DM n$^{\text{o}}$6

Premier exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels non nuls. On pose pour tout entier naturel n, $P_n := \prod_{k=0}^{n} a_k$.

Nous dirons que le produit infini associé, noté $\prod a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite *non nulle.*

1. Montrer que si $\prod a_n$ converge alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée.
   Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 1$.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ soit définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Nous attirons l'attention sur le fait que des expressions du type $\ln\left(\prod a_n\right)$ ou $\exp\left(\sum \ln(1+u_n)\right)$ sont dépourvues de sens. On travaillera avec des produit et des somme partiels.

3. On suppose en plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
   Étudier la nature du produit $\prod \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ et retrouver la nature de la série harmonique.
4. On ne suppose plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulemement si la série $\sum u_n^2$ converge.

Deuxième exercice

Fonctions convexes

Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$ convexe et ouverte et non vide.

Définition. *Une application f de C dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout couple (x,y) de points de C et tout élément t de $]0,1[$,*

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

Si de plus l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe.

1. Soit f une application de Ω de $\mathbf{R}^n$. Pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on note $I_{a,\vec{x}}$ l'ensemble des réels t tels que $a+t\vec{x}\in\Omega$, et $g_{a,\vec{x}}$ l'application

$$g_{a,\vec{x}} \;:;\; I_{a,\vec{x}} \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto f(a+t\vec{x}).$$

   (a) Montrer que pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a\in\Omega$ et tout $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

   (c) On suppose de plus f différentiable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.
      i. f est convexe ;

ii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $\mathrm{d}f(x) \cdot (y - x) \leq \mathrm{d}f(y) \cdot (y - x)$;
iii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable). Montrer que f est convexe si et seulement si : Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$(\mathrm{d}^2 f(\chi(t)) \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

(a) Montrer que si $f_{|C}$ admet en un point c de C un minimum local, alors pour tout d élément de C,

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d - c) \geq 0.$$

(b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i. $f_{|C}$ atteint en un point u de C son minimum.
ii. Pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.

3. Soit f une application strictement convexe de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On désigne par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

(a) Montrer que f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum si et seulement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle.

(b) On suppose que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$.
Montrer que ∇f est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.

Troisième exercice

Polynômes de Bernoulli

Nous considèrerons la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ nous noterons, S sa somme, et pour tout entier n, strictement positif, R_n le reste d'ordre n et S_n la somme partielle d'ordre n.

1. En comparant la série et une intégrale donner l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

2. Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = S_n + \frac{1}{2\,(n+1)^2}$$

Pour quelle valeurs de l'entier n a-t-on :

$$|S - x_n| \leq 10^{-6}$$

3. Nous nous proposons de trouver une suite qui converge plus vite vers S que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4. (a) Montrer que les relations suivantes définissent une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$
$$P_n'(X) = P_{n-1}(X), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*; \tag{2}$$
$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*. \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3. Montrer que $P_3(\frac{1}{2}) = 0$, en déduire que pour tout réel x élément de $[0,1]$,

$$|P_3(x)| \leq \frac{1}{24}.$$

(b) Soit f une application numérique, définie sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \tfrac{1}{12}\left(f'(1) - f'(0)\right) - \int_0^1 P_3(x) f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. En appliquant la formule précédente à l'application $f : [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{(k+x)^3}$, pour tout entier k supérieur ou égal à n, montrer que :

$$R_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Plus précisément, montrer que :

$$\left|S - \left(S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4}\right)\right| \leq \frac{1}{2n^5}.$$

Donner une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

.

MP* Lycée Kerichen **2020-2021**

Indication pour le DM n°6

Premier exercice

1. Considérer $\frac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
2. Comme $a_n = 1 + u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $a_n > 0$ et donc $\ln(1+u_n)$ est bien défini.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\prod_{p=0}^{n} a_p = K \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(1+u_p)\right), \tag{6}$$

avec $K = \prod_{p=0}^{n_0-1} a_p$, ou de façon équivalente,

$$\ln\left(\prod_{p=0}^{n} a_p\right) - \ln(K) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(1+u_p). \tag{7}$$

- Supposer que la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.
- Supposer ensuite que le produit $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.

3. • Supposer que le produit infini $\prod(a_n)$ converge.
   et utiliser
$$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n, \tag{8}$$

   • Supposer ensuite que la série converge.

   Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$

4. On a, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, $\ln(1+u_n) = u_n + \alpha_n$, où $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n^2$....

Deuxième exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
   Considérer $\phi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ ;\ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que
$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$
   Noter que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a+\mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.
   • $0 \in I_{a,\vec{x}}$ puisque $\phi(0) = a$.
   • $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ comme image réciproque de l'ouvert Ω, par ϕ continue.
   • l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes....

   (b) • Hypothèse : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*
   Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0,1]$.
$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = ...$$
   Doù la convexité de f.
   • Hypothèse : *Supposons f convexe .*
   Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
   Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0,1]$.
$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a+t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a+t_2\vec{x})).$$
   ....

   Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

   (c) • *Supposons i.*
   Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\vec{xy}}$ est définie sur $[0,1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ......
   Pour tout $t \in [0,1]$
$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x+ty-x)\cdot y - x.$$
   La convexité de $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ donne ii.
   • *Supposons ii.*
   Soit $(x,y) \in \Omega^2$.
$$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = ...$$

D'où iii.

• *Supposons iii.*

Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a+t_2\vec{x}) - f(a+t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a+t_1\vec{x})\cdot((t_2-t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2)-g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(a+t_2\vec{x})-f(a+t_1\vec{x})}{t_2-t_1} \geq \mathrm{d}f(a+t_1\vec{x})\cdot(\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

En inversant les rôles on peut montrer

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2)-g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2-t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe ... Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

(d) On suppose f deux fois différentiable (i.e. $\mathrm{d}f$ est différentiable).
Soit $x \in \Omega$ et $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$. On considère l'application

$$\chi \ : \ I_{x,\vec{h}} \to \mathbf{R}^n \ ; \ t \mapsto x + t\vec{h}.$$

Ainsi : $g_{x,\vec{h}} = f\circ\chi$. Par composition g est dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$,

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = \mathrm{d}f(\chi(t))\cdot\vec{h},$$

Soit en notant B l'application bilinéaire

$$B \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})\times\mathbf{R}^n \ ; \ (\ell,\vec{x}) \mapsto \ell(\vec{x})$$

$$g'_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}f(\chi(t)),\vec{h}).$$

Or $\mathrm{d}f$ est différentiable et χ aussi, donc $\mathrm{d}f\circ\chi$ est différentiable, c'est-à-dire dérivable et pour tout $t \in I_{a,\vec{h}}$:

$$(\mathrm{d}f\circ\chi)'(t) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(\chi(t))\cdot\chi'(t) = \mathrm{d}^2f(\chi(t))\cdot\vec{h}.$$

L'application constante égale à $\vec{h}$ est aussi trivialement dérivable. Donc, d'après le cours, $g_{x,\vec{h}}$ est deux fois dérivable de dérivée en $t \in I_{x,\vec{h}}$:

$$g''_{x,\vec{h}}(t) = B(\mathrm{d}^2f(\chi(t))\cdot\vec{h},\vec{h}) + B(\mathrm{d}f(\chi(t)),\vec{0}) = \underbrace{\underbrace{(\mathrm{d}^2f(\chi(t))}_{\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}))}\ \cdot\vec{h})}_{\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})}\cdot\vec{h}.......$$

On en déduit que f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et tout $\vec{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2(f(x)\cdot\vec{h})\cdot\vec{h}) \geq 0.$$

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

(a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0,1]$, par convexité de C, est défini $f(c+t(d-c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

$$\frac{f(c+t(c-d))-f(c)}{t} \geq 0.$$

En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a le résultat.....

(b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C.

• Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$.

• Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$. Utiliser iii. dont la preuve n'a pas utilisé le fait que dans question 1. (c) ......

3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).

• Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.

(b) • D'abord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.
Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.

Supposons que $\vec{\nabla} f$ s'annule en un autre point x_1 de $\mathbf{R}^n$ montrer que la strict convexié conduit à une absurdité !

• A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. l'application $f_{\vec{h}}$ vérifie les même hypothèses que f...... (ch. exercice sur les fonctions convexes).