DM n$^{\text{o}}$5

Parties à traiter : Exercice 1 et au choix Exercice 2 ou 2 bis (plus long et plus dur).

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réels non nuls , nous dirons que le produit infini associé à la suite, noté $\prod a_n$ converge si par définition la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier naturel n, $P_n := \prod_{k=0}^{n} a_k$, converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si le produit converge alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que : $u_n \neq -1$, pour tout entier naturel n.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ est définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Dans la suite, on supposera que $\ln(1+u_n)$ est défini pour tout $n \geq 0$.

   Attention ! *Nous insistons sur le fait que $\prod a_n$ n'est pas un réel et que des expressions du type $\ln\left(\prod_{n\geq n_0} a_n\right)$ n'ont rigoureusement aucun sens.*

3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.

4. On ne suppose plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que le produit converge si et seulemement si la série $\sum u_n^2$ converge.

5. Déterminer la nature des produits infinis suivants :

   (a) $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

   (b) $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$, où x est un élément de $]-\pi, \pi[$.

   (c) $\prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \exp\left(-\frac{x}{n}\right)$, où x est un élément de $\mathbf{R}_+^*$.

6. Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n-ième nombre premier. On se propose démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{p_n}$ diverge[1].

   On note $(p_n)_{n\geq 1}$, la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant :

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11\ldots$$

   (a) Soit un entier $p \geq 2$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$.

---

1. Cela signifie qu'il y a pas mal de nombres premiers ! A titre de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{2^n}$ converge.

(b) Soient une entier $N \geq 2$ et un entier $M \geq 1$. Déduire de la sous question précédente que :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N} \frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}}.$$

(c) Montrer que le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge.

(d) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 2

Nous considèrerons la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ nous noterons, S sa somme, et pour tout entier n, strictement positif, R_n le reste d'ordre n et S_n la somme partielle d'ordre n.

1. En comparant la série et une intégrale donner l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2\left(n+1\right)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

2. Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = S_n + \frac{1}{2\left(n+1\right)^2}$$

Pour quelle valeurs de l'entier n a-t-on :

$$|S - x_n| \leq 10^{-6}$$

3. Nous nous proposons de trouver une suite qui converge plus vite vers S que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4. (a) Montrer que les relations suivantes définissent une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels :

$$P_0 = 1; \quad (1)$$
$$P_n'\left(X\right) = P_{n-1}\left(X\right), \text{ pour tout } n\in\mathbf{N}^*; \quad (2)$$
$$\int_0^1 P_n\left(t\right)\mathrm{d}t = 0, \text{ pour tout } n\in\mathbf{N}^*. \quad (3)$$
$$(4)$$

Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3. Montrer que $P_3(\frac{1}{2}) = 0$, en déduire que pour tout réel x élément de $[0,1]$,

$$|P_3\left(x\right)| \leq \frac{1}{24}.$$

(b) Soit f une application numérique, définie sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que :

$$\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)\right) - \tfrac{1}{12}\left(f'\left(1\right)-f'\left(0\right)\right) - \int_0^1 P_3\left(x\right)f^{(3)}\left(x\right)\,\mathrm{d}x. \quad (5)$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. En appliquant la formule précédente à l'application $f \;:\; [0,1] \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \frac{1}{(k+x)^3}$, pour tout entier k supérieur ou égal à n, montrer que :

$$R_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Plus précisément, montrer que :

$$\left|S - \left(S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4}\right)\right| \leq \frac{1}{2n^5}.$$

Donner une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

.

Exercice 2 bis

1. — Polynômes de Bernoulli —

(a) Montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui satisfait aux conditions suivantes
   i. $P_0 = 1\,;$
   ii. Pour tout entier $n \geq 1$, $P_n' = nP_{n-1}\,;$
   ii. Pour tout entier $n \geq 1$, $\int_0^1 P_n$=0.

   Dans la suite on pose pour tout entier naturel : $B_n = P_n(0)$.

   Terminologie : *P_n est le n^{e} polynôme de Bernoulli et B_n le n^{e} nombre de Bernoulli.*

(b) Montrer pour tout entier naturel n, que : $P_n \in \mathbf{Q}[X]$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_{n-k}X^k$.

   Explicitez P_1, P_2 et P_3.

