Centrale M2 2021 - Corrigé - Relu

I. Généralités sur les formules de quadrature

I.A - Exemples élémentaires

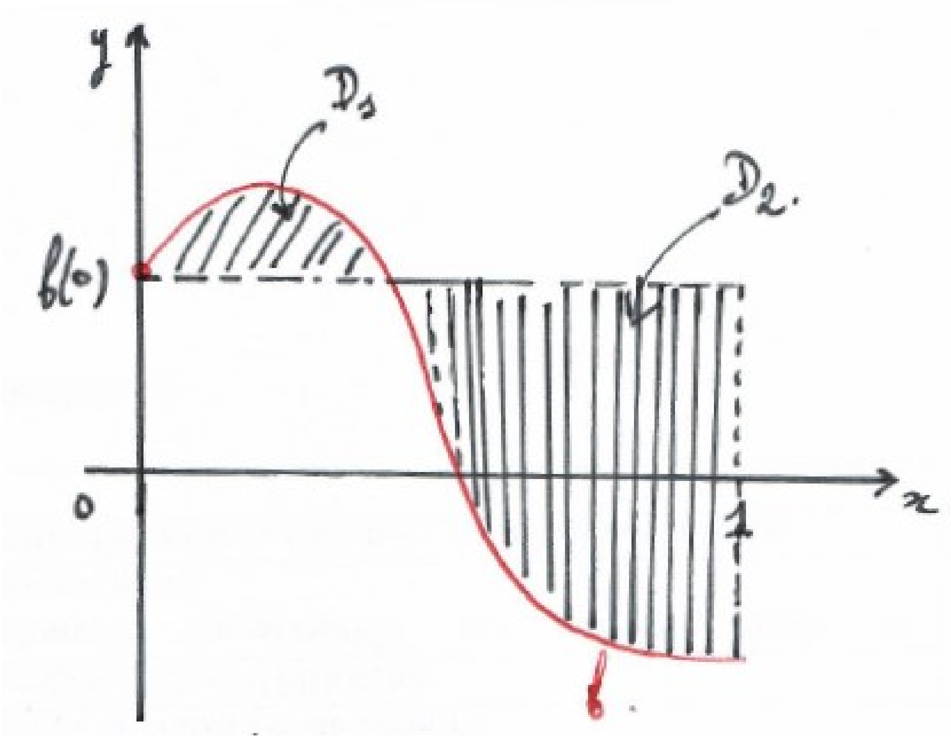
1. • La formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est :
— exacte sur $\mathbb{R}_0[X]$, car pour tout $P \in \mathbb{R}_0[X]$, on a $P(t) = P(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 P(0)dt = P(0) = I_0(P);$$

— inexacte sur $\mathbb{R}_1[X]$ car, pour $P = X \in \mathbb{R}_1[X]$, on a

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \neq 0 = P(0) = I_0(P).$$

La formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est donc d'ordre 0.
• Dans la représentation graphique suivante, on a $I_0(f) = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2)$.



2. • La formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$ est :
— exacte sur $\mathbb{R}_0[X]$, car pour tout $P \in \mathbb{R}_0[X]$, on a $P(t) = P(1/2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 P(1/2)dt = P(1/2) = I_0(P);$$

— exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$ car, pour $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$, on a

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 at + bdt = \left[\frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^1 = \frac{a}{2} + b = P(1/2) = I_0(P);$$

— inexacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ car, pour $P = X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = P(1/2) = I_0(P).$$

La formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$ est donc d'ordre 1.
Remarque. *Comme l'intégrale et I_0 sont linéaires, une formule de quadrature est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est exacte pour les polynômes $1, X, \ldots, X^n$.*
En utilisant cette idée, on aurait pu rédiger ces deux premières questions autrement, en ne testant que les polynômes $1, X$ et X^2.

3. $I_2(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si elle est exacte pour les polynômes 1, X et X^2, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 1dt = I_0(1) \\ \displaystyle\int_0^1 tdt = I_0(X) \\ \displaystyle\int_0^1 t^2dt = I_0(X^2) \end{cases} \quad \text{soit si et seulement si} \quad \begin{cases} 1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1/2 = 0 + \dfrac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1/3 = 0 + \dfrac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Soit, après calcul, si et seulement si

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_0 = 1/6 \\ \lambda_1 = 2/3 \\ \lambda_2 = 1/6 \end{cases}}$$

Pour $P = X^3$, on a

$$I_2(P) = 0 + (1/2)^3(2/3) + 1(1/6) = 1/4 = \int_0^1 t^3dt = \int_0^1 P(t)dt,$$

donc cette formule de quadrature est encore valable sur $\mathbb{R}_3[X]$.
Pour $P = X^4$, on a

$$I_2(P) = 0 + (1/2)^4(2/3) + 1(1/6) = 5/24 \neq 1/5 = \int_0^1 t^4dt = \int_0^1 P(t)dt,$$

donc cette formule de quadrature n'est pas valable sur $\mathbb{R}_4[X]$.
La formule de quadrature I_2 est donc d'ordre 3.

I.B - Construction de formules d'ordre quelconque

4. • L'application « valeur en un point » étant linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$, φ est linéaire.
• On a que $\text{Ker}(\varphi)$ est réduite à $\{0\}$, en effet tout élément du noyau admet $n+1$ racines $(x_0,...x_n)$ alors que son degré est au plus n. Donc φ est injective.
• Mais comme $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont de même dimension $n+1$, d'après le théorème du rang, φ est un isomorphisme.

5. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Comme Φ est un ISOmorphisme, il existe un et un seul élément de $\mathbb{R}[X]_n$ prenant en x_i la valeur 1 et la valeur 0 en x_j, pour tout élément j de $\{1,...,n\}$ distinct de i, c'est $\underline{\Phi^{-1}((\delta_{i,j})_{j=0..n}}$.

6. $((\delta_{i,j})_{j=0..n})_{i=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ (c'est la base canonique), donc $(L_i)_{i=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ comme image d'une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme (φ^{-1}).

7. Comme $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)w(x)dx$ est linéaire (et bien définie car pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I) et $I_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est aussi linéaire, donc e est linéaire, donc I_n est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est exacte sur la BASE $(L_0, \ldots, L_n)$.
Or, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$I_n(L_j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_j(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{k,j} = \lambda_j,$$

donc I_n est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x)w(x)dx.$$

8. • L_0 a pour racines 1/2 et 1, et est de degré auplus 2. donc $L_0 = a(X-1/2)(X-1)$, où $a \in \mathbb{R}$. Enfin, $L_0(0) = 1$, donc $a = \dfrac{1}{(0-1/2)(0-1)}$ et $L_0 = \dfrac{(X-1/2)(X-1)}{(0-1/2)(0-1)}$.
• De même, on montre que $L_1 = \dfrac{(X-0)(X-1)}{(1/2-0)(1/2-1)}$ et $L_2 = \dfrac{(X-0)(X-1/2)}{(1-0)(1-1/2)}$. D'après la question précédente, $I_2 : f \mapsto \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si

$$\lambda_0 = \int_0^1 L_0(x)dx, \qquad \lambda_1 = \int_0^1 L_1(x)dx \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \int_0^1 L_2(x)dx.$$

Après calcul de ces intégrales, on retrouve bien

$$\lambda_0 = 1/6, \quad \lambda_1 = 2/3 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1/6.$$

I.C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

9. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur $[a,b]$, on a, d'après la formule de Taylor-reste intégral, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
R_m(x) &= \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)dt = \frac{1}{m!}\int_a^x \underbrace{\varphi_m(x,t)}_{=(x-t)^m} f^{(m+1)}(t)dt + \frac{1}{m!}\int_x^b \underbrace{\varphi_m(x,t)}_{=0 \text{ pour } t\in]x,b]} f^{(m+1)}(t)dt \\
&= \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)dt \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{(d'après Taylor-reste intégral).}
\end{aligned}$$

donc, comme e est linéaire,

$$e(R_m) = e(f) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} e(x \mapsto (x-a)^k).$$

Enfin, comme I_n est d'ordre m et $x \mapsto (x-a)^k$ est polynomiale de degré $k \le m$ (pour tout $k \in [\![0,m]\!]$), on a $e(x \mapsto (x-a)^k) = 0$ et donc

$$e(R_m) = e(f).$$

10. Soit $m \ge 1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
e(f) = e(R_m) &= \int_a^b R_m(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j R_m(x_j) \\
&= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)dt\right) w(x)dx - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t) f^{(m+1)}(t)dt \\
&= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)w(x)dt\right) dx - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t) f^{(m+1)}(t)dt.
\end{aligned}$$

Or $(x,t) \in [a,b]^2 \mapsto \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)w(x)$ est continue comme produit et composée de fonctions continues : $(x,t) \mapsto x$ ou t l'est car polynomiale, φ_m l'est d'après l'énoncé ($m \ge 1$,) et $f^{(m+1)}$ l'est car f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ et w l'est car c'est un poids), donc, d'après l'égalité fubinienne donnée dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}
e(f) &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)w(x)dx\right) dt - \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^n \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t) f^{(m+1)}(t)dt \\
&= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j,t) f^{(m+1)}(t)\right) dt \\
&= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(f^{(m+1)}(t)\int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx - f^{(m+1)}(t)\sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j,t)\right) dt \\
&= \frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)dt,
\end{aligned}$$

où $K_m : t \in [a,b] \mapsto \displaystyle\int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j,t) = e(x \mapsto \varphi_m(x,t))$.

I.D - Exemple : méthode des trapèzes

11. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
K_1 : t \in [0,1] \mapsto &\int_0^1 \varphi_1(x,t)dx - \left(\frac{1}{2}\varphi_1(0,t) + \frac{1}{2}\varphi_1(1,t)\right) \\
&= \int_0^t 0dx + \int_t^1 (x-t)dx - \left(\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times(1-t)\right) \\
&= \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2}(1-t) = \frac{t(t-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Par suite, si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, comme toutes les hypothèses de la partie I.C sont vérifiées (avec $m=1$), on a

$$e(g) = \frac{1}{1!}\int_0^1 K_1(t)g''(t)dt = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2}g''(t)dt.$$

