DM n°43

Billard circulaire

Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'une boule de billard dans un billard circulaire sans frottement.

On considère dans un plan horizontal un billard circulaire, de rayon 1. On l'identifie au disque unité du plan complexe,

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} .$$

Le bord du billard s'identifie donc au cercle unité de centre O,

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} .$$

Une boule de billard, supposée ponctuelle, est lancée à l'instant $t = 0$, d'un point M_0 du bord du billard d'affixe z_0, avec un vecteur vitesse initial $\vec{V_0}$, de module 1, l'angle orienté de $\overrightarrow{M_0O}$ vers $\vec{V_0}$ ayant pour mesure un nombre réel α tel que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par $z(t)$ l'affixe de la position $M(t)$ de la boule de billard à l'instant $t \geq 0$. On suppose que le mouvement de la boule de billard se poursuit à l'infini sans frottement : entre deux chocs successifs sur le bord, le mouvement est supposé rectiligne uniforme.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1.

Première partie
Billard circulaire à réflexion élastique

On suppose dans cette partie que les chocs de la boule sur le bord du billard sont des réflexions élastiques, c'est-à-dire que

– la composante tangentielle du vecteur vitesse après le choc est égale à celle du vecteur vitesse avant le choc,

– la composante radiale du vecteur vitesse après le choc est opposée à celle du vecteur vitesse avant le choc.

1.a) Montrer que la boule de billard rebondit sur le bord Γ du billard en les points $M_n, n \in \mathbb{N}^*$, d'affixes $z_n = z_0 e^{in\beta}$, où β est un nombre réel tel que $0 < \beta < 2\pi$, que l'on déterminera en fonction de α.

b) Calculer le temps mis par la boule pour parcourir la corde $M_{j-1}M_j, j \in \mathbb{N}^*$, et le temps mis pour atteindre le point $M_n, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Trouver l'affixe $z(t)$ de la position $M(t)$ de la boule à l'instant t. [On notera $[y]$ la partie entière d'un nombre réel y.]

2.a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le mouvement de la boule soit périodique. Trouver alors la période du mouvement.

b)Décrire la trajectoire de la boule.

Deuxième partie
Billard circulaire à réflexion inélastique

Soit f un nombre réel tel que $0 < f < 1$.

On suppose dans cette partie que les chocs de la boule de billard sur le bord du billard sont des réflexions inélastiques avec coefficient f, c'est-à-dire que

– la composante tangentielle du vecteur vitesse après le choc est égale à celle du vecteur vitesse avant le choc,

– la composante radiale $\vec{V}_r^+$ du vecteur vitesse après le choc et la composante radiale $\vec{V}_r^-$ du vecteur vitesse avant le choc sont liées par la relation

$$\vec{V}_r^+ = -f\vec{V}_r^- \quad .$$

On pose $\alpha_0 = \alpha$ et l'on suppose dans cette partie que $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. On se propose d'étudier le mouvement de la boule lorsque t tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par M_n le n-ième point de choc, par z_n son affixe et par α_n la mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{M_nO}$ vers $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ telle que $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. On désigne par T_n le temps de parcours de M_0 à M_n.

3.a) Etudier la série de terme général $2\alpha_n - \pi$, c'est-à-dire la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} 2\alpha_k - \pi\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite Z quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que le point M d'affixe Z est atteint par la boule de billard en un temps fini, que l'on notera T.

4.a) Montrer qu'il existe une unique fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{W}$ définie sur $[0, T]$ vérifiant les conditions suivantes :

* $\overrightarrow{W}(0) = \vec{V}_0$,

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overrightarrow{W}(T_n)$ est la vitesse de la boule après le choc en M_n,

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]T_n, T_{n+1}[$, $\overrightarrow{W}(t)$ est la vitesse de la boule au temps t,

* $\overrightarrow{W}$ est continue au temps T.

b) On admet que la vitesse de la boule au temps T est $\overrightarrow{W}(T)$. Quel est le mouvement de la boule pour $t \geq T$?

c) Calculer, pour $t \geq T$, $z(t)$ en fonction de $z(T), \alpha$ et $t - T$.

5. Soit g une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique de période 2π. On désigne par $\theta(t)$ un argument continu de $z(t)$ pour $t \geq 0$.

a) Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t g(\theta(\tau)) d\tau - \frac{1}{t-T} \int_T^t g(\theta(\tau)) d\tau \right) = 0 \quad .$$

b) En déduire que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(\theta(\tau)) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \quad .$$

Troisième partie
Réflexion élastique, points adhérents aux trajectoires non périodiques

Dans cette partie, indépendante de la précédente, on considère à nouveau le cas de la réflexion élastique et l'on se propose d'étudier les trajectoires non périodiques. On étudie d'abord les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

On rappelle que $x \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de X qui tend vers x.

