CONCOURS COMMUN 1996
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

**COMPOSITION DE MATHEMATIQUES OPTION**

PREMIERE PARTIE

I 1) S'il existe une base $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ de $E$ dans laquelle $f$ a pour matrice $C$, alors, de proche en proche, on montre que $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad x_k = f^k(x_0)$. $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est donc une base de $E$ et $f$ est bien cyclique.
Réciproquement, si $f$ est cyclique, alors dans la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ la matrice de $f$ a bien la forme voulue.

I 2) Notons $D(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient:

$$D(a_0, \cdots, a_{n-1}) = -X\, D(a_1, \cdots, a_{n-1}) - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

En développant le second déterminant par rapport à sa première ligne, on obtient une relation de récurrence:

$$D(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = -X\, D(a_1, \cdots, a_{n-1}) + (-1)^n a_0, \qquad D(a_{n-2}, a_{n-1}) = X^2 + a_{n-1}X + a_{n-2}$$

On en déduit $D(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0)$ et donc

$\underline{P_C = (-1)^n Q.}$

On a unicité du polynôme caractéristique d'un endomorphisme or la matrice compagne d'un endomorphisme cyclique ne dépend que des coefficients du polynôme caractéristique.

<u>On a donc unicité de la matrice compagne d'un endomorphisme cyclique.</u>

I 3) On remarque que le rang de la matrice $C - \lambda I$ est supérieur ou égal à $n-1$ car le mineur d'ordre $n-1$ obtenu en suprimant la première ligne et la dernière colonne est toujours non nul.

<u>Chaque sous espace propre est donc de dimension 1.</u>

En résolvant le système $CX = \lambda X$, on trouve que le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ est engendré par le vecteur de coordonnées
$\underline{(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1, \lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-3} + \cdots + a_3\lambda + a_2, \cdots, \lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}, \lambda + a_{n-1}, 1).}$

DEUXIEME PARTIE

II 4) $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$, il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
Montrons que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$. Pour cela, considérons une combinaison linéaire nulle de $x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)$ : $a_0x_0 + a_1f(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0) = 0$ avec $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}^n$
Comme $f^n = 0$, lorsqu'on applique $f^{n-1}$ à la combinaison linéaire, il ne reste que $a_0 f^{n-1}(x_0) = 0$. On en déduit $a_0 = 0$.
De même, en appliquant successivement $f^{n-2}$, $f^{n-3}$, etc. on montre que $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, etc.
$(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est donc bien une famille libre de $E$. Or $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$.

$(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est donc une base de $E$ et

$\underline{f \text{ est un endomorphisme cyclique.}}$

La matrice compagne de $f$ est la matrice de $f$ dans la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$. C'est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f$ est de rang $n-1$, donc

$\underline{\text{le noyau de } f \text{ est de dimension 1.}}$

II 5 a) $x \in N_k \Longrightarrow f^k(x) = 0 \Longrightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Longrightarrow x \in N_{k+1}$ donc

$\underline{N_k \subset N_{k+1}.}$

Soit $y \in f(N_{k+1})$, alors, il existe $x \in N_{k+1}$ tel que $y = f(x)$. $f^k(y) = f^{k+1}(x) = 0$ donc $y \in N_k$ et

$\underline{f(N_{k+1}) \subset N_k.}$

II 5 b) $n_1 = 1$ donc $\dim(\text{Im } f) = 1$ or $\ker\varphi \subset \ker f$ donc $\dim(\ker\varphi) \leq 1$.
Im $\varphi \subset N_k$ donc $\dim(\text{Im } \varphi) \leq n_k$
De la relation $\dim(\ker\varphi) + \dim(\text{Im } \varphi) = \dim(N_{k+1})$ on déduit alors

