

DM facultatif n°5

Groupes d'isométries sur \mathbb{R}^n Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire **canonique** sur E : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base \mathcal{B} (\mathcal{B} est donc une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- $\mathcal{L}(E)$ la \mathbb{R} -algèbre des endomorphismes de E
- $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E
- $M_{n,1}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la \mathbb{R} -algèbre des matrices carrées réelles de taille n
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tXAX > 0$.

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels x_1, x_2, \dots, x_n dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme** p sur E :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme infinie** sur E : si $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Une norme N sur E est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$

Objectifs

Si N est une norme sur E , on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **N -isométrie** si pour tout $x \in E$, $N(u(x)) = N(x)$

On note $\text{Isom}(N)$ l'ensemble des N -isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\text{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p .

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

(a) Montrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E , on a $(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2[(N(x))^2 + (N(y))^2]$
En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

(b) Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis montrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices

colonnes associées. Montrer que si l'on pose $\langle x, y \rangle_S = {}^t XSY$, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ définit un produit scalaire sur E .

3. Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $(\varphi(e_i, e_j))$. Justifier que pour tous vecteurs x et y de E $\varphi(x, y) = {}^t XSY$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a donc montré que $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme : $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^t X S X}$ avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x .

II. Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E .

- 4) Montrer que $(\text{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$

- 5) **Une caractérisation géométrique des N -isométries**

On note $\Sigma(N) = \{x \in E, N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N -isométrie si et seulement si $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

Le groupe des N -isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la N -sphère unité.

- 6) Dans cette question uniquement $n = 2$ et donc $E = \mathbb{R}^2$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \text{Vect}\{e_1 - e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 et r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$ -isométries ?

- 7) Dans cette question uniquement $n = 3$ et donc $E = \mathbb{R}^3$.

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q .

- (a) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que $q(x, y, z) = {}^t X S X$

- (b) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $S = P D^t P$.

- (c) Justifier alors que l'application $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$ est une norme euclidienne sur \mathbb{R}^3

- (d) Donner l'allure de $\Sigma(N_q)$, la sphère unité pour la norme N_q et en donner une équation simple dans une nouvelle base

- (e) Justifier que $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.

- (f) Dédire de la question 5, par une considération géométrique, que $\text{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments.

III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base \mathcal{B} . Si N est une norme, on note $\text{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}}, u \in \text{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\text{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\text{Isom}(N)$, c'est "sa version matricielle".

- 8) **Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes**

- (a) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ le produit scalaire associé.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N_S -isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E , on a $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$

- (b) En déduire que u est une N_S -isométrie si et seulement si sa matrice A dans \mathcal{B} vérifie ${}^t A S A = S$

- 9) Reconnaître alors $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$? Justifier votre réponse.

- 10) **Une application des polynômes interpolateurs**

$\mathbb{R}_r[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r .

On se donne $r + 1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_r$.

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_r[X]$ vers \mathbb{R}^{r+1} définie par $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_r))$

- (a) Déterminer le noyau de u . En déduire que pour tous réels y_0, y_1, \dots, y_r , il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).
- (b) Application : soit n un entier naturel non nul et u_1, \dots, u_n des réels strictement positifs, on pose $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})$. Montrer qu'il existe un polynôme L , à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.
- 11) Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- (a) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S .
- (b) Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une autre racine carrée de S . Montrer qu'il existe un polynôme Q , à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.
- (c) Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.
- (d) Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A + B)(A - B)$).
- Désormais, on note \sqrt{S} l'unique racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de S .
- 12) **Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne**
- Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{{}^tXSX}$ où X est le vecteur colonne associée à x .
- (a) Montrer que si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S}$ appartient à $\text{ISOM}(N_S)$
- (b) Montrer que l'application ψ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{ISOM}(N_S)$ définie par $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S}$ est une bijection. Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini ?

IV. Étude du cardinal de $\text{Isom}(p)$

Dans cette partie p est un réel strictement supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Pour alléger l'écriture, une p -isométrie désigne une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\text{Isom}(p)$ le groupe des p -isométries.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u^* désigne l'adjoint de u pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle que $u^* \in \mathcal{L}(E)$, est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

13) Endomorphismes de permutation signée

\mathcal{P}_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $1, 2, \dots, n$.

Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma, \varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u_{\sigma, \varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$.

(a) Montrer que $u_{\sigma, \varepsilon}$ est une p -isométrie.

(b) Écrire la matrice de $u_{\sigma, \varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$

14) Inégalité de Hölder

(a) Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

(b) En déduire que pour tous vecteurs x et y de E , on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Hölder** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

(c) Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p -isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice $A = [u]_{\mathcal{B}}$.

15) Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p$

16) Une formule clé de dualité

Soit $x \in E$. On note $\Sigma_q = \{z \in E, \|z\|_q = 1\}$.

(a) Justifier l'existence du réel $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

(b) Justifier que $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$. Montrer que $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_p$ puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

17) En déduire que si u est une p -isométrie, u^* est une q -isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q$

18) On suppose de plus que $p \neq 2$

(a) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des réels dans $[0, 1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$. Montrer avec soin que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

(b) En déduire que pour tout i et j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'une p -isométrie).

19) **Conclusion**

Montrer alors que lorsque $p \neq 2$, $\text{Isom}(p)$ est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p .

Commentaire : Les p -isométries pour $p \neq 2$ sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur \mathbb{R}^n , la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.