DS n^{o}5

Les éléves traiteront un et un seul des trois sujets suivants

Un sujet du concours polytechnique de secours est prévu pour le cas où un étudiant aurait déjà traité le sujet proposé.

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la régle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,
— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,
— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

SUJET 1

Type MINES

EXERCICE

1. Rappeler la définition de la convergence normale d'une série d'applications.
2. Montrer que si une série converge normalement, alors elle converge uniformément.
   On considère à présent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$u_n \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}\,; \ , x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \ .$$

3. Montrer la convergence simple de la série d'applications $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$. On notera S sa somme.
4. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
5. Calculer $\mathrm{S}'(1)$.

PROBLÈME

Wronskien et problème de Waring

En 1770 Edward Waring, se basant sur des calculs empiriques, pose la conjecture suivante : pour un entier n naturel fixé, on peut exprimer tout entier naturel comme somme d'*au plus* $g(n)$ puissances n-ièmes d'entiers naturels, $g(n)$ ne dépendant que de n. Le cas $n = 2$ avait déjà été formulé par Fermat en 1640, Euler et Lagrange ont traité des cas particuliers et finalement en 1909 Hilbert a pu établir ce résultat (appelé parfois théorème de Hilbert-Waring).

On se propose ici de résoudre un problème analogue dans le cadre (algébrique) des polynômes à coefficients complexes. Plus précisément, on fixe un entier naturel n et on étudie les équations

$$\mathrm{X} = f_1^n(\mathrm{X}) + \ldots + f_k^n(\mathrm{X}) \ ,$$

les inconnues $(f_1, \ldots f_k)$ étant dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On s'intéresse particulièrement au *plus petit entier* $k = k(n)$ pour lequel cette équation possède des solutions. L'objectif de ce problème est de prouver que $k(2) = 2$ et que pour $n \geq 3$, on a l'inégalité

$$n < k^2(n) - k(n) \ .$$

On considère dorénavant que n **est un entier naturel supérieur ou égal à** 2.

Soient $d_1, \ldots, d_n$ des nombres réels. On note

$$\mathrm{V}(d_1, \ldots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \ldots & d_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Vandermonde de $(d_1, \ldots, d_n)$.
Pour tout $d \in \mathbb{R}$ et $k \geq 1$, on note

$$(d)_k = d\,(d-1)\ldots(d-k+1)\ ,$$

et on introduit le déterminant

$$\mathrm{D}\,(d_1, \ldots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (d_1)_1 & (d_2)_1 & \ldots & (d_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (d_1)_{n-1} & (d_2)_{n-1} & \ldots & (d_n)_{n-1} \end{vmatrix}.$$

A Propriétés élémentaires du Wronskien

1. Soient d_1, …, d_n des nombres réels. Établir la formule du cours sur le déterminant de Vandermonde de $(d_1, \ldots, d_n)$:
$$\mathrm{V}(d_1, \ldots, d_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i)\,.$$

2. Montrer que $\mathrm{D}(d_1, \ldots, d_n) = \mathrm{V}(d_1, \ldots, d_n)$.

   On fixe à présent un intervalle $\mathrm{I} =]a, b[$ de $\mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soient f_1, …, f_n des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $(n-1)$ fois dérivables sur I ; leur *Wronskien* $\mathrm{W}_n(f_1, \ldots, f_n)$ est la fonction définie sur I par
$$\mathrm{W}_n(f_1, \ldots, f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que le Wronskien des fonctions monômiales $\left(x \mapsto a_1\, x^{d_1}\right)$, …, $\left(x \mapsto a_n\, x^{d_n}\right)$ est égal à
$$\mathrm{V}(d_1, \ldots, d_n)\; x^{d_1 + \ldots + d_n - \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i\,.$$

4. Soit g une fonction $(n-1)$ fois dérivable sur I, montrer que
$$\mathrm{W}_n(f_1\, g, f_2\, g, \ldots, f_n\, g) = g^n\, \mathrm{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)\,.$$

5. Pour f_1 ne s'annulant pas sur I, montrer que
$$\mathrm{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) = f_1^n\, \mathrm{W}_{n-1}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \left(\frac{f_3}{f_1}\right)', \ldots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right).$$

B Annulation du Wronskien

On note $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $(n-1)$ fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

6. Montrer que si f_1 , …, f_n forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ alors $\mathrm{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est identiquement nulle sur I.

7. Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{W}_2(f_1, f_2) = 0$ sur I et que $f_1\, f_2$ ne s'annule pas sur I. Montrer alors que f_1 et f_2 forment une famille liée de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbb{R})$.

8. Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 formant une famille libre dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ et telles que $\mathrm{W}_2(f_1, f_2) = 0$.

9. En utilisant la question 4 montrer que si $\mathrm{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est la fonction nulle sur I, alors il existe un sous-intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ sur lequel les restrictions de f_1 , ..., f_n à J forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{J}; \mathbb{R})$.

