Corrigé du devoir de rentrée

1 Suites hypergéométriques

1. Soit $u = (u_n)$ une suite géométrique à valeurs réelles. Il existe donc $q \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Si $q \neq 0$, on peut poser $P = q$ et $Q = 1$. On a alors deux polynômes (constants) tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$. La suite u est donc hypergéométrique. Si $q = 0$, alors u est la suite nulle et on peut prendre n'importe quels polynômes P et Q non nuls.
2. Soit $n \geqslant p$; on vérifie en revenant à la définition par les factorielles du coefficient binomial que $(n+1-p)u_{n+1} = (n+1)u_n$. Cette égalité est encore valable pour $n \in [\![0, p-1]\!]$, parce que u_n et u_{n+1} sont alors tous les deux nuls, sauf si $n = p-1$, auquel cas $u_n = 0$ et $n+1-p = 0$, donc l'égalité reste aussi valable. Posons donc $P = X+1$ et $Q = X+1-p$; on obtient deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$. La suite de terme général $\binom{n}{p}$ est donc hypergéométrique.
3. Montrons que l'ensemble des suites qui vérifient la relation (1), que l'on notera $\mathcal{F}$, est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. La suite nulle vérifie évidemment (1) ; soit u, v deux suites vérifiant (1) et λ, μ deux réels. Posons $w = \lambda u + \mu v$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q(n)w_{n+1} = Q(n)(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) = \lambda P u_n + \mu P v_n = P w_n$, donc w vérifie aussi la relation (1).
   Soit u une suite de $\mathcal{F}$. En évaluant en $n = 1$, on obtient $u_2 = 0$. En évaluant en $n = 3$, on obtient $u_4 = 2u_3$. Comme pour tout $n \geqslant 3$, $Q(n) \neq 0$, on peut écrire que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)}u_n = (n-1)u_n$, relation également valable pour $n = 3$. On introduit l'application
   $$\varphi : \begin{cases} \mathcal{F} \to \mathbf{R}^3, \\ u \mapsto (u_0, u_1, u_3) \end{cases}$$
   dont on vérifie facilement qu'elle est linéaire. De plus, si $\varphi(u) = 0$, alors d'après les remarques précédentes, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$. L'application φ est donc injective. Montrons qu'elle est surjective : soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. En définissant la suite u telle que $u_0 = x, u_1 = y, u_3 = z$, $u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = (n-1)u_n$, on définit une suite $u \in \mathcal{F}$ telle que $\varphi(u) = (x, y, z)$.
   On en conclut que φ est un isomorphisme, donc que $\dim \mathcal{F} = \dim \mathbf{R}^3 = 3$.
   Pour déterminer une base de $\mathcal{F}$, on peut considérer la famille $(u, v, w) = (\varphi^{-1}(e_1), \varphi^{-1}(e_2), \varphi^{-1}(e_3))$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbf{R}^3$. D'après le cours sur les isomorphismes, c'est bien une base de $\mathcal{F}$. On trouve facilement que u est la suite telle que $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$; v est la suite définie par $v_1 = 1$ et $v_n = 0$ pour tout $n \neq 1$. Enfin, w est la suite de terme général $(n-2)!$ (vérification par récurrence).
4. On montre par récurrence que pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, $u_n = 0$. Initialisation : on a $P(n_0)u_{n_0} = Q(n_0)u_{n_0+1}$, donc, puisque $Q(n_0) \neq 0$ et $P(n_0) = 0$, on en déduit que $u_{n_0+1} = 0$. Hérédité : soit $n \geqslant n_0 + 1$ et supposons que $u_n = 0$. On a $P(n)u_n = 0 = Q(n)u_{n+1}$ avec $Q(n) \neq 0$, donc $u_{n+1} = 0$. En conclusion, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, $u_n = 0$.

2 Polynômes de Laguerre

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $L_0(x) = e^x \Phi_0(x) = e^x e^{-x} = 1$; $L_1(x) = e^x \Phi_1'(x) = e^x e^{-x}(-x+1) = -x+1$; $L_2(x) = \frac{e^x}{2} e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$; $L_3(x) = \frac{e^x}{6} e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)$.

