

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

★ ★ ★

## NOTATIONS ET OBJECTIFS DU SUJET

Dans tout ce problème,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbf{R}$  de la forme  $I = [a, b]$  avec  $a < b$ . On note  $C^0(I, \mathbf{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ . On munit cet espace de la norme  $\|\cdot\|_I$  définie par  $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$ . Si  $A$  est une partie de  $C^0(I, \mathbf{R})$  et si  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$ , on dit que  $f$  est une limite uniforme d'éléments de  $A$  s'il existe une suite  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  d'éléments de  $A$  telle que  $\|f - f_n\|_I \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On note  $\mathbf{N}$  l'ensemble des entiers positifs (ou nuls). Si  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $\mathbf{R}_n[X] \subset \mathbf{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $n$ . On dit qu'un polynôme  $p \in \mathbf{R}[X]$  est unitaire si  $p(X) = 1$  ou bien s'il existe un entier  $n \geq 1$  et un polynôme  $r \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$  tels que  $p(X) = X^n + r(X)$ .

La restriction à  $I$  permet de voir  $\mathbf{R}[X]$  comme un sous-espace vectoriel de  $C^0(I, \mathbf{R})$ , ce que nous faisons. Nous munissons alors  $\mathbf{R}_n[X]$  et  $\mathbf{R}[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_I$ .

On rappelle le théorème de Weierstrass.

**Théorème.** Toute fonction  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  est limite uniforme d'éléments de  $\mathbf{R}[X]$ .

L'essentiel du problème (les parties 3 à 7) est inspiré par la question suivante : quelles fonctions continues sur  $I$  sont limites uniformes de polynômes à coefficients entiers ? Le problème comporte sept parties. Les résultats des questions 2.4 à 2.8 ne sont pas utilisés dans la suite. La partie 5 n'utilise pas les résultats des parties précédentes.

## 1. EXISTENCE ET UNICITÉ D'UNE MEILLEURE APPROXIMATION

Soit  $n \in \mathbf{N}$  et soit  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$ . On pose  $m = \inf_{p \in \mathbf{R}_n[X]} \|f - p\|_I$ .

**1.1.** Montrer que l'ensemble  $C$  des  $g \in \mathbf{R}_n[X]$  tels que  $\|f - g\|_I \leq 1 + m$  est un compact non vide de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

**1.2.** Montrer qu'il existe un élément  $p \in \mathbf{R}_n[X]$  tel que  $\|f - p\|_I = m$ . En déduire que si  $m = 0$ , on a alors  $f \in \mathbf{R}_n[X]$ .

On suppose dans la suite de cette partie que  $m > 0$ .

**1.3.** Soit  $k$  le nombre de solutions dans  $I$  de l'équation  $|f(x) - p(x)| = m$ ; on suppose que  $k \leq n + 1$  et on note ces solutions  $x_1 < \dots < x_k$ , avec  $x_i \in I$ .

Montrer qu'il existe un polynôme  $q \in \mathbf{R}_n[X]$  tel que  $q(x_i) = f(x_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**1.4.** Pour  $\delta > 0$ , on pose

$$U_\delta = \{x \in I \mid \exists i \in \{1, \dots, k\} \quad |x - x_i| < \delta\}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|f(x) - q(x)| < \varepsilon$  pour tout  $x \in U_\delta$ .

**1.5.** Soit  $\ell = \|p - q\|_I$  et soit  $\varepsilon > 0$ , à ajuster ensuite. Soit  $\delta$  comme à la question 1.4. Pour  $t \in ]0, 1[$ , on pose  $p_t = (1 - t)p + tq$ . Montrer que pour tout  $x \in I$ , on a

$$|f(x) - p_t(x)| \leq \begin{cases} (1 - t)m + t\varepsilon & \text{si } x \in U_\delta; \\ t\ell + \sup_{y \in I \setminus U_\delta} |f(y) - p(y)| & \text{si } x \in I \setminus U_\delta. \end{cases}$$

**1.6.** Montrer que pour un choix convenable de  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in ]0, 1[$  tel que  $\|f - p_t\|_I < m$ . En déduire que l'équation  $|f(x) - p(x)| = m$  admet au moins  $n + 2$  solutions distinctes dans  $I$ .

**1.7.** On suppose qu'il existe  $p_1, p_2 \in \mathbf{R}_n[X]$  tels que  $\|f - p_1\|_I = \|f - p_2\|_I = m$ . Montrer que  $p_1 = p_2$  (on pourra appliquer la question 1.6 à  $(p_1 + p_2)/2$ ).