6. Soit G un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$. On considère

$$G^+ = \{x \in G \,|\, x > 0\} \quad .$$

a) Montrer que G^+ a une borne inférieure. On la désigne par a.

b) Montrer que si $a > 0$, alors G est le sous-groupe

$$G_a = \{na \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

c) Montrer que si $a = 0$, alors tout point de $\mathbb{R}$ est un point adhérent à G. [On montrera d'abord que 0 est un point adhérent à G^+.]

7. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. *On suppose que $\frac{\beta}{\pi}$ n'est pas rationnel.*

On considère l'ensemble

$$H_\beta = \{k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\,,\, \ell \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

a) Montrer que tout nombre réel est un point adhérent à H_β.

On pose

$$\begin{aligned} H_\beta^+ &= \{x \in H_\beta \,|\, x > 0\} \quad , \\ S_\beta &= \{k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{N},\, \ell \in \mathbb{Z},\, k\beta + 2\ell\pi > 0\} \quad , \\ S'_\beta &= \{-k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{N},\, \ell \in \mathbb{Z},\, -k\beta + 2\ell\pi > 0\} \quad . \end{aligned}$$

b) Montrer que 0 est un point adhérent à S_β ou à S'_β.

c) On suppose que $(-k_n\beta + 2\ell_n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de S'_β qui converge vers 0. Montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}$ n'est pas bornée. En déduire qu'il existe une suite de S_β qui converge vers 0.

d) Montrer que tout nombre réel positif est un point adhérent à S_β.

8. On reprend les notations de la première partie et l'on suppose que le mouvement de la boule de billard n'est pas périodique.

a) Montrer que, pour tout $z \in \Gamma$, il existe une suite d'entiers positifs ou nuls $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{k_n} = z$.

b) Montrer que, pour tout point z de la couronne $C_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\sin\alpha| \leq |z| \leq 1\}$, il existe une suite de nombres réels positifs ou nuls $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} z(t_n) = z$.

c) Déterminer quels sont les points du billard qui sont adhérents à la trajectoire de M_0.

⋆ ⋆
⋆

Indications

Première partie
Billard circulaire à réflexion élastique

1.a) Soit Pour tout entier $n \geq 0$ Notons $\vec{V}_n$ le vecteur vitesse de la boule entre le n^{e} choc et le $n+1^{\text{e}}$ et α_n la mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{M_n O}$ vers $\vec{V}_n$ élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et β_n la mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{0M_n}$ vers $\overrightarrow{0M_{n+1}}$ élément de $[0, 2\pi[$.

Faites une figure !

Les conditions de réflexion assurent que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\vec{V}_{n+1}$ et le symétrique orthogonal de $\vec{V}_n$ par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{OM_n}$, il en résulte que :

— La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à α ;
— La suite $(\|\vec{V}_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à 1 ;
— La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante, on note β sa valeur.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le triangle (O, M_n, M_{n+1}) est isocèle, donc .... Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{z_n =}$,

b) Soit $j \in \mathbf{N}^*$. La boule parcourt la la corde $]M_{j-1}, M_j[$ à la vitesse 1, le temps de parcours de cette corde est donc la longueur de cette corde. Notons P_j le milieux de $[M_{j-1}, M_j]$. La distance $P_j M_j$ vaut :

$$\left|\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos\alpha| = \cos\alpha,$$

car $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Faites un dessin !

Le temps de parcours de la corde $[M_{j-1}, M_j]$ est $\boxed{2\cos\alpha}$

Le temps t_n pour atteindre $M_n, n \in \mathbb{N}^*$ est ....

c) Soit un réel $t > 0$; Posons $n := \left[\frac{t}{2\cos\alpha}\right]$ et $f = \frac{t}{2\cos\alpha} - \left[\frac{t}{2\cos\alpha}\right]$. D'après b) la bille est sur la corde, semi-ouverte $[M_n, M_{n+1}[$. Notons que $\vec{V}_n = \frac{\overrightarrow{M_n M_{n+1}}}{\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|} = \frac{\overrightarrow{M_n M_{n+1}}}{\|2\cos\alpha\|}$. Or

$$t = 2n\cos\alpha + f \times 2\cos\alpha,$$

onc

$$M(t) = M_n + f \times 2\cos\alpha \vec{V}_n = ...$$

Donc

$$\boxed{z(t) = ...,}$$

avec $\boxed{n = \left[\frac{t}{2\cos\alpha}\right]}$ et $\boxed{f = \frac{t}{2\cos\alpha} - \left[\frac{t}{2\cos\alpha}\right]}$

