Centrale MP2 2018

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q 1. Par linéarité de la dérivation partielle, Δ est linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathrm{U})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathrm{U})$, or $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ est le noyau de cette application linéaire, ainsi $\boxed{\mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ est-il un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})}$

Q 2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Donc toute les dérivées partielles de f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(i_1, i_2, ..., i_k)$ un k-uplet d'éléments de $\{1, ..., n\}$. La théorème de Schwarz affirme puisque f est $\mathcal{C}^{k+2}$ que

$$\partial^2_{i,i}(\partial^k_{i_1,\dots i_k} f) = \partial^{k+2}_{i,i,i_1,\dots i_k} f = (\partial^k_{i_1,\dots i_k}(\partial^2_{i,i} f).$$

Donc par linéarité de l'opérateur $\partial^k_{i_1,\dots i_k}$,

$$\Delta(\partial^k_{i_1,\dots i_k} f) = \partial^k_{i_1,\dots i_k}(\Delta(f)) = 0_{\mathrm{U}\to\mathbb{R}}.$$

Donc $\underline{\partial^k_{i_1,\dots i_k} f \text{ appartient à } \mathcal{H}(\mathrm{U})}$.

Q 3. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et ainsi $\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ d'où

$$\Delta(f^2) = 2\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2.$$

Donc, par positivité des termes de la somme du second membre, $f^2 \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ si et seulement si

$$\partial_1 f = \partial_2 f = ... = \partial_n f = 0_{\mathrm{U}\to\mathbb{R}}.$$

Or U est connexe par arcs, donc $\underline{f^2 \text{ est harmonique si et seulement si } f \text{ est constante sur U.}}$

Q 4. $\underline{\text{la fonction } \varphi : (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{U} \longmapsto x_1 \in \mathbb{R} \text{ est clairement harmonique sur U sans y être constante.}}$
De plus $\Delta\left(\varphi^2\right) = 2 \neq 0$, donc φ^2 n'est pas harmonique sur U.
Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas en général une fonction harmonique.

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A -

Q 5. Remarque : Comme $(x, y) \longmapsto x($ ou $y)$ est $\mathcal{C}^2$ sur U (polynomiale) et que u et v le sont aussi, par composition et produit f est de classe $\mathcal{C}^2$.
De plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 = \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y). \tag{1}$$

L'hypothèse v et u sont non identiquement nulles, fournit des réels t et t' tels que $v(t) \neq 0$ et $u(t') \neq 0$.
En posant $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$, l'égalité (1) donne

$$\boxed{u'' + \lambda u = 0}$$

En posant $\lambda' = -\frac{u''(t')}{u(t')}$ elle dit :

$$0 = v'' - \lambda' v$$

En appliquant l'égalité (1) au couple (t, t') vient $\lambda = \lambda'$ et donc

$$\boxed{v'' - \lambda v = 0.}$$

Q 6. Observons pour commencer que la réciproque du résultat de Q5 et vraie : si u et v sont des éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (nuls ou pas) et λ un réel tels qu $u'' + \lambda u = 0$ et $v'' - \lambda v = 0$, alors, en posant $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x, y) \mapsto u(x)v(y)$, f est $\mathcal{C}^2$ (cf remarque dans Q5) et harmonique, en effet :

$$\Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(v) - \lambda u(x)v(v) = 0$$

Soit par ailleurs l'équation différentielle :

$$z'' + \mu z = 0, \tag{2}$$

où μ est un réel et S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation. Trois cas se présentent :

