

## DS n°7

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

**Pénalités :**

- Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,
- Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,
- Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Dans tout ce sujet,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et  $w$  est une fonction continue et strictement positive de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ; on dit que  $w$  est *un poids* sur  $I$ .

Etant donné une fonction continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $fw$  soit intégrable sur  $I$ , on cherche à approcher l'intégrale  $\int_I f(x)w(x)dx$  par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j),$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  sont  $n+1$  points distincts dans  $I$ . Une telle expression  $I_n(f)$  est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_I f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que  $e$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $fw$  est intégrable sur  $I$ .

On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.

Etant donné un entier  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{R}_m[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $m$ . On dit qu'une formule de quadrature  $I_n(f)$  est *exacte sur*  $\mathbb{R}_m[X]$  si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $m$ ,

$$\int_I P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature*  $I_n(f)$  le plus grand entier  $m \in \mathbb{N}$  pour lequel la formule de quadrature  $I_n(f)$  est exacte sur  $\mathbb{R}_m[X]$ .

Les parties II et III s'appuient sur la partie I et sont indépendantes entre elles.

## I. Généralités sur les formules de quadrature

### I.A - Exemples élémentaires

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas  $I = [0, 1]$  et  $\forall x \in I$ ,  $w(x) = 1$ . On cherche donc à approcher  $\int_0^1 f(x)dx$  lorsque  $f$  est une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature  $I_0(f) = f(0)$  et représenter graphiquement l'erreur associée  $e(f)$ .
2. Faire de même avec la formule de quadrature  $I_0(f) = f(1/2)$ .
3. Déterminer les coefficients  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  pour que la formule  $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$  soit exacte sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2?

## I.B - Construction de formules d'ordre quelconque

On revient au cas général. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère  $n + 1$  points distincts dans  $I$ , notés  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , et une fonction continue  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

4. Montrer que l'application  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases}$  est un isomorphisme.
5. Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

6. Montrer que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points*  $(x_0, \dots, x_n)$ .
7. On suppose que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^k w(x)$  est intégrable sur  $I$ . Montrer que la formule de quadrature  $I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$  est exacte sur  $\mathbb{R}_n[X]$  si, et seulement si,

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) dx.$$

8. On se place dans le cas  $I = [0, 1]$  et  $\forall x \in I$ ,  $w(x) = 1$ . Déterminer la base de Lagrange associée aux points  $(0, 1/2, 1)$  et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature  $I_2(f)$  de la question ??.

## I.C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Dans cette sous-partie, on suppose que l'intervalle  $I$  est un segment :  $I = [a, b]$ , avec  $a < b$ .  
Pour tout entier naturel  $m$ , on considère la fonction  $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x, t) = \begin{cases} (x - t)^m & \text{si } x \geq t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que  $\varphi_m$  est continue si  $m \geq 1$  et discontinue si  $m = 0$ .

On considère une formule de quadrature  $I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$ .

On note  $m \in \mathbb{N}$  l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j).$$

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{m+1}$  sur  $I$ .

9. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que  $e(f) = e(R_m)$ , où  $R_m$  est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) f^{(m+1)}(t) dt.$$

10. En déduire que, si  $m \geq 1$ ,

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

où la fonction  $K_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x, t)) = \int_a^b \varphi_m(x, t) w(x) dx - \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_m(x_j, t).$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue  $g : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^b \left( \int_a^b g(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left( \int_a^b g(x, t) dx \right) dt.$$

La fonction  $K_m$  est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature*.

On admet que cette expression de  $e(f)$  reste valable pour  $m = 0$ .

## I.D - Exemple : méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que  $I$  est un segment et  $\forall x \in I, w(x) = 1$ .  
On se place d'abord dans le cas  $I = [0, 1]$  et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

qui est d'ordre  $m = 1$  (on ne demande pas de le montrer).

11. Calculer le noyau de Peano associé  $t \mapsto K_1(t)$  et montrer que, pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x \in [0, 1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque  $I = [a, b]$  (avec  $a < b$ ), qu'on subdivise en  $n + 1$  points  $a_0, \dots, a_n$  équidistants :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_i = a + ih,$$

où  $h = \frac{b-a}{n}$  est le pas de la subdivision.

