MP* LPK 22-23 DM nº 3

DM de sciences physiques nº 3

MP* LPK

À rendre Lundi 24 octobre 2022

Exercice 1

Tracé de lignes de champ électrostatique

Capacité numérique

À l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ électrostatique pour une distribution donnée.

Le travail est à réaliser avec le langage Python dans le notebook JUPYTER, intégré dans l'ENT.

Le fichier est préparé et accessible à l'adresse suivante :

https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/7aee-805295

N'oubliez pas de cliquer sur **Rendre ce travail** en haut à droite du document pour que je puisse corriger une fois le travail terminé.



Exercice 2

Pôles géographiques et magnétiques

Extrait d'un concours Mines-Ponts.

Calculatrice interdite

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires. Les parties A et B sont indépendantes entre elles.

La partie A est consacrée à la description dipolaire du champ géomagnétique (le dipôle disposé au centre de la Terre et modélisant des courants électriques dans le noyau de la planète). La partie B présente le modèle autodynamo du champ géomagnétique, susceptible de rendre compte des inversions du champ géomagnétique qui ont eu lieu dans le passé et ont laissé une trace dans les propriétés magnétiques de certains sédiments sous-marins.

2.1 Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \overrightarrow{m} de norme constante m, la direction du vecteur \overrightarrow{m} étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur \overrightarrow{e}_r local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

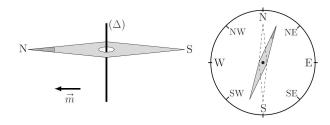


FIGURE 1

□ 1 – Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord? Cet équilibre est-il stable?

MP* LPK 22-23 DM n° 3

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ); légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période $\tau_{\rm osc}$.

 \square 2 – Montrer que la connaissance de m, $\tau_{\rm osc}$ et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\overrightarrow{M}=M_0\overrightarrow{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord. On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda=\frac{\pi}{2}-\theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

- \square 3 En vous aidant des informations fournies en fin de sujet, exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .
- \Box 4 Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud?

En un point P de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction \overrightarrow{e}_N du champ géomagnétique \overrightarrow{B} , projeté dans le plan horizontal, et *inclinaison magnétique* l'angle D formé par \overrightarrow{B} avec le nord magnétique local; l'inclinaison magnétique est positive si \overrightarrow{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ 5 − Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles »? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud?

2.2 Modèle autodynamo et fluctuations du champ

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau métallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (cf. fig. 2). Le système comporte N spires (circulaires de rayon a, de centre O et d'axe (Oz), qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon b < a, qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega(t)$ et le moment d'inertie I (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru par le même courant i(t) que les spires ; il est aussi entraîné par la rotation de la Terre avec un couple moteur $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma_0 \overrightarrow{e}_z$. Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée R.

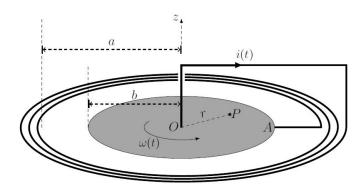


FIGURE 2 – Le modèle autodynamo pour le champ géomagnétique

On note $\overrightarrow{B}(P)$ le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P du disque tournant, avec r = OP; on supposera $N \gg 1$. Si $i(t) \neq 0$, on note $M_{r_{\max}} = -\frac{1}{i(t)} \int_0^{r_{\max}} r\overrightarrow{e}_z . \overrightarrow{B}(P) dr$; en particulier on pourra utiliser dans ce qui suit les intégrales M_a et M_b pour $r_{\max} = a$ ou b respectivement.

- \Box 6 Quelle est la direction de $\overrightarrow{B}(P)$? Quels sont les signes de M_a et M_b ? Comparer M_a et M_b . Expliciter l'inductance propre L du circuit électrique de la figure 2 en fonction notamment d'une de ces intégrales.
- $\ \Box$ 7 On suppose d'abord que le courant i(t) traverse le disque uniquement en ligne droite du point A de sa périphérie à O. Exprimer la force de Laplace d \overrightarrow{F}_L s'exerçant sur un élément de longueur du segment AO puis son moment d $\overrightarrow{\Gamma}_{L,O}$ au point O.

En déduire que le moment $\Gamma_L = \overrightarrow{\Gamma}_{L,O}$. \overrightarrow{e}_z des forces de Laplace, par rapport à l'axe Oz, exercées sur ce disque s'écrit

$$\Gamma_{\rm L} = -M_b i^2(t)$$

MP* LPK 22-23 DM n° 3

Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de A à O, on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

 \square 8 – La rotation du disque à une vitesse angulaire $\omega(t)$ induit une force électromotrice e(t) qui vérifie l'équation

$$e(t)i(t) + \Gamma\omega(t) = 0$$

Quelle est l'interprétation physique de cette équation?

□ 9 − Les grandeurs électriques et mécaniques sont couplées. Établir les équations régissant les évolutions du courant dans le noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i(t) \left(\alpha \,\omega(t) - \beta\right) \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \gamma - \delta \,i^2(t) \end{cases}$$

On exprimera les constantes positives α , β , γ et δ en fonction de R, L, M_b , I et Γ_0 .

Soit i_0 un courant constant arbitraire. On considère la fonction \mathcal{H} telle que

$$\mathcal{H}(\omega, i) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Li^2 - \frac{L\Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{IR}{M_b}\omega$$

- □ 10 − Calculer $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ et simplifier son expression. Comment peut on interpréter la fonction \mathcal{H} ? Déterminer les points du plan (i,ω) pour lesquels le gradient de \mathcal{H} s'annule. Comment s'interprètent ces points?
- ☐ 11 − Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure 3.

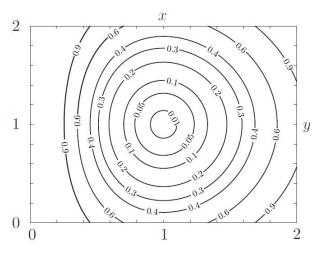


FIGURE 3 – Courbes de valeurs constantes définies par l'expression $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \ln(x) - y = c$. Les valeurs de c sont indiquées sur les courbes.

Données et formulaire utiles pour ce problème

Données numériques et constantes fondamentales

 $\begin{array}{lll} \text{Champ magnétique terrestre à l'équateur} & B_E = 3.0 \times 10^{-5} \, \text{T} \\ \text{Charge élémentaire} & e = 1.6 \times 10^{-19} \, \text{C} \\ \text{Durée du jour solaire moyen} & T_0 = 24 \, \text{h} = 8.6 \times 10^4 \, \text{s} \\ \text{Intensité du champ de pesanteur} & g_0 = 9.8 \, \text{m s}^{-2} \\ \text{Perméabilité magnétique du vide} & \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H m}^{-1} \\ \text{Rayon terrestre} & R_T = 6.4 \times 10^3 \, \text{km} \\ \text{Logarithme népérien du nombre 20} & \ln(20) \approx 3,0 \end{array}$

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \overrightarrow{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M}.\vec{R}) - R^2\vec{M}}{R^5}$$
 où $\vec{R} = \vec{OP}$ et $R = ||\vec{R}||$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.