(c) Etablir, pour tout entier naturel n les égalités suivantes.
   i. $P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X)\,;$
   ii. $P_n(X) = 2^{n-1}\left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\,;$
   iii. $P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}$.

2. — Etude des nombres de Bernoulli —

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $B_{2k+1} = 0$.

(b) En utilisant **1. (b)**, montrer que pour tout entier $p \geq 1$, on peut trouver un système linéaire triangulaire à p lignes dont $(B_0, B_2, \ldots, B_{2p})$ est la solutions.

   Déterminer $B_0, B_1, \ldots, B_6$.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel k,
   — P_{2k+2} admet dans $[0,1]$ exactement deux racines éléments de $]0,1[\,;$
   — P_{2k+1} admet dans $[0,1]$ exactement trois racines qui sont 0, $\frac{1}{2}$, 1.

(b) Déduire de la question précédente que pour tout entier k, le maximum de $|P_{2k}|$ sur $[0,1]$ est égal à $|B_2k|$ et celui de $|P_{2k+1}|$ est inférieur à $\frac{(2k+1)|B_2k|}{2}$.

4. — Formule d'Euler-Mac Laurin — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0,1],\mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

(a) Donner pour f la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $2p$, et rappeler sa démonstration.

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k!}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) - I_{2p+1},$$

avec : $I_{2p+1} = \int_0^1 f^{2p+1}(x) P_{2p+1}(x)\,\mathrm{d}x$ (formule d'Euler-Mac Laurin).

(c) Montrer que pour tout entier naturel p :

$$|I_{2p+1}| \leq \frac{|B_{2p}|}{2\ (2p)!} \max_{x\in[0,1]} |f^{2p+1}(x)|.$$

(d) Soit g un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([a,b],\mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$ et a et b des réels tels que $a < b$. Que devient la formule d'Euler-Mac Laurin en remplaçant f par $t \mapsto g(a+t(b-a))$?

5. — Exemple d'application de la formule d'Euler-Mac Laurin au calcul approché de sommes de séries — On note S la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$, et pour tout entier $n \geq 1$, S_n sa somme partielle d'ordre n et R_n son reste d'ordre n.

(a) Ecrire la formule d'Euler-Mac Laurin pour l'application $f\ :\ [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{(j+x)^3}$ où j est un entier strictement positif.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la sous-question précédente l'existence de réels a_k, $k = 0, 1, \ldots, p$ tels que :

$$R_n = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{n^{2k+2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right)\ (n \to +\infty).$$

Donner une majoration de $\left| R_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{a_k}{n^{2k+2}} \right|$ en fonction des nombres de Bernoulli.

(c) En déduire une valeur approchée de S_n à 10^{-12} près.

En complément, ceux qui désirent aller plus loin pourrons étudier le sujet *Centrale 2011* **.**

Indications pour DM n°5

Exercice 1

1. Noter pour commencer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant à valeurs *non nulles*, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \prod_{p=0}^{n} a_p \neq 0$ et donc $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ est bien défini. Reste à laisser tendre n vers $+\infty$.

2. — $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc, en particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|a_n - 1| < 1$. <u>Pour tout $n \geq n_0$ on a $a_n > 0$</u>.
   D'abord on montre que les produits $\prod_{n\geq 0} a_n$ et $\prod_{n\geq n_0} a_n$ sont de même nature.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\prod_{p=n_0}^{n} a_p = \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p)\right), \tag{6}$$
   ou de façon équivalente,
$$\ln\left(\prod_{p=n_0}^{n} a_p\right) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p). \tag{7}$$

   — *Supposer que la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ converge.*

   Utiliser l'égalité (18) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum_{p=n_0}^{+\infty} \ln(a_p)$

   — *Supposons que le produit $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.*

   Alors $\prod_{n\geq n_0} a_n$ converge, cf. remarque et Utiliser (19) et la continuité du logarithme

   Conclusion :
   la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge si et seulement si le produit $\prod_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.

3. — *Supposer que le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.*

   Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1+u_n > 0$, la question 1.a. dit que $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (cf. 1.), donc
$$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \tag{8}$$
   Utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

   — *Supposer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*

   Utiliser encore le théorème.

   — Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\ln(a_n) = u_n - b_n$, ou $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$. Par comparaison de séries positives $\sum b_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge. Donc, puisque $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

4.

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{n}$, donc compte tenu de 3 (et de la remarque préliminaire faite au 5), la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature. Or pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n}\frac{p+1}{p} = ...$$

2. a. La série géométrique $\sum_{k=0} \frac{1}{p^k}$ converge puisque sa raison $\frac{1}{p}$ est élément de $[0,1[$ et sa somme vaut :

$$\underline{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}}.$$

b. Soient N un entier supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_1^k}\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_2^k}\dots\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_N^k}...$$

soit

c. Soit n un élément de $\{1,\dots N\}$. Puisque $P_N \geq N \geq 2$, les facteurs premiers de n sont éléments de $\{p_1,\dots p_N\}$; de plus si l'on choisit M pour que $2^M \geq N$, dans la décomposition de n en facteurs premiers aucun des exposants des facteurs n'excédera strictement M. Donc l'ensemble $\{1,\dots,N\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments de la forme $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}$ avec $(k_1,k_2,\dots,k_N) \in \{0,1,\dots,M\}^N$.....
Pour ce choix de M on a donc, grâce à la dernière inégalité,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}. \tag{9}$$

La suite est asinitrotante

d. Utiliser 3.

EXERCICE 2Bis

1. —

(a) Pour commencer observons qu'étant donné un polynôme à coefficients réels, disons $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, un polynôme Q, vérifie $Q' = P$ si et seulement si, il existe un réel b_0 tel que

$$Q = \sum_{i=1}^{d+1}\frac{a_{i-1}}{i}X^i + b_0,$$

De telle sorte que Q vérifie à la fois $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si il est LE polynôme

$$\sum_{i=1}^{d+1}\frac{a_{i-1}}{i}X^i - \sum_{i=1}^{d+1}\frac{a_{i-1}}{i(i+1)}, \tag{10}$$

polynôme que nous noterons $\Phi(P)$. Donc, il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui satisfasse aux conditions i., ii. et iii. C'est LA suite de polynômes, définie récurrsivement par......

Reste à vérifier qu'une telle suite est bien à valeurs dans $\mathbf{Q}[X]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de Taylor dit : $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Le résultat en résulte par la propriété ii. du (a),

Après calculs : $\boxed{P_1 = X - \frac{1}{2}, P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, P_3 = X^3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}X}$.

(b) i. Posons pour tout entier naturel n, $Q_n = (-1)^n P_n(1-X)$. On montre alors que cette suite satisfait les conditions 1. (a) i. ii., et iii.,

ii. Poser pour tout entier naturel n, $R_n(X) = 2^{n-1}\left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$; et raisonner comme au **i.**

iii. Pour tout entier naturel n on désigne par $\mathbf{H}_n$ la propriété :

$$P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}. \qquad (\mathbf{H}_n)$$

On la prouve par récurrence Mais il y a d'autres méthodes

2. — Etude des nombres de Bernoulli —

(a) L'égalité 1. (c) i., donne

$$P_{2k+1}(1) = -P_{2k+1}(0) \qquad (11)$$

Mais d'après les propriétés ii. et iii. du 1. (a)

$$P_n(1) - P_n(0) = 0. \qquad (12)$$

(b) D'après (16) et 1. (b), pour tout entier $n \geq 2$, $B_n = P_n(0) = P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$.
et donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = 0 \qquad (13)$$

Les nombres de Bernoulli d'indices impairs supérieurs à 1 étant nuls, l'écriture de (17) pour $n = 0, 2, 4 \ldots, 2p$ donne :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{2} B_2 = -\binom{4}{1} B_1, \\ \binom{6}{0} B_0 + \binom{6}{2} B_2 + \binom{6}{4} B_4 = -\binom{6}{1} B_1, \\ \vdots \\ \binom{2p+2}{0} B_0 + \binom{2p+2}{2} B_2 \cdots + \binom{2p+2}{2p-2} B_{2p} = -\binom{2p+2}{1} B_1. \end{cases}$$

3. (a) Commençons par des remarques. Soit $k \in \mathbf{N}$,
   - D'après 1. (c) i. $P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc P_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
   - D'après 1. (c) ii. $P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{k-1}} - 1\right) P_k(0)$ Donc $P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$ est de signe opposé à $P_{2k}(0)$. Rappelons avoir vu que $P_{2k}(0) = P_{2k}(1)$.