On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes*. L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)dx - T_n(f).$$

12. Représenter graphiquement  $T_n(f)$ .

13. On suppose que  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où  $e$  est l'erreur associée à la formule de quadrature  $I_1$  étudiée à la question ?? et les  $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions à préciser.

14. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

## II. Polynômes orthogonaux et applications

Dans la suite, on note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f^2 w$  est intégrable sur  $I$ .

### II.A - Etude d'un produit scalaire

15. Montrer que, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $E$ , le produit  $fgw$  est intégrable sur  $I$ .

16. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $E$ , on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)dx.$$

17. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

Dans la suite, on munit  $E$  de ce produit scalaire et on note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

### II.B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

On suppose que, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto x^k w(x)$  est intégrable sur  $I$ . Cela entraîne par linéarité de l'intégrale que  $E$  contient toutes les fonctions polynomiales.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

- (a) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  est unitaire
- (b) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(p_n) = n$ ,
- (c) la famille  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , autrement dit  $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ , pour  $i \neq j \in \mathbb{N}$ .

On dit que les  $(p_n)$  sont les *polynômes orthogonaux associés au poids  $w$* .

On s'intéresse aux racines des polynômes  $p_n$ .

On rappelle que  $\overset{\circ}{I}$  désigne l'intérieur de  $I$ , c'est-à-dire l'intervalle  $I$  privé de ses éventuelles extrémités.

On a donc  $\overset{\circ}{I} = ]a, b[$ , où  $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $x_1, \dots, x_k$  les racines distinctes de  $p_n$  qui sont dans  $\overset{\circ}{I}$  et  $m_1, \dots, m_k$  leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^k (X - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.} \end{cases}$$

18. En étudiant  $\langle p_n, q \rangle$ , montrer que  $p_n$  possède  $n$  racines distinctes dans  $\overset{\circ}{I}$ .

## II.C - Applications : méthodes de quadrature de Gauss

Considérons une formule de quadrature

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j),$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  et  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  sont  $n+1$  points distincts dans  $I$ .

On suppose que les coefficients  $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq n}$  sont choisis comme à la question ?? :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) dx,$$

où  $(L_0, \dots, L_n)$  est la base de Lagrange associée aux points  $(x_0, \dots, x_n)$  (définie dans la partie I).

Ainsi, la formule  $I_n(f)$  est d'ordre  $m \geq n$ . Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un unique choix des points  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  qui permet d'obtenir l'ordre  $m$  le plus élevé possible.

19. En raisonnant avec le polynôme  $\prod_{i=0}^n (X - x_i)$ , montrer que  $m \leq 2n+1$ .

20. Montrer que  $m = 2n+1$  si et seulement si les  $x_i$  sont les racines de  $p_{n+1}$ .

## II.D - Exemple 1

On se place ici dans le cas où  $I = [-1, 1]$  et  $w(x) = 1$ .

On est donc bien dans les conditions d'application des résultats précédemment obtenus.

21. Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  associés au poids  $w$ .

22. En déduire explicitement une formule de quadrature d'ordre 5 (on déterminera les points  $x_j$  et les coefficients  $\lambda_j$ ).

## II.E - Exemple 2

Dans cette sous-partie,  $I = ]-1, 1[$  et  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

23. Montrer que, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto x^k w(x)$  est intégrable sur  $I$ .

Cela entraîne que  $E$  contient toutes les fonctions polynomiales.

Dans la suite, on considère, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $Q_n : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos(n \arccos(x)) \end{cases}$ .

24. Calculer  $Q_0, Q_1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer simplement  $Q_{n+2}$  en fonction de  $Q_{n+1}$  et  $Q_n$ .

25. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n$  est polynomiale et déterminer son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on notera également  $Q_n$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  qui coïncide avec  $x \mapsto Q_n(x)$  sur  $[-1, 1]$ .

26. On note  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes orthogonaux associés au poids  $w$ . Montrer que

$$\begin{cases} p_0 = Q_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2^{n-1}} Q_n. \end{cases}$$

27. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer explicitement les points  $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$  de  $I$  telle que la formule de quadrature  $I_n(f) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)$  soit d'ordre maximal.

