Programme de colles n°1

1 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans .
— Matrices :
  — matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang ;
  — opérations sur les lignes et colonnes ; pivot de Gauss, point de vue matricielle, application au calcul du rang, à la détermination d'une base de l'image et du noyau.
— *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique) et révisions de probabilités de sup.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Jeanne Nouaille-Degorge, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno

2 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40). (preuve algébrique cette semaine).
2. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).

3 Récitation d'exercices

1. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ montrer l'équivalence des deux propositions
   (a) Pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$;
   (b) Il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k\mathrm{tr}$.
2. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. $\star$ Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique et une utilisant le déterminant.
4. — THÉORÈME D'HADAMARD —

   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$
   $$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\ldots,n, \\ j\neq i,}} |a_{i,j}|.$$
   Montrer que A est inversible.

5. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $(\vec{x}, u(\vec{x})$ soit lié. Montrer que u est une homothétie. En déduire le centre de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$.
6. Les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivants sont-ils semblables ?
   $$E := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Soient n un élément de $\mathbf{N}^*$ et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ nilpotent d'ordre n.
   (a) Montrer que M est semblable à la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) $\star$Montrer que le commutant de M est $\mathbf{R}([M])$, ensemble des polynômes en M.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Étudier le rang de $\mathrm{com}(M)$ en fonction de celui de M. Déterminer $\det(\mathrm{com}(M))$ et $\mathrm{com}(\mathrm{com}(M))$.
   $\star$ Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de M.
9. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par
$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$
   est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.
10. $\star$ Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note
$$P_{A,B} \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$
   (a) Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
   (c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

Programme de colles n°2

4 Révivions de probabilités de sup.

— Probabilités sur un ensemble fini.
— Variables aléatoires.

5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans.
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  — Matrices de transvexions, de permutations, de dilatation ; opérations sur les lignes et colonnes ; pivot de Gauss, application au calcul du rang, à la détermination d'une base de l'image et du noyau.
— Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)
  On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  — Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  — Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  — Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
— *A venir : révisions sur les déterminants, trigonalisation, ...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Jeanne Nouaille-Degorge, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert.

6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.
3. Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, unique à multiplication près par un scalaire non nul. (I.5.10),

7 Exercices

1. Soit f un edomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension n non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $N_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im} f^n$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneq \ldots\ldots \subsetneq N_{n_0} = N_{n_0+1} = \ldots. = N_n = \ldots\ldots$$

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq .... \supsetneq I_{n_0} = I_{n_0+1} = ... = I_n = ...$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, (cf. TD 1).

2. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, 1. par densité algébrique, 2. en utilsant l'équivalence de A à $J_{\mathrm{rg}(A)}$.
3. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
4. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0, ..., n\}$.
   Montrer que l'espérance de X est donnée par la formule
   $$\mathrm{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(V \geq i).$$
   Soient X et Y des variables alatoires définies sur Ω, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0, ..., n\}$. Calculer $\mathrm{E}(\min(X, Y))$.
5. Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et A et B des événements. Déterminer le produit $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy & Schwarz, montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
6. Soient X_1, X_2,...,X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, définies sur un même univers fini Ω, et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ telles que $X_1, ..., X_n, T$ soient mutuellement indépendante.
   On définit alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_T$.
   (a) Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
   (b) $\star$ Donner une formule analogue pour $\mathrm{V}(S)$.
   à suivre...
7. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de GL $(\mathbf{E})$. Montrer que
   $$\dim\left(\bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g).$$
8. $\star$ Déterminer les formes linéaires ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constantes sur les classes de similitude.
9. $\star$ Soir une suite de variables aléatoires de Rademacher $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ mutuellement indépendantes et toute définies sur un même espace probabilisé. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et l'on désigne par S_0 une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité 1.
   (a) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ diverge.
   (b) Soit la variable aléatoire R à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, définie par :
   $$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n = 0},$$
   (c) Montrer que $\mathbf{P}(R = +\infty) = 1$. Interpréter.
10. $\star$ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit S_n de la probabilité uniforme. Notons pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, d_k le nombre de dérangements d'un ensemble à k éléments. Exprimer au moyen de divers nombres de dérangements, la loi de la variable F_n définie sur S_n qui associe à un élément de S_n le nombre de ses points fixes.
    Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(F_m = k) \underset{m \to +\infty}{\to} \frac{e^{-1}}{k!}$, (loi de Poisson de paramètre 1).
11. $\star$ Forme de Jordan
    Notons pour tout entier $k \geq 2$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que $J_1 = O_1$.
    Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nilpotent d'ordre p.
    (a) On suppose que $p = 2$. Montrer que M est semblable à $\mathrm{diag}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$, où $r = \mathrm{rg}(M)$
    (b) $\star\star$ Montrer dans le cas général que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u. En déduire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k$, et $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$, tel que M soit semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k})$.

