Exercices d'algèbre linéaire, diagonalisation, trigonalisation

Laurent BERNIS

4 septembre 2021

1 Bases, familles génératrices

Exercice 1 — Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels deux à deux distincts. Soit e_n l'application,

$$e_n \;:\; \mathbf{R} \to R\,;\; \mapsto \exp\left(\lambda_n x\right).$$

Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre.

Exercice 2 — Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels deux à deux distincts. Soit f_n l'application,

$$f_n \;:\; \mathbf{R} \to R\,;\; ; x \mapsto |x - b_n|$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre.

Exercice 3 — Pour tout entier naturel n, posons :

$$c_n \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \cos\left(nx\right),\;\; s_n \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \sin\left(nx\right).$$

Montrer que la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, ...c_n, s_n, ...)$ est libre.

Exercice 4 — Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$. Soit $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ un système de n vecteurs de $\mathbf{E}$ de rang s. Notons s' le rang du système $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r\}$ où r est un entier naturel strictement inférieur à n.

Montrer que : $s' \geq r + s - n$.

Exercice 5 — Soient n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, diagonal, ayant tous ses éléments diagonaux distincts.

1. Montrer que $\left(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1}\right)$ est une base de l'espace vectoriel des matrices d'ordre n, à coefficients réels, diagonales.
2. Montrer que si un élément B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ commute avec A, alors B est diagonale.

Exercice 6 —

1. Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n dont $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base et $\mathbf{F}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p dont $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base. Montrer que l'espace vectoriel produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ est de dimension finie à préciser. On pourra par exemple en construire une base au moyen de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, (résultat au programme de MSI).
2. Soit $\mathbf{k}$ un sous-corps de $\mathbf{K}$. On suppose qu'en tant que $\mathbf{k}$-espace vectoriel, $\mathbf{K}$ est de dimension finie q. $\mathbf{E}$ étant muni de sa structure de $\mathbf{k}$-espace vectoriel, montrer qu'il est de dimension finie, et préciser sa dimension.

L'exercice élémentaire qui suit est incontournable. Pour une utilisation de la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, voir l'exercice 60

Exercice 7 — Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$) des matrices réelles d'ordre n symétriques (resp. antisymétriques) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donner la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ en exhibant une base de chacun de ces sous-espaces.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les éléments sont des matrices de projection.

2 Matrices, applications linéaires, rang

Par $\mathbf{K}$ on désigne indifféremment le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même, si l'on ne craint de sortir du programme, un corps quelconque....)

Exercice 8 — Soit $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbf{K}$ et u et v des éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

1. Montrer que : $|\mathrm{rg}\,(u)-\mathrm{rg}\,(v)| \le \mathrm{rg}\,(u+v) \le \mathrm{rg}\,(u)+\mathrm{rg}\,(v)$.
2. On suppose de plus que $\mathbf{E}=\mathbf{F}$, que $u\circ v = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$ et que est $u+v$ inversible. Prouver que :

$$\mathrm{rg}\,(u)+\mathrm{rg}\,(v)=\dim(\mathbf{E}).$$

Exercice 9 —

Soient A, B et C des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(AB)+\mathrm{rg}(BC)\le \mathrm{rg}(ABC)+\mathrm{rg}(B).$$

En déduire :

$$\mathrm{rg}(A)+\mathrm{rg}(B)\le \mathrm{rg}(AB)+n.$$

Indication : Considérer l'application de $\mathrm{Im}(B)$ dans $\mathrm{Im}(AB)$, qui à X associe AX.

Exercice 10 —
Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang r. on note r' le rang de M considéré comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Comparer r et r'

Exercice 11 — —

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$. On suppose que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $u(\vec{x})$ est colinéaire à $\vec{x}$. Montrer que u est une homothétie.
2. Déduire du 1. qu'un endomorphisme h de $\mathbf{E}$ commute avec tous les endomorphismes de $\mathbf{E}$ si et seulement si h est une homothétie.
3. Etudier le centre de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$, c'est-à-dire les éléments de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$ qui comutent avec tous les autres.

Exercice 12 — Soit F l'application de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, qui à une matrice M associe son inverse M^{-1}. Montrer que F est continue.

Exercice 13 — *Voir également l'exercice 49.*
Soit n un entier strictement positif et M une matrice d'ordre n à coefficients $\mathbf{K}$.

1. Donner, en discutant sur le rang de M, le rang de $\mathrm{co}(M)$, comatrice de M.
2. Calculer le déterminant de $\mathrm{co}(M)$, en fonction de celui de M. Calculer $\mathrm{co}(\mathrm{co}(M))$, comatrice de la comatrice de M. On utilisera une discussion sur le rang de M inspirée de la question précédente.

Exercice 14 — Soit n un entier naturel non nul et A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ suivant :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0\ \ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de A et, s'il existe, son inverse.

Exercice 15 — Soit n un entier naturel et A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ suivant :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & a_2 & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbf{K}$.

Calculer le déterminant de A et trouver l'inverse de A, quand il existe.

On complétera l'étude de cet exercice par celles des exercices 68 et 69.

Exercice 16 — THÉORÈME D'HADAMARD —

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\ldots,n, \\ j\neq i,}} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 17 — Soit n un entier naturel non nul et soit J la matrice, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soient a et b des éléments de$\mathbf{K}$.

1. Discuter en fonction de a et b l'inversibilité de la matrice :
$$M := aI_n + bJ.$$
Donner le cas échéant son inverse. *Indication* : On pourra calculer M^2
2. Dans quels cas a-t-on l'existence de M^{-1} et M^{-1} élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$?

Exercice 18 — Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle n, sur un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. Pour tout entier naturel i on pose $N_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $I_i = \mathrm{Im}(u^i)$.

1. Montrer que les suites $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont monotones, pour l'inclusion, et stationnaire à partir d'un certain rang, on précisera leur monotonie.
2. Soit j un entier naturel. Montrer que si $N_j = N_{j+1}$, alors pour tout entier $i \geq j$, $N_i = N_{i+1}$ et $I_i = I_{i+1}$.
3. Soit j un entier naturel. Montrer que $N_j = N_{j+1}$ si et seulement si $N_j \oplus I_j = \mathbf{E}$.

Exercice 19 — ÉTUDE DES MATRICES NILPOTENTES —
Soit n un entier strictement positif et M une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$. Nous dirons que M est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $M^k = 0_n$. Quand M est nilpotente, on appelle ordre de nilpotence de M le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positifs k , tels que $M^k = 0_n$.

