DM n°8

PREMIER EXERCICE

Développement eulérien de la cotangente

Pour tout réel x non entier et tout entier naturel n on pose :

$$S_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{x+j}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite notée $f(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x tel que x, $2x$, $x + \frac{1}{2}$ ne soient pas entiers,
$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$
3. Soit l'application
$$g\ :\ \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f(x) - \pi\mathrm{cotan}(\pi x).$$
Montrer que g est continue et se prolonge à $\mathbf{R}$ en une application continue, que l'on notera encore g.
4. Montrer que $g\left(\frac{x}{2}\right) = 2g(x) - g\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$.
5. En déduire que g est nulle.

DEUXIÈME EXERCICE

Séries de Dirichlet

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'application

$$u_n\ :\ z \mapsto \frac{a_n}{n^z}.$$

La série d'applications $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$, notée souvent et abusivement $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ est appelée série de Dirichlet de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Nous allons l'étudier.

1. Exemples On suppose dans cette question que $a_n = 1$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour quel nombre complexe z la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ est-elle absolument convergente ? On note ζ la somme de cette série. Même question pour $a_n = (-1)^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. On note ϑ la somme de cette série.
2. On suppose qu'il existe un nombre complexe z_1 tel que la série complexe $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^{z_1}}$ converge absolument. Montrer que la série de Dirichlet $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ converge uniformément sur l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} | \Re(z) \geq \Re(z_1)\}$.
3. Soient α et β des réels tels que $0 < \alpha < \beta$ et z un nombre complexe. En notant x la partie réelle de z, montrer que :
$$\left|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right| \leq \left|\frac{z}{x}\right| \left|e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right|. \tag{1}$$
4. On suppose que la série $\sum_{n=1} a_n$ converge. On veut montrer la convergence simple de la série de Dirichlet $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} | \Re(z) > 0\}$ et pour tout élément a de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sa convergence uniforme sur l'ensemble U_a définie par :
$$U_a := \{z \in \mathbf{C} | \Re(z) > 0 \text{ et} |\mathrm{Arg}(z)| < a\}.$$
   (a) Pour tout n et tout m des entiers tels que $1 \leq n < m$, et tout complexe z, on pose :
   $$A_{n,m} := \sum_{k=n}^{m} a_k\,;\ C_{n,m}(z) := \sum_{k=n}^{m} a_k \frac{1}{k^z}.$$
   Exprimer, pour tout n et tout m entiers tels que $1 \leq n < m$, et tout complexe z, $C_{n,m}$ en fonction des $A_{n,p}$, $p = n, \ldots, m$ et de z.

(b) Conclure.

5. Soit z_0 un nombre complexe. On suppose que la série $\sum\limits_{n=1} a_n \frac{1}{n^{z_0}}$ converge. Montrer la convergence simple de la série de Dirichlet $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} | \Re(z) > \Re(z_0)\}$ et pour tout élément a de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sa convergence uniforme sur l'ensemble U_a définie par :
$$U_a := \{z \in \mathbf{C} | \Re(z - z_0) > 0 \text{ et} |\mathrm{Arg}(z - z_0)| < a\}.$$
6. On suppose jusqu'à la fin que la série $\sum\limits_{n=1} a_n \frac{1}{n^{z_0}}$ converge. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des parties de $\mathbf{C}$ de la forme $\{z \in \mathbf{C} | \Re(z) > a\}$, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, sur lesquelles la série de Dirichlet $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ converge admet un plus grand élément D.
Dans la suite f désigne l'application
$$f\ : D \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z}.$$
7. Montrer que f est continue.
8. Montrer que f est nulle si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est nulle.
9. Comment définir le produit de deux séries de Dirichlet, de manière pertinente ?

TROISIÈME EXERCICE

Un théorème de Borel.

On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème de Borel — Soit $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre complexes. Il existe une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout élément j de $\mathbf{N}$, $f^{(j)}(0) = a_j$.

On admet provisoirement qu'il existe une application ϕ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que l'on ait :
— pour tout réel x, $0 \le \phi(x) \le 1$;
— la fonction ϕ est nulle en dehors de $[-2, 2]$;
— pour tout élément x de $[-1, 1]$, $\phi(x) = 1$.

1. On suppose que $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est bornée. Prouver dans ce cas le théorème.
2. On revient au cas général. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. On pose :
$$f_n\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\, x \mapsto \frac{a_n}{n!} x^n \phi(\lambda_n x).$$
Montrer que l'on peut choisir la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sorte que
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \|f_n^{(k)}(x)\| \le 2^{-n},$$
pour tout k tel que $0 \le k \le n - 1$.
Pour un tel choix de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que la séries $\sum f_n$ converge et conclure.
3. On s'intéresse à l'existence de l'application ϕ.
Soit l'application $\chi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{sinon }. \end{cases}$
   (a) Montrer que χ est $\mathcal{C}^\infty$
   (b) Soient a et b des réels tels que $a < b$. Montrer l'existence d'une application $\psi_{a,b}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors du segment $[a, b]$, strictement positive en dehors de ce segment.
   Indication : on utilisera χ.
   (c) Conclure à l'existence de l'application ϕ.

