DM bis n°10

Sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$

On se propose d'établir quelques propriétés des sous-groupes discrets des espaces euclidiens. La première partie est consacrée aux sous-groupes de $\mathbf{R}$, la seconde au cas général de $\mathbf{R}^n$.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier strictement positif, par $\mathbf{E}$ l'espace $\mathbf{R}^n$, par $(\cdot \mid \cdot)$ son produit scalaire usuel et par $\|\cdot\|$ la norme correspondante.

Commençons par une définition :

Un sous-ensemble L de $\mathbf{E}$ est dit discret si tout élément x de L est isolé, i.e. admet un voisinage V dans $\mathbf{E}$ tel que $L \cap V = \{x\}$;

Préambule

Montrer qu'un groupe abélien G est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^m$ si et seulement s'il admet une $\mathbf{Z}$-*base,* c'est-à-dire une famille $(e_1, \dots, e_m)$ telle que tout élément g de G s'écrive d'une façon unique sous la forme $g = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i$, avec $k_i \in \mathbf{Z}$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :
   (a) Un sous-groupe L de $\mathbf{E}$ est discret si et seulement si l'élément 0 est isolé.
   (b) Tout sous-groupe discret L de $\mathbf{E}$ est fermé dans $\mathbf{E}$.
   (c) Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}$ sont exactement les sous-ensembles de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in [0, +\infty[$.
2. Déterminer les sous-groupes discrets du groupe multiplicatif $(\mathbf{R}_+^*, \times)$.
3. On désigne par α un nombre réel > 0 et par L le sous-groupe de $\mathbf{R}$, ensemble des réels $m + n\alpha$ où $n, m \in \mathbf{Z}$. Montrer que L est discret si et seulement si α est rationnel. Construire un sous-groupe discret L de $\mathbf{R}^2$ tel que sa première projection sur $\mathbf{R}$ ne soit pas discrète.
4. Montrer qu'une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue admettant 1 et $\sqrt{3}$ comme périodes est constante.

Deuxième partie

1. On se propose ici de démontrer que tout sous-groupe discret L de $\mathbf{E}$ est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe $\mathbf{Z}^m$. On désigne par $\mathbf{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ engendré par L, par m sa dimension, par $(a_1, \dots, a_m)$ une base de $\mathbf{F}$ contenue dans L, et par L' le sous-groupe de L engendré par cette base [1]. Enfin on pose
$$P = L \cap \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in [0, 1[\Big\}.$$
   (a) Vérifier que P est un ensemble fini.
   (b) Étant donné un élément x de L, construire un couple $(y, z) \in L' \times P$ tel que l'on ait $x = y + z$ et démontrer son unicité.
   (c) Soit encore x un élément de L ; écrivant $kx = y_k + z_k$ (pour k entier > 0), montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dx \in L'$.
   (d) Conclure.
2. Dans cette question, L est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^m$. Ses éléments seront notés $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et l'on posera $\pi(x) = x_m$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $k \geq 0$ et un élément x^0 de L tel que l'on ait
$$\pi(L) = k\mathbf{Z} = \pi(x^0)\mathbf{Z}.$$
   (b) On suppose ici $\pi(L)$ non réduit à $\{0\}$; étant donné un élément x de L, construire un couple $(p, \tilde{x}) \in \mathbf{Z} \times L$ tel que l'on ait $\tilde{x}_m = 0$ et $x = px^0 + \tilde{x}$; démontrer son unicité.
   (c) En déduire que tout sous-groupe discret de $\mathbf{E}$ est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^r$.
3. On suppose ici $n = 2$ et on considère deux $\mathbf{Z}$-bases (u_1, u_2), (v_1, v_2) d'un même sous-groupe discret L de $\mathbf{E}$. Comparer les aires des parallélogrammes construits respectivement sur (u_1, u_2) et (v_1, v_2).

---

1. L' est donc l'ensemble des éléments de E de la forme : $\sum_{i=1}^{m} k_i a_i$, avec $k_1, \dots k_m$ des entiers.

4. Dans cette question, on désigne par B la base canonique de $\mathbf{E}$ et par $GL(\mathbf{E})$ le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbf{E}$. Pour toute partie X de $\mathbf{E}$, on note $L(X)$ le sous-groupe de $\mathbf{E}$ engendré par X.

   Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(\mathbf{E})$ tel que les matrices des éléments de G dans la base B soient à coefficients rationnels. On note GB l'ensemble des vecteurs $g(x)$ où $g \in G$ et $x \in B$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dL(GB) \subset L(B)$.

   (b) Démontrer l'existence d'une base de $\mathbf{E}$ dans laquelle les matrices des éléments de G sont à coefficients entiers.

Troisième partie

1. On désigne par $O(E)$ le groupe des automorphismes linéaires orthogonaux de E (ensemble des $u \in GL(E)$ tels que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x de E), et par $AO(E)$ l'ensemble des transformations$g$ de E de la forme

$$g \ : \ x \mapsto u(x) + a, \quad \text{où } u \in O(E) \text{ et } a \in E \ ;$$

   on écrit alors $g = (u, a)$. On note e l'élément neutre de $O(E)$.

2. Montrer que $O(E)$ est compact.

3. (a) Vérifier que $AO(E)$ est un groupe, écrire sa loi de groupe, préciser son élément neutre, puis l'inverse d'un élément (u, a).

   (b) Calculer $(u, a)(e, b)(u, a)^{-1}$.

4. On note ρ le morphisme $AO(E) > O(E)$ défini par $\rho(u, a) = u$. On fixe un sous-groupe discret L de E qui engendre linéairement E et on note G le sous-groupe de $AO(E)$ formé des éléments g tels que $g(L) = L$.

   (a) Vérifier que, si un élément (u, a) de $AO(E)$ appartient à G, il en est de même de $(u, 0)$ et (e, a).

   (b) Montrer que $\rho(G)$ est fini.

   (c) Déterminer G dans le cas où $n = 2$ et où L est l'ensemble des couples (x_1, x_2) tels que $x_1 \in 2\mathbf{Z}$, $x_2 \in \mathbf{Z}$.

* *

*

Indications pour le DM bis n°10

Première partie

1. (a) Si 0 est isolé alors il existe un voisinage V de 0 tel que $L \cap V = \{0\}$. Pour tout élément x de L considérer son voisinage, $x + V$, pour montrer qu'il est isolé...
   (b) Soit x_n une suite d'éléments de L (supposé discret) qui converge. On montre alors qu'elle est stationnaire : on peut considérer la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ou dire qu'à partir d'un certain rang n_0, $x_n - x_{n_0} \in V$...
   (c) Si L n'est pas trivial considérer la borne inférieure a de $L \cap [\eta, +\infty[$, où η est tel que $]-\eta, \eta[\subset V$. a est dans L car...
2. Penser au logarithme, c'est bien connu c'est un isomorphisme du groupe $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ sur le groupe $(\mathbf{R}, +)$, de surcroît c'est un homéomorphisme, ce qui est bien agréable pour la conservation du caractère discret...
3.
4.

Seconde partie

1. (a) Supposons *a contrario* P infini. On peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de P. Cette suite va contredire le caractère discret de L. En effet elle est ...... donc...
   (b) Décomposer soigneusement chaque coordonnée x_i de x dans la base $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$...
   (c) L'ensemble P est fini donc les éléments z_k, $k \in \mathbf{N}^*$ ne sont pas tous distincts...
   (d) Trouver d'abord un entier $d^* > 0$ qui marche pour tout les élément de P : $d^*P \subset L'$. On en déduit, d'après (b) que $L \subset \frac{1}{d}L'$. reste à vérifier que $\frac{1}{d}L'$ est un sous-groupe isomorphe $\mathbf{Z}^m$
2. (a) $\pi(L)$ est un sous groupe de $\mathbf{Z}$, il est de la forme...
   (b) Posons $p := \pi(x)$. $x = px^{\circ} + (x - px^{\circ})$, le reste en découle mécaniquement...
   (c) Récurrer, récurrer !
3. L'aire du parallélogramme construit sur des vecteurs x et y est $|\det_B(x, y)|$. (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont des bases (au sens des espaces vectoriels), pourquoi ? et on a la formule :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det_B(v_1, v_2)\mathrm{Det}\mathcal{P}_{(v_1,v_2);(u_1,u_2)}$$

   Or la matrice de passage $\mathcal{P}_{(v_1,v_2);(u_1,u_2)}$ est inversible et ses coefficients sont des éléments de ...
   C'est fini !
4. ah !