

DM bis n°14

Sujet type Mines-Centrale

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de la valeur de la fonction ζ en certains points entiers.

I. Représentation intégrale de sommes de séries

I.A.

I.A.1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$ converge.

I.A.2) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$. En déduire que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

I.B.

Soit r un entier naturel.
Pour quelles valeurs de r la série $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I.C.

I.C.1) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

I.C.2) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $] -1; 1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n .

I.D.

Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) et pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, on note :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt \quad \text{et} \quad I_{p,q}^\varepsilon = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q dt.$$

I.D.1) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p, q) .

I.D.2) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0; 1[, \quad I_{p,q}^\varepsilon = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1}.$$

I.D.3) En déduire que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

I.D.4) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q .

I.E.

Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $] -1; 1[$.

On suppose que pour tout $x \in] -1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que :

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

I.F.

I.F.1) Dédire des questions précédentes que pour tout entier $r \geq 2$:

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt.$$

I.F.2) Établir que l'on a alors $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$.

I.F.3) En déduire que $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$, puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II. La fonction β

II.A. La fonction Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On admettra que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soient x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x .

II.B. La fonction β et son équation fonctionnelle

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$.

II.C. Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée (\mathcal{R}) .

II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation (\mathcal{R}) pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question, on supposera que $x > 1$ et $y > 1$.

II.C.2) Montrer que $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$.

II.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur \mathbb{R}_+ de $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y).$$

II.C.4) Soit $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) du$.

Montrer que G est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

II.C.5) Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$.

II.C.6) Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment $[c; d]$ inclus dans \mathbb{R}_+^* , puis que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1} .

II.C.8) Dédurre de ce qui précède la relation (\mathcal{R}) .

III. La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur \mathbb{R}_+^* comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.A. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$.

III.B. Sens de variation de ψ

III.B.1) À partir de la relation (\mathcal{R}) , justifier que $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$.

III.B.2) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variations sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $y \mapsto \beta(x, y)$?

III.B.3) Montrer que la fonction ψ est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

III.C. Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III.C.1) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

III.C.2) Soit n un entier ≥ 2 et x un réel > -1 . On pose $p = E(x) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Prouver que :

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq H_{n+p} - H_{n-1} \leq \frac{p+1}{n}.$$

III.C.3) En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

III.D. Un développement en série entière

On note g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

III.D.1) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1; +\infty[$.

Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geq 1$.

III.D.2) Montrer que pour tout entier n et pour tout $x \in]-1; 1[$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \zeta(2) |x|^{n+1}.$$

Montrer que g est développable en série entière sur $[-1; 1]$.

III.D.3) Prouver que pour tout x dans $]-1; 1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n.$$

IV. Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $B(x) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1)$.

IV.A. Une relation entre B et ψ

Justifier que B est définie sur \mathbb{R}_+^* .

À l'aide de la relation trouvée au **III.B.**, établir que pour tout réel $x > 0$:

$$xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x)).$$

En déduire que B est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

IV.B. Expression de S_r à l'aide de la fonction B

IV.B.1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$.

IV.B.2) Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$.

IV.B.3) En déduire que pour tout entier $r \geq 2$, $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x)$.

IV.B.4) Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au **I.F.3.**

IV.C. Soit φ la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $\varphi(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$.

IV.C.1) Montrer que φ est \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geq 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

IV.C.2) Conclure que, pour tout entier $r \geq 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k).$$

• • • FIN • • •
