DS n$^{\text{o}}$1

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les formules ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) ou usage abusif de symboles logiques : -2 points.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Ce sympathique devoir est composé d'un plaisant problème de probabilités, et d'un problème d'algèbre sans malice.

PREMIER PROBLÈME

Toute les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ [1]. Dans tout le problème un polynôme R sera également noté $R(X)$. On considère a et b deux entiers naturels non nuls et l'on pose $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boule noires et b boules blanches, dans laquelle on effectue des tirage successifs d'une boule selon le protocole suivant :

— si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant ;

— si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans celle-ci par une boule blanche, prise dans une réserve annexe, avant de procéder au tirage suivant.

On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n égal au nombre de boules noires tirées lors des n premier tirages, et on note $\mathrm{E}(X_n)$ sont espérance.

Partie 1

Soit F l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à a et Φ l'application qui à tout polynôme R de F, fait correspondre $\Phi(R)$ défini par :

$$\Phi(R) = (aX + b)R + X(1 - X)R',$$

où R' désigne le polynôme dérivée de R.

1. (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

   (b) Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Pour tout élément k de $\{0, .., a\}$, on définit l'élément de F :

$$H_k = X^k(1 - X)^{a-k}.$$

   (a) Calculer $\Phi(H_k)$.

   (b) Montrer que $(H_0, H_1, \ldots, H_a)$ est une base de F. On la notera $\mathcal{B}_1$

1. L'explicitation d'un tel univers dépasse le cadre du cours de MPSI et de MP*

3. On considère la suite de polynôme $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q_{n+1} = \Phi(Q_n)$.
   (a) Donner la décomposition de Q_0 dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^n H_k.$$

Partie 2

Pour tout $k \in N^*$, on note T_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k^{e} tirage amène une boule noire, et qui vaut 0 sinon.

1. (a) Déterminer la loi de T_1.
   (b) Déterminer la loi de T_2.
2. (a) Exprimer X_n en fonction de $T_1, T_2, \ldots T_n$, pour tout entier $n \geq 1$.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \frac{a - \mathrm{E}(X_n)}{N}.$$

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ que :

$$\mathbf{P}(T_n = 1) = \frac{a(N-1)^{n-1}}{N^n}.$$

   On raisonnera par récurrence.
3. Calculer $\mathrm{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\mathrm{E}(X_n)$ tend vers une limite à déterminer lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 3

1. (a) Justifier intuitivement le fait que $X_n(\Omega) = \{0, \ldots, \min\{a, n\}\}$.
   (b) calculer $P(X_n = 0)$.
   (c) Calculer pour tout entier naturel $n \leq a$, $\mathbf{P}(X_n = n)$.
   On définit, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $G_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = k) X^k$. et l'on pose $G_0 = 1$.
2. (a) Etablir pour tout entier naturel k, tel que $1 \leq k \leq \min\{a, n\}$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{b+k}{N}\mathbf{P}(X_n = k) + \frac{a+1-k}{N}\mathbf{P}(X_n = k-1). \tag{1}$$

   (b) Vérifier que l'égalité (1) est encore valable pour $k = 0$.
   (c) On suppose que $n + 1 \leq a$. Montrer que (1) est encore vérifiée pour $k = n + 1$.
   (d) En déduire que (1) est vérifiée pour tout entier naturel k inférieur ou égal à a.
3. Montrer l'égalité :

$$G_{n+1} = \frac{aX + b}{N} G_n + \frac{X(1-X)}{N} G'_n. \tag{2}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Que représente $G'_n(1)$ pour la variable aléatoire X_n ?

(b) À l'aide de (2), exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathrm{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathrm{E}(X_n)$.

(c) Retrouver ainsi la valeur de $\mathrm{E}(X_n)$, en fonction de n.

5. Montrer que pour tout entier naturel j inférieur ou égal à a :

$$\mathbf{P}(X_n = j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{a}{k} \binom{a-k}{j-k} (-1)^{j-k} \left(\frac{b+k}{N}\right)^n .$$

SECOND PROBLÈME

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbf{N}^*$).