2. D'après la formule de Leibniz,
$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-x}\frac{n!}{k!}x^k.$$
L'écriture ci-dessus montre que L_n est une fonction polynomiale de degré n et que son coefficient $c_{n,k}$ de degré k est $\frac{1}{n!}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k!}\binom{n}{k}$.
3. On trouve facilement $\Phi_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x) = n!e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x))$.
4. De la relation $\Phi_{n+1}(x) = x\Phi_n(x)$, on en déduit en dérivant $n+1$ fois par la formule de Leibniz que $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\Phi_n^{(n+1)}(x) + n\Phi_n^{(n)}(x)$. En utilisant les deux relations de la question précédente, on trouve alors
$$(n+1)!L_{n+1}(x)e^{-x} = xn!e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)!L_n(x)e^{-x},$$
soit en simplifiant et en regroupant
$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}L_n'(x).$$
5. D'une part, $\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (\Phi_{n+1}^{(n+1)})'(x) = (n+1)!e^{-x}(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x))$; d'autre part, $\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (\Phi_{n+1}')^{(n+1)}(x)$. Or $\Phi_{n+1}'(x) = e^{-x}((n+1)x^n - x^{n+1})$, dont la dérivée $n+1$-ième vaut $(n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$, *i. e.*, $(n+1)!L_{n+1}(x)e^{-x} + (n+1)(n!L_n(x)e^{-x})'$. En comparant ces deux expressions de $\Phi_{n+1}^{(n+2)}$, on trouve
$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x).$$
6. On dérive la relation (4) et on injecte l'expression de L_{n+1}' obtenue en question 5.
7. Soit a_dx^d le monôme dominant de P, avec $d \geqslant 1$. Le terme de degré d du membre de gauche de (2) est $a_d(-d+n)x^d$ et il est par ailleurs nul, donc $d = n$.
8. L'équation (2) étant linéaire, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel. L'ensemble des solutions polynomiales de (2) est encore un espace vectoriel parce que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

   En cherchant les solutions polynomiales de (2) sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, on trouve, après un travail technique de réindiçage, la relation valable pour tout $x \in \mathbf{R}$
$$\sum_{k=0}^{n-1}((k+1)^2a_{k+1} + (n-k)a_k)x^k = 0.$$
   Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$a_{k+1} = \frac{k-n}{(k+1)^2}a_k.$$
   On vérifie alors par récurrence que $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}a_0$. On retrouve ainsi les coefficients de la fonction polynomiale L_n (cf. q2) si l'on impose $a_0 = 1$. L'ensemble des solutions polynomiales de (2) est donc $\mathrm{Vect}(L_n)$, qui est une droite vectorielle.

3 La loi hypergéométrique

Premiers résultats

1. Soit $u, v, N \in \mathbf{N}$. Si $N > u+v$, la formule (4) est vraie parce que l'on a 0 dans les deux membres (par convention, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ et une somme vide vaut 0). Supposons donc $N \leqslant u+v$ et considérons le polynôme $(1+X)^{u+v}$. Par la formule du binôme de Newton, son coefficient de degré N est $\binom{u+v}{N}$; par ailleurs $(1+X)^{u+v} = (1+X)^u(1+X)^v$ et le terme de degré N d'un produit de deux polynômes est obtenu en faisant la somme des produits des termes de degré k et $N-k$, pour $k \in [\![0, N]\!]$. On trouve bien
$$\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}.$$
2. Interprétation : on considère une urne contenant u boules de couleur blanche et v boules de couleur noire. Le nombre de façons de tirer N boules de cette urne vaut d'une part $\binom{u+v}{N}$, et d'autre part $\sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}$ en remarquant que l'ensemble des paquets de N boules à k boules blanches et $N-k$ boules noires pour $k \in [\![0, N]\!]$ forme une partition de l'ensemble des paquets à N boules.
3. Les $\mathbf{P}(Y=k)$ étant des réels positifs, il suffit de vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Y=k) = 1$. On utilise pour cela la formule de Vandermonde :
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Y=k) = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k} = \frac{1}{\binom{A}{n}} \binom{pA+qA}{n} = 1$$
parce que $pA + qA = A$.
4. Par définition de l'espérance, $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}(Y=k)$. En utilisant que pour tout $k \geqslant 1$, $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$, il vient
$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=1}^{n} pA \binom{pA-1}{k-1}\binom{qA}{(n-1)-(k-1)}$$
et d'après l'identité de Vandermonde, $\sum_{k=1}^{n} \binom{pA-1}{k-1}\binom{qA}{(n-1)-(k-1)} = \binom{A-1}{n-1}$. Il reste à simplifier $\frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}} = \frac{n}{A}$ pour trouver $\mathbf{E}(Y) = np$.
5. Un peu de calcul montre que
$$(k+1)(qA-n+k+1)\mathbf{P}(Y=k+1) = (pA-k)(n-k)\mathbf{P}(Y=k)$$
donc la suite $(\mathbf{P}(Y=k))$ est hypergéométrique, en posant les polynômes $P = (pA-X)(n-X)$ et $Q = (X+1)(qA-n+X+1)$.