cas $\mu = 0$. $\mathrm{S} = \{\mathrm{Aid} + b, (a, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\}$;
cas $\mu > 0$. $\mathrm{S} = \left\{\cos\left(\sqrt{\mu}\,\cdot\right) + \mathrm{B}\sin\left(\sqrt{\mu}\,\cdot\right), (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$;
cas $\mu < 0$. $\mathrm{S} = \left\{\mathrm{ch}\left(\sqrt{-\mu}\,\cdot\right) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{-\mu}\,\cdot\right), (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Donc une fonction f à variables séparables sur $\mathbb{R}^2$ est harmonique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, (A, B) et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{array}{llll}
\text{si} & \lambda = 0 & \text{alors} & f : (x, y) \longmapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\,(\mathrm{A}'y + \mathrm{B}'), \\
\text{si} & \lambda > 0 & \text{alors} & f : (x, y) \longmapsto \left(\mathrm{A}\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right)\left(\mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{\lambda}\right)\right), \\
\text{si} & \lambda < 0 & \text{alors} & f : (x, y) \longmapsto \left(\mathrm{A}\,\mathrm{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right)\right)\left(\mathrm{A}'\cos\left(y\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}'\sin\left(y\sqrt{-\lambda}\right)\right).
\end{array}$$

II.B -

Q 7. l'application $(r, \theta) \longmapsto r$ (ou θ) est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, comme restrition d'application linéaire. Comme cos et sin le sont aussi notoirement,

$$p \ : \ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,;\ (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est de classe $\mathcal{C}^2$, par compositions et produits, et á valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Donc par composition avec f de classe $\mathcal{C}^2$ on a : $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}}$

Q 8. La formule de la chaîne donne :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

Q 9. On continue à appliquer la formule de la chaîne et on utilise le théorème de Schwarz pour f qui est de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \\ r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r^2\sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{gathered}}$$

Q 10. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2 \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0,}$$

le sens indirect provient de ce que

$$p\ :\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,;\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

réalise une sujection sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Q 11. **Analyse :** On considère f une fonction radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ harmonique. On note g comme précédemment et on pose $h\ :\ \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto\ g(r,0)$. Par définition, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $h(r) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Notons que $(r,\theta) \mapsto r$ étant polynomiale, donc $\mathcal{C}^2$, h hérite du caractère $\mathcal{C}^2$ de g et par Q 10, h' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$r\frac{dz}{\mathrm{d}r} + z = 0.$$

Donc h est de la forme $h = \mathrm{A}\ln + \mathrm{B}$. Finalement f est de la forme :

$$f_{\mathrm{C,B}}\ :\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,;\ (x,y) \mapsto \mathrm{C}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{B}.$$

où C et B sont des réels.

Syntèse : Pour tout élément (C,B) de $\mathbb{R}^2$, $f_{\mathrm{C,B}}$ est harmonique radiale, puisque de classe $\mathcal{C}^2$, (composée du logarithme et d'une application polynomiale) et qu'elle vérifie trivialement la condition de la question 10 (avec $g = \frac{\mathrm{C}}{2}\ln + \mathrm{B}$).

$$\boxed{\text{les fonctions harmoniques radiales de } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ sont les fonctions : } (x,y) \longmapsto \mathrm{C}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{C},\mathrm{B} \text{ des réels.}}$$

Q 12. Soient C et D des réels, D'après la question précédente, $f_{C,B}$ répond á la question si et seulement si : $\begin{cases} 2C\ln(r_1) + B = a \\ 2C\ln(r_2) + B = b \end{cases}$

soit, après calcul, si et seulement si $C = \dfrac{b-a}{2\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right)}$ et $B = \dfrac{\ln(r_2)a - \ln(r_1)b}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$ conviennent

Donc l'application

$$\boxed{f \ : \ \mathbb{R}^2(x,y) \setminus \{(0,0)\} \longmapsto \frac{(b-a)\ln(x^2+y^2) + 2\ln(r_2)a - 2\ln(r_1)b}{2\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right)}}$$

vérifie $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}), \\ \Delta f = 0, \\ f(x,y) = a \ \text{ si } \ \|(x,y)\| = r_1, \\ f(x,y) = b \ \text{ si } \ \|(x,y)\| = r_2. \end{cases}$

II.C - Coquille du texte, il fallait lire g et non f.