Programme de colles n°3,

8 Révivions de sup.

— Déterminants, applications et calculs

9 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans.
— Matrices : Voir programme précédent.
— Diagonalisation. On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  — Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  — Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  — Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
  — Trigonalisation, un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si leur polynôme caractéristique est scindé. Application à la résolution de systèmes différentiels et de systèmes de relations de récurrences linéaires.
  — Matrices nilpotentes, définition, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable à valeurs propres nulles.
  — *A venir : espace vectoriels normés...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno, Thomas d'hervé-Guichaoua, Etienne Lebfèvre.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert.

10 Questions de cours

1. Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'un espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$. Au choix du colleur, l'hérédité se fera par les endomorphismes ou par les matrices en blocs.
2. Déterminants en blocs.
3. Expression du déterminant de vandermonde. On établira la formule par la méthode des combinaisons virtuelles.

11 Exercices

1. Soit A un élément diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit B l'élément de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$: $B = \begin{pmatrix} A & 3A \\ 3A & A \end{pmatrix}$.

   (5/2) Montrer la réciproque.

2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Motrer que $\mathbf{C}(M)$, commutant de M, est un espace vectoriel.
   On suppose dans la suite que M a n valeurs propres deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.
   (b) Quelle est la dimension de $C(A)$?
   (c) $\star$ Pour A diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes donner la dimension de $C(A)$ en fonction des multiplicités des valeurs propres.
3. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le cas où son polynôme caractéristique est scindé, montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.
4. $\star$ Déterminer le commutant d'une matrice compagnon C (raisonner avec une sous-diagonale de 1).
5. $\star\star$ Soient C_1 et C_2 des matrices compagnons et $M = \text{diag}(C_1, C_2)$ comparer le commutatnt de M est l'ensemble des polynômes en M.
6. On note les éléments de $\mathbf{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$ tels que

$$\begin{cases} 2\phi' = \phi + \chi + 2\psi, \\ 2\chi' = \phi + \chi - 2\psi, \\ 2\psi' = -\phi + \chi + 4\psi, \end{cases}$$

7. Déterminer les valeurs propres de la matrice L suivante. Est-elle diagonalisable ?

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Même question pour l'élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dont tous les coefficients diagonaux valent a et tous les autres b.
8. Soient n un entier strictement positif et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $n = 2$, montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

   $\star$ Montrer le résultat pour n quelconque.
9. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\text{Tr}A^k = 0$. Montrer que A est nilpotente.
10. $\star$ Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{i,i} = 0$ pour $i = 1, 2, ...n$ et $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, ...n\}$. Montrer que si n est pair, alors A est inversible.
    On dispose de $2n + 1$ cailloux . On supose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de même masse de n cailloux. Montrer que tous les cailloux on la même masse.
11. $\star\star$ Soit un entier $n \geq 1$ Déterminer k maximal tel qu'il existe $E_1, E_2, ..., E_k$ parties de $\{1, ..., n\}$ vérifiant
    i. le cardinal de E_i est impair pour $i = 1, ...n$;
    ii. le cardinal de $E_i \cap E_j$ est pair pour tout couple d'éléments distincts de $\{1, ..., n\}$.
12. $\star$
    (a) Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme

$$P = (X - z_1)(X - z_2) \ldots (X - z_n)$$

    On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que

$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q) \ldots (X - z_n^q)$$

    est à coefficients entiers.
    (b) $\star\star$ — THÉORÈME DE KRONECKER — Montrer que si P est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1 tel que $P(0) \neq 0$, alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.
13. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de domension n et $k \in \{1, ..., n\}$. Que peut on dire d'un endomorphisme u qui laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de dimension k ?

Programme de colles n^{o}4

12 Algèbre linéaire : révision de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Programme de la semaine précédente.

13 Espaces vectoriels normés

Il s'agit d'un premier contact...

