Billard circulaire

Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'une boule de billard dans un billard circulaire sans frottement.

On considère dans un plan horizontal un billard circulaire, de rayon 1. On l'identifie au disque unité du plan complexe,

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} .$$

Le bord du billard s'identifie donc au cercle unité de centre O,

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} .$$

Une boule de billard, supposée ponctuelle, est lancée à l'instant $t = 0$, d'un point M_0 du bord du billard d'affixe z_0, avec un vecteur vitesse initial $\vec{V_0}$, de module 1, l'angle orienté de $\overrightarrow{M_0O}$ vers $\vec{V_0}$ ayant pour mesure un nombre réel α tel que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par $z(t)$ l'affixe de la position $M(t)$ de la boule de billard à l'instant $t \geq 0$. On suppose que le mouvement de la boule de billard se poursuit à l'infini sans frottement : entre deux chocs successifs sur le bord, le mouvement est supposé rectiligne uniforme.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1.

Première partie
Billard circulaire à réflexion élastique

On suppose dans cette partie que les chocs de la boule sur le bord du billard sont des réflexions élastiques, c'est-à-dire que

– la composante tangentielle du vecteur vitesse après le choc est égale à celle du vecteur vitesse avant le choc,

– la composante radiale du vecteur vitesse après le choc est opposée à celle du vecteur vitesse avant le choc.

1.a) Montrer que la boule de billard rebondit sur le bord Γ du billard en les points $M_n, n \in \mathbb{N}^*$, d'affixes $z_n = z_0 e^{in\beta}$, où β est un nombre réel tel que $0 < \beta < 2\pi$, que l'on déterminera en fonction de α.

b) Calculer le temps mis par la boule pour parcourir la corde $M_{j-1}M_j, j \in \mathbb{N}^*$, et le temps mis pour atteindre le point $M_n, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Trouver l'affixe $z(t)$ de la position $M(t)$ de la boule à l'instant t. [On notera $[y]$ la partie entière d'un nombre réel y.]

2.a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le mouvement de la boule soit périodique. Trouver alors la période du mouvement.

b)Décrire la trajectoire de la boule.

Deuxième partie
Billard circulaire à réflexion inélastique

Soit f un nombre réel tel que $0 < f < 1$.

On suppose dans cette partie que les chocs de la boule de billard sur le bord du billard sont des réflexions inélastiques avec coefficient f, c'est-à-dire que

– la composante tangentielle du vecteur vitesse après le choc est égale à celle du vecteur vitesse avant le choc,

– la composante radiale $\vec{V}_r^+$ du vecteur vitesse après le choc et la composante radiale $\vec{V}_r^-$ du vecteur vitesse avant le choc sont liées par la relation

$$\vec{V}_r^+ = -f\vec{V}_r^- \quad .$$

On pose $\alpha_0 = \alpha$ et l'on suppose dans cette partie que $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. On se propose d'étudier le mouvement de la boule lorsque t tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par M_n le n-ième point de choc, par z_n son affixe et par α_n la mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{M_nO}$ vers $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ telle que $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. On désigne par T_n le temps de parcours de M_0 à M_n.

3.a) Etudier la série de terme général $2\alpha_n - \pi$, c'est-à-dire la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} 2\alpha_k - \pi\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite Z quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que le point M d'affixe Z est atteint par la boule de billard en un temps fini, que l'on notera T.

4.a) Montrer qu'il existe une unique fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{W}$ définie sur $[0, T]$ vérifiant les conditions suivantes :

* $\overrightarrow{W}(0) = \vec{V}_0$,
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overrightarrow{W}(T_n)$ est la vitesse de la boule après le choc en M_n,
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]T_n, T_{n+1}[$, $\overrightarrow{W}(t)$ est la vitesse de la boule au temps t,
* $\overrightarrow{W}$ est continue au temps T.

b) On admet que la vitesse de la boule au temps T est $\overrightarrow{W}(T)$. Quel est le mouvement de la boule pour $t \geq T$?

c) Calculer, pour $t \geq T$, $z(t)$ en fonction de $z(T), \alpha$ et $t - T$.

5. Soit g une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique de période 2π. On désigne par $\theta(t)$ un argument continu de $z(t)$ pour $t \geq 0$.

a) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau - \frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau\right) = 0 \quad .$$

b) En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \quad .$$

Troisième partie
Réflexion élastique, points adhérents aux trajectoires non périodiques

Dans cette partie, indépendante de la précédente, on considère à nouveau le cas de la réflexion élastique et l'on se propose d'étudier les trajectoires non périodiques. On étudie d'abord les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

On rappelle que $x \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de X qui tend vers x.

6. Soit G un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$. On considère

$$G^+ = \{x \in G \,|\, x > 0\} \quad .$$

a) Montrer que G^+ a une borne inférieure. On la désigne par a.

b) Montrer que si $a > 0$, alors G est le sous-groupe

$$G_a = \{na \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

c) Montrer que si $a = 0$, alors tout point de $\mathbb{R}$ est un point adhérent à G. [On montrera d'abord que 0 est un point adhérent à G^+.]

7. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. *On suppose que $\frac{\beta}{\pi}$ n'est pas rationnel.*

On considère l'ensemble

$$H_\beta = \{k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\,,\, \ell \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

a) Montrer que tout nombre réel est un point adhérent à H_β.

On pose

$$\begin{aligned} H_\beta^+ &= \{x \in H_\beta \,|\, x > 0\} \quad , \\ S_\beta &= \{k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{N},\, \ell \in \mathbb{Z},\, k\beta + 2\ell\pi > 0\} \quad , \\ S'_\beta &= \{-k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{N},\, \ell \in \mathbb{Z},\, -k\beta + 2\ell\pi > 0\} \quad . \end{aligned}$$

b) Montrer que 0 est un point adhérent à S_β ou à S'_β.

c) On suppose que $(-k_n\beta + 2\ell_n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de S'_β qui converge vers 0. Montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}$ n'est pas bornée. En déduire qu'il existe une suite de S_β qui converge vers 0.

d) Montrer que tout nombre réel positif est un point adhérent à S_β.

8. On reprend les notations de la première partie et l'on suppose que le mouvement de la boule de billard n'est pas périodique.

a) Montrer que, pour tout $z \in \Gamma$, il existe une suite d'entiers positifs ou nuls $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{k_n} = z$.

b) Montrer que, pour tout point z de la couronne $C_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\sin\alpha| \leq |z| \leq 1\}$, il existe une suite de nombres réels positifs ou nuls $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} z(t_n) = z$.

c) Déterminer quels sont les points du billard qui sont adhérents à la trajectoire de M_0.

⋆ ⋆
⋆