2.a)

- Supposons que le mouvement de la boule soit périodique. Alors *a fortiori* la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique. Il existe donc un entier $n \geq 3$ tel que $z_n = z_0$, soit d'après a), tel que $n\beta$ soit congru à 0 modulo 2π. Autrement dit, il existe donc un entier $n \geq 3$ et un élément k de $\mathbf{Z}$ tels que $n\beta = k2\pi$, soit tels que $\alpha = \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\pi$. Donc, α est de la forme :

$$\boxed{\alpha = \frac{p}{q}\pi, \text{ avec } q \in \mathbf{N}^*, p \in \mathbf{Z}, \mathrm{PGCD}(p,q) = 1 \text{ et } -\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2}.} \quad (1)$$

- Réciproquement supposons que α soit de la forme (1). On a ...

  Notons que $n_0(2\cos\alpha)$ est la plus petite période strictement positive du mouvement car si T est une période $\frac{T}{2\cos\alpha}$ est une période de la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, donc supérieur à n_0.

Finalement le mouvement est périodique si et seulement si la condition (1) est réalisée et si tel est le cas la période vaut :

$$\boxed{2n_0\cos\alpha,\ \text{avec},\ n_0 = \min\left\{n \in \mathbf{N}^*, n\left(\frac{p+q}{2q}\right) \in \mathbf{Z}\right\}}$$

b) Si le mouvement de la boule est périodique, sa trajectoire est la réunion d'un nombre fini de segments $[M_0, M_1]$,$[M_1, M_2]$,...$[M_{n_0-1}0, M_{n_0}]$...............

Deuxième partie
Billard circulaire à réflexion inélastique

Commençons par des remarques.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note :
— $\vec{V}_n^-$ la vitesse de la bille avant le choc en M_n ; $\vec{V}_n^+$ celle après le choc ;
— $\vec{V}_{t,n}^-$ la vitesse tangentielle de la bille avant le choc en M_n, $\vec{V}_{t,n}^+$ celle après le choc ;
— $\vec{V}_{r,n}^-$ la vitesse tangentielle de la bille avant le choc en M_n, $\vec{V}_{r,n}^+$ celle après le choc.

On a :
— $\|V_{t,n}^+\| = \|V_n^+\|\sin(\alpha_n)$, $\|V_{r,n}^+\| = \|V_n^+\|\cos(\alpha_n)$;
— $\|V_{t,n+1}^-\| = \|V_n^+\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha_n) = \|V_n^+\|\sin(\alpha_n) = \|V_{t,n}^+\|$; $\|V_{r,n+1}^-\| = \|V_n^+\|\cos(\alpha_n) = \|V_{r,n}^+\|$.

Donc d'après les conditions de réflexion :
i. $\|V_{t,n+1}^+\| = \|V_{t,n}^+\|$;
ii. $\|V_{r,n+1}^+\| = f\|V_{r,n}^+\|$;
iii. $\tan(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{f}\tan(\alpha_n)$.

3.a) Par récurence grâce à i., pour tout entier $n \geq 0$

$$\tan(\alpha_n) = \frac{1}{f^n}\tan(\alpha).$$

et donc

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_n \leq \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha_n) = \frac{1}{\tan(\alpha_n)} = f^n\frac{1}{\tan(\alpha)}......$$

b) Comme au 1.a), on montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'angle orienté de $\overrightarrow{0M_n}$ vers $\overrightarrow{0M_{n+1}}$ a comme mesure $\pi + 2\alpha_n$ ou donc encore $2\alpha_n - \pi$. Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z_n = z_0 \exp\left(i \sum_{k=0}^{n} (2\alpha_k - \pi)\right).$$

Donc

$$\boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$

c)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la vitesse de la bille parcourant la corde $]M_n, M_{n+1}[$, est supérieure à vitesse tangentielle, cette dernière, d'après i., est indépendante de n et vaut donc $v_t := \|\vec{V}^+_{t,0}\|$. Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n \leq \frac{1}{v_t} M_n M_{n+1} = \frac{2\cos\alpha_n}{v_t}$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \cos\alpha_n = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_n) \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_n$..................

le point M d'affixe Z est atteint au bout du temps T.

