Partie III — Algorithmique et programmation en Caml

Préliminaire : arbre binaire d'entiers

Question III.1

On a bien sûr $|a| = \begin{cases} -1, & \text{si } a = \emptyset \text{ ;} \\ 1 + \max(|\mathcal{G}(a)|, |\mathcal{D}(a)|), & \text{sinon.} \end{cases}$

Question III.2

Pour un jeu fixé de n étiquettes, l'arbre de profondeur minimale est un arbre bien tassé (un arbre dont toutes les feuilles sont à profondeur $|a|$ ou $|a| - 1$) ; l'arbre de profondeur maximale est l'arbre-ligne où par exemple tous les fils gauches sont vides, qui est de profondeur $|a| = n - 1$.

Question III.3

Il est évident que si il y a k nœuds à un certain niveau, il y en a $2k$ au niveau suivant. Comme il y a 1 nœud (la racine) au niveau 0, il y en a bien 2^p à profondeur p.

Question III.4

Alors $n = \sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1} - 1$.

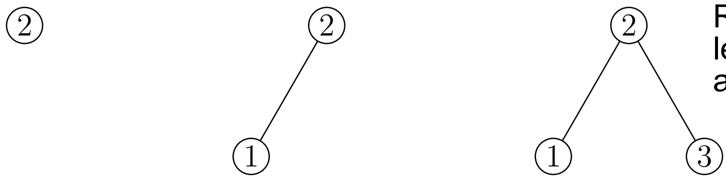
Question III.5

Autrement dit : $p = \lg(n+1) - 1$.

Exercice : arbre binaire de recherche

Question III.6

La fonction auxiliaire `aux1` appelle successivement `ajouter` pour chaque élément de la liste `s`, insérant dans un arbre initialement vide les éléments de la liste.
La fonction auxiliaire `aux2` liste alors récursivement l'arbre obtenu, en ordre symétrique.
On dessine ci-dessous les arbres binaires construits par insertions successives.



Remarque : détailler les entrées/sorties de chaque appel récursif

Figure 2 les insertions successives

Question III.7

On démontre par récurrence sur la taille de l'arbre de recherche p que si r est le résultat de l'appel `ajouter e p`, r est également un arbre de recherche dont l'ensemble (avec répétition) d'étiquettes est égal à celui de p plus l'étiquette e.
Si p est l'arbre vide, alors r est un arbre réduit à sa racine d'étiquette e, qui est bien de recherche.
Sinon, soit x la racine de l'arbre de recherche p.

- ▷ Si $x = e$, l'arbre r a pour fils gauche un arbre r' de racine x, sans fils droit et de fils gauche $\mathcal{G}(p)$. Mais les éléments de $\mathcal{G}(p)$ sont inférieurs ou égaux à $x = e$, donc r' est bien de recherche et tous ses éléments sont inférieurs ou égaux à e. r a pour racine e, pour fils gauche r' dont on vient de parler et pour fils droit $\mathcal{D}(p)$ qui est bien de recherche et dont tous les éléments sont supérieurs strictement à $x = e$: on a bien prouvé que r est de recherche et que ses étiquettes sont e et les étiquettes qui figuraient déjà dans p.
- ▷ Si $e < x$, la racine de r est e, strictement inférieure à tous les éléments de son fils droit qui est l'arbre de recherche $\mathcal{D}(p)$. Le fils gauche de r est l'arbre obtenu par l'appel `ajouter e g`, où $g = \mathcal{G}(p)$. Par hypothèse de récurrence, cet arbre est de recherche, et ses étiquettes sont e et les étiquettes de $\mathcal{G}(p)$, toutes inférieures ou égales à x. Bref, r est de recherche et ses étiquettes sont bien e et les étiquettes qui figuraient déjà dans p.
- ▷ Si $e > x$, la racine est e, supérieure ou égale à tous les éléments de son fils gauche qui est l'arbre de recherche $\mathcal{G}(p)$. Le fils droit de r est l'arbre obtenu par l'appel `ajouter e d`, où $d = \mathcal{D}(p)$. Par hypothèse de récurrence, cet arbre est de recherche, et ses étiquettes sont e et les étiquettes de $\mathcal{D}(p)$, toutes strictement supérieures à x. Bref, r est de recherche et ses étiquettes sont bien e et les étiquettes qui figuraient déjà dans p.

Question III.8
Le fait que les séquences p et r soient de même longueur $m = n$ et que les ensembles d'étiquettes sont égaux (la propriété b) découle de la démonstration précédente.
La propriété c traduit simplement que dans le parcours symétrique de l'arbre réalisé par `aux2`, on liste d'abord les étiquettes du fils gauche, avant la racine, puis les étiquettes du fils droit, ce qui pour un arbre de recherche, revient à lister les étiquettes en ordre croissant.

Question III.9
Soit n le nombre d'étiquettes à trier.
L'appel `aux1 l r` réalise $|\ell|$ appels de `ajouter`.
`ajouter v a` termine car les appels récursifs se font toujours sur des arbres binaires de taille strictement plus petite que la taille de a.
`aux2 a` termine pour la même raison : la taille de l'arbre argument diminue strictement à chaque appel récursif.

Question III.10
Le coût d'un appel `ajouter v a` est la longueur de la branche suivie lors des appels récursifs. Le coût de `aux1 l r` est celui de $|\ell|$ appels de `ajouter`. `aux2 a` visite tous les nœuds de l'arbre et coûte donc le nombre de ces nœuds.
Le cas le pire est donc celui où la profondeur de l'arbre construit est maximale : c'est le cas quand la liste s est une liste strictement monotone d'entiers. Dans ce cas, le coût total est $O(n^2)$.
Le cas le plus favorable est celui où l'arbre construit est de profondeur minimale, donc quasi-complet à chaque instant : le coût total est alors $O(n \lg n)$. Comme l'insertion se fait aux feuilles, on peut par exemple, pour $n = 15$, considérer la séquence $s = (15, 13, 14, 3, 5, 11, 1, 2, 4, 6, 9, 10, 12)$.

Problème : représentation de systèmes creux

Question III.11
On raisonne par récurrence sur p, le résultat étant évident si $p = 0$.
Supposons donc qu'on ait numéroté les nœuds à profondeur p avec les entiers de 2^p à $2^{p+1} - 1$.
Notons que cet intervalle d'entiers est exactement égal à $I_p = \{i \in \mathbb{N}^*, p \leqslant \lg i < p+1\}$.
Quand i décrit I_p, $2^p + i$ décrit $J_p = [2^{p+1}, 2^{p+1} + 2^p - 1]$ et $2^{p+1} + i$ décrit $K_p = [2^{p+1} + 2^p, 2^{p+2} - 1]$. Les intervalles J_p et K_p sont disjoints et $J_p \cup K_p = I_{p+1}$: cela permet d'assurer l'hérédité de la récurrence.

Question III.12
Bien sûr, les intervalles I_p sont eux-mêmes deux à deux disjoints, ce qui garantit l'unicité de la numérotation.

Question III.13
On raisonne là encore par récurrence sur p.
Si $p = 0$, on considère la racine, de numéro $n = 1 = 2^p$ et d'occurrence $\langle\rangle$.
Si $p = 1$, le nœud d'occurrence $\langle 0 \rangle$ porte le numéro $n = 2 = 2^1 + 0.2^0$ et le nœud d'occurrence $\langle 1 \rangle$ porte le numéro $n = 3 = 2^1 + 1.2^0$.
Supposons que le résultat soit acquis pour tout nœud de profondeur au plus égale à p. Considérons un nœud numéroté n, de profondeur $p+1$, et notons $\langle c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$ l'occurrence de son père et m le numéro de ce père. Alors :

- ▷ si le nœud considéré est fils gauche de son père, $c_{p+1} = 0$; donc

$$n = m + 2^p = 2^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+1} 2^i + 2^p = 2^{p+1} + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+1} 2^i = 2^{p+1} + \sum_{i=0}^{p} c_{i+1} 2^i;$$

- ▷ si c'est le fils droit, $c_{p+1} = 1$; donc

$$n = m + 2^{p+1} = 2^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+1} 2^i + 2^{p+1} = 2^{p+1} + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+1} 2^i + 2^p = 2^{p+1} + \sum_{i=0}^{p} c_{i+1} 2^i.$$

On a bien réussi à enclencher la récurrence dans les deux cas.

Question III.14
D'après le calcul précédent, c_i n'est autre que le reste dans la division par 2 de $\left\lfloor \dfrac{n}{2^{i-1}} \right\rfloor$.