Q 13. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit (x_0, y_0) tel que $f(x_0, y_0) \neq 0$. Alors en posant $r_0 = \|(x_0 + y_0)\|$, $u(r_0) \neq 0$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ On a $u(r_0)v(\theta + 2\pi) = f(r\cos(\theta + 2\pi), r\sin(\theta + 2\pi)) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r_0)v(\theta)$ d'où $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$ Donc $\underline{v \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

Q 14. On suppose que f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = u(r)v''(\theta), \ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = u'(r)v(\theta), \ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = u''(r)v(\theta)$$

et donc Q10 donne :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \ r^2u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0. \tag{3}$$

Comme f est non identiquement nulle, on dispose de $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(\theta_0) \neq 0$. Posons $\lambda = \frac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors par égalité (3),

$\boxed{u \text{ est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2z'' + rz' - \lambda z = 0}$

Posons $\lambda' = \dfrac{r_0^2u''(r_0) + r_0u'(r_0)}{u(r_0)}$, on a alors par (3),

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ v''(\theta) + \lambda' v(\theta) = 0$$

En appliquant une dernière fois (3) à (r_0, θ_0), il vient $\dfrac{r_0^2u''(r_0) + r_0u'(r_0)}{u(r_0)} = \lambda$.

Ainsi $\boxed{v \text{ est-elle solution de l'équation différentielle (II.2) : } z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0}$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

$\boxed{\text{Les solutions } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes}}$

Q 16. En faisant comme en Q11. :

$\boxed{\text{Les solutions de (II.1) sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ sont les fonctions de la forme } r \longmapsto A\ln(r) + B}$

Q 17. D'après Q15. dans le cas où $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales.

Il est clair que toute fonction radiale sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est à variables polaires séparables. Alors d'après Q11.,

$\boxed{\text{les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions : } (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2) + B \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. **Cas 1 :** $\lambda < 0$. L'ensemble des solutions **non nulles** de (II.2) est $\{\mathrm{A}\exp(\sqrt{-\lambda}\,\cdot) + \mathrm{B}\exp(\sqrt{-\lambda}\,\cdot), (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$. Toute solution non nulle tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$, selon que dans son expression A soit nul ou non, aucune ne saurait donc être périodique.

Cas 2 : $\lambda > 0$. L'ensemble des solutions **non nulles** de (II.2) est $\{\mathrm{A}\sin(\sqrt{\lambda}\,\cdot + \phi), \mathrm{A} \in \mathbb{R}^*, \phi \in \mathbb{R}\}$. Toute solution non nulle admet donc $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z}$ comme groupe de périodes, elle admet donc 2π comme période si et seulement si $\sqrt{\lambda}$ est un entier.

Conclusion : L'équation (II.2) admet une solution non nulle 2π périodique si et seulement si $\underline{\lambda \in (\mathbb{N}^*)^2}$, notons que si tel est le cas, toutes les solutions de (II.2) sont 2π périodique.

Q 19. Soit $w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Posons $\mathrm{W} = w \circ \exp$. Ainsi W vérifie-t-elle $w = \mathrm{W} \circ \ln$ et est-t-elle $\mathcal{C}^2$, de plus

$$w' = \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}\mathrm{W}' \circ \ln\,;\ w'' = \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}^2}(\mathrm{W}'' \circ \ln - \mathrm{W}' \circ \ln).$$

Ainsi, puisque $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, w est-elle solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (II.1) si et seulement si W est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation classique :

$$\mathrm{Z}'' - \lambda \mathrm{Z} = 0.$$

Alors en notant $\mathrm{S}_{\mathrm{II.1.}}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (II.1.), on a donc :

— si $\lambda > 0$ alors $\mathrm{S}_{\mathrm{II.1.}} = \{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\ r \mapsto \mathrm{A}r^{\sqrt{\lambda}} + \mathrm{B}r^{-\sqrt{\lambda}}, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\}$;
— si $\lambda < 0$, alors $\mathrm{S}_{\mathrm{II.1.}} = \{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\ r \mapsto \mathrm{A}\cos\left(\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(-\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right), (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\}$.

