MINES-PONTS MATH 2 PC 2019
PROPOSITION de CORRIGÉ

Par M. Dehame

Partie I. Préliminaires

1. Posons $u_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, alors chaque fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente), ceci prouve la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, la fonction somme R est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $v : x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $v(0) = 1$, d'où son intégrabilité sur $]0, 1]$. Pour $x \geq 1$, on a $\big|v(x)\big| \leq \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$, donc v est aussi intégrable sur cet intervalle. Finalement, v est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente.

3. Posons $w(x,t) = f(t)\,e^{-ixt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Alors $t \mapsto w(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto w(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a la domination $\big|w(x,t)\big| = \big|f(t)\big|$ avec f intégrable sur $\mathbb{R}$. Du théorème de continuité des intégrales à paramètre, on déduit l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}$ de $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Partie II. Étude de la dérivabilité de R en 0

4. De $\big|f(nh)\big| \leq \dfrac{C}{n^2h^2+1}$, on déduit la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(nh)$, donc l'existence de $S(h)$.

5. L'application φ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. En effet,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \big[kh, (k+1)h\big[\qquad \varphi_h(t) = f(kh)\ ,$$

donc φ_h est continue (car constante) sur $\big]kh, (k+1)h\big[$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{t\to(kh)^+} \varphi_h(t) = \varphi_h(kh) = f(kh)\ ;$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \lim_{t\to(kh)^-} \varphi_h(t) = f\big((k-1)h\big)\ ,$$

il y a donc une limite à gauche et une limite à droite finies en les points kh, $k \in \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{nh} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kh}^{(k+1)h} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} h\,f(kh) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(h)$.

Par ailleurs, la fonction φ_h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \big|\varphi_h(t)\big| = \left|f\left(\left\lfloor\frac{t}{h}\right\rfloor h\right)\right| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor\dfrac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2}\ ,$$

et la fonction majorante, équivalente à $t \mapsto \dfrac{C}{t^2}$ en $+\infty$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{nh} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = S(h)$.

6. Si $h\in]0,1]$ et $t\in[1,+\infty[$, alors $\left\lfloor\dfrac{t}{h}\right\rfloor h\geq\left(\dfrac{t}{h}-1\right)h=t-h\geq t-1\geq 0$, donc

$$\left|\varphi_h(t)\right|\leq\frac{C}{1+\left\lfloor\dfrac{t}{h}\right\rfloor^2h^2}\leq\frac{C}{1+(t-1)^2}\ .$$

7. Soit (h_n) une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, on va prouver par convergence dominée que $S(h_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$, on en déduira par caractérisation séquentielle de la limite que $\displaystyle\lim_{h\to 0}S(h)=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$. On pourra supposer que $h_n\in]0,1]$, ce qui est toujours vrai à partir d'un certain rang.

- Les fonctions φ_{h_n} sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- On a

$$t-h_n=\left(\frac{t}{h_n}-1\right)h_n\leq\left\lfloor\frac{t}{h_n}\right\rfloor h_n\leq\frac{t}{h_n}h_n=t$$

donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{t}{h_n}\right\rfloor h_n=t$, puis $\varphi_{h_n}(t)=f\left(\left\lfloor\dfrac{t}{h_n}\right\rfloor h_n\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(t)$ par continuité de f, on a donc convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $\left(\varphi_{h_n}\right)$ vers la fonction continue f.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $\left|\varphi_{h_n}(t)\right|\leq C$, et pour $t\geq 1$, on peut utiliser la majoration démontrée en **6.**, on a finalement la domination

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall t\in\mathbb{R}_+\qquad\left|\varphi_{h_n}(t)\right|\leq\alpha(t)\ ,$$

avec $\alpha(t)=\begin{cases}C & \text{si } 0\leq t\leq 1\\ \dfrac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } \qquad t\geq 1\end{cases}$, fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique donc et conduit au résultat annoncé au début de cette question.

