Exercices sur les espaces vectoriels normés

Laurent BERNIS

23 septembre 2020

La lettre $\mathbf{K}$ désignera indifféremment le corps des réels ou des complexes. Nous noterons en général les éléments des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels que nous rencontrerons en minuscules italiques, surmontées d'une flèche : $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$... , les éléments de $\mathbf{K}$ en caractères minuscules italiques : r, α, β,...x, y, z... Les ensembles sans structure particulière seront notés par des majuscules italiques : A, B, E, F... les espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, par des majuscules romaines grasses : $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$...

1 RUDIMENTS DE TOPOLOGIE

1.1 Distance norme

Exercice 1 — Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs. Soient p et q des réels *conjugués*, c'est-à-dire tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

. On admet que pour tout a et tout b réels positifs,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$

Cette inégalité sera prouvée en exercice dans le cours sur les fonctions convexes.

1. Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ (inégalité de Hölder).}$$
Que dire du cas $p = q = 2$?
2. En déduire que pour tout réel p strictement supérieurs à 1,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ (inégalité de Minkowski).}$$
3. Montrer qu'avec les notations du cours, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.
4. Montrer que pour tout élément $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$,
$$\lim_{p+\infty} n_p(\vec{x}) = n_\infty(\vec{x}).$$

Exercice 2 — Soient p un réel strictement supérieur à 1, a et b des réels tels que $a < b$;

1. Montrer, qu'avec les notations du cours, N_p est une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K})$.
Indication : on pourra utiliser l'exercice 1, pour prouver l'inégalité triangulaire.
2. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K})$,
$$\lim_{p+\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$

3. Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$ et p et q des réels conjugués. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq N_p(f)N_q(g).$$

Exercice 3 — Soient les cinq applications ν_∞, ν_1, N_1, N_2 et N_∞ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{R}$, définies par : $\nu_\infty(P) := \sup_{i=0,1,\ldots,n} |a_i|$, $\nu_1(P) := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, $N_1(P) := \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t$, $N_2 := \left(\int_0^1 |P|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ et $N_\infty(p) := \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$, pour tout élément $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ de $\mathbf{K}[X]$.

1. Montrer que ν_∞, ν_1, N_1, N_2 et N_∞ sont des normes sur $\mathbf{K}[X]$.
2. Parmi ces normes y a-t-il des normes équivalentes. A défaut on déterminera s'il existe des réels $k > 0$ tels qu'une de ces normes soit majorée par k fois l'autre.

1.2 Ouverts, fermés

Exercice 4 — Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un e.v.n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ indexée par un ensemble I quelconque.

1. Prouver que $\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.
   Montrer que si I est fini alors $\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.
   Donner un exemple ou la première inclusion est stricte.
2. Prouver que $\bigcap_{i\in I} \bar{A}_i \supset \overline{\bigcap_{i\in I} A_i}$.
   Montrer que cette inclusion peut être stricte même si I est fini.
3. Comparer d'une part, $\bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$ et $\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}^{\circ}$, d'autre part $\bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$ et $\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}^{\circ}$. On envisagera le cas où I est fini.

Exercice 5 —

1. Rappeler la preuve du fait que les sous-groupes de $(\mathbf{Z},+)$ sont exactement les ensembles de la forme $d\mathbf{Z}$ où d est un entier naturel.
2. Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbf{R},+)$.
   (a) Montrer que $G\cap\mathbf{R}_+^*$ admet une borne inférieure, élément de $\mathbf{R}_+$. nous la noterons k.
   (b) Montrer que si $k > 0$ alors $G = k\mathbf{Z}$. On pourra s'inspirer du 1.
   (c) Montrer que si k est nul alors G est dense dans $(\mathbf{R},|\cdot|)$. Donner un exemple d'un tel groupe.

Exercice 6 — Soient A et B des parties d'une e.v ;n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$

1. Prouver que si A est ouvert, alors $A + B$ l'est également.
2. Montrer que $\mathbf{Z}$ et $\sqrt{3}\mathbf{Z}$ sont des parties fermées de $(\mathbf{R},|\cdot|)$. La partie $\mathbf{Z}+\sqrt{3}\mathbf{Z}$ est elle également fermée ?
   Indication On pourra utiliser l'exercice précédent.
   La somme de deux fermés, n'est donc pas en général fermée. Par contre si l'un des deux fermés est compact, alors leur somme est fermée.

Exercice 7 — Soient A une partie d'un e.v.n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$, $\vec{a}$ un élément de $\mathbf{E}$. Montrer que $\mathrm{d}(\vec{a},A) = 0$ si et seulement si $\vec{a}\in\bar{A}$.

Exercice 8 — On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues et $\mathbf{F}$ l'ensemble des éléments f de $\mathbf{E}$ tels que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. On munit $\mathbf{E}$ de la norme $\mathbf{N}_\infty$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbf{F}$.
2. Même questions, si l'on munit $\mathbf{E}$ de N_1.

Exercice 9 — Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel propre d'un e.v.n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$.

1. Montrer que son intérieur est vide.
2. Montrer que son adhérence est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Montrer qu'un hyperplan de $\mathbf{E}$ est soit dense soit fermé.
3. **Cette question peut faire appel à des résultats ultérieurs.** On suppose $\mathbf{F}$ de dimension finie. Montrer que $\mathbf{F}$ est fermé.
4. Montrer qu'une forme linéaire ℓ sur $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 10 —

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
3. On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornée de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.
4. Soit $X = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) | \exists p \in \mathbf{N}^*, M^p = I_n\}$. Déterminer l'adhérence de X dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2 LIMITES, CONTINUITÉ

2.1 Limites d'une suite

Exercice 11 —

1. Donner un exemple de suite réelle qui admet une sous-suite qui concerge vers 2020 et une sous-suite qui converge vers 0
2. Donner un exemple de suite réelle, admettant pour tout entier p une sous-suite qui converge vers p.

