DM n$^{\text{o}}$6

Premier exercice

Inégalité de Jansen

Soit f une application d'un segment $[a, b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe.*

On sait que pour toute entier $n \geq 2$ et tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de $[a, b]$, et toute n-uplet de réels positifs $(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

On se propose de généraliser cette inégalité.

Soient x une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $[a, b]$continue et α une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ telle que :

$$\int_0^1 \alpha(t)\mathrm{d}t = 1..$$

1. Montrer que :
$$\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a, b].$$
2. Montrer que
$$f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t.$$

Facultatif

Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$, continue à valeurs *strictement positive.*

Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose :

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 (f(t))^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Etudier la limite de $I(\alpha)$ lorsque $\alpha \to +\infty$.
2. Comparer pour tout réel $\alpha > 0$, $I(\alpha)$ et $\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)$.
3. Étudier la limite, lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures, de $I(\alpha)$.

Second exercice

Fonctions convexes

Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$ convexe et ouverte et non vide.

Définition. *Une application f de C dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout couple (x, y) de points de C et tout élément t de $]0, 1[$,*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Si de plus l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe.

1. Soit f une application de Ω de $\mathbf{R}^n$. Pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on note $I_{a,\vec{x}}$ l'ensemble des réels t tels que $a + t\vec{x} \in \Omega$, et $g_{a,\vec{x}}$ l'application

$$g_{a,\vec{x}} \ :; \ I_{a,\vec{x}} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto f(a + t\vec{x}).$$

   (a) Montrer que pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

   (c) On suppose de plus f différentiable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.
      i. f est convexe ;
      ii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $\mathrm{d}f(x) \cdot (y - x) \leq \mathrm{d}f(y) \cdot (y - x)$;
      iii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$.

   (d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable). Montrer que f est convexe si et seulement si : Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Montrer que si $f_{|C}$ admet en un point c de C un minimum local, alors pour tout d élément de C,

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d - c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $f_{|C}$ atteint en un point u de C son minimum.
      ii. Pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.

3. Soit f une application strictement convexe de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

   (a) Montrer que f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum si et seulement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle.

   (b) On suppose que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$.
   Montrer que ∇f est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.

Indicationtions du DM n°5

Second exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
   Considérer $\phi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\,;\ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que

$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$

   Noter que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a + \mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.
   • $0 \in I_{a,\vec{x}}$ puisque $\phi(0) = a$.
   • $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ comme image réciproque de l'ouvert Ω, par ϕ continue.
   • l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes....

(b) • HYPOTHÈSE : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*
Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0,1]$.

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = \ldots\ldots$$

Doù la convexité de f.

• HYPOTHÈSE : *Supposons f convexe .*
Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0,1]$.

$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a + t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a + t_2\vec{x})).$$

....

Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

(c) • *Supposons i.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\vec{xy}}$ est définie sur $[0,1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ......
Pour tout $t \in [0,1]$

$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x + ty - x) \cdot y - x.$$

La convexité de $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ donne ii.
• *Supposons ii.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$.

$$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = \ldots\ldots\ldots$$

D'où iii.
• *Supposons iii.*
Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot ((t_2 - t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

En inversant les rôles on peut mopntrer

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe ... Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable).
Soit $x \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$. On considère l'application

$$\chi \ : \ I_{x,\vec{h}} \to \mathbf{R}^n\,;\ t \mapsto x + t\vec{h}.$$

Ainsi : $g_{x,\vec{h}} = f \circ \chi$. Par composition g est dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$,

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = \mathrm{d}f(\chi(t)) \cdot \vec{h},$$

Soit en notant B l'application bilinéaire

$$B \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \, ; \ (\ell, \vec{x}) \mapsto \ell(\vec{x})$$

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{h}).$$

Or $\mathrm{d}f$ est différentiable et χ aussi, donc $\mathrm{d}f \circ \chi$ est différentiable, c'est-à-dire dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$:

$$(\mathrm{d}f \circ \chi)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(\chi(t)) \cdot \chi'(t) = \mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}.$$

L'application constante égale à $\vec{h}$ est aussi trivialement dérivable. Donc, d'après le cours, $g_{x,\vec{h}}$ est deux fois dérivable de dérivée en $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}, \vec{h}) + B(\mathrm{d}f(\chi(t)), \vec{0}) = \underbrace{(\underbrace{\mathrm{d}^2 f(\chi(t))}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))} \cdot \vec{h})}_{\in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})} \cdot \vec{h} ....$$

On en déduit que f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2(f(x) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h}) \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.
   (a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0, 1]$, par convexité de C, est défini $f(c + t(d - c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :
   $$\frac{f(c + t(c - d)) - f(c)}{t} \geq 0.$$
   En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a le résultat.....
   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C.
   • Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.
   • Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$. Utiliser iii. dont la preuve n'a pas utilisé le fait que dans question 1. (c) ......
3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).
   • Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.
   (b) • D'abord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.
   Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.
   Supposons que $\vec{\nabla} f$ s'annule en un autre point x_1 de $\mathbf{R}^n$ montrer que la strict convexié conduit à une absurdité !
   • A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. l'application $f_{\vec{h}}$ vérifie les même hypothèses que f...... (ch. exercice sur les fonctions convexes).

Second exercice

Questions Facultatives

1. $I(\alpha)$ tend vers $\|f\|_\infty$, lorsque $\alpha \to +\infty$ déjà vu ! (merci pour les dessin).
2. En utilisant l'inégalité de l'inégalité Jansen intégrale par concavité du logarithme et croissance de l'exponentielle il vient pour tout réel $\alpha > 0$:

$$I(\alpha) \geq \ldots\ldots. \exp\left(\int_{[0,1]} \ln(f)\right).$$

3. Pour tout réel $\alpha > 0$, par concavité du logarithme.

$$I(\alpha) \leq \ldots.. \exp\left(\frac{1}{\alpha}\left(\int_{[0,1]} (f^\alpha - 1)\right)\right).$$

La convexité de $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ p_z : \alpha \mapsto z^\alpha$,

$$I(\alpha) \leq \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) f^\alpha(t) \mathrm{d}t\right).$$

Reste à prouver par un théorème quelconque, ou encore la convexité de $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ p_z : \alpha \mapsto z^\alpha$, que

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) f^\alpha(t) \mathrm{d}t\right) \underset{\alpha \to 0^+}{\to} \exp\left(\int_{[0,1]} \ln(f(t)) \mathrm{d}t\right).$$

Donc

$$I(\alpha) \underset{\alpha \to 0+}{\to} \exp\left(\left(\int_{[0,1]} \ln(f)\right)\right).$$

On peut aussi utiliser lorsque l'on est 5/2 le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour obtenir un développement limité à l'ordre 1 de :

$$\exp\left(\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \left(\int_{[0,1]} f^\alpha - 1\right)\right)\right)$$