Corrigé du DS n^o5
sujet 1

Exercice 1

1. *Donnons pour f deux méthodes*
   Les théorèmes usuels assurent l'existence pour f de deux dérivées partielles en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2-y^2)\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\cos(x^2-y^2).$$
   les applications
   $$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto x \text{ ou } y$$
   sont continues car linéaires [1], l'application cosinus et continue. Donc par combinaison linéaire, composition, produit... $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc *a fortiori* différentiable.
   Ou bien :
   L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale donc différentiable (et même $\mathcal{C}^\infty$), l'application sinus est dérivable, donc différentiable et donc par composition de ces deux applications f est différentiable.
   L'application g est linéaire, donc, d'après le cours différentiable et en tout point sa différentielle vaut g.

   De plus pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   $$\mathrm{J}_f(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{array}\right),$$
   $$\mathrm{J}_g(x,y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) On a facilement
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f \circ g(x,y) = \sin((x+y)^2 - (x-y)^2) = \sin(4xy)$$
   On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\mathrm{d}(f\circ g)(x,y)\ :\ (u,v) \mapsto \frac{\partial f\circ g}{\partial x}(x,y)u + \frac{\partial f\circ g}{\partial y}(x,y)v = 4(yu+xv)\cos(4xy)$$
   (b) Mais aussi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\begin{aligned} \mathrm{J}_{f\circ g}(x,y) &= \mathrm{J}_f(g(x,y)) \times \mathrm{J}_g(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & 2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x\cos(4xy) & 4y\cos(4xy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   On obtient l'image de (u, v) en multipliant la jacobienne par la matrice colonne associée à (u, v). On obtient bien sûr le même résultat.

1. Ou polynomiales.

Exercice 2

1. • Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, La série de Riemann $\sum\limits_{p\geq 1}(\frac{1}{p^2q^2})$ converge ($2 > 1$!) et : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(\frac{1}{p^2q^2}) = \frac{\pi^2}{6q^2}$;

   • La série de Riemann $\sum\limits_{q\geq 1}\frac{\pi^2}{6q^2}$ converge de somme $\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$.

   Donc la famille $(\frac{1}{p^2q^2})_{(p,q)\in A}$ étant *positive*, elle est par le théorème de Fubini-Tonelli, sommable de somme :

$$\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{p^2q^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

2. Pour tout entier $k \geq 1$ on pose $I_k = \{(p,q) \in A | p+q = k\}$ Ainsi $\{I_k\,, k \in \mathbb{N}^*\}$ est-elle une partition de A.

   • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la somme *finie* $\sum\limits_{(p,q)\in I_k}\frac{1}{(p+q)^2}$ vaut $(k-1)\times\frac{1}{k^2}$;

   • La série positive $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{k-1}{k^2}$ diverge puisque de terme général équivalent à celui de la série harmonique.

   Le théorème de sommation par paquets pour les familles *positives* vient dire que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est non sommable.
   Mais pour tout $(p,q) \in A$,

$$\frac{1}{p^2+q^2} \geq \frac{1}{p^2+q^2+2pq} = \frac{1}{(p+q)^2},$$

   donc par comparaison de familles *positives*, la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est non sommable.

Problème : séries trigonométriques

Partie 1 : exemples

3. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

   Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit un entier $p \geq 2$, $\left|\frac{e^{ix}}{p}\right| < 1$ (car $p \geq 2$). donc la série géométrique $\sum\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ converge de somme

$$\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$

   En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$

   Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}.$$

4. Soit un réel x.
$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}.$$
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!},$$
par continuité de l'application partie réelle.
5. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n = a_n \cos(n\,\cdot)$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum u_n$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
6. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

7. On a pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$:
$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

8. Pour tout réel x,
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$
Comme $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est de module 1, en notant ϕ un de ses argument on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$$
Donc $\|a\cos + b\sin\|_\infty = \sqrt{a^2+b^2}$.
9. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n\cos(n\cdot) + b_n\sin(n\cdot)$. Par définition de la convergence normale, $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b^2} \geq \left\{\begin{array}{l} |a_n| \\ |b_n| \end{array}\right.$$
Par comparaison des séries positives, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Autres propriétés

10. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la série étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserve la 2π-périodicité (soit x un réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x+2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite f). Ici, f est donc 2π-périodique et
$$f \in C_{2\pi}$$

11. Par changement de variable « $y = \frac{\pi}{2} - x$ » et 2π-périodicité :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(ny)\ \mathrm{d}y$$

Donc
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) + \sin^2(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x = \pi.$$

De même, soient k et n des entiers, $\sin(k\,\cdot)\cos(n\,\cdot) = \frac{1}{2}(\sin(k\ \cdot + n\,\cdot) + \sin(k\ \cdot - n\,\cdot))$. Or $\sin(p\,\cdot)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ (évident si $p = 0$, par primitivation en $-\frac{\cos(p\,\cdot)}{p}$ sinon). On en déduit que
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx))\ \mathrm{d}x$$

Notons toujours, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) = a_k \cos(k\cdot) + b_k \sin(k\cdot)$. On a

$$\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc l'intégrale d'une série de fonctions normalement convergente donc UNIFORMEMENT convergente sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$, on peut intervertir somme et intégrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\ \mathrm{d}x \right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut

$$\begin{cases} a_n\pi, \text{ si } n \neq 0 \\ 2\pi a_0, \text{ sinon .} \end{cases}$$

Ainsi, si $n \neq 0$, alors $a_n = \alpha_n(f)$ et $a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$.

13. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \text{ et } \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

14. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g - f) = \beta_n(g - f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.

15. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et cette fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,
$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0.$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x.$$