Correction du DM n^{o}9
Préparation aux oraux

Exercice 1 — Voir correction dans les exercices du chapitre 11.

Exercice 2$\star$ — *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$ espace vectoriel de dimension finie non nul n. On suppose qu'ils commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ telle que les matrices de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dans $\mathcal{B}$ de soient triangulaires supérieures. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont cotrigonalisables.*

Un correction est donnée dans les exercices du chapitre 11. En voici une autre.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Notons pour n entier naturel non nul, $\mathbf{P_n}$ la propriété :
Dans tout espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension n ou moins, p endomorphismes commutant entre eux sont cotrigonalisables.

• La propriété $\mathbf{P}_1$ est trivialement vraie, puisque des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n sont cotrigonaLISÉS dans toute base de cet espace.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathbf{P}_n$ soit vraie.
Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle $n+1$ qui entre eux commutent.

Choisissons une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{E}$. Pour tout endomorphisme f de $\mathbf{E}$, on désignera par f^* l'élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est ${}^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)\right)$ de $\mathbf{E}$.

Excluons le cas où les u_i sont tous des homothéties et où toute base trigonalise (et même diagonalise) tous ces endomorphismes. Et considéron,s quitte à renuméroter ces endomorphismes, que ${}^{\mathrm{t}}u_1$ ne soit pas une homothétie. Par $\mathbf{E}_\lambda$ nous désignerons un sous-espace propre de ${}^{\mathrm{t}}u_1$ associé à une valeur propre λ, espace, qui par hypothèse est de dimension n ou moins. L'existence d'un tel espace propre résulte de ce que le corps de base de $\mathbf{E}$ est $\mathbf{C}$.

On a immédiatement, puisque si deux matrices commutent leur transposées itou, que les endomorphismes $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_p^*$ commutent entre eux, si bien que $\mathbf{E}_\lambda$ est stable par ces endomorphismes. Désignant par v_i, l'endomorphisme induit sur $\mathbf{E}_\lambda$ par u_i^*, pour $i = 1, ..., p$, on a immédiatement que les v_i commutent et donc, par $\mathbf{P}_n$, on dispose d'une base $(\vec{\epsilon}_1, ...\vec{\epsilon}_k)$ de $\mathbf{E}_\lambda$ qui trigonalise les v_i. Alors $\vec{\epsilon}_1$ est un vecteur propre commun à tous les v_i, donc un vecteur popre commun à $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_p^*$.

Notons A le vecteur colonne coordonnées de $\vec{\epsilon}_1$ dans $\mathcal{B}_0$. L'hyperplan H d'équation dans $\mathcal{B}_0$,

$$H \ : \ {}^{\mathrm{t}}AX = 0$$

est stable par u_1, u_2,...,u_p, en en effet, posant $M_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_i)$, pour $i = 1, ..., p$, on a pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$

$${}^{\mathrm{t}}AX ={}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M_iA)X = \lambda_i\ {}^{\mathrm{t}}AX,$$

en notant λ_i la valeur propre de u_i^* associé à $\vec{\epsilon}_1$.

En invoquant derechef $\mathbf{P}_n$ on dispose d'une base $(\vec{e}_1, ...\vec{e}_n)$ de H qui trigonalise les endomorphismes induits sur H par les u_i. Complétons cette base de H en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ (de quelconque façon), alors pour $i = 1, ..., p$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) = \begin{pmatrix} & t_1 \\ T & \cdot \\ & t_n \\ O_{1,n} & t_{n+1} \end{pmatrix},$$

où T est la matrice dans $(\vec{e}_1, ...\vec{e}_n)$ de l'endomorphisme de H induit par (u_i) , que l'on sait triangulaire, et ${}^{\mathrm{t}}(t_1, ..., t_{n+1})$ le vecteur colonne coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $u_i(\vec{e}_{n+1})$, notons que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbf{C})$.

La base $\mathcal{B}$ est une base de cotrigonalisation de $u_1, ...u_p$; d'où $\mathbf{P}_{n+1}$.

On vient, par récurrence, de prouver que des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, qui commutent entre eux sont cotrigonalisables.