— On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;

— La transposé d'une matrice M sera notée indifféremment ${}^tM$ ou M^T ;

— Dans $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilisera le produit scalaire canonique défini par

$$\forall U, V \in \mathcal{E}_n,\ (U|V) = U^T V \ ;$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$;

— Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det ;

— $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$;

— $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n,\ M^T M = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal d'indice n, formé des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$.

1 Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

On note

$$\mathcal{S}_{p_{2n}} = \{M \in \mathcal{M}_{2n},\ M^T J M = J\}.$$

1. Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.

2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}.$$

3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

4. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.

5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ alors $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

   Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$
8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

2 Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ c'est-à-dire
$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ \forall N \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ MN = NM\}.$$

1. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

   Récirpoquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$
2. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.
3. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.
4. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$. *Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j},\ 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.*

3 Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ que l'on décompose sous forme de matrice blocs
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (1),$$
avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

1. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que
$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$
2. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que
$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1.$$
   Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que $P^T Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que
$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0.$$
3. Montrer que le produit scalaire $(QV_1|QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leq n$. Soit $s_1, \ldots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \ldots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m.$$

5. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i, i = 1, \ldots, m)$ forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.
6. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.
7. Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est de déterminant égal à 1.

Correction DS n°1

SECOND PROBLÈME

IV Le groupe symplectique

1. On obtient $J^2 = -I_{2n}$ et $J^T = -J$. La première relation montre que J est inversible et a pour inverse $-J$.
2. On obtient ainsi $J^T J J = -J^3 = J$, donc $J \in \mathcal{S}p_{2n}$.
   Un produit par blocs donne
   $$K(\alpha)^T J K(\alpha) = \begin{bmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} = J.$$
   Donc $K(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}$.
3. Laissé en exercice. Là encore, un calcul par blocs montre le résultat sans difficulté.
4. La notion de « valeurs possibles »est un peu vague. Mais la définition implique immédiatement, compte tenu de la multiplicativité du déterminant et de la propriété $\det(M^T) = \det M$, que si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, alors
   $$\det(M)^2 \det J = \det J$$
   donc, puisque J est inversible, $\det M = \pm 1$.
   La partie III est destinée à préciser ce résultat.
5. Soit $M, N \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors
   $$(MN)^T J (MN) = N^T M^T J M N = N^T J N = J$$
   donc $MN \in \mathcal{S}p_{2n}$.
6. D'après la question 4., si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, alors M est inversible. On a $M^T J M = J$, ce qui revient à dire que MJ^{-1} est inversible et a pour inverse (à gauche) $M^T J$. Cet inverse à gauche est également inverse à droite, donc
   $$MJ^{-1} M^T J = I_n \text{ d'où } - MJM^T = J^{-1} = -J.$$
   En prenant l'inverse, on obtient
   $$M^{-1T} J M^{-1} = J$$
   ce qui montre bien que $M^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}$.
7. On a obtenu au cours du calcul précédent $-MJM^T = -J$. En multipliant par -1, on obtient bien $M^T \in \mathcal{S}p_{2n}$.
8. On a $M^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$. Un calcul par blocs conduit à $M \in \mathcal{S}p_{2n}$ si et seulement si :
   $$\begin{cases} A^T C = C^T A \text{ (ce qui équivaut à dire que } A^T C \text{ est symétrique)} \\ B^T D = D^T B \text{ (ce qui équivaut à dire que } B^T D \text{ est symétrique)} \\ -A^T D + C^T B = -I_n \\ -B^T C + D^T A = I_n \end{cases}$$
   Soit, si l'on préfère, puisque par transposition, les deux dernières relations sont équivalentes :
   $$M \in \mathcal{S}p_{2n} \text{ si et seulement si } A^T C \text{ et } B^T D \text{ sont symétriques et } -B^T C + D^T A = I_n\ .$$

V Centre de $\mathcal{S}p_{2n}$

9. L'appartenance de I_{2n} et $-I_{2n}$ à $\mathcal{S}p_{2n}$ est claire directement, ou se déduit de la question 3. Et il est clair que ces deux matrices commutent avec toute matrice de $\mathcal{S}p_{2n}$.

