DM n$^{\text{o}}$9

Préparation aux oraux

A traiter :

- **les exercices avec un astérisque $\star$ pour M. Brossard, T. Donard , N. Dréau, S. Massé, T.Morvan ; A. Paradis, L. Vom Kothen K. Le Caillec, L. Soudant, Grégoire Legay, Elouen Guidollet. Quenton Moreau ;**
- **les exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour T. Donard , S. Massé, T. Morvan., A Paradis, M. Brossard, G. Legay ;**
- **les exercices sans astérisque pour le reste de la classe.**

Exercice 1 — Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des endomorphismes d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nul n. On suppose qu'ils sont tous *diagonalisable* et qu'ils commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ telle que les matrices de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dans $\mathcal{B}$ de soient diagonales. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont *codiagonalisables*.

Exercice 2$\star$ — Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$ espace vectoriel de dimension finie non nul n. On suppose qu'ils commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ telle que les matrices de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dans $\mathcal{B}$ de soient triangulaires supérieures. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont *cotrigonalisables*.

Exercice 3 — Soit Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable. Nous noterons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ses p valeurs propres deux à deux distinctes et de multiplicité respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

Exercice 4 — Déterminer les solutions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles du système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 4x + 6y = 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x + 4y = 0. \end{array}\right.$$

Exercice 5 — Soient A et A' et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et M la matrice élément de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A' \end{pmatrix}$. Montrer que si M est diagonalisable alors A et A' le sont.

Exercice 6 — Déterminer les éléments A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que la matrice B suivante soit diagonalisable. $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Exercices 7 — ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLES — Soit u un endomorphisme de $\mathbf{E}$, espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur un corps $\mathbf{K}$. On dit que u est semi-simple si tout sous-espace de $\mathbf{E}$ stable par u admet un supplémentaire stable par u.

1. $\star$ Dans cette question on suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que u est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable.
2. $\star\star$ Le corps $\mathbf{K}$ est de nouveau quelconque. On note μ le polynôme minimal de u. Montrer que u est semi-simple si et seulement si il y a dans la décomposition de μ en produit d'irréductibles que des facteurs ayant une puissance égale à 1.

Exercice 8 —

1. Donner une condition nécessaire portant sur la parité de l'élément n de $\mathbf{N}^*$, pour qu'il existe une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie :
$$M^2 + 2M + 5I_n = 0_n.$$
2. Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 9 $\star\star$ — Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie n, non nulle. Soit $Q \in \mathbf{C}[x]$. On suppose que $Q(u)$ est diagonalisable et que $Q'(u)$ est inversible. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 10 Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. On suppose que pour tout entier m strictement positif, $\mathrm{Tr}(M^m) = 0$. Montrer que M est nilpotente.
2. On suppose que $\mathrm{Tr}(M^m) \underset{m\to+\infty}{\to} 0$. Montrer que les valeurs propres de M sont toutes de module inférieur strictement à 1.

Exercice 11 —

1. A quelle condition une matrice de permutation d'ordre $n \geq 2$ est-elle diagonalisable dans $\mathbf{R}$.
2. $\star$ Soient un entier $n \geq 2$ et σ un élément de S_n groupe symétrique d'ordre n. Déterminer les polynômes minimal et caractéristique de P_σ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 12

1. Soit M un élément de $M_n(\mathbf{R})$. On note μ sont polynôme minimal et $\mu_{\mathbf{C}}$ sont polynôme minimal lorsqu'on considère M comme comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\mu = \mu_{\mathbf{C}}$.
2. $\star\star$ Soit M un élément de $M_n(\mathbf{Q})$. On note $\mu_{\mathbf{Q}}$ son polynôme minimal et $\mu_{\mathbf{R}}$ son polynôme minimal lorsqu'on considère M comme comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mu_{\mathbf{Q}} = \mu_{\mathbf{R}}$.

Exercice 13$\star$

1. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est un fermé. Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si M est nilpotent.
2. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 14 $\star\star$ — THÉORÈME DE BIBERBACH RÉEL (DIEUDONNÉ) —

Soit f la somme d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$, de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 de la variable complexe z, On suppose que tous les coefficients de la série entière sont réels, que $a_1 = 1$ et que la restriction de f à $\mathrm{D_o}(0,1)$ est injective.

1. Soit z_0 un élément de $\mathrm{D}_{\mathrm{o}}(0,1)$, $f(z_0)$ est réel si et seulement si z_0 est réel. En déduire que si $\mathrm{Im}(z_0) \geq 0$ alors $\mathrm{Im}(f(z_0)) \geq 0$.
2. Ccalculer pour tout élément de $]0,1[$ et tout entier $n \geq 0$,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \sin(n\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq n$.
   Indication : on poura montrer que $|\sin(n\theta| \leq n|\sin(\theta)|$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout réel θ.
4. La majoration est-elle optimale ?