Notons alors pour tout entier $k \geq 1$, On note $\mathbf{R}_k$ la propriété : P_{2k+2} admet dans $[0,1]$ exactement deux racines l'une dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ l'autre dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, en lesquelles il change de signe ;

- L'expression de P_2, assure que $\mathbf{R}_1$ est vraie.
- Soit un entier $k \geq 1$. On suppose que $\mathbf{R}_k$ est vrai.
  On note α et β les racines de P_{2k}, $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$. Pour fixer les idées on suppose $P_{2k} > 0$ sur $]0, \alpha[$. Comme alors P_{2k} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1}, on a les variations de P_{2k+1} et son signe, puis comme P_{2k+1} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1}, on a les variations de P_{2k+2} :

t	0		α		$\frac{1}{2}$		β		1
P_{2h}		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
P_{2h+1}	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0
P_{2h+2}		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

  Donc la fonction polynomiale P_{2k+2} induit un homéomorphisme de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]P_{2k+1}(0), P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)\right[$ et puisque $P_{2k+2}\left(\frac{1}{2}\right)$ est de signe opposé à $P_{2k+2}(0)$, P_{2k+2} s'annule en un et un seul point de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en lequel il change de signe. De même P_{2k+2} s'annule t'il en un et un seul point de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, en lequel il change de signe.

La propriété est $\mathbf{R}_h$ est donc vraie pour tout entier $h \geq 1$:
P_{2k} admet dans $[0,1]$ exactement deux zéros éléments de $]0,1[$; .
En revenant au tableau de variations de P_{2h+1} on voit que :
P_{2h+1} admet dans $[0,1]$ exactement trois zéros 0, $\frac{1}{2}$ et 1.

(b) Résulte directement du tableau de variations.

4. — Formule d'Euler-Mac Laurin — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0,1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

(a) C'est du cours l'idée consiste à partir de $f(0) - f(1) = \int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$. On effectue une intégration par parties en dérivant f' et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $t - 1 \mapsto t - 1$, on obtient :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (t-1) f''(t)\mathrm{d}t.$$

On peut itérer les intégrations par parties pour obtenir la formule, à chaque fois on primitive le terme polynômial de sorte que la primitive s'annule en 1.

(b) Dans la formule d'Euler-Mac Laurin on procède de même mais la fonction constante égale à 1 est primitivée initialement en en P_1, au cours des intégrations par parties suivantes on prendra comme primitive de P_n, $\frac{1}{n+1} P_{n+1}$. La preuve se fait par récurrence...

(c) Résulte de la majoration de P_{2p+1}.

(d) En remplaçant f par $t \mapsto g(a + t(b-a))$, dans la formule précédente, on obtient :

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}(b-a)^{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)(a)}\right) - \frac{(b-a)^{2p+2}}{(2p+1)!}\int_0^1 P_{2p+1} g^{(2p+1)}(a + x(b-a))\mathrm{d}x.$$

Correction du DM n°5

EXERCICE 2

1. —

(a) Pour commencer observons qu'étant donné un polynôme à coefficients réels, disons $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, un polynôme Q, vérifie $Q' = P$ si et seulement si, il existe un réel b_0 tel que

$$Q = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i + b_0,$$

De telle sorte que Q vérifie à la fois $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si il est LE polynôme

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i(i+1)}, \tag{14}$$

polynôme que nous noterons $\Phi(P)$. Donc, il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui satisfasse aux conditions i., ii. et iii. C'est LA suite de polynômes, définie récurrsivement par :

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ \forall n, P_{n+1} = \Phi(P_n). \end{cases}$$

La relation (14) montre que $\Phi(\mathbf{Q}[X])$ est inclus dans $\mathbf{Q}[X]$, puisque $\mathbf{Q}$ est un anneau. Donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien à valeurs dans $\mathbf{Q}[X]$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de Taylor pour le polynôme P_n dit :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Le résultat en résulte par la propriété ii. du (a),

Après calculs : $\boxed{P_1 = X - \frac{1}{2}, P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, P_3 = X^3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}X}$.

(b) i. Posons pour tout entier naturel n, $Q_n = (-1)^n P_n(1-X)$. On montre alors que cette suite satisfait les conditions 1. (a) i. ii., et iii., ce qui assure que pour tout entier naturel n,

$$\boxed{P_n = (-1)^n P_n(1-X)}$$

ii. Poser pour tout entier naturel n, $R_n(X) = 2^{n-1}\left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$; et raisonner comme au **i.**

iii. Pour tout entier naturel n on désigne par $\mathbf{H}_n$ la propriété :

$$P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}. \tag{$\mathbf{H}_n$}$$

- $\mathbf{H}_0$ est trivialement vraie.

- Soit m un entier naturel telle que $\mathbf{H}_m$ soit vraie. En multipliant par $(m+1)$ et primitivant la fonction polynomiale associée à $P_m(X+1)-P_m(X)$ on obtient compte tenue de $\mathbf{H}_m$ et de 1. (a) iii., l'existence d'un réel c tel que :

$$P_{m+1}(X+1)-P_{m+1}(X)=(m+1)X^m+c.$$

En substituant alors à X la valeur 0, il vient :

$$c=P_{m+1}(1)-P_{m+1}(0)=(n+1)\int_0^1 P_m(t)\mathrm{d}t=0.$$

Donc par récurrence nous venons de prouver que pour tout entier naturel n,

$$\boxed{P_n(X+1)-P_n(X)=nX^{n-1}}$$

Mais il y a d'autre méthodes

2. — ETUDE DES NOMBRES DE BERNOULLI —

(a) L'égalité 1. (c) i., donne

$$P_{2k+1}(1)=-P_{2k+1}(0) \tag{15}$$

Mais d'après les propriétés ii. et iii. du 1. (a)

$$P_n(1)-P_n(0)=0. \tag{16}$$

(b) D'après (16) et 1. (b), pour tout entier $n\geq 2$,

$$B_n=P_n(0)=P_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}.$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}=0 \tag{17}$$

Les nombres de Bernoulli d'indices impairs supérieurs à 1 étant nuls, l'écriture de (17) pour $n=0,2,4\ldots,2p$ donne :

$$\begin{cases} B_0=1, \\ \binom{4}{0}B_0+\binom{4}{2}B_2=-\binom{4}{1}B_1, \\ \binom{6}{0}B_0+\binom{6}{2}B_2+\binom{6}{4}B_4=-\binom{6}{1}B_1, \\ \vdots \\ \binom{2p+2}{0}B_0+\binom{2p+2}{2}B_2\cdots+\binom{2p+2}{2p-2}B_{2p}=-\binom{2p+2}{1}B_1. \end{cases}$$

3. (a) Commençons par des remarques. Soit $k\in\mathbf{N}$,
   - D'après 1. (c) i. $P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)=-P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Donc P_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
   - D'après 1. (c) ii. $P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^{k-1}}-1\right)P_k(0)$ Donc $P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$ est de signe opposé à $P_{2k}(0)$. Rappelons avoir vu que $P_{2k}(0)=P_{2k}(1)$.

Notons alors pour tout entier $k \geq 1$, On note $\mathbf{R}_k$ la propriété : P_{2k+2} admet dans $[0,1]$ exactement deux racines l'une dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ l'autre dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, en lesquelles il change de signe ;

- L'expression de P_2, assure que $\mathbf{R}_1$ est vraie.
- Soit un entier $k \geq 1$. On suppose que $\mathbf{R}_k$ est vrai.
  On note α et β les racines de P_{2k}, $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$. Pour fixer les idées on suppose $P_{2k} > 0$ sur $]0, \alpha[$. Comme alors P_2k est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1}, on a les variations de P_{2k+1} et son signe, puis comme P_{2k+1} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1}, on a les variations de P_{2k+2} :

t	0		α		$\frac{1}{2}$		β		1
P_{2h}		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
P_{2h+1}	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0
P_{2h+1}		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

  Donc la fonction polynomiale P_{2k+2} induit un homéomorphisme de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]P_{2k+1}(0), P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)\right[$ et puisque $P_{2k+2}\left(\frac{1}{2}\right)$ est de signe opposé à $P_{2k+2}(0)$, P_{2k+2} s'annule en un et un seul point de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en lequel il change de signe. De même P_{2k+2} s'annule t'il en un et un seul point de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, en lequel il change de signe.