10. On a $L = K(-1)^T$ donc d'après les questions 2. et 7., $L \in \mathcal{S}p_{2n}$. Donc L commute avec M, ce qui donne
$$\begin{bmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{bmatrix}$$
On obtient ainsi $C = 0$ et $A = D$.
De même, $L^T \in \mathcal{S}p_{2n}$, donc L^T commute avec M. On obtient alors $B = 0$.
Si on reporte ces conditions dans les relations obtenues à la question 8., on obtient $A^TA = I_n$. Donc A est inversible, et même orthogonale.

11. L'appartenance de L_U à $\mathcal{S}p_{2n}$ résulte de la question 3. Elle commute donc avec M, ce qui s'écrit
$$\begin{bmatrix} UA & UB \\ U^{T-1}C & U^{T-1}D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AU & BU^{T-1} \\ CU & DU^{T-1} \end{bmatrix}$$
ce qui implique bien que A commute avec U. Puisque U est une matrice quelconque de $\mathcal{G}_n$, A commute avec toute matrice de $\mathcal{G}_n$.

12. Les matrices $I_n + E_{i,j}$ sont triangulaires et leurs éléments diagonaux valent 1 ou 2. Donc elles sont inversibles et commutent avec A. Posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$. Si $i \neq j$, la i^{e} ligne de de $(I_n + E_{i,j})A$ s'obtient en ajoutant la j^{e} ligne de A à sa i^{e}.
De même, la j^{e} colonne de $A(I_n + E_{i,j})$ s'obtient en ajoutant à la j^{e} colonne de A sa i^{e}. On a donc en particulier, en considérant les éléments (i,i) et (i,j) de cette matrice,
$$a_{i,i} + a_{j,i} = a_{i,i}$$
et
$$a_{i,j} + a_{j,j} = a_{i,j} + a_{i,i}.$$
On obtient donc $a_{j,i} = 0$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$. Les termes non diagonaux sont donc nuls et les termes diagonaux sont égaux entre eux. A est donc une matrice scalaire. Mais on a vu qu'elle était nécessairement orthogonale. Donc $A = \pm I_n$ d'où il résulte d'après la question 10. que $M = \pm I_{2n}$. Par conséquent, $\mathcal{Z} \subset \{-I_{2n}, I_{2n}\}$, d'où l'égalité par double inclusion.

VI Déterminant d'une matrice symplectique

13. On obtient
$$\begin{bmatrix} U+QV & QW \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$
soit, puisque D a été supposée inversible $V = C$, $W = D$, $Q = BD^{-1}$, $U = A - BD^{-1}C$. Cette condition est nécessaire et suffisante.

14. Toujours du fait de l'inversibilité de D, la deuxième condition de la question 8. peut s'écrire
$$D^{T-1}B^T = BD^{-1}$$
ce qui signifie bien que BD^{-1} est symétrique.

En prenant le déterminant dans l'égalité de la question 13., on obtient

$$\det M = (\det U)(\det W) = \det(A - BD^{-1}C) \det D.$$

Le déterminant d'une matrice étant égal à celui de sa transposée, on obtient

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T(BD^{-1})^T) = \det(A^T - C^T BD^{-1})$$

puisque BD^{-1} est symétrique. Il en résulte bien

$$\det M = \det(A^T D - C^T B).$$

La troisième relation de la question 8. montre que cette matrice est égale à I_n. Donc son déterminant vaut 1.

15. On écrit

$$\langle QV_1|QV_2\rangle = s_1 \langle PV_1|QV_2\rangle = s_1 V_1^T P^T QV_2.$$

De même

$$\langle QV_1|QV_2\rangle = s_2 \langle QV_1|PV_2\rangle = s_2 V_1^T Q^T PV_2.$$

Comme $P^T Q$ est symétrique, les deux produits de matrices sont égaux, et on obtient

$$s_1 V_1^T P^T QV_2 = s_2 V_1^T P^T QV_2.$$

Puisque $s_1 \neq s_2$, c'est que $V_1^T P^T QV_2 = 0$, d'où $\langle QV_1|QV_2\rangle = 0$.

16. Soit $V \in \mathrm{Ker}B \cap \mathrm{Ker}D$. D'après la troisième relation de la question 8, il en résulte $V = 0$. On a bien $\mathrm{Ker}B \cap \mathrm{Ker}D = \{0\}$.

