Espaces préhilbertiens

I. Produits scalaires, normes associées

Exercice 1 : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension quelconque. On suppose que φ est définie. Montrer que soit φ soit $-\varphi$ est un produit scalaire.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(u_n)g(u_n)}{n^2}$ est bien définie.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour

$$\varphi \ : \ \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})^2 \to \mathbf{R}\,;\ (f,g) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n)g(u_n)}{n^2}$$

soit un produit scalaire.

Exercice 3 :

Soit l'application

$$N \ : \ \mathcal{C}^1\left([-1,1],\mathbf{R}\right) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \left(f(1)^2 + \int_{-1}^{1} f'(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{C}^1\left([-1,1],\mathbf{R}\right)$.

Exercice 4 :

Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications f, éléments de $\mathcal{C}^2\left([-1,1],\mathbf{R}\right)$ tells que $f(-1) = f(1) = 0$.

1– montrer que $\mathbf{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

2– Soit l'application

$$\varphi \ : \ \mathbf{E}^2 \to \mathbf{C}\,;\ (f,g) \mapsto -\int_{-1}^{1} f''(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est un produit scalaire .

Exercice 4 bis : Par E on désigne l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

a. Montrer que l'application $\phi \ : \ \mathbf{E}\times\mathbf{E}\,;\ (f,g) \mapsto \int_{[0,1]}(fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $\mathbf{E}$. On le notera $(\cdot|\cdot)$. On note U l'ensemble des élément de $\mathbf{E}$ qui s'annulent en 0 et en 1 et V l'ensemble des élément f de E tels que $f = f''$.

   Montrer que U et V sont deux sous-espaces de $\mathbf{E}$ orthogonaux.

b. Les sous-espaces U et V sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5 : Soit $\vec{f}$ un automorphisme d'un espace euclidien $(\mathbf{E}\,\langle\cdot \mid \cdot\rangle)$. On suppose que pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments de $\mathbf{E}$,

$$\text{si } \langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle = 0 \text{ alors } \left\langle \vec{f}\,(\vec{x}) \,\middle|\, \vec{f}\,(\vec{y}) \right\rangle = 0,$$

autrement dit, f *conserve l'orthogonalité.*
Montrer qu'il existe un élément k de $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$

$$\left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| = k\,\|\vec{x}\|\,,$$

autrement dit, f *est une similitude.*

Exercice 6 : Montrer que dans un espace euclidien de dimension n, non nulle, il existe des systèmes de vecteurs de cardinal $n+1$, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1})$, formant entre eux des « angles obtus », c'est-à-dire, tels que pour tout i et tout j, éléments distincts de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, $\langle \vec{x}_i \mid \vec{x}_j\rangle < 0$.

Montrer que tout système de vecteurs, formant entre eux des angles obtus, est de cardinal au plus $n+1$.

Indication : on raisonnera par récurrence sur n.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 7 : Soit A l'ensemble des réels de la forme $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$, où f est un élément de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$:

$$A = \left\{\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t, f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}) \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1\right\}.$$

Montrer que A admet un plus petit élément que l'on déterminera.

Exercice 8 : Soient n un entier naturel non nul et A, B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n\mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}AA\right).$$

Dans quel cas il y a-t-il égalité.

Exercice 9 : Soient n un entier naturel non nul et A, B des matrices symétriques réelles d'ordre n. Montrer que :

$$\mathrm{Tr}(AB+BA)^2 \leq 4\left(\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^2)\right)..$$

III. Théorème de projection

Exercice 10 : Déterminant de Gram
Soit $(\mathbf{E}, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel On appelle déterminant de Gram d'une famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ d'éléments de de $\mathbf{E}$ (où $n \in \mathbf{N}^*$), le déterminant de la matrice $\left(\langle x_i \mid x_j\rangle\right)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ i=1,\ldots,n}}$ (matrice de Gram), on le notera $\mathrm{Gram}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right)$.

1– Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de de $\mathbf{E}$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si, $\mathrm{Gram}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right) \neq 0$.

2– Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ une base de $\mathbf{F}$, et $\vec{a}$ un élément de $\mathbf{E}$ montrer que :

$$\frac{\mathrm{Gram}\left(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\right)}{\mathrm{Gram}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\right)} = \mathrm{d}\left(\vec{a}, \mathbf{F}\right)^2.$$

3– Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de de $\mathbf{E}$. Soit $\mathbf{E}'$ un sous-espace de $\mathbf{E}$ de dimension n contenant $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ et soit $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ une base orthonormée de $\mathbf{E}'$, notée

$\mathcal{B}$. Soit A la matrice de $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Montrer que ${}^{\mathrm{t}}\bar{A}A = (\langle x_i \mid x_j \rangle)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,n}}$.

4– Déduire de la question précédente que

$$\operatorname{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) = \operatorname{Det}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)^2,$$

où Det désigne le produit mixte sur l'espace euclidien $(\mathbf{E}'(\cdot|\cdot))$, où $(\cdot|\cdot)$ est la restriction à $\mathbf{E}'$ de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, une orientation ayant été choisie.
Retrouver le résultat du 1–, et dans le cas réel et pour $n = 2$, interpréter géométriquement le résultat du 2–.

Exercice 11 :

1– Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \int_0^1 \left(x^2 + ax + b\right)^2 \mathrm{d}x,\ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

admet une borne inférieure à déterminer.

2– Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x} \left|x^2 + ax + b\right|^2 \mathrm{d}x,\ (a, b) \in R^2 \right\}$$

admet une borne inférieure à déterminer.

3– Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(3x^2 + 2ax + b\right)^2 \mathrm{d}x + |b|^2,\ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

admet une borne inférieure à déterminer.

Exercice 12 : Orthogonal

Soit $(\mathbf{H}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbf{R}$. Soit $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{H}$. L'espace H sera, pour toute propriété topologique, muni de la norme $\| \cdot \|$ associée au produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

1– Montrer que $\mathbf{F}^{\perp}$ est fermé.

2– Montrer que $(\bar{\mathbf{F}})^{\perp} = \mathbf{F}^{\perp}$.

En déduire que dans l'ensemble $\mathbf{E}$ des application de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ continue muni du produit scalaire

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\ (f, g) \mapsto \int_{[1,1]} fg$$

l'ensemble $\mathbf{P}$ des applications polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

3– Montrer que $\mathbf{F} \subset \left(\mathbf{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.

4– On suppose de plus que tout sous espace vectorie fermé admet un supplémentaire orthogonal. Montrer que $\bar{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{F}^{\perp}\right)^{\perp}$

En déduire que si $\mathbf{F}^{\perp} = \{\vec{0}_{\mathbf{H}}\}$ alors $\mathbf{F}$ est dense.

Exercice 13 — Inégalité de Ptolémée — Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien. Montrer que pour tout quadruplet (A, B, C, D) de points de $\mathcal{P}$,

$$AC\ BD \leq AB\ DC + AD\ BC$$

Indication : on pourra étudier l'effet sur la distance de deux points de l'application

$$i\ :\ \mathcal{P} \setminus \{O\} \to \mathcal{P} \setminus \{O\}\,;\ M \mapsto O + \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\overrightarrow{OM}.$$

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Avant propos

Nous présentons ici les principaux résultats sur les polynômes orthogonaux.

I. Propriétés de base

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide, et w une application de I dans $\mathbf{R}$, continue, à valeurs strictement positives. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications f de I dans $\mathbf{R}$, continues telles que wf^2 soit intégrable sur I.

On suppose de plus que $\mathbf{E}$ contient les applications polynomiales de I dans $\mathbf{R}$.

1- Vérifier que les hypothèses précèdentes sont vérifiées dans les cas suivant :

1. $I = [-1, 1]$ et w est l'application constamment égale à 1.
2. $I =]-1, 1[$ et $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout élément x de I .
3. $I = \mathbf{R}$ et $w(x) = e^{-x^2}$ pour tout élément x de I .
4. $I = \mathbf{R}_+$ et $w(x) = e^{-x}$ pour tout élément x de I .

