DM 2 bis : Physique

1

La rédaction s'améliore tout en étant encore perfectible.

Sur le fond : (1) Moments de force : évitez des calculs inutiles (surtout dans des bases indirectes !) et prenez l'habitude de manipuler les bras de levier.

(2) AN : réfléchissez au nombre de chiffres significatifs !

(3) Contrôlez vos résultats (homogénéité notamment)

Q29 : explications confuses. Dommage car les idées sont bonnes. Mais vous ne suivez pas les conseils de l'énoncé (graphes) et cela vous coûte les points.

Schobert

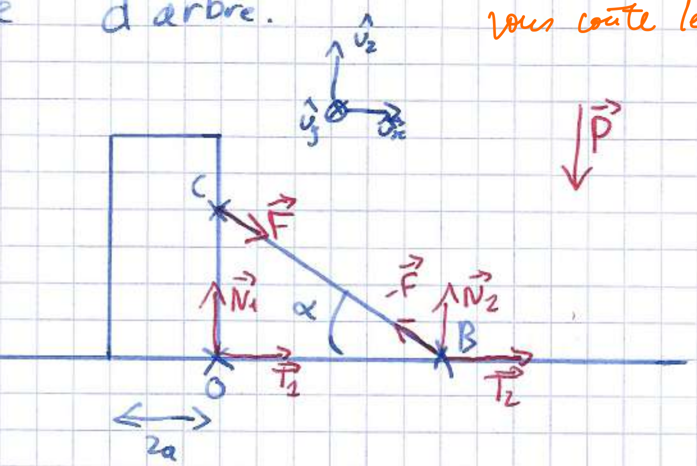
Néo

MP*

Chute d'arbre.

A/

16)



Sur le système {B},

$$m\vec{a} = -\vec{F} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{P}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\alpha + T_2 \\ m\ddot{z} = N_2 + F\sin\alpha - mg \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Le bucheron ne glisse pas, il ne bouge pas.

Donc $\underline{F\cos\alpha = T_2}$ V

$\underline{mg - F\sin\alpha = N_2}$ V

Or, $\|\vec{T}_2\| \leq f\|\vec{N}_2\|$ → ou alors vous justifiez que $T_2 > 0$ et $N_2 > 0$!

Puis $F_{max} = \dfrac{fN_2}{\cos\alpha} = \dfrac{f(mg - F_{max}\sin\alpha)}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow F_{max}(1 + f\tan\alpha) = \dfrac{fmg}{\cos\alpha}$

$$F_{max} = \frac{f m g}{\cos\alpha\,(1 + f\tan\alpha)}$$

$$= \frac{f m g}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$$

(17) Par théorème du centre d'inertie, appliqué à l'arbre

$$M\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{F} + \vec{N_1} + \vec{T_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x}_G = F\cos\alpha + T_1 \\ M\ddot{y}_G = -F\sin\alpha + N_1 - Mg \end{cases}$$

Au repos :

$$0 = F\cos\alpha + T_1$$

$$0 = -F\sin\alpha + N_1 - Mg$$

Puis

$$\underline{T_1 = -F\cos\alpha}$$

$$\underline{N_1 = Mg + F\sin\alpha}$$

ah ! Voilà ce qu'il fallait faire aussi en 16.

Pas de glissement en O :

$$-T_1 \leq f N_1 \qquad \text{(car } \underbrace{\|\vec{T_1}\|}_{=-T_1} \leq f\,\|\vec{N_1}\|\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-T_1}{N_1} \leq f$$

$$\Leftrightarrow \frac{F\cos\alpha}{Mg + F\sin\alpha} \leq f$$

$$\Leftrightarrow F\,(\underbrace{\cos\alpha - f\sin\alpha}_{\geq 0}) \leq f M g$$

inertie : Il suffit de voir que $\|\vec{T_1}\| = \|\vec{T_2}\|$ et que $\|\vec{N_1}\| > \|\vec{N_2}\|$

si $\|\vec{T_2}\| < f\|\vec{N_2}\|$ alors $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N_1}\|$

$> F_{max}$ car $M > m$ et $\frac{1}{\cos\alpha - f\sin\alpha} > \frac{1}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$

$$\Leftrightarrow F \leq \frac{fMg}{\cos\alpha - f\sin\alpha} \quad (H)$$

Donc pour $0 \leq F \leq F_{max}$,

Il n'y a pas de glissement en O.

18) $|\Gamma_g| = |M_{Oy}(\vec{P})|$

utilisez le bras de levier de $M\vec{g}$!

