DS n°4

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdite.

Les élèves traiteront un et un seul des trois sujets suivants.

Le sujet 1 s'adresse aux 5/2 et aux 3/2 qui se sentent à l'aise.

Le sujet 2 est destiné aux étudiants qui éprouvent des difficultés dans les questions théoriques, notament en probabilité.

Le sujet 3 est là pour ceux des étudiants qui visent l'X ou les ÉNS.

Sujet 1

Le sujet comprend un exercice et un problème.

Exercice

1. Soit $[a, b]$ un segment non réduit à un point ($a < b$) et soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que
   — l'application f est continue ;
   — l'application f est à valeurs dans $[a, b]$;
   — l'application f est croissante ;
   — pour tout élément x de $]a, b]$, $f(x) < x$ et $f(a) = a$;
   — il existe un réel strictement positif λ et un réel r strictement supérieur à 1 tels que,

$$f(x) - f(a) = (x - a) - \lambda(x - a)^r + \underset{x \to a}{o}\left((x - a)^r\right).$$

   a. Exemple : Vérifier que pour $a = 0$ et $b = 1$, l'application

$$f \ : \ [0, 1] \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto \ln(1 + x)$$

   satisfait bien aux conditions précédentes pour des valeurs de r et λ à préciser.

   b. On revient au cas général. Soit c un élément de $]a, b[$. Montrer que la relation de récurrence

$$u_0 = c, \ u_{n+1} = f(u_n), \ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

   définit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. a. Limite de la suite :
   Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a.

   b. Équivalent de la suite :
   Montrer qu'il existe un réel β tel que la suite $\left((u_{n+1} - a)^\beta - (u_n - a)^\beta\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul.
   En déduire un équivalent de $u_n - a$ lorque n tend vers $+\infty$ de la forme $\dfrac{k}{n^\gamma}$, où k et γ sont des réels à préciser.

   c. Application : On prend pour f l'application définie au 1.a. Donner dans ce cas les valeurs de k et γ.

Problème

Lemme de Fekete et théorème de Erdös-Szekeres

Le but de ce problème est d'étudier quelques applications probabilistes du lemme de sous-additivité de Fekete et du théorème de Erdös-Szekeres.

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé. On note $\mathbf{P}(A)$ la probabilité d'un événement A et on note $\mathrm{E}(X)$ l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Les 3/2 pourrons considérer que l'univers est dénombrable, aucune difficulté théorique ne sera soulevée pour appliquer des résultats vus en sup. dans le cas d'un univers fini, autre que la sommabilité des familles définissant l'espérance.

1 Préliminaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire X réelle à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{E}(X) \leq m - 1 + n\mathbf{P}(X \geq m).$$

2. A l'aide d'une comparaison entre une somme et une intégrale, montrer que

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

   En déduire l'inégalité

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!.$$

2 Le lemme de sous-additivité de Fekete

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \ ; \ k \geq n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \ \text{ et } \ \overline{u}_n = \sup(U_n).$$

1. Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est *plus petite* que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leq w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est *plus grande* que v.

1. Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n.$$

1. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.
2. Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *sous-additive* si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leq u_i + u_j$.

Dans le reste de cette partie, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

1. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que
$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$
et en déduire l'inégalité
$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}.$$
2. En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}.$$
3. En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3 Une application probabiliste

Soit x un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoire réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Montrer que si $\mathbf{P}(X_1 < x) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(Y_n < x) = 1$ et que si $\mathbf{P}(X_1 \geq x) > 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(Y_n \geq x) > 0$.
2. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante :
$$\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geq x)$$
et en déduire l'inégalité
$$\mathbf{P}(Y_{n+m} \geq x) \geq \mathbf{P}(Y_m \geq x)\mathbf{P}(Y_n \geq x).$$
3. Démontrer la convergence de la suite
$$\left((\mathbf{P}(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

4 Le théorème de Erdös-Szekeres

Si r est un entier naturel non nul, on note $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$ une liste de nombres réels de longueur r ; cette liste est *croissante* si $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_r$, *décroissante* si $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_r$. Une liste ℓ' de longueur $p \in \{1, \dots, r\}$ est *extraite* de ℓ s'il existe p indices strictement croissants $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ dans $\{1, \dots, r\}$ tels que $\ell' = (\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_p})$.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls et $a = (a_1, a_2, \dots, a_{pq+1})$ une liste de longueur $pq+1$ de nombres réels deux à deux distincts qui représentent les valeurs de $pq+1$ jetons numérotés $1, 2, \dots, pq+1$.

On range successivement les jetons en piles de gauche à droite par le procédé suivant :

- le jeton numéro 1 de valeur a_1 débute la première pile ;
- si $a_2 > a_1$, alors on pose le jeton numéro 2 de valeur a_2 sur le jeton numéro 1 ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton numéro 2, située à droite de la première pile ;
- lors des étapes suivantes, disposant du jeton numéro k de valeur a_k, on le dépose sur la première pile en partant de la gauche telle que a_k est supérieur à la valeur du jeton au sommet de la pile, *si* une telle pile existe ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton, située à droite des précédentes.

En suivant ce procédé avec tous les jetons, on obtient plusieurs piles de jetons, chaque pile ayant des valeurs rangées dans l'ordre croissant du bas vers le haut.