Q 20. Question peu claire. De quelles solutions parle l'énoncé ? Le 0 laisse penser qu'il s'agit de celles de (II.2), pour les solutions de l'équation de Laplace il y aurait $(0,0)$ et jamais l'équation de Laplace n'a été mentionnée en tant que telle, on parle seulement dans le texte de « fonctions harmoniques ».

Premier cas : $\lambda > 0$. Définissons deux suites x et y par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \exp\left(\frac{-k\pi}{\sqrt{-\lambda}}\right) \; ; \; y_k = \exp\left(\frac{-k\pi + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{-\lambda}}\right).$$

Ces deux suites tendent vers 0 et pour tout couple (A, B) de réels distincts de $(0,0)$, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\Big(\mathrm{A}\cos(\sqrt{-\lambda}\ln(x_k)) + \mathrm{B}\sin(\sqrt{-\lambda}\ln(x_k))\Big)_{k\in\mathbb{N}} = (\mathrm{A}(-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}\,,$$

$$\Big(\mathrm{A}\cos(\sqrt{-\lambda}\ln(y_k)) + \mathrm{B}\sin(\sqrt{-\lambda}\ln(y_k))\Big)_{k\in\mathbb{N}} = (\mathrm{B}(-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Donc puisque A et B ne sont pas tous deux nuls, l'une au moins de ces deux suites n'a pas de limite donc l'application

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\; r \mapsto \mathrm{A}\cos(\sqrt{-\lambda}r) + \sin(-\sqrt{-\lambda}r)$$

n'a pas de limite en 0 et donc n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Aucune solution non nulle de (II.1) n'est prolongeable par continuité en 0

Second cas : $\lambda > 0$. L'application $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\; r \mapsto r^{\sqrt{\lambda}}$ (resp.) $r^{\sqrt{-\lambda}}$ admet 0 (resp. $+\infty$) comme limite en 0, Donc pour tout couple d'éléments (A, B) de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\; r \mapsto \mathrm{A}r^{\sqrt{\lambda}} + \mathrm{B}r^{\sqrt{-\lambda}}$$

admet une limite en 0 si et seulement si $\mathrm{B} = 0$,

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (II.1) prolongeables par continuité à $\mathbb{R}_+$ est la droite

$$\mathrm{vect}((\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*})^{\sqrt{\lambda}}).$$

Si l'on comprend la question autrement on peut écrire :

> les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en $(0,0)$ sont les fonctions f vérifiant
>
> $$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\;\; f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k \left(\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)\right)$$
>
> avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

Fin du corrigé, ce qui suit n'est pas une correction.

III Principe du maximum faible

III.A -

Déjá intégralement traitée en exercice.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

IV.A -

Q 26. Pour les 5/2

Les 5/2 pouvaient dériver f suivant les vecteurs de la base canonique en utilisant le théorème de dérivation de la somme d'une série. Puis montrer la continuité des dérivées partielles sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ grâce à de la convergence normale locale (le théorème au programme s'applique pour une variable élément de $\mathbb{R}^2$).

Pour tous, en particulier pour ceux qui ont traité le sujet sur les fonctions holomorphes.

Une remarque préalable est que pour tout $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathbb{R})$ la série de terme général $a_n(x+iy)^n$ converge absolument. Les 5/2 le savent, les 3/2 le déduiront instantannément de la majoration

$$|a_n(x+iy)^n| \leq \mathrm{M}\left(\frac{|x+iy|}{r}\right)^n,$$

où r est un rél tel que $|x+iy| < r < \mathrm{R}$ et M est un majorant de la suite (de limite nulle) $(|a_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Seconde remarque : la série entière converge normalement sur tout disque $\bar{\mathrm{D}}(0,\rho)$ inclus dans $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, ce grâce á la première remarque, et donc sa somme f est continue.

Soient (x_0,y_0) et (h,k) éléments de $\mathbb{R}^2$. On note $z_0 = (x_0+iy_0)$, $w = h+ik$.