Or, pout tout $t \in [0,1]$,

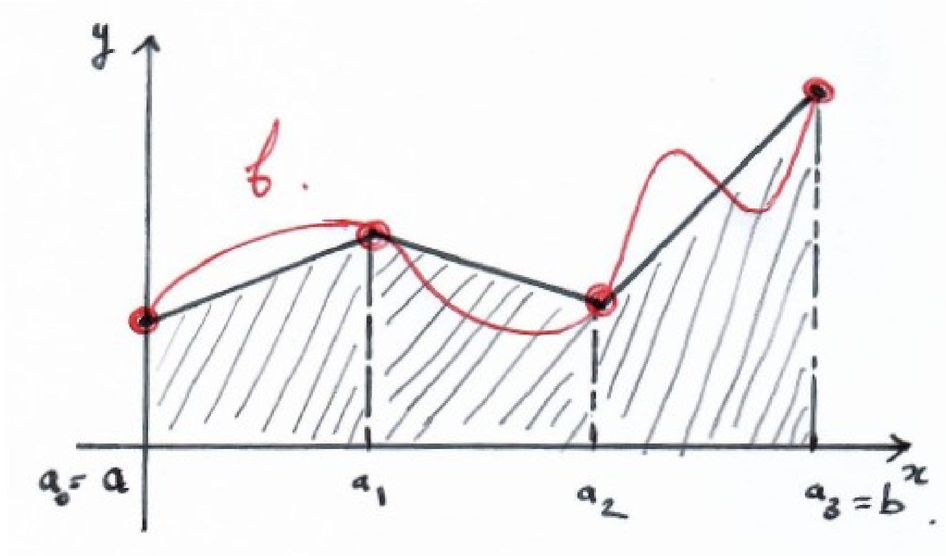
$$\left|\frac{t(t-1)}{2}g''(t)\right| = \frac{t(1-t)}{2}|g''(t)| \le \frac{t-t^2}{2}\|g''\|_\infty^{[0,1]},$$

donc, par positivité de l'intégrale ($0 \leq 1$), on a :

$$|e(g)| = \left| \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} g''(t)dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t(t-1)}{2} g''(t) \right| dt \leq \int_0^1 \frac{t-t^2}{2} \|g''\|_\infty^{[0,1]} dt = \|g''\|_\infty^{[0,1]} \left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \|g''\|_\infty^{[0,1]}.$$

$\|g''\|_\infty^{[0,1]}$ existe car g'' est continue sur le segment $[0,1]$.

12. $T_n(f)$ est la somme des aires (algébriques) hachurées, i.e. l'aire (algébrique) située sous la ligne brisée.



13. *Le graphique ci-dessus nous permet de voir que l'erreur totale est la somme des erreurs commise sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, ce qui nous incite à écrire ce qui suit :*
On a

$$\begin{aligned}
e_n(f) &= \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)(a_{i+1}-a_i)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \quad \text{(chagement de variable affine « } t = \frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i} \text{ »)} \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \quad (\text{car } a_{i+1}-a_i = h = \frac{b-a}{n}) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_0^1 f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)dt - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),
\end{aligned}$$

en posant $g_i : t \in [0,1] \mapsto f((a_{i+1}-a_i)t+a_i)$, avec $g(0) = f(a_i)$ et $g(1) = f(a_{i+1})$.

14. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, g_i est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, donc, d'après la question 11, on a

$$|e(g_i)| \leq \frac{1}{12} \|g_i''\|_\infty^{[0,1]}.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $(a_{i+1}-a_i)t + a_i \in [a_i, a_{i+1}] \subset [a,b]$, donc

$$|g_i''(t)| = \left|(a_{i+1}-a_i)^2 f''((a_{i+1}-a_i)t+a_i)\right| = (a_{i+1}-a_i)^2 |f''((a_{i+1}-a_i)t+a_i)| \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]},$$

donc $\|g_i''\|_\infty^{[0,1]} \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}$, et, par suite,

$$|e(g_i)| \leq \frac{1}{12} \|g_i''\|_\infty^{[0,1]} \leq \frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}.$$

Finalement, d'après l'inégalité triangulaire généralisé,

$$\begin{aligned}|e_n(f)| &= \left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e(g_i)\right| \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|e(g_i)| \\ &\leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\times n\left(\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[a,b]}\right) \\ &\frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty^{[a,b]}.\end{aligned}$$

II. Polynômes orthogonaux et applications

II.A - Etude d'un produit scalaire

15. • Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$, l'inégalité $(a-b)^2\geq 0$ donne

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

• Soient f et g deux fonctions de E.
Pour tout $t\in I$,

$$0\leq |(fgw)(t)| = |f(t)g(t)|.|w(t)| \leq \frac{1}{2}(f^2(t)+g^2(t))|w(t)| = \frac{1}{2}|(f^2w)(t)| + \frac{1}{2}|(g^2w)(t)|.$$

Or f^2w et g^2w sont intégrables sur I (car $f,g\in E$), donc $t\mapsto \frac{1}{2}|(f^2w)(t)|+\frac{1}{2}|(g^2w)(t)|$ est intégrable sur I comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I, et, finalement, par comparaison, fgw est intégrable sur I.