## 2. CAPACITÉ D'UN COMPACT

Soit  $K$  une partie compacte de  $\mathbf{R}$ . Si  $f \in C^0(K, \mathbf{R})$ , on pose  $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ . On suppose que  $K$  est un ensemble infini.

**2.1.** Montrer que si  $n \geq 1$  est un entier, il existe un polynôme  $q \in \mathbf{R}[X]$ , unitaire de degré  $n$ , tel que  $\|q\|_K = \inf_p \|p\|_K$ , où  $p$  parcourt l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$ . On pose  $t_n = \|q\|_K = \inf_p \|p\|_K$ .

Montrer que si  $a < b$  et  $K = [a, b]$ , un tel polynôme  $q$  est unique. On le note  $T_n^K$ .

**2.2.** Soit  $\{\ell_n\}_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que pour tout  $m, n \geq 1$ , on a

$$\ell_{m+n} \leq \ell_n \frac{n}{m+n} + \ell_m \frac{m}{m+n}.$$

Soit  $\ell = \inf_{n \geq 1} \ell_n \in \{-\infty\} \cup \mathbf{R}$ . Montrer que  $\ell_n \rightarrow \ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**2.3.** Montrer que la suite  $\{t_n^{1/n}\}_{n \geq 1}$  admet une limite, notée  $d_1(K)$ .

**2.4.** On pose  $w_1 = 1$  et, pour tout  $n \geq 2$ , on pose  $w_n = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in K^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$ . Montrer que la suite  $\{w_n^{2/(n(n-1))}\}_{n \geq 2}$  est décroissante. En déduire qu'elle converge ; on notera  $d_2(K)$  sa limite.

**2.5.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $t_n \leq w_{n+1}/w_n$ .

On pourra montrer qu'il existe  $x_1, \dots, x_n \in K$  tels que  $w_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$ , puis considérer  $p(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_n)$  et choisir judicieusement  $x_{n+1} \in K$ .

**2.6.** Montrer qu'il existe  $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$  tels que pour tout polynôme unitaire  $p \in \mathbf{R}[X]$  de degré  $n$ , on a

$$w_{n+1} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_1^{n-1} & p(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & p(x_{n+1}) \end{pmatrix} \right|.$$

En déduire que  $w_{n+1} \leq (n+1)w_n t_n$ .

**2.7.** Soit  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  une suite de réels qui converge vers une limite  $u$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $z_n = (u_1 + \cdots + u_n)/n$ . Montrer que  $z_n \rightarrow u$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**2.8.** Montrer que  $d_1(K) = d_2(K)$ .

**Remarque.** Cette limite commune est appelée la *capacité* de  $K$ .

### 3. POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier strictement positif.

**3.1.** Montrer qu'il existe un et un seul polynôme  $T_n$  tel que  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ . Quel est son degré ?

**3.2.** Montrer que  $2^{1-n}T_n$  est un polynôme unitaire qui admet  $n+1$  extrema dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**3.3.** Soit  $I = [-1, 1]$ , soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^n$  et soit  $q$  un élément de  $\mathbf{R}_{n-1}[X]$  tel que  $\|f - q\|_I = \inf_{p \in \mathbf{R}_{n-1}[X]} \|f - p\|_I$  (cf. la question 1.2). On suppose que  $\|f - q\|_I < 2^{1-n}$ .

Montrer que le polynôme  $2^{1-n}T_n - (f - q)$  a au moins  $n$  racines distinctes dans  $I$ . En déduire que si  $I = [-1, 1]$ , alors  $T_n^I = 2^{1-n}T_n$  (le polynôme  $T_n^I$  est défini à la question 2.1).

**3.4.** Calculer  $T_n^{[a,b]}$  et en déduire que  $\|T_n^{[a,b]}\|_{[a,b]} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$  puis que  $d_1([a, b]) = (b-a)/4$  (où  $d_1$  est défini à la question 2.3).

**3.5.** Montrer que si  $I = [a, b]$  avec  $b - a \geq 4$ , et que  $p$  est un polynôme non constant à coefficients entiers, alors  $\|p\|_I \geq 2$ .

**3.6.** En déduire que si  $b - a \geq 4$ , une fonction  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement si  $f$  est elle-même un polynôme à coefficients entiers.

#### 4. L'APPROXIMATION PAR DES POLYNÔMES À COEFFICIENTS ENTIERS

On suppose dans le reste du problème que  $I = [a, b]$  avec  $b - a < 4$ .