17. S'il existe i tel que $DV_i = 0$ alors, puisque $s_i \neq 0$, $BV_i = 0$. Donc $V_i \in \mathrm{Ker}B \cap \mathrm{Ker}D$, d'où $V_i = 0$ d'après la question précédente, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $DV_i \neq 0$ pour tout i.

    Si l'on prend $Q = D$ et $P = B$ dans la question 15, les hypothèses s'appliquent puisque, d'après la question 8, $D^T B$ est symétrique. Donc les DV_i, qui sont non nuls et deux à deux orthogonaux, forment une famille libre.

18. Si pour tout α, $D - \alpha B$ est non inversible, on peut considérer n réels distincts $s_1, \ldots, s_n$. Les $D - s_i B$ sont non inversibles, donc il existe $V_1, \ldots, V_n$ non nuls tels que pour tout i, $(D - s_i B)V_i = 0$. Alors, $DV_1, \ldots, DV_n$ forment un système libre. Si $(V_1, \ldots, V_n)$ était liée, $(DV_1, \ldots, DV_n)$ le serait aussi.

    Donc $(V_1, \ldots, V_n)$ forme une base de $\mathcal{E}_n$. Soit $V = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i$ un vecteur de $\mathcal{E}_n$ tel que $DV = 0$. On obtient $\sum_{i=1}^n \alpha_i DV_i = 0$ donc, puisque les DV_i forment une famille libre, $\alpha_i = 0$ pour tout i. Donc $V = 0$. Ainsi, D serait inversible, ce qui est contraire aux hypothèses.

    Remarque : La démarche de l'énoncé semble bien lourde. L'hypothèse $m \leq n$ n'est pas utilisée, ce qui montre qu'on ne peut pas avoir $n + 1$ scalaires s_i distincts et $n + 1$ vecteurs V_i non nuls répondant aux hypothèses, donc que $D - s_1 B, \ldots, D - s_{n+1} B$ ne peuvent être tous non inversibles. On pouvait aussi utiliser le caractère polynomial de $\alpha \mapsto \det(D - \alpha B)$.

19. On a $K(\alpha)M = \begin{bmatrix} A & B \\ C - \alpha A & D - \alpha B \end{bmatrix}$. D'après les questions 2. et 5., cette matrice appartient à $\mathcal{S}p_{2n}$. Comme $D - \alpha B$ est inversible, il résulte de la question 14. qu'elle est de déterminant 1.

    Mais $\det(K(\alpha)M) = \det K(\alpha) \det M = \det M$. On obtient bien $\det M = 1$.

PREMIER PROBLÈME

Partie 1

1. (a) La linéarité de Φ résulte de la linéarité de la dérivation et de celle de la multiplication par un polynôme.
Soit $k \in \{0, ..., a-1\}$
$$\Phi(X^k) = (b+k)X^k + (a-k)X^{k+1} \in F,$$
$$\Phi(X^a) = (b+a)X^a + 0X^{a+1} \in F.$$
Donc $(X^0, X^1, \dots X^a)$ étant une base de F et Φ linéaire, $\Phi(F) \subset F$.
$\underline{\Phi \text{ est un endomorphisme de } F.}$

(b) Le calcul mené au (a) donne
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b & 0 & & & 0 \\ a & b+1 & & & \\ 0 & a-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b+a+1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a-(a-1) & b+a \end{pmatrix}}$$

2. (a)
$$\Phi(H_k) = (aX+b)X^k(1-X)^{a-k} + X(1-X)\big(kX^{k-1}(1-X)^{a-k} - (a-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\big)$$
Donc
$$\Phi(H_k) = (b + aX + k(1-X) - (a-k)X)H_k = \underline{(b+k)H_k}.$$

(b) (5/2) et (3/2) à partire de la semaine prochaine. On a que $(H_0, H_1, \dots, H_a)$ est une famille libre de F car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, donc une base car de cardinal $a+1$, égal à la dimension de F.
(3/2) On montre la liberté de $(H_0, H_1, \dots, H_n)$, pour $n = 0, ..., a$ par récurrence et en utilisant Φ.