— Définition de norme, espace vectoriel normé, distance à une partie non vide.
— Ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Caractérisation de l'adhérence par les suites, caractérisation des fermés et des fermés relatifs par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— *A venir : limite des applications...*
Cette année la compacité et la connexité par arcs seront traités plus tard.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno, Thomas d'hervé-Guichaoua, Etienne Lebfèvre, Antonino Gillard, Colin Drouineau.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert.

14 Questions de cours

1. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que $N_\infty : \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est une norme.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Caractérisation d'un fermé par les suites.

15 Récitation d'exercices

1. Soient f et g des endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension fini sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, tels que :
$$f \circ g - g \circ f = f.$$
Montrer que f est nilpotent.
2. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs. Soient p et q des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On admet que pour tout a et tout b réels positifs,
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$
   (a) Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   Que dire du cas $p = q = 2$?
   (b) Montrer que, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.

3. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$. Soit un réel $p>1$. On admet que n_p est une norme sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que
$$N_p\ :\ \mathbf{E}\to\mathbf{R}_+\ ;\ f\mapsto\left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
est une norme sur $\mathbf{E}$.
4. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $N_p(f)\underset{n\to+\infty}{\to}N_\infty(f)$.

   Ou version $\star$

   Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n\geq 0$, $I_n=\int_{[a,b]}\phi f^n$.
   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
5. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
6. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'ensemble D_n des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables est dense. Est il-ouvert ? fermé ?
7. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non trivial. Montrer que, soit il est de la forme $k\mathbf{Z}$, avec k élément de $\mathbf{R}_+^*$, soit il est dense dans $(\mathbf{R},|\cdot|)$ (on discutera sur la valeur de $\inf(G\cap\mathbf{R}_+^*)$).
8. $\star$ Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, muni de la norme N_1 (resp. N_∞). Soit F l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ qui prennent en 0 la valeur 1. Quelle est l'intérieur de F ? Quelle est l'adhérence de F ? *L'étudiant fera de jolies figures claires et en couleur.*
9. Soit $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de $\mathbf{E}$ est d'intérieur vide. Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.
10. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.
11. $\star$ Soit A une matrice stochastique d'ordre n, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficient strictements positifs et tel que la somme des coefficients de n'importe quelle colonne fasse 1 :
    (a) Montrer que $1\in\mathrm{sp}(A)$ et $\mathrm{sp}(A)$ est inclus dans le disque fermé unité de $\mathbf{C}$.
    (b) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda|\leq 1$.
    (c) Montrer qu'il existe un élément U de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives. On pourra, pour pour ${}^{\mathrm{t}}(x_1,\ldots,x_n)$ vecteur propre associé à une valeur propre de module 1, considérer ${}^{\mathrm{t}}(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|)$.
    (d) Montrer que tout élément V de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à U.
    Indication : choisir λ tel que $U-\lambda V$ ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.
12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}U_n$ est dense. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}F_n=\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense.
13. $\star\star$ Soit $(F,\|\cdot\|_F)$ un e.v.n., $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ sera muni de $\|\!|\cdot|\!\|$ norme subordonnée à $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$. Soit A une partie de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$, non vide. On veut montrer que :
    — Ou bien il existe un réel M tel que pour tout $\vec{\ell}\in A$, $\|\!|\ell|\!\|\leq M$;
    — Ou bien il existe une intersection dénombrable d'ouverts dense(s) de $\mathbf{E}$, tel que pour tout élément $\vec{x}$ de cette intersection d'ouverts, $\sup_{\vec{\ell}\in A}\|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}}=+\infty$.
    (a) Montrer que pour tout élément k de $\mathbf{N}$, l'ensemble $\Omega_k=\{\vec{x}\in\mathbf{E},\sup_{\vec{\ell}\in A}\|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}}>k\}$ est un ouvert.
    (b) Montrer que si, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est dense, alors, pour tout élément $\vec{x}$ de $\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\Omega_k$, $\sup_{\vec{\ell}\in A}\|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}}=+\infty$.
    (c) Montrer que s'il existe $k_0\in\mathbf{N}$, tel que Ω_{k_0} ne soit pas dense, alors il existe un réel M. tel que pour tout $\vec{\ell}\in A$, $\|\!|\ell|\!\|\leq M$.
    (d) Conclure.

