de Vandermonde* :
$$\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}. \tag{4}$$
2. Donner une interprétation combinatoire de la formule de Vandermonde.
3. Vérifier que la formule (3) définie bien une loi de probabilité.

Soit Y une variable aléatoire telle que $\hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

4. Calculer l'espérance de X.
5. Montrer que la suite $(\mathbf{P}(Y = k))_{k \in \mathbf{N}}$ est hypergéométrique.

1. La définition précise de ce terme sera vue en cours d'année, et n'est pas utile à la résolution du problème.

B Modélisation

On considère deux urnes contenant chacune A boules dont pA sont blanches et qA sont noires.

On tire simultanément, de manière équiprobable, n boules dans la première urne. On note Y le nombre de boules blanches obtenues.

On tire également, de manière équiprobable, n boules dans la deuxième urne, mais successivement et avec remise. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de la variable Z Donner l'espérance et la variance de Z.
2. Démontrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

C Calcul de la variance

On se propose d'utiliser la modélisation du tirage dans la première urne pour retrouver la valeur de l'espérance et pour calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, p, A)$. Pour cela, on numérote de 1 à pA chacune des boules blanches contenues dans la première urne et, pour tout entier naturel $i \in [\![1, pA]\!]$, on considère la variable aléatoire Y_i qui est la fonction caractéristique de l'événement « la boule numérotée i a été tirée ». c'est-à-dire que Y_i prend la valeur 1 si la boule numérotée i a été tirée et 0 sinon.

1. Exprimer Y à l'aide des Y_i et retrouver la valeur de l'espérance de Y.
   Comparer la à celle de Z.
2. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq pA$, démontrer que la variable aléatoire $Y_i Y_j$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
3. En déduire la valeur de la variance de Y et la comparer à celle de Z.

D Résultats

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{H}(n, p, A)$. On fixe n et p. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Montrer que
$$\lim_{A \to \infty} \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}.$$
2. Interpréter et commenter ce résultat...