SUJET 2
CCP

MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.

Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,\dots,n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii}).$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

I. EXEMPLES

1. Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
   (b) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?
3. Cas n = 2
   Déterminer $\mathcal{E}_2$ puis montrer que $\mathcal{E}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II. TEST DANS LE CAS n = 3

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}
5. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,3,n \\ j=1,2,3}}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes : $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$
6. Parmi les matrices suivantes, indiquer les matrices à diagonale propre :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les produits $a_{12}a_{21}$; $a_{13}a_{31}$ et $a_{23}a_{32}$ pour qu'une matrice $A = (aij) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à diagonale propre inversible soit telle que A^{-1} soit également une matrice à diagonale propre (on demande juste de donner cette conjecture sans chercher à la prouver).

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que
$$\det M = (\det A)(\det C)$$
(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).
2. Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :
   (a) La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).
   (b) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS

3. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a\,{}^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
4. Si on note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles, démontrer que G_n est dense dans $\mathcal{E}_n$.
5. *Matrices trigonalisables*
   (a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
   (b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
6. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V. MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.
On admet le résultat suivant :
Pour tout élément A de $\mathcal{S}_n$ il existe un élément Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et un élément P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, tel que :
$$A = P\delta\,{}^tP,$$
on dit que A est orthodiagonalisable.

7. *Question préliminaire*
   (a) Démontrer le résultat admis dans le cas où $n = 2$.
   (b) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{tr}({}^tAA)$.
8. *Matrices symétriques à diagonale propre*
   (a) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont les valeurs propres sont notées λ_1, ..,λ_n. Démontrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$
   (b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.
9. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*
   Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
   (a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.
   (b) Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.
   (c) Conclure que A est la matrice nulle.

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

10. *Question préliminaire*
    Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

11. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$. Démontrer que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

12. Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Correction du DS n^{o}2 pour les $\frac{3}{2}$

par M. Baudin

I. EXEMPLES

1. (a) Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est
$P_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(M(\alpha))X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M(\alpha)))X + \det(M(\alpha))$
$= -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8-3\alpha)X + (4-2\alpha)$
$= (1-X)(2-X)((2-\alpha)-X)$.
Les racines de $P_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.
$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$

(b) Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.
$\operatorname{rg}(M(0) - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
$\operatorname{rg}(M(1) - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.
$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$

2. $P_A(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(A)X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))X + \det(A) = -X^3 - X$.
P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale propre.}}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
Soit $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$.
la matrice A est à diagonale propre si et seulement si $P_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.
$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.}}$
L'ensemble des matrices trianglaires supérieures est fermé comme sous-espace vectoriel en dimension finie, de même pour l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
$\mathcal{E}_2$ est donc la réunion de deux fermés.
$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc une partie fermée de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Pour une matrice à diagonale propre, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.
$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls}}$
Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynône caractéristique est égal à $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$
En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que
$\boxed{A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si } \det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0}$

6. (a) Si $(\det A = a_{11}a_{22}a_{33})$ et $(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0)$
alors la matrice est MDP
sinon la matrice n'est pas MDP.

(b) Laissé en exercice : $\boxed{\text{Les matrices à diagonale propre sont } A, \text{ et } C}$

(c) $\boxed{a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0}$

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On note r et s les dimensions des matrices A et C.

Alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.

En développant r fois par rapport à la première colonne, on montre que

$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$

En développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A$.

$\boxed{\text{On a donc bien } \det M = \det A \det C.}$

8. (a) Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.

En effet, d'après la question précédente,

$P_M(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = P_A(X)P_C(X)$

Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.

On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{M \text{ est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls}}$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.

De même qu'en a), $P_M(X) = P_A(X)P_C(X)$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors P_A est scindé et $\operatorname{tr} A = a + d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $P_A(X) = (X - e)(X - h)$ et $P_C(X) = (X - a)(X - d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a + d = e + h \\ ad - bc = eh \\ eh - gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. QUELQUES PROPRIETES

9. On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.

Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a.a_{11} + b$, $a.a_{22} + b$ ... $a.a_{nn} + b$.

Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$\boxed{aA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA+bI_n) = a\,{}^tA + bI_n$,

$\boxed{a\,{}^tA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

10. Soit $A \in \mathcal{E}_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \frac{1}{p} I_n$.

D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.

D'autre part, $\det U_p = P_A(\frac{1}{p})$ est nul si et seulement si $\frac{1}{p}$ est valeur propre de A. U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

Il existe donc un entier P_0 tel que la suite $(U_p)_{p \geq P_0}$ soit une suite d'éléments de G_n. Cette suite converge vers A.

De la caractérisation séquentielle de la densité, on déduit que $\boxed{G_n \text{ est dense dans } \mathcal{E}_n.}$

11. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.}}$

(b) Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est trigonalisable}}$

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $P_A = P_B$ et P_B est scindé, donc P_A est scindé.

Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } P_A \text{ est scindé.}}$

12. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

V. MATRICES SYMETRIQUES ET MATRICES ANTISYMETRIQUES

13. $\operatorname{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$

14. (a) A est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$.

$\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(PD{}^tPPD{}^tP)$

$= \operatorname{tr}(PDD{}^tP)$ (car ${}^tPP = I_n$.)

$= \operatorname{tr}(D^2)$ (car $PD^2{}^tP$ semblable à D^2 et deux matrices semblables ont la même trace.)

Or $\operatorname{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\operatorname{tr}(D^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$$

(b) Si de plus A est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 = 0$, la matrice A est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc les matrices diagonales.}}$

15. (a) A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $P_A(X) = (-1)^n X^n$, polynôme scindé, donc A est trigonalisable et a ses valeurs propres toutes nulles. Donc A est trigonalisable cadre$A^n = 0$.

$({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0$. $\boxed{({}^tAA)^n = 0.}$

(b) ${}^tAA$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.

$({}^tAA)^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles.

On en déduit $\boxed{{}^tAA = 0.}$

(c) De ce qui précède, on déduit que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$.

$\boxed{A \text{ est donc la matrice nulle.}}$

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

16. $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

17. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.

De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

On en déduit $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\dim F \leq \dfrac{n(n+1)}{2}.}$

Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

$\boxed{\text{La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } F \subset \mathcal{E}_n \text{ est donc } \dfrac{n(n+1)}{2}.}$

18. On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec

$A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est à diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a déterminé un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } F \subset \mathcal{E}_n\text{, de dimension maximale} \\ \text{mais tel que } F \text{ ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.}\end{array}}$