   On suppose maintenant que $0 \in \mathrm{I}$, que les fonctions f_1 , ..., f_n sont développables en séries entières au voisinage de 0, qu'elles coïncident avec leur développement sur I et qu'elles forment **une famille libre** de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I}; \mathbb{R})$. On définit l'*ordre* d'une série entière non nulle $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ comme le plus petit entier naturel d tel que $a_d \neq 0$;

10. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$(f_1, \ldots, f_n)\, \mathrm{A} = (g_1, \ldots, g_n) \ ,$$

   où les g_1 , ..., g_n sont des fonctions développables en série entière non nulles dont les ordres d_1 , ..., d_n sont deux à deux distincts. On commencera d'abord par le cas $n = 2$.
   On souhaite démontrer que pour ces fonctions $(g_1, \ldots, g_n)$, il existe un réel $\mathrm{C} \neq 0$ tel que

$$\mathrm{W}_n(g_1, \ldots, g_n)(x) = \mathrm{C}\, x^{d_1 + \ldots d_n - \binom{n}{2}} \, (1 + o(1)) \qquad (1)$$

   au voisinage de 0.

11. Traiter le cas où pour tout $i = 1, \ldots n$, on a $d_i \geq n - 1$.

12. On choisit un entier a tel que pour tout $i = 1, \ldots n$, on ait $d_i + a \geq n - 1$. En utilisant la question 3 avec $g(x) = x^a$, montrer (1).

13. En déduire que $\mathrm{W}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est non nulle au voisinage de 0.

C Problème de Waring sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$

Pour n fixé, on se propose d'étudier les équations

$$\mathrm{X} = f_1^n(\mathrm{X}) + \ldots + f_k^n(\mathrm{X}) \ ,$$

en les inconnues $f_1(\mathrm{X})$, ..., $f_k(\mathrm{X}) \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et plus particulièrement le plus petit k pour lequel cette équation possède des solutions. On notera ce plus petit entier $k(n)$. Si f appartient à $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on note

$$\Delta f(\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}+1) - f(\mathrm{X}) \ \text{ et } \ \Delta^p f = \Delta\left(\Delta^{p-1} f\right) \ .$$

Lorsque cela est nécessaire, on identifie polynômes et fonctions polynomiales associées.

14. Montrer que $\Delta^{n-1}(\mathrm{X}^n)$ est de la forme $a\mathrm{X} + b$ avec $a \neq 0$, et en déduire que l'ensemble des solutions de l'équation est non vide et que $k(n) \leq n$.
   On notera en particulier que $k(n)$ est fini.

15. Montrer que tout $g \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ peut s'écrire sous la forme

$$g(\mathrm{X}) = g_1^n(\mathrm{X}) + \ldots + g_{k(n)}^n(\mathrm{X}) \, .$$

16. Montrer que $k(2) = 2$.

    Nous allons maintenant montrer que pour $n \geq 3$, $n < k^2(n) - k(n)$.

    Soit $\mathrm{X} = f_1^n(\mathrm{X}) + \ldots + f_{k(n)}^n(\mathrm{X})$ avec $f_i \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On considère les Wronskiens

$$\mathrm{Z}_1 = \mathrm{W}_{k(n)}\left(f_1^n, \ldots, f_{k(n)}^n\right) \text{ et } \mathrm{Z}_2 = \mathrm{W}_{k(n)}\left(\mathrm{X}, f_2^n, \ldots, f_{k(n)}^n\right) \, .$$

17. Montrer que $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$ puis que Z_1 n'est pas le polynôme nul.

18. Montrer que Z_1 est divisible par $\prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{\,n-k(n)+1}$.

19. Montrer que

$$\deg \mathrm{Z}_2 \leq 1 + n\left(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i\right) - \frac{k(n)\,(k(n)-1)}{2} \, .$$

20. Déduire des questions 17 et 18 que

$$n \deg \mathrm{Z}_1 \leq (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)\,(k(n)-1)}{2} + 1 \, .$$

21. Montrer que $n < k^2(n) - k(n)$.

SUJET2
CCP

PREMIER EXERCICE

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x - y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right. .$$

1. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2$ est nilpotente.
   En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{t\mathrm{A}} = e^{2t} e^{t(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice $e^{t\mathrm{A}}$.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution Φ du système différentiel vérifiant la condition initiale $\left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right.$.

SECOND EXERCICE

1. Rappeler la définition de la convergence normale d'une série d'applications.
2. Montrer que si une série converge normalement, alors elle converge uniformément.
   On considère à présent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$u_n \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}\,; \ , x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \ .$$

3. Montrer la convergence simple de la série d'applications $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$. On notera S sa somme.
4. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
5. Calculer $\mathrm{S}'(1)$.

PROBLÈME

Introduction

Dans tout ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$, où pour tout entier $n \geq 1$, $w_n(x) = a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$, avec $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ ait pour rayon de convergence 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a

Q4. Soit $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1,1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

Q6. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière.

On note $\mathrm{A} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} u_{k,p}\right) \text{ où } \mathrm{I}_n = \{(k,p)\in\mathrm{A}, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où n est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n.