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension n, et u un endomorphisme de $\mathbf{E}$. Nous dirons que u est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$. Quand u est nilpotente on appelle ordre de nilpotence de u le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positifs k, tels que $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.

1. Montrer que si M est la matrice de u dans une base de $\mathbf{E}$, alors M est nilpotente d'ordre p si et seulement si u est nipotent d'ordre p.
2. Nous supposons dans cette question que u est de rang 1, montrer que u est diagonalisable ou bien est nilpotent.
3. Pour tout entier naturel i on pose $N_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $I_i = \mathrm{Im}(u^i)$.
   (a) Montrer que les suites $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont monotones, pour l'inclusion, on précisera leur monotonie.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel j tel que $N_j = N_{j+1}$. Montre alors que pour tout entier $i \geq j$, $N_i = N_{i+1}$ et $I_i = I_{i+1}$.
   (c) Soit j un entier naturelnon nul. Montrer que $N_j = N_{j+1}$ si et seulement si $N_j \oplus I_j = \mathbf{E}$.
   (d) On suppose u nilpotent d'ordre p. On note j_0 le plus petit entier j tel que $N_j = N_{j+1}$, que vaut j_0 et N_{j_0}.
4. Montrer que si M est triangulaire supérieure stricte alors elle est nilpotente. Donner une matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte ni triangulaire inférieure stricte.
5. Nous supposons que M est nilpotent d'ordre n (n désigne toujours la dimension de $\mathbf{E}$). Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Nous allons examiner dans la suite le cas général, où l'ordre de multiplicité diffère de la dimension de l'espace.

6. Montrer que l'élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotent d'ordre 2. Déterminer une autre élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, nilpotent d'ordre 2, non semblable au précédent.

7. Nous supposons que M est nilpotente d'ordre p. Montrer que $p \leq n$.

8. Nous supposons que M est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$. et que M est nilpotente d'ordre p, où p désigne un entier strictement inférieur à n.

   (a) Montrer qu'il existe un élément $\vec{e}$ de $\mathbf{E}$, tel que $u^{p-1}(\vec{e}) \neq \vec{0}_{\mathbf{E}}$.
   Montrer que la famille $\left(u^0(\vec{e}), u^1(\vec{e}), ..., u^{p-1}(\vec{e})\right)$ est libre.
   Nous noterons $\mathbf{H}$ l'espace qu'elle engendre.

   (b) Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur $\mathbf{E}$, non nulle sur $u^{p-1}(\vec{e})$.

   (c) Notons u' l'application de $\mathbf{E}^*$ [1] dans lui-même qui à une forme linéaire ℓ associe $\ell \circ u$. Montrer que u' est un endomorphisme. Préciser sa matrice dans la base duale de $\mathcal{B}$.

   (d) Soit $\mathbf{F}^*$ le sous-espace vectoriel de l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{E}$, engendré par

   $$\left(u'^0(\varphi), u'^1(\varphi), u'^2(\varphi), ..., u'^{p-1}(\varphi)\right)$$

   Montrer que $\mathbf{F}^*$ est de dimension p. Notons $\mathbf{F}$ l'ensemble des éléments $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ tels que pour tout élément k de $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$, $u'^k(\varphi)(\vec{x}) = 0$.
   Montrer que $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ supplémentaire de $\mathbf{H}$.

   (e) Notons pour tout entier $k \geq 1$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{K})$

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

   et poson $J_1 := 0_1$.
   Montrer qu'il existe des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_q$ éléments de $\{1, 2, \ldots, p\}$, tels que M soit semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_q})$.

   Cette décomposition s'appelle décomposition de Jordan de la matrice M. Montrons qu'elle est unique à l'ordre près des blocs diagonaux.

   (f) supposons qu'il existe des entiers $h_1, h_2, \ldots, h_r$ éléments de $\{1, 2, \ldots, p\}$, tels que M soit semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(J_{h_1}, J_{h_2}, \ldots, J_{h_r})$. Notons pour tout entier strictement positif k, m_k le nombre d'éléments i de $\{1, 2, \ldots, q\}$ tels que $k_i = k$, n_k le nombre d'éléments i de $\{1, 2, \ldots, r\}$ tels que $h_i = k$.
   Que dire de m_p ?
   En étudiant successivement le rang de $M^0, M^1, \ldots, M^{p-1}$, montrer que $r = q$ et que pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, p\}$, $m_k = n_k$. Conclure.

Exercice 20 —

1. Les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont-elles semblables ?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Même question pour

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Rappelons que $\mathbf{E}^*$ désigne de façon courte $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{K})$

3. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (**5/2**) Soit p un nombre premier, on désigne par F_p le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Soient les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}_3(F_p)$:

$$G : \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & -\bar{1} \\ -\bar{2} & -\bar{2} & \bar{2} \\ -\bar{3} & -\bar{3}. & \bar{3} \end{pmatrix}; \quad H := \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

$$G := \begin{pmatrix} 1_{F_p} & 1_{F_p} & -1_{F_p} \\ -2.1_{F_p} & -2.1_{F_p} & 2.1_{F_p} \\ -3.1_{F_p} & -3.1_{F_p} & 3.1_{F_p} \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0_{F_p} & 1_{F_p} & 0_{F_p} \\ 0_{F_p} & 0_{F_p} & 0_{F_p} \\ 0_{F_p} & 0_{F_p} & 0_{F_p} \end{pmatrix}.$$

   G et H sont-elles semblables ?

5. Montrer que E est semblable à sa transposé.
6. (*Réservé à un public averti*) En utilisant l'exercice précédent, montrer que toute matrice nilpotente est semblable à sa transposée (à suivre....).

Exercice 21 — Soit un entier $n \geq 2$

1. Soit l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = A\}.$$

   Montrer que $\mathcal{P}$ est la réunion de classes de similitude dont on déterminera le nombre.

2. On suppose que n est pair et l'on pose $p = \frac{n}{2}$. Soit l'ensemble :

$$\mathcal{Q} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = 0_n\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{Q}$ contient des matrices de rang $0, 1, ..., p-1$ et p et pas de matrices de rang différent. Soit A un élément de Q de rang r. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.$$

   (*voir également l'exercice 32.*)

   (b) Montrer que $\mathcal{Q}$ est la réunion de classes de similitude dont on déterminera le nombre.

