

DS n°2 facultatif

Pour les élèves préparant l'X ou les ENS.

Étude des matrices bistochastiques

La présente étude peut se compléter par l'exercice 35 du chapitre II

Dans tout le problème, \mathbf{R} désigne le corps des nombres réels et \mathbf{N} l'ensemble des entiers naturels et n un entier strictement positif. On note \mathbf{R}^n , l'ensemble des n -uplet (x_1, \dots, x_n) de réel. Pour $i = 1, \dots, n$ la i^{e} composante d'un élément x de \mathbf{R}^n sera noté x_i . Pour z et y dans \mathbf{R}^n , $z \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique de z et de y , c'est-à-dire que l'on a $z \cdot y = \sum_{i=1}^n z_i y_i$. De même, $\|z\|$ désigne la norme euclidienne de z , c'est-à-dire que l'on a $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients réels. Une matrice $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *bistochastique* si, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on a

1. $a_{i,j} \geq 0$;
2. $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$;
3. $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

On note \mathcal{B}_n l'ensemble des matrices bistochastiques de dimension n . Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite de permutation si elle est bistochastique et si tous ses coefficients sont égaux à zéro ou un.

Pour tout couple de réels (i, j) , on note $\delta_{i,j}$ la quantité égale à 1 si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs, on note e le vecteur de \mathbf{R}^n dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie IV des parties II et III.

I. Préliminaires

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ est une matrice de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ on ait

$$a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}.$$

2. Montrer que si A est une matrice de permutation alors A a un déterminant égal à 1 ou à -1. Déterminer l'inverse de A .
3. Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques est une matrice bistochastique.
4. Montrer que si A est une matrice bistochastique et a un vecteur ligne de A , alors $\|a\| \leq 1$ et que l'égalité n'est obtenue que si a est un vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^n .
5. En déduire que les seules matrices bistochastiques d'inverse bistochastique sont les matrices de permutation.

II. Polyèdres convexes

Un demi-espace de \mathbf{R}^n est un sous-ensemble H pour lequel il existe un vecteur x de \mathbf{R}^n et un réel a tels que $H = \{y \in \mathbf{R}^n | x \cdot y \leq a\}$. Pour entier $m \geq 1$, soit $S_m = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^n | \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \text{ et } \forall i \in \{1 \cdot m\}, \lambda_i \geq 0 \right\}$.

On rappelle qu'une partie K de \mathbf{R}^n est dit convexe si pour tout entier $m \geq 1$, pour tout $\lambda \in S$ et toute famille $(x_i)_{i=1, \dots, m}$ d'éléments de K on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in K$.

Par ailleurs, si L est un sous-ensemble de \mathbf{R}^n , on appelle *enveloppe convexe*, notée $\text{co}(L)$, le plus petit convexe contenant L . C'est évidemment l'intersection de tous les ensembles convexes contenant L et on admettra que $\text{co}(L)$ est l'ensemble des barycentres d'éléments de L à coefficients positifs :

$$\text{co}(L) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i | m \in \mathbf{N}^*, (x_i)_{i=1, \dots, m} \in L^m \text{ et } (\lambda_i)_{i=1, \dots, m} \in S_m \right\}.$$

On dit qu'un sous-ensemble K de \mathbf{R}^n est un polyèdre convexe si K est non vide, borné et si K est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. On appelle dimension d'un polyèdre convexe la dimension de l'espace affine qu'il engendre. On dit que s est un sommet du polyèdre convexe K si $s \in K$ et si pour tout couple (y, z) d'éléments de K et tout $t \in]0, 1[$, si $s = ty + (1 - t)z$ alors $y = z = s$.

1. Montrer que S_n , est un polyèdre convexe de \mathbf{R}^n . Déterminer sa dimension et ses sommets.
2. Soit K un polyèdre convexe de \mathbf{R}^n et soit H un hyperplan de \mathbf{R}^n avec $H = \{y \in \mathbf{R}^n | x \cdot y = a\}$, où x est un élément de \mathbf{R}^n et a un réel. On suppose que $H \cap K \neq \emptyset$ et que $K \cap \{y \in \mathbf{R}^n | x \cdot y > a\} = \emptyset$. Un tel H est appelé hyperplan d'appui de K .
Montrer que l'ensemble des sommets du polyèdre $H \cap K$ est égal à l'intersection de l'ensemble des sommets de K et de H .
3. Soit k un point de la frontière de K , polyèdre convexe, montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de K contenant k .
4. Montrer que K , polyèdre convexe, est égal à l'enveloppe convexe de sa frontière.
5. En déduire, par récurrence sur n , que tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

III. L'ensemble B_n , des matrices bistochastiques

Dans cette partie on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et \mathbf{R}^{n^2} en identifiant une matrice $(a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et le n^2 -uplet de ses coefficients, énumérés par exemple une ligne après l'autre :

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$$

On admet sans discussion que ce qui suit est indépendant du mode d'énumération.

