❏ 1 – Charge volumique nulle dans conducteur

À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge, montrer que la densité volumique de charge peut être considérée comme nulle dans un conducteur ohmique homogène parcouru par des courants variables.

N.B. : un conducteur ohmique est un milieu conducteur dans lequel la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ est vérifiée où γ représente la conductivité du milieu (voir chapitre 4.4 pour plus de détails).

❏ 2 – Décharge d'un conducteur dans l'air

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R, uniformément chargée et abandonnée dans l'air se décharge d'autant plus rapidement que l'air est humide.

En considérant l'air comme un milieu faiblement conducteur de conductivité γ, de densité volumique de charge ρ nulle et où la loi d'Ohm $\vec{\jmath} = \gamma\vec{E}$ est vérifiée, déterminer l'évolution de la charge de la sphère au cours du temps. Expliquer l'observation citée ci-dessus.

❏ 3 – Couplage électromagnétique

1. On considère un condensateur plan, de section circulaire S (rayon a), d'axe Oz et de distance inter-armatures d. On note $q(t) = \sigma(t)S$ la charge de l'armature située en $z = d$ (l'autre étant en $z = 0$). On néglige les effets de bord. On soumet ce condensateur plan à une différence de potentiel variant dans le temps suffisamment lentement pour admettre que le champ électrique s'écrive $\vec{E} = -\dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

   Montrer qu'il règne aussi un champ magnétique dans l'espace interarmatures et donner son expression en un point M quelconque de cette région.

2. On considère un solénoïde infiniment long d'axe Oz, parcouru par un courant variable $i(t)$. Ce courant varie suffisamment lentement pour considérer que le champ magnétique créé s'écrive de la même manière qu'en régime stationnaire.

   (a) Montrer qu'il règne aussi un champ électrique variable en un point M situé à l'intérieur du solénoïde et donne son expression.

   (b) Qu'en est-il à l'extérieur du solénoïde ?

❏ 4 – Champ tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{W}$ défini en coordonnées cylindriques par $W_r = 0$; $W_\theta = W_0\dfrac{r}{r_0}$ si $r \leq r_0$ ou $W_\theta = W_0\dfrac{r_0}{r}$ si $r > r_0$ et $W_z = 0$.

1. Justifier l'appellation de *champ de tourbillon*.
2. Exprimer la circulation de $\overrightarrow{W}$ sur le cercle de centre O, d'axe Oz et de rayon r
3. Calculer en tout point $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{W}$ puis vérifier la réponse de la question précédente par application du théorème de Stokes.
4. Calculer la divergence en tout point.
5. Si le champ étudié ici est un champ magnétostatique, quelle est la distribution de courants correspondante.

❏ 5 – Détermination de champs statiques à l'aide des équations de Maxwell

Les exemples qui suivent ont déjà été traités à l'aide des théorèmes de Gauss (électrostatique ou gravitationnel) ou d'Ampère (lois *intégrales*). Nous pouvons aussi établir les expressions des champs créés par ces distributions à l'aide des lois *locales*.

L'étude des symétries et des invariances est toujours une étape obligée. Elle permet de prévoir la direction du champ créé par la distribution (de charge, de courant ou de masse) ainsi que les coordonnées dont dépendent les composantes du champ.

1. En respectant ce travail préalable et et utilisant les équations de Maxwell (et le formulaire pour les expressions des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques et sphériques), déterminer

   (a) le champ électrostatique créé par la distribution volumique de charge suivante

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 > 0 & \text{si} \quad 0 < z < a/2 \\ \rho = -\rho_0 & \text{si} \quad -a/2 < z < 0 \\ \rho = 0 & \text{si} \quad |z| > a/2 \end{cases}$$

(b) le champ magnétostatique créé par un cylindre infiniment long, d'axe Oz et parcouru par un courant uniforme ($\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ si $r < a$ et nul ailleurs).

(c) le champ gravitationnel créé par une boule de rayon a et de masse volumique uniforme $\mu = \mu_1$ (on écrira au préalable l'équation locale associée au théorème de Gauss gravitationnel).

2. Le champ gravitationnel terrestre est approximativement le suivant en coordonnées sphériques, où R_T est le rayon de la Terre et $\mathcal{G}_0$ une constante positive

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{G}} = -G_0 \dfrac{r}{R_1} \vec{e}_r & \text{si} \quad r < R_1 < R_T \\ \vec{\mathcal{G}} = -G_0 \vec{e}_r & \text{si} \quad R_1 < r < R_T \end{cases}$$

Déterminer la masse volumique en tout point de la Terre dans le cadre de ce modèle.

❏ 6 – Répartition des charges au voisinage d'une cellule

Une membrane cellulaire assimilée au plan $x = 0$, sépare une cellule (située dans le demi-espace $x < 0$) d'un électrolyte (situé dans le demi-espace $x > 0$).

Dans ce problème, toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de la variable x.

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane, de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule, indique une variation de potentiel électrique négative.

On schématise alors le potentiel par la fonction $V : x \mapsto V(x)$ telle que

$$\begin{cases} V(x) = -V_0 \quad \text{pour} \quad x \leq 0 \\ V(x) = -V_0 \exp\left(-\dfrac{x}{a}\right) \quad \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Justifier le signe de V_0.
2. Exprimer le champ électrique en tout point de l'espace.
3. En déduire la densité volumique de charge ρ en tout point de l'espace. Commenter son signe.