16. $E\subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ par définition de E.
• La fonction nulle sur I est dans E, donc $E\neq\varnothing$.
• Enfin, pour tout $(f,g)\in E^2$, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda f+\mu g\in E$ car
— $\lambda f+\mu g$ est continue sur I
— $(\lambda f+\mu g)^2 w = \lambda^2 f^2 w + 2\lambda\mu fgw + \mu^2 g^2 w$ donc $\lambda f+\mu g$ est intégrable sur I comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I (f^2w et g^2w le sont par hypothèse et fgw d'après la question précédente).
• E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

17. On a vu en exercice dans le cours que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E.

II.B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

18. Supposons que p n'ait pas n racines distinctes dans $]a,b[$.
Alors le degré de q est strictement inférieur à n, (qu'une de ses racines ne soit pas dans $]a,b[$ ou qu'une de ses racines qui y est, ait une multimplicité strictement supérieur au ε_i correspondant.)
Comme $(p_0,p_1,\dots,p_{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]_{n-1}$ car orthogonale (sans élément nuls) elle en est une base. L'orthogonalité de p_n avec $p_0,;..p_{n-1}$ veut alors que ce polynôme soit orthogonal à $\mathbb{R}[X]_n$, donc en particulier à q.
Ainsi a-t-on

$$0 = \langle p_n, q\rangle = \int_I p_n q w.$$

Mais par construction p_nq n'a que des racine de multiplicité paire dans $]a,b[$ donc garde dans cette intervalle et par continuité dans I un signe constant, la possitivité de w veut qu'il en soit ainsi de p_nqw. Or cette application est de plus continue, donc la nullité de $\int_I p_nqw$ donne la nullité de p_nqw et puisque w ne s'annule pas, celle de p_nq. Voilà qui est absurde puisque ce polynôme est unitaire.
Dos nc p_n possède n racines simples dans $\mathring{I}$.

II.C - Applications : méthodes de quadrature de Gauss

19. $Q_n = \prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$ est un polynôme de degré exactement $n+1$.
En particulier, $Q_n\neq 0$, donc $\langle Q_n,Q_n\rangle = \int_I Q_n(x)^2 w(x)dx > 0$.
Or $I_n(Q_n^2)=0$, car pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, x_j est racine de Q_n^2, donc

$$e(Q_n^2) = \int_I Q_n(x)^2 w(x)dx - I_n(Q_n^2) \neq 0.$$

La formule de quadrature I_n n'est donc pas exacte pour Q_n^2 de degré $2n+2$, donc son ordre vaut au maximum $2n+1$.

20. • Supposons que $m = 2n+1$.

Le polynôme $Q_n = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$ est unitaire de degré $n+1$ et, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, le polynôme $p_i Q_n$ est de degré au plus $2n+1$, donc

$$0 = e_n(p_i Q_n) = \int_I p_i(x)Q_n(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_i(x_j)\underbrace{Q_n(x_j)}_{=0} = \langle p_i, Q_n\rangle .$$

D'où, par unicité de la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $p_{n+1} = Q_n = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$, donc p_{n+1} a pour racines les $(x_i)_{i=0..n}$.

• Réciproquement, si les x_i sont les racines de p_{n+1}, alors, comme p_{n+1} est unitaire de degré $n+1$ et a pour racines $(x_i)_{i=0..n}$, on a $p_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Par division euclidienne, on dispose de $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = Qp_{n+1} + R, \quad \text{où } \deg(R) < n+1 \text{ et } \deg(Q) \leq (2n+1) - (n+1) = n.$$

On a alors, par linéarité de e,

$$e(P) = e(Qp_{n+1}) + e(R).$$

Or e est d'ordre au moins n d'après la question 7, donc $e(R) = 0$.

De plus,

$$e(Qp_{n+1}) = \int_I Q(x)p_{n+1}(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j Q(x_j)\underbrace{p_{n+1}(x_j)}_{=0} = \langle Q, p_{n+1}\rangle = 0,$$

en décomposant Q dans la base $(p_0, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ comme dans la question 18.

On a donc bien $e(P) = e(Qp_{n+1}) + e(R) = 0 + 0 = 0$, donc la formule de quadrature I_n est d'ordre au moins $2n+1$.

Comme elle est d'ordre au plus $2n+1$ d'après la question précédente, elle est donc bien d'ordre exactement $2n+1$.

• On a donc bien l'équivalence demandée.

II.D - Exemple 1

21. • p_0 est unitaire de degré 0, donc $p_0 = 1$.

• p_1 est unitaire de degré 1, donc s'écrit sous la forme $p_1 = X + a$ où $a \in \mathbb{R}$.

De plus, $\langle p_1, p_0\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_1(x)p_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x + a dx = 2a,$$

donc $a = 0$ et, par suite, $p_1 = X$.

• p_2 est unitaire de degré 2, donc s'écrit sous la forme $p_2 = X^2 + aX + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

De plus, $\langle p_2, p_0\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_2(x)p_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 + ax + b dx = \frac{2}{3} + 2b,$$

donc $b = -\frac{1}{3}$.

On a aussi $\langle p_2, p_1\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_2(x)p_1(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 + ax^2 + bx dx = \frac{2}{3}a,$$

donc $a = 0$ et, par suite, $p_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

• p_3 est unitaire de degré 3, donc s'écrit sous la forme $p_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

De plus, $\langle p_3, p_0\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_3(x)p_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 + ax^2 + bx + c dx = \frac{2}{3}a + 2c,$$

donc $a = -3c$.

On a aussi $\langle p_3, p_1\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_3(x)p_1(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx dx = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b,$$

donc $b = -\frac{3}{5}$.