3. (a) Grâce au binôme de Newton,
$$Q_0 = ((1-X)+X)^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} X^k(1-X)^{a-k} = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} H_k.$$

(b) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(\mathbf{P}_n)$ la propriété à montrer.
- La sous-question (a) prouve $(\mathbf{P}_0)$.
- Soit $m \in \mathbf{N}$. Supposons $(\mathbf{P}_m)$.
$$Q_{m+1} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^n H_k.$$
$$Q_{m+1} = \Phi\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^m H_k\right) = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^m \Phi(H_k) = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^{m+1} H_k,$$
par (a). D'où $(\mathbf{P}_{m+1})$

Donc par récurrence $(\mathbf{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie 2

Pour tout $k \in N^*$, on note T_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k^{e} tirage amène une boule noire, et qui vaut 0 sinon.

1. (a) A chaque tirage la probabilité de tirage d'une boule est *a priori* uniforme donc :

$$\boxed{T_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{a}{N}\right)}$$

(b) Par la formule des probabilités totales, puisque $(\{T_1 = 1\}, \{T_1 = 0\})$ est un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(T_2 = 1) = \mathbf{P}(T_2 = 1|T_1 = 1)\mathbf{P}(T_1 = 1) + \mathbf{P}(T_2 = 1|T_1 = 0)\mathbf{P}(T_1 = 0) = \frac{a-1}{N} \times \frac{a}{N} + \frac{a}{N} \times \frac{b}{N}.$$

D'où $\mathbf{P}(T_2 = 1) = \frac{a(N-1)}{N^2}$ Donc $\boxed{T_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{a(N-1)}{N^2}\right)}$

Remarque : On peut calculer la covariance de T_1 et T_2.
D'après (a) et (b) et le cours,

$$\mathrm{E}(T_1) = \frac{a}{N},$$
$$\mathrm{E}(T_2) = \frac{a(N-1)}{N^2}.$$

Par ailleurs

$$\mathrm{E}(T_1T_2) = 1 \times \mathbf{P}(T_1T_2 = 1) + 0 \times \mathbf{P}(T_1T_2 = 0) = \mathbf{P}(T_1 = 1, T_2 = 1) = \mathbf{P}(T_2 = 1|T_1 = 1)\mathbf{P}(T_1 = 1).$$

Soit $\mathrm{E}(T_1T_2) = \frac{a-1}{N} \times \frac{a}{N}$.
Donc

$$\boxed{\mathrm{cov}(T_1, T_2) = \mathrm{E}(T_1T_2) - \mathrm{E}(T_1)\mathrm{E}(T_2) = \frac{a-1}{N} \times \frac{a}{N} - \frac{a}{N} \times \frac{a(N-1)}{N^2} = \frac{a(a-N)}{N^3}}$$

2. (a) $X_n = T_1 + T_2, \cdots + T_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par le formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(T_{n+1} = 1|X_n = k)\mathbf{P}(X_n = k),$$

puisque la famille $(\{X_n = k\}, k = 0, ...n)$ est un système complet d'événements (X_n est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$). Donc

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a-k}{N}\mathbf{P}(X_n = k) =$$

$$\frac{a}{N}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = k) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{a}{N} \times 1 - \frac{1}{N}\mathrm{E}(X_n) = \frac{a - \mathrm{E}(X_n)}{N}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note $\mathbf{Q}_n$ la propriété à prouver.

- $\mathbf{Q}_n$ est vraie, cf. 1.(a).
- Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathbf{Q}_k$ vraie pour $k = 1, 2, \ldots, m$. D'après (b) et (a) et la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{P}(T_{m+1} = 1) = \frac{a - \sum_{k=1}^{m} E(T_k)}{N}$$

Mais puisque les T_n, $n \in \mathbf{N}^*$, sont des variables de Bernoulli,

$$\mathbf{P}(T_{m+1} = 1) = \frac{a - \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(T_k = 1)}{N} = \frac{a - \sum_{k=1}^{m} \frac{a(N-1)^{k-1}}{N^k}}{N},$$

grâce à $\mathbf{Q}_1$,.... $\mathbf{Q}_m$. Calculons grâce à notre science des suites géométriques :

$$\mathbf{P}(T_{m+1} = 1) = \frac{a}{N} - \frac{a}{N^2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} = \frac{a}{N} - \frac{a}{N^2} \frac{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^m}{1 - \frac{N-1}{N}} = a\frac{(N-1)^m}{N^{m+1}}.$$

D'où $\mathbf{Q}_{m+1}$.