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

Montrer que pour entier $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

On rappelle que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6.**

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1 - x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1 - x}{1 - x^n} = \frac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2000

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose d'étudier certaines équations différentielles, d'abord dans le cadre des séries entières, ensuite dans celui des fonctions indéfiniment dérivables.

Notations des parties I, II et III.

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ formé des suites de nombres complexes $u = (u_k)_{k=1,2,\ldots}$, et par e_n la suite u où $u_k = 1$ si $k = n$ et 0 si $k \neq n$. Pour tout u de E on note $r(u)$ le rayon de convergence, éventuellement nul ou infini, de la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x^k$; pour tout nombre réel $R > 0$ on note E_R l'ensemble des u de E tels que $r(u) \geq R$; enfin on note E_+ l'ensemble des $u \in E$ tels que $r(u) > 0$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un élément u de E appartient à E_+ si et seulement s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'on ait $|u_k| \leq M^k$ pour tout k ; dans ce cas on a $r(u) \geq \dfrac{1}{M}$.

b) Si, pour un réel $M > 0$, on a $|u_k| \geq M^k$ pour tout k, on a $r(u) \leq \dfrac{1}{M}$.

2. Déterminer un nombre réel $\gamma > 0$ tel que l'on ait, pour tout $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \leq \frac{\gamma}{k^2}$$

Deuxième partie

On fixe un nombre complexe a et on désigne par A_a l'endomorphisme de E défini par $(A_a u)_k = (k+a)u_k$ pour tout k.

3. Déterminer le noyau et l'image de A_a.

4. Vérifier que, si a n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $R > 0$, la restriction de A_a à E_R est un isomorphisme de ce sous-espace sur lui-même.

Troisième partie

On définit le produit $u * v$ de deux éléments u et v de E par $(u * v)_1 = 0$ et

$$(u * v)_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i \, v_{k-i} \quad \text{pour} \quad k \geq 2 \, .$$

On fixe deux nombres complexes a et c, a n'étant pas un entier strictement négatif ; on note T l'application de E dans lui-même définie par $Tu = A_a u + c\, u * u$.

5.a) Supposant que $Tu = v$ où u et v sont des éléments de E, écrire u_1 en fonction de v_1, puis u_k en fonction de v_k, $u_1, \ldots, u_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

b) L'application T est-elle injective ? surjective ?

6. On se propose de démontrer que la restriction de T à E_+ est une bijection de ce sous-espace sur lui-même.

a) Vérifier que $T(E_+)$ est inclus dans E_+.

b) Soit $u \in E$ tel que $v = Tu \in E_+$. Démontrer l'existence de nombres réels δ, M, M_0, M_1 strictement positifs satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |k + a| \geq \delta$

(2) $\quad 2|c|\gamma\, M_0 \leq \delta$, où γ est la constante introduite à la question **2.**

(3) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |v_k| \leq M^k$

(4) $\qquad M \leq \delta\, M_0 M_1$

(5) $\qquad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ 2k^2 M^k \leq \delta\, M_0 M_1^k$.

c) Comparer $|u_k|$ et $\dfrac{M_0 M_1^k}{k^2}$.

d) Conclure.

7. *Exemple.* On prend $a = 0$, $c = -1$, $v = \lambda\, e_1$ où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, et on suppose encore $Tu = v$.

a) Montrer que u_k est de la forme $u_k = \alpha_k \lambda^k$ avec $\alpha_k \in \mathbf{R}_+^*$ et

$$2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1 \quad \text{pour tout } k \ .$$

b) En déduire un encadrement de $r(u)$.

Quatrième partie

Pour tout intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ on note $C^\infty(I)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur I. On désigne par a un nombre réel non nul et par D l'endomorphisme de $C^\infty(I)$ défini par

$$(Df)(t) = t\, f'(t) + a\, f(t) \ .$$

8. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $Df = 0$ sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, et préciser leurs intervalles de définition.

9. Dire pour quelles valeurs de a il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, vérifiant $Df = 0$, nulle en 0 mais non identiquement nulle.

Dans la suite, on prend pour I un intervalle de la forme $]0, \theta[$ avec $\theta \in]0, +\infty]$. On désigne par t_0 un point de I, par g une fonction de $C^\infty(I)$, et enfin par α un nombre complexe.

10. Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $Df = g$ sur I telle que $f(t_0) = \alpha$ [on pourra introduire la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} s^{a-1}\, g(s) ds\,]$$

11. On suppose dans cette question que a n'est pas un entier strictement négatif et que g est la restriction à I de la somme d'une série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k\, t^k$ ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

Déterminer α de façon que f soit aussi la restriction à I de la somme d'une série entière ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

12. On se propose d'étudier le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers 0, sous l'hypothèse que $g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

a) Supposant $a < 0$, déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 0.

b) On suppose maintenant que $a > 0$ et que la fonction g, prolongée par 0 au point 0, admet une dérivée à droite en ce point. Trouver un nombre α tel que $f(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers 0.

* *
*