**4.1.** Montrer qu'il existe un polynôme unitaire non constant  $p \in \mathbf{R}[X]$  tel que  $\|p\|_I < 1$ .

**4.2.** Soit  $r \in \mathbf{R}[X]$  un polynôme de degré  $d \geq 1$ . Montrer que si  $s \in \mathbf{R}[X]$ , il existe  $n \geq 0$  et  $b_0, \dots, b_n \in \mathbf{R}_{d-1}[X]$  tels que

$$s(X) = b_0(X) + b_1(X)r(X) + \dots + b_n(X)r(X)^n.$$

**4.3.** Soit  $d$  le degré du polynôme  $p$  construit à la question 4.1 et soient  $\ell_0 \geq 1$  et  $k \geq \ell_0$  des entiers ; on pose  $m = \ell_0 d$ . Montrer qu'il existe des réels  $b_{i,\ell} \in [0, 1]$  pour  $0 \leq i \leq d-1$  et pour  $\ell \geq \ell_0$ , tels que l'on peut écrire  $p(X)^k = r_k(X) + z_k(X) + p_k(X)$ , où

$$r_k(X) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq d-1 \\ \ell \geq \ell_0}} b_{i,\ell} X^i p(X)^\ell,$$

où  $z_k$  est un polynôme unitaire de degré  $kd$  à coefficients entiers et où  $p_k$  est un polynôme de degré au plus  $m - 1$  et à coefficients dans  $[0, 1]$ .

**4.4.** Choisir soigneusement  $\ell_0$  et montrer qu'il existe alors deux entiers  $k' > k$  tels que  $q = z_{k'} - z_k$  est un polynôme unitaire non constant à coefficients entiers vérifiant  $\|q\|_I < 1$ .

**Définition.** Soit  $J(I)$  l'ensemble des  $x \in I$  tels que  $p(x) = 0$  pour tout polynôme  $p$  à coefficients entiers vérifiant  $\|p\|_I < 1$ . Par la question 4.4, l'ensemble  $J(I)$  est fini.

**4.5.** Déterminer  $J(I)$  lorsque  $I = [a, b]$  avec  $-1 < a < b < 1$ , puis lorsque  $I = [-1, 1]$ .

**4.6.** Soit  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  une fonction qui est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers. Montrer qu'il existe un polynôme  $p$  à coefficients entiers tel que  $f(x) = p(x)$  pour tout  $x \in J(I)$ .

**4.7.** Montrer qu'il existe un polynôme unitaire  $q$  à coefficients entiers tel que  $\|q\|_I < 1$  et que, si  $x \in I$  vérifie  $q(x) = 0$ , alors  $x \in J(I)$ .

**Notation.** Dans le reste de cette partie,  $q$  désigne un tel polynôme et  $n$  son degré.

**4.8.** Montrer qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $p \in \mathbf{R}[X]$ , il existe  $\tilde{p} \in \mathbf{Z}[X]$  vérifiant  $\|p - \tilde{p}\|_I \leq M$ . On pourra utiliser la question 4.2.

**4.9.** Soit  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  une fonction telle que pour tout  $x \in I$  vérifiant  $q(x) = 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(y) = 0$  pour tout  $y \in I$  vérifiant  $|x - y| < \delta$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . En appliquant le théorème de Weierstrass (rappelé dans l'introduction) à  $f/q^k$  pour  $k$  grand, montrer qu'il existe un polynôme  $p$  à coefficients entiers tel que  $\|f - p\|_I < \varepsilon$ .

**4.10.** Soit  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  une fonction telle que pour tout  $x \in I$  vérifiant  $q(x) = 0$ , on a  $f(x) = 0$ . Montrer que  $f$  est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers.

**4.11.** Montrer qu'une fonction  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement s'il existe un polynôme  $p$  à coefficients entiers tel que  $f(x) = p(x)$  pour tout  $x \in J(I)$ .

**4.12.** Montrer qu'une fonction  $f \in C^0([-1, 1], \mathbf{R})$  est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement si  $f(-1) \in \mathbf{Z}$ ,  $f(0) \in \mathbf{Z}$ ,  $f(1) \in \mathbf{Z}$  et  $f(-1)$  et  $f(1)$  sont de même parité.

## 5. POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

**Définitions.** Soit  $n \geq 1$ . On considère des polynômes en les  $n$  variables  $T_1, \dots, T_n$  et à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ , c'est à dire  $p(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$  avec  $a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbf{Z}$  et où la somme est finie. L'ensemble de ces polynômes est noté  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  et forme un anneau.

Un monôme est un polynôme de la forme  $a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$  avec  $a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$ . Son degré est le  $n$ -uplet  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ . Nous dirons qu'un  $n$ -uplet  $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$  est *plus petit* qu'un  $n$ -uplet  $\underline{j} \in \mathbf{N}^n$  si  $\sum_k i_k < \sum_k j_k$  ou bien si  $\sum_k i_k = \sum_k j_k$  et qu'il existe  $k$  tel que  $i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}$  et  $i_k < j_k$ .

**5.1.** Montrer que si  $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$  et  $\underline{j} \in \mathbf{N}^n$  sont des  $n$ -uplets avec  $\underline{i} \neq \underline{j}$ , alors soit  $\underline{i}$  est plus petit que  $\underline{j}$ , soit  $\underline{j}$  est plus petit que  $\underline{i}$ .

**5.2.** Montrer que si l'on se donne un  $n$ -uplet  $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$ , l'ensemble des  $n$ -uplets  $\underline{j} \in \mathbf{N}^n$  qui sont plus petits que  $\underline{i}$  est fini.

**Définitions.** Si  $p(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$  est un polynôme non nul, on note  $\text{dom}(p)$  le coefficient  $a_{i_1, \dots, i_n}$  du monôme  $T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$ , où  $(i_1, \dots, i_n)$  est le plus grand des degrés pour lesquels  $a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$ . Le degré  $(i_1, \dots, i_n)$  correspondant est le *degré* de  $p$ , noté  $\deg(p)$ .

Si  $\pi$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  et si  $p \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ , on note  $p^\pi$  le polynôme  $p(T_{\pi(1)}, \dots, T_{\pi(n)})$ . On dit que  $p$  est un *polynôme symétrique* si  $p^\pi = p$  pour toute permutation  $\pi$ . Les éléments  $S_1, \dots, S_n$  de  $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  sont définis par la formule  $\prod_{i=1}^n (X - T_i) = X^n - S_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-1} X + (-1)^n S_n$ . Ce sont donc des polynômes symétriques. On a  $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} T_{i_1} \cdots T_{i_k}$ .

**5.3.** Soit  $p \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  un polynôme symétrique non nul et soit  $(i_1, \dots, i_n)$  le degré de  $p$ . Montrer que  $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$ .

**5.4.** Soit  $p$  un polynôme comme dans la question précédente. On pose

$$d_1 = i_1 - i_2, \quad d_2 = i_2 - i_3, \dots, \quad d_{n-1} = i_{n-1} - i_n, \quad d_n = i_n.$$

Montrer que

- ou bien  $p = \text{dom}(p) \cdot S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n}$  ;
- ou bien  $\deg(p - \text{dom}(p) \cdot S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n})$  est plus petit que  $\deg(p)$ .

**5.5.** Montrer que si  $p \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  est un polynôme symétrique, il existe un polynôme  $q \in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  tel que  $p = q(S_1, \dots, S_n)$ .

## 6. ENTIERS ALGÈBRIQUES

**Définition.** On dit qu'un nombre complexe  $x$  est un *entier algébrique* s'il existe un polynôme unitaire (non nul) à coefficients entiers  $p \in \mathbf{Z}[X]$  tel que  $p(x) = 0$ .

**6.1.** Montrer que si  $x \in \mathbf{Q}$ , alors  $x$  est un entier algébrique si et seulement si  $x \in \mathbf{Z}$ .

**6.2.** Si  $a(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{Z}[X]$ , on note  $c(a)$  le pgcd de  $a_0, \dots, a_n$ . Montrer que si  $a, b \in \mathbf{Z}[X]$ , on a alors  $c(ab) = c(a)c(b)$ .

On pourra montrer que si un nombre premier divise  $c(ab)$ , alors il divise  $c(a)$  ou  $c(b)$ .

**6.3.** Montrer que si  $x$  est un entier algébrique, il existe un et un seul polynôme  $p_x \in \mathbf{Z}[X]$  unitaire tel que  $p_x(x) = 0$  et tel que  $p_x$  est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ .

Montrer que  $p_x$  est à racines simples dans  $\mathbf{C}$ .

**Définition.** Dans les notations de 6.3, les racines  $x_1, \dots, x_n$  de  $p_x$  dans  $\mathbf{C}$  (y compris  $x$  lui-même) s'appellent les conjugués de  $x$ . On a alors  $p_x(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_n)$ .

**6.4.** Dans les notations ci-dessus, soit  $r$  un élément de  $\mathbf{Q}[X]$  tel qu'il existe  $i$  vérifiant  $r(x_i) = 0$ . Montrer que  $p_x$  divise  $r$  dans  $\mathbf{Q}[X]$ .