Exercice 22 —

1. Par K on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même tout corps). Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[BC] = BC - CB$ (crochet de lie de B et C). Montrer qu'il existe des matrices B et C telles que $BC - CB = A$.

Exercice 23 — Matrices équivalentes —.

1. Soit n un entier naturel non nul, et soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, équivalents. Montrer que si A et B sont à coefficients réels alors ils sont équivalents en tant qu'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   On pourra donner une preuve par densité algébrique, et une utilisant les opération sur les lignes et les colonnes.

2. Soit n un entier naturel non nul, et soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, semblables. Montrer que si A et B sont à coefficients réels alors ils sont semblables en tant qu'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer que le rang d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est le même qu'il soit considéré comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. En déduire que le rang d'une famille d'éléments de $\mathbf{R}^n$ ne change pas quand on considère cette famille comme une famille d'éléments de $\mathbf{C}^n$.

Exercice 24 — Matrices équivalentes opérations sur les lignes et les colonnes —
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, où $\mathbf{K}^*$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

1. Montrer que si A est non nulle, alors il existe P et Q éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, produits de matrices de transvections d'ordre n, et A' ,élément de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ tels que :

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que si le rang de A est n alors il existe T et T' éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, produits de matrices de transvections d'ordre n, tels que :

$$TAT' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d \end{pmatrix},$$

   où d est le déterminant de A.

3. Déduire de la première question que si le rang de A est r, réel strictement inférieur à n, alors il existe T et T' éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, produits de matrices de transvections d'ordre n, tels que :

$$TAT' = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

4. Soit $\mathcal{SL}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$, dont le déterminant vaut 1. Montrer que $\mathcal{SL}_n(\mathbf{K})$ est un groupe, et que l'ensemble des transvections d'ordre n engendre ce groupe.
5. **Réservé 5/2.** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs. Montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$, ensemble des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de déterminant strictement positif et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbf{R})$, ensemble des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de déterminant strictement négatif, sont connexes par arcs. On pourra utiliser la question 2.

Exercice 25 — Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui n'est pas inversible est équivalent à une matrice nilpotente.

Dans les exercice 26, 27, 28, 29 et 30 on utilise qu'une matrice de rang r est équivalente à J_r. Voir aussi l'exercice 55.

Exercice 26 — Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.

Exercice 27 — Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Monter que la matrice A est la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 28 — $\star$

1. **Réservé 5/2**. Montrer que toute partie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui contient strictement $\mathrm{GL}n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.
2. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 29 — $\star$
Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B} \; : \; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \; \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$

1. Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
3. Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

Exercice 30 — Soient n et p des éléments de $\mathbf{N}^*$, A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Montrer que :

$$p + \mathrm{rg}(I_n + AB) = n + \mathrm{rg}(I_p + BA).$$

Exercice 31 — $\mathbf{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique ; on note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sa base canonique. Pour toute permutation σ élément de S_n, on note f_σ l'endomorphisme défini par : $f_\sigma(\vec{e}_i) = \vec{e}_{\sigma(i)}$, pour tout élément i de $\{1, \dots, n\}$.

On pose :

$$p := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f_\sigma.$$

1. Montrer que p est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
2. Montrer que p est orthogonale.
3. On muni S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérance de X.
4. On pose :

$$q := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) f_\sigma.$$

   Etudier q...

Exercice 32 — (Mines 2019)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{K}$ un corps et f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ qui vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ f(AB) = f(A)f(B). \tag{1}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

Exercice 33 — Théorème de Frobenius-Zolotarev⋆⋆ — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ *continue* telle que :

i. $f(I_n) = 1$;
ii. pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.

Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a, b) de complexes, telle que :

$$f = g \circ \det.$$

Indication : il est possible d'utiliser l'exercice 24 et montrer qu'une matrice de transvection T se mets sous la forme $T_1T_2T_1^{-1}T_2^{-1}$, avec T_1 et T_2 des matrices de Transvections.

Exercice 34 — ⋆⋆ Soit E un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères[2] de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus $\mathbf{E}$ de dimension finie ?

Exercice 35 — Théorème de Birkhoff — ⋆ On appelle matrice bistochastique d'ordre n (entier naturel non nul) tout élément $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1 \dots, n$,

- $a_{i,j} \geq 0$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} = 1$.

1. Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques d'ordre n est bistochastique.
2. Soit $U = (u_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ une matrice unitaire d'ordre n c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que ${}^t\bar{U}U = I_n$.
   Montrer que $A = \left(|u_{i,j}|^2\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ est bisthocastique.
3. On se propose de montrer le théorème de Birkhoff : *L'ensemble des matrices bisthocastiques est l'enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'un nombre quelconque de matrices de permutation.*
   On appelle *serpent d'un élément* $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ toute suite de la forme $(a_{1,\sigma(1)}, a_{2,\sigma(2)}, \dots a_{n,\sigma(n)})$, où σ est un élément de S_n.

2. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

(a) On suppose qu'un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ contient une sous-matrice nulle de taille $s\times t$ avec $s+t=n+1$. montrer que tout serpent de A admet au moins un zéro.

(b) On suppose que tout serpent d'un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admet au moins un zéro. montrer par récurrence sur n que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ contient une sous-matrice nulle de taille $s\times t$ avec $s+t=n+1$.
Les sous-questions (a) et (b) constituent le théorème de Frobenius-König.

(c) Montrer que toute matrice bistochastique admet un serpent dont tous les éléments sont strictement positifs.

(d) Montrer qu'une matrice B bistochastique a au moins n éléments strictement positifs, et que si elle a exactement n éléments strictement positifs, alors c'est une matrice de permutation.

(e) Montrer le théorème de Birkhoff en raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments strictement positifs de la matrice bistochastique.

Exercice 36 — Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ sur un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.
2. Si $p+q$ est un projecteur exprimer son image et son noyau en fonction de ceux de p et q.
3. On se propose de généraliser à k projecteurs. Soient $p_1,p_2,...,p_k$ des projecteurs et p leur somme.
4. Montrer que si p est un projecteur alors :
$$\mathrm{Im}(p_1+...+p_k)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus...\oplus\mathrm{Im}(p_k).$$
Indication : le rang d'un projecteur est sa trace.
5. Montrer que p est un projecteur si et seulement si pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,...,k\}$, $p_i\circ p_j$ est nul.