Exercice 3 — *Soit Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable. Nous noterons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ses p valeurs propres deux à deux distinctes et de multiplicité respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.*

Notons $\mathcal{C}$ le commutant de A. Les éléments de $\mathbf{C}^n$ seront notés en colonne.

•Analyse —

Soit $M \in \mathcal{C}$. Comme M commute avec A les sous-espaces propres $\mathbf{E}_{\lambda_1}$,... $\mathbf{E}_{\lambda_p}$ de A, sont donc stables par M. Donc dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ adaptée à la décomposition $\mathbf{C}^n = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_{\lambda_i}$, la matrice de l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à M est de la forme

$$\mathrm{diag}\,(M_1, M_2, ..M_p)\,,$$

où $M_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbf{C})$, en effet le caractère diagonalisable de A veut que la dimension de chaque $\mathbf{E}_{\lambda_i}$ soit aussi la multiplicité de la valeur propre λ_i. Donc en notant P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, on a montré que $\underline{\mathcal{C} \subset P\mathcal{D}P^{-1}}$, où :

$$\mathcal{D} = \left\{\mathrm{diag}\,(M_1, M_2, ..M_p)\,, \forall i \in [\![1, p]\!], M_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbf{C})\right\}.$$

• Synthèse —

On a $A = P\mathrm{diag}(I_{m_1}, I_{m_2}, ..., I_{m_p})P^{-1}$. Par produit par blocs, on montre que $\mathrm{diag}(I_{m_1}, I_{m_2}, ..., I_{m_p})$ commute avec tout élément de $\mathcal{D}$, donc : $\underline{P\mathcal{D}P^{-1} \subset \mathcal{C}.}$

Finalement $\underline{\mathcal{C} = P\left\{\mathrm{diag}\,(M_1, M_2, ..M_p)\,, \forall i \in [\![1, p]\!], M_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbf{C})\right\}P^{-1}.}$

L'application $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_{m_2}(\mathbf{C}) \times ... \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

$$(M_1, M_2, ..., M_p) \mapsto \mathrm{diag}(M_1, M_2, ..., M_p)$$

est trivailement linéaire, l'examen de son noyau montre qu'elle est injective. Son image $\mathcal{D}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ isomorphe à $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_{m_2}(\mathbf{C}) \times ... \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbf{C})$. La conjugaison par P étant aussi un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (d'automorphisme réciproque la conjugaison par P^{-1}), on a :

$\underline{\mathcal{C}\text{ est un sous-espace vectoriel de }\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$, isomorphe à $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_{m_2}(\mathbf{C}) \times ... \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbf{C})$.

Donc $\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{M}_{m_1}(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_{m_2}(\mathbf{C}) \times ... \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbf{C})) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathcal{M}_{m_i}(\mathbf{C})) = \underline{\sum_{i=1}^{p} m_i^2}.$

Exercice 4 — *Déterminer les solutions définies sur* $\mathbf{R}$*, à valeurs réelles du système différentiel suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4x+6y=0,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2x+4y=0.\end{array}\right. \tag{1}$$

On notera $\mathbf{R}^n$, pour tout entier $n \geq 1$ en colonne, et l'on posera $\mathbf{E} = \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$ et $\mathbf{F} = \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^4)$.

Soit l'application

$$J\ :\ E \to \mathbf{F}\,;\ \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\\ \psi\\ \psi'\end{pmatrix}$$

Clairement J est linéaire, injective (son noyau est trivialement....trivial) et induit un isomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de (1) sur celui des solutions du système suivant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix}$$

La fin de l'exercice est asinitrottante...

Exercice 5 — *Soient* A *et* A' *et* B *des éléments de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *et* M *la matrice élément de* $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix}A & B\\ 0_n & A'\end{pmatrix}$.

Montrer que si M *est diagonalisable alors* A *et* A' *le sont.*

Corrigé en classe.

Exercice 6 — *Déterminer les éléments* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *tels que la matrice* B *suivante soit diagonalisable.* $B = \begin{pmatrix}A & A\\ 0 & A\end{pmatrix}$.

• Supposons que B soit diagonalisable. On dispose donc d'un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(B) = O_{2n}$.