$= |(\vec{OG} \wedge M\vec{g})\cdot \hat{u}_y|$ G le barycentre de l'arbre.

$= \left| \begin{pmatrix}-a\\ \frac{H}{2}\\ 0\end{pmatrix}_{(\hat{u}_x,\hat{u}_z,\hat{u}_y)} \wedge m \begin{pmatrix}0\\ -g\\ 0\end{pmatrix}_{(\hat{u}_x,\hat{u}_z,\hat{u}_y)} \cdot \hat{u}_y \right|$ (⚠ on est pas en base directe, je mets donc des valeurs absolues)

Pourquoi faites-vous ça ?

$= Mag$ Puis $\Gamma_g = -Mag$ car $\vec{P}$ donne un moment négatif par rapport à Oy.

19) Au repos,

$0 = \Gamma_B + \Gamma_g$ par théorème du moment cinétique appliqué à l'arbre par rapport à Oy.

$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{l}$

encore une méthode inutilement compliquée !

On $|\Gamma_B| = |\underbrace{\vec{OC}}_{=\vec{OB}+\vec{BC}} \wedge \vec{F}| = \left| \begin{pmatrix}\overline{OB}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}F\cos\alpha\\ -F\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix} \right| = |\overline{OB}F\sin\alpha|$

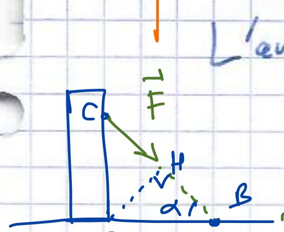
Puis $\Gamma_B = |\cos(\alpha) l F\sin\alpha| = \frac{Fl}{2}\sin(2\alpha)$ car $\vec{F}$ donne un moment positif par rapport à Oy.

L'arbre pivote autour de Oy ⇒

$\Gamma_B + \Gamma_g \geq 0$

donc $\Gamma_B = F.\, l\cos\alpha\sin\alpha$
$= F\frac{l}{2}\sin(2\alpha)$

Puis $\Gamma_B \geq -\Gamma_g = Mag = \Gamma_{B_{min}}$



bras de levier : $OH = OB\sin\alpha$
$= l\cos\alpha\sin\alpha$

20)

On veut maximiser $T_B + T_g'$ avec α.

D'après 18) 19), $T_B' + T_g' = -Mag + \frac{Fl}{2}\sin 2\alpha$

Il faut donc maximiser ~~cos~~ $\sin 2\alpha$

en conservant $T_B \geq T_{B\,min}$.

Puis on maximise $\sin 2\alpha$ et

$$T_B' = \frac{H}{2} F\cos\alpha \geq Mga$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha \geq \frac{2Mga}{HF}$$

En $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin(2\alpha)$ est maximal.

En $\alpha = \frac{\pi}{4}$, Il existe une valeur optimale

$\alpha_m = \frac{\pi}{4}$

21) En remplaçant F par F_{max} obtenu en Q16),

$$T_B' = \frac{Fl}{2}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{F_{max}\, l}{2}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{fmg\, l \quad \sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + f\sin\alpha)}$$

$$= mgl \underbrace{\left(\frac{f\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + f\sin\alpha)}\right)}_{= \frac{1}{\phi(\alpha)}}$$

Schobert
Néo
MP*

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{f\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha + f\sin\alpha}{f\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$= \frac{2(\cos\alpha + f\sin\alpha)}{f\sin 2\alpha}$$

en α_m, T'_B doit être maximale.
Donc $\phi(\alpha)$ doit être minimale.

Donc $\frac{1}{f\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$ doit être minimale.

$$\phi'(\alpha) = -\frac{\cos\alpha_m}{f\sin^2\alpha_m} + \frac{\sin\alpha_m}{\cos^2\alpha_m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos^3\alpha_m + f\sin^3\alpha_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^3\alpha_m = \frac{1}{f}$$

Puis $\alpha_m = \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1}{f}}\right)$

ϕ : $\searrow_{\alpha_m} \nearrow$?

Puis ϕ est minimale en α_m.