8. La fonction $f:t\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a clairement $\left|(t^2+1)f(t)\right|=\dfrac{t^2+1}{t^2}\left|\sin(t^2)\right|\leq 1$ si $t\neq 0$ (et aussi si $t=0$), donc f satisfait les hypothèses posées en chapeau de cette partie II. Ainsi,

$$S(h)=h\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)=h\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n^2h^2)}{n^2h^2}\right)=h+\frac{1}{h}\,R(h^2)\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

Donc $R(h^2)\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,h$ lorsque $h\to 0^+$. Donc $R(x)\sim\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}$ lorsque $x\to 0^+$. Donc $\dfrac{R(x)-R(0)}{x-0}=\dfrac{R(x)}{x}\underset{x\to 0^+}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$, et la fonction R n'est pas dérivable en 0.

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

9. Pour n entier relatif et x réel, posons $f_n(x)=f(x+2n\pi)$. On a alors $\big|f_n(x)\big|\leq\dfrac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1}$, ce qui entraîne la convergence absolue des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_{-n}(x)$, donc l'existence de $F(x)$. On a, par décalage d'indice,

$$F(x+2\pi)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f\big(x+2(n+1)\pi\big)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(x+2n\pi)=F(x)\ ,$$

la fonction F est donc 2π-périodique.

Il suffit alors de montrer la continuité de F sur le segment $S=[0,2\pi]$. Chaque fonction f_n est continue sur S, et on a

$$\forall x\in S\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad\big|f_n(x)\big|\leq\frac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1}\leq\frac{C_1}{4\pi^2n^2+1}\ .$$

Comme ce majorant est le terme général d'une série convergente indépendante de x, on a prouvé la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n$ sur S. On procède de même pour la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_{-n}$, en écrivant

$$\forall x\in S\quad\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad\big|f_{-n}(x)\big|\leq\frac{C_1}{(x-2n\pi)^2+1}\leq\frac{C_1}{4\pi^2(n-1)^2+1}$$

et on a aussi la convergence normale sur S de cette série. Il en résulte la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

10. Pour n entier relatif et x réel, posons $g_n(x)=\hat{f}(n)\,e^{inx}$. Alors chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n\in\mathbf{Z}\quad\forall x\in\mathbb{R}\qquad\big|g_n(x)\big|=\big|\hat{f}(n)\big|\leq\frac{C_2}{n^2+1}\ ,$$

ce qui donne directement la convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}g_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}g_{-n}$. Il en résulte que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, chaque fonction g_n est 2π-périodique, donc G aussi.

11. D'après la propriété admise en chapeau de cette partie, pour montrer l'égalité $G=2\pi F$, il suffit de montrer que l'on a $c_p(G)=c_p(2\pi F)$, soit $c_p(G)=2\pi\,c_p(F)$ pour tout p entier relatif. Or,

$$c_p(G)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{f}(n)\,e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{f}(n)\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t=\hat{f}(p)$$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t=\delta_{n,p}$, l'interversion série-intégrale étant autorisée par la convergence normale sur le segment $[0,2\pi]$ de la série de fonctions $\sum h_n$ avec $h_n(t)=\hat{f}(n)\,e^{i(n-p)t}$, on a en effet $\|h_n\|_\infty=\big|\hat{f}(n)\big|\leq\dfrac{C_2}{n^2+1}$.

D'autre part,

$$c_p(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(t+2n\pi)\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$$

car la série de fonctions $\sum k_n$, avec $k_n(t) = f(t+2n\pi)\, e^{-ipt}$, converge aussi normalement sur le segment $[0, 2\pi]$ car $\big|k_n(t)\big| = \big|f(t+2n\pi)\big| \leq \dfrac{1}{(t+2n\pi)^2+1} \leq \dfrac{1}{4n^2\pi^2+1}$ pour n positif, et on adapte pour n négatif (*cf.* corrigé de la question **9.**).

