Récapitulatif : Equations différentielles linéaires

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, par $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et par I un intervalle non réduit à un point. On notera $S_x(I)$ l'ensemble des solution de l'équation (x) sur I.

ÉQUATION LINÉAIRE À COEFFICIENTS QUELCONQUES

On choisit la forme endomorphique. On se donne $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(\mathbf{E}))$ et $\vec{b} \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{E})$.

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{y}}{\mathrm{d}\,t} = a(t)(\vec{y}) + \vec{b}(t), \quad \text{(resp.)}\ \frac{\mathrm{d}\,\vec{y}}{\mathrm{d}\,t} = a(t)(\vec{y}) \qquad \text{(e (resp.) h)}$$

Cas particulier (h) de (e) : *équation homogène* associée à (e).

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
Soient $t_0 \in I$ et $\vec{y}_0 \in \mathbf{E}$. Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} \text{(e)} \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases}$ admet une et une seule solution définie sur I.

Cas homogène

$$\vec{y}_0 \overset{\mathscr{I}}{\longmapsto} \vec{\varphi}_{\vec{y}_0} \text{ sol. de } \begin{cases} \text{(h)} \\ \vec{y}(t_0)=\vec{y}_0, \end{cases}$$
$$\mathbf{E} \rightleftharpoons S_{\mathrm{h}}(I)$$
$$\vec{\varphi}(t_0) \underset{\mathscr{J}}{\longleftarrow} \vec{\varphi}$$

$\mathscr{I}$ et $\mathscr{J}$ sont des isomorphismes réciproques. Donc :

Structure de $S_{\mathrm{h}}(I)$ et $S_{\mathrm{e}}(I)$
$S_{(\mathrm{h})}(I)$ est un espace vectoriel de dimension n. $S_{(\mathrm{h})}(I)$ est un espace affine dirigé par $S_{(\mathrm{h})}(I)$.

☞ On ne sait pas, en général résoudre (h), mais si l'on a n solutions $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, ..., \vec{\varphi}_n$ indépendantes

$$\boxed{S_{\mathrm{h}}(I) = \{c_1\vec{\varphi}_1 + c_2\vec{\varphi}_2 + ... + c_n\vec{\varphi}_n, (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbf{K}^n\}}$$

☞ **une famille $F = (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, ..., \vec{\varphi}_n)$ de solutions est-elle libre ?**
Prendre $t_0 \in I$[1] :

$$(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, ..., \vec{\varphi}_n) \text{ est libre si et seulements si } W(t_0) \neq 0,$$

avec $W = \det_{\mathscr{B}}(\varphi_1, \vec{\varphi}_2, ..., \vec{\varphi}_n)$, *wronskien de F dans $\mathscr{B}$, base de* $\mathbf{E}$. (W est soit nul sur I, soit ne s'annule pas).

Équation avec second membre

On suppose disposer de $(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, ..., \vec{\varphi}_n)$ famille *libre* de solutions de l'équation HOMOGÈNE (h).

Pour tout $t \in I$, $(\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), ..., \vec{\varphi}_n(t))$ est une base $\mathscr{B}_t$ de $\mathbf{E}$ (base « mobile »).

☞ **Méthode de la variation des constantes**
Soit $\vec{\varphi} \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$. D'après le cours : $\vec{\varphi} = \psi_1\vec{\varphi}_1 + \psi_2\vec{\varphi}_2 + ... + \psi_n\vec{\varphi}_n$, avec ψ_i la i^{e} coordonnée de $\vec{\varphi}$ dans la base mobile, application $\mathscr{C}^1$.
$\vec{\varphi}$ solution de l'équation , avec second membre (e), si et seulement si :

$$\psi_1'\vec{\varphi}_1 + \psi_2'\vec{\varphi}_2 + ... + \psi_n'\vec{\varphi}_n = \vec{b} = \beta_1\vec{\varphi}_1 + \beta_2\vec{\varphi}_2 + ... + \beta_n\vec{\varphi}.$$

(par décomposition de $\vec{b}$ dans la base mobile)

$\vec{\varphi}$ solution de (e) si et seulement pour $i = 1, 2, ..., n$, $\psi_i = B_i + c_i$, avec $c_i \in \mathbf{K}$, B_i primitive de β_i (continue).

Donc $S_{\mathrm{h}}(I) = \{\vec{\varphi}_{c_1,c_2,...c_n}, (c_1, c_2, ...c_n) \in \mathbf{K}^n\}$ avec :

$$\vec{\varphi}_{c_1,c_2,...c_n} \;:\; I \to \mathbf{E}\ t \mapsto B_1\vec{\varphi}_1 + B_2\vec{\varphi}_2 + ... + B_n\vec{\varphi}_n + c_1\vec{\varphi}_1 + c_2\vec{\varphi}_2 + ... + c_n\vec{\varphi}_n.$$

1. De nature à faciliter les calculs : 0,1 etc.