4.a) Soit $\vec{w}$ l'application à valeurs vectorielles $\overrightarrow{W}$ définie sur $[0, T[$, par les conditions suivantes :

* $\overrightarrow{w}(0) = \vec{V}_0$,
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overrightarrow{w}(T_n)$ est la vitesse de la boule après le choc en M_n,
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]T_n, T_{n+1}[$, $\overrightarrow{w}(t)$ est la vitesse de la boule au temps t,

Une application à valeurs vectorielles $\overrightarrow{W}$ définie sur $[0, T]$, vérifie les quatre conditions de la question si et seulement si $\vec{w}$ est prolongeable par continuité à $[0, T]$, auquel cas elle est **LE** prolongement par continuité de $\vec{w}$.

Montrons que $\vec{w}$ est bien prolongeable par continuité. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in [T_n, T_{n+1}[$, $\vec{w}(t)$ à comme affixe :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{T_{n+1} - T_n} = z_n \frac{e^{i(2\alpha_n - \pi)} - 1}{\frac{2\cos\alpha_n}{v_n}},$$

où v_n est la vitesse de la bille sur la corde $]M_n, M_{n+1}[$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = Z$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} v_t$, d'après les remarques i. et ii., $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}$, d'après iii. Par ailleurs :

$$\frac{e^{i(2\alpha_n - \pi)} - 1}{2\cos\alpha_n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -i.$$

On en déduit que l'affixe de $\vec{w}(t)$ tend vers le vecteur $\vec{V}_{\lim}$ qui est ....

Donc $\vec{w}$ admet un prolongement par continuité assurant qu'il existe une unique application $\vec{W}$ satisfaisant au quatre conditions de la question, qui est LE prolongement par continuité de $\vec{w}$.

b) Le vecteur $\vec{W}(T)$ est tangent au bord du billard ; ....

c) $\vec{V}_0$ est de module 1, donc $v_t = \sin\alpha$. Donc pour tout $t \geq T$,

$$\boxed{z(t) = Ze^{-i\omega(t-T)},}$$

avec $\omega = \sin\alpha$.

5.

a)

Écrire pour tout réel $t > T$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))\mathrm{d}\tau - \frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))\mathrm{d}\tau = \frac{1}{t}\int_0^T g(\theta(\tau))\mathrm{d}\tau + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-T}\right)\int_T^t g(\theta(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

....

b) Pour tout $t \in [T, +\infty[$, $\theta(t) = \theta(T) - \omega(t-T)$, donc par changement de variable affine « $u = \theta(\tau)$ »,

$$\frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega(t-T)}\int_{\theta(T)-\omega(t-T)}^{\theta(T)} g(u)du$$

Pour $t \in]T, +\infty[$. On pose $n(t) := \mathrm{E}\left(\frac{\omega(t-T)}{2\pi}\right)$

$$\frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega(t-T)}\int_{\theta(T)-n(t)2\pi}^{\theta(T)} g(u)du + \frac{1}{\omega(t-T)}\int_{\theta(T)-\omega(t-T)}^{\theta(T)-n(t)2\pi} g(u)du$$

....

Traduction : la moyenne temporelle de g sur une trajectoire est égale à la moyenne spatiale de g.

Troisième partie
Réflexion élastique, points adhérents aux trajectoires non périodiques

6.

a)

b) .

c)

Conclusion : Un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ est soit dense soit de la forme $a\mathbf{Z}$.

7.

a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $\bar{H}_\beta = \mathbf{R}$.

Sinon, puisque H_β est clairement un sous-groupe de $\mathbf{R}$, il existerait un réel a tel que $H_\beta = a\mathbf{Z}$, (cf. 6.) et contredire l'hypothèse $\frac{\beta}{\pi} \notin \mathbf{Q}$......

b) D'après a), $\overline{H_\beta \cap \mathbf{R}^*} \subset \bar{H}_\beta \cap \bar{R}^* = \mathbf{R} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$. Donc il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments non nuls de H_β qui converge vers 0. H_β étant un groupe, $(|y_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de H_β^+ qui converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|y_n|$ s'écrit $\kappa_n\beta + 2\lambda_n\pi$, avec κ_n et λ_n des élément de $\mathbf{Z}$.

— Si l'ensemble A^+ des éléments n de $\mathbf{N}$ tels que $\kappa_n \geq 0$ est infini on peut extraire une suite $(\kappa_{\varphi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ de $(\kappa_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui énumère A^+. La suite $(|y_{\varphi(p)}|)_{p\in\mathbf{N}}$ est alors une suite d'éléments de S_β qui converge vers 0.

