Utilisation des théorèmes de sommation par paquets

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, I est un ensemble au plus dénombrable.

Cas des familles positives

Les théorèmes de ce paragraphe donne des **équivalences** à la sommabilité.

On considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls.**

Sommation par paquets pour les familles de réels positifs ou nuls

*Soit $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une partition de I. Alors on a l'***équivalence** *des propositions suivantes :*

1. *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable*
2. *Pour tout entier naturel n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, et la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.*

Dans le cas où 1 et 2 sont satisfaites : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)=\sum\limits_{i\in I} u_i.$

Cas particulier : Suite double : $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ à termes **positifs ou nuls**. $I=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, partition $\{\{p\}\times\mathbf{N}\}_{p\in\mathbf{N}}$,

Interversion de sommation, Fubini-Tonelli

La famille de réels positifs ou nuls $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable **si et seulement si** :
- pour tout élément p de $\mathbf{N}$, la série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q}$ converge,
- la série $\sum\limits_{p\geq 0}\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge.

Si tel est le cas alors : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\sum\limits_{i\in I} u_i$

Comme p et q jouent des rôles symétriques, on utilise ce résultat pour résoudre le type d'exercices suivants.

Exercice : *montrer l'existence et donner la valeur de* $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$.

Solution —
La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ est une famille de réels POSITIFS ou nuls.

Pour tout $p\in\mathbf{N}$, $\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q}$ converge, la somme de cette série (téléscopique, géométrique...) se calcule sans mal :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \text{...............} = \text{...............} = s(p).$$

La série $\sum\limits_{p\geq 0} s(p)$ converge et sa somme se vaut $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} s(p)=$ .... = ... $=S$.

Donc par le théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $q\in\mathbf{N}$, $\sum\limits_{p\geq 0} u_{p,q}$ converge et $\sum\limits_{q\geq 0}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge de plus

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=S.$$

☞ On procéde ainsi quand on ne sait pas calculer la somme de $\sum\limits_{p\geq 0} u_{p,q}$, tout au plus sait-on que cette série converge
Notons que S est la somme de la famille sommable $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$

Cas des familles de réels ou complexes

Les théorèmes de ce paragraphe exigent la sommabilité et donnent des propriétés impliquées par la sommabilité.

On considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$.

Sommation par paquets pour les familles de réels ou complexes
Soit $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une partition de I. On suppose la famille $(u_i)_{i\in I}$ SOMMABLE. Alors — pour tout entier naturel n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, — la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$ converge, — enfin $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)=\sum\limits_{i\in I} u_i$.

☞ Pour prouver la sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$, on utilise souvent le théorème de sommation par paquets pour une famille de réels positifs ou nuls

• Sommabilité.
— Soit $n_0\in\mathbf{N}$. La famille $(|u_i|)_{i\in I_{n_0}}$est sommable. En effet...... Calculons sa somme $\sum\limits_{i\in I_{n_0}} |u_i| = ... = ... = p_{n_0}$.
— La série $\sum\limits_{n\geq 0} p_n$ converge, en effet............

Donc $(|u_i|)_{i\in n_0}$ et donc $(u_i)_{i\in n_0}$ sont sommables.

• Calcul de la somme. Soit $n_0\in\mathbf{N}$. On sait que $(u_i)_{i\in I_{n_0}}$ est sommable. Calculons sa somme : $\sum\limits_{i\in I_{n_0}} u_i = ... = ... = s_{n_0}$.
On sait, par le théorème de sommation par paquets des familles sommables d'éléments de $\mathbf{K}$, que $\sum\limits_{n\geq 0} s_n$ converge et que : $\boxed{\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} s_n.}$

Théorème de Fubini Lebesgue pour les suites doubles réelles oucomplexes
Soient $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ *une famille de réels ou de complexes. On suppose que la famille* $(|u_{p,q}|)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ *est* SOMMABLE. *Alors on a l'égalité, toute les quantités qui y figurent étant bien définies (dans* $\mathbf{C}$*),* $$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\sum_{(p,q)\in\mathbf{N}^2} u_{p,q}=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Exercice type : *montrer l'existence et donner la valeur de* $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$.

Solution—

• Sommabilité.

— Pour tout élément p de $\mathbf{N}$, $\sum\limits_{q\geq 0} |u_{p,q}|$ converge, sa somme (téléscopique, géométrique...) se calcule et vaut $s(p)$.
— La série $\sum\limits_{p\geq 0} s(p)$ converge et sa somme se vaut S,

Donc par le th. de **Fubini-Tonelli**, la famille positive $(|u_{p,q}|)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ et donc la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ sont sommables.

• Calcul de la somme. On sait que pour tout $p\in\mathbf{N}$, $\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q}$ converge, la somme de cette série (téléscopique, géométrique...) se calcule et vaut t_p. Par le théorème de **Fubini-Lebesgues**, toute les termes suivants sont bien définis et

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty} t_p.$$