Pour $f = 1$, $\alpha_m = \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1}}\right) = \arctan(1)$
$= \frac{\pi}{4}$

22/ Pour initier la rotation de l'arbre, il faut

$\Gamma_B + \Gamma_g \geq 0$ D'après Q19),

$\hookrightarrow \frac{F_{max}\, l}{2} \sin(2\alpha) \geq M a g$

$\hookrightarrow$ Pour $f=1$, d'après Q21),

$\alpha_m = \frac{\pi}{4}$

Puis

$\Gamma_B = \frac{F_{max}\, l}{2} \sin(2\alpha_m)$

$F_{max} = \frac{f m g}{\cos\alpha_m + f \sin\alpha_m}$

$= \frac{10^2 \times 10}{\sqrt{2}}$ N

$= 707,1$ N

trop de chiffres

Puis $\Gamma_B \geq Mag$

Donc $l \geq \frac{2 M a g}{F_{max} \sin 2\alpha_m}$

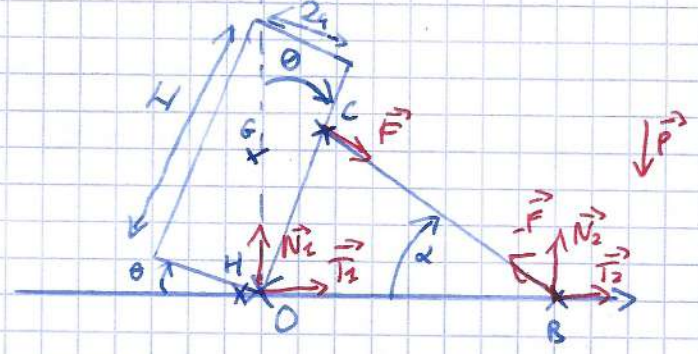
$\simeq \frac{\cancel{2} \times \cancel{10^3} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times 10}{\cancel{10^3} \times 1} \times \sqrt{2}$ m

$\simeq \sqrt{2} \times 10$ m

$\simeq 1,414 \times 10$ m

également trop de chiffres

23 /

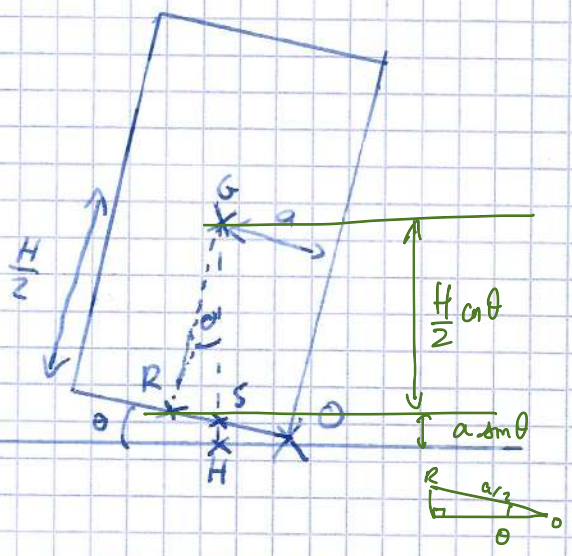


H : projeté de G sur le sol

$$E_p = Mg\,\overline{GH}$$

(H)

$$= Mg\left(a\sin\theta + \frac{H}{2}\cos\theta\right)$$



$E_m = E_p + E_c = \text{cste}$

$$\overline{GH} = \overline{HS} + \overline{SG}$$

$$= \overline{OS}\sin\theta + \sqrt{\overline{SR}^2 + \overline{RG}^2}$$

$$= (\overline{OR} - \overline{RS})\sin\theta + \sqrt{\overline{SR}^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$$

$$= (a - \overline{RS})\sin\theta + \sqrt{\overline{RS}^2 + \frac{H^2}{4}}$$

$$= \left(a - \frac{H}{2}\tan\theta\right)\sin\theta + \sqrt{\frac{H^2}{4}\underbrace{(\tan\theta^2 + 1)}_{=\frac{1}{\cos^2\theta}}}$$

$$= \left(a - \frac{H}{2}\tan\theta\right)\sin\theta + \frac{H}{2\cos\theta}$$

$$= a\sin\theta + \frac{H}{2\cos\theta}(1 - \sin^2\theta)$$

$$= a\sin\theta + \frac{H}{2}\cos\theta$$

bien long !

tout est sur le schéma

Le bucheron peut lâcher la corde quand G dépasse l'axe normal au sol passant par O. Le moment du poids sera alors positifs et l'arbre tombera même sans présence du moment Γ_B.

Il faut donc

$$\tan\theta > \frac{\overline{OR}}{\overline{RG}} = \frac{a}{\frac{H}{2}} = \frac{2a}{H}$$

$$\theta_s = \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)$$

→ on attend une argumentation à partir de l'expression de E_p (sinon on n'aurait pas demandé son expression)

B/

24) Pour un vent violent, $\underline{U = 150\ km.h^{-1}}$ convient en ordre de grandeur.