On voit donc que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont très maléables et leur graphe est un peu un fil de fer que l'on contraint à l'envie. Toutes autres sont les fonctions développables en séries entières au voisinage de chaque point (fonctions analytiques). La théorie des fonctions analytiques ne se comprend que si l'on se place dans $\mathbf{C}$ et leur graphe est la restriction à $\mathbf{R}$ du graphe d'une fonction complexe analytique, la partie réelle d'une fonction analytique complexe est une fonction harmonique, fonction dont le graphe peut être imaginé comme une plaque élastique déformée (cf exercices du chapitre 7), ce qui confère au graphe d'une fonction analytique réelle une certaine rigidité, bien loin de la souplesse du graphe d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Indication DM n°8

PREMIER EXERCICE

Développement eulérien de la cotangente

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout réel x non entier,

$$S_n(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x^2 - j^2}.$$

Reste à étudier la série $\sum\limits_{j \geq 1} \frac{1}{j^2 - x^2} \cdots$

2. Soit un réel x tel que x, $2x$, $x + \frac{1}{2}$ ne soient pas entiers, Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} S_n(x) + S_n\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{x+j} + \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{x + \frac{1}{2} + j} \\ &= \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2x+2j} + \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2x+1+2j} \\ &= \ldots. \end{aligned}$$

3. La continuité de g résulte de celle de f, la continuité de f peut se prouver en montrant la convergence normal d'une série au voisinage de tout réel non entier, mais il est plus simple pour rédiger de commencer à observer que f est 1-périodique (changement d'indice de sommation « $k = j+1$ ») et paire (changement d'indice de sommation « $k = -j$ »). Il nous suffit donc de prouver la continuité sur $]0, 1[$. Mais pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} + 2x \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - j^2} \cdots$$

Pour montrer que g se prolonge par continuité à $\mathbf{R}$, il suffit de montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0. Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$$g(x) = \underbrace{f(x) - \frac{1}{x}}_{\text{prolongeable par cté à}]-1,1[} + \left(\frac{1}{x} - \pi \text{cotan}(\pi x)\right) \ldots$$

4. Pour tout réel x tel que x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ne soient pas entiers,

$$2\pi \text{cotan}(\pi x) = 2\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \ldots donc$$

$\text{g}\left(\frac{x}{2}\right) = 2g(x) - g\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$, égalité que la continuité de g étend à $\mathbf{R}$.

5. La continuité de g sur le segment $[0, 1]$ veut que $|g|$ atteigne son maximum en un point c de $[0, 1]$. Mais par 4. et récurrence on établit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left|g\left(\frac{c}{2^n}\right)\right| = \max\limits_{x \in [0,1]} |g(x)|$.

On en déduit la nullité sur $[0, 1]$, puis $\mathbf{R}$.

TROISIÈME EXERCICE

Un théorème de Borel.

1. La série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini....
2. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par la formule de Leibnitz, pour tout réel x,

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \frac{n!}{p!} x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \phi^{(n-p)}(\lambda_n x).$$

Comme ϕ est nulle sur le complémentaire de $[-2,2]$, pour tout entier i et tout réel x tel que $x > \frac{2}{|\lambda_n|}$, $\phi^{(i)}(\lambda x) = 0$, et de plus par continuité des dérivées de ϕ on peut définir $M_i = \sup_{y\in[-2,2]} |\phi^{(i)}(y)|$.

Alors pour tout réel x, en imposant $\lambda_n \geq 1$ on arrive à :

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq |a_n| \sum_{p=0}^{k} \frac{2^n}{|\lambda_n|} M_{n-p} \leq |a_n| \frac{2^n}{|\lambda_n|} \mathcal{M},$$

en posant $\mathcal{M}_n = \sum_{p=0}^{k} |\lambda_n| M_{n-p}$....

Soit $h \in \mathbf{N}^*$. D'après la précédente majoration, pour $p = 0, 1, ..., h$ les séries $\sum_{i\geq h+1} f_i^{(p)}$ convergent normalement (sur $\mathbf{R}$). On peut appliquer le théorème qui prouve que $\sum_{i=h+1}^{+\infty} f_i$ est de classe $\mathcal{C}^h$. Cette application diffère de f d'un nombre fini d'applications $\mathcal{C}^h$...

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, puisque f_i et $t \mapsto \frac{a_i}{i!} t^i$ coïncident au voisinage de 0, ces deux applications ont mêmes dérivées en 0, c'est la clef !

3. ICI IL FAUT DES FIGURES !

   (a) Voir cours sur les révisions sur les fonctions d'une variable réelle.

   (b) Les fonctions $\chi(\cdot\ + a)$ et $\chi(-\cdot\ + b)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition de telles applications, donc leur produit, noté $\psi_{a,b}$ itou. On vérifie sans mal (et les figures y aident) que $\psi_{a,b}$ est strictement positive sur $]a, b[$ nulle en dehors du segment $[a, b]$.

   (c) Songez à la primitive nulle en $-\infty$ de $\psi_{-2,-1}$ ...