Le calcul montre que $B^2 = \begin{pmatrix}A^2 & 2A^2\\ 0 & A^2\end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix}A^3 & 3A^3\\ 0 & A^3\end{pmatrix}$ et suggère que :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ B^k = \begin{pmatrix}A^k & kA^k\\ 0 & A^k\end{pmatrix},$$

ce qu'une récurrence immédiate confirme.

Donc $P(B) = \begin{pmatrix}P(A) & (XP')(A)\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}$. Donc $P(A) = O_n$ et $(XP)'(A) = O_n$. La première égalité donne que A est diagonalisable et que son spectre est inclus dans l'ensemble $\mathrm{Ra}(P)$ des racines de P, la seconde veut que :

$$\mathrm{sp}(A) \subset \mathrm{Ra}(XP') = \mathrm{Ra}(P') \cup \{0\}.$$

Mais comme P est à scindé à racines simples $\mathrm{Ra}(P') \cap \mathrm{Ra}(P) = \emptyset$. Donc le spectre de A est réduit à $\{0\}$, et, A étant diagonalisable, cette matrice est nulle.

• Réciproquement pour $A = O_n$, B est diagonali-sable et -sée.

<u>B est diagonalisable si et seulement si A est nulle.</u>

Exercices 7 — ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLES —
L'exercice est corrigé dans les feuilles d'exercice du chapitre sur la réduction.

Exercice 8 —

1. *Donner une condition nécessaire portant sur la parité de l'élément n de $\mathbf{N}^*$, pour qu'il existe une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie :*

$$M^2 + 2M + 5I_n = 0_n.$$

2. *Cette condition est-elle suffisante ?*

1. Soit le polynôme $P := X^2+2P+5$. Comme P est annulateur pour M, le spectre complexe de M est inclus dans l'ensemble $\mathrm{Rac}(P)$ des racines complexes de P. Or $\mathrm{Rac}(P) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, avec $\lambda = 1 + 2\mathrm{i}$, et comme le polynôme caractéristique de M est réel, M admet nécessairement comme valeur propre λ ET $\bar{\lambda}$ avec la même multiplicité m. Donc $n = 2m$ c'est dire que $\underline{n \text{ est pair}}$.
2. Supposons n pair. Ce nombre s'écrit : $n = 2m$, avec $m \in \mathbf{N}^*$.
   MÉTHODE 1 —
   Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, et $M = \mathrm{diag}(\underbrace{A, A, ..., A}_{m})$, notons que $\chi_A = P$. et donc, par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$P(M) = \mathrm{diag}(\underbrace{\chi_A(A), \chi_A(A), ..., \chi_A(A)}_{m}) = \mathrm{diag}(O_2, O_2, ..., O_2) = O_n.$$

   MÉTHODE 2 —
   On préfère à la matrice compagon A l'élément B de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $B := |\lambda| R_\theta$ où θ sera un argument de λ. La matrice B, comme A à pour spectre $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ et donc P comme polynôme caractéristique.

Les deux méthodes s'accordent à montrer que <u>la réciproque est vraie.</u>

Exercice 9 $\star\star$ — *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie n, non nulle. Soit $Q \in \mathbf{C}[x]$. On suppose que $Q(u)$ est diagonalisable et que $Q'(u)$ est inversible. Montrer que u est diagonalisable.*

Comme $Q(u)$ et u commutent, tout espace propre de $Q(u)$ est stable par u. Mais le caractère diagonalisable de $Q(u)$ veut que $\mathbf{E}$ soit la somme directe des sous-espaces propres de $Q(u)$. Donc si, pour tout espace propre de $Q(u)$, l'endomorphisme induit par u sur ce dernier est diagonalisable, alors u sera diagonalisable[1].

Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ $\mathbf{E}_\lambda$ l'espace propre de $Q(u)$ associé à λ et v l'endomorphisme qu'induit u sur celui-ci. Posons $R := Q - \lambda$ de sorte que R soit annulateur pour v. Si R est simplement scindé, alors v est diagonalisable. Sinon soit α une racine multiple de R. Donc R et R' s'écrivent donc

$$R = (X - a)S\,;R' = Q' = (X - a)T,$$

où S et T, sont éléments de $\mathbf{C}[X]$. L'inversibilité de $Q'(u)$, exige celle de $Q'(v)$ qui à son tour impose celle de $v - a\mathrm{id}$. Donc puisque

$$0_{\mathcal{L}(E_\lambda)} = R(v) = (v - a\mathrm{id})S(v),$$

Le polynôme S est annulateur pour v.

