DM n$^{\text{o}}$2

EXERCICE 2

Polynômes trigonométriques aléatoire — Soient un entier $n \geq 1$, $(a_1, ..., a_n)$ un élément de $\mathbf{C}^n$ et p le polynôme trigonométrique défini par :

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

1. Inégalité de Bernstein faible

   (a) Calculer pour tout élément k de $\mathbf{Z}$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$. En déduire l'expression de chaque coefficient de p au moyen d'une intégrale ayant pour bornes 0 et 2π.

   (b) Etablir la majoration :

   $$\|p'\|_\infty \leq \frac{n(n+1)}{2}\|p\|_\infty.$$

   On pose désormais $\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (c) Démontrer qu'il existe un segment S de $\mathbf{R}$ de longueur $\frac{1}{\alpha_n}$ tel que pour tout élément t de S,

   $$|p(t)| \geq \frac{\|p\|_\infty}{2}.$$

2. Dans la suite Ω est l'ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ tels que pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $\omega_k \in \{-1, 1\}$, autrement dit $\Omega = \{-1, 1\}^n$

   On munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est notée $\mathrm{E}(X)$.

   Pour $k = 1, \ldots, n$, X_k est la variable aléatoire qui à tout élément $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de Ω associe ω_k (k^{e} projection).

   Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et que pour $k = 1, \ldots, n$, X_k suit la loi :

   $$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

3. Majoration de l'espérance

   Dans la suite λ est un réel strictement positif.

   (a) Démontrer que, pour tout x réel, $\mathrm{ch}x \leq \exp(\frac{x^2}{2})$.

   (b) Soit Z la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$. Calculer $\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda\Re(Z)\big)\Big)$.

(c) Démontrer que

$$\mathrm{E}\Big(\exp\left(\lambda|\Re(Z|)\right)\Big) \leq 2\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\Re(a_k)\right)^2\right).$$

En déduire que

$$\mathrm{E}\Big(\exp\left(\lambda|Z|\right)\Big) \leq 2\exp\left(\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|(a_k)|^2\right).$$

4. Inégalité de Salem et Zigmun

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note p_ω le polynôme trigonométrique :

$$p_\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega)\exp(\mathrm{i}k\,\cdot).$$

Pour élément t des $\mathbf{R}$, soit Z_t la variable aléatoire :

$$Z_t\ :\ \Omega \to \mathbf{C}\,;\ \omega \mapsto p_\omega(t).$$

Soit enfin M la variable aléatoire donnée par, pour tout $\omega \in \Omega$, :

$$M(\omega) = \|p_\omega\|_\infty.$$

(a) Pour tout $\omega \in \Omega$, démontrer l'inégalité :

$$\frac{1}{\alpha_n}\exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right) \leq \int_0^{2\pi} \exp(\lambda|Z_t(\omega)|)\ \mathrm{d}t$$

(b) En déduire :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda M}{2}\right)\right) \leq 4\pi\alpha_n\exp\left(\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right).$$

(c) Démontrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$M(\omega) \leq 2\left(\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\lambda} + \lambda\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right).$$

En déduire qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$M(\omega) \leq 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}.$$

Correction du DM n°2

EXERCICE 2

Polynômes trigonométriques aléatoire —

1. Inégalité de Bernstein faible

   (a) Soit $k \in \mathbf{Z}^*$. Si $k \neq 0$, alors :

   ......

   sinon :

   .....

   Conclusion : $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t =}$

   Soit $p \in [\![1, n]\!]$, par linéarité de l'intégrale ;

   $$\underline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}p(t)\mathrm{d}t = \text{........} = a_p.}$$

   (b) • La question précédente donne pour $k = 1, 2, ...n$:

   $$|a_k| \leq \text{............} = \|p\|_\infty.$$

   • Soit $t \in \mathbf{R}$, par le premier point :

   $$\underline{|p(t)| \leq \text{.........}\frac{n(n+1)}{2}\|p\|_\infty.}$$

   (c) Par continuité de $|p|$ sur le segment $[0, 2\pi]$ on dispose de $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $p(t_0) = \sup_{t\in[0,2\pi]} |p(t)|$; puis par 2π-périodicité de $|p|$,

   $$|p(t_0)| = \|p\|_\infty.$$

   Posons $\boxed{S = \left[t_0 - \frac{1}{2\alpha_n}, t_0 + \frac{1}{2\alpha_n}\right]}$. Pour tout élément t de S,

   $$|p(t)| \geq |p(t_0)| - |p(t_0) - p(t)| = |p(t_0)|\text{.............}$$

   Remarque. *L'inégalité des accroissement finis est au programme de MPSI, clairement dans le cas des applications à valeurs réelles, il est moins clair qu'elle le soit pour celles à valeurs dans* $\mathbf{C}$. *Cette inéglité figure au programme de seconde année et la preuve en sera considérablement plus brève. Vous pouvez donc soit l'utiliser, soit la redémontrer en intégrant.*

Soit $\epsilon_1\epsilon_2, ..., \epsilon_n$ des éléments de $\{1, -1\}$.
On a $\{X_1 = \epsilon_1, ..., X_n = \epsilon_n\} = \{(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)\}$, donc comme $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme,

$$\mathbf{P}(X_1 = \epsilon_1, ..., X_n = \epsilon_n) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^n}.$$

Par ailleurs $\{X_1 = \epsilon_1\} = \Big\{(\epsilon_1, \omega_2, ..., \omega_n\}, (\omega_2, ..., \omega_n) \in \{-1, 1\}^{n-1}\Big\}$, donc............
La fin de la question est insignifiante....
On a au passage montré que et que pour $k = 1, \ldots, n$, X_k suit la loi de Randmacher :

$$\boxed{\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.}$$

3. Majoration de l'espérance

(a) **Remarque.** *On peut, pour cette question incontournable des probabilités, procéder par étude de fonction, mais une telle méthode et lourde et signe d'un manque de recul et de culture probabiliste.*

Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $\exp(\frac{x^2}{2}) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n}$ et $\operatorname{ch}(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

et on termine sans mal.