La fonction g de la variable réelle t donnée par $g(t) = f((x_0,y_0)+t(h,k))$ est classiquement définie au voisinage de 0 et

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0+tw)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} t^k w^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k w^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}$$

pour peu que l'on puisse permuter les sommes. Ce dernier point provient de la sommabilité de la famille $\left(t^k w^k a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$, acquise grâce à la convergense de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|z_0|+|t||w|)^n$, dès que $|z_0|+|t||w| < \mathrm{R}$ cf. première, remarque.

Donc en utilisant la continuité de la somme d'une série entière (de la variable t ici),

$$g(t) = g(0) + tw\sum_{n=0}^{+\infty} na_n z_0^{n-1} + o(t) \ (t \to 0)$$

D'où l'existence de $\mathrm{D}_{h,k}f(x_0,y_0)$ qui vaut $w\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n z_0^{n-1}$. La remarque 2 assure la continuité de $\mathrm{D}_{h,k}f$ qui est développable en série entière. Donc f est $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles, et même directionnelles sont développables en série entière.

ce dernier point assure par récurrence immédiate que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Q 27. . En appliquant les calculs de la question précédentes :

$$\partial_2 f = (0+i)\partial_1 f,$$

puis en réapliquant à $\partial_2 f$, à la place de f,

$$\partial_{2,2}^2 f = i\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0) = i^2\partial_1\partial_1 f = -\partial_{1,1}^2 f.$$

Donc en passant aux parties réelle et imaginaire de f, on a : $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont harmoniques sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

IV.B -

Q 28. On suppose f ne s'annule pas sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. f se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ d'après la propriété admise ou mieux Q 27

or $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial y} = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f^2}$ et $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x} = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f^2}$

ainsi $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial y} = \mathrm{i}\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x}$ (2)

En utilisant la réciproque de la propriété admise : $\boxed{1/f \text{ se développe en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

Q 29. Par la caractèrisation admise, (ou par produit de Cauchy), f^2 est dévelopable en sèrie entière donc uv, moitiè de sa partie imaginaire est, par Q 27, $\boxed{\text{est harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

IV.C -

Q 30. Comme g est harmonique sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ alors g y est de classe $\mathcal{C}^2$.
Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.
Soit $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.
On a $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) - \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)$
Le théorème de Schwarz (g est de classe $\mathcal{C}^2$) et l'harmonicité de g donnent :

$$\mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Donc $\boxed{h \text{ se développe en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

Q 31. On suppose que g appartient à $\mathcal{H}(\mathrm{D}(0,\mathrm{R}))$.
On définit la fonction h comme en Q30. et ainsi h se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$
On peut donc trouver une suite complexe (b_n) telle que $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ h(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x+\mathrm{i}y)^n$

Ainsi la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ a un rayon $\geqslant \mathrm{R}$ donc il en est de même pour la série entière $g(0,0) + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}$.

Ainsi la fonction $\mathrm{H} : (x,y) \longmapsto g(0,0) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1}(x+\mathrm{i}y)^{n+1}$ est définie sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc d'après Q26., H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x+\mathrm{i}y)^n = h(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^n = \mathrm{i}h(x,y)$$

Ainsi $\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}(\mathrm{H})}{\partial x} = \mathrm{Re}(h) = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}(\mathrm{H})}{\partial y} = -\,\mathrm{Im}(h) = \dfrac{\partial g}{\partial y}$

donc la fonctions $g - \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ de différentielle nulle ;

or $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ est connexe par arcs donc $g - \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ est y est constante or $g - \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ est nulle en $(0,0)$

donc $g = \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et H y est développable en série entière.

IV.D -

Q 32. Comme f est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, ceci nous fournit une suite complexe (a_n) telle que

$\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+\mathrm{i}y)^n.$

Soit $r \in [0,\mathrm{R}[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : t \longmapsto a_n(r\cos(t) + \mathrm{i}r\sin(t))^n = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ La série $\sum u_n$ converge normalement donc *uniformément*, sur le *segment* $[0,2\pi]$ en effet :

— pour tout $t \in [0,2\pi]$, $|u_n(t)| \leq a_n r^n$;

— la série $\sum a_n r^n$ converge (cf. remarque 1 de Q 26).

les u_n ètant continues

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{2\pi} \exp(int)\mathrm{d}t = 2\pi a_0.$$

Finalement $\boxed{f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t}$

Q 33. $\boxed{\text{Soit } g \text{ une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{ et } r \in [0,\mathrm{R}[\text{. On a } g(0,0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t}$

on peut écrire $g = \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ où H est développable en série entière

alors d'après la question précédente, on a $\mathrm{H}(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{H}(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$

On peut alors conclure en prenant la partie réelle de cette égalité.