Question III.15
On écrit facilement le programme 1.

```
let rec taille = function
  | Vide -> 0
  | Fourche(g,d) -> (taille g) + (taille d)
  | Noeud(g,_,d) -> 1 + (taille g) + (taille d) ;;
```

Programme 1 la fonction `taille`

Question III.16
Il s'agit ici de parcourir le graphe en mettant à jour le couple $mm = (m, M)$ des indices minimum et maximum rencontrés.
On écrit une fonction auxiliaire `minimax` qui travaille sur ces couples, et une fonction récursive `parcours` qui admet 4 arguments : le couple $mm = (m, M)$, l'indice courant n, et $\pi = 2^p$. On obtient le programme 2.

```
let bornes a =
  let minimax (a,b) (c,d) = (min a c, max b d)
  in
  let rec parcours mm n pi = function
    | Vide -> mm
    | Fourche(g,d) -> parcours (parcours mm (n+pi) (2*pi) g) (n+2*pi) (2*pi) d
    | Noeud(g,_,d) -> parcours (parcours (minimax mm (n,n)) (n+pi) (2*pi) g)
                               (n+2*pi) (2*pi) d
  in
    parcours (max_int,0) 1 1 a ;;
```

Programme 2 la fonction `bornes`

Remarques : `max_int` est le plus grand entier représentable en machine, et est donc l'élément neutre de la fonction `min` ; l'appel à `minimax` n'est effectué que dans le cas d'un `Noeud`, évidemment.

Question III.17
Le résultat de III.13 permet d'observer que si i est le numéro d'un nœud de l'arbre a, qui se trouve dans le fils gauche g de la racine, alors i est pair et, de plus, le même nœud, dans la numérotation du sous-arbre g, porte le numéro $i/2 = \lfloor i/2 \rfloor$.
Le résultat est le même dans le cas où i est impair : le nœud figure alors dans le fils droit d de la racine (sauf si $i = 1$, bien sûr, qui est le cas de la racine elle-même), et, de plus, son numéro dans la numérotation du sous-arbre d est égal à $(i-1)/2 = \lfloor i/2 \rfloor$.
On en déduit l'écriture du programme 3.

```
let rec remplacer i e = function
  | Vide -> Vide
  | Fourche(g,d) ->
      if i = 1 then Noeud(g,e,d) (* ou : failwith "pas de valeur à l'indice i" *)
      else if i mod 2 = 0 then Fourche(remplacer (i/2) e g, d)
      else Fourche(g, remplacer (i/2) e d)
  | Noeud(g,v,d) ->
      if i = 1 then Noeud(g,e,d)
      else if i mod 2 = 0 then Noeud(remplacer (i/2) e g, v, d)
      else Noeud(g, v, remplacer (i/2) e d) ;;
```

Programme 3 la fonction `remplacer`

Question III.18
On peut écrire quelque chose comme

$$(\mathcal{V}_{min}(v) = \min\{\iota(x), x \in \mathcal{N}(\mathcal{V}_a(v))\}) \wedge (\mathcal{V}_{max}(v) = \max\{\iota(x), x \in \mathcal{N}(\mathcal{V}_a(v))\})$$
$$\wedge(\forall x \in \mathcal{N}(\mathcal{V}_a(v)), \mathcal{E}(x) \neq \mathcal{V}_d(v))$$
$$\wedge(\mathcal{V}_t(v) = \mathrm{Card}\{\mathcal{E}(x), x \in \mathcal{N}(\mathcal{V}_a(v))\}) \wedge (\forall x \in \mathcal{F}(\mathcal{V}_a(v)), \mathcal{G}(x) \neq \emptyset \vee \mathcal{D}(x) \neq \emptyset),$$

où on a noté $\iota(x)$ l'indice d'un nœud x.