2.1 Formes linéaire, hyperplans

Exercice 37 — Par $\mathbf{K}$ nous désignons $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ Soit E un$K$-espace vectoriel de dimension finie n non nullet muni d'une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ que nous noterons e. Pour $i=1,..,n$ on note e_i^* la i^{e} forme coordonnée dans e.

1. Montrer que $(e_1^*,..,e_n^*)$ est une base de E^* espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbf{E}$.
2. Soient $(\ell_1,\ell_2,...\ell_n)$ une base de $\mathbf{E}^*$. Montrer que l'application
$$\Phi\ :\ \mathbf{E}\to\mathbf{K}^p\,;\ \vec{x}\mapsto(\ell_1(\vec{x}),\ell_2(\vec{x}),\dots,\ell_n(\vec{x}))\,.$$
est un isomorphisme. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dont $(\ell_1,\ell_2,...\ell_n)$ est la base duale, on dit que $\mathcal{B}$ est la base antéduale de $(\ell_1,\ell_2,...,\ell_n)$.
3. Exemple Soient m un entier naturel non nul et a un réel. Pour $i=0,1,\dots,m$, on considère la forme linéaire sur $\mathbf{R}[X]_m$
$$\varphi_i\ :\ \mathbf{R}[X]_n\to\mathbf{R}\,;\ P\mapsto P^{(i)}(a).$$
Montrer que $(\varphi_i)_{i=0,\dots,m}$ est une base de $(\mathbf{R}[X]_m)$ et déterminer sa base antéduale.
4. Soient $(\ell_1,\ell_2,...,\ell_p)$ une famille libre de $\mathbf{E}^*$. Montrer que L'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ qui annulent les p formes linéaires $\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_p$ est un espace vectoriel de dimension $n-p$, on le notera $\{\ell_1,\ell_2,...,\ell_p\}^\perp$.
Indication On pourra compléter $(\ell_1,\ell_2,...,\ell_p)$ en une base et considérerla base antéduale.
Montrer que l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur tout élément de $\{\ell_1,\ell_2,...,\ell_p\}^\perp$ est $\mathrm{vect}(\ell_1,\ell_2,...,\ell_p)$.

Exercice 38 — Soient b_1,b_2, 2 réels distincts. Pour $i=1,2$ on définit :
$$\omega_i\ :\ \mathbf{R}\left[X\right]_n\to\mathbb{R}\,;\ P\mapsto P\left(b_i\right)\ \text{ et }\ \delta_i\ :\ \mathbf{R}\left[X\right]_n\to\mathbb{R}\,;\ P\mapsto P'\left(b_i\right).$$

1. Montrer que pour $i=1,2$ ω_i et δ_i sont des formes linéaires sur $\mathbf{R}[X]_3$. Montrer que $(\omega_1,\omega_2,\delta_1,\delta_2)$ est une base de $(\mathbf{R}[X]_3)^*$ dont on déterminera la base antéduale.
2. Montrer qu'il existe un unique quadruplet de réels (c_1,c_2,d_1,d_2) , tel que, pour tout polynôme P de degré au plus 3,
$$\int_{b_1}^{b_2}P\left(t\right)\mathrm{d}t=c_1P\left(b_1\right)+c_2P\left(b_2\right)+d_1P'\left(b_1\right)+d_2P'\left(b_2\right).$$

Exercice 39 — Déterminer les formes linéaires ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que deux matrices semblables quelconques aient même image par ℓ.

2.2 Révision de sup. sur les déterminants

Commençons par rappeler des résultats fondamentaux de la théorie des déterminants.
Soit $\mathbf{F}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension non nulle p.

— L'ensemble des formes p-linéaires alternées sur $\mathbf{F}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

— Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ une base de $\mathbf{F}$, notée $\mathcal{B}$. Il existe donc une et une seule forme p-linéaire alternée sur $\mathbf{F}$ qui prenne la valeur 1 en $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$. On l'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, on la note $\det\limits_{\mathcal{B}}$.

— Donc pour toute forme p-linéaire alternée sur $\mathbf{F}$, φ, il existe k élément de $\mathbf{K}$ tel que : $\varphi = k \det\limits_{\mathcal{B}}$.

— Le déterminant d'une matrice P d'ordre p est par définition le déterminant dans la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ de ses vecteurs colonnes, on le note $\det P$.

Exercice 40 — Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ & & s_3 \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & & \\ & & \vdots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 \cdots & s_n \end{vmatrix},$$

où $s_i = 1 + 2 + \cdots + i$, pour $i = 1, 2 \ldots . n$.

Exercice 41 — Déterminants par blocs —
Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$,

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, p un élément de $\{1, \dots, n-1\}$ et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de la forme
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix},$$
avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$. Montrer (le résultat au programme) :
$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

2. Soient m un entier naturel non nul et A, B, C, D des matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbf{K})$, telles que C et D commutent.
   (a) D est supposé inversible ; montrer que :
   $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$$
   .
   (b) Montrer que le résultat demeure pour D non inversible.

Exercice 42 — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1, A un élément de$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et B un de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$. On considère l'élément de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{R})$ suivant :
$$M = \begin{pmatrix} O_{p,n} & B \\ A & O_{n,p} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det(M) = \det(A) \begin{vmatrix} O_{p,n} & B \\ I_n & O_{n,p} \end{vmatrix}$.
   Indication : On peut par exemple considérer l'application
   $$(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}))^n \to \mathbf{R} ;\ (X_1, \ldots X_n) \mapsto \begin{vmatrix} O_{p,n} & B \\ X_1|\ldots|X_n & O_{n,p} \end{vmatrix}.$$

2. Montrer que $\det(M) = \det(A)\det(B) \begin{vmatrix} O_{p,n} & I_p \\ I_n & O_{n,p} \end{vmatrix}$.

3. Le $n+p$-cycle, élément de S_{n+p}, $(1, 2, 3, \ldots, n+p)$ est noté c, et P_c désigne la matrice de permutation associée.
   (a) Donner, pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n+p\}$, l'expression de ${\mathrm{P}_c}^k$.

(b) En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} O_{p,n} & I_p \\ I_n & O_{n,p} \end{vmatrix}$, puis de $\det(M)$.

Exercice 43 — Soit n un entier naturel non nul, calculer le déterminant de la matrice,

$$(\sin(a_i + a_j))_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}},$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels.

Exercice 44 — Soit n un entier naturel non nul, soit $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, noté A et x un réel.