Exercice 12 — Pour en finir avec Cesàro —

Soit $(\vec{x})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, admettant une limite $\vec{\ell}$. Soit alors la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout entier naturel n :

$$\vec{y}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \vec{x}_k.$$

Cette quantité s'interprète comme la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite initiale, du moins lorsque cette dernière est à valeurs dans $\mathbf{R}$, dans le cas général $\vec{y}_n$ en est plus exactement parlant le barycentre, $\mathbf{E}$ étant muni de sa structure canonique d'espace affine. Le théorème de Cesàro affirme que la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\vec{\ell}$; on a coutume de dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge « en moyenne » ou « au sens de Cesàro » vers $\vec{\ell}$. Ce résultat est conforme à notre intuition. En effet, la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend des valeurs qui tendent à se confondre avec $\vec{\ell}$, lorsque n croît, face aux nombre toujours plus grand de termes entrant dans le calcul de $\vec{y}$, les premiers termes y jouent un rôle de plus en plus négligeable, conférant ainsi à la moyenne une valeur proche de $\vec{\ell}$.

La preuve se calque sur cette démarche heuristique.

1. Prouver ce résultat.
2. *Généralisation* : Sous les hypothèses du 1. on considère une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels *strictement positifs*, telle que la série $\sum \alpha_n$ diverge, c'est-à-dire telle que :
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$
Soit alors la suite $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,
$$\vec{z}_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot \vec{x}_k,$$
pour tout entier naturel n (moyenne pondérée de la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$).
Déterminer la limite de cette dernière suite.
3. Donner un exemple de suite réelle qui converge en moyenne, mais qui diverge. Montrer que par contre, toute suite réelle *monotone* qui converge en moyenne, converge.

4. soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum \alpha_n$ diverge. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$v_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot u_k,$$

pour tout entier naturel n. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 13 — Ernesto Cesàro et les 5/2 —

Les théorèmes de Cesàro ne sont pas au programme en tant que tels. Par contre, les théorèmes sur la comparaison des restes des séries à termes positifs convergentes et des sommes partielles des séries à termes positifs divergentes permettent de retrouver très vite les résultats de l'exercice précédent, du moins dans le cas de suites réelles.

1. Reprendre les questions 1.,2. et 4. de l'exercice précédent dans le cas de suites réelles, en utilisant ces théorèmes.
2. Le théorème de Cesàro, sous sa forme originel ou dans sa version au programme intervient aussi dans le théorème de Tauber dont voici l'énoncé.

   Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x de rayon de convergence 1. On suppose de surcroît que $a_n = \mathrm{o}(n)$ $(n \to +\infty)$, et l'on note S sa somme :

   $$S\ :]-1,1[\to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   Si S admet une limite ℓ en 1, alors la série numérique $\sum a_n$ converge et a pour somme ℓ.

   (a) Montrer sur un exemple très simple, que le résultat serait faux en suppriment l'hypothèse $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to +\infty)$.

   (b) Prouver que pour tout élément x de $]-1,1[$, et tout entier N supérieur ou égal à 1,

   $$\left| S(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leq N(1-x)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} |na_n| + \frac{1}{N(1-x)} \sup_{n>N} |na_n|.$$

   (c) Conclure !

   Yan Le Couedic a montré que le résultat demeure en supposant simplement que $a_n = \mathrm{O}(n)$ $(n \to +\infty)$, mais c'est bien plus difficile.

Exercice 14 — Application du théorème de Cesàro —

Soit a un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

   $$u_0 := a,\ u_{n+1} := \sin u_n,\ \text{pour tout } n \geq 0. \tag{1}$$

2. Montrer que cette suite converge vers 0.

   On se propose maintenant d'étudier la rapidité de convergence de cette suite.
3. Déterminer un réel β tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $w_n := u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$, pour tout entier naturel n, admette une limite finie non nulle[1].
4. En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, donner un équivalent de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme cn^p où c et p sont des réels.
5. **Réservé aux 5/2**. Donner un équivalent simple de $u_n - cn^p$ lorsque n tend vers $+\infty$, (pour les valeurs de c et de p précédemment trouvées).

Exercice 15 —

1. L'introduction d'une telle suite, traditionnelle dans les problèmes, semble très artificielle et relever d'une intuision fertile, nous verons dans un prochain chapitre, la source, bien naturelle, d'une telle idée ; pour le moment retenons la recette !

1. Montrer que la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right), \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Montrer que cette suite admet une limite à déterminer.
3. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{4}$.
4. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sqrt{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite indépendante de a[2].
5. **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 16 —
Soit un réel $a > -\frac{3}{2}$.
1. Montrer que la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := \sqrt{2u_n+3}, \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 17 —
Soit a un réel.
1. Montrer que la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := \dfrac{3}{2u_n+3}, \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 18 —
Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.
1. Montrer que la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 := a, v_0 := b, \\ u_{n+1} := \dfrac{1}{2}(u_n+v_n), v_{n+1} := \sqrt{u_{n+1}v_n}, \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

définie bien des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$[3].
2. Montrer que ces suites convergent vers une même limite, notée ℓ. Montrer qu'il existe un élément α de $\left]0\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = b\cos\alpha$. Exprimer ℓ en fonction de α.