Modélisation

1. La variable Z est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On reconnaît une sucession d'épreuves de Bernoulli (de paramètre p) que l'on suppose indépendantes ; leur somme Z suit donc d'après le cours la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Toujours d'après le cours, $\mathbf{E}(Z) = np$ et $\mathrm{V}(Z) = npq$.
2. On retrouve la modélisation de la question 2. Il y a $\binom{A}{n}$ façons de tirer n boules parmi A, qui est le cardinal de l'univers ; parmi ces parties, si on se fixe $k \in [\![0, n]\!]$, il y en a $\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}$ qui ont exactement k boules blanches. Donc
$$\mathbf{P}(Y=k) = \frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}.$$

Calcul de la variance

1. Par définition, $Y = \sum_{i=1}^{pA} Y_i$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=1}^{pA} \mathbf{E}(Y_i) = pA\,\mathbf{E}(Y_1)$ par symétrie des rôles de chaque boule blanche. La probabilité que Y_1 vaille 1 vaut $\frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}} = \frac{n}{A}$ (il y a $\binom{A-1}{n-1}$ paquets de n boules où figure la boule blanche numéro 1) donc $\mathbf{E}(Y_1) = \frac{n}{A}$, puis $\mathbf{E}(Y) = np$. On retrouve le résultat antérieur, et on constate que $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y)$, ce qui n'est pas intuitivement si évident.
2. La variable Y_iY_j est bien à valeurs dans $\{0,1\}$. On a $\mathbf{P}(Y_iY_j) = 1 = \mathbf{P}(Y_i = 1, Y_j = 1)$. Le nombre de paquets de n boules contenant les boules blanches numéro i et j est $\binom{A-2}{n-2}$, donc $\mathbf{P}(Y_iY_j = 1) = \frac{\binom{A-2}{n-2}}{\binom{A}{n}} = \frac{n(n-1)}{A(A-1)}$.
3. D'après le cours sur la variance d'une somme, $\mathrm{V}(Y) = \sum_{i=1}^{pA} \mathrm{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant pA} \mathrm{Covar}(Y_i, Y_j)$. On a pour tout i, $\mathrm{V}(Y_i) = \frac{n}{A}\left(1 - \frac{n}{A}\right)$ et $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbf{E}(Y_iY_j) - \mathbf{E}(Y_i)\,\mathbf{E}(Y_j) = \frac{n(n-1)}{A(A-1)} - \frac{n^2}{A^2}$.
   Après calculs, on trouve
   $$\mathrm{V}(Y) = npq\frac{A-n}{A-1}.$$
   On constate que $\mathrm{V}(Z) = npq > \mathrm{V}(Y)$.

Résultats

1. Lorsque $A \to +\infty$, $\binom{pA}{k} = \frac{(pA)(pA-1)\cdots(pA-k+1)}{k!} \sim \frac{(pA)^k}{k!}$. De même, $\binom{qA}{n-k} \sim \frac{(qA)^{n-k}}{(n-k)!}$ et $\binom{A}{n} \sim \frac{A^n}{n!}$. Donc
   $$\mathbf{P}(X = k) \sim \frac{(pA)^k (qA)^{n-k}}{k!(n-k)!}\frac{n!}{A^n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$
2. C'est un analogue du théorème de Poisson d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Ici, on approche la loi binomiale par une loi hypergéométrique. On remarque que quand le nombre de boules devient très grand devant n, le fait de remettre ou non les boules dans l'urne ne change rien.