1. Montrer que le déterminant de la matrice $(a_{i,j} + x)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ est de la forme $\det A + xB$ où B est un élément de $\mathbf{K}$.
2. En développant le déterminant de $(a_{i,j} + x)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ par rapport aux colonnes montrer que $B = \sum\limits_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} A_{i,j}$, où $A_{i,j}$ désigne le cofacteur d'indice i, j de A.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déduire du 1. la valeur du déterminant d'ordre n, suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix},$$

où a, b et c sont des réels.

Exercice 38 —
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soient $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ des complexes. On se propose de calculer, lorsqu'ils sont définis, les déterminants suivants :

$$V(a_1, a_2, ..., a_n) := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix} ; C((a_1, ..., a_n);(b_1, ..., b_n)) := \det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}\right).$$

Le premier est appelé déterminant de Vandermonde (enunseulmotmerci), le second de Augustin-Louis Cauchy.

1. Soit P un élément de $\mathbf{C}[X]$ de la forme : $P(X) = c_0 + c_1 X + ... + c_{n-2}X^{n-2} + X^{n-1}$.
   Montrer que :
   $$V(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots a_1^{n-2} & P(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots a_2^{n-2} & P(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}.$$
2. En choisisant judicieusement P, déterminer pour n supérieur ou égal à 3, une relation entre $V(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $V(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$. En déduire $V(a_1, a_2, ..., a_n)$.
3. Calculer par une méthode similaire $C((a_1, ..., a_n);(b_1, ..., b_n))$.
   Indication : on remplacera le polynôme P par une fraction rationnelle de pôles $-b_1, -b_2, ..., -b_n$, habilement choisie.

Exercice 45 — Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \cdots a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 \cdots a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \cdots a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots a_n^n \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos 2a_1 & \cdots \cos((n-1)a_1) \\ 1 & \cos a_2 & \cos 2a_n & \cdots \cos((n-1)a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos a_n & \cos 2a_n & \cdots \cos((n-1)a_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 46 —

Calculer le déterminant suivant, *primo* en utilisant des combinaisons linéaires de lignes et de colonnes, *secundo* en se raccrochant à un Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix},$$

où a,b,c sont des réels.

Exercice 47 — Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 48 — DÉTERMINANTS CIRCULANTS — Soit n en entier naturel non nul. pour toute n-uplet de réels $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ on note $C(b_0, \dots, b_{n-1})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \\ b_1 & b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $C(b_0, \dots, b_{n-1})$ est la matrice $(c_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ où pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$, $c_{i,j} = b_{[i-j]}$, $[p]$ désigne pour un entier p le reste dans la division de P par n.

1. Pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, C_i désigne la matrice $C(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ou le 1 est le terme d'indice $i+1$. Exprimer $C(b_0, \dots, b_{n-1})$ au moyen de $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$.
2. calculer C_1^k pour $k = 0, 1, 2, n$. En déduire une expression de $C(b_0, \dots, b_{n-1})$ au moyen de C_1.
3. On note $\omega_k = \exp\left(i\frac{k2\pi}{n}\right)$ pour $k = 0, 2, \dots, n-1$ (racine n^{e} de l'unité. On considère la matrice de Vandermonde
$$V = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 & \dots & \omega_0^{n-1} \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1}^2 & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$
Et on note P le polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$ Exprimer $|VC(b_0, \dots, b_{n-1})|$ au moyen de P et $|V|$.
En déduire la valeur de $|C(b_0, \dots, b_{n-1})|$.
4. Retrouver le résultat précédent en diagonalisant C_1.

Exercice 49 —

1. Soient un entier $n \geq 1$ et A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que
   (a) On suppose A et B inversibles. Montrer que :
   $$\mathrm{co}(AB) = \mathrm{co}(A)\mathrm{co}(B).$$
   (b) Montrer que le résultat
2. Montrer que le résultat demeure dans le cas général.
   Indication : On pourra faire un raisonnement par « densité algébrique », cf. 55
3. Calculer le déterminant de $\mathrm{co}(A)$, en fonction de celui de A. Calculer $\mathrm{co}(\mathrm{co}(A))$, dans le cas om A est inversible.
   Conclure dans le cas général par un argument de densité algébrique.

Exercice 50 — Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients vallent 0 ou 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{R}^*$, il existe un élément A_n de $\mathcal{X}_n$ tel que :
   $$\det A_n = \max\{\det(M), M \in \mathcal{X}_n\}.$$
2. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \max\{\det(M), M \in \mathcal{X}_n\}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ croît.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

4. Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ une famille de variables aléatoires défines sur un mêmé univers, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées (idd.) suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
On définit la variable aléatoire M à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (matrice aléatoire), par

$$M = (X_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}.$$

Montrer que $M(\Omega) = \mathcal{X}_n$ et calculer la probabilité de l'événement $\{M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\}$.

3 Diagonalisation, trigonalisation

Exercice 51 — Déterminer les solutions définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles des systèmes différentiels suivants :

1.
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 8y + e^t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y + e^{-3t}. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 4x + 6y = 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2x + y + \mathrm{ch}t, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = x + 2y + \sin t. \end{cases}$$

Exercice 52 —

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} - 6\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 11\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 6x = 0.$$

2. Même question pour

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} + 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0.$$

Exercice 53 — Coefficients du polynôme caractéristique —
Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$.

1. Soit A une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dérivable. Notons pour tout élément j de $\{1, 2, \dots, n\}$, l'application C_j de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui à t associe $C_j(t)$, j^{e} colonne de $A(t)$.
Montrer que l'application

$$d \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{K} \ ; \ t \mapsto \det(A(t))$$

est dérivable et que pour tout réel t,

$$d'(t) = \sum_{j=0}^{n} \det\big(\mathbf{C}_1(t)\,\mathbf{C}_2(t)\dots\mathbf{C}_{j-1}(t)\,\mathbf{C}'_j(t)\,\mathbf{C}_{j+1}(t)\dots\mathbf{C}_n(t)\big).$$

2. Soient $(m_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, noté M et χ_M son polynôme caractéristique. Pour $i = 0, 1, \dots, n$, a_i désigne le coefficient de χ_M d'ordre i, autrement dit :

$$\chi_M = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

Pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$, on appelle *mineur principal* d'ordre k de M, toute sous-matrice carrée d'ordre k de M, centrée sur la diagonale, c'est-à-dire une sous-matrice de la forme :

$$(m_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in I}},$$

où I est une partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k.
Exprimer les coefficients de χ_M grâce au déterminants des mineurs principaux de M.