1. Montrer que \mathcal{B}_n , est un polyèdre convexe de dimension au plus $(n - 1)^2$.
2. On se propose de montrer que l'ensemble des sommets de \mathcal{B}_n , est égal à l'ensemble des matrices de permutation.
 - (a) Montrer que toute matrice de permutation est un sommet de \mathcal{B}_n .
 - (b) Soit M un élément de \mathcal{B}_n . On suppose qu'aucun coefficient de M n'est égal à 1. Montrer qu'il existe une matrice A dont la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne est nulle et telle que $M + A$ et $M - A$ soient éléments de \mathcal{B}_n , (Faute de mieux on pourra se limiter au cas $n = 2$).
En déduire que si $S = (s_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$ est un sommet de \mathcal{B}_n , alors il existe un couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ tel que pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$ on a $s_{i,k} = \delta_{k,j}$ et $s_{k,j} = \delta_{i,k}$.
 - (c) Conclure grâce à une récurrence.
3. Soit un entier $d \geq 1$. Montrer que si un élément x de \mathbf{R}^d s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i,$$

avec $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbf{R}^d)^m$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in S_m$, alors il existe $\mu \in S_{d+1}$ et $(y_i)_{i=1, \dots, d+1}$ une famille d'éléments de $\{x_1, \dots, x_m\}$, (i.e. $\{y_1, \dots, y_{d+1}\} \in \{x_1, \dots, x_m\}$) tels que

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i y_i,$$

4. En déduire que toute matrice A de \mathcal{B}_m , il existe un entier naturel $m \leq (n-1)^2 + 1$ des matrices de permutation de taille n , A_1, A_2, \dots, A_m et $\lambda \in S_m$, tels que :

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i.$$

IV. Orbite d'un vecteur x de \mathbf{R}^n

Dans cette partie il semble que l'énoncé considère \mathbf{R}^n comme l'ensemble des vecteurs-colonnes à n lignes. Nous n'avons pas corrigé cette maladresse.

1. Soient $x \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n,$$

et i et j deux éléments de $\{1, \dots, n\}$ tels que $i < j$. Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit $y \in \mathbf{R}^n$ tel que :

- $y_i = x_i + \varepsilon \leq x_j$;
- $y_j = x_j - \varepsilon \geq x_i$;
- Pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$ distinct de i et de j , $y_k = x_k$.

Montrer qu'il existe $A_{i,j,\varepsilon} \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = A_{i,j,\varepsilon}x$.

2. On rappelle que pour une fonction ϕ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} convexe, pour tout entier $m \geq 1$, tout élément a de \mathbf{R}^m et tout élément λ de S_m , on a :

$$\phi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(a_i)$$

Soient des éléments x et y de \mathbf{R}^n et $A \in \mathcal{B}_n$, tels que $y = Ax$, montrer que pour toute fonction convexe ϕ on a :

$$\sum_{i=1}^n \phi(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \phi(y_i)$$

3. Supposons, à présent, que x et y soient deux vecteurs de \mathbf{R}^n tels que : $x_1 \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq \dots \leq y_n$ et tels que pour toute fonction convexe ϕ on ait $\sum_{i=1}^n \phi(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \phi(y_i)$. Montrer que l'on a alors :
- Pour tout entier k tel que $1 \leq k < n$, $x_1 + \dots + x_k \leq y_1 + \dots + y_k$;
 - $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$.

Lorsque deux vecteurs x et y vérifient ces dernières relations on dit que y domine x .

4. Soient x et y deux vecteurs de \mathbf{R}^n tels que $x_1 \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \leq \dots \leq y_n$. L'objet de cette question est de démontrer, par récurrence sur n , la propriété **(P)** suivante :

(P) Si y domine x alors il existe $A \in \mathcal{B}_n$, telle que $y = Ax$.

On notera $a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

- (a) Vérifier la propriété **(P)** pour $n = 1$ ainsi que dans le cas général si $x_1 = a$ ou $x_n = a$.
- (b) On suppose, à présent, que $x_1 < a < x_n$, et que la propriété **(P)** est démontrée pour tout entier strictement plus petit que n . Montrer que s'il existe un élément k de $\{1, \dots, n\}$ et que $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k$ alors il existe $A_k \in \mathcal{B}_k$ et $A_{n-k} \in \mathcal{B}_{n-k}$ tels que $y(k) = A_k x_k$ et $y_{n-k} = A_{n-k} x_{n-k}$, où pour tout élément z de \mathbf{R}^n , z_k désigne le vecteur (z_1, \dots, z_k) et z_{n-k} le vecteur (z_{k+1}, \dots, z_n) . Conclure dans ce cas.
- (c) On suppose à présent que toutes les inégalités sont strictes, c'est-à-dire que $z_1 + \dots + x_k < y_1 + \dots + y_k$, pour $k = 1, \dots, n-1$ et $x_1 < a < x_n$. Soit i l'indice de la plus grande coordonnée de x inférieure strictement à a et j l'indice de la plus petite coordonnée de x strictement supérieure à a . Soit $\bar{\varepsilon}$ le plus grand réel ε tel que $A_{i,\varepsilon}x$ soit dominé par y . Montrer que si $\bar{\varepsilon} \leq \min\{(x - a_i)(x - a_j)\}$ alors la propriété **(P)** est vraie, (on remarquera que, dans ce cas, $A_{i,\varepsilon}x$ sature au moins l'une des inégalités).
- (d) Dans le cas contraire (c'est-à-dire si $\bar{\varepsilon} \geq \min\{(x - a_i)(x - a_j)\}$), montrer qu'il suffit alors de vérifier la propriété **(P)** pour un vecteur x' bien choisi ayant strictement plus de coordonnées égales à a que x . Conclure.
5. On note \mathcal{I}_k l'ensemble des sous ensembles I de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments. Soient x et y dans \mathbf{R}^n . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{B}_n$, telle que $y = Ax$ est

$$\min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i \leq \min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} y_i \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$