Dans la suite nous identifierons les polynômes éléments de $\mathbf{R}[X]$ et les applications polynomiales de I dans $\mathbf{R}$ associées

2- Montrer que pour tout élément f et tout élément g de $\mathbf{E}$, $\int\limits_I fgw$ est bien définie et que

$$\varphi \ : \ \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}, \ (f, g) \mapsto \int\limits_I fgw$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{E}$.

Dans la suite nous le noterons $\langle . \mid . \rangle$, nous noterons $\|.\|$ la norme associée et nous munirons $\mathbf{E}$ de ce produit scalaire.

3- Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ telle que l'on ait :

— pour tout entier positif n, P_n est unitaire de degré n,

— la famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale.

Montrer qu'il existe une et une se

4- Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$P_n(X) = (X - \lambda_n) P_{n-1}(X) - \mu_n P_{n-2}(X),$$

où l'on a posé :

$$\mu_n := \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} \text{ et } \lambda_n := \frac{\langle XP_{n-1} \mid P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|^2}.$$

les éléments de la famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'appelle dans le cas 1. polynômes orthogonaux de *Legendre*, dans le cas 2. polynômes orthogonaux de *Pafnouti Lvovitch Tchebychev*, dans le cas 3. polynômes orthogonaux d'*Hermite* et polynômes orthogonaux de *Laguerre*, dans le dernier cas.

Toutes ces familles de polynômes orthogonaux partagent de nombreuses propriétés. En particulier ces polynômes apparaissent comme des vecteurs propres d'opérateurs différentiels symétriques. Ce qui rend leur emploie dans les sciences très important.

Traitons le cas des polynômes de Legendre.

II. Les polynômes de Legendre comme vecteurs propres d'un opérateur différentiel

Nous reprendrons dans cette partie les notations et définitions de la partie précèdent, et nous

nous placerons dans le cadre du cas 1.
Soit l'application

$$L : \mathcal{C}^{\infty}([-1,1],\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}([-1,1],\mathbf{R}),\ f \mapsto L(f),$$

où pour tout élément x de $[-1,1]$,

$$L(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

1- Montrer que L est linéaire et que pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}^{\infty}([-1,1],\mathbf{R})$,

$$\langle L(f) \mid g\rangle = \langle f \mid L(g)\rangle .$$

(L est dit *symétrique*.)

2- En déduire que deux vecteurs propres de L associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3- Cherchons les vecteurs propres polynomiaux de L.
Montrer que si P est un polynôme de degré n, vecteur propre de L associée à la valeur propre λ, alors $\lambda = -n(n+1)$.

4- Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme unitaire de degré n, p_n, tel que $L(p_n) = -n(n+1)p_n$.

5- Montrer que $p_n = P_n$, pour tout entier naturel n.

L'étude spectrale de L intervient dans la résolution de l'équation de Laplace $\Delta F = 0$ *en utilisant des coordonées sphériques sous des hypothèses de symétrie.*

III. Formule de Rodrigues

Nous nous toujours placerons dans le cadre du cas 1.
Posons pour tout entier naturel n,

$$H_n(X) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left(\left(X^2-1\right)^n\right).$$

Pour tout entier naturel n exprimer P_n en fonction de H_n.

Il existe des formules analogues pour les autres familles de polynômes orthogonaux.

IV. Zéros des polynômes orthogonaux

Nous considérons le cadre général de la partie 1 et nous nous proposons de montrer que pour tout entier naturel n, le polynôme P_n a exactement n racines réelles toutes éléments de I.

1- Soit n un élément de $\mathbf{N}$ Notons k le nombre éventuellement nul de racines de P_n qui sont de multiplicité impaire et éléments de I, notons les $r_1, r_2, ...r_k$. Soit P^* le polynôme $\prod_{i=1}^{k}(X-r_i)$, ce dernier étant par convention égal à 1 si $k=0$.
Que dire du signe de P_nP^* sur I ?

2- Montrer que si $k<n$, alors $\int_I P_nP^*w = 0$; et conclure...

Les zéros des polynômes de Legendre ont été rendus célèbres par le résultat qui va être présenté dans la partie suivante.

V. Polynômes orthogonaux et intégration numérique.

On reprend les notations de la partie I., cas des polynômes de Legendre (cas 1.)
Soit n un entier strictement positif.