Q 34. Soit $r \in [0,\mathrm{R}[$, on a d'après Q32, n a

$$|f(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\cos(s), r\sin(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,\mathrm{d}s.$$

donc $\boxed{|f(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|}$

Notons que l'existence de $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|$ est acquise par continuitè et 2π-pèriodicitè.

Q 35. On utilise Q33. et on fait comme en Q34. pour obtenir :

$\boxed{\text{Soit } g \text{ une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{ et } r \in [0,\mathrm{R}[\text{. On a } |g(0,0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(r\cos(t), r\sin(t))|}$

Q 36. On suppose que $|f|$ admet un maximum en 0.

Le cas $f(0) = 0$ est immédiat : f est nulle. sinon On peut, quitte à multiplier f par $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, où θ est un argument de $f(0)$, supposer que $f(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Soit alors $r \in]0,\mathrm{R}]$. On a :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\cos t, r\sin t)|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0) = f(0).$$

Donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\cos t, r\sin t)| - f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t = 0$. En passant à la partie rèelle, *a fortiori*,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\cos t, r\sin t)| - u(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t = 0$$

Par positivité et continuité de l'intégrande $|f|$ et u prennent mêmes valeurs sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r, donc r étant quelconque, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Mais alors $0 = f(0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\cos t, r\sin t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0) - |f(r\cos t, r\sin t)|\mathrm{d}t$. La continuité et la positivité de l'intégrande dit que f prend sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r la valeur $f(0)$.
Donc, r étant quelconque, f est constante sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

Q 37. Supposons que P soit un polynôme complexe non constant sans racine dans $\mathbb{C}$.
Comme $\mathrm{P}(z)$ est équivalent à son terme de plus haut degré, lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, la fonction rationnelle $\frac{1}{\mathrm{P}}$, notée Q est définie sur $\mathbb{C}$, et $\mathrm{Q}(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ On dispose donc de R tel que pour tout complexe z, si $|z| \geq \mathrm{R}$ alors $|\mathrm{Q}(z)| < \mathrm{Q}(0)$. Ceci porte contradiction à la question 34, pour $f\ :\ (x,y) \mapsto \mathrm{Q}(x+iy)$. Le caractère développable en série de f est une banale conséquence de Q. 28.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Q 38. Soit $|z| < 1$. On a $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z} = -1 + \dfrac{2}{1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}$ or $\left|z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right| < 1$,

donc par somme géométrique : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z} = -1 + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathrm{e}^{-k\mathrm{i}t}$.

D'où le développement en série entière pour $|z| < 1$, $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}t} z^k$

Soit $|z|<1$, je pose $\mathrm{F}(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t$

ce qui est possible car $t\longmapsto h(t)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$ est continue sur $[0,2\pi]$

Posons $\mathrm{M}=\|h\|_\infty$ (La fonction h est continue sur le segmnet $[0,\pi]$).

Posons $u_0=h$ et pour tout entier $n\geqslant 1$, $u_n\ :\ t\longmapsto 2\mathrm{e}^{-nit}z^n h(t)$.

(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0,2\pi]$

(ii) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\forall t\in[0,2\pi],\ |u_n(t)|\leqslant 2\mathrm{M}|z|^n$.

or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2\mathrm{M}|z|^n$ converge,

donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement donc *uniformément* sur le *segment* $[0,2\pi]$

La somme de cette série de fonctions sur $[0,2\pi]$ est $t\longmapsto h(t)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$.

