DS n°8

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :
— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,
— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,
— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Sujet MINES-CENTRALE

Critère de diagonalisation de Klarès

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients complexes. On note O_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée $\mathrm{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = O_n$.
Dans tout le problème, on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à -dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note :
— α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à -dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
— P_i le polynôme défini par : $P_i(X) = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$;
— F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}\right)$;
— f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i.

La partie B à l'exception de la question 11), est indépendante de la partie A.
La partie C est indépendante des parties précédentes.

Préliminaires

P1. *Question de cours.* Montrer que le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n. En supposant $n \geq 2$, donner l'expression des coefficients du polynôme caractéristique de A de degré $n-1$ et 0 en fonction de la trace et du déterminant de M, on démontrera le résultat.

P2. On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par f. Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme g de F, induit par f divise le polynôme caractéristique de f.

P3. On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p soit nul. Montrer que f^n est nul.

P4. On supose dans cette question (et seulement dans cette question) que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer pour tout entier k, A^k, puis $\exp(A)$ et enfin A^{-1}.

A. Décomposition Dunford

1) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i : $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

2) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i. (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i.)

3) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix},$$

où $N_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

4) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

Le couple (D, N) vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de Dunford* de la matrice A. Dans toute la suite du problème, on admettra *l'unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminées de façon unique par A.

Des exemples :

5) Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Calculer l'exponentielle de la matrice A_3.

B. Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) = BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) = PXP^{-1}. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

7) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui appartenant à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne qui est égal à 1.

8) Si A est une matrice diagonale, montrer qu'alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

9) En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

10) Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

11) Montrer que si A est nilpotente et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie A, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.

12) Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application

$$b \; : \; E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

linéaire par rapport à chacune des composantes et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$F^{\perp b} = \{x \in E; \forall y \in F, b(x, y) = 0\}.$$

On suppose que b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $E^{\perp b} = \{0\}$.

13) Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes : On considère les assertions suivantes :

i. u est diagonalisable.
ii. $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$.
iii. $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.

Montrer que i. implique ii. et que ii. implique iii.

14) Soit $(f_1, f_2, ..., f_p)$ une base de E. On considère pour $i = 1, ..., p$, la forme linéaire f_i^* sur E qui à un vecteur de E associe sa i^{e} coordonnée dans $(f_1, f_2, ..., f_p)$.

a) Montrer que $(f_1^*, f_2^*, ..., f_p^*)$ une base de E^*.
On appelle $(f_1^*, f_2^*, ..., f_p^*)$ *base duale* de la base $(f_1, f_2, ..., f_p)$.

b) Soit y un élément de E non nul. Montrer qu'il existe une forme linéaire ℓ sur E telle que $\ell(y) \neq 0$.

c) Soient $(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p)$ une base de E^*. Montrer que l'application linéaire

$$\Phi \ : \ E \to \mathbb{R}^p \ ; \ x \mapsto (\ell_1(x), ..., \ell_p(x))$$

est injective.

d) Montrer qu'il existe une base et une seule $(y_1, y_2, ..., y_p)$ de E telle que $(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p)$ en soit la base duale.

On dit que $(y_1, y_2, ..., y_p)$ est la base antéduale de $(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par : $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

15) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.
On complète cette famille en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base de E antéduale.

16) Montrer que $F^{\perp b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \cdots, e_p)$ et en déduire la valeur de

$$\dim(F) + \dim(F^{\perp b}).$$

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}\left((\operatorname{comm}_A)^2\right)$.

17) Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par la formule $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

18) Établir l'égalité : $(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A))^{\perp\varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.

19) En déduire que, si A est nilpotente, il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \operatorname{comm}_A(X)$. Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout λ dans $\mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4).

20) Démontrer qu'il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.

21) Conclure.