1. La réciproque est vraie, mais sans intérêt ici.

Par ailleurs $R' = (x-a)S' + S$, donc $S'(v) = (v - a\mathrm{id})^{-1}R'(v)$, et donc $S'(v)$ est inversible comme produit de deux tels endomorphismes de $\mathbf{E}_\lambda$. Bref S satisfait les même hypothèses que R et la multiplicité de a comme racine de S est inférieur de 1 à celle de a vu comme racine de R. En itérant le processus et en l'appliquant à chaque racine multiple de R on construit un polynôme anulateur de v simplement scindé. Donc v est diagonalisable.

Par la remarque préliminaire u est donc diagonalisable.

Exercice 10 *Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.*

1. *On suppose que pour tout entier m strictement positif,* $\mathrm{Tr}(M^m) = 0$. *Montrer que M est nilpotente.*
2. *On suppose que* $\mathrm{Tr}(M^m) \underset{m\to+\infty}{\to} 0$. *Montrer que les valeurs propres de M sont toutes de module inférieur strictement à 1.*

1. Vu en cours.
2.

Exercice 11 —

1. *A quelle condition une matrice de permutation d'ordre $n \geq 2$ est-elle diagonalisable dans* $\mathbf{R}$.
2. $\star$ *Soient un entier $n \geq 2$ et σ un élément de S_n groupe symétrique d'ordre n. Déterminer les polynômes minimal et caractéristique de P_σ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.*

1. Soit $\sigma \in \mathrm{S}_n$, notons P_σ la matrice de permutation associée.
   • Supposons P_σ diagonaisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   Notons N l'ordre de σ, qui ce trouve être celui de P_σ en raison du caractère isomorphique de $\mathrm{S}_n \to \mathcal{P}_n\,;\ \phi \mapsto P_\phi$ ($\mathcal{P}_n$ est le groupe des matrices de permutation.). Le polynôme $X^N - 1$ est annulateur pour P_σ, donc le spectre de M est inclus dans $\mathbf{U}_N$, ensemble des racines de $X^N - 1$.
   Mais comme P_σ est diagonalisable dans $\mathbf{R}$: $\mathrm{sp}(P_\sigma) \subset \mathbf{U}_N \cap \mathbf{R} = \{1, -1\}$.
   Donc soit P_σ est l'identité, soit elle est semblable à une matrice diagonale ayant sur la diagonale des -1 et éventuellement un ou plusieurs 1, selon que son spectre se réduise à $\{1\}$ ou non.
   Dans le permier cas $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ dans le second, les cycles à support disjoints qui interviennent dans la décomposition de σ sont tous des transpositions et on a :
   $$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k,$$
   où $\tau_1, \dots \tau_k$ sont des transpositions à supports disjoints.
   • La réciproque est évidente, puisque P_σ est soit l'identité, soit un élément d'ordre 2 et à ce titre est annulé par le polynôme $X^2 - 1$ simplement scindé sur $\mathbf{R}$.

   Une matrice de permutation est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si la permutation qu'elle représente est l'identité ou un produit de transpositions à supports disjoints.

2. Dans la suite nous confondrons un p-cycle c de S_n et le p-uplet $(a_1, \dots, a_p)$ qui le représente. Introduisons par ailleurs pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ la matrice
   $$J_p := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

J_p est la matrice de permutation d'ordre p associée au p-cycle $(1,2,3,...p-1,p)$ de $[\![1,p]\!]$. Notons dès à présent que ce cycle étant d'ordre p, le polynôme X^p-1 est annulateur pour J_p. Par ailleurs pour tout $q \in [\![1,p-1]\!]$ et tout polynôme Q de degré q, $Q(J_p)(E_1)$ est une combinaison linéaire de $(E_2, E_3, ...E_{q+1})$ (en convenant, le cas échéant que $E_{n+1} = E_1$). Donc la liberté de la base canonique interdit à Q d'être annulateur pour J_p, laissant à $X^p - 1$ le rôle de polynôme minimal, et donc aussi de polynôme caractéristique puisque ces deux polynômes partagent le même degré, sont tous deux unitaires et que le premier divise le second (Cayley-Hamilton), bref :

$$\chi_{J_p} = \mu_{J_p} = X^p - 1. \tag{2}$$

Remarque. La matrice J_p est une matrice compagnon.)