Enfin, $\langle p_3, p_2\rangle = 0$, donc

$$0 = \int_{-1}^{1} p_3(x)p_2(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^5 + ax^4 + (b - 1/3)x^3 + (c - a/3)x^2 - \frac{b}{3}x - \frac{c}{3} dx = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}(c - a/3) - 2c/3 = \left(-\frac{6}{5} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)c,$$

donc $c = 0$, puis $a = -3c = 0$ et, par suite, $p_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

22. D'après la question 20, en prenant pour les x_i les racines de $p_3 = X(X^2 - 3/5)$, ie

$$x_0 = -\sqrt{3/5}, \quad x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = \sqrt{3/5},$$

et, pour tout $j \in [\![0,2]\!]$,

$$\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)w(x)dx,$$

on aura, en posant $I_2(f) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j f(x_j)$, une formule de quadrature d'ordre 5.

Calculons les λ_j : Les polynomes (L_0, L_1, L_2) forment la base de Lagrange associés aux points $(-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5})$. On a donc, comme à la question 8

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(X-0)(X-\sqrt{3/5})}{(-\sqrt{3/5}-0)(-\sqrt{3/5}-\sqrt{3/5})} = \frac{5}{6}(X^2 - \sqrt{3/5}X), \\ L_1 &= \frac{(X+\sqrt{3/5})(X-\sqrt{3/5})}{(0+\sqrt{3/5})(0-\sqrt{3/5})} = -\frac{5}{3}(X^2 - 3/5) \\ \text{et } L_2 &= \frac{(X+\sqrt{3/5})(X-0)}{(\sqrt{3/5}+\sqrt{3/5})(\sqrt{3/5}-0)} = \frac{5}{6}(x^2 + \sqrt{3/5}X), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \int_{-1}^{1} L_0(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}(x^2 - \sqrt{3/5}x)dx = \frac{5}{9}, \\ \lambda_1 &= \int_{-1}^{1} L_1(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} -\frac{5}{3}(x^2 - 3/5)dx = -\frac{10}{9} + 2 = \frac{8}{9} \\ \text{et } \lambda_2 &= \int_{-1}^{1} L_2(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}(x^2 + \sqrt{3/5}x)dx = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

La formule de quadrature recherchée est donc :

$$I_2 : f \mapsto \frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5}).$$

II.E - Exemple 2

23. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$x \mapsto x^k w(x)$ est continue sur $]-1,1[$.
De plus, $x^k w(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est positive intégrable sur $[0,1[$ (Riemann et $1/2 < 1$), donc, par comparaison, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur $[0,1[$.
De plus, $x \mapsto x^k w(x)$ est paire ou impaire (selon la parité de k), donc $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur $]-1,1[= I$.
Rq : on peut procéder autrement en remarquant que $x^k w(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ *où* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *est intégrable sur* $]-1,1[$ *(car POSITIVE et sa primitive* arcsin *admets des limite en* ± 1 *).*

24. $Q_0 : x \in [-1,1] \mapsto \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1$.
$Q_1 : x \in [-1,1] \mapsto \cos(1 \arccos(x)) = x$.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta),$$

on a, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$Q_{n+2}(x) + Q_n(x) = 2\cos(\arccos(x))\cos((n+1)\arccos(x)) = 2xQ_{n+1}(x),$$

donc $Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)$.

25. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, "Q_n et $\mathbb{Q}_{n+1}$ sont polynomiales de degré n et de coefficients dominants 2^{n-1}. et 2^n
Initialisation : On a $Q_1 : x \mapsto x$, et d'après la question précédente, $Q_2 : x \mapsto 2xQ_1(x) - Q_0(x) = 2x^2 - 1$, donc HR_1 est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors $Q_{n+2} : x \mapsto 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)$ est polynomiale comme somme et produit de fonctions polynomiales.
De plus, d'après HR_n, il existe R_{n+1} de degré n telle que $Q_{n+1} : x \mapsto 2^n x^{n+1} + R_n(x)$ et on a alors

$$Q_{n+2} : x \mapsto 2^{n+1}x^{n+2} + \underbrace{2xR_n(x)}_{\deg \le n+1} - \underbrace{Q_n(x)}_{\deg \le n},$$

donc on a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, Q_m est polynomiale de degré m et de coefficient dominant 2^{m-1}, et $Q_0 : x \mapsto 1$ est polynomiale de degré 0 et a pour coefficient dominant 1.

26. D'après la question précédente, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_0 = Q_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} Q_n$ vérifie
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est unitaire de degré n.
— Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$,

$$\begin{aligned}\langle R_i, R_j\rangle &= \int_{-1}^{1} R_i(x)R_j(x)w(x)dx = cte \int_{-1}^{1} \cos(i\arccos(x))\cos(j\arccos(x))w(x)dx \\ &= cte\int_{\pi}^{0}\cos(i\theta)\cos(j\theta)(-d\theta) \\ &= \frac{cte}{2}\int_0^{\pi}\cos((i+j)\theta)+\cos((i-j)\theta)d\theta = \frac{cte}{2}\left[\frac{\sin((i+j)\theta)}{(i+j)} + \frac{\sin((i-j)\theta)}{(i-j)}\right]_0^{\pi} \quad (\text{car } i+j\neq 0 \text{ et } i-j\neq 0) \\ &= 0,\end{aligned}$$

par changement de variable « $\theta = \arccos(x)$ », qui est $\mathcal{C}^1$ bijectif sur $]-1,1[$
Par unicité de la famille vérifiant les conditions a,b,c introduites au début de la partie II.B, on a bien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.