Question III.19
On écrit le programme 4. La fonction `verification` prend en argument l'indice courant n, $\pi = 2^p$ (où p est la profondeur courante) et l'arbre à analyser : elle déclenche l'exception `Incorrect` dans le cas d'une fourche vide, ou d'un nœud dont la valeur est égale à la valeur par défaut ou dont l'indice n'est pas dans l'intervalle prévu. Si tout va bien, elle renvoie le nombre de nœuds rencontrés.

```
exception Incorrect ;;

let valider (imin,imax,t,v,a) =
  let rec verification n pi = function
    | Vide -> 0
    | Fourche(Vide,Vide) -> raise Incorrect
    | Fourche(g,d) -> (verification (n+pi) (2*pi) g)
                    + (verification (n+2*pi) (2*pi) d)
    | Noeud(g,x,d) -> if n < imin || n > imax || x = v then raise Incorrect
                 else (verification (n+pi) (2*pi) g)
                      + 1 + (verification (n+2*pi) (2*pi) d)
  in
    try verification 1 1 a = t with Incorrect -> false ;;
```

Programme 4 la fonction `valider`

Question III.20
On s'inspire du programme 3 pour écrire le programme 5 : la fonction récursive `trouver` n'est utilisée que si l'indice proposé sort du domaine $[imin, imax]$.

```
let lire i (imin,imax,t,v,a) =
  let rec trouver i = function
    | Vide -> v
    | Fourche (g,d) ->
       if i = 1 then v
       else trouver (i/2) (if i mod 2 = 0 then g else d)
    | Noeud(g,x,d) ->
       if i = 1 then x
       else trouver (i/2) (if i mod 2 = 0 then g else d)
  in
    if i < imin || i > imax then v
    else trouver i a ;;
```

Programme 5 la fonction `lire`

Question III.21
On propose le programme 6, page 7.
La fonction `modifie` renvoie le sous-arbre courant modifié et `dt` qui vaut 1 si un nouveau nœud a été créé : il s'agit du cas où x remplace la valeur par défaut.

```
let ecrire i x (imin,imax,t,v,a) =
  let rec modifie i = function
    | Vide ->
       if i = 1 then (Noeud(Vide,x,Vide),1)
       else let (a',_) = modifie (i/2) Vide in
         if i mod 2 = 0 then (Fourche(a',Vide),1)
         else (Fourche(Vide,a'),1)
    | Fourche(g,d) ->
       if i = 1 then (Noeud(g,x,d),1)
       else if i mod 2 = 0 then let (g',dt) = modifie (i/2) g in (Fourche(g',d),dt)
       else let (d',dt) = modifie (i/2) d in (Fourche(g,d'),dt)
    | Noeud(g,w,d) ->
       if i = 1 then (Noeud(g,x,d),0)
       else if i mod 2 = 0 then let (g',dt) = modifie (i/2) g in (Noeud(g',w,d),dt)
       else let (d',dt) = modifie (i/2) d in (Noeud(g,w,d'),dt)
  in
  let (a',dt) = modifie i a in
    (min i imin, max i imax, t+dt, v, a') ;;
```

Programme 6 la fonction `ecrire`

Question III.22
Le programme 7 reprend les idées précédentes. On suppose ici, pour simplifier un peu, que la somme de deux éléments des vecteurs arguments ne peut jamais être égale à la valeur par défaut.

```
let somme (im1,iM1,t1,v1,a1) (im2,iM2,t2,v2,a2) =
  let rec ajoute = function
    | (Vide,Vide) -> (Vide,0)
    | (Vide,a) -> (a,taille a)
    | (a,Vide) -> (a,taille a)
    | (Fourche(g1,d1),Fourche(g2,d2)) ->
       let (g,tg) = ajoute (g1,g2) and (d,td) = ajoute (d1,d2) in
         (Fourche(g,d),tg+td)
    | (Fourche(g1,d1),Noeud(g2,x2,d2)) ->
       let (g,tg) = ajoute (g1,g2) and (d,td) = ajoute (d1,d2) in
         (Noeud(g,x2,d),tg+td+1)
    | (Noeud(g1,x1,d1),Fourche(g2,d2)) ->
       let (g,tg) = ajoute (g1,g2) and (d,td) = ajoute (d1,d2) in
         (Noeud(g,x1,d),tg+td+1)
    | (Noeud(g1,x1,d1),Noeud(g2,x2,d2)) ->
       let (g,tg) = ajoute (g1,g2) and (d,td) = ajoute (d1,d2) in
         (Noeud(g,x1 +. x2,d),tg+td+1)
  in
  if v1 <> v2 then failwith "la valeur par défaut doit être commune"
  else
    let (a,t) = ajoute (a1,a2) in
      (min im1 im2, max iM1 iM2, t, v1, a) ;;
```

Programme 7 la fonction `somme`