3. *Application* : On suppose que $n = 3$ Montrer que :

$$\chi_M = X^3 - \mathrm{Tr}(M)X^2 + \mathrm{Tr}(\mathrm{com}(M))X - \det(M)$$

Exercice 54 —
Pour tout entier naturel n on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont l'ensemble des coefficients diagonaux est égal au spectre :

$$\mathcal{A}_n = \Big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | \mathrm{sp}(M) = \{m_{i,i}, i \in \{1,..,n\}\}\Big\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{A}_n$ contient un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. L'ensemble $\mathcal{A}_n$ est-il pour tout entier $n \geq 1$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?
3. Soient $n \in \mathbf{N}$, M un élément de $\mathcal{A}_n$ et α un réel. Montrer que $M + \alpha I_n \in \mathcal{A}_n$.
4. Montrer que $\mathcal{A}_2$ est l'ensemble des matrices triangulaires d'ordre 2 à coefficients réels.
   Ce résultat se généralise-t-il pour $n \geq 3$?

Exercice 55 — Polynôme caractéristique d'un produit et d'un inverse —

1. Soient n un entier naturel non nul, A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
   (a) On suppose dans cette question que A est une matrice inversible. Montrer que χ_{AB}, polynôme caractéristique de AB est égal à χ, polynôme caractéristique de BA.
   (b) Montrer que le résultat précèdent ($\chi_{AB} = \chi_{BA}$) demeure, lorsque A n'est plus supposée inversible.
   Indication : On introduira pour t réel, la matrice $A_t = A - tI_n$ et on étudiera son déterminant.
2. Soient p et q des entiers naturels non nuls. Soient A et B des éléments respectivement de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{C})$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$.
   Comparer χ_{AB} et χ_{AB}.
   Indication : On utilisera que A est équivalente à la matrice
   $$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{n-r,r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$
   où r désigne le rang de A.
3. Soit n un entier strictement positif et M un élément de $\mathrm{GL}n(\mathbf{C})$. Le polyôme caractéristique de M, se décompose dans la base canonique :
   $$\chi_M = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$
   Déterminer le polynôme caractéristique de M^{-1} en fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de celui de M.
4. On garde les notation de la question précédente. Déterminer le polynôme caractéristique de la comatrice de M, $\mathrm{co}(M)$.
5. Soit C un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ les valeurs propres de C distinctes ou non. Soit Q un élément de$\mathbf{C}[X]$. Montrer que :
   $$\chi_{Q(C)} = \prod_{i=1}^{n}(X - Q(\lambda_i).$$
   Indication : On pourra trigonaliser C.
   En déduire que si C est trigonalisable que $\chi_C(C) = O_n$ (théorème de Cayley-hamilton).

Exercice 56 — Matrice compagnon —
Nous allons étudier des matrices d'une forme particulière qui jouent, un rôle important en mathématiques. Nous verrons leur utilisation dans une preuve du théorème de Cayley-Hamilton et l'étude des endomorphisme cyclique. Elles se rencontrent également dans l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants (cf exercice 42).

Soient n un réel supérieur ou égal à 2 et $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ des éléments du corps $\mathbf{K}$. On désigne par A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ suivant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Déterminer E_λ l'espace propre associé.
3. On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont d'ordre de multiplicité 1.

Exercice 48 — Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$ espace vectoriel et p un polynôme à coefficients complexe. Montrer qu'un complexe μ est valeur propre de l'endomorphisme $p(u)$ si et seulement si il existe une valeur propre λ de u telle que $\mu = p(\lambda)$

Exercice 57 —
Soient A un élément de $\mathbf{K}[X]$ et B un élément de $\mathbf{K}[X]$ de degré n, scindé à racines simples $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Soit l'application φ de $\mathbf{K}[X]_n$ dans lui-même qui à un polynôme P, élément de $\mathbf{K}[X]_{n-1}$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ.
   Indication : on pourra penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange en $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.
3. On suppose dans cette question que $A = X$. et que B est unitaire et se décompose dans la base canonique de $\mathbf{K}[X]_n$ en
$$B = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i.$$
   Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}[X]_{n-1}$. Retrouver ainsi le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon (exercice 46), quand ses racines complexes sont simples.
4. Retrouver par une méthode analogue le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon quand ses racines complexes ne sont pas nécessairement simples.

Exercice 58 —

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice suivante :
$$Z_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Plus généralement soit un entier $p \geq 1$, déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'élément de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbf{R})$ sivant :
$$Z_{2p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot\,^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 59 — Soit un entier $n \geq 2$ déterminer les valeurs propres de l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ suivant :
$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & .\cdot\,^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 60 —
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Les $\frac{3}{2}$ admettrons que tous les élément de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ sont diagonalisables.

1. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
2. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes.

3. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

Exercice 61 — Soient n un entier naturel non nul et $\mathcal{T}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui à une matrice associe sa transposée. Montrer que T est diagonalisable.

Exercice 62 — Endomorphismes à valeurs propres deux à deux distinctes —

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nul n ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, donc diagonalisable. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{E}$ constitué de vecteur propres de u. Montrer que tout endomorphisme v de $\mathbf{E}$ commutant avec u admet dans $\mathcal{B}$ une matrice diagonale. On raisonnera d'abord matriciellement, puis en considérant les sous-espaces propres de u.

   Remarquons que ce résultat est très différent de celui d'un exercice classique que nous verrons prochainement : si u et v sont diagonalisables et commutent alors il existe une base qui diagonalise simultannément u et v. Dans le présent exercice, on ne suppose pas *a priori* que v est diagonalisable et n'importe quelle base qui diagonalise u diagonalise v.

2. *Application* : Déterminer les éléments M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ tels que :
$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.
   (a) Montrer qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commutent si et seulement si M est un polynôme en A.
   (b) Montrer que l'ensemble des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

4. Soit Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable. Nous noterons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ses p valeurs propres deux à deux distinctes et de multiplicité respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

Exercice 63 — Soit n un entier strictement positif.

1. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ses valeurs propres distinctes ou non. Exprimer pour tout entier naturel k, $\mathrm{Tr}(A^k)$ en fonction des valeurs propres de A.
2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathrm{Tr}A^k = 0$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 64 — Diagonalisation à ε près —
Soient n un entier strictement positif et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

Exercice 65 — $\star$ —**Réservé 5/2** — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est un fermé. Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si M est nilpotent.