La propriété est $\mathbf{R}_h$ est donc vraie pour tout entier $h \geq 1$:

P_{2k} admet dans $[0,1]$ exactement deux zéros éléments de $]0,1[$; .

En revenant au tableau de variations de P_{2h+1} on voit que :

P_{2h+1} admet dans $[0,1]$ exactement trois zéros 0, $\frac{1}{2}$ et 1.

Indicartions pour la correction du DM n°4

Nous ne donnons pour la fin de ce problème que des indications de correction

(b) Résulte directement du tableau de variations.

4. — Formule d'Euler-Mac Laurin — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0,1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

(a) C'est du cours l'idée consiste à partir de $f(0) - f(1) = \int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$. On effectue une intégration par parties en dérivant f' et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $t - 1 \mapsto t - 1$, on obtient :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (t-1)f''(t)\mathrm{d}t.$$

On peut itérer les intégrations par parties pour obtenir la formule, à chaque fois on primitive le terme polynômial de sorte que la primitive s'annule en 1.

(b) Dans la formule d'Euler-Mac Laurin on procède de même mais la fonction constante égale à 1 est primitivée initialement en en P_1, au cours des intégrations par parties suivantes on prendra comme primitive de P_n, $\frac{1}{n+1}P_{n+1}$. La preuve se fait par récurrence

(c) Résulte de la majoration de P_{2p+1}.

(d) En remplaçant f par $t \mapsto g(a + t(b-a))$, dans la formule précédente, et par changement de variable affine « $x = a + t(b-a)$ »on obtient :

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}(b-a)^{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)(a)}\right) - \frac{(b-a)^{2p+2}}{(2p+1)!}\int_0^1 P_{2p+1}g^{(2p+1)}(a + x(b-a))\mathrm{d}x.$$

Exercice 1

1. Notons pour commencer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant à valeurs *non nulles*, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \prod\limits_{p=0}^{n} a_p \neq 0$ et donc $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ est bien défini.

   Supposons que $\prod\limits_{n\geq 0} a_n$ converge. Il existe un réel non nul L tel que $P_n \underset{n\to+\infty}{\to} L$. Alors $P_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L$, puisque $(P_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Et donc

$$a_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

   Donc

$$\underline{a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1.}$$

2. — $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc, en particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|a_n - 1| < 1$. <u>Pour tout $n \geq n_0$ on a $a_n > 0$</u>.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\prod\limits_{p=0}^{n} a_p = \prod\limits_{p=0}^{n_0-1} a_p \prod\limits_{p=n_0}^{n} a_p$, avec la convention qu'un produit vide vaut 1. Or $\prod\limits_{p=0}^{n_0-1} a_p$ est un réel *non nul*. Donc la suite $\left(\prod\limits_{p=0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si la suite $\left(\prod\limits_{p=n_0}^{n} a_p\right)_{n\geq n_o}$ converge vers une limite non nulle. Autrement dit, <u>les produits $\prod\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\prod\limits_{n\geq n_0} a_n$ sont de même nature.</u>

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\prod_{p=n_0}^{n} a_p = \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p)\right), \tag{18}$$

   ou de façon équivalente,

$$\ln\left(\prod_{p=n_0}^{n} a_p\right) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p). \tag{19}$$

   — *Supposons que la série* $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ *converge.*

   L'égalité (18) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum\limits_{p=n_0}^{+\infty} \ln(a_p)$ assurent la convergence de la suite $\left(\prod\limits_{p=n_0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\exp\left(\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$, réel non nul. Donc par la remarque initiale $\prod\limits_{n\geq 0} a_n$ converge.

   — *Supposons que le produit* $\prod\limits_{n\geq 0} a_n$ *converge.*

   Alors $\prod\limits_{n\geq n_0} a_n$ converge, cf. remarque et alors d'après (19) et la continuité du logarithme en $\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, réel non nul, on déduit que la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ converge de somme $\ln\left(\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n\right)$.

Conclusion :
la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge si et seulement si le produit $\prod_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.