Programme de colles n°4
Correction de la question 10

Notons ℓ_0^∞ l'ensemble des éléments de ℓ^∞ admettant comme limite 0 (c'est un sous-espace vectoriel, trivialement et aussi grâce à cette question et à la seconde partie de la précédente).

On a :

$$\boxed{\bar{\mathcal{P}} = \ell_0^\infty}$$

Preuve

Notations : Une suite u sera notée $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ pourra désigner une suite d'éléments de ℓ^∞, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$u_k = (u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(n), \dots).$$

• $\underline{\bar{\mathcal{P}} \subset \ell_0^\infty.}$

Soit u élément de $\bar{\mathcal{P}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

La boule fermée de centre u et de rayon ε rencontre $\mathcal{P}$ Donc on dispose d'un élément p_0 de $\mathcal{P}$ tel que :

$$N_\infty(u - p_0) \leq \varepsilon.$$

Soit N une entier tel que $p_0(n)$ soit nulle pour tout entier $n > N$ (par exemple le degré de p dans le cas où ce dernier n'est pas nul).

Alors pour tout entier n, si $n > N$:

$$|u(n)| = |u(n) - p_0(n)| \leq N_\infty(u - p_0) \leq \varepsilon.$$

Donc (u_n) tend vers 0, autrement dit : $u \in \ell_0^\infty$.

• $\underline{\ell_0^\infty \subset \bar{\mathcal{P}}.}$

Soit $v \in \ell_0^\infty$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons v_k la suite obtenue à partir de v par troncature à l'ordre k, ($v_k(n) = v(n)$, pour $n \in [\![0, k]\!]$ et $v_k(n) = 0$, pour $n \in [\![k+1, +\infty[\![$). La convergence vers 0 de $(v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ fournit $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in [\![n_1 + 1, +\infty[\![$,

$$|v(n)| \leq \varepsilon.$$

Soit alors un entier $k \geq n_1$. Soit $n \in \mathbf{N}$; deux cas :

— on a $n \leq k$, alors $|v_k(n) - v(n)| = 0 \leq \varepsilon$;

— on a $n \geq k$, alors $|v_k(n) - v(n)| = |v(n)| \leq \varepsilon$, puisque $n \geq k \geq n_1$.

Donc la borne supérieure étant le *plus petit* des majorants,

$$N_\infty(v_k - v) \leq \varepsilon.$$

Donc $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers v (dans (ℓ^∞, N_∞)), et donc $v \in \bar{\mathcal{P}}$.

Deux ces deux points vient : $\bar{\mathcal{P}} \subset \ell_0^\infty$.

Programme de colles n°5

16 Espaces vectoriels normés

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- *A venir : Révisions sur les fonctions d'une variable réelle...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno, Thomas d'hervé-Guichaoua, Etienne Lebfèvre, Antonino Gillard, Colin Drouineau , Loic Vignaud.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert.

17 Questions de cours

- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Lipschitzité de la fonction distance à une partie non vide.

18 Récitation d'exercices

1. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
2. $\star\star$ Montrer que deux matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.
3. $\star$ Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ soit libre.
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cycliques est ouvert.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2,...,λ_n ses valeurs propres. Montrer que si les λ_i, $i = 1, 2, ..n$, sont deux à deux distincts alors M est cyclique. Étudier la réciproque.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.
4. $\star$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que O_n est dans l'adhérence de la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.
5. On pose $A = \{\exp(in), n \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que $\bar{A} = \mathbf{U}$.
6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ qui converge vers un élément ℓ de $\mathbf{E}$. Soient $\Sigma\alpha_n$ une série à termes strictement positifs divergente, on note $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,
$$z_n = \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k,$$
   pour tout entier naturel n.
   Déterminer la limite de cette dernière suite.
7. $\star$ Même question que la précédente lorsque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.
8. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n), \end{cases}$$
   définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite puis un équivalent simple de son terme général [1].

1. Dans cet exercice et le suivant, les élèves doivent connaître la méthode sans pour le moment, en comprendre l'origine.

9. $\star\star$ Reprendre la question précédente et donner le terme suivant dans le développemement asymptotique.
10. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite, puis montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite à déterminer.
11. $\star\star$ Reprendre la question précédente et donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
12. Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Déterminer S par deux méthodes :
— en utilisant la densité de $\mathbf{Q}$;
— en régularisant par intégration.
13. $\star$ Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) + f(x-y)) = 2f(x)f(y).$$
   (a) Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
   (b) Soit f un élément de S non nul est indéfiniment dérivable. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,
$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$
   (c) Montrer que tout élément de S est indéfiniment dérivable. Déterminer S.