On obtient alors, par translation de la variable puis relation de Chasles,

$$\begin{aligned} c_p(F) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\, e^{-ip(u-2n\pi)}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\, e^{-ipu}\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-ipu}\, \mathrm{d}u = \frac{\hat{f}(p)}{2\pi} = \frac{c_p(F)}{2\pi}. \end{aligned}$$

On conclut que $G = 2\pi F$.

12. Posons $g(t) = f\Big(\dfrac{at}{2\pi}\Big)$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto (t^2+1)g(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée au voisinage de $\pm\infty$ en vertu de la majoration $\big|(t^2+1)g(t)\big| \leq C_1\, \dfrac{t^2+1}{\Big(\dfrac{at}{2\pi}\Big)^2+1}$.

Alors $\hat{g}(x) = \dfrac{2\pi}{a}\, \hat{f}\Big(\dfrac{2\pi}{a}x\Big)$ par un changement de variable linéaire dans l'intégrale de définition, et la fonction $x \mapsto (x^2+1)\, \hat{g}(x)$ est aussi bornée pour des raisons similaires.

On peut donc appliquer le résultat de la question **11.**, soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{g}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} g(2n\pi)$, ce qui donne bien la relation

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{a}\Big).$$

Partie IV: Étude de la dérivabilité de R en π

13. Pour tout t réel (y compris pour $t = 0$), on a $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k!}\, t^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!}\, t^{2k}$. La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après le cours.

14. Pour $t \neq 0$, on calcule

$$f'(t) = \frac{2i\, e^{it^2}}{t} - \frac{2\left(e^{it^2}-1\right)}{t^3}, \qquad \text{puis} \qquad f''(t) = -4e^{it^2} - \frac{6i\, e^{it^2}}{t^2} + \frac{6\left(e^{it^2}-1\right)}{t^4}.$$

Comme $\left|e^{it^2}\right| = 1$, on a immédiatement $f'(t) \to 0$ et $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ lorsque $t \to \pm\infty$.

15. La fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire, elle est donc intégrable sur le segment $[-1,1]$ et, pour montrer la (semi)-convergence de l'intégrale proposée, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$. Or, si $A \in [1,+\infty[$, le changement de variable[1] $x = \sqrt{t}$ puis une intégration par parties donnent

$$\int_1^A e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\,\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\right]_1^{A^2} - \frac{i}{4}\int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t\ .$$

L'expression entre crochets tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $O\big(t^{-3/2}\big)$ en $+\infty$, chacun des deux termes issus de l'intégration par parties admet donc une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale généralisée I.

16. Pour x réel non nul, procde par deux intgrations par parties dans l'intgrale gnralise, justifies par la convergence des termes entre crochets. :

$$\hat{f}(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \ = \ \left[\frac{i}{x}\,f(t)\,e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Le terme entre crochets est nul car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. On recommence:

$$\hat{f}(x) = -\frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x^2}\,f'(t)\,e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Le terme entre crochets est de nouveau nul car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$. Posons maintenant $r(t) = f''(t) + 4e^{it^2}$. La question **14.** nous apprend que $r(t) = O(t^{-2})$ en $\pm\infty$. Cette fonction r, qui est continue sur $\mathbb{R}$, est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\ .$$

La mise sous forme canonique du trinôme $t^2 - xt$ montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)}\,\mathrm{d}t = I\,e^{-i\frac{x^2}{4}}$. Finalement,

$$\big|\hat{f}(x)\big| \le \frac{1}{x^2}\left(4\,|I| + \int_{-\infty}^{+\infty} \big|r(t)\big|\,\mathrm{d}t\right)\,,$$

ce qui montre que $\hat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

17. Les fonctions f et $\hat{f}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et sont $O(t^{-2})$ en $\pm\infty$ (ce qui, pour une fonction continue sur $\mathbb{R}$, entraîne que $t \mapsto (t^2+1)f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et pareillement pour $\hat{f}$),

[1] Ce changement de variable n'est pas utile. On peut directement faire une intégration par parties en écrivant l'intégrande $x \mapsto (2xe^{ix^2})\dfrac{1}{2x}$.

on peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson obtenue dans la partie III. avec $a=\sqrt{x}$, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f\big(n\sqrt{x}\big)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\ ,$$

soit

$$i+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}-1}{n^2x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\hat{f}(0)+2\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\right)$$

en séparant les termes pour $n=0$ et en remarquant que la fonction f est paire, et $\hat{f}$ aussi en conséquence. Poursuivons:

$$i+\frac{2}{x}\big(F(x)-F(0)\big)=\frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)$$

soit

$$F(x)=F(0)+\frac{\sqrt{x}}{2}\,\hat{f}(0)-\frac{i}{2}\,x+\sqrt{x}\,s(x)\ ,$$

avec $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)$. Il reste à prouver que $s(x)=O(x)$ lorsque $x\to 0^+$. Or, il existe $C>0$ tel que $\big|\hat{f}(t)\big|\leq\dfrac{C}{t^2+1}$ pour tout réel t, ainsi $\left|\hat{f}\Big(\dfrac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\right|\leq\dfrac{C}{1+\dfrac{4n^2\pi^2}{x}}\leq\dfrac{Cx}{4n^2\pi^2}$, puis

$$\big|s(x)\big|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\right|\leq\frac{C}{4\pi^2}\,\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big)\,x\ ,$$

ce qui suffit. On a donc $F(x)=F(0)+\dfrac{\hat{f}(0)}{2}\sqrt{x}-\dfrac{i}{2}\,x+O(x^{3/2})$, soit le développement demandé avec $b=-\dfrac{i}{2}$ et $a=\dfrac{\hat{f}(0)}{2}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut exprimer cette intégrale en fonction de I: en effet, le calcul de f' réalisé à la question **14.** montre que $tf'(t)=2i\,e^{it^2}-2f(t)$, ce que l'on peut écrire sous la forme $f(t)+\Big(f(t)+t\,f'(t)\Big)=2i\,e^{it^2}$, puis en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ (toutes les fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t+\big[t\,f(t)\big]_{-\infty}^{+\infty}=2i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

soit (le terme entre crochets est nul): $\hat{f}(0)=2iI$, puis $a=iI$.

18. On a $F(\pi+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2(\pi+x)}}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2\pi}\,e^{in^2x}}{n^2}$. Or, l'entier n^2 est de même parité que n, donc $e^{in^2\pi}=(-1)^n$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs (la série est absolument convergente), on écrit

$$\begin{aligned} F(\pi+x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i4p^2x}}{4p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)^2x}}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}F(4x) - \Big(F(x) - \frac{1}{4}F(4x)\Big) \;=\; \frac{1}{2}F(4x) - F(x)\,. \end{aligned}$$

19. On a $R(x) = \mathrm{Im}\big(F(x)\big)$. Or, la fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 "au voisinage à droite" du point π puisque, des questions **17.** et **18.**, on tire, pour $x > 0$,

$$F(\pi+x) = \frac{1}{2}\Big(F(0) + 2a\sqrt{x} + 4bx + O(x^{3/2})\Big) - \Big(F(0) + a\sqrt{x} + bx + 0(x^{3/2})\Big)\ ,$$

d'où $F(\pi+x) = -\dfrac{1}{2}F(0) + bx + o(x) = -\dfrac{1}{2}F(0) - \dfrac{i}{2}\,x + o(x)$ et, en prenant la partie imaginaire, $R(\pi+x) = -\dfrac{1}{2}\,x + o(x)$ lorsque $x \to 0^+$. Enfin, la fonction $x \mapsto R(\pi+x)$ étant impaire, on conclut que $R(\pi+x) = -\dfrac{1}{2}\,x + o(x)$ lorsque $x \to 0$. Donc R admet un développement limité à l'ordre 1 au point π, et est donc dérivable en ce point avec $R'(\pi) = -\dfrac{1}{2}$.