Par exemple, avec la liste

$$a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8),$$

dans cet ordre, on obtient de gauche à droite les trois piles suivantes

$$\begin{array}{ccc} 10 & & \\ 9 & 8 & \\ 7 & 6 & \\ 4 & 3 & \\ 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} .$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur le nombre s de piles, montrer qu'à l'issue de ce processus, pour tout jeton de valeur z de la dernière pile, il existe une liste $b = (b_1, \dots, b_s)$ de réels extraite de la liste a vérifiant :
   - b est décroissante de longueur s ;
   - pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, le jeton numéro i de valeur b_i est dans la i-ième pile en partant de la gauche ;
   - $b_s = z$.

   Par exemple, avec la liste $a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$ on a extrait une liste $b = (7, 6, 5)$.
2. En déduire que la liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p+1$ ou une liste extraite décroissante de longueur $q+1$.

5 Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Chaque élément σ de S_n est entièrement déterminé par la liste de ses n images $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$.

Soit B une variable aléatoire à valeurs dans S_n de loi uniforme, c'est à dire que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\mathbf{P}(B = \sigma) = 1/\mathrm{Card}(S_n)$. On définit la variable aléatoire A à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}^n$ en posant pour tout $\omega \in \Omega$

$$A(\omega) = (B(\omega)(1), \dots, B(\omega)(n)).$$

On note également, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $A_k(\omega) = B(\omega)(k)$. Enfin, on considère les variables aléatoires C_n et D_n définies par :

- C_n est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de A ;
- D_n est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de A.

1. Les variables aléatoires réelles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
2. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $s = (s_1, \dots, s_k)$ une liste strictement croissante de longueur k d'éléments de $\{1, \dots, n\}$. On note A^s l'événement : « la liste $(A_{s_1}, \dots, A_{s_k})$ est croissante ». Montrer que $\mathbf{P}(A^s) = \dfrac{1}{k!}$.
3. Montrer que C_n et D_n ont le même loi. Démontrer alors, à l'aide du résultat de la question 14, que
$$\mathrm{E}(C_n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$
4. Démontrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,
$$\mathbf{P}(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$
5. Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement supérieur à 1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq k$. A l'aide du résultat de la question 2, déduire de la question précédente que
$$\mathbf{P}(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}.$$

6. En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n.$$

En conclure que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ existe et que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leq e$.

Sujet 2

Le sujet comprend deux exercices et un problème.

EXERCICE 1

1. Soit l'application
$$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \ln(1+x)$$

b. Soit c un élément de $]0,1[$. Montrer que la relation de récurrence
$$u_0 = c,\ u_{n+1} = f(u_n),\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. a. LIMITE DE LA SUITE :
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
b. ÉQUIVALENT DE LA SUITE :
Montrer qu'il existe un réel β tel que la suite $\left(u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul.
En déduire un équivalent de u_n lorque n tend vers $+\infty$ de la forme $\dfrac{k}{n^{\gamma}}$, où k et γ sont des réels à préciser.

EXERCICE 2

On se propose d'étudier le reste de la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une de réels qui jouit des propriétés suivantes :

i. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$;
ii. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$;
iii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0 ;
iv. Pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la série converge.
Dans la suite on note $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$|R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(u_{n+p} - u_{n+1+p}).$$
En déduire que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, on précisera si elle croît ou décroît.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$$
En déduire un équivalent de R_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME

Partie A

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose
$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln n.$$
Etudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.
2. Pour tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$ on considère l'application
$$h_x\ :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}.$$
(a) Soit x un réel strictement positif. Dresser le tableau de variation de h_x.

(b) montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3,

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leq \frac{\ln n}{n}.$$

(c) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$$\frac{\ln n}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t.$$

(d) Prouver que la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente. Converge-t-elle absolument

On note

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Les deux parties suivantes sont indépendantes

Partie B

On se propose dans cette partie de calculer S. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 on pose :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\ln k}{k},$$

$$t_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k},$$

$$a_n := t_n - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

1. Démontrer que :

(a) La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

(b) La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est convergente.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. montrer que :

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln 2.$$

En déduire une expression de S_{2n} où figure a_n, a_{2n} et u_n.

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et $\ln 2$. Déterminer S.

Partie C

On Considère l'application

$$F \ :]1,+\infty[\to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'application

$$\varphi_n \ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

1. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on considère les application v_n et w_n de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}, w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t,$$

pour tout élément x de $[1,+\infty[$

(a) Montrer que v_n est dérivable et donner sa dérivée.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 1$, $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

(c) On considère la fonction W de la variable réelle x définie par

$$W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x).$$

Démontrer que W est définie sur $[1, +\infty[$. Les 3/2 admettrons la continuité de W sur $[1, +\infty[$, les 5/2 la montrerons.

(d) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $W(x) = F(x) + \dfrac{1}{1-x}$.

Montrer que $F(x) + \dfrac{1}{1-x}$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures, et exprimer $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right)$ au moyen de γ.

2. Montrer que pour tout réel x stricrtement positif, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \varphi_n(x)$ converge. On notera $\varphi(x)$ sa somme. On dispose donc d'une application

$$\varphi \,:\, \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x).$$

(a) Les 3/2 admettrons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout réel $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} {\varphi_n}'(x).$$

Ils vériferons cependant la convergence, pour tout réel $x > 1$, de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} {\varphi_n}'(x)$. Les 5/2 montrerons ce résultat.

3. (a) Etablir que, pour tout réel $x > 1$, $\varphi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

(b) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $1 - 2^{1-x}$, puis un développement limité à l'ordre 1 de $\varphi(x)$, lorsque x tend vers 1.

(c) En déduire la valeur de S.