DM n$^{\text{o}}$1

Pour le jour de la rentrée.

Attention ce devoir est assez long et peu exiger plus de vingt heures de travail. Sa résolution peut par contre être fractionnée et étalée sur un longue période.

Avant de rédiger lire le polycopié sur la rédaction et s'y conformer

Les copies non conformes seront à refaire.

Exercice 1

— Dans tout cet exercice, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbf{K}[X]$, noté P.

1. Soit p un entier naturel non nul. Pour tout élément k de $\{0, 1, \dots, n\}$, on note r_k le reste dans la division euclidienne de k par p. Montrer que le reste R de la division euclidienne de P par $x^p - 1$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}$.

   Indication : Supposer, pour commencer, que P est un monôme.
2. Soient p et q des entiers naturels non nuls et d leur PGCD. Montrer, grâce à l'algorithme d'Euclide et à la question précédente, que le PGCD de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ est $X^d - 1$.
3. Dans le cas où K est le corps $\mathbf{C}$, retrouver ce résultat en raisonnant sur les facteurs premiers de $X^p - 1$ et $X^q - 1$.

Exercice 2

On munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, on désignera par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et par $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. Soit l'arc paramétré $\gamma_0 \ : \ [0, \mathrm{sh}(1)] \to \mathbf{R}^2 \, ; \ t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t))$. Montrer que cet arc est régulier, autrement dit que $\vec{\gamma}'$ ne s'annule pas, et calculer sa longueur, définie par $\int_0^{\mathrm{sh}(1)} \|\vec{\gamma}'\|$.
2. Soient U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ à valeurs <u>positives ou nulles</u>. On suppose qu'il existe un réek $k > 0$ tel que pour tout $m \in U$:

$$\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq k f(m). \tag{1}$$

   Soient $[a, b]$ un segment non réduit à un point et $\gamma \ : \ [a, b] \to \mathbf{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$. Enfin, on pose $m_0 = \gamma(a)$ et $m_1 = \gamma(b)$.

   Montrer que l'application $f \circ \gamma$, notée g, est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que pour tout élément t de $[a, b]$,

$$g'(t) \leq k \|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\| g(t).$$

3. Montrer que
$$f(m_1) \leq f(m_0)e^{k\ell},$$
où ℓ désigne la longueur de l'arc γ.
Indication. On pourra écrire $g(t)$ sous la forme $h(t)\exp\left(k\int_a^t \|\overrightarrow{\gamma}'(s)\| \mathrm{d}s\right)$.
4. On suppose que U est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.

(5/2) L'ouvert U étant de nouveau quelconque, donner une propriété topologique qu'il doit vérifier pour montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.

Exercice 3

On note $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'on se propose d'étudier l'ensemble
$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbf{R}) | \forall (x,y) \in U, y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \right\}.$$

Pour tout réel $R > 0$ on note considère l'arc (I, γ_R), où $\gamma_R = (R\cos, R\sin)$.

1. Donner, pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$, la nature géométrique du support de l'arc (I, γ_R), c'est-à-dire de l'ensemble $\gamma_R(I)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbf{R})$. Montrer que f est élément de S si et seulement si $f \circ \gamma_R$ est constante pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$.
3. On note $V = \mathbf{R}_+^* \times I$ et l'on considère l'application
$$p \;:\; V \to \mathbf{R}\,;\; (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$
Montrer que p réalise une bijection de V sur U de classe $\mathcal{C}^1$, dont on déterminera la bijection réciproque. Cette dernière est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
Soit $S' = \left\{ g \in \mathcal{C}^1(V,\mathbf{R}) | \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0_{V\to\mathbf{R}} \right\}$.
   (a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbf{R})$, $f \circ p$ est un élément de $\mathcal{C}^1(V,\mathbf{R})$ et que
   $$\Phi \;:\; \mathcal{C}^1(U,\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(V,\mathbf{R})\,;\; f \mapsto f \circ p$$
   est une bijection.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(U\mathbf{R})$. Montrer que f est élément de S si et seulement si $\Phi(f)$ est élément de S'.
   (c) Détreminer S' puis S.

Exercice 4 — Sommes de Riemann —

1. Déterminer le limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$
2. Déterminer le limite éventuelle de la suite $(\tilde{S}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,
$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2(k^3+n^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

Indication : Introduire la quantité $\tilde{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\frac{k}{n}$.

4. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Exercice 5 — Etude de $\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$. —

1. Soit x un réel différent de 1 de -1. Montrer l'existence de

$$\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

   5/2. Montrer l'existence de l'intégrale pour tout réel,

2. En utilisant les somme de Riemann, montrer que :

$$\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|<1, \\ 2\pi\ln(|x|] & \text{si } |x|>1. \end{cases}$$

   5/2. Déterminer par un argument de continuité la valeur de l'intégrale pour $x=\pm 1$.

3. On se propose de retrouver le résultat par un autre biais. Posons $D = \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, et

$$f \;:\; D \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

   (a) Pour tout x élément de D exprimer $f(-x)$, $f(x^2)$ et pour x de plus non nul, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, en fonction de $f(x)$.