Exercice 19 —
Soit $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un evn $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$E. On pose pour tout entier naturel n, $X_n := \{\vec{x}_k, k \in [\![n, +\infty[\![\}$.
1. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que :

$$A = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bar{X}_n.$$

2. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.

Exercice 20 —

Etudier la convergence de la suite $\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^n - \mathrm{E}\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$. A défaut de convergence, on étudiera les valeurs d'adhérence de cette suite.
Indication : On pourra introduire la suite $\left(\left(\sqrt{3}-1\right)^n - \mathrm{E}\left(\sqrt{3}-1\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Pour n grand la suite se comporte, d'après le 3., à peu près comme une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$, d'où l'idée, pour préciser son comportement, d'introduire la suite $(\frac{1}{n}\sqrt{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$.
3. Ces suites interviennent dans le calcul de π par approximation du cerle par des polygôones.

2.2 Limite, continuité

Exercice 21 —
Soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ des applications d'une partie D d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$à valeur dans une e.v.n.$(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$, continues. Soit A une partie dense dans D (i.e. $D \subset \bar{A}$).

1. Rappeler pourquoi, si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ coïncident sur A , alors ces applications sont égales.
2. Soit $\vec{f}$ une application définie sur $\mathbf{R}$, périodique. Montrer que l'ensemble de ses périodes est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.
3. En déduire que toute application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$ est constante.

Indication : On pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 22 —
Soit $\vec{f}$ une application continue d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$dans un e.v.n. $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$. Montrer que pour toute partie A de $\mathbf{E}$, $\vec{f}\left(\bar{A}\right) \subset \overline{\vec{f}(A)}$. Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

Exercice 23 —
Soit $\vec{f}$ une application d'une partie fermée D d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ dans un e.v.n. $(\mathbf{F}, \|\cdots\|_{\mathbf{F}})$. L'espace produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ est muni, comme souvent, de la norme $\|\cdot\|$ définie par, pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ et tout élément $\vec{y}$ de $\mathbf{F}$, $\|(\vec{x}, \vec{y})\| = \sup\{\|\vec{x}\|_{\mathbf{E}}, \|\vec{y}\|_{\mathbf{F}}\}$. On désigne par G son graphe : $G := \left\{\left(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\right), \vec{x} \in D\right\}$

1. Montrer que si $\vec{f}$ est continue alors son graphe est un fermé de $(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}})$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. On suppose de plus que f est à valeurs réelle et est bornée. Montrer que si G est fermé, alors f est continue.
   Indication : on pourra consulter l'exercice .

Exercice 24 —
Soit l'application

$$f \;:\; \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto .\begin{cases} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{pour } x \neq 0, \\ 1, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Déterminer les points de discontinuité de f

Exercice 25 —
Soit f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, pour laquelle l'image de tout réel x est définie comme suit :

— 0 pour x irrationnel,
— $\frac{1}{q}$ pour x rationnel, où q est le dénominateur dans l'expression de x sous sa forme de fraction réduite ($x = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, $\mathrm{PGCD}(p, q) = 1$).

Etudier les points de continuité de f.

2.3 Continuité uniforme

Exercice 26 —
Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue.

1. On suppose, dans cette question, que f tend vers zéro en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
2. On suppose, dans cette question, que f est périodique. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 27 —
Soit f une application uniformément continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer l'existence de deux réels a et b tels que pour tout réel x, $|f(x)| \leq a|x| + b$. Interpréter géométriquement cette propriété.

Exercice 28 —

Soit f une application de R_+ dans R uniformément continue. On suppose que pour tout réel $x > 0$, $f(nx) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$

Le résultat demeure sous l'hypothèse f continue, mais est autrement plus dur à établir.

2.4 COMPACITÉ

Exercice 29 — — Distance à un fermé —

1. *Cas compact* : Soient A une partie non vide, compacte d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{c}$ un élément de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $\vec{a}$ de A tel que :

$$\mathrm{d}\left(\vec{c}, A\right) = \|\vec{a} - \vec{c}\|.$$

2. *Cas d'un fermé en dimension finie* :
Montrer que le résultat demeure dans le cas où A est seulement supposé fermé non vide et $\mathbf{E}$ de dimension finie.
3. *Cas d'un fermé en dimension infinie* : On considère l'espace vectoriel normé (ℓ_∞, n_∞) des suites réelles bornée, muni de la norme n_∞. pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $x^{(p)}$ l'élément de ℓ_∞ $(x_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ défini par : $x_n^{(p)} = 0$ pour tout entier naturel n, distinct de p et $x_p^{(p)} = 1 + \frac{1}{p}$. Soit A la partie de ℓ_∞ dont les éléments sont les $x^{(p)}$, $p \in \mathbf{N}^*$: $A := \{x^{(p)}, p \in \mathbf{N}^*\}$. Montrer que A est fermée. Déterminer la distance de la suite nulle à A et montrer que cette distance n'est pas atteinte.
4. Soient $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ (de dimension finie ou non) et $\vec{c}$ un élément de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $\vec{a}$ de $\mathbf{F}$ tel que :

$$\mathrm{d}\left(\vec{c}, A\right) = \|\vec{a} - \vec{c}\|.$$

5. *Un cas particulier* : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left([a, b], \mathbf{R}\right)$ qui contient les applications polynomiales, muni d'une norme notée $\|.\|$. Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des applications polynomiales de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
   i. Montrer que pour toute application f élément de $\mathbf{E}$, il existe au moins un élément p_n de $\mathcal{P}_n$ tel que :

$$\mathrm{d}\left(f, \mathcal{P}_n\right) = \|f - p_n\|.$$

   Nous appellerons p_n, « *polynôme de meilleure approximation de f de degré n* ».
   ii. Prenons pour $\mathbf{E}$, l'ensemble des applications f de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, continues par morceaux, qui vérifient :
   (a) pour tout élément x de $]-1, 1[$, $f\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right)$,
   (b) $f\left(1\right) = f\left(1^-\right)$, $f\left(-1\right) = f\left(-1^+\right)$.
   Vérifier que $\mathbf{E}$ est bien un espace vectoriel. Montrer que l'application

$$N_1 : \mathbf{E} \to \mathbf{R},\ f \mapsto \int_{-1}^{1} \left|f\left(t\right)\right| \mathrm{d}t,$$

   est bien une norme sur $\mathbf{E}$.
   c. - Soit f l'élément de $\mathbf{E}$, défini par :

$$f\left(x\right) = -1,\ \text{pour } x < 1,$$

$$f\left(x\right) = +1,\ \text{pour } x > 1.$$

   Déterminer tous les polynômes de meilleure approximation de degré 0 de f.

Exercice 30 — fermés emboités —

1. Soit K un compact d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Soit $(F_n)_{n\in N}$ une suite de fermés non vides de K décroissante pour l'inclusion (on dit que les fermés sont « emboîtés »). Montrer que l'intersection des F_n, $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$, n'est pas vide.
2. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie.
   (a) Soit A une partie non vide bornée de $\mathbf{E}$ Montrer que la quantité $\sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\|, (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2\}$ est bien défine. Par définition, cette quantité s'appelle *diamètre* de A et sera notée ici $\delta(A)$.
   (b) Déterminer le diamètre d'une boule ouverte de rayon r.

(c) Soit $(F_n)_{n\in N}$ une suite de fermés non vides de $\mathbf{E}$, décroissante pour l'inclusion, telle que $\delta(F_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Montrer que l'intersection des F_n, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$, est réduite à un singleton.
Cette question exige que soit traité le cas des espace de dimension finie

Exercice 31 — *Théorème du point fixe compact* —
Soit K un compact non vide d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ et $\vec{f}$ est une aplication de K dans K, vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$ éléments de K distincts,

$$\|\vec{(}\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|. \tag{6}$$

Montrer que $\vec{f}$ admet un et un seul point fixe.
Indication : on pourra étudier l'application $g : \mathbf{K} \to \mathbf{R}\,;\ \vec{x} \mapsto \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{x}\|$.

Exercice 32 — *Théorème du Point fixe de Picard* —

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie, muni d'une norme $\|\cdot\|$ Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F, k-contractante.

1. Montrer que $\vec{f}$ admet au plus un point fixe.
2. Soit $\vec{a}$ un élément de F. On note $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des itérés de $\vec{a}$ par $\vec{f}$:

$$x_n = \vec{f}^n(\vec{a}),$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Montrer que pour tout p et tout q, entiers tels que $p \geq q$,

$$\|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| \leq \frac{k^q}{1-k}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|$$

   (b) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence.
   (c) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément $\vec{\ell}$ de $\mathbf{F}$.
   (d) Montrer que $\vec{\ell}$ est un point fixe de $\vec{f}$.
3. Montrer qu'il existe un réel k tel que pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\|\vec{x}_n - \vec{\ell}\| \leq ck^p.$$

4. Retrouver le résultat du 2. en utilisant les séries numériques.

Exercice 33 — Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices orthogonales d'ordre n, où n est un entier strictement positif, est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, muni d'une norme quelconque[4].

Exercice 34 — Soit $\vec{f}$ une injection d'un compact K d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$dans d'un e.v.n. $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$, continue. Montrer que $\vec{f}$ induit un homéomorphisme de K sur $\vec{f}(\mathbf{K})$.

Exercice 35 — —Suite de Cauchy —
Soit $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. On dit que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy si : pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N_0 \geq 0$ tel que pour tout p et tout q entiers, si $p \geq q \geq n_0$ alors

$$\|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que si une suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$converge, alors elle est de Cauchy.
   En général la réciproque est fausse. Les e.v.n. dans lesquels la réciproque est vraie jouent un rôle capital en analyse, on dit qu'ils sont complets.
2. On suppose que $\mathbf{E}$ est de dimension finie. Montrer que toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbf{E}$ converge.
   Indication : On commencera par montrer qu la suite admet une valeur d'adhérence.
3. Application Soit f une application de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continûement dérivable. On suppose que f' est bornée. Montrer que f admet une limite en 0.
   Remarque : On peut aussi démontrer ce résulat en utilisant l'intégrale généralisée.
4. Soient des un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$et $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ Ȯn suppose $\mathbf{F}$ complet. On munit $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ de la norme $\|\!|\cdot|\!\|$ subordonnée à $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$, voir exercice 38. Montrer que $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ est complet.
5. Montrer que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), N_\infty)$ est complet.
6. Montrer que (ℓ^∞, N_∞) est complet.

4. cf. équivalence des normes en dimension finie

3 APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES, NORMES ÉQUIVALENTES

Exercice 36 — On désigne par $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$, par $\mathbf{F}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ et par D l'application linéaire de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ qui à tout élément de f de $\mathbf{E}$, associe f'.

1. L'application D est-elle continue de $(\mathbf{E}, N_\infty)$ dans $(\mathbf{F}, N_\infty)$ [5] ?
2. Montrer que l'application, $N\ :\ \mathbf{E} \to \mathbf{R}\ ;\ f \mapsto N_\infty\left(f\right) + N_\infty\left(f'\right)$ est une norme sur $\mathbf{E}$.
3. L'application D est-elle continue de $(\mathbf{E}, N)$ dans $(\mathbf{F}, N_\infty)$?

Exercice 37 —
On désigne par $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ et par P l'application linéaire de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ qui à tout élément de f de $\mathbf{E}$, associe sa primitive nulle en 0 :

$$P(f)\ :\ [0,1] \to R;\ x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_∞. L'application P est elle continue ?
2. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_1. L'application P est elle continue ?

Exercice 38 — NORME D'UNE APPLICATION LINÉAIRE CONTINUE —
Soient $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ dans $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ des espaces vectoriels normés on rappelle que l'ensemble des applications linéaires continues de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ dans $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{E}, F)$ noté $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$. On désigne par B_1 la boule fermé de $\mathbf{E}$ de centre $\vec{0}_\mathbf{E}$ et de rayon 1.

1. Soit $\vec{\ell}$ un élément de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ Montrer que $\left\{\|\vec{\ell}(\vec{x})\|_\mathbf{F}, \vec{x} \in \mathrm{B}_1\right\}$admet une borne supérieure. On la notera
$$\sup_{\vec{x}\in B_1} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_\mathbf{F} \text{ ou } \sup_{\|\vec{x}\|_E \leq 1} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_\mathbf{F}. \tag{7}$$
2. Montrer que l'application
$$N\ :\ \mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbf{R};\ \vec{\ell} \mapsto \sup_{\|\vec{x}\|_E \leq 1} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_\mathbf{F}.$$
est une norme sur $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$.
3. Soient n un entier naturel non nul, $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un n-uplet de réels, et la forme linéaire de $\mathbf{R}^n$,
$$\ell\ :\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R};\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$
   (a) Monter que ℓ est continue de $(\mathbf{R}^n, n_1)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et donner sa norme.
   (b) Monter que ℓ est continue de $(\mathbf{R}^n, n_\infty)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et donner sa norme.
   (c) Monter que ℓ est continue de $(\mathbf{R}^n, n_2)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et donner sa norme.
4. On prend pour $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. Soit g un élément de $\mathbf{E}$. On définit sur $\mathbf{E}$ la forme linéaire
$$L : \mathbf{E} \to \mathbf{R}\ ;\ f \mapsto \int_0^1 f\left(t\right) g\left(t\right) \mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que L est continue de $(\mathbf{E}, N_1)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et montrer que sa norme, $\|L\|$, est inférieure à $N_\infty(g)$.
   (b) Montrer que $\|L\| = N_\infty(g)$.
   On poura considérer un élément a de $[0,1]$ tel que $g(a) = N_\infty(g)$.
5. Soit F l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$, identifié à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ dans lui-même définie par,
$$L\left(X\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X,$$
pour tout élément X de $\mathbf{R}^2$. Montrer que L est continue de $(\mathbf{R}^2, n_2)$ dans lui-même et donner sa norme.

5. Nous notons encore N_∞ la restriction de la norme définie sur l'ensemble des fonctions bornées à l'ensemble des fonctions continues et à l'ensemble des fonctions continûment dérivables.

4 CONNEXITÉ PAR ARCS

Exercice 39 — Soit A une partie connexe par arcs d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que toute partie B de A qui est à la fois un ouvert et un fermé de relativement à A, est soit, le vide soit A.
Indication : Considérer $\chi_B \;:\; A \to \mathbf{R}\;;\; \vec{x} \mapsto \begin{cases} 1, & \text{pour } \vec{x} \in B, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$ et étudier sa continuité.

Exercice 40 — **(reservé aux 5/2, et encore)** —
Soit n un entier strictement positif et U un ouvert connexe par arcs non vide de $\mathbf{E}$, espace vecoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie n, (vu comme un espace affine).

1. Montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de U, il existe une ligne brisée d'extrémités x et y incluse dans U.
   Indication : Pour x, point de $\mathbf{E}$, on considère B_x l'ensemble des points y de U tels qu'il esiste une ligne brisée d'extrémités x et y incluse dans U et montrer que $B_x = U$, en utilisant l'exercice 1.

2. On munit E d'une norme $\|\cdot\|$, et l'on appelle longueur d'une ligne brisée la somme des longueurs des segments qui la compose [6]. Montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de U, l'ensemble des longueurs des lignes brisées joignant x à y admet une borne inférieure. On la notera $\delta(x, y)$.
3. Montrer que l'application de U dans $\mathbf{R}$ qui à un couple (x, y) d'éléments de U associe $\delta(x, y)$ est une distance sur U.
4. Soit f une application de U dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note, pour tout élément x de U, $\|\!|\mathrm{d}f(x)\|\!|$ la quantité $\sup\limits_{\|h\|\leq 1} |\mathrm{d}f\,(x)\cdot h|$, (norme fonctionnelle de $\mathrm{d}f(x)$) et l'on suppose l'existence d'un réel M, tel que pour tout élément x de U, $\|\!|\mathrm{d}f(x)\|\!| \leq M$. Montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de U,
   $$|f(x) - f(y)| \leq M\mathrm{d}(x - y),$$
   (Généralisation de l'inégalité des accroissements finis, connue pour un ouvert convexe).

Exercice 41 —

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, muni d'une norme quelconque.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. *Cas réel* : $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est il connexe par arcs ?
4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs, on pourra, pour simplifier l'écriture, se limiter à $n = 2$.
5. Montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n^-(\mathbf{R})$) ensemble des matrices d'ordre n à coefficients réels de déterminant positif strictement(resp. négatif strictement) est connexe par arcs.
   Indication : on pourra montrer qu'un élément de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n^-(\mathbf{R})$), par multilication à droite et à gauche par des matrices de transvections donne I_n, (resp. la matrice $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$).
6. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{M\}$ est connexe par arcs.

Exercice 42 —

1. Montrer que $\mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$, ensemble des matrices de rotation d'ordre 3 est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, muni d'une norme quelconque.
2. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre 3, $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, est-il une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?

Exercice 43 — Soient un entier $n \geq 2$ et f une application de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continue. Soit a un réel. que dire de a lorsque :

1. Que dire de a lorsque : $f^{-1}(\{a\})$ est un singleton ?
2. On suppose que $f^{-1}(\{a\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet une borne supérieure atteinte ou une borne inférieure atteinte

Exercice 44 —
Soient un entier $n \geq 2$ et f une application de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continue. On suppose que $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Montrer que soit $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, soit $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.

---

6. On montrerait sans mal au préalable que cette quantité ne dépend pas de la manière dont on décompose la ligne brisée en segments

Exercices complémentaires de topologie à l'usage des candidats aux ENS et à l'X

Exercice C1 — Limites supérieure et inférieure
Dans cet exercice on adopte les définitions suivantes.

— On conviendra que la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbf{R}$ non vide non majorée (resp. non minorée) est $+\infty$ (resp. $-\infty$).

— On généralisera la notion de valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi : on dira que $=+\infty$ (resp ; $-\infty$) est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, si pour tout voisine V de $+\infty$ (resp ; $-\infty$), $\{n\in\mathbf{N}/x_n\in V\}$ est infini, ou si l'on préfére, si pour tout tout voisine V de $+\infty$ (resp ; $-\infty$) et tout entier naturel n_0, il existe un entier $n\geq n_0$ tel que $x_n\in V$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n:=\{x_k,k\in[\![n,+\infty[\![\}$, $a_n:=\sup(X_n)$ et $b_n=\inf(X_n)$.

On appelle limite supérieure (resp. limits inférieure) de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, l'élément de $\bar{\mathbf{R}}$, $\inf\{a_n,n\in\mathbf{N}\}$ (resp. $\sup\{b_n,n\in\mathbf{N}\}$) ; on la note $\limsup x_n$ (resp. $\liminf x_n$).

1. Montrer que $\limsup x_n$ (resp. $\liminf x_n$) est la plus grande (resp. la plus petite) valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Montrer que la suite x_n converge si et seulement si $\limsup x_n=\liminf x_n$, et que si tel est le cas, alors $\lim x_n=\limsup x_n=\liminf x_n$.
3. Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Etablir les propriétés suivantes :
   (a) $\limsup\,(x_n+y_n)\leq\limsup x_n+\limsup y_n$.
   (b) $\limsup\,(x_n)+\liminf y_n\leq\limsup\,(x_n+y_n)$.
   (c) Si de plus y_n converge, alors $\limsup\,(x_n+y_n)=\limsup x_n+\lim y_n$.
4. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée alors sa limite supérieure et inférieure sont réelles.

5 Compacts

Exercice C2 — — Théorème de Rietz —

On se propose de montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normée est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Dans la suite $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ désigne un e.v.n. de dimension infinie.

1. Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ de dimension finie. Soit $\vec{x}$ un élément de $\mathbf{E}$ qui n'est pas élément de $\mathbf{F}$. Montrer qu'il existe un élément $\vec{x}_0$ de $\mathbf{F}$ tel que :
$$\|\vec{x}-\vec{x}_0\|=d(\vec{x},\mathbf{F}).$$
   On pose $\vec{y}:=\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$, Montrer que $d(\vec{y},\mathbf{F})=1$.
2. Montrer l'existence d'une suite d'éléments de $\mathbf{E}$, $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que
   i. Pour tout entier naturel n, $\|\vec{y}_n\|=1$.
   ii. Pour tout entier naturel n, $d(\vec{y}_{n+1},\mathbf{F}_n)=1$, où $\mathbf{F}_n$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{y}_0,\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n)$.
3. Montrer que la boule $\mathrm{B_f}(\vec{0}_{\mathbf{E}},1)$ n'est pas compacte. Conclure.

Exercice C3 — — Compacts —
Soit $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ un e.v.n. Nous nous proposons de montrer qu'une partie K de $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$est compact, si et seulement si pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $K\subset\underset{i\in I}{\cup}O_i$, il existe une partie *finie* J de I telle que $A\subset\underset{i\in J}{\cup}O_i$. On traduit cette dernière propriété en disant que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

1. On suppose que K est un compact de $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$; il existe un recouvrement fini de K par des boules ouvertes de rayon ε.
   Indication : Raisonner par l'absurde.
   (b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $K\subset\underset{i\in I}{\cup}O_i$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon>0$, tel que pour tout $x\in K$, il existe $i\in I$ tel que $\mathrm{B_0}(x,\varepsilon)\cap K\subset O_i$.
   Indication : Raisonner par l'absurde.

(c) Montrer que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

2. Montrer que si de de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors K est compact [7].
3. Montrer que K est compact si et seulement si pour toute famille de fermés de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, $(F_i)_{i\in I}$ telle que $K \cap \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \emptyset$, il existe une sous-famille *finie* $(O_i)_{i\in J}$ $K \cap \left(\bigcap_{i\in J} F_i\right) = \emptyset$.

Exercice C4 — — Jauge d'un convexe compact —
Soit K un convexe compact d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$réel. On suppose que $\vec{O}_{\mathbf{E}}$ est un point de l'intérieur de K.

1. Montrer que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $\{\lambda \in \mathbf{R}_+^* | \lambda^{-1}\vec{x} \in K\}$ possède une borne inférieure, réel qui, dans la suite, sera noté $p_K(\vec{x})$. On dispose donc de l'application $p_K \;:\; \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\, x \mapsto p_K(\vec{x})$
2. Soient $\vec{x}$, $\vec{y}$ des élément de $\mathbf{E}$ et un réel $\mu > 0$. Montrer que :
   (a) $p_K(\mu\vec{x}) \le \mu p_K(x)$.
   (b) $K = p_K^{-1}([0, 1])$.
   (c) $p_K(\vec{x} + \vec{y}) \le p_K(\vec{x}) + p_K(\vec{y})$.
   (d) Il existe $M \in \mathbf{R}$, tel que $p_K \le M\|\cdot\|$.
   (e) p_k est lipschitzienne.
3. Montrer que des compacts convexes d'intérieur non vide sont homéomorphes.
   Indication : Se ramener par translations au cas où $\vec{0}$ est élément de l'intérieur de K et K' et considérer pour tout $\vec{x} \in K$, $p_K(\vec{x})\frac{\vec{x}}{p_{K'}(\vec{x})}$

Exercice C5 — Soient K un compact d'un espace vectoriel normé et $\mathfrak{I}$ un idéal strict de $\mathcal{C}^0(K, \mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un élément a de K, tel que tout élément f de $\mathfrak{I}$ s'annule en a.

Exercice C6 —

1. Soit $\mathbf{E}_n$ un espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Montrer qu'il existe un compact K tel que $E \setminus K$ ait deux composantes connexes par arcs, c'est-à-dire que $E \setminus K$ ne soit pas connexe par arcs, mais réunion de deux connexes par arcs disjoints.
2. On examine maintenant cette propriété en dimension infinie. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$un espace vectoriel normé de dimension infinie et K un compact de $\mathbf{E}$
   — Soit $\vec{a}$ un On considère l'application Φ de K dans S, sphère unité de $\mathbf{E}$, qui à un élément x de K associe $\frac{\vec{x}-\vec{a}}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}$. Montrer que Φ n'est pas surjective.
   — Montrer qu'il existe une demi-droite issues de $\vec{a}$ qui ne rencontre pas K.
   — Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.

6 Divers

L'exercice suivant présente un exemple de système dynamique discret élémentaire $u_{n+1} = g(u_n)$ au comportement pourtant chaotique. Pour ce faire il recourt à une méthode dite de dynamique symbolique qui associe à chaque suite $(g^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $[0, 1]$, et permet ainsi de ramener l'étude du comportement de cette suite en fonction du premier terme z, à un problème de théorie des nombres.

Exercice C7 —
Plongement d'Arens Fells —
Soit X un ensemble non vide muni d'une distance On se propose de montrer que X est isométrique à une partie fermée d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ c'est-à-dire qu'il existe f applicartion de X dans $\mathbf{E}$ tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de X, $d(x, y) = \|f(x) - f(y)\|$.

1. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des partie de X de cardinal fini. On désigne par ω un point de X. Pour tout élément x de X on considère l'application
$$f_x \;:\mathcal{F} \to \mathbf{R}\,;\; A \mapsto d(x, A) - d(\omega, A).$$
   Montrer pour tout x et tout y élément de X, que $f_x \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathbf{R})$ et $\|f_x - f_y\|_\infty = d(x - y)$.
2. Conclure.

Exercice C8 — Dynamique symbolique —

Soit l'application $g \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \alpha x(1 - x)$, où α est un réel strictement supérieur à $2 + \sqrt{5}$. Nous notrons I le segment $[0, 1]$.

7. C'est cette propriété, qui dans le cas de topologies ne dérivant pas d'une distance, sert à définir un compact.

1. Soit z un élément de $\mathbf{R}$. On suppose que l'un des termes de la suite $(g^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas dans I. Que dire de la suite $(g^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$? On étudira dans la suite les suites d'itérés d'un point de I à valeurs dans I.
2. Montrer que $g^{-1}(I)$ est la réunion de deux intervalles I_1 et I_2 disjoints contenant respectivement 0 et 1, que l'on déterminera. Montrer que pour tout élément x de $g^{-1}(I)$, $|g'(x)| \geq \alpha\sqrt{1-\frac{4}{\alpha}} > 1$.
3. Soit J un intervalle de I. Montrer que $g^{-1}(J)$ est la réunion de deux intervalles J_1 et J_2, inclus respectivement dans I_1 et I_2. Montrer que $|J| \geq \alpha\sqrt{1-\frac{4}{\alpha}}|J_i|$, pour $i = 1, 2$.
4. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des éléments z de I, tels que tous les éléments de la suite $(g^n(z))_{n\in N}$ soit dans I_1 ou I_2,
$$\mathfrak{K} = \{z \in I | \forall n \in \mathbf{N}, g^n(x) \in I_1 \cup I_2\}.$$
Montrer que (K) est non vide.
Pour tout élément z de (K) on note $\varphi(z)$ la suite $(a_n)_{n\in}$ définie par, $a_n = 1$ si $g^n(z) \in I_1$, 2 sinon (c'est-à-dire si $g^n(z) \in I_2$.)
5. Pour tout entier $n \geq 1$ posons :
$$I_{a_0,a_1,\ldots,a_n} = I_{a_0} \cap g^{-1}\Big(I_{a_1} \cap g^{-1}\big(\ I_{a_2} \cap \ldots g^{-1}(I_{a_n})\ldots\big)\Big).$$
Montrer que pour entier $n \geq 1$, $I_{a_0,a_1,\ldots,a_n}$ est un intervalle fermé non vide, et que :
$$|I_{a_0,a_1,\ldots,a_n}| \leq \left(\alpha\sqrt{1-\frac{4}{\alpha}}\right)^{-n} |I_{a_0}|.$$
6. Montrer que $\mathfrak{K} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{K}_n$ où $\mathfrak{K}_n = \bigcup_{(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\{1,2\}^{n+1}} I_{a_0,a_1,\ldots,a_n}$.
7. Montrer que φ est une bijection de $\mathfrak{K}$ sur $\mathcal{F}(\mathbf{N}, \{0, 1\})$.
8. Montrer que $\mathfrak{K}$ est fermé, d'intérieur vide [8] et sans points isolés (On dit que $\mathfrak{K}$ est un ensemble de Cantor).
9. Montrer qu'il existe une infinité de points z de I tels que la suite $(g^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ soit périodique.
10. Montrer que l'ensemble des points z de I tels que la suite $(g^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ soit périodique est dénombrable.

8. le comportement de la suite $(g^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ est donc très sensible à la condition initiale z, puisque dans tout voisinage d'un point de $\mathfrak{K}$ il y a des éléments du complémentaire de $\mathfrak{K}$.

Exercice C9 — SOUS-GROUPES DE $\mathbf{R}$ —
On rappelle qu'un sous groupe de $\mathbf{R}$ est soit dense soir de la forme $a\mathbf{Z}$ où a ets un réel.

1. Soit θ un réel. On note P l'ensemble $\{e^{in\theta}|n \in \mathbf{Z}\}$ et P^+ l'ensemble $\{e^{in\theta}|n \in \mathbf{N}\}$.
   (a) Montrer que si $\frac{\theta}{2\pi}$ est rationnel alors P est fini.
   (b) Montrer que si $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel alors P est dense dans l'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1.
   (c) On suppose que $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel. Déduire de la sous-question précédente que $\{\cos(n\theta)|n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
   (d) On suppose que $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel. Montrer que P^+ est dense dans $\mathcal{U}$.
   (e) On suppose toujours que $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel. Déduire de la sous-question précédente que que l' ensemble $\{\sin(n\theta)|n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
2. On note L_7 l'ensemble des entiers naturels tel que le premier chiffre (celui le plus à gauche) dans l'écriture décimal de 2^n soit un 7.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathbf{N}\ell\mathrm{og}(2) - \mathbf{N}$ est dense dans $[0, 1]$. En déduire que L_7 est infini. $\ell\mathrm{og}$ désigne ici le logarithme décimal.
   (b) *Equirépartition*—
   On désigne par χ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ 1-périodique qui pour tout élément x $[0, 1[$ vérifie : $\chi(x) = 1$ si $x \in [\ell\mathrm{og}(7), \ell\mathrm{og}(8)[$, 0 sinon. Montrer
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} \chi(n\ell\mathrm{og}(2)) \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^1 \chi(t)\mathrm{d}t.$$
   Le nombre d'entiers $n \leq N$ tel que 2^n ait pour premier chiffre un 7 sur $\mathbf{N}$ tend vers $\ell\mathrm{og}(8) - \ell\mathrm{og}(7)$ c'est-à-dire la probabilité pour qu'un chiffre pris au hasard vérifie cette propriété.
   Indication : On pourra remplacer, pour commencer χ par un polynôme trigonométrique de période 1 dans la formule à montrer. Puis encadrer χ par deux applications 1-périodiques continues, d'intégrales arbitrairement proches de celle de χ

Exercice C10 — HEINE AUTREMENT —

1. Soient K et K' des compacts non vides d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que l'ensemble $\{\|\vec{x} - \vec{y}\|, (\vec{x}, \vec{y}) \in K \times K'\}$ admet une borne inférieure que, dans la suite on notera $\mathrm{d}(K, K')$ (distance de K à K').
2. Montrer qu'il existe un élément $\vec{x}_0$ de K et un élément $\vec{y}_0$ de K' tels que : $\mathrm{d}(K, K') = \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\|$.
3. Soit $\vec{f}$ une application d'un compact D de $\mathbf{E}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$, continue. Soit ε un réel strictement positif, On note $H_\varepsilon := \{(x, y) \in D^2, \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geq \varepsilon\}$ et $\Delta := \{(x, x), x \in D\}$. Montrer que H_ε et Δ sont des compacts disjoints.
4. En déduire le théorème de Heine.

Exercice C11 —
Montrer que tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un fermé relativement à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.