DS n$^{\mathrm{o}}$1

PREMIER PROBLÈME

1. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, La formule de la somme d'une série géométrique de raison $-x$, réel *distinct* de 1, s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x},$$

soit

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En intégrant entre 0 et x la formule précédente et en mettant à profit la linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Soit après calcul :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.}$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque $x \geq 0$,

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|(-1)^n \frac{t^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+0}\mathrm{d}t,$$

soit :

$$\boxed{\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

(d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $x \leq 0$

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \left|(-1)^n \frac{t^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in [x, 0]$, comme $-1 < x \leq t \leq 0$ on a $0 \leq 1 + x \leq 1 + t$. Donc

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x} \mathrm{d}t \leq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x} \mathrm{d}t,$$

et donc après calcul :

$$\boxed{\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{1+x} \frac{|x|^{n+1}}{n+1}}$$

(e) On suppose $-1 < x \leq 1$.
Pour tout entier $n \geq 1$, puisque $|x| \leq 1$, on déduit de (c) et (d),

$$0 \leq \left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right| = \left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{A|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{A}{n+1},$$

avec $A = 1$ si $x \geq 0$, $A = \frac{1}{1+x}$ sinon. Donc par le lemme des gendarmes,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x).$$

Autrement dit : $\underline{\text{la série de terme général } (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \text{ est convergente de somme } \ln(1+x).}$

(f) On suppose $|x| > 1$. Par croissance comparée d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique

$$\left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc la série de terme général $\underline{(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \text{ diverge grossièrement.}}$

2. (a) Pour $x = \frac{1}{3}$, $\left|\ln(1+x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par 1. (c). La suite $(\frac{1}{(n+1)3^{n+1}})_{n \in \mathbf{N}^*}$ décroît vers 0 et prend des valeurs strictement supérieures à 10^{-8}, pour $n \in [\![0, 13]\!]$ et strictement inférieures pour $n \in [\![14, +\infty[\![$

Pour $\boxed{n = 14}$, on a que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8}.

(b) Pour $x = \frac{1}{8}$, on trouve de même que pour $\boxed{n = 7}$, on a que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8}.

(c) Pour $x = 1$, 1. (c) donne directement que pour $\boxed{n = 10^8}$ [1] on a que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8}.

1. là on fait grace du -1 !

3. (a) Par (e), la série de terme général$(-1)^n \frac{1^{n+1}}{n+1}$ converge et $\ln(1+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1^{n+1}}{n+1}$. Par changement d'indice de sommation « $k = n+1$ » cette égalité devient :

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$$

(b)

$$\sum_{k=2p+1}^{2N+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2}\right) + \left(\frac{1}{2p+3} - \frac{1}{2p+4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}\right)$$
$$= \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

par associativité[2] de l'addition.
Comme $2N+2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} R_p}$$

(c) Pour tout p et tout N, entiers tels que $0 < p \leq N$, par <u>décroissance</u> de l'application $f_a \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{1}{(a+2t)^2}$ il vient,

$$\int_p^{N+1} \frac{1}{(a+2t)^2}\mathrm{d}t \underbrace{\leq}_{①} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \underbrace{\leq}_{②} \int_{p-1}^{N} \frac{1}{(a+2t)^2}\mathrm{d}t,$$

soit après évaluation des intégrales,

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+a} - \frac{1}{2N+a+2}\right) \leq \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+a-2} - \frac{1}{2N+a}\right)}$$

2. Le sujet impose sagement de passer par une somme fine, en effet dans la somme d'une série le programme de MPSI n'autorise pas de regrouper des termes (cf. les familles sommables du cours de spé.).