— Sinon, l'ensemble A^- des éléments n de $\mathbf{N}$ tels que $\kappa_n \leq 0$ est infini on peut extraire une suite $(\kappa_{\varphi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ de $(\kappa_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui énumère A^-. La suite $(|y_{\varphi(p)}|)_{p\in\mathbf{N}}$ est alors une suite d'éléments de S'_β qui converge vers 0.

Donc 0 est un point adhérent à S_β ou à S'_β.

c) Supposons la suite $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée. Alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée car sinon la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge ne le serait pas ! Donc les suites entières $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prennent un nombre fini de valeurs ce qui est donc le cas de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc constante égale à 0 à partir d'un certain rang n_0. Donc $\frac{l_{n_0}}{k_{n_0}} = \frac{\beta}{2\pi}$, ce qui contredit l'irrationalité du rapport $\frac{\beta}{2\pi}$.

Donc $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non bornée.

D'après b., on dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers 0 telle que tous ses termes soient éléments de S_β ou de S'_β. Dans le premier cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ répond à la question. Dans le second, on vient de le voir, $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non bornée. Comme on l'a vu au b) il existe par ailleurs une suite d'éléments de H_β^+ de terme général $z_n = \kappa_n\beta + 2\pi\lambda_n\pi$ qui converge vers 0 avec $(\kappa_n, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^2$. On peut donc par récurrence construire une fonction φ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissante, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

i. $0 \leq x_{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2}z_n$, $(z_p \underset{p\to+\infty}{\to} 0)$;

ii. $k_{\varphi(n)} \geq -\kappa_n$ $((k_p)_{p\in\mathbf{N}}$, non bornée).

La suite $(z_n - x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, et est à valeurs dans S_β d'après i. et ii.

Dans tous les cas, 0 est limite d'une suite d'élément de S_β.

d) On vient de voir que $0 \in \bar{S}_\beta$. Prenons un réel $x > 0$. Montrons que $x \in \bar{S}_\beta$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. $0 \in \bar{S}_\beta$. quitte à diminuer ε on suppose $\varepsilon < x$.

De $0 \in \bar{S}_\beta$ on tire l'existence d'un élément g de S_β tel que $0 < g < \varepsilon$

Posons $n_0 := \mathrm{E}\left(\frac{x}{g}\right)$. On a immédiatement $(n_0 + 1)g \in]x, x + \varepsilon[\subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ De plus de manière évidente, $(n_0 + 1)g \in S_\beta$. Donc $x \in \bar{S}_\beta$.

Tout réel positif est donc adhérent à S_β.

8.

Le mouvement de la boule est non périodique donc dans cette question $\frac{\beta}{2\pi}$ est irrationnel.

a)

$z \in \Gamma$ et soit θ un argument de z élément de $[0, 2\pi[$. D'après la question 7. d), il existe une suite d'élément de S_β, $(k_n\beta + 2l_n\pi)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers θ, avec $k_n \in \mathbf{N}$ et $l_n \in \mathbf{Z}$.

Presque fini !

b) Soit $f \ : \ [0, \frac{1}{2}] \to \mathbf{R}\,;\ s \mapsto |(1-s)z_0 + sz_1|$. L'application f est décroissante de 1 à $\sin\alpha$, ($f(s)$ représente le module du complexe w_s barycentre de $(z_0, 1-s)$ et (z_1, s)). Soit un point z de la couronne C_α. L'application f étant continue , il exite par le théorème de la valeur intermédiaire, un élément τ (d'ailleurs unique) de $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $|w_\tau| = f(\tau) = |z|$. Soit θ un argument de z et ϕ un de w_τ. Alors $z = \exp(i\theta\phi)w_\tau$. La conservation du barycentre par unne rotation, ou un simple calcul montre que z est le barycentre de $(u, 1-\tau)$ et (v, τ), où $u := \exp(i\theta - \phi)z_0$, $v := \exp(i\theta - \phi)z_1$. Notons que $u \in \Gamma$ et $v \in \Gamma$. Faire un dessin !

D'après la question précédente ....etc.

c) D'après la question précédente, $C_\alpha \subset \overline{z(\mathbf{R}_+)}$ Par ailleurs $z(\mathbf{R}_+) \subset C_\alpha$. Or C_α est fermée, donc $\overline{z(\mathbf{R}_+)} \subset \overline{C_\alpha} = C_\alpha$.

Au total : $C_\alpha = \overline{z(\mathbf{R}_+)}$. Donc l'adhérence de la trajectoire est la couronne, image de C_α.

⋆ ⋆
⋆