$$\begin{cases} p_0 = Q_0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}Q_n. \end{cases}$$

27. D'après la question 20, la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j f(x_j)$ est d'ordre maximal Soient $n \in \mathbb{N}$,. Pour tout élémnet x de $]-1,1[$, $p_{n+1}(x) = 0$ si et seulement si $\cos((n+1)\arccos(x)) = 0$, soit si et seuleemnt si,

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2(n+1)} \text{ mod.}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Mais $\arccos(x) \in [0,\pi]$, donc l'ensemble des racines de p_{n+1} est $\left\{\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), k \in [\![0,n]\!]\right\}$,

donc on a $(x_k)_{k=0..n} = \left(\cos\left(\dfrac{(2(n-k)+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)_{k=0..n}$.

III. Accélération de la méthode des trapèzes

III.A - Nombres b_m et polynômes B_m

28. Pour $z = R/2$, ce point est à l'intérieur du disque ouvert de convergence, on a $(|\alpha_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bornée, ce qui fournit d'un réel $M \geq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n z^n| \leq M$.
On a alors :
— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\alpha_n| \leq \dfrac{M}{|z|^n} \underset{M\geq 1}{\leq} \dfrac{M^n}{|z|^n} = \left(\dfrac{M}{|z|}\right)^n$.
— pour $n = 0$, on a encore $|\alpha_0| = 1 \leq \left(\dfrac{M}{|z|}\right)^0$.
En posant $q = \dfrac{2M}{R}$, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n| \leq q^n$.

29. Supposons que $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière sur $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R'\}$ sous la forme $\dfrac{1}{S(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n z^n$.
• Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R,R')$, $\sum_{n\geq 0}\alpha_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}\beta_n z^n$ convergent absolument, donc, par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$1 = (S(z))(1/S(z)) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}\right)z^n.$$

Comme 1 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, on a, par unicité du développement en série entière de 1 sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \min(R,R')\}$,

$$\alpha_0\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k} = 0,$$

i.e., comme $\alpha_0 = 1$,

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \ \beta_n = -\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}.$$

• Montrons alors par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$|\beta_n| \leq (2q)^n$" (HR_n).
Initialisation : Comme $\beta_0 = 1$ et $(2q)^0 = 1$, on a bien HR_0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Alors, d'après le premier point,

$$\begin{aligned}
|\beta_{n+1}| &= \left| -\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \beta_{n+1-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k|.|\beta_{n+1-k}| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1} q^k (2q)^{n+1-k} \quad (HR_{n+1-k}, \text{ où } n+1-k \in [\![0,n]\!], \text{ et question précédente}) \\
&= (2q)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (1/2)^k = (2q)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} \quad \text{(somme finie géométrique de raison } 1/2 \neq 1) \\
&= (2q)^{n+1}(1-(1/2)^{n+1}) \leq (2q)^{n+1}. \quad \text{On a bien } HR_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\beta_n| \leq (2q)^n$.

30. **Analyse :** Si $1/S$ est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $1/S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n$, alors, d'après la question précédente, on a

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \beta_n = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

Synthèse : Réciproquement, pour la suite (β_n) ainsi définie, la série entière $\sum_{n\geq 0} \beta_n z^n$ a un rayon de convergence $R' \geq \frac{1}{2q} > 0$ (car $(|\beta_n(1/(2q))^n|)_n$ est bornée d'après la question précédente), et, d'après les calculs menés dans l'analyse, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R, R')$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right) z^n = 1,$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n} = \frac{1}{S(z)}$.

Conclusion : $1/S$ est donc développable en série entière au moins sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \min(R, R')\}$.

31. Soit $S : z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, comme $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a

$$S(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

et, comme $S(0) = 1$, cette égalité est encore valable pour $z = 0$, donc valable pour tout $z \in \mathbb{C}$.
S est donc développable en série entière sur $\mathbb{C}$ sous la forme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ où $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}$, donc $\alpha_0 = 1$.

D'après la question précédente, $z \mapsto \frac{1}{S(z)}$ est développable en série entière au voisinage de 0, ce qui assure l'existence d'une unique suite complexe $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'un réel $r > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| < r \Rightarrow \frac{1}{S(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n.$$

En posant $(b_n) = (n!\beta_n)$, on a bien le résultat souhaité pour tout $z \neq 0$ (*pour que le dénominateur ne s'annule pas, mais l'écriture* $1/S$, *plus agréable, évite ce cas particulier*).
Enfin, l'unicité de (b_n) vient de l'unicité de β_n et donc de l'unicité du développement en série entière de $1/S$ au voisinage de 0.