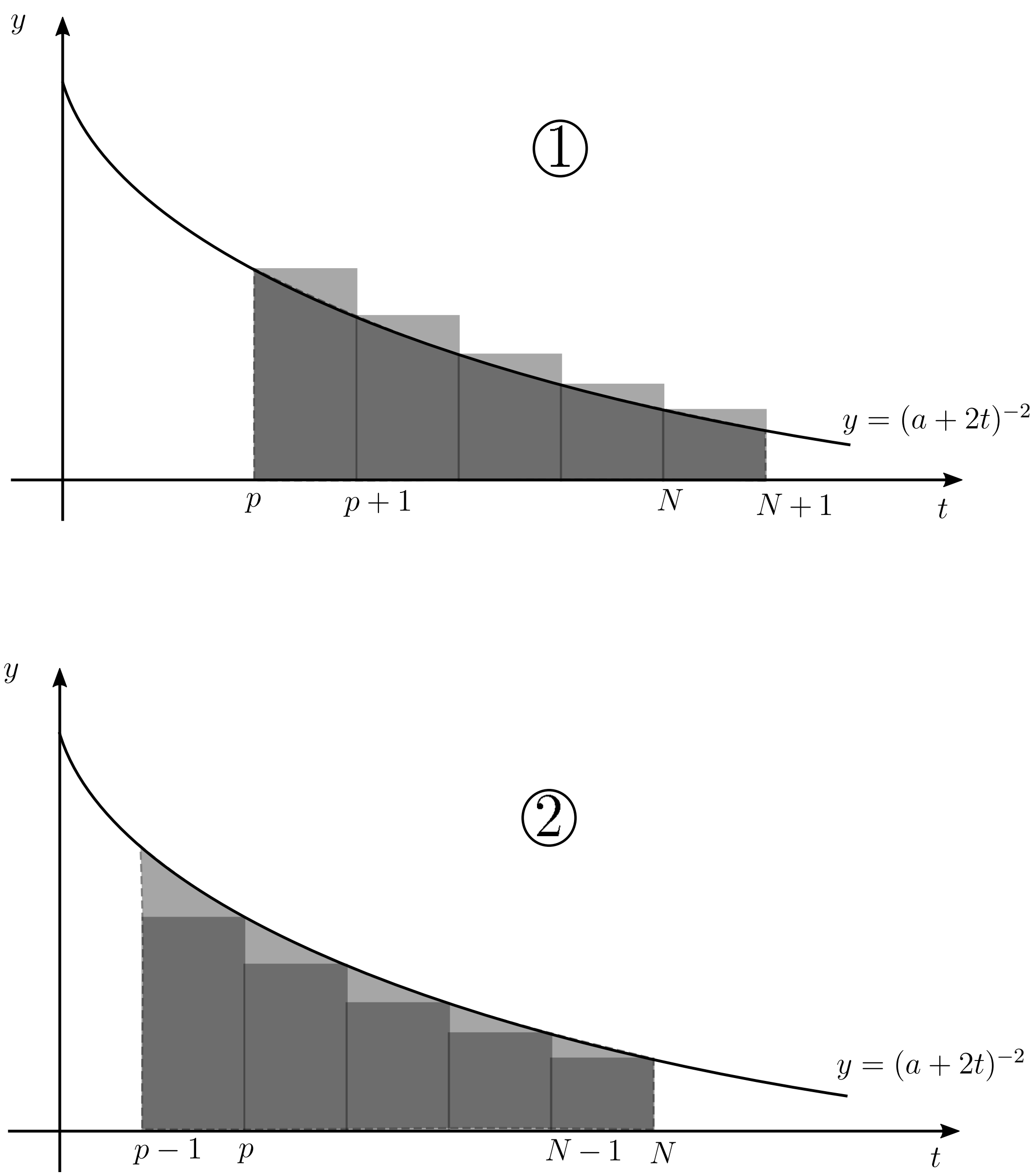

FIGURE 1 – Illustration de 3. (c)

(d)

Pour tout p et tout N, entiers tels que $0 < p \leq N$:

• la seconde inégalité du (c) donne en choisissant $a = 1$

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+1-2} - \frac{1}{2N+1}\right),$$

puis grâce à (b), en laissant tendre N vers $+\infty$, $R_p \leq \frac{1}{4p-2}$;

• la première inégalité donne quant à elle,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+2} - \frac{1}{2N+2+2}\right) \leq \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2},$$

puis en laissant tendre N vers $+\infty$, $\frac{1}{4p+4} \leq R_p$.