HP (PC) B

Le nombre de Reynolds, R vaut :

$$R = \frac{\rho_a \times U \times 2a}{\eta_a} = \frac{1 \times 1 \times 150}{3{,}6 \times 2.10^{-5}} \simeq 2{,}1 \times 10^6 > 1000$$

Il convient alors d'écrire la force élémentaire :

$$\underline{d\vec{F_v} = 2a\, C_x\, \rho_a\, U^2 dz\, \hat{u}_x}.$$

25) $$|\Gamma_v| = \left| \int_0^H \begin{pmatrix} 2a \\ z \\ 0 \end{pmatrix}_{\hat{u}_x, \hat{u}_z, \hat{u}_y} \wedge \begin{pmatrix} dF_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\hat{u}_x, \hat{u}_z, \hat{u}_y} \cdot \hat{u}_y \right|$$

$$= \left| \int_0^H -z\, dF_v \right|$$

$$= \left| \int_0^H z \times 2a\, C_x\, \rho_a\, U^2 dz \right|$$

$$= C_x\, \rho_a\, U_a^2 \int_0^H z\, dz$$

$$= 2 C_x\, \rho_a\, U_a^2 \frac{H^2}{2}$$

$$\underline{= C_x\, \rho_a\, U_a^2 H^2}$$

(⚠ on est pas dans une base directe, je mets donc en valeur absolue)

Je m'étonne toujours de ce choix !

et $\underline{\Gamma_v > 0}$ (les forces du vent donnent un moment positif)

$$\underline{\Gamma_v = C_x\, \rho_a\, U_a^2 H^2}$$

Schobert
Néo
MP*

26)

$\Gamma_v(\theta) \propto \cos^n\theta$.

Projeté sur $\hat{u}_x$, $\vec{dF}$ donnera :

$dF_x \approx 2a\, e_x\, \rho_a\, U^2 dz \cos\theta$? mal formulé mais la surface de contact passe de $2adz$ à $2adz\cos\theta$.

Puis le premier vecteur dans l'intégrale dans le calcul de Γ_v étant inchangé (voir Q25)), Γ_v sera proportionnel à $\cos^2\theta$.

Puis $n = 2$.

27) en $\theta \to 0^+$, $\Gamma_r(\theta) = \Gamma_0$
$= \Gamma_0 \times \beta$

oui

Donc $\beta = 1$.

On mesure $\theta_c \approx 10° = \frac{10\pi}{180}$ rad
$= 0{,}05\pi$ rad

En $\theta = -\frac{4}{\cancel{\theta_c}} \Gamma_0 \times \frac{1}{-2\times\Gamma_0 5} \times \theta_c^2$ ← explications ? Et ne barrez pas les différents facteurs !
$= \frac{2}{5}\theta_c$, Γ_r atteint son minimum $\theta_m = \frac{2}{5}\theta_c$

(sur votre brouillon, pas de problème mais pas sur vos copie)

Et $\Gamma_r(\theta_m) = \Gamma_0'\left(1 + 4\times\frac{2}{5} - 5\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$

$$= \Gamma_0'\left(1 + \frac{8}{5} - \frac{4}{5}\right)$$

$$= \Gamma_0'\left(1 + \frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{9\Gamma_0'}{5} = \Gamma_m'$$

$$\frac{\theta_m}{\theta_c} = \frac{2}{5}$$

On mesure sur la figure 5) :

$$\frac{\theta_m}{\theta_c} \approx \frac{4^\circ}{10^\circ} \approx \frac{2}{5}$$

$$\frac{\Gamma_m'}{\Gamma_0'} = \frac{9}{5}$$

On mesure sur la figure 5) :

$$\frac{\Gamma_m'}{\Gamma_0'} \approx \frac{-16\times10^3}{-9\times10^3}$$

$$\approx \frac{16}{9}$$

$$\approx \frac{18}{10}$$

$$\approx \frac{9}{5}$$

Le modèle est cohérent, les valeurs correspondent.

28)

L'arbre reste en équilibre si

$|\Gamma_r| \geq \Gamma_v$

donc si ~~R(1)~~ $p \leq \left|\frac{\Gamma_r}{\Gamma_0}\right|$

graphiquement, d'après Q27),

$\frac{\Gamma_r}{\Gamma_0}$ $\cancel{p} = 1 + \frac{4\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2}$ (valable pour $0 < \theta \leq \theta_c$) strict

Pour θ augmentant à partir de 0,

le graphe donne Γ_r augmentant en norme,

Ainsi, l'arbre reste en équilibre si $p \leq 1$ oui

C'est alors un équilibre stable.

Soin!

Pourquoi "encore"? Avez-vous dit qu'il y en avait 2 pour d'autres valeurs de p?