   (b) En déduire f.

+ Exercice 6 — Bernoullieries —

Les polynômes de Bernoulli jouent un rôle crucial en mathématiques, ils sont incontournables pour les concours. Il convient de connaitre par cœur ce qui suit et qui sera évaluer lors de la seconde interrogation écrite.

On se propose de montrer de deux manières différentes le résultat suivant :
Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un et un seul polynôme P_n tel que pour tout réel θ,

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

On dit que P_n, est le n^{e} polynôme de Bernoulli.

1. *Unicité*
   Soit un entier $n \geq 1$. On suppose qu'il existe des polynômes P_n et $\tilde{P}_n$ tels que pour tout réel θ,

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta) = \tilde{P}_n(\cos\theta).$$

   Montrer que $P_n = \tilde{P}_n$.

2. *Méthode recourant aux nombres complexes*

   Soit n un entier naturel.

   (a) Soit θ un réel.
   Montrer que $\cos(n\theta) = \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$. En déduire qu'il existe un polynôme P_n tel que l'on ait (2).

   (b) Montrer que le polynôme P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant c_n.
   Indication : l'exercice 1 peut être utile !

3. *Méthode recourant à une récurrence*

   (a) Soit θ un réel.
   Exprimer pour tout entier $n \geq 2$, $\cos((n+1)\theta)$ au moyen de $\cos((n-1)\theta)$, $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$.

   (b) En utilisant la sous-question précédente, montrer par récurrence l'existence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des polynômes de Bernoulli, dont on précisera au passage le degré et le coefficient dominant c_n.

4. *Une propriété de minimisation*
   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = \frac{1}{c_n}P_n$, de sorte que T_n soit unitaire.

   (a) Montrer que pour tout élément x de $[-1, 1]$ et tout entier $n \geq 1$, $T_n(x) = \frac{1}{c_n}\cos\big(n \arccos(x)\big)$.

   (b) Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\{|T_n(x)|, x \in [-1, 1]\}$ admet un plus grand élément M_n à déterminer. Déterminer les points x de $[-1, 1]$ en lesquels $|T_n(x)| = M_n$, on précisera pour chacun d'eux le signe de $T_n(x)$.

   (c) Soit U un polynôme à coefficients réels unitaire de degré n. Montrer que $\{|U(x)|, x \in [-1, 1]\}$ admet un plus grand élément M'_n.

   (d) Montrer que $M'_n \geq M_n$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et étudier les valeurs de $U - T_n$ aux points en lesquels $|T_n|$ est maximum.

Exercice 7 — Développement asymptotique —

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation d'inconnue réelle x, $\tan x = x$, admet une unique solution, élément de $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$; on la notera dans la suite x_n. On illustrera ce résultat par une figure.

2. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   a. Montrer que $x_n \sim n\pi$ $(n \to \infty)$.
   b. Montrer que $x_n - n\pi$ tend vers un réel l à déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$.
   c. Pour tout entier naturel n on pose : $a_n := x_n - n\pi - l$. Donner un équivalent simple de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 —Inégalité de Cauchy & Schwarz —

Soit $(\Omega(P))$ un espace probabilisé fini.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs réelles définies sur $(\Omega(P))$ de variance nulle. Montrer que Z prend une valeur avec la probabilité 1.

2. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles définies sur $(\Omega(P))$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})| \leq \sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}.$$

Pour tout événement C, on définit $\mathbf{1}_E$ la variable aléatoirea à valeurs réelles définie sur Ω par :

$$\mathbf{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in C, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. (a) Soit C un événement. Déterminer l'espérance de $\mathbf{1}_C$.
   (b) Soient A et B des événements. Déterminer le produit $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.
   (c) Montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
   Indication On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy & Schwarz à $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
4. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega(P))$ à valeur dans $\mathbf{N}$ et d'espérance strictement positive. Montrer que :

$$\mathrm{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}.$$

Indication. Utiliser l'inégalité de Cauchy & Schwarz .

Exercice 9 — Marches aléatoire —

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui toutes suivent la loi de Rademacher, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on convient que S_0 est la variable aléatoire presque sûrement nulle. On considère par ailleurs la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0}.$$

On rappelle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{S_n=0} = \begin{cases} 1 \text{ si } S_n(\omega) = 0, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$

On rappelle le théorème suivant :

Lemme de coalition *Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\mathbf{N}^*$ toute application f de $\mathbf{R}^i$ dans $\mathbf{R}$, toute application g de $\mathbf{R}^j$ dans $\mathbf{R}$, les variables aléatoires*

$$f(X_1, X_2, ..., X_i) \text{ et } g(X_{i+1}, X_{i+2}, ..., X_{i+j})$$

sont indépendantes.

1. Que représente la variable aléatoire N ? Exprimer l'événement $\{N \neq 0\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
   Exprimer l'événement $\{N = +\infty\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
2. Montrer que :

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0).$$

3. On admet que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. Déterminer $\mathbf{P}(N = +\infty)$.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.