De ces deux points vient

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \frac{1}{4p+4} \leq R_p \leq \frac{1}{4p-2}}$$

Donc par le lemme d'encadrement : $4pR_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, autrement dit :

$$\boxed{R_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4p}}$$

(e) Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\ln(2) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + R_p$, ainsi d'après l'encadrement de (d) a-t-on :

$$0 \leq \ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{4p+4}\right) \leq \frac{1}{4p-2} - \frac{1}{4p+4} = \frac{6}{(4p-2)(4p+4)}$$

et *a fortiori*

$$0 \leq \ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{4p+4}\right) \leq \frac{6}{16p^2} = \frac{3}{8p^2}$$

parce que $(4p-2)(4p+4) = 16p^2+8(p-1) \geq 16p^2$. En particulier pour $\boxed{p = \left\lfloor \sqrt{\frac{3}{8}}\, 10^4 \right\rfloor + 1}$

on a que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{4p+4}$ est une valeur par défaut de de $\ln(2)$ à 10^{-8} près.
Cette méthode nécessite de calculer $2p+1$ termes, soit <u>12249 termes</u> contre plus de 10^8 par la méthode précédente !

4. On se propose de calculer $\ln(2)$ et $\ln(3)$

(a) On a $\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(4) - \ln(3) = \ln(2^2) - \ln(3) = 2\ln(2) - \ln(3)$ et de même $\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = 2\ln(3) - 3\ln(2)$ donc $(\ln(2), \ln(3))$ est la solution du système de Cramer :

$$\begin{cases} 2x - y = \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \\ 3x - 2y = -\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \end{cases},$$

soit après calculs :

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \\ y = 3\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \end{array}}$$

(b) Sans autre information on trouve :
$\boxed{\ln(2) \approx 0,69314718}$; l'erreur est inférieure à 3×10^{-8}, les six premières décimales sont *a priori* exactes ;
$\boxed{\ln(3) \approx 1,09861229}$; l'erreur est inférieure à 5×10^{-8} les six premières décimales sont *a priori* exactes.

Remarque. *Les valeurs approchées de* $\ln(2)$ *et* $\ln(3)$ *utilisées sont des sommes partielles de séries alternées dont le terme général décroît vers* 0*, nous verrons cette année que les termes successifs de ces sommes partielles oscillent autour de la somme de la série et que l'on dispose d'une majoration du reste. Ces considérations permetteraient d'affiner le calcul de la précision.*

5. Soient $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

(a) D'après 1.(b)

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{p+1} + \int_0^x (-1)^{2n} \frac{t^{2n}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

cette même égalité dans laquelle on aura substitué $-x$ à x ($-x \in]-1,1[$) donne

$$\ln(1-x) = \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{2p+1} x^{p+1}}{p+1} + \int_0^{-x} (-1)^{2n} \frac{t^{2n}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

Par différence de ces deux égalités, les termes d'indices impairs se neutralisant, il vient

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t} \mathrm{d}t - \int_0^{-x} \frac{t^{2n}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

Par changement de variable linéaire « $u = -t$ », dans la seconde intégrale, il vient :

$$\int_0^{-x} \frac{t^{2n}}{1+t} \mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{u^{2n}}{1-u} \mathrm{d}u,$$

et donc

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} \mathrm{d}t}$$

(b) Par (a), comme $x \geq 0$,

$$\left| \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^x \left| \frac{t^{2n}}{1-t^2} \right| \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} \mathrm{d}t.$$

Mais pour tout $t \in [0, x]$ on a $\frac{t^{2n}}{1-t^2} \leq \frac{t^{2n}}{1-x^2}$, si bien que

$$\left| \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-x^2} \mathrm{d}t,$$

Soit

$$\boxed{\left| \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{1-x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.}$$

(c) D'abord, le majorant de l'inégalité de la sous-question (b) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ fournit une valeur approché de $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ à une précision fixée pourvue que l'on choisisse n suffisamment grand.

Pour $\boxed{x = \frac{1}{2}}$, on a une valeur approchée de $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \ln(3)$, donc de $\ln(3)$.

Pour $\boxed{x = \frac{1}{3}}$, on a une valeur approchée de $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \ln(2)$, donc de $\ln(2)$.

(d) • Pour $x = \frac{1}{2}$, 12 est la plus petite valeur de n telle que $\frac{1}{1-x^2}\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2}\,10^{-8}$. Donc $2\sum\limits_{k=0}^{12-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ est une valeur de $\ln 3$ à 10^{-8} près.

• Pour $x = \frac{1}{3}$, 8 est la plus petite valeur de n telle que $\frac{1}{1-x^2}\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2}\,10^{-8}$. Donc $2\sum\limits_{k=0}^{8-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ est une valeur de $\ln 2$ à 10^{-8} près.

(e) Cette méthode de calcul de $\ln 2$ et $\ln 3$ est comparable à celle de la question 4. Dans les deux cas le nombre total de termes à calculer dans les deux sommes partielles est de l'ordre d'une vingtaine. Dans la question 4, les valeurs obtenues le sont avec une précision moindre que 10^{-8} (il en faudrait un peu plus pour arriver à cette précision) mais la somme calculée est un peu plus simple.

6. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'entier n se décompose comme un produit de nombres premiers, comme le logarithme d'un produit de réels est la somme des logarithmes de ces réels, il suffit de connaître une valeur approchée du logarithme des facteurs premiers de n pour en obtenir une de $\ln n$.

(b) D'après la question précédente il suffit d'obtenir des valeurs approchées suffisamment précises des logarithmes des nombres premiers compris entre 2 et 19 pour obtenir des valeurs approchées de $\ln(n)$ à une précision voulue, pour tout entier n tel que $2 \leq n \leq 20$. Soit p un élément de $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{p-1}}{1-\frac{1}{p-1})}\right) = \frac{1}{2}(\ln p - \ln(p-2)).$$

Cette formule permet de déterminer une valeur approchée des logarithmes des nombres premiers compris au sens large entre 2 et 20, du plus petit au plus grand. En effet $p-2$ a tous ses facteurs premiers strictement inférieurs à p et une valeur approchée de son logarithme se déduit de celles des logarithmes de ces derniers, préalablement déterminés.

SECOND PROBLÈME

Le coefficient de la i^e ligne et j^e colonne d'une matrice M sera noté $m_{i,j}$, dans le cas où M est donnée comme une fonction d'une ou plusieurs matrices on le note encore $M[i,j]$.

1. Traces et projecteurs

1. On a :
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{1\leq i,k\leq n} a_{i,k}b_{k,i}\,;$$
cette dernière expression étant symétrique en A et B,
$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

2. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ($P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$). On a par associativité de la multiplication de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et la question 1,
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right) &= \operatorname{tr}\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P\right) = \operatorname{tr}\left(\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)P\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(P\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)\right) = \operatorname{tr}\left(\left(PP^{-1}\right)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right).\end{aligned}$$
<u>La trace ne dépend que de f et non de la base choisie pour en exprimer la matrice.</u>

3. Comme p est un projecteur, $E = \operatorname{im}(p)\oplus\ker(p)$; choisissons donc une base $\mathcal{B}_0$, adaptée à cette décomposition en somme directe de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p) = \operatorname{diag}(I_r, O_{n-r})$ où r est la dimension de $\operatorname{im}(p)$, c'est-à-dire le rang de p. Finalement, par 2,
$$\boxed{\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(\operatorname{diag}(I_r, O_{n-r}) = r = \operatorname{rg}(p)}$$

4. Soit y un élément de $\operatorname{im}(f+g)$. On dispose par définition d'un élément x de E tel que $y = (f+g)(x)$, mais alors $y = f(x)+g(x) \in \operatorname{im}(f)+\operatorname{im}(g)$, et donc
$$\operatorname{im}(f+g) \subset \operatorname{im}(f)+\operatorname{im}(g).$$
Donc,
$$\begin{aligned}\dim\left(\operatorname{im}(f+g) \leq \dim\left(\operatorname{im}(f)+\operatorname{im}(g)\right)\right. &= \dim\left(\operatorname{im}(f)\right)+\dim\left(\operatorname{im}(g)\right)-\dim\left(\operatorname{im}(f)\cap\operatorname{im}(g)\right)\\ &\leq \dim\left(\operatorname{im}(f)\right)+\dim\left(\operatorname{im}(g)\right).\end{aligned}$$
Et finalement :
$$\boxed{\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g).}$$