$\underline{n_{k+1} \leq n_k + 1.}$

II 5 c) On fait l'hypothèse $n_k = n_{k+1}$. On a donc $N_k = N_{k+1}$ car on a toujours $N_k \subset N_{k+1}$
On montre par récurrence sur $j \geq k$ que $N_j = N_k$
La relation est vraie pour $j = k$.
Supposons que $N_j = N_k$ et montrons que $N_{j+1} = N_k$.
Si $N_j \neq N_{j+1}$, alors comme $N_j \subset N_{j+1}$, il existe $x \in N_{j+1} \setminus N_j$.
On en déduit $f^{j+1}(x) = 0$ et $f^j(x) \neq 0$ puis $f^{k+1}(f^{j-k}(x)) = 0$ et $f^k(f^{j-k}(x)) \neq 0$ ce qui est incompatible avec $N_k = N_{k+1}$.
On a donc $N_{j+1} = N_j = N_k$
Finalement, du principe de récurrence, on déduit que

$\underline{\forall j \geq k \quad N_j = N_k.}$

On sait que $n_1 = 1$ et $n_p = n$ et on a montré que $\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad n_{k+1} \leq n_k + 1$. On en déduit

$\underline{n = p \text{ et } n_k = k.}$

## TROISIEME PARTIE

III 6) Considérons une combinaison linéaire nulle de $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$: $a_0 I + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = 0$ avec $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}^n$
$f$ est cyclique, donc il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.
On applique la combinaison linéaire à $x_0$ et on en déduit que tous les $a_i$ sont nuls.

$\underline{(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1}) \text{ est donc bien une famille libre de } E.}$

III 7 a) On sait que $f \circ (f - \lambda_k)^{m_k} = (f - \lambda_k)^{m_k} \circ f$
Soit $x \in E_k$, alors $(f - \lambda_k)^{m_k}(f(x)) = f\big((f - \lambda_k)^{m_k}(x)\big) = 0$ donc $f(x) \in E_k$.

$\underline{E_k \text{ est bien stable par } f.}$

On sait que les $p$ polynômes $(\lambda_k - X)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. On en déduit (Théorème de décomposition des noyaux) que

$$\ker\Big(\prod_{k=1}^{p} (\lambda_k I - f)^{m_k}\Big) = \ker\big((\lambda_1 I - f)^{m_1}\big) \oplus \ker\big((\lambda_2 I - f)^{m_2}\big) \oplus \cdots \oplus \ker\big((\lambda_p I - f)^{m_p}\big)$$

Or $\ker\Big(\prod_{k=1}^{p}(\lambda_k I - f)^{m_k}\Big) = \ker(P_f(f)) = E$ (Théorème de Cayley Hamilton, rappelé dans les notations)

Donc
$$\underline{E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p.}$$

III 7 b) Soit $x \in E_k$. $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k I)^{m_k} = 0$ donc
$$\underline{\varphi_k^{m_k} = 0.}$$
$E_k$ est stable par $f$, la seule valeur propre de la restriction de $f$ à $E_k$ est $\lambda_k$, or $\lambda_k$ est une valeur propre de $f$ de multiplicité $m_k$ donc $\dim E_k \leq m_k$. D'autre part, $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ car ici $\mathbf{Z} = \mathbf{C}$ donc $P_f$ est scindé et la somme des multiplicités de ses racines et égale à son degré de plus $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$ donc $n = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_p$

On en déduit que
$$\underline{\dim E_k = n_k \text{ pour } k \in [\![1, p]\!].}$$
Supposons que $\varphi_k^{m_k - 1}$ soit l'endomorphisme nul.

Soit $Q(X) = (\lambda_k - X)^{m_k - 1} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p} (\lambda_r - X)^{m_r} = \dfrac{P_f(X)}{\lambda_k - X}$

$\forall x \in E_k \quad Q(f)(x) = 0$ car $\varphi^{m_k - 1} = 0$ et $\forall x \in E_r \quad r \neq k \quad Q(f)(x) = 0$ car $\varphi_r^{m_r} = 0$ (les endomorphismes $(\lambda I - f)$ commutent deux à deux)

Comme $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$, on a alors $\forall x \in E \quad Q(f)(x) = 0$ et donc $Q(f) = 0$