(b)

$$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda\Re(Z)\big)\Big) = \mathrm{E}\Big(\exp\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda\Re(a_k)X_k\big)\Big) = \mathrm{E}\Big(\prod_{k=1}^{n} \exp\big(\lambda\Re(a_k)X_k\big)\Big)$$

La mutuelle indépendance de X_1,...,X_n assure celle de $\exp\big(\lambda\Re(a_1)X_1\big)$,...,$\exp\big(\lambda\Re(a_1)X_1\big)$, On conlut alors en utilisant la formule de transfert pour le calcul de l'espérance et la sous question précédente.

(c) Donc par (a) et (b) on a :

$$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda\Re(Z)\big)\Big) \leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda^2(\Re(a_k))^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(\Re(a_k)\big)^2\right). \qquad (1)$$

Les varables $-X_1, -X_2, ..., -X_n$ suivent toutes une loi de Randmacher et héritent de la mutuelle indépendance de $X_1, X_2, ..., X_n$, donc

$$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda\Re(-Z)\big)\Big) = \mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda\Re(Z)\big)\Big)$$

La conclusion vient vite (penser à $\exp(|y|) \leq \exp(y) + \exp(-y)$).

Pour le second point, notons qu'en remplaçant pour $k = 1, ..., n$, le coefficient a_k par $\mathrm{i}a_k$, on a immédiatement une majoration similaire pour $\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|\Im(Z)|\big)\Big)$ on conlut par inégalité triangulaire sur le module, puis par Cauchy-Schwarz on a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|Z|\big)\Big) \leq& \mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|\Re(Z)| + \lambda|\Im(Z)|\big)\Big) = \\ & \mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|\Re(Z)|\big)\exp\big(\lambda|\Im(Z)|\big)\Big) \leq \\ & \text{Cauchy-Schwarz...}\end{aligned}$$

4. Inégalité de Salem et Zigmun

(a) Soit $\omega \in \Omega$. La question 1. (c), avec pour $k = 1, ..., n$, a_k remplacé par $a_k X_k(\omega)$, nous fournit un segment S_ω de longueur $\frac{1}{\alpha_n}$ tel que pour tout élément t de S,

$$|p_\omega(t)| \geq \frac{M(\omega)}{2}.$$

Comme

$$0 \leq \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \leq \frac{1}{\frac{1(1+1)}{2}} = 2 \leq 2\pi,$$

on dispose d'un réel a tel que le segment S_ω soit inclus dans le segement $[a, a+2\pi]$. Alors par 2π-périodicité de $t \mapsto \exp(\lambda |Z_t(\omega)|)$, et positivité de cette application :

$$\int_0^{2\pi} \exp(\lambda |Z_t(\omega)|)\, \mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} \exp(\lambda |Z_t(\omega)|)\, \mathrm{d}t \geq \int_S \exp(\lambda |Z_t(\omega)|)\, \mathrm{d}t.$$

La fin est asinitrottante...

(b) Comme Ω est fini, et par linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda M}{2}\right)\right) = \sum_{\omega\in\Omega} \exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right)\frac{1}{2^n} \leq \sum_{\omega\in\Omega}\int_0^{2\pi} \exp(\lambda|Z_t(\omega)|)\, \mathrm{d}t \frac{1}{2^n} =$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\omega\in\Omega} \exp(\lambda|Z_t(\omega)|)\frac{1}{2^n}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{E}\left(\exp(\lambda|Z_t|)\right)\, \mathrm{d}t.$$

Applique alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la question 3, avec pour $k = 1, ..., n$, a_k remplacé par $a_k e^{ikt}$......

(c) D'après la question, il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$\underline{\exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right) \leq 4\pi\alpha_n \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).}$$

(sinon l'expression de l'espérance exigerait que $\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda M}{2}\right)\right)$ fût strictement plus grande que $4\pi\alpha_n \exp\left(\lambda^2 \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)$.) Appliquons l'exponentielle, fonction croissante, aux deux membres de cette égalité et il vient qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$\underline{M(\omega) \leq 2\left(\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).}$$

Remarque. *Il s'agit là d'un grand classique des probabilités, on a calculé la transformée de Laplace de la variable M,* $\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right)\right.$ *et obtenu un majorant qui est une fonction f du paramètre λ. On étudie ensuite la fonction f pour en trouver le minimum et donc la meilleure majoration, on dit que l'on* optimise *en λ. Bien sûr l'étude de la fonction doit rester au brouillon et on n'écrit que ce qui suit.*

Prenons comme valeur de $\lambda = (???????)^{\frac{1}{2}}$, Pour ce λ, la question précédente assure l'existence de $\omega \in \Omega$ tel que :

$$\underline{M(\omega) \leq 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.}$$