Si ~~$\theta < \theta_m$~~ $p < \frac{9}{5}$, on a encore ~~deux~~ positions

$p \leq 1$ vérifie aussi $p < 9/5$!

d'équilibres mais seule celle ~~~~ ~~instable~~ en $\theta < \theta_m$ est stable.

Si il existait une position stable inférieure à θ_c, l'arbre pourrait tout de même ne pas résister au vent car il y a une érosion des sols et le vent n'est pas uniforme en réalité.

→ la rédaction n'est pas satisfaisante. Il manque l'apport d'un graphe mettant en évidence les positions d'équilibre. L'énoncé est clair sur ce point : "Discuter graphiquement..." (deux fois !)

29)

D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = W(\Gamma_v) + W(\Gamma_r(\theta))$$

$$= \Gamma_v \theta + \int_0^{\theta} \Gamma_r(e)\,de$$

$$= \Gamma_v \theta + \int_0^{\theta} \Gamma_0 \left(1 + 4\frac{e}{\theta_c} - 5\frac{e^2}{\theta_c^2}\right) de$$

$$= \Gamma_v \theta + \Gamma_0 \left[e + \frac{4e^2}{2\theta_c} - \frac{5e^3}{3\theta_c^2}\right]_0^{\theta}$$

$$= \Gamma_v \theta + \theta \Gamma_0 \left(1 + 2\frac{\theta}{\theta_c} - \frac{5}{3}\left(\frac{\theta}{\theta_c}\right)^2\right)$$

$$= |\Gamma_0| \theta \left(\frac{\Gamma_v}{|\Gamma_0|} - 1 - 2\frac{\theta}{\theta_c} + \frac{5}{3}\frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)$$

$$= |\Gamma_0| \theta\, P(u)$$

Avec $P(u) = p - 1 - 2u + \frac{5}{3}u^2$

L'arbre est déraciné si $\dot{\theta}^2 > 0$.

A nouveau mal rédigé. Ce n'est pas l'adverbe approprié.

Puis il faut $P(u) > 0$

Donc pour tout $u \in [0, 1]$, il faut $P(u) > 0$

$\hookrightarrow P(0) = p - 1$

$P(1) = p - 1 - 2 + \frac{5}{3}$

$= p - \frac{4}{3}$

Et $P'(u) = -2 + \frac{10}{3}u$

Schobert
Néo
MP*

$$P'(u) = 0 \iff u = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

u	0		$\frac{3}{5}$		1
$P'(u)$		$-$	0	$+$	
P	$p-1$	↘	$p-\frac{8}{5}$	↗	$p-\frac{4}{3}$

$$P(0) = p-1$$
$$P(1) = p-\frac{4}{3}$$

$$P\left(\frac{3}{5}\right) = p-1-\frac{6}{5}+\frac{15}{25}$$
$$= p-1+\frac{-30+15}{25}$$
$$= p-1-\frac{3}{5}$$
$$= p-\frac{8}{5}$$

Ainsi pour avoir P positive sur $[0,1]$, il faut

$$p-\frac{8}{5} > 0$$
$$\Rightarrow p > p_c = \frac{8}{5}$$

$$p = \frac{\Gamma_v}{|\Gamma_o|} > \frac{8}{5} \Rightarrow \Gamma_v > \frac{8}{5}|\Gamma_o|$$
$$\Rightarrow C_x \rho_a U_a^2 H^2 > \frac{8}{5}|\Gamma_o|$$

Vérifiez l'homogénéité !

$\rho_a H^2$ = masse
donc $[C_x \rho_a U_a^2 H^2]$ = énergie

Γ_o = force × distance = énergie.

$$U > \sqrt{\frac{8}{5}\frac{|\Gamma_0|}{\rho_a a H^2 C}}$$

inhomogène

$$\approx \cancel{53,67} \ m.s^{-1}$$

et trop de chiffres

30) $p = \frac{4}{3} < \frac{8}{5} = p_c$

↳ L'arbre peut entrer en mouvement.

Donc $P(u) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3} - 1 - 2u + \frac{5}{3}u^2 = 0$ (d'après Q28)

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - 2u + \frac{5}{3}u^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5u^2 - 6u + 1 = 0$

$\Delta' = 9 - 5$
$= 4$

$u_{1/2} = \frac{3 \pm 2}{5} \in \left\{\frac{1}{5}, 1\right\}$

Oui

Donc l'arbre atteint une position d'équilibre en $\theta_\infty = \frac{1}{5} = 0,2$

En réalité, cette position ne stabilisera pas l'arbre, il chutera car le vent n'est pas constant...