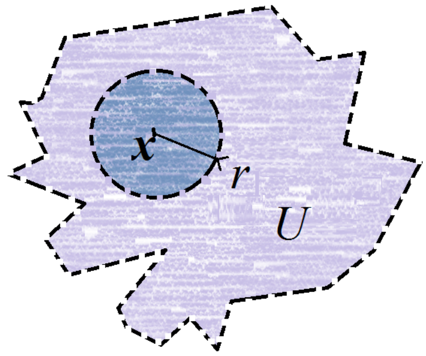
Ouverts, fermés, intérieur, adhérence

Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Ouverts

$U \in \mathbf{E}$ est ouvert si pour tout $\mathbf{x} \in U$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\mathrm{B}_0(\mathbf{x}, r) \subset U.$$



Fermés

$F \in \mathbf{E}$ est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

Ouverts :

- $\emptyset$, $\mathbf{E}$, boules ouvertes ;
- Intersections *finies* d'ouverts ;
- Unions quelquonques d'ouverts.

Fermés :

- $\emptyset$, $\mathbf{E}$, boules fermées ;
- Singletons ;
- Unions *finies* de fermés ;
- intersections quelquonques de fermés.

Voisinage

$V \in \mathbf{E}$ est voisinage de $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ si il existe U ouvert tel que : $\mathbf{a} \in U \subset V$.

Topologie relative à $A \subset \mathbb{E}$

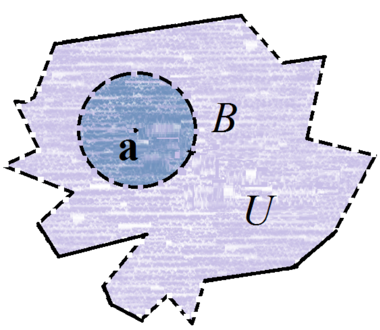
- U_A ouverts relativement à A : $U_A = \underbrace{U}_{\text{ouvert}} \cap A$.
- F_A fermés relativement à A : $F_A = \underbrace{F}_{\text{fermé}} \cap A$.
- Le complémentaire dans A d'un ouvert (resp. fermé) relativement à A est un fermé (resp. ouvert) relativement à A.

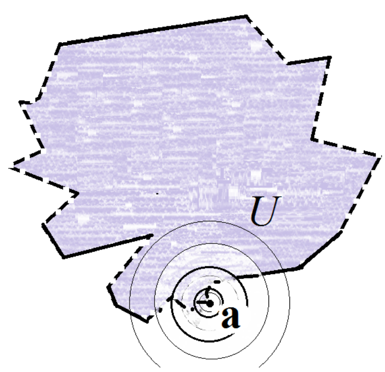
Intérieur $\mathring{A}$ de $A \subset \mathbf{E}$

$\mathbf{a} \in A$ est intérieur à A, s'il est le centre d'**une** boule B incluse dans A.

Adhérence $\bar{A}$ de $A \subset \mathbf{E}$

$\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ est adhérent à A, si **toute** boule centrée en $\mathbf{a}$ (ou tout voisinage de $\mathbf{a}$) rencontre A.





$\mathring{A}$ est plus grand ouvert inclus dans A ; $\bar{A}$ est plus petit fermé contenant A.

Proposition : $\bar{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.

☞ **Pour montrer que F est fermé (resp. fermé relatif de A).**

« Soit $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F qui converge vers $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ (resp. vers $\mathbf{a} \in A$).
Or................................

........................., donc $\mathbf{a} \in F$.

Donc F est fermé (resp. relativement fermé). »
Exemple : Dans $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ est fermé dans $(\mathscr{B}([a,b],\mathbf{R})\|\cdot\|_\infty)$.

Caractérisation de la continuité par les ouverts et fermés

Soit f une application d'une partie A de $\mathbf{E}$ dans un e.v.n. $\mathbf{G}$.
Alors f est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbf{G}$ est un ouvert (resp. fermé) relatif de A.

☞ **Pour montrer que U (resp. F) est ouvert (resp. fermé).**

« Soit $f\ :\ \mathbf{E} \to \mathbf{G}\,;\ \mathbf{x} \mapsto$ ....
On a $U = f^{-1}(A)$ (resp. $F = f^{-1}(A)$). Or A est ouvert (resp. fermé) et f est continue, donc U est ouvert, (resp. F est fermé). »
Exemple : Par la continuité du déterminant, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé.