DS n°5

Les éléves traiteront un et un seul des trois sujets suivants

Le sujet ÉNS de 6 heures est à part.

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la régle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

SUJET 1

Type CENTRALE

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions (parties I et II). Dans la partie III, largement indépendante du reste du problème, on montre le principe du maximum faible pour le laplacien. Dans la partie IV, on établit un lien entre les fonctions harmoniques de deux variables et les fonctions développables en série entière, et on propose la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ dans la partie V.

Notations

- Dans ce préambule et dans les parties I et III, n désigne un entier strictement positif.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.
- Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{\mathrm{U}}$ désigne son adhérence et $\partial\mathrm{U}$ sa frontière.
- Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{R} > 0$, on désigne par $\mathrm{D}(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit
$$\mathrm{D}(a, \mathrm{R}) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \|x - a\| < \mathrm{R}\}$$
La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{\mathrm{D}(a, \mathrm{R})}$.
- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U},\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$
- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si
$$\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta f(x) = 0.$$
L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(\mathrm{U})$.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(\mathrm{U})$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(\mathrm{U})$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(\mathrm{U})$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A - On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose
$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto u(x)v(y).$$
On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

II.B - Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose,

$$g \,:\, \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Q 7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

Q 8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Q 9. Exprimer également $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Q 10. Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.$$

Q 11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est à dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

Q 12. Soient a, b, r_1, r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \quad \text{si} \quad \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \quad \text{si} \quad \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C - Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u \,:\, \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$f \,:\, \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; (r,\theta) \mapsto u(r)v(\theta).$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

Q 13. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

Q 14. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = 0 \tag{II.1}$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \tag{II.2}$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

Q 16. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 17. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

Q 19. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $r > 0$, $z(r) = \mathrm{Z}(\ln(r))$.

Q 20. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

III Principe du maximum faible

Soit U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) et $f\ :\ \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, connu sous le nom de principe du maximum faible.

> Si f est une fonction continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U, alors
> $$\forall x \in \mathrm{U}, \qquad f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial \mathrm{U}} f(y)$$
> où $\partial\mathrm{U}$ désigne la frontière de U.

III.A **-** Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathrm{U}}$.

Q 21. Montrer que f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{\mathrm{U}}$.

On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, $\Delta f(x) > 0$.

Q 22. Montrer que $x_0 \in \partial\mathrm{U}$ et en déduire que $\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) < \sup\limits_{y \in \partial \mathrm{U}} f(y)$.

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in \mathrm{U}$, justifier qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, et considérer la fonction φ définie, pour tout t réel, par $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.B **-** Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$.

Q 23. Montrer que g_ε est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et telle que $\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

Q 24. En déduire que $\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \leqslant \sup\limits_{y \in \partial \mathrm{U}} f(y)$.

Q 25. Soient f_1, f_2 deux fonctions continues sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur U. Montrer que si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur $\partial\mathrm{U}$, alors f_1 et f_2 sont égales sur U.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}) \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs complexes, se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ s'il existe une suite complexe (a_n) telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + \mathrm{i}y)^n.$$

Dans toute cette partie, f désigne une fonction se développant en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

IV.A **-**

Q 26. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ et que ses dérivées partielles se développent en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

On note u et v les parties réelle et imaginaire de f, de sorte que, quel que soit $(x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$,

$$u(x, y) \in \mathbb{R},\ v(x, y) \in \mathbb{R},\ f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i} v(x, y).$$

Q 27. Montrer que u et v sont harmoniques sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

IV.B **-** On admet le résultat suivant : une fonction h de $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ dans $\mathbb{C}$ se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ si et seulement si h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ et pour tout $(x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \mathrm{i} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$.

Q 28. Montrer que si f ne s'annule pas sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ alors $1/f$ se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

Q 29. Montrer que uv est harmonique sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

IV.C **-** Soit g une fonction de $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}) \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est harmonique.

Q 30. Montrer que la fonction h définie sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ par

$$h\ :\ (x,y)\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

Q 31. Montrer que si g appartient à $\mathcal{H}(\mathrm{D}(0,\mathrm{R}))$ alors il existe une fonction H se développant en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, telle que g soit la partie réelle de H.
On pourra considérer une série entière primitive de la série entière associée à la fonction h de la question précédente.

IV.D -

Q 32. Montrer que pour tout $r\in[0,\mathrm{R}[$, on a $f(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t),r\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Q 33. Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

Q 34. Montrer que $\forall r\in[0,\mathrm{R}[,\ |f(0)|\leqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(r\cos(t),r\sin(t))|$

Q 35. Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

Q 36. Montrer que si $|f|$ admet un maximum en 0, alors f est constante sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

Q 37. Montrer le théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.
On pourra procéder par l'absurde, supposer qu'il existe un polynôme ne s'annulant pas et considérer son inverse.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème de Dirichlet sur le disque unité ; autrement dit, il s'agit de déterminer, s'il y en a, la ou les fonctions f définies et continues sur $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$ (disque fermé), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathrm{D}(0,1)$, et telles que

$$\begin{cases}\Delta f=0\ \text{ sur }\ \mathrm{D}(0,1)\\ \forall t\in\mathbb{R},\ f(\cos(t),\sin(t))=h(t)\end{cases}$$

Pour cela, on pose, pour tout nombre complexe z tel que $|z|<1$,

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t\ \text{ où }\ \mathcal{P}(t,z)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\right)\ \text{(Re désigne la partie réelle)}$$

Q 38. Montrer que la fonction $z\mapsto\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$ est développable en série entière pour $|z|<1$ et calculer son développement en série entière, (cela signifie qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que pour tout nombre complexe z tel que $|z|<1$, $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$ est somme de la série $\sum a_n z^n$.
En déduire que la fonction $(x,y)\mapsto g(x+\mathrm{i}y)$ est une fonction harmonique sur $\mathrm{D}(0,1)$.

Q 39. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z|<1$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t=1$.

Q 40. Soit $\varphi\in\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z|<1$, $g(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\varphi^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$.

Q 41. Montrer que, pour tout $r\in[0,1[$ et tous réels t et θ,

$$\mathcal{P}(t,r\mathrm{e}^{i\theta})=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}$$

Q 42. Montrer que, pour tout $\delta \in]0, \pi[$ et tout réel φ, $\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[z \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}]{} 0$.

Q 43. En utilisant le théorème de Heine, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z| < 1$,

$$|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \frac{\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z)\, \mathrm{d}t + \varepsilon.$$

Q 44. Montrer l'existence et l'unicité de la solution au problème de Dirichlet étudié dans cette partie.

⋆ ⋆

⋆

SUJET2
CCP

Exercice 1

On définit deux fonctions :
- La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$;
- La fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $\mathrm{d}(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   — en calculant $f \circ g$;
   — en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Exercice 2

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $\mathrm{A} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathrm{A}}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in\mathrm{A}}$ n'est pas sommable.

Problème : séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(n\cdot) + b_n \sin(n\cdot))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels. Pour tout entier $n \geq 0$, $\cos(n\cdot)$ (resp. $\sin(n\cdot)$) désigne l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(nx)$(resp. $x \mapsto \sin(nx)$).

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la seconde partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $\mathrm{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Partie 1 : exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n}\cos(n\cdot)+\frac{1}{3^n}\sin(n\cdot)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, et tout réel x, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$
(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).
2. Ecrire la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.
3. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(n\cdot)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(n\cdot)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

1. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(n\cdot)+b_n\sin(n\cdot))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.
2. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(n\cdot)+b_n\sin(n\cdot))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

1. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(n\cdot)+b_n\sin(n\cdot))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$.
2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\ dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\ dx$ pour k et n entiers.
3. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(n\cdot)+b_n\sin(n\cdot))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f)=a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.

   Les 5/2 utiliseront sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\ dx = 0$. Les 3/2 le prouveront contre rémunération.
   On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f)=b_n$ et $\beta_0(f)=0$ (la démonstration n'est pas demandée).
4. Soit $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x)=\frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x)=\alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=\frac{\alpha_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx)+\beta_k(f)\sin(kx)).$$
   Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

5. Il est admis que si une fonction $h \in \mathrm{C}_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

   En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(n\cdot) + \beta_n(f)\sin(n\cdot))$ d'une fonction $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

6. Si $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.
7. Exemple. Soit $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
8. En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

9. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.
10. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
    Réservé 5/2 Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométriquen$\sum(a_n\cos(n\cdot) + b_n\sin(n\cdot))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
11. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n}\cos(n\cdot)$.