Décomposons σ en produit de cycles à support disjoints, $\sigma = c_1c_2...c_k$. Notons $a_1, ...a_h$ les éventuels élément de $[\![1,n]\!]$ laissés invariants par sigma.
Soit ϕ la permutation de $[\![1,n]\!]$ définie, avec l'identification signalée, par :

$$(\phi(1), \phi(2), ..., \phi(n)) = (a_1, ..., a_h, c_1, c_2, ...c_k).$$

La matrice de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à P_σ dans la base $(E_\phi(1), E_{\phi(2)}, ..., E_{\phi(n)})$ est :

$$P' = \mathrm{diag}(I_h, J_{d_1}, J_{d_2}, ..., J_{d_k}),$$

où pour $i = 1, ...k$, on désigne par d_i la taille du cycle c_i. On a donc que P' est semblable à P_σ
Remarque. on a même $P_\sigma =' P_{\phi^{-1}} P' P_\phi$.
Par (2),

$$\underline{\chi_{P_\sigma} = \chi_{P'} = \chi_{I_h}\chi_{J_{d_1}}\chi_{J_{d_2}}...\chi_{J_{d_k}} = (X-1)^h(X^{d_1}-1)(X^{d_2}-1)...(X^{d_k}-1).}$$

Un calcul par blocs montre que le polynôme minimal de P' donc de P_σ annule I_h, J_{d_1}, J_{d_2},...,J_{d_k}, il est donc divisible par X^h et $(X^{d_1}-1)$, $(X^{d_2}-1)$,...,$(X^{d_k}-1)$, qui sont les polynôme minimaux respectifs de I_h, J_{d_1}, J_{d_2},...,J_{d_k}. C'est donc un multiple commun de ces k+1 polynômes. Notons M le PPCM de ces polynômes On vient de prouver que M divise μ_{P_σ}. Comme tout multiple commun de $(X^{d_1}-1)$, $(X^{d_2}-1)$,...,$(X^{d_k}-1)$ annule I_h, J_{d_1}, J_{d_2},...,J_{d_k}, il annule P' et donc est divisible par μ_{P_σ}, en particulier μ_{P_σ} divisons donc M. Concluons :

$$\underline{M = \mu_{P_\sigma}.}$$

Exercice 12

1. *Soit M un élément de $M_n(\mathbf{R})$. On note μ sont polynôme minimal et $\mu_{\mathbf{C}}$ sont polynôme minimal lorsqu'on considère M comme comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\mu = \mu_{\mathbf{C}}$.*
2. $\star\star$ *Soit M un élément de $M_n(\mathbf{Q})$. On note $\mu_{\mathbf{Q}}$ son polynôme minimal et $\mu_{\mathbf{R}}$ son polynôme minimal lorsqu'on considère M comme comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mu_{\mathbf{Q}} = \mu_{\mathbf{R}}$.*

1. La conjugaison étént un automorphisme du corps $\mathbf{C}$, la conjugaison de l'égalité matricielle $O_n = \mu_{\mathbf{C}}(M)$ donne :

$$O_n = \bar{O}_n = \overline{\mu_{\mathbf{C}}(M)} = \bar{\mu_C}(\bar{M}) = \bar{\mu_C}(M),$$

car M est à coefficients réels. Donc $\bar{\mu}_{\mathbf{C}}$ est anulateur pour M, unitaire de même degré que $\mu_{\mathbf{C}}$, c'est donc $\mu_{\mathbf{C}}$. On a donc $\mu_{\mathbf{C}} \in \mathbf{R}[X]$. Donc comme ce dernier polynôme est annulateur $\underline{\mu \text{ divise } \mu_C.}$

Mais d'une autre côté comme μ est aussi un élément de $\mathbf{C}[X]$ annulateur pour M, on a : $\underline{\mu_{\mathbf{C}} \text{ divise } \mu.}$

Comme μ_C et sont unitaires et, par ce qui précède, associés, $\boxed{\mu = \mu_{\mathbf{C}}}$.

2. Cf. colles