Donc par récurence, La propriété $\mathbf{Q}_n$ est vraie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{\mathbf{P}(T_n = 1) = \frac{a(N-1)^{n-1}}{N^n}.}$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ Par (b) et en utilisant le secours de (c),

$$\mathrm{E}(X_n) = a - N\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = a - \frac{a(N-1)^n}{N^n} = a - a\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

Comme $\left(1 - \frac{1}{N}\right) \in]0, 1[$, $\boxed{\mathrm{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\to} a}$

Partie 3

1. (a) Il y a au total a boules noires, on ne peut en tirer plus que a !!

$$X_n \leq a.$$

On tire une boule et une seule à chaque tirage, au bout de n tirage on ne peut avoir tiré plus de n boules noires :

$$X_n \leq n.$$

Par ailleurs X_n peut prendre *a priori* toutes les valeurs de 0 à $\min\{a, n\}$.

Donc $\boxed{X_n(\Omega) = \{0, \ldots, \min\{a, n\}\}}$ [2]

(b) • *Première méthode* :

La formule des probabilités composées dit

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(T_1 = 0, T_2 = 0, ...T_n = 0) =$$

$$\mathbf{P}(T_1 = 0)\mathbf{P}(T_2 = 0|T_1 = 0)\mathbf{P}(T_3 = 0|T_1 = 0, T_2 = 0)......\mathbf{P}(T_n|T_1 = 0, T_2 = 0, ..., T_n = 0).$$

2. Une preuve mathématique utilisant le modèle semble inaccessible puisque l'on ne connait pas Ω...

Donc, comme après chaque tirage le nombre de boules noires est inchangé, :

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = \underbrace{\frac{b}{N} \times \frac{b}{N} \times \frac{b}{N} \times \ldots \times \frac{b}{N}}_{n \text{ termes}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{b}{N}\right)^n.}$$

• *Seconde méthode* : On peut montrer par récurence sur n ce résultat.
On a vu (cf. II.1.(a)) que $\mathbf{P}(X_1 = 0) = \left(\frac{b}{N}\right)^1$. Si l'on suppose que pour un entier $m \geq 1$, $\mathbf{P}(X_m = 0) = \left(\frac{b}{N}\right)^m$ alors :

$$\mathbf{P}(X_{m+1} = 0) = \mathbf{P}(T_1 = 0)\mathbf{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 0) + \mathbf{P}(T_1 = 1)\mathbf{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 1)$$

D'une part $\mathbf{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 1) = 0$, d'autre part $\mathbf{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 0) = 0 = \mathbf{P}(X_m = 0)$, puisque à l'issue du premier tirage les conditions restent inchangées et que les tirages $2, 3, \ldots .m, \ldots$ suivent la même loi que les tirages $1, 2, \ldots, m-1, \ldots$. Donc $\mathbf{P}(X_{m+1} = 0) = \frac{b}{N} \times \left(\frac{b}{N}\right)^m = \left(\frac{b}{N}\right)^{m+1}$ Et par récurrence on trouve le résultat.

(c) Là encore, deux méthodes.
• *Première méthode* :
La formule des probabilités composées dit :

$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(T_1 = 1, T_2 = 1, \ldots T_n = 1) =$

$$\mathbf{P}(T_1 = 1)\mathbf{P}(T_2 = 1|T_1 = 1)\mathbf{P}(T_3 = 1|T_1 = 1, T_2 = 1)\ldots\ldots\mathbf{P}(T_n|T_1 = 1, T_2 = 1, \ldots, T_n = 1).$$

Comme après chaque tirage le nombre de boules noires diminue de 1,

$$\mathbf{P}(X_n = n) = \underbrace{\frac{a}{N} \times \frac{a-1}{N} \times \frac{a-2}{N} \times \ldots \times \frac{a-n+1}{N}}_{n \text{ termes}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{a!}{(a-n)!N^n}}$$

