š

MP* Lycée Kérichen **2021-2022**

Interrogation de rentrée

Algèbre générale

1. Définition d'un anneau[1]. *On appelle anneau ...*

2. Caractérisation d'un sous-anneau . *Soit* $(A, +\times)$ *un anneau. Une partie* H *de* A *est un sous-anneau de* A *si et seulement si...*

3. Donner le théorème de Bezout pour des polynômes.

Algèbre linéaire

1. Définition d'un espace vectoriel[2]. Soit $(K, +, \times)$ un corps. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$

1. On définira complétement les propriétés
2. On notera toute les lois $\cdot$, $+$, $\underset{\mathbf{E}}{+}$, $\times$

tout triplet $(\mathbf{E}, \underset{\mathbf{E}}{+}, \cdot)$ où…

2. Définition de l'image et du noyau d'une application linéaire f d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$. Formule du rang.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}}$ une matrice à n lignes p colonnes à coefficients dans $\mathbf{C}$, et $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1\dots n' \\ j=1\dots p'}}$ une matrice à n' lignes et p' colonnes à coefficients dans $\mathbf{C}$ Une condition nécessaire et suffisante sur n, n', p, p' pour que soit défini le produit AB est......................... Lorsque cette condition est réalisée, AB est une matrice à........lignes et......... colonnes et son élément situé sur la ième ligne et jème colonne est

   $c_{i,j} = \dots$

4.) Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$ une matrice à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$. Alors

   $\mathrm{Det}(A) = \sum_{.} \cdots$

Fonction d'une variable réelle

1. (a) Pour tout $x \in$ ...., $\arcsin'(x) =$ ....

   (b) Pour tout $x \in$ ...., $\arctan'(x) =$ ....

   (c) Pour tout $x \in$ ...., $\mathrm{ch}'(x) =$ ....

2. Tacer les graphes des applications arccos et tan.

3. (a) Développement limités au voisinage de 0 à l'ordre p de $\ln(1+x) =$ ....

   (b) Développement limités au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 2 de $\cos(x) =$ ....

   (c) Développement limités au voisinage de 0 à l'ordre p de $(1+x)^\alpha =$ ....
   où α est un réel.

4. Formule de Taylor avec reste intégrale. *Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe........alors pour tout a et tout b réels,*

$$f(b) = f(a) + \sum_{.....}^{.....} \text{..........................} + \int_{....}^{....} \text{.........}$$

Equations différentielles et probabilité

1. Donner les solutions sur R à valeurs réelles des équations différentielles :

   (a) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0.$
   $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....

   (b) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0.$
   $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....

   (c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = e^t.$
   $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....

2. Soit f une application définie sur un intervalle I de classe ....à valeurs réelles ou complexes. L'équation différentielle linéaire du premier ordre $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)y$ admet des solutions définies sur I, ce sont les applications :
   $I \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....

3. *Formule de Bayes* : Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complets d'événements de probabilité non nulle. Alors pour toute partie B de Ω de probabilité non nnulle, et tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(........)\mathrm{P}(..........)}{\sum_{i=1}^{n} ....}.$$

4. t Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω Compléter les formules

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} ....$$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in E} ....$$

Espaces euclidiens

1. Soit $(\mathbf{E}, < \cdot | \cdot >)$ un espace euclidien. Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ d'éléments de $\mathbf{E}$,

2. Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.

3. Formule de polarisation dans un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$: pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ d'éléments de $\mathbf{E}$,

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = ...$$

4. Soit un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$ une base orthonormée de $\mathbf{F}$. Alors le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, noté $p_{\mathbf{F}}(\vec{x})$, est donné par :

$$p_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \sum ....$$