Programme de colle n°6,

19 Révision du cours sur les fonctions d'une variable réelle de MPSI

— Théorème de la limite monotone.
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de l'homéomorphisme croissant.
— Lemme de Rolle, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$.
— etc.

20 Fonction convexe

— Définition, interprétation géométrique en terme de corde, formule de Jansen.
— Lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
— Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables. Une fonction dérivable convexe est au dessus de ses tangentes, position par rapport à une sécante.
— Inégalité de convexité $e^x \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$, inégalité de Young, Inégalité de Hölder.
— *A venir.* Espace vectoriels normmés, deuxième partie.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno, Thomas d'hervé-Guichaoua, Etienne Lefèbvre, Antonino Gillard, Colin Drouineau , Loic Vignaud, Le Pouezard.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert.

21 Questions de cours

1. Lemme des trois pentes.
2. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

22 Exercices

1. Enoncer le théorème de DARBOUX et donner en une preuve utilisant le théorème de la borne atteinte.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
   — en utilisant le théorème de la borne atteinte ;
   — en effectuant un changement de variable.
3. Inégalité de KOLMOGOROV —

   (a) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornée. On note $M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$.
   Montrer que pour tout réel x,
   $$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
   On pourra appliquer l'inégalité de Taylor lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, pour tout réel $h>0$.

   (b) $\star\star$ Soient un entier naturel $n \geq 2$ et f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornée. Pour $k=0,1,\ldots,n$ on note $M_k := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|$, sous réserve que l'application $f^{(k)}$ soit bornée.
   Montrer que pour tout élément k de $\{0,\ldots,n\}$,
   $$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \text{ (inégalité de Kolmogorov).}$$
4. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexe et non constante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

5. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ strictement convexe continue [2]. On suppose que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f atteint sa borne supérieure en un et un seul point a de $\mathbf{R}$. Montrer que si f est de plus dérivable, alors a est **caractérisé** par $f'(a) = 0$.
6. $\star\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et strictement convexe. On suppose de plus que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{1}$$

Montrer que f' est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
7. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f admet $n+1$ zéros comptés avec leurs ordres. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
8. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, soient enfin $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a,b]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i
   (b) Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$ il existe un élément y de $[a,b]$ tel que :

$$(f-P)(x) = f^{(n+1)}(y) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!},$$

9. $\star$ — Égalité de Taylor Lagrange — Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, $n+1$ fois dérivable, soit enfin x_0 un point de $[a,b]$. Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$, il existe un élément y de $\overleftrightarrow{]x_0, x[}$, tel que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}(x-x_0)^i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} + (x-x_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégrale.
10. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
    — en utilisant le théorème de la borne atteinte ;
    — en effectuant un changement de variable.
11. Énoncer et prouver les inégalités de Young et Hölder.
12. $\star$ Inégalité de Jansen —
    Soit f une application d'un segment $[a,b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe*. Soient x une application de $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$continue et α une application de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ continue telle que :

$$\int_0^1 \alpha(t)\mathrm{d}t = 1.$$

   (a) Montrer que : $\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a,b]$.
   (b) Montrer que $f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t$.

13. $\star$ —Inégalité de Höfding — Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées, et $(c_i)_{1 \leq i \leq 1}$ une suite de réels telles que pour $i = 1, 2, ..., n$ on ait presque sûrement $|X_i| \leq |c_i|$. On note $S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$ et $C_n = c_1^2 + c_2^2 + ...c_n^2$.
    (a) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout réel t, $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$.
    (b) Soit X une variable aléatoire centrée tel que $|X| \leq 1$, p.s. Montrer que $\mathrm{E}(\exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
    (c) En déduire que $\mathrm{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}C_n\right)$.
    (d) Montrer que $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2C_n}\right)$.
14. $\star$ Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.
    $\star\star$ Le résulat demeure-t-il pour f non continue [3] ?

