# SUJET 3
# X-ENS

**NOTATIONS :**

Dans tout le problème, $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé réel et $E'$ l'ensemble des formes linéaires continues $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E; \|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

On dit qu'une partie non vide $C$ de $E$ est convexe si

$$\text{pour tous } x,\, y \in C \text{ et } t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C.$$

Si $U$ est une partie de $E$ alors $\operatorname{Int} U$ et $\operatorname{Adh} U$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de $U$.

Les parties I) et II) sont indépendantes. La partie III) utilise les résultats de la partie II). La partie IV) utilise les résultats des parties précédentes. La dernière partie est indépendante des autres.

## Première partie : Théorème d'Ekeland

Dans cette partie, l'espace $E$ est supposé complet et $A$ désigne une partie fermée non vide de $E$.

Définissons la notion d'espace complet.

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ valeurs dans $E$, est dite de **Cauchy** si, par définition, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in$ tel que pour tout couple $(p, q)$ d'entiers naturels, si $p \geq q \geq n_0$, alors :

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

**Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet.** On admettra que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Soient $f\ : A \to \mathbb{R}$ une application continue et minorée et $\varepsilon$ un réel strictement positif fixé.

**I.1.** Montrer qu'on peut construire une suite $(K_n)_{n \geqslant 0}$ de parties de $E$ et une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $E$ telles que $K_0 = A$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} \in K_n,\ f(x_{n+1}) \leqslant \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } K_{n+1} = \{x \in A \mid f(x) \leqslant f(x_{n+1}) - \varepsilon \|x - x_{n+1}\|\}.$$

**I.2.** Montrer que la suite $(K_n)$ est décroissante.

**I.3.** Montrer que pour tous $n \geqslant 1$ et $x \in K_n$, $\|x - x_n\| \leqslant \dfrac{1}{2^n \varepsilon}$.

**I.4.** Montrer que la suite $(x_n)$ converge vers un point $x_0 \in A$ vérifiant : $\cap_{n \geqslant 0} K_n = \{x_0\}$.

**I.5.** Montrer que pour tout $x \in A$,

$$f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|.$$

## Deuxième partie : Quelques propriétés des ensembles convexes

**II.1.** Soit $C$ un convexe ouvert inclus dans $E$ contenant 0. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0, \frac{1}{\alpha} x \in C\}.$$

**a.** Montrer que la définition ci-dessus a un sens et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\|$.

**b.** Montrer que $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$.

**c.** Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $x \in E$,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

**d.** Montrer que pour tous $x$ et $y \in E$,

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

**II.2.** Soit $K$ inclus dans $E$ un convexe d'intérieur non vide.

**a.** Montrer que $\operatorname{Int} K$ est convexe.

**b.** Montrer que si $K$ est fermé alors $\operatorname{Adh}(\operatorname{Int} K) = K$.

## Troisième partie : Prolongement des formes linéaires et séparation des convexes

Dans cette partie, $F$ désigne un espace vectoriel normé réel.

**III.1.** Soient $p \; : F \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

$$\forall x \in F,\ \forall \lambda > 0,\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \tag{1}$$

$$\forall x, y \in F,\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \tag{2}$$

$G$ un sous espace vectoriel strict de $F$ (i.e. $G \neq F$) et $g \; : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur $G$ telle que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant p(x)$. On fixe $u \in F \setminus G$ et on note $H = G \oplus \mathbb{R}u$ la somme directe de $G$ et de la droite vectorielle engendrée par $u$.

**a.** Montrer que pour tous $y', y'' \in G$, $p(y'+u) - g(y') \geqslant g(y'') - p(y''-u)$.

**b.** Montrer qu'il existe une application linéaire $h \; : H \to \mathbb{R}$ prolongeant $g$ (i.e. pour tout $y \in G$, $h(y) = g(y)$) et vérifiant : pour tout $x \in H$, $h(x) \leqslant p(x)$.

Dans toute la suite du problème. on admettra le résultat de prolongement suivant : **Pour toute forme linéaire $g$ définie sur un sous espace vectoriel $G$ de $F$ et vérifiant les hypothèses ci-dessus, il existe une forme linéaire $f \; : F \to \mathbb{R}$ prolongeant $g$ et vérifiant : pour tout $x \in F$, $f(x) \leqslant p(x)$.**

**III.2.** Soient $A$ et $B$ deux convexes non vides et disjoints inclus dans $F$. On suppose que $A$ est ouvert. On note $D$ l'ensemble $A - B = \{d \in F \mid \exists a \in A, b \in B \mid d = a - b\}$.

**a.** Vérifier que $D$ est un convexe ouvert et $0 \notin D$.

**b.** Soit $x_0 \in D$ fixé. On note $C = D - \{x_0\}$. L'ensemble $C$ est donc un convexe ouvert contenant $0$ et on peut poser comme dans la partie II)

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \frac{1}{\alpha} x \in C\}.$$

On note $G = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par $x_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(tx_0) = -t$. Montrer que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant p(x)$.

**c.** En déduire qu'il existe une forme linéaire $f$ continue sur $F$, non nulle et telle que :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{y \in B} f(y).$$

On dira alors que $f$ sépare $A$ et $B$.

## Quatrième partie : Théorème de Bishop-Phelps

Dans cette partie, l'espace $E$ est supposé complet, $Y$ désigne l'espace vectoriel produit $E \times \mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|(x,t)\|_Y = \|x\| + |t|$$

et $Y'$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $Y$.

**IV.1.** **a.** Montrer brièvement que l'application :

$$\varphi \ : \begin{cases} E'\times\mathbb{R} & \to & Y' \\ (\gamma,\alpha) & \mapsto & \Phi_{\gamma,\alpha} \end{cases}$$

définie par : $\Phi_{\gamma,\alpha}(x,t) = \gamma(x) + \alpha t$ est un isomorphisme.

**b.** Calculer $\|\varphi(\gamma,\alpha)\|_{Y'}$ en fonction de $\|\gamma\|_{E'}$ et $|\alpha|$.

Dans la suite de cette partie, $C$ désignera un convexe fermé borné non vide inclus dans $E$, $f$ une forme linéaire continue sur $E$, $\varepsilon$ un réel strictement positif fixé et $x_0 \in C$ un élément vérifiant :

$$\forall x \in C,\ f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|$$

(l'existence de $x_0$ a été établie dans la partie I)).
On notera :

$$C_1 = \{(x,t) \in E\times\mathbb{R} \mid t \leqslant f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|\} \text{ et } C_2 = \{(x,t) \in C\times\mathbb{R} \mid t \geqslant f(x)\}.$$

**IV.2.** Montrer que $\operatorname{Int} C_1$ et $C_2$ sont deux convexes non vides disjoints de $Y$.

**IV.3.** **a.** Montrer en utilisant les résultats précédents qu'il existe $(h,\alpha) \in E'\times\mathbb{R}$ tel que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ soit non nulle et sépare $\operatorname{Int} C_1$ et $C_2$. La définition de la séparation de deux parties par une forme linéaire a été donnée dans la partie III.

**b.** Montrer que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ sépare aussi $C_1$ et $C_2$.

**IV.4.** Montrer que $\alpha \neq 0$. En déduire qu'il existe $g \in E'$ tel que la forme linéaire $\varphi(g,1)$ sépare $C_1$ et $C_2$.

**IV.5.** Montrer que $\|g\|_{E'} \leqslant \varepsilon$ et que $f + g$ atteint son minimum sur $C$ au point $x_0 \in C$.

**IV.6.** En déduire que l'ensemble

$$E'_0 = \{\theta \in E' \mid \exists y_0 \in C,\ \theta(y_0) = \sup_{y\in C} \theta(y)\}$$

des formes linéaires continues qui atteignent leur maximum sur $C$ est dense dans $E'$.

## Cinquième partie : Quelques exemples

Dans cette partie $C$ désigne la boule unité fermée de $E$ :

$$C = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

et $E'_0$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $E$ qui atteignent leur maximum sur $C$ :

$$E'_0 = \{f \in E' \mid \exists x_0 \in C,\ f(x_0) = \sup_{x\in C} f(x)\}.$$

**V.1.** On suppose que l'espace $E$ est de dimension finie. Que peut-on dire de $E'_0$ ?

**V.2.** Dans cette question $E$ désigne l'espace vectoriel des suites réelles $x = (x(k))_{k\geqslant 1}$ telles que $\lim_{k\to+\infty} x(k) = 0$ muni de la norme $\|x\|_E = \sup_{k\geqslant 1} |x(k)|$ et $F$ l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u(k))_{k\geqslant 1}$ telles que la série $\sum |u(k)|$ converge muni de la norme $\|u\|_F = \sum_{k=1}^{+\infty} |u(k)|$.

**a.** Pour $u \in F$, montrer que l'on définit une forme linéaire continue $\psi_u$ sur $E$ en posant, pour tout $x \in E$,

$$\psi_u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u(k)x(k)$$

et calculer $\|\psi_u\|_{E'}$.

**b.** Montrer que l'application

$$\psi \ : \begin{cases} F & \to & E' \\ u & \mapsto & \psi_u \end{cases}$$

est une isométrie linéaire surjective.

**c.** Quels sont les éléments $u \in F$ tels que $\psi_u \in E'_0$ ?