5. On montre par récurrence sur m, l'hérédité provenant directement de la question 4, que :
$$\operatorname{rg}(s) \leq \sum_{i=1}^{m}\operatorname{rg}(p_i).$$
Donc, par la question 3, puis la linéarité de la trace.
$$\boxed{\operatorname{rg}(s) \leq \sum_{i=1}^{m}\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{m}p_i\right) = \operatorname{tr}(s),}$$

2. Endomorphismes de trace nulle

6. (a) *Nous allons donner deux preuves. La première est spécifique à la dimension finie et ne saurait se généraliser à un espace vectoriel E qui serait de dimension quelconque. La seconde, plus longue, mais de portée générale n'utilise pas le caractère fini de la dimension de E. Dans les deux cas nous raisonnerons par l'absurde.*

Supposons qu'au contraire pour tout vecteur $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ soit liée.

Première preuve — Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de E. En particulier, puisque x_k est non nul, on dispose pour $k = 1, 2, \ldots, n$ d'un réel α_k tel que $f(x_k) = \alpha_k x_k$ et d'un réel α tel que $f(x_1 + x_2, \ldots. + x_n) = \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ (la liberté de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ interdit la nullité de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$).
Mais alors :

$$\begin{aligned}\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n &= \alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1 + x_2, \cdots + x_n)\\ &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\end{aligned}$$

La *liberté* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ assure alors que $\alpha_k = \alpha$, pour $k = 1, \ldots, n$. Donc f et l'homothétie $\alpha\, \mathrm{id}_E$ coïncident sur la *base* $(x_1, \ldots, x_n)$ de E, donc sont égaux.
Seconde preuve — Pour tout élément x de E non nul on dispose d'un réel α_x (unique d'ailleurs), tel que :

$$f(x) = \alpha_x x$$

Soient $x_0 \in E \setminus \{0\}$.
Soit un vecteur y de E non nul. Deux cas se présentent :
– Premier cas : (x_0, y) est libre.
Alors $x_0 + y$ n'est point nul et

$$\lambda_{x_0+y} x_0 + \lambda_{x_0+y} y = \lambda_{x_0+y}(x_0 + y) = f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = \lambda_{x_0} x_0 + \lambda_y y,$$

la liberté de (x_0, y) donne enfin $\lambda_y = \lambda_{x_0}$.
– Second cas : (x_0, y) est liée.

La non nullité de x fournit un réel β tel que $y = \beta x_0$ et donc

$$\lambda_y y = f(y) = f(\beta x_0) = \beta f(x_0) = \beta \lambda_{x_0} x = \lambda_{x_0} y.$$

La non nullité de y exige , là encore que $\lambda_y = \lambda_{x_0}$.
Comme y est quelconque, de ces deux cas vient : $f = \lambda_{x_0} \mathrm{id}_E$
Quelle que soit la méthode nous aboutissons au caractère homothétique de f que l'hypothèse refuse.

Donc il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.

(b) La sous-question (a) fournit un vecteur e_1 de $\mathbf{E}$ tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre. Posons $e_2 = f(e_1)$ et complétons la famille *libre* (e_1, e_2) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$. Dans cette base la matrice de f est de la forme suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})}$$

(c) Raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace.

Soit (P_k) la proposition :

pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension k, de trace nulle, il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est à diagonale nulle.

• La propriété (P_1) est triviale.

• Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons (P_k). Soit alors f_{k+1} un endomorphisme d'un espace E_{k+1} de dimension $k+1$. Par la question précédente il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_{k+1})$, de E_{k+1} telle que la matrice de f_{k+1} soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathcal{M}_k$. Posons $E_k = \mathrm{vect}(e_2, ..., e_{k+1})$ et considérons p la projection sur E_k suivant $\mathrm{vect}(e_1)$ ainsi que l'endomorphisme de E_k, $f_k = p \circ f_{k+1|E_k}$ [3]. La matrice de f_k dans la base $(e_2, \ldots, e_{k+1})$ est A qui est de trace nulle (puisque $0 + \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f_{k+1}) = 0$), donc par (P_k), on dispose d'une base $(e'_2, \ldots, e'_{k+1})$ de E_k tel que la matrice A' de f_k dans cette base soit à diagonale nulle.

D'une part pour $i = 2, \ldots, k+1$, par définition de la projection p,

$$f_{k+1}(e'_i) = p(f_{k+1}(e'_i)) + a_i e_1 = f_k(e'_i) + a_i e_1,$$

où $a_i \in \mathbf{R}$; et d'autre part $T_{k+1}(e_1) \in \mathrm{vect}(e_2, \ldots, e_{k+1}) = \mathrm{vect}(e'_2, \ldots, e'_{k+1})$. Donc en remarquant que $(e_1, e'_2, \ldots, e'_{k+1})$ est une base $\mathcal{B}'$ de E_{k+1} on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_{k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k+1} \\ \times & & & & \\ \times & & & & \\ \vdots & & A' & & \\ \times & & & & \end{pmatrix},$$

et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_{k+1})$ est de trace nulle. Voila (P_{k+1}) prouvée.

Donc par récurrence, l'endomorphisme f admet une matrice à diagonale nulle.

Remarque. *On aurait pu de façon alternative raisonner matriciellement en prenant comme hypothèse de récurrence : « Toute matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle ». On eût alors, dans la preuve de l'hérédité procédé par produits matriciels par blocs. Cette méthode est moins conceptuelle et trouve les faveurs de tous ceux que la lourdeur des produits par blocs n'effrait pas. Vous êtes invités à comparer par vous-même les deux méthodes.*

7. Par linéarité de la trace $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(f_1 f_2) - \mathrm{tr}(f_2 f_1)$ puis par la question 1,

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(f_1 f_2) - \mathrm{tr}(f_1 f_2) = 0}$$

3. Autrement dit f_k s'obtient en restreignant f_{k+1} à E_k, puis en projetant sur E_k. La première opération revient matriciellement à ne considérer que les k dernières colonnes, la seconde à éliminer la première ligne.

8. (a) Considérons les deux sous-familles de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ suivantes :

$$\mathcal{F} = (E_{i,i})_{i=1,\ldots,n}\,;\ \mathcal{G} = (E_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n\\ i\neq j}}.$$

Notons dès à présent que $|\mathcal{F}| = n$ et $|\mathcal{G}| = n^2 - n = n(n-1)$.
Par définition $\mathcal{D}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{vect}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{vect}(\mathcal{G})$, à ce titre $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ sont donc des sous-espaces vectorels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, la liberté de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ (ce sont des sous-familles de la base canonique) assure que :

$$\boxed{\dim(\mathcal{D}_n(\mathbf{R})) = |\mathcal{F}| = n} \quad \boxed{\dim(\mathcal{G}_n(\mathbf{R})) = |\mathcal{G}| = n(n-1)}$$

Remarque : la concaténée de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, donc : $\mathcal{D}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{G}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}(MD - DM)[i,i] =& \sum_{k=1}^{n} M[i,k]D[k,i] - \sum_{k=1}^{n} D[i,k]M[k,i]\\ =& M[i,i]D[i,i] - D[i,i]M[i,i] = 0.\end{aligned}$$

Donc $MD - DM \in \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$, et donc, M étant quelconque, $\boxed{\mathrm{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})}$.
Soit $A \in \ker(\Phi)$.
Méthode 3/2
Soit (i,j) un couple d'éléments *distincts* de $[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}0 = (AD - DA)[i,j] =& \sum_{k=1}^{n} A[i,k]D[k,j] - \sum_{k=1}^{n} D[i,k]A[k,j]\\ =& A[i,j]D[j,j] - D[i,i]A[i,j] = (j-i)A[i,j].\end{aligned}$$

Les termes non diagonaux de A sont donc nuls.
Méthode 5/2
Les espace propres de D sont les n droites dirigées par les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Comme A commute avec D ces n espaces propres sont stables par A, donc tous les vecteurs de la base canoniques sont propres pour A, et donc A est diagonale

Conclusion : $\boxed{\ker(\Phi) \subset \mathcal{D}_n(\mathbf{R})}$

La formule du rang pour l'endomorphisme Φ affirme que

$$n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \dim(\ker(\Phi) + \dim(\mathrm{im}(\Phi),$$

La précédente inclusion veut que $\dim(\ker(\Phi) \leq \dim(\mathcal{D}_n(\mathbf{R})) = n$, ce qui exige que

$$\dim(\mathrm{im}(\Phi) \geq n^2 - n = \dim(\mathcal{G}_n(\mathbf{R}))\,;$$

l'inclusion $\mathrm{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ assure donc : $\boxed{\mathrm{im}(\Phi) = \mathcal{G}_n(\mathbf{R})}$.

(c) Excluons le cas où f serait une homothétie, donc nulle (puisque de trace nulle), et où l'endomorphisme nul convient fort bien tant pour f_1 que f_2. Alors 6.(b) nous fournit une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ — notons la F — soit élément de $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$. Mais d'après le point précédent on dispose d'un élément F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que : $F = \Phi(F_2) = DF_2 - F_2D$. Désignons alors par f_1 et f_2 les endomorphismes de E ayant respectivement comme matrices dans $\mathcal{B}$, D et F_2 ; la dernière égalité donne :

$$\boxed{f = f_1f_2 - f_2f_1}$$

3. Prescription de la diagonale

9. Sans trop de difficultés on a :

$$f(x) = t_1x + (f(x) - t_1x).$$

Mais la famille $(x; (f(x)-t_1x))$ est une base de E , puisque $\det_{(x,f(x))}(x; (f(x)-t_1x)) = 1 \neq 0$, que l'on notera $\mathcal{B}''$ et la matrice de f dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} t_1 & c \\ 1 & d \end{pmatrix},$$

mais l'invariance de la trace (cf 1.) donne $d = t_2$.
donc $\underline{\mathrm{M}_{\mathcal{B}''}(f) \text{ a pour éléments diagonaux } t_1 \text{ et } t_2.}$

10. (a) Notons $t_2 = \mathrm{tr}(f) - 1$. On a que t_2 est un entier supérieur ou égal à 1. La question 9 nous offre une base $\mathcal{B}''$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{t_2 \text{ termes}}$$

Notons p_1 l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et p_2 celui de matrice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On vérifie matriciellement que $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $p_2 \circ p_2 = p_2$, donc que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
Ainsi, f est bien une somme finie de projecteurs :

$$\boxed{f = p_1 + \underbrace{p_2 + p_2 + \cdots + p_2}_{t_2 \text{ termes}}}$$

(b) Dans une quelconque base $\mathcal{B}$ la matrice de f est $\frac{\mathrm{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2$.
Premier cas. La trace de f est paire ; elle s'écrit $\mathrm{tr}(f) = 2p$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{\mathrm{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2 = p\mathrm{I}_2 = \underbrace{E_{1,1} + E_{1,1} + \cdots + E_{1,1}}_{p \text{ termes}} + \underbrace{E_{2,2} + E_{2,2} + \cdots + E_{2,2}}_{p \text{ termes}}$$

Second cas. La trace de f est impaire ; elle s'écrit $\mathrm{tr}(f) = 2p+1$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{\mathrm{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}J + \underbrace{K_1 + K_1 + \cdots + K_1}_{p \text{ termes}} + \underbrace{K_2 + K_2 + \cdots + K_2}_{p \text{ termes}}$$

où J est la matrice pleine de 1, $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2p} & 0 \end{pmatrix}$ et $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices K_1, K_2 et $\frac{1}{2}J$ sont idempotentes (égales à leur carré), donc sont les matrices dans $\mathcal{B}$ de projecteurs.

Ainsi f est là aussi une somme finie de projecteurs.