---
2. la continuité des applications convexes sur l'intérieur de leur intervalle de définition n'est pas au programme
3. On admettra au besoin l'existence de bases du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

Programme de colles n°7
Numéro double spécial vacances

---

23 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
— *A venir Intégrales convergentes. Chapitre III sur les e.v.n.*
Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Thibault Fougeray, Adèle Menesguen, Quentin Robidou, Nathan Robino, Malo Jehanno, Thomas d'hervé-Guichaoua, Etienne Lefèbvre, Antonino Gillard, Colin Drouineau , Loic Vignaud, Le Pouezard, Jeanne Nouaille-Degorce, Matthieu Blais, Bruno Huntzinger,

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : Ewen Breton, Néo Schobert, Colin Drouineau, Etienne Lefèbvre,Thibault Fougeray, Quentin Robidou.

24 Questions de cours

1. Compacité d'un segment de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Par dichotomie ou par le lemme du soleil levant au choix du coleur.
2. Une suite d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

25 Récitation d'exercices

1. Montrer que toute application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue.
   Au choix du colleur utiliser l'une des deux méthodes suivantes :
   — recours au théorème de Heine ;
   — raisonnement par l'absurde utilisant le critère séquentiel de non continuité uniforme.
2. Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0, 1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F k-contractante.

(a) Montrer qu'elle admet un et un seul point fixe. En utilisant ou sans utiliser les séries au choix du colleur.

(b) $\star$ Montrer que le résultat demeure si l'on suppose qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\vec{f}^N$ soit k-contractante.

(c) $\star$ Dans le cas ou $\mathbf{K}$ est étoilé, montrer que le résultat demeure en ne supposant plus que f est k-contractante mais seulement 1-lipschitzienne.

3. Soit F un fermé d'un espace vectorel de dimension finie. Montrer que pour tout élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$, il existe un élément $\vec{f}$ de $\mathbf{F}$ tel que $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$.
4. Théorème de Riestz. $\star$ Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas compact.
5. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs positives ou nulles de classe $\mathcal{C}^2$. Soit x_0 un zéro de f.

   (a) Montrer que $f'(x_0) = 0$.

   (b) Montrer que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$.

6. $\star\star$ — Théorème de Glaeser (1963) —
   Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs positives ou nulles de classe $\mathcal{C}^2$. Soit x_0 un zéro de f. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0)$. Soient α un élément de $\mathbf{R}_+^*$ et $M(\alpha) = \sup_{t \in [-2\alpha, 2\alpha]} (|f''|)$.

   (a) Soit $x \in [-\alpha, \alpha]$. Montrer que pour tout $h \in [-\alpha, \alpha]$,
   $$M(\alpha)\frac{h^2}{2} + hf'(x) + f(x) \geq 0.$$

   (b) Montrer que $\frac{-f'(x)}{M(\alpha)}$ est élément de $[-\alpha, \alpha]$.

   (c) En étudiant sur $[-\alpha, \alpha]$ le signe du trinôme P, où
   $$P = M(\alpha)\frac{X^2}{2} + Xf'(x) + f(x) \geq 0,$$
   Montrer que $f'^2(x) \leq 2f(x)M(\alpha)$.

   (d) Montrer que $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si pour tout zéro z de f, $f''(z) = 0$.

7. Darboux.$\star$ Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable.
   On note $T = \{(x, y) \in I^2, y < x\}$ et on considère
   $$\psi \ : \ T \to \mathbf{R}; \ (x, y) \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
   Montrer que $\psi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\psi(T)}$. en déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
8. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'est.
9. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ l'est. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.
10. $\star$

    (a) Soit A un connexe par arcs d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que toute partie de A relativement ouverte et fermée est soit A soit vide.

    (b) Montrer qu'une application f d'un connexe par arcs D d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ dans e.v.n. $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ telle que pour tout $x \in D$, il existe un voisinage de x relatif à D sur lequel elle est constante, est constante.

11. Soit K un compact d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

    (a) $\star$ Soit ε un réel strictement positif. Montrer que K est inclus dans la la réunion d'un nombre fini de boules centrées en des points de K et de rayon ε.

    (b) $\star\star$ Montrer que K possède une partie dense dénombrable.

12. $\star\star$ Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
13. $\star\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ est connexe par arcs.
14. (Révision) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
15. (Révision) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

    (a) Montrer qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.

(b) Montrer que l'ensemble des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Ce résultat serait-il vrai si A était diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes ?

16. (Révision) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, nilpotent d'ordre n. Déterminer le commutant de f ainsi que sa dimension.

17. (Révision) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

    $\star$ Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.

18. $\star$ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[X]$ de degré d. Montrer qu'il est scindé sur $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si pour tout complexe z, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$. En déduire que l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé.