DM court n$^{\text{o}}$2

Pour le lundi 16.

Avertissement. *Il s'agit d'un devoir très court de mise en train. L'exercice 2 n'est pas simple. Les 5/2 et particulièrement ceux qui passent les ÉNS peuvent dès à présent passer du temps sur ses question, les 3/2 ne doivent pas sécher plus 10 minutes sur une question, après ce délai il leur faut, pour résoudre la question, consulter les indications, qui seront mises en ligne très prochainement. Ils reprendront le lendemain la question sans indications...*

La consultation de l'exercice 26 des feuilles sur le chapitre 1, qui est corrigé, sera d'une grande utilité dans la résolution de ce devoir.

EXERCICE 1

1. Soit l'ensemble :
$$\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = A\}.$$
Montrer que $\mathcal{P}$ est la réunion de classes de similitude dont on déterminera le nombre.
2. On suppose que n est pair et l'on pose $p = \frac{n}{2}$. Soit l'ensemble :
$$\mathcal{Q} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = 0_n\}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{Q}$ contient des matrices de rang $0, 1, ..., p-1$ et p et pas de matrices de rang différent. Soit A un élément de Q de rang r. Montrer que A est semblable à :
$$\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.$$
   (*voir également l'exercice* **??**.)

   (b) Montrer que $\mathcal{Q}$ est la réunion de classes de similitude dont on déterminera le nombre.

EXERCICE 2

Polynômes trigonométriques aléatoire — Soient un entier $n \geq 1$, $(a_1, ..., a_n)$ un élément de $\mathbf{C}^n$ et p le polynôme trigonométrique défini par :
$$p(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

1. Inégalité de Bernstein faible

   (a) Calculer pour tout élément k de $\mathbf{Z}$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$. En déduire l'expression de chaque coefficient de p au moyen d'une intégrale ayant pour bornes 0 et 2π.

   (b) Etablir la majoration :
$$\|p'\|_\infty \leq \frac{n(n+1)}{2}\|p\|_\infty.$$
   On pose désormais $\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(c) Démontrer qu'il existe un segment S de $\mathbf{R}$ de longueur $\frac{1}{\alpha_n}$ tel que pour tout élément t de S,

$$|p(t)| \geq \frac{\|p\|_\infty}{2}.$$

2. Dans la suite Ω est l'ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ tels que pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $\omega_k \in \{-1, 1\}$, autrement dit $\Omega = \{-1, 1\}^n$

   On munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est notée $\mathrm{E}(X)$.

   Pour $k = 1, \ldots, n$, X_k est la variable aléatoire qui à tout élément $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de Ω associe ω_k (k^{e} projection).

   Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et que pour $k = 1, \ldots, n$, X_k suit la loi :

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

3. Majoration de l'espérance

   Dans la suite λ est un réel strictement positif.

   (a) Démontrer que, pour tout x réel, $\mathrm{ch}x \leq \exp(\frac{x^2}{2})$.

   (b) Soit Z la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$. Calculer $\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda \Re(Z)\big)\Big)$.

   (c) Démontrer que

$$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|\Re(Z|)\big)\Big) \leq 2\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(\Re(a_k)\big)^2\right).$$

   Démontrer que

$$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|Z|\big)\Big) \leq 2\exp\left(\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|(a_k)|^2\right).$$

4. Inégalité de Salem et Zigmun

   pour tout $\omega \in \Omega$, on note p_ω le polynôme trigonométrique :

$$p_\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega)\exp(\mathrm{i}k\,\cdot).$$

   Pour élément t des $\mathbf{R}$, soit Z_t la variable aléatoire :

$$Z_t \ : \ \Omega \to \mathbf{C}\,;\ \omega \mapsto p_\omega(t).$$

   Soit enfin M la variable aléatoire donnée par, pour tout $\omega \in \Omega$, :

$$M(\omega) = \|p_\omega\|_\infty.$$

   (a) Pour tout $\omega \in \Omega$, démontrer l'inégalité :

$$\frac{1}{\alpha_n}\exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right) \leq \int_0^{2\pi}\exp(\lambda|Z_t(\omega)|)\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda M}{2}\right)\right) \leq 4\pi\alpha_n \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).$$

(c) Démontrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$M(\omega) \leq 2\left(\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).$$

En déduire qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$M(\omega) \leq 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.$$