1- Soient $x_1, x_2, ..., x_n$, n points distincts de $[-1,1]$. Montrer que pour tout élément i de $\{1,...,n\}$, il existe un unique polynôme de degré strictement inférieur à n, L_i tel que pour élément j de $\{1,...,n\}$,

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $(L_1, ..., L_n))$ est une base de $\mathbf{R}[X]_{n-1}$.
Déterminer les coordonées dans cette base d'un polynôme P élément de $\mathbf{R}[X]_{n-1}$.

2- Montrer qu'il existe un unique n-uplet de réels $(\alpha_1, ...\alpha_n)$ tel que pour tout élément P de $\mathbf{R}[X]_{n-1}$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i).$$

Exprimer α_i en fonction de L_i, pour $i = 1, 2..., n$.

3- Montrer que, si $x_1, x_2, ...x_n$ sont les n zéros du polynôme de Legendre P_n alors,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i),$$

Pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n - 1$.

Dans la suite on suppose que $x_1, x_2, ...x_n$ sont les n zéros du polynôme de Legendre P_n .

4- Dans cette question n prend la valeur 2.
Evaluer α_1 et α_2
Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et m un entier strictement positif. Posons $h := (b - a)/m$ et pour tout élément i de $\{0, 1, 2, ...m\}$, $s_i := a + ih$.
Montrer qu'il existe deux réels α_1^*, α_2^*, tels que pour tout élément i de $\{0, 1, 2, ...m-1\}$, il existe deux éléments de $[s_i, s_{i+1}]$ distincts, $x_{i,1}$ et $x_{i,2}$, tels que pour tout élément P de $\mathbf{R}[X]_3$,

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha_1^* P(x_{i,1}) + \alpha_2^* P(x_{i,2}).$$

En déduire une méthode numérique de calcul approché d'intégrale (méthode de Gauss).

5- Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un ensemble de n points distincts de $[-1, 1]$ de nouveau quelconque.
Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i),$$

Pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n - 1$, si et seulement si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est l'ensemble des zéros de P_n.

VI. Polynômes de Tchebychev et minimisation de norme

On se place dans le cadre de la partie 1, cas des polynômes de Tchebychev (cas 2). 1°) Soit pour tout entier naturel n, t_n l'application de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par,

$$t_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

pour tout élément x de $[-1, 1]$.
Montrer que t_n est une application polynômiale de degré n, pour tout entier naturel n, dont on précisera le coefficient dominant (On l'identifiera, comme nous l'avons déja dit, au polynôme associé).

2- Evaluer pour tout couple d'entiers naturels (n, m), $\langle t_n \mid t_m \rangle$, en déduire pour tout entier naturel n une expression de t_n en fonction de P_n (n-iéme polynôme de Tchebychev.

Soit n un entier strictement positif.

3- Déterminer les éléments x de $[0, 1]$ tels que $|t_n(x)| = 1$.

4- On note U_n l'ensemble des applications polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à n, unitaires. Montrer que

$$\inf\{\|P\|_\infty, P \in U_n\} = \|P_n\|_\infty.$$

VI. Séries de Legendre

On se place dans le cadre de la partie 1 cas des polynômes de Legendre. Posons pour tout entier naturel n,

$$P_n^* = \frac{P_n}{\|P_n\|},$$

Soit f une application continue sur I, posons pour tout entier naturel n,

$$c_n = \langle P_n, f\rangle .$$

1- Montrer que la série d'applications $\sum c_n P_n^*$ converge vers f dans $\left(C^0\left(I, \mathbf{R}\right), \|.\|\right)$ (série de Legendre).

2- Soit n un entier naturel. Montrer que S_n la somme partielle d'ordre 1 de la série de Legendre coïncide sur $[-1, 1]$ avec f en au moins $n+1$ points.

3- Pour tout entier naturel n et tout couple (x, y) de I, on pose :

$$K_n\left(x, y\right) := \sum_{k=0}^{n} P_k^*\left(x\right) P_k^*\left(y\right)$$

Montrer que pour tout élément P de $K[X]_n$, et tout élément y de I,

$$\langle P, K_n\left(., y\right)\rangle = P(y).$$

4- Soit K une application polynômiale définie sur I^2 de degré, en chacune des variables, inférieur ou égal à n, tel que pour tout élément P de $K[X]_n$, et tout élément y de I,

$$\langle P, K\left(., y\right)\rangle = P(y);$$

montrer que $K = K_n$.

Exercices complémentaires

Exercice A : Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

1. Soit H un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ de codimension finie. Montrer que $H^\perp$ est de dimension finie, inférieure ou égale à la codimension de H.
2. On suppose que $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est l'espace vectoriel des application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni du produit scalaire
$$(f,g) \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
Soit $H := \{f \in \mathbf{E} | f(0) = 0\}$. Vérivier que H est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ dont on précisera la codimension. Comparer la codimension de H et la dimension de $H^\perp$.

Exercice B : Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une famille liée de vecteurs deux à deux distincts, unitaires d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension $n \geq 2$. On suppose de plus qu'il existe un réel α tel que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, ...n\}$,
$$\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \alpha.$$

1. Calculer α.
2. Calculer $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... = \vec{e}_n$.
3. Quel est le rang de la famille $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Exercice C :
Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soient un réel $C > 0$ et $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ tel que :
$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2,$$
pour toute élément f de $\mathbf{F}$.

1. Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathbf{F}$ sont équivalentes.
2. Montrer que $\mathbf{F}$ est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.
Indication : considérer une famille orthonormée pour le produit scalaire dont provient $\|\cdot\|_2$.

Exercice D — Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2 et que $\mathrm{V}(X) > 0$. On pose $F = \{\mathrm{E}\big(Y - aX - b)^2\big), (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$.

Montrer que F admet un minimum à déterminer.

Exercice E — Théorème de projection —

On désigne, comme dans le cours, par ℓ^2 l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable. Un élément u de ℓ^2 sera noté : $u = (u(k))_{k\in\mathbf{N}}$ et l'on muni ℓ^2 du produit scalaire habituel :

$$\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbf{R}\,;\ (u,v) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u(k)v(k).$$

cf. exemples du cours, et l'on note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit C un fermé de ℓ^2 convexe non vide. Soit a un élément de ℓ^2. On note d la distance de a à C.

1. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeur dans C telle que pour tout entier $n \geq 1$,
$$d \leq \|u_n - a\|_2 \leq d + \frac{1}{2^n}$$
2. En utilisant l'inégalité du parallélogramme, montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, si $p \geq q \geq n$, alors
$$\|u_p - u_q\|_2 \leq \varepsilon.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge dans ℓ^2 vers un élément a^* de C.
4. Montrer que l'ensemble des éléments v de C tels que $\|v - a\|_2 = d$ est réduit à $\{a^*\}$.
5. Montrer que pour tout élément v de $\mathbf{C}$,
$$\langle a - a^* | v - a^* \rangle \geq 0.$$
6. Soit $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel fermé de ℓ^2. Montrer que $\mathbf{F}$ admet un supplémentaire orthogonal.
7. Soit $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On suppose que toute suite de Cauchy à valeur dans $\mathbf{E}$ converge (on dit que $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un hilbert ou un espace hilbertien). On suppose de plus que $\mathbf{E}$ possède une suite totale orthonormée.

   Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$ admet un supplémentaire orthogonal.

Exercice F — Théorème de Lax-Milgram —

On utilisera l'exercice précédent.

1. *Dual topologique d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz*

   Soit $(\mathbf{H}, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbf{R}$. On note $\mathbf{H}'$ le dual topologique de $\mathbf{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires *continues* sur $\mathbf{H}$.

   (a) Soit ℓ un élément de $\mathbf{H}'$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\ell)$ est fermé.

   (b) Montrer qu'il existe un et un seul élément $\vec{a}$ de $\mathbf{H}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{H}$,
   $$\ell(x) = \langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle\,.$$

   (c) Comparer $\|\vec{a}\|$ et $|\!|\!|\ell|\!|\!|$, où $|\!|\!|\ell|\!|\!| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\ell(\vec{x})|$.