32. De plus, d'après les calculs faits à la question 29, on a

$$\beta_0 = 1, \qquad \text{donc } b_0 = 0!\beta_0 = 1$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\beta_k = 0, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \frac{b_k}{k!} = 0,$$

donc, en multipliant cette dernière égalité par $(n+1)!$, on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$.
Ceci étant valable pour tout $n \geq 1$, en changeant d'indice, on a bien, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0.$$

33. D'après la question précédente,
— pour $n=2$, on obtient $b_0+2b_1=0$, donc $b_1=-1/2$
— pour $n=3$, on obtient $b_0+3b_1+3b_2=0$, donc $b_2=-\dfrac{1}{3}(b_0+3b_1)=\dfrac{1}{6}$
— pour $n=4$, on obtient $b_0+4b_1+6b_2+4b_3=0$, donc $b_3=-\dfrac{1}{4}(b_0+4b_1+6b_2)=0$
— pour $n=5$, on obtient $b_0+5b_1+10b_2+10b_3+5b_4=0$, donc $b_4=-\dfrac{1}{5}(b_0+5b_1+10b_2+10b_3)=-\dfrac{1}{30}$

34. *L'idée, suggérée par l'énoncé, est ici de trouver une fonction développable en série entière, très "proche" de* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, *qui soit paire, ce qui donnerait la nullité des* b_{2n+1}. *Afin de simplifier les calculs, l'idée est d'ajouter qqchose à* $1/S(z)$ *afin de rendre cette fonction impaire, et ce qqchose doit être développable en série entière (et son développement le plus simple possible). On s'intéresse donc* $f : x \mapsto 1/S(x)+g(x)$, *où* g *est à déterminer, de telle sorte que* $f(x)-f(-x)=0$ *(ce qui donnera la parité). Après calcul, cela revient à trouver* g *telle que* $x-xe^x+(g(x)-g(-x))e^x-(g(x)-g(-x))=0$, *et on voit que* $g : x \mapsto x/2$ *convient.*
On peut aussi trouver ce g *en se disant qu'on veut que les coefficient* b_{2p+1} *soient nuls pour* $p \geq 1$. *Quid de* b_1 *? Et bien justement, on va considérer* $1/S(x)-b_1x = 1/S(x)+x/2$, *ce qui annulera* b_1 *(et on n'aura donc pas d'information sur lui), mais pas les autres.*
Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{S(x)}+\dfrac{x}{2}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et
— si $x \neq 0$,

$$f(-x)=\frac{-x}{e^{-x}-1}-\frac{x}{2}=\frac{-xe^x}{1-e^x}-x+\frac{x}{2}=\frac{xe^x-xe^x+x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=f(x)$$

— si $x=0$, $f(-0)=f(0)$.
La fonction f est donc paire.
De plus, pour tout $x \in]-r,r[$, comme $|x|<r$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}x^n+\frac{x}{2}=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}x^n \quad (\text{car } b_0=1 \text{ et } b_1=-1/2),$$

donc f est développable en série entière sur $]-r,r[$, et, comme f est impaire, les coefficients des termes de degré impaire de son développement asymptotique son nuls, donc $b_{2p+1}=0$ pour tout entier $p \geq 1$.

35. Comme on connait déjà b_0, b_1, b_2 et b_3 (question 32 et 33), on a immédiatement

$$\begin{aligned}
B_0 &= b_0 = 1\\
B_1 &= b_0X+b_1 = x-1/2\\
B_2 &= b_0X^2+2b_1X+b_2 = X^2-X+1/6\\
B_3 &= b_0X^3+3b_1X^2+3b_2X+b_3 = X^3-(3/2)X^2+(1/2)X.
\end{aligned}$$

36. Pour tout $m \geq 2$,

$$B_m(1)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}b_k = b_m + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}b_k}_{=0 \text{ d'après Q32, car } m\geq 2} = b_m.$$

Pour tout $m \geq 1$,

$$B_m'(X)=0+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}b_k(m-k)X^{m-k-1}=\sum_{k=0}^{m-1}m\binom{m-1}{k}b_kX^{(m-1)-k}=mB_{m-1}(X).$$

III.B - Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

37. On a $B_1(t)=t-1/2$ d'après la question 35.
D'où, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx &= \int_k^{k+1} B_1(x-k)g'(x)dx\\
&\quad (\text{car } \lfloor x\rfloor = k \text{ pour tout } x\in[k,k+1[\text{ et l'intégrale ne dépend pas de la valeur en un point})\\
&= [B_1(x-k)g(x)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B_1'(x-k)g(x)dx\\
&\quad (\text{par intégration par parties avec } x\mapsto B_1(x-k) \text{ et } g \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [k,k+1])\\
&= \frac{g(k+1)}{2}+\frac{g(k)}{2}-\int_k^{k+1} g(x)dx.
\end{aligned}$$

D'où, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{g(k+1)+g(k)}{2}-\int_k^{k+1} g(x)dx\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k+1)+g(k)}{2}-\int_0^n g(x)dx. \quad \text{cqfd.}\end{aligned}$$

38. • Notons, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $I_p=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\int_0^n B_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)dx$.
Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$\int_k^{k+1} B_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)dx=\int_k^{k+1} B_p(x-k)g^{(p)}(x)dx.$$

Posons $u(x)=\dfrac{B_{p+1}(x-k)}{p+1}$, $u'(x)=B_p(x-k)$ (d'après la question 36), $v(x)=g^{(p)}(x)$, $v'(x)=g^{(p+1)}(x)$.
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[k,k+1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} B_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)dx &= \int_k^{k+1} B_p(x-k)g^{(p)}(x)dx=\left[\frac{B_{p+1}(x-k)}{p+1}g^{(p)}(x)\right]_k^{k+1}-\int_k^{k+1}\frac{B_{p+1}(x-k)}{p+1}g^{(p+1)}(x)dx\\ &= \frac{B_{p+1}(1)g^{(p)}(k+1)-B_{p+1}(0)g^{(p)}(k)}{p+1}-\frac{1}{p+1}\int_k^{k+1}B_{p+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p+1)}(x)dx\\ &= \frac{b_{p+1}}{p+1}(g^{(p)}(k+1)-g^{(p)}(k))-\frac{1}{p+1}\int_k^{k+1}B_{p+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p+1)}(x)dx\end{aligned}$$

(car $B_{p+1}(0)=B_{p+1}(1)=b_{p+1}$ d'après 36 avec $p+1\geq 2$).