$Q$ est de degré $n - 1$, $Q(f)$ est donc une combinaison linéaire non nulle de $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ ce qui est contraire à l'hypotèse stipulant que $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est une partie libre.
$$\underline{\varphi_k^{m_k - 1} \text{ n'est donc pas l'endomorphisme nul.}}$$

III 7 c) D'après 7 b) $E_k$ est de dimension $m_k$, $\varphi_k^{m_k - 1} \neq 0$ et $\varphi_k^{m_k} = 0$ donc d'après II 4) $\varphi_k$ est cyclique et il existe une base de $E_k$ dans laquelle sa matrice est sa matrice compagne :
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dans cette base, la matrice de la restriction de $f$ à $E_k$ est : $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$

Dans la base de $E$ formée par la réunion des bases de chacuns de $E_k$, la matrice de $f$ est bien de la forme voulue.

III 7 d) Soit $g$ un endomorphisme de matrice la matrice compagne de $P_f$ dans une certaine base de $E$. D'après la question I 1), on voit que $g$ est un endomorphisme cyclique. $(I, g, g^2, \cdots, g^{n-1})$ est donc une partie libre et $P_f$ est le polynôme caractéristique de $g$. Les hypothèses de la question 7) sont alors vérifiées, on en déduit l'existence d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $g$ est la matrice "diagonale par blocs" décrite à la question 7 c), c'est à dire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. La matrice compagne de $P_f$ et la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ sont donc semblables. Il existe donc une base $\mathcal{B}'$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ sera la matrice compagne de $P_f$.
$$\underline{f \text{ est donc un endomorphisme cyclique.}}$$

III 8 a) $\det(Q_1 + XQ_2)$ est un polynôme en $X$. Pour $X = i$, il prend une valeur non nulle, ce n'est donc pas le polynôme nul. Il existe donc bien un réel $\lambda$ pour lequel $\det(Q_1 + \lambda Q_2) \neq 0$ et donc $Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$

$\underline{\{\lambda \in \mathbf{R}/ \quad Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})\} \text{ est donc non vide.}}$

$A = QBQ^{-1} \Leftrightarrow AQ = QB \Leftrightarrow A(Q_1 + iQ_2) = (Q_1 + iQ_2)B \Leftrightarrow (AQ_1 = Q_1B \text{ et } AQ_2 = Q_2B)$ (identification des parties réelles et imaginaires)

On a alors $A(Q_1 + \lambda Q_2) = (Q_1 + \lambda Q_2)B$ et donc $A = (Q_1 + \lambda Q_2)B(Q_1 + \lambda Q_2)^{-1}$

$\underline{A \text{ et } B \text{ sont donc semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

III 8 b) Soit $A$ la matrice de $f$ dans une certaine base de $E$. Soit $g$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ de matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Alors $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est une partie libre, il en est de même de $(I, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ et de $(I, g, g^2, \cdots, g^{n-1})$ et donc d'après la question 7 c) $g$ est un endomorphisme cyclique et dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sa matrice $A$ est semblable à sa matrice compagne qui est la matrice compagne de $P_f$. D'après la question précédente, ces deux matrices sont également semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$\underline{f \text{ est donc bien un endomorphisme cyclique.}}$

Conclusion : si $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $f$ est cyclique si et seulement si $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

## QUATRIEME PARTIE

IV 9 a) On décompose $g(x_0)$ dans la base $(I, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$, on en déduit :

$\left(g - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)(f^r(x_0)) = f^r \circ \left(g - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)(x_0) = f^r\left(g(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)\right) = 0$, en effet, $f^r$ commute avec $g$ et avec tout élément de $\mathbf{Z}[f]$. L'image par $g - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ de chacuns des éléments de la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est donc nulle et donc $g - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$

$\underline{\text{On a bien } g \in \mathbf{Z}[f].}$

IV 9 b) On suppose que $g \in \mathcal{C}(f)$ et on montre qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbf{Z}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

Unicité : $f$ est cyclique, donc $(I, f, f^2, \cdot, f^{n-1})$ est une famille libre. Supposons qu'il existe deux polynômes $(Q, R) \in (\mathbf{Z}_{n-1}[X])^2$ tels que $g = Q(f) = R(f)$. Alors $(Q - R)(f) = 0$ or $(Q - R)(f)$ est une combinaison linéaire nulle de la famille libre $(I, f, f^2, \cdot, f^{n-1})$, tous ses coefficients sont donc nuls, donc $Q = R$ et on a bien l'unicité.