**6.5.** Soient  $x$  et  $y$  des entiers algébriques et soient  $y_1, \dots, y_m$  les conjugués de  $y$ . Montrer (par exemple en utilisant la question 5.5) que les coefficients du polynôme

$$p_x(X - y_1) \cdots p_x(X - y_m)$$

sont dans  $\mathbf{Z}$ . En déduire que  $x + y$  est un entier algébrique.

**6.6.** Montrer que si  $x$  et  $y$  sont des entiers algébriques, alors  $xy$  est un entier algébrique.

**Définition.** Soit  $I = [a, b]$  et soit  $F(I)$  l'ensemble des  $x \in I$  qui sont des entiers algébriques dont tous les conjugués appartiennent aussi à  $I$ . Cet ensemble s'appelle le noyau de Fekete de  $I$ .

**6.7.** Soit  $q$  un polynôme à coefficients entiers tel que  $\|q\|_I < 1$ , soit  $x$  un élément de  $F(I)$  et soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ses conjugués. Montrer que  $\prod_{i=1}^n q(x_i)$  est un élément de  $\mathbf{Z}$ , puis que  $q(x) = 0$ . En déduire que  $F(I) \subset J(I)$ .

**6.8.** En considérant par exemple le polynôme  $X(X^2 - 1)(X^2 - 2)$ , calculer  $J(I)$  pour tout intervalle  $I = [-a, a]$  avec  $a \leq 3/2$ .

## 7. LE NOYAU DE FEKETE

Le but de cette partie est de montrer que pour tout intervalle  $I = [a, b]$  de longueur  $b - a < 4$ , on a en fait  $F(I) = J(I)$ .

**Définition.** Un pavé est une partie  $P$  de  $\mathbf{R}^n$  de la forme

$$P = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [-1, 1]\},$$

où  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n$ . Le volume de  $P$  est alors  $\text{vol}(P) = 2^n |\det(V)|$ , où  $V$  est la matrice de  $v_1, \dots, v_n$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . Pour  $h \in \mathbf{R}^n$ , on note

$$h + P = \{h + v \mid v \in P\}.$$

Soit  $\mathbf{Z}^n$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont entières.

**7.1.** Montrer que si  $P$  est un pavé tel que  $\text{vol}(P) > 1$ , il existe  $w \neq w'$  dans  $P$  tels que  $w - w' \in \mathbf{Z}^n$ . On pourra observer que dans le cas contraire,  $h + P$  et  $h' + P$  sont disjoints pour tous  $h \neq h'$  dans  $\mathbf{Z}^n$ .

**7.2.** Soit  $x \in \mathbf{R}$  un entier algébrique et soient  $x_1 = x, x_2, \dots, x_m$  ses conjugués. On suppose que  $m \geq 2$  et qu'il existe  $n \in \{2, \dots, m\}$  tel que  $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{R}$ . On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et on note  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application linéaire correspondante. Si  $r > 0$ , on note  $B(r)$  l'ensemble des  $a \in \mathbf{R}^n$  tels que  $|a_n| \leq r$  et que  $|a_i| \leq 1/2$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Montrer que si  $r$  est assez grand, il existe  $h \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$  tel que  $h \in f^{-1}(B(r))$ .

**7.3.** Soit  $h \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$  comme à la question précédente. On pose

$$s(X) = h_1 + h_2X + \cdots + h_nX^{n-1},$$

où  $h_1, \dots, h_n$  sont les coordonnées de  $h$ . Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on a  $|s(x_i)| \leq 1/2$  et  $s(x_i) \neq 0$ .

**7.4.** On conserve les notations de la question 7.2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer que si  $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbf{R}$ , il existe  $p \in \mathbf{Z}[X]$  tel que  $|p(x_i) - y_i| < \varepsilon$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  (on pourra s'inspirer des questions 4.8 et 4.9).

**7.5.** Soit à présent  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de nombres réels deux à deux distincts tel que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , le réel  $x_i$  est un entier algébrique qui admet au moins un conjugué qui n'est pas dans  $S$ . Montrer que si  $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}$  et si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $p \in \mathbf{Z}[X]$  tel que  $|p(x_i) - y_i| < \varepsilon$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**7.6.** Soit  $I = [a, b]$  avec  $b - a < 4$  et soit  $q$  un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que  $\|q\|_I < 1$ . En écrivant l'ensemble des racines de  $q$  dans  $I$  comme union disjointe  $F(I) \cup S$ , montrer qu'une fonction  $f \in C^0(I, \mathbf{R})$  telle que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in F(I)$  est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers.

**7.7.** Montrer que  $F(I) = J(I)$ .

FIN DU PROBLÈME