En sommant cette relation pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ et en utilisant la relation de Chasles, on a donc

$$\begin{aligned}I_p &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\int_k^{k+1}B_p(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p)}(x)dx\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\left(\frac{b_{p+1}}{p+1}(g^{(p)}(k+1)-g^{(p)}(k))-\frac{1}{p+1}\int_k^{k+1}B_{p+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p+1)}(x)dx\right)\\ &= \frac{b_{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(g^{(p)}(k+1)-g^{(p)}(k))-\frac{1}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}B_{p+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p+1)}(x)dx\\ &= \frac{b_{p+1}}{(p+1)!}(g^{(p)}(n)-g^{(p)}(0))-I_{p+1},\end{aligned}$$

donc $I_p+I_{p+1}=\dfrac{b_{p+1}}{(p+1)!}(g^{(p)}(n)-g^{(p)}(0))$.
Par suite, pour tout $m\geq 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)) &= \sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}(I_p+I_{p-1}) \quad (\text{car } p-1\geq 1)\\ &= \sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}I_{p-1}+\sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}I_p\\ &= \sum_{p=1}^{m-1}(-1)^pI_p-\sum_{p=2}^{m}(-1)^pI_p\\ &= -I_1-(-1)^mI_m \quad (\text{téléscopage})\\ &= \int_0^n g(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k+1)+g(k)}{2}-(-1)^mI_m. \quad \text{cqfd.}\end{aligned}$$

39. Posons le changement de variable affine $x=a+th\Leftrightarrow t=(x-a)/h$. On a alors $dx=hdt$, donc

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^n f(a+th)hdt=\int_0^n g(t)dt$$

en posant $g:t\in[0,n]\mapsto hf(a+th)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,n]$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
De plus, pour tout $p\in\mathbb{N}$, pour tout $t\in[0,n]$, $g^{(p)}(t)=h^{p+1}f^{(p)}(a+th)$.

Soit alors $m \geq 1$. D'après la forume établie à la question précédente avec "$m = 2m \geq 2$," on a :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_0^n g(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{2m} \frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(2m)}(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{hf(a+kh)+hf(a+(k+1)h)}{2} + \sum_{p=2}^{2m} \frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}\left(h^p f^{(p-1)}(a+nh) - h^p f^{(p-1)}(a+0h)\right) \\
&\quad + \frac{1}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)h^{2m+1}f^{(2m)}(a+xh)dx \\
&= h\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} + \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^{2p-1}b_{2p}}{(2p)!}\left(h^{2p} f^{(2p-1)}(b) - h^{2p} f^{(2p-1)}(a)\right) \\
&\quad + \frac{1}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)h^{2m+1}f^{(2m)}(a+xh)dx \\
&\quad \text{(car } b_{2p+1} = 0 \text{ pour tout } p \geq 1\text{, donc il ne reste que les termes pairs dans la somme)} \\
&= T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{b_{2p}h^{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right) + \frac{h^{2m}}{(2m)!}\int_a^b B_{2m}((t-a)/h - \lfloor (t-a)/h\rfloor)f^{(2m)}(t)dt \\
&\quad \text{(changement de variable affine } t = a+xh \Leftrightarrow x = (t-a)/h\text{, avec } dx = dt/h\text{)} \\
&= T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),
\end{aligned}
$$

en posant $\rho_{2m}(n) = \dfrac{h^{2m}}{(2m)!}\displaystyle\int_a^b B_{2m}((t-a)/h - \lfloor (t-a)/h\rfloor)f^{(2m)}(t)dt$.
Enfin, par positivité de l'intégrale,

$$
\begin{aligned}
|\rho_{2m}(n)| &= \left|\frac{h^{2m}}{(2m)!}\int_a^b B_{2m}((t-a)/h - \lfloor (t-a)/h\rfloor)f^{(2m)}(t)dt\right| \\
&\leq \frac{h^{2m}}{(2m)!}\int_a^b |B_{2m}(\underbrace{(t-a)/h - \lfloor (t-a)/h\rfloor}_{\in[0,1]})|.|f^{(2m)}(t)|dt \\
&\leq \frac{((b-a)/n)^{2m}}{(2m)!}\int_a^b \|B_{2m}\|_\infty^{[0,1]}\|f^{(2m)}\|_\infty^{[a,b]}dt \\
&= \frac{(b-a)^{2m+1}\|B_{2m}\|_\infty^{[0,1]}\|f^{(2m)}\|_\infty^{[a,b]}}{(2m)!n^{2m}} = \frac{C_{2m}}{n^{2m}}
\end{aligned}
$$

en posant $C_{2m} = \dfrac{(b-a)^{2m+1}\|B_{2m}\|_\infty^{[0,1]}\|f^{(2m)}\|_\infty^{[a,b]}}{(2m)!}$.