## III. Accélération de la méthode des trapèzes

On dit qu'une fonction  $S$  définie sur une partie de  $\mathbb{C}$  est *développable en série entière au voisinage de 0* s'il existe un disque ouvert  $D$  non vide de centre 0 et une suite complexe  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall z \in D, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ .

### III.A - Nombres $b_m$ et polynômes $B_m$

On considère une série entière  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ , de rayon de convergence  $R \neq 0$  et avec  $\alpha_0 = 1$ . On note  $S$  la somme de cette série entière sur son disque de convergence : pour tout  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|z| < R$ , on a

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n.$$

28. Montrer qu'il existe un réel  $q > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq q^n$ .

29. On suppose que  $\frac{1}{S}$  est développable en série entière au voisinage de 0 et on note  $\sum_{n \geq 0} \beta_n z^n$  son développement. Calculer

$\beta_0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $\beta_n$  en fonction de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ .

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\beta_n| \leq (2q)^n.$$

30. Montrer que  $\frac{1}{S}$  est développable en série entière au voisinage de 0.

31. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une unique suite complexe  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un réel  $r > 0$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , si  $0 < |z| < r$  alors

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

32. En effectuant un produit de Cauchy, montrer que  $b_0 = 1$  et, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p = 0.$$

33. En déduire la valeur de  $b_1, b_2, b_3$  et  $b_4$ .

34. En utilisant un argument de parité, montrer que  $b_{2p+1} = 0$  pour tout entier  $p \geq 1$ .

Dans la suite du problème, on considère les polynômes  $B_m$  définis par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} b_k x^{m-k}.$$

On remarque que chaque polynôme  $B_m$  est unitaire de degré  $m$  et que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $B_m(0) = b_m$ .

35. Déterminer  $B_0, B_1, B_2$  et  $B_3$ .

36. Montrer que, pour tout entier  $m \geq 2$ ,  $B_m(1) = b_m$ , puis que, pour tout entier  $m \geq 1$ ,  $B'_m = mB_{m-1}$ .

### III.B - Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on utilise les nombres  $b_m$  et les polynômes  $B_m$  définis dans la sous-partie III.A pour établir un développement asymptotique à tout ordre de l'erreur de quadrature associée à la méthode des trapèzes (déjà étudiée dans la partie I), pour une fonction suffisamment régulière.

Pour tout réel  $x$ , on note  $[x]$  sa partie entière.

On fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et on considère une fonction  $g : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

37. Montrer que

$$\int_0^n g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) + g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - [x]) g'(x) dx.$$

38. En déduire que pour tout entier  $m \geq 2$ ,

$$\int_0^n g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) + g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^m \frac{(-1)^{p-1} b_p}{p!} (g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - [x]) g^{(m)}(x) dx.$$

On considère maintenant une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et la formule de quadrature déjà étudiée à la partie I :

$$T_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

(méthode des trapèzes), où  $h = \frac{b-a}{n}$  et  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i = a + ih$

39. Montrer que, pour tout entier  $m \geq 1$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = T_n(f) - \sum_{p=1}^m \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),$$

où les coefficients  $\gamma_{2p}$  sont donnés par

$$\gamma_{2p} = \frac{(b-a)^{2p} b_{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a))$$

et  $\rho_{2m}(n)$  est un reste intégral vérifiant la majoration

$$|\rho_{2m}(n)| \leq \frac{C_{2m}}{n^{2m}}$$

où  $C_{2m}$  est une constante à préciser ne dépendant que de  $m$ ,  $a$  et  $b$ .

On a donc établi, pour tout entier  $m \geq 1$ , le développement asymptotique

$$T_n(f) = \int_a^b f(x) dx + \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_4}{n^4} + \dots + \frac{\gamma_{2m}}{n^{2m}} + O\left(\frac{1}{n^{2(m+1)}}\right),$$

où les coefficients  $\gamma_{2p}$  sont indépendants de  $n$ .

### III - Bonus 5/2

Prouver la formule admise dans la question 10.