Exercice 66 — — Soient $\mathbf{E}$ un sous espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de $\mathbf{E}$. On considère l'application
$$T_f \;:\; \mathcal{L}(\mathbf{E}) \to \mathcal{L}(\mathbf{E})\,;\; g \mapsto f \circ g - g \circ f.$$
On admet fait évident que T_f est un endomorphisme.

1. Montrer que si f est nilpotente, alors T_f l'est.
2. Montrer que si f est diagonalisable, alors T_f l'est.

Indications : 1. vérifier que $g \mapsto f \circ g$ et $g \mapsto g \circ f$ commutent et utiliser le bibôme de Newton, pour calculer T_f^n. 2. Considéer une base e de $\mathbf{E}$ constituée de vecteurs propres de f et la base de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, $(\mathrm{Mat}_e)^{-1}(\mathcal{B}_c)$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 67 — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On dconsidère l'application
$$f_A \;:\; \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})\,;\; X \mapsto AX$$

1. Déterminer le rang de f_A

2. En déduire que f_A est diagonalisable.

   $(\frac{5}{2})$ Retrouver ce résultat en utilisant les polynômes de matrice.

3. Déterminer la trace de f_A.

4. Déterminer χ_{f_A}.

L'exercice sur les matrices stochastiques est très important. Les matrice stochastiques interviennent dans les probabilité. Les techniques utilisées, que l'on retrouve aussi dans l'exercice 69, sont importantes et rapproches ces exercice de 16

Exercice 68 — MATRICES SOCHASTIQUES. Soit un entier naturel $n \geq 1$. Une matrice stochastique d'ordre n est un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i. Tous ses coefficients sont strictement positifs ;

ii. La somme des coefficients de n'importe quelle colonne fait 1 : $\forall j \in \{0, ..., n\}, \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

Soit A une matrice stochastique d'ordre n

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques d'ordre n est convexe et stable par produit.

2. Montrer que 1 est valeur propre de A.

3. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

4. Soit λ une valeur propre[3] complexe de A de module 1 et $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ un vecteur propre associé. Montrer que ${}^t(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$ est un vecteur propre associé la valeur propre 1.

5. Montrer qu'il existe un élément U de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives.

6. Montrer que tout élément V de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à U.

   Indication : choisir λ tel que $U - \lambda V$ ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.

Exercice 69 —

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(a_{i,j})_{\substack{i=1,...,n\\ j=1,...,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ noté A.

1. On suppose dans cette question que la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1, c'est-à-dire que pour $j = 1, 2, ..., n$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Montrer que 1 est valeur propre de A. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ. Montrer que si $x_1 + x_2 + ... + x_n \neq 0$, alors $\lambda = 1$.

2. On suppose maintenant que pour $j = 1, 2, ..., n$, $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leq 1$.

   Montrer que le spectre de A est inclus dans le disque fermée unité de rayon 1 :

$$\mathrm{sp}(A) \subset \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}.$$

3. On pose pour $j = 1, ..., n$,

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \text{ et } T_j = \begin{cases} S_j^{-1} & \text{si } S_j \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{n} T_j |a_{j,j}| \leq \mathrm{rg}(A).$$

Exercice 70 — $\star\ \frac{5}{2}$ THÉORÈME DE BURNSIDE —

Dans cet exercice **K** désignera un sous corps de **C** et n un entier supérieur ou égal à 1. La première question est consacré à des résultats techniques utilisés dans la suite.

1. PRÉLIMINAIRES

   (a) Soient $A_1, A_2, ..., A_p$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tous diagonalisables. On supose que $A_1, A_2, ..., A_p$ commutent entre eux. Montrer qu'il existe un élément P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que pour $i = 1, 2, ...p$, la matrice PA_iP^{-1} soit diagonale.

3. Il y en a, 1 par exemple !

(b) Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ et

$$V(a_1, a_2, ..., a_n) := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que

$$V(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(c) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$. Montrer que M est nilpotente.

Dans la suite G désigne un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

2. (a) On suppose que G est d'ordre fini (de cardinal fini). Montrer qu'il existe un enier naturel N non nul tel que pour tout élément A de G, $A^N = I_n$.
   (b) On suppose dans cette sous-question (et seulement dans cette sous-question) que G est abélien (commutatif). Montrer qu'il existe un élément P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que pour matrice A élément de G, PAP^{-1} soit diagonale.
3. On se propose de montrer la réciproque du 2.(a), ce qui constitue le théorème de Burnside. On suppose donc qu'il existe un enier naturel N non nul tel que pour tout élément A de G, $A^N = I_n$. Soit $\mathbf{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ engendré par G, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes d'élément de G. On se donne $(M_1, ...M_m)$ une base de $\mathbf{F}$, *constituée d'éléments de* G et l'application

$$f \ : \ G \to \mathbf{C}^m \, ; \ A \mapsto (\mathrm{Tr}(AM_1), ..., \mathrm{Tr}(AM_m))$$

   (a) Soient A et B des éléments de G tels que $f(A) = f(B)$. Montrer que pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$

   (b) On pose $D = AB^{-1}$. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $(\mathrm{Tr} D^k) = n$
   (c) Calculer pour tout entier $k \geq 1$, $(\mathrm{Tr}(D - I_n)^k)$. En déduire que $(D - I_n)$ est nilpotente.
   (d) Montrer que f est injective.
   (e) Montrer que G est fini. On remarquera que le spectre complexe d'un élément de G est inclus dans $\mathbf{U}_N$ groupe des racines N^{e} de l'unité.

Exercice 32. indications —
• On suppose M inversible on a $f(M)f(M^{-1}) = f(I_n) = I_n$ donc M $f(M)$ est non nul ; la dernière égalité provient de la non constance.
• On suppose M non inversible. On montre alors que M est équivalente à H_r, où r est le rang de M (inférieur strictement à n) et $H_r = \begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{n-r,n-r} & O_{n-r,r} \end{pmatrix}$ La nilpotence de H_r assure la nulité de son image par$f$.