• *Seconde méthode* : On peut montrer par récurence sur n ce résultat.
On a vu (cf. II.1.(a)) que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \left(\frac{a}{N}\right)^1 = \frac{a!}{(a-1)!N^1}$. Si l'on suppose que pour un entier $m \geq 1$, $\mathbf{P}(X_m = m) = \frac{a!}{(a-m)!N^m}$ alors :

$$\mathbf{P}(X_{m+1} = m+1) = \mathbf{P}(T_1 = 0)\mathbf{P}(X_{m+1} = m|T_1 = 0) + \mathbf{P}(T_1 = 1)\mathbf{P}(X_{m+1} = m+1|T_1 = 1).$$

D'une part $\mathbf{P}(X_{m+1} = m|T_1 = 0) = 0$, d'autre part $\mathbf{P}(X_{m+1} = m+1|T_1 = 1) = \mathbf{P}(X'_m = m)$, où l'on définit la suite $(X'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires comme la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mais en faisant partir le protocole de tirage de $a-1$ boules noires et $b+1$ blanches.
Donc par l'hypothèse de récurrence, appliquée à X'_m,

$$\mathbf{P}(X_{m+1} = m+1) = \frac{a}{N} \times \frac{(a-1)!}{((a-1)-m)!N^m} = \frac{a!}{(a-m-1)!N^{m+1}}.$$

2. (a) Soit k un entier naturel, tel que $1 \leq k \leq \min\{a, n\}$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{\mathbf{P}} (X_{n+1} = k | X_n = i) \mathbf{P}(X_n = i).$$

Or on a :

• pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $p(X_{n+1} = k | X_n = i) = 0$, puisque $0 \leq T_{n+1=} \leq X_{n+1} - X_n \leq 1$ (on ne tire qu'une boule à la fois) ;

• $\mathbf{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = \mathbf{P}(T_n = 0) = \frac{b+k}{N}$, (si k boules noires on été prélevées pendant les n premiers tirage, l'urne contient $b + k$ boules blanches) ;

• $\mathbf{P}(X_{n+1} = k | X_n = k-1) = \mathbf{P}(T_n = 1) = \frac{a-(k-1)}{N}$.

Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{b+k}{N} \mathbf{P}(X_n = k) + \frac{a+1-k}{N} P(X_n = k-1).}$$

(b) D'après 1.(b),

$$\frac{b+0}{N} \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{a+1-0}{N} P(X_n = 0-1) = \frac{b}{N} \frac{b^n}{N^n} + \frac{a+1}{N} \times 0 = \frac{b^{n+1}}{N^{n+1}} = \mathbf{P}(X_{n+1} = 0).$$

Donc (1) est encore valable pour $k = 0$.

(c) On suppose que $n + 1 \leq a$.

Par 1.(c),

$$\frac{b+n+1}{N} \mathbf{P}(X_n = n+1) + \frac{a+1-(n+1)}{N} \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{b+n+1}{N} \times 0 + \frac{a-n}{N} \frac{a!}{(a-n)! N^n}$$

$$= \frac{a!}{(a-(n+1))! N^{n+1}} = \mathbf{P}(X_n + 1 = n+1).$$

Donc (1) est vérifier pour $k = n + 1$.

(d) D'après b et c appliquée avec $n = a - 1$, on a que (1) est vérifiée pour tout entier naturel k inférieur ou égal à a

3. Soit $n \in \mathbf{N}$, d'après 1.

$$G_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{P}(X_{n+1} = k) X^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{b+k}{N} \mathbf{P}(X_n = k) + \frac{a+1-k}{N} \mathbf{P}(X_n = k-1) \right) X^k.$$

Donc

$$G_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{b}{N} \mathbf{P}(X_n = k) + \frac{a}{N} \mathbf{P}(X_n = k-1) \big) X^k + \sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{k}{N} \mathbf{P}(X_n = k) + \frac{1-k}{N} \mathbf{P}(X_n = k-1) \big) X^k.$$

D'une part :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{b}{N} \mathbf{P}(X_n = k) + \frac{a}{N} \mathbf{P}(X_n = k-1) \big) X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b}{N} \mathbf{P}(X_n = k) X^k + X \sum_{j=0}^{n} \frac{a}{N} \mathbf{P}(X_n = j) \big) X^j,$$

puisque $\mathbf{P}(X_n = n+1) = 0$ et que $\mathbf{P}(X_n = -1) = 0$. Soit

$$\sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{b}{N} \mathbf{P}(X_n = k) + \frac{a}{N} \mathbf{P}(X_n = k-1) \big) X^k = \frac{aX+b}{N} G_n.$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\big(\frac{k}{N}\mathbf{P}(X_n=k)+\frac{1-k}{N}\mathbf{P}(X_n=k-1)\big)X^k = X\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{N}\mathbf{P}(X_n=k)X^{k-1}-X^2\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{N}\mathbf{P}(X_n=j)X^{j-1}$$

toujourscar $\mathbf{P}(X_n=n+1)=0$ et $\mathbf{P}(X_n=-1)=0$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n+1}\big(\frac{k}{N}\mathbf{P}(X_n=k)+\frac{1-k}{N}\mathbf{P}(X_n=k-1)\big)X^k = \frac{X(1-X)}{N}G_n'.$$

Finalement

$$\boxed{G_{n+1}=\frac{aX+b}{N}G_n+\frac{X(1-X)}{N}G_n'}$$

4. (a) $G_n'(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}k\mathbf{P}(X_n=k)1^{k-1}=\mathrm{E}(X_n)$, car X_n à ses valeurs incluses dans $\{0,...n\}$
   Donc $\underline{G_n'(1)\text{ est l'espérance de }X_n.}$
   (b) Soit un entier $n\geq 1$. Grâce à de (2),

$$\mathrm{E}(X_{n+1})=G_{n+1}'(1)=\frac{a}{N}G_n(1)+\frac{a\times 1+b}{N}G_n'(1)+\frac{0}{N}G_n''(1)+\frac{1-2\times 1}{N}G_n'(1).$$

   Or $G_n(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X_n=k)=\mathbf{P}(X_n\in\{0,...n\}=1$, puisque les événements $(X_n=k)$, $k=0,...n$, sont deux à deux disjoints et que X_n est à valeurs dans $\{0,..,n\}$. Donc $\mathrm{E}(X_{n+1})=\frac{a}{N}+\left(\frac{N-1}{N}\right)\mathrm{E}(X_n)$.
   (c) $(\mathrm{E}(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc une suite arithméticogéométrique. Une bonne connaissance du cours de première nous enseigne, puisque

$$a=\frac{a}{N}+a\left(\frac{N-1}{N}\right),$$

   qu'il existe un réel λ, tel que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\mathrm{E}(X_n)=a+\lambda\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.$$

   Mais I.1.a nous dit que $\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(T_1)=\frac{a}{N}$ et donc $\lambda=\frac{a(1-N}{N}$ et l'on retrouve ainsi la formule du II.3., $\mathrm{E}(X_n)=a-a\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

5. Par convention $G_0=1=Q_0$ et la question 3. montre que $N^{n+1}G_{n+1}=\Phi(N^nG_n)$, pour tout $n\in\mathbf{N}$ si bien que :

$$N^nG_n=Q_n.$$

   Soit alors $j\in\{0,...,a\}$. Par la formule de Taylor, $\mathbf{P}(X_n=j)=\frac{G_n^{(j)}(0)}{j!}$ et donc, d'après I.4.(b),

$$\mathbf{P}(X_n=j)=\frac{1}{N^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}(b+k)^n\frac{H_k^{(j)}(0)}{j!}.$$

   Soit $k\in\{0,...,a\}$, la formule de Leipnitz affirme :

$$H_k^{(j)}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}k(k-1)...(k-i+1)X^{k-i}(-1)^{j-i}(a-k)(a-k-1).....(a-k-j+i-1)(1-X)^{a-k-j+i},$$

(formule écrite dans $\mathbf{R}(X)$).
Donc si $k > j$ alors $H_k^j(0) = 0$ et si $k \leq j$ alors il reste dans la somme un seut terme, celui correspondant à $i = k$:

$$H_k^{(j)}(0) = \binom{j}{k} k!(-1)^{j-k}(a-k)(a-k-1).....(a-j-1) = (-1)^{j-k}\frac{j!k!(a-k)!}{k!(j-k)!(a-j)!}.$$

Donc finalement :

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n = j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{a}{k} \binom{a-k}{j-k} (-1)^{j-k} \left(\frac{b+k}{N}\right)^n.}$$