Avec (i) et (ii), par théorème de cours, on a

$$2\pi\mathrm{F}(z)=\int_0^{2\pi} h(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}u_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}h(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-nit}h(t)\mathrm{d}t\right)z^n$$

Ainsi F est la somme d'une série entière de rayon $\geqslant 1$, donc la fonction $(x,y)\longmapsto \mathrm{F}(x+\mathrm{i}y)$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,1)$.

Or $g=\mathrm{Re}(\mathrm{F})$ donc d'après Q27, $\boxed{\text{la fonction } (x,y)\mapsto g(x+\mathrm{i}y) \text{ est une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,1)}$

Q 39. Soit $|z|<1$.

On applique le calcul précédent avec la fonction h constante égale à 1 :

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-nit}\mathrm{d}t\right)z^n=2\pi.$$

En en prenant la partie réelle : $\boxed{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t=1}$

Q 40. Soit $|z|<1$.

La fonction $t\longmapsto h(t)\mathcal{P}(t,z)$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$

La fonction $\psi:\alpha\mapsto\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi}h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse, de dérivée :

$$\psi':\alpha\longmapsto h(\alpha+2\pi)\mathcal{P}(\alpha+2\pi,z)-h(\alpha)\mathcal{P}(\alpha,z)=0$$

donc ψ est constante sur $\mathbb{R}$; d'où $\psi(0)=\psi(\varphi)$ ainsi $\boxed{g(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\varphi^{\varphi+2\pi}h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t}$

Q 41. Soit $r \in [0,1[$ et t et $\theta \in \mathbb{R}$. En notant $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ on a bien $|z| < 1$.
On a $\mathcal{P}(t, r\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + r\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{-i\theta})\right)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{i\theta})\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}$.
Or $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{-i\theta}) = 1 - r^2 + r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1 - r^2 + 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$,
donc $\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{-i\theta})\right) = 1 - r^2$
Par ailleurs, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - r\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = 1 + r^2 - r\left(\exp(\mathrm{i}(\theta - t)) + \exp(\mathrm{i}(t - \theta))\right) = 1 + r^2 - 2r\cos(t - \theta)$.

Finalement : $\boxed{\mathcal{P}(t, r\mathrm{e}^{i\theta}) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \theta) + r^2}}$

Q 42. Soit $\delta \in [0, \pi]$. Comme pour tout réel t, $\mathcal{P}(t - \phi, z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) = \mathcal{P}(t, z)$, on se ramène à devoir montrer :

$$\int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathrm{P}(t, z) \underset{z \to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. le trinôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos(\alpha) + 1$ a pour minimum $1 - \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$ [1].
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ qui converge vers 1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, θ_n l'argument de z_n élément de $] - \pi, 2\pi]$ et r_n son module. Pour n supérieur à un certain entier N_0, $\theta_n \in] - \delta, \delta[$, en effet

$$2\sin^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = |1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}| \leq |1 - z_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Un dessin merci !) Donc pour tout entier $n \geq n_0$, et tout $t \in [\delta, \pi]$

$$\sin^2(|\theta_n| - t) \geq \sin^2(|\theta_n| - \delta).$$

Alors

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z_n)\mathrm{d}t \leq (1 - r_n^2)\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{\sin^2(t - \theta_n)}\mathrm{d}t = \\
(1 - r_n^2)\int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(t - \theta_n)}\mathrm{d}t + (1 - r_n^2)\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{\sin^2(\tau - \theta_n)}\mathrm{d}\tau = \\
2(1 - r_n^2)\int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\delta - |\theta_n|)}\mathrm{d}t \leq 2\pi \frac{1}{\sin^2(\delta - |\theta_n|)}(1 - r_n^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Donc par encadrement $\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z_n)\mathrm{d}t$ rend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant quelconque, $\boxed{\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z)\,\mathrm{d}t \underset{z \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\longrightarrow} 0}$

1. C'est l'étude du trinôme qui le dit, mais l'interprétation géométrique de la valeur en r du trinôme, comme le carré de la distance du point d'affixe r à celui d'affixe $\mathrm{e}^{i\alpha}$ le confirme.