3. — *Supposons que le produit infini* $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ *converge.*

   Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1+u_n > 0$, la question 1.a. dit que $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge. Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (cf. 1.), donc

$$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \tag{20}$$

   Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

   — *Supposons que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

   On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc (20) est vérifiée et donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge. La question 3 assure donc que le produit $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.

   Conclusion :
   le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\ln(a_n) = u_n - b_n$, ou $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$. Par comparaison de séries positives $\sum b_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge. Donc, puisque $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.
   Donc, par 3. $\sum u_n$ converge, $\prod(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

5. *Remarque* : Les trois produits que nous allons étudier dans cette question sont associés à des suites indicées par $\mathbf{N}^*$. D'après le 2. ils sont de même nature que les produits associés aux suites prolongées à $\mathbf{N}$ par une valeur strictement positive arbitraire en 0. On peut donc leur appliquer les résultats de la question 3.

   a. La série de Riemann $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{4n^2} < 1$.

      Donc d'après 3.c., le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge.

   b. Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Ecartons le cas trivial où $x=0$ qui conduit à la convergence du produit, puisque la suite des produits partiels est constante égale à 1.

      La série de Riemann $\sum_{n\geq 0} \frac{x^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ converge puisque $2>1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}*$, $0 < \frac{x^2}{\pi^2 n^2} < 1$. Donc d'après 3.c., le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)$ converge.

c. Soit x un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Par stricte positivité et stricte convexité de la fonction l'exponentielle on déduit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)\exp\left(\frac{-x}{n}\right) < \exp\left(\frac{x}{n}\right)\exp\left(\frac{-x}{n}\right) = 1.$$

Donc, en posant, pour tout naturel n, $u_n = 1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)\exp\left(\frac{-x}{n}\right)$, on a $0 < u_n < 1$. La question 3 assure donc que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+\frac{x}{n})\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Par ailleurs

$$0 \leq u_n = 1 - \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)(1-\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to+\infty),$$

donc d'après le théorème de comparaison des série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Il en résulte que : le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+\frac{x}{n})\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$ converge .

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{n}$, donc compte tenu de 3 (et de la remarque préliminaire faite au 5), la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature. Or pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n}\frac{p+1}{p} = \frac{2\times 3\times 4\times\cdots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n} = n+1,$$

donc

$$\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

Autrement dit le produit $\prod_{n\geq 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, et donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

2. a. La série géométrique $\sum_{k=0}\frac{1}{p^k}$ converge puisque sa raison $\frac{1}{p}$ est élément de $[0,1[$ et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

b. Soit N un entier supérieur ou égal à 2. D'après 5.b.

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_1^k}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_2^k}\cdots\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_N^k}.$$

Soit $M \in \mathbf{N}^*$. L'égalité précédente donne :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_1^k}\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_2^k}\cdots\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_N^k},$$

soit

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N} \frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}}.$$

c. Soit n un élément de $\{1,\dots N\}$. Puisque $P_N \geq N \geq 2$, les facteurs premiers de n sont éléments de $\{p_1,\dots p_N\}$; de plus si l'on choisit M pour que $2^M \geq N$, dans la décomposition de n en facteurs premiers aucun des exposants des facteurs n'excédera strictement M. Donc l'ensemble $\{1,\dots,N\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments de la forme $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}$ avec $(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N$.
Pour ce choix de M on a donc, grâce à la dernière inégalité,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}. \tag{21}$$

Or la série $\displaystyle\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}$ diverge, étant à termes positifs, $\displaystyle\sum_{m=1}^{K}\frac{1}{m} \underset{K\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc, d'après (21), $\displaystyle\prod_{m=1}^{K}\left(1-\frac{1}{p_m}\right) \underset{K\to+\infty}{\to} 0$. Le produit $\displaystyle\prod_{m\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$ diverge.

d. Puisque pour tout $m\in\mathbf{N}^*$, $0<\frac{1}{p_m}<1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_m}$ et le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$ sont de même nature (cf. 3).
Donc d'après c. <u>la série $\displaystyle\sum_{m\geq 1}\frac{1}{p_m}$ diverge.</u> [2]

2. Cela signifie qu'il y a « beaucoup » de nombres premiers, ils ne sont pas, par exemple, clairsemés comme les nombres de la forme 2^n, $n\in\mathbf{N}$, ($\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ converge).