Existence: de la question 9 a), on déduit l'existence d'un polynôme $T \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $g = T(f)$. On fait la division euclidienne de $T$ par $P_f$: $T = P_f Q + R$ où $R \in \mathbf{Z}_{n-1}[X]$. $P_f(f) = 0$ donc $g = R(f)$. On a bien l'existence.

Réciproquement, si il existe $R \in \mathbf{Z}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$, alors $g \in \mathcal{C}(f)$

IV 10) De même que dans la question précédente, en utilisant la division euclidienne et le théorème de Cayley-Hamilton, on montre que $\mathbf{Z}[f]$ est un espace vectoriel de dimension $\leq n$ engendré par $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$.

On suppose que $\mathcal{C}(f) = \mathbf{Z}[f]$, dans les notations, on a précisé que la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est $\geq n$. $\mathbf{Z}[f]$ est donc un espace de dimension exactement $n$ de base $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$. On en déduit que $(I, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est une partie libre et que

$\underline{f \text{ est un endomorphisme cyclique.}}$

## CINQUIEME PARTIE

V 11 a) $\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$ et $\left(f^k\right)_{0 \leq k \leq p-1}$ est une famille génératrice de $E$ donc

$\underline{f^p = I.}$

V 11 b) $E$ est un espace de dimension $n$, par conséquent, une partie libre de $E$ a au plus $n$ éléments. De plus $x_0 \neq 0$. $\mathcal{E}$ est donc une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ donc

$$\underline{\mathcal{E} \text{ admet un maximum.}}$$

V 11 c) Montrons par récurrence sur $j$ que $\forall k \leq m \quad f^k(x_0) \in \text{Vect}\ (x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$.
$f^m(x_0) \in \text{Vect}\ (x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$ car $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ est liée par définition de $m$.
Supposons que $f^k(x_0) \in \text{Vect}\ (x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$, alors $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}\ (f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^m(x_0))$ et comme $f^m(x_0) \in \text{Vect}\ (x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$ on a bien $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}\ (x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$
Finalement

$$\underline{\forall k \geq m \quad f^k(x_0) \in \text{Vect}\ (x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0)).}$$

$(x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$ est alors une base de $E$.

$$\underline{f \text{ est bien cyclique.}}$$

(On remarque que $m = n$)
$f^p - I = 0$, or le polynôme $X^p - 1$ est scindé (le corps de base est $\mathbf{C}$) et n'a que des racines simples. $f$ est donc diagonalisable. Etant cyclique, on sait que ses sous espaces propres sont tous de dimension 1.

$$\underline{f \text{ possède donc } n \text{ valeurs propres deux à deux distinctes.}}$$

V 12) $f^n(x_0) = x_0$, la matrice compagne de $f$ qui est la matrice de $f$ dans la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{m-1}(x_0))$ est donc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CU_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \overline{\omega}^{(n-1)k} U_k = \omega^k U_k$$

Donc

$$\underline{CU_k = \omega^k U.}$$

Remarque : $U_k$ est un vecteur propre de $C$ associé à la valeur propre $\omega^k$ Les $\omega^k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux distincts. $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ forme donc une famille libre et par conséquent une base de vecteurs propres de $C$.

V 13)

$$\underline{M\overline{M} = nI \text{ et } M^{-1} = \frac{\overline{M}}{n}.}$$

V 14) Introduisons le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$. On remarque que $A = P(C)$. $A$ est donc diagonalisable avec la même matrice de passage que $C$, $U_k$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $P(\omega^k)$ et $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ forme une base de vecteurs propres de $C$.

FIN