Lors de la traversée d'une surface, le champ électrique est discontinu si la surface est chargée. Cette discontinuité est donnée part la relation dite « de passage » :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$

où M est un point de la surface séparant deux milieux numérotées 1 et 2, $\vec{E}_1$ (respectivement $\vec{E}_2$) est le champ électrique au voisinage de M dans le milieu 1 (respectivement 2) et $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge en M. $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire, normal à la surface en M et orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

4. Déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la membrane cellulaire.
5. Calculer la charge totale contenue dans un cylindre droit d'axe Ox, de base S, s'étendant de $x \to -\infty$ à $x \to +\infty$. Commenter ce résultat.

❏ 7 – Diode à vide – adapté de Mines-Ponts MP 2013

Thomas Edison observa la rupture du filament et le noircissement du verre des lampes incandescentes. En 1880, il construisit une ampoule avec la surface interne recouverte d'une feuille d'étain et constata qu'un courant circulait entre le filament et la feuille d'aluminium uniquement lorsque celle-ci était à un potentiel supérieur à celui du filament : des électrons étaient émis par le filament chaud et attirés par la feuille, fermant ainsi le circuit. Cette unidirectionalité du courant fut appelée l'**effet Edison**. Bien qu'Edison ne voyait pas d'application pour cet effet, il le breveta en 1883, mais ne l'étudia plus.

En 1904, cherchant à élaborer un système de détection des ondes hertziennes, John Fleming dépose le brevet d'un **tube redresseur** à deux électrodes, invention souvent considérée comme l'acte de naissance de l'électronique.

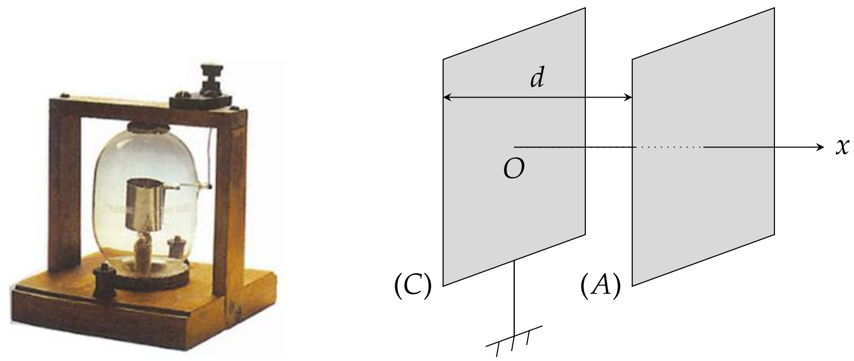
La valve de Fleming était à géométrie cylindrique (figure 1a). On peut décrire son principe dans la géométrie de la figure 1b : une diode à vide est constituée de deux plaques métalliques parallèles (C) et (A) , de même surface S et distantes de d entre lesquelles a été fait le vide. La cathode (C) est maintenue à un potentiel nul. Elle émet des électrons de vitesse négligeable. On note U le potentiel de l'anode (A).

1. À quelle condition sur U, les électrons rejoignent-ils l'anode ? On supposera cette condition vérifiée par la suite.

On admet que les électrons ont des trajectoires rectilignes perpendiculaires aux plaques et on se place en régime stationnaire.

On note I le courant circulant **de (*A*) vers (*C*)**, $V(x)$ le potentiel électrostatique, $\rho(x)$ la densité volumique de charge et $v(x)$ la vitesse des électrons entre les plaques à une distance x de (C).

2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, relier $V(x)$ à $v(x)$.
3. Montrer que $\rho(x)v(x)$ est constant et l'exprimer en fonction de I et S.
4. Exprimer $\rho(x)$ en fonction de $V(x)$, de ε_0 et de la constante $\alpha = \dfrac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$.
5. En déduire une équation différentielle vérifie par $V(x)$.
6. Après avoir multiplié l'équation précédente par $V'(x) = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, intégrer l'équation précédente. On admettra que le champ électrique est nul en $x = 0$.
7. En déduire l'expression de $V(x)$ puis tracer la caractéristique tension-courant $I = f(U)$ de ce dipôle. Justifier son nom de **diode** ou de **tube redresseur**.



(a) Valve de Fleming (1903) (b) Principe

FIGURE 1 – Diode à vide

❏ 8 – Floculation

Une solution contient des particules sphériques (particules colloïdales) de rayon $R \approx 10^{-8}$ à 10^{-6} m , de centre O, de charge Q ainsi que des ions de charges $\pm e$ considérés ponctuels. Cette solution est appelée *solution colloïdale*.

Autour de la particule, les ions se répartissent avec des densités volumiques

- $n_+(r) = n_0 \exp\left(-\dfrac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right)$ pour les cations ;
- $n_-(r) = n_0 \exp\left(-\dfrac{-eV(r)}{k_\mathrm{B}T}\right)$ pour les anions.

n_0 est une constante dépendant du nombre total d'ions en solution, $V(r)$ est le potentiel électrique à une distance r de O, T est la température du milieu et $k_\mathrm{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ est la constante de Boltzmann.

Dans l'eau, la seule modification des équations de l'électrostatique par rapport à celles du vide est le remplacement de ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

Dans tout l'exercice, on supposera que $eV(r) \ll k_\mathrm{B}T$.

1. Pourquoi peut-on considérer les ions ponctuels ?
2. De l'écriture de deux relations entre $V(r)$ et la densité volumique de charges $\rho(r)$, déduire le potentiel électrique $V(r)$ et le champ électrique $\vec{E}$ autour d'une particule colloïdale.
3. Comparer l'interaction entre deux particules colloïdales en l'absence ou en présence d'ions.
4. La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique des particules colloïdales. Montrer qu'un excès d'ions (ajout de sel) est néfaste à cette stabilité.

Remarque : on utilisera avec profit $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2(rV)}{\mathrm{d}r^2}$