DM n$^{\text{o}}$4

Théorème de Müntz

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous- espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

A. Déterminants de Cauchy (À ne pas réiger).

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)}.$$

2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j < \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

B. Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\| \cdot \|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

5) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_{n \to \infty} d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $B = \big\{y; \|y - x\| \leq \|x\|\big\}$.

6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.

7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1 \mid x_1) & (x_1 \mid x_2) & \cdots & (x_1 \mid x_n) \\ (x_2 \mid x_1) & (x_2 \mid x_2) & \cdots & (x_2 \mid x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n \mid x_1) & (x_n \mid x_2) & \cdots & (x_n \mid x_n) \end{pmatrix}.$$

9) Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée.

10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f \in C([0,1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11) Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]); f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

12) Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.

14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.

16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

18) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Montrer que si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, alors la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\big(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}\big).$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$(i) : \lambda_0 = 0\,; \ (ii) : \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par (ii') : $\inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$.