Exercice 42. Correction —

L'application $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n \to \mathbf{K}$, $(X_1, \dots, X_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & B \\ M & 0_{n,p} \end{pmatrix}$, où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a pour colonnes $X_1, \dots, X_n$, est n-linéaire alternée, donc proportionnelle au déterminant $\det_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & B \\ M & 0_{n,p} \end{pmatrix} = \lambda \det M$. Par ailleurs, l'application $\Psi : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})^p \to \mathbf{K}$, $(Y_1, \dots, Y_p) \mapsto \det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & N \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix}$ où $N \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ a pour colonnes $Y_1, \dots, Y_p$, est également p-linéaire alternée, donc proportionnelle au $\det_p$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})^p$. Il existe donc $\mu \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $N \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & N \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix} = \mu \det N$.

En choisissant $M = I_n$, on obtient $\lambda = \det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & B \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix}$, et en choisissant $N = I_p$, on obtient $\mu = \det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & I_p \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix}$.

Finalement, $\det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & B \\ A & 0_{n,p} \end{pmatrix} = \lambda \det A = \mu \det A \det B = \det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & I_p \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix} \det A \det B$.

Tout revient donc à calculer $\det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & I_p \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix}$, qui est le déterminant d'une matrice de permutation. On rappelle que pour une permutation γ, sa matrice M_γ est définie par $(M_\gamma)_{i,j} = \delta_{i,\gamma(j)}$, où δ est le symbole de Kronecker.

Introduisons le $(n+p)$-cycle $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n+p)$. Alors la matrice de σ est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0_{1,n+p-1} & 1 \\ I_{n+p-1} & 0_{n+p-1,1} \end{pmatrix}$, et on montre par récurrence sur p que $\begin{pmatrix} 0_{p,n} & I_p \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix}$ est la matrice de la permutation σ^p.

Lemme : si γ est une permutation de matrice M_γ, alors $\det(M_\gamma) = \epsilon(\gamma)$, la signature de γ.

En effet, soit $\gamma \in \mathfrak{S}_m$. Par la formule du déterminant avec les permutations, on obtient

$$\det M_\gamma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} \delta_{i,\sigma\circ\gamma(i)}.$$

Tous les produits sont nuls, sauf pour la permutation σ telle que $\sigma \circ \gamma = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire, pour $\sigma = \gamma^{-1}$. Il vient donc $\det M_\gamma = \epsilon(\gamma^{-1}) = \epsilon(\gamma)^{-1} = \epsilon(\gamma)$.

D'après le lemme, $\det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & I_p \\ I_n & 0_{n,p} \end{pmatrix} = (\det M_\sigma)^p = \epsilon(\sigma)^p = (-1)^{p(n+p-1)}$.

On conclut que

$$\det \begin{pmatrix} 0_{p,n} & B \\ A & 0_{n,p} \end{pmatrix} = (-1)^{p(n+p-1)} \det A \det B.$$

Exercice 50. indications —

1. $\mathcal{X}_n$ est fini :
2. Considérer la matrice $\mathrm{diag}(1, A_n)$.
3. Considérer la matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls et tous les autres égaux à 1.
4. On trouve $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 68. indications —

1. Facile, pour la stabilité par produit on gagne un peu de temps en écrivant la condition ii. $(1, 1, ...1)M = (1, 1, ..., 1)$.
2. On a que 1 est valeur propre de ${}^tM$ de vecteur propre ${}^t(1, 1, ...1)$...
3. On écrit, pour X vecteur propre, $AX = \lambda X$, il y a alors deux écoles :
   — Sommer toute les lignes de cette égalité ;
   — Considérer la ligne i_0, où i_0 est pris tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$.

4. On constate que $|x_i| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}|x_k|$ pour $i = 1, 2, ..., n$. En sommant ces inégalités on a :
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq .... \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$
Ce qui exige que toute les inégalités utilisées soient des égalités. Ce qui donne le résultat.
5. La question précédente avec $\lambda = 1$ donne un vecteur propre X à coefficients positifs, un est nécessairement non nul, Mais alors $x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k$ assure la stricte positivité des x_i.
6. Facile avec l'indication.

Exercice 30 . indications—

Écrire que A est équivalente à J_r : $A = PJ_rQ^{-1}$ et mettre B sous la forme $B = QB'P^{-1}$, avec $B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbf{R})$.

Exercice 31

4. Indications On trouve rapidement que $q^2 = q$, q est bien une projection. Le cas $n = 2$ est simple, le cas $n = 3$ montre que q est nul.

Plus généralement par liberté de la famille $(\vec{e}_1, ...\vec{e}_n)$ on montre que la composante de $q(\vec{e}_i)$ sur $\vec{e}_j$ est
$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in J} \varepsilon(\sigma) f_\sigma.$$
où $J = \{\sigma \in \mathrm{S}_n | \sigma(i) = j\}$. On montre alors la composition à gauche par (i, j) envoie J sur l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ qui fixent i et transforme une permutation de signature positive en une de signature négative. Reste à voir que $(i, j)J$ est en bijection avec S_{n-1} et pour $n - 1 \geq 2$, compte autant de permutations de signature $+1$ que de signature -1, et conclure que la composante de $q(\vec{e}_i)$ sur $\vec{e}_j$ est nulle, puis que q est nulle.

Exercice 69. indications —

1. La transposée de A admet visiblement 1 comme valeur propre associée au vecteur propre $(1, 1, ...1)^{\mathrm{T}}$, donc puisque A et A^{T} ont même polynôme caractéristique, $1 \in \mathrm{sp}(A)$.
On a pour $i = 1, ..., n$,
$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$
En sommant sur i et en fubinisant dans le même élan :
$$\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) x_j = \sum_{j=1}^{n} x_i.$$
Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 0$, $\lambda = 1$.
2. On raisonne presque de la même façon. Pour λ valeur propre de A, pour $i = 1, ..., n$,
$$|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j|, \tag{2}$$
donc
$$\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right) |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$
et le tour et joué !
3. On construit une matrice A' à partir de A de la façon suivante.
Pour $j = 1, ..., n$,
— Si la j^{e} colonne de A, C_j est nulle, alors on la conserve ;
— Sinon $S_j \neq 0$ et
  — Si $a_{j,j} = 0$, alors on fait : $C_j \leftarrow \frac{C_j}{S_j}$,
  — Si $a_{j,j} \neq 0$ alors on fait : $C_j \leftarrow \frac{C_j\overline{a_{j,j}}}{S_j|a_{j,j}|}$.
Notons qu'ainsi la somme des modules des termes de chaque colonne de A' est inférieure ou égale à 1, le j^{e} terme diagonal de A' est $|a_{j,j}|T_j$ et qu'enfin le rang de A' est celui de A.