(d) Soit $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{H}$ et f une forme linéaire sur $\mathbf{F}$, continue lorsque $\mathbf{F}$ est muni de la norme induite par $\|\cdot\|$. on note N la norme de ϕ, donc $N = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbf{F} \text{ et } \|x\| \leq 1\}$

Montrer qu'il existe une forme linéaire ℓ sur $\mathbf{H}$, continue qui prolonge ℓ et telle que $|||\ell||| = N$.

Ce résultat qui porte le nom de théorème de Hahn-Banach est vrai plus généralement dans le cadre d'espaces vectoriels normés, sa preuve est alors plus délicate et nécessite le lemme de Zorn (lui-même équivalent à l'axiôme du choix).

2. *Théorème de Lax-Milgram*

Voici un des théorèmes clef de l'analyse fonctionnelle, qui joue un rôle important dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Soit $(\mathbf{H}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *un espace de Hilbert sur le corps* $\mathbf{R}$*, on note* $\|\cdot\|$ *la norme associée à* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$*, norme qui équipera dans la suite* $\mathbf{H}$*. Soit* b *une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathbf{H}$*, on suppose que* b *est continue et coercive, c'est-à-dire qu'il existe un réel* $k > 0$ *tel que pour tout élément* $\vec{u}$ *de* $\mathbf{H}$*,* $b(\vec{u}, \vec{u}) \geq k\|\vec{u}\|^2$*.*
Alors pour toute forme linéaire ℓ *définie sur* $\mathbf{H}$ *et continue, il existe un unique élément* $\vec{u}$ *de* $\mathbf{H}$ *tel que pour tout élément* $\vec{v}$ *de* $\mathbf{H}$ *:*

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \ell(\vec{v})$$

De plus $\vec{u}$ *est caractérisé par la propriété :*

$$\frac{1}{2}b(\vec{u}, \vec{u}) - \ell(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in \mathbf{H}} \left(\frac{1}{2}b(\vec{v}, \vec{v}) - \ell(\vec{v}) \right).$$

(a) On se propose pour commencer de montrer :
Soit L *une application linéaire continue de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{H}$*. On suppose qu'il existe un réel strictement positif* k *tel que pour tout élément* $\vec{x}$ *de* $\mathbf{H}$ *:*

$$\langle L(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle \geq k\|\vec{x}\|^2. \tag{1}$$

Alors L *est un isomorphisme,* L^{-1} *est continue et* $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq \frac{1}{k}$*, on désigne ici par* $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})}$ *la quantité* $\sup\limits_{\|\vec{x}\| \leq 1} \|L^{-1}(\vec{x})\|$.

i. Montrer que L est injectif.
ii. Montrer que $L(\mathbf{H})$ est fermé.
iii. Montrer que $L(\mathbf{H})$ est dense. En déduire que L est un isomorphisme.
iv. Montrer que L^{-1} est continue et que $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq \frac{1}{k}$.

(b) i. Pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathbf{H}$ continue, le théorème de représentation de Riesz (cf. 1) assure l'existence d'un unique élément de $\mathbf{H}$, $V(\ell)$, tel que pour tout élément $\vec{y}$ de $\mathbf{H}$, $\ell(\vec{y}) = \langle V(\ell) \mid \vec{y} \rangle$. Montrer que l'application

$$V \ : \ \mathbf{H}' \to \mathbf{H}\,; \ \ell \mapsto V(\ell)$$

est linéaire et continue. $\mathbf{H}'$ désigne comme dans 1, le dual topologique de $\mathbf{H}$.

ii. Montrer qu'il existe une application L de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}$, tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{H}$,

$$b(\vec{x}, \cdot) = \langle L(\vec{x}) \mid \cdot \rangle .$$

iii. Montrer que L esl linéaire continue.

iv. En utilisant 1., montrer qu'il existe un unique élément $\vec{u}$ de $\mathbf{H}$ tel que pour tout élément $\vec{v}$ de $\mathbf{H}$:

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \ell(\vec{v}).$$

(c) Soit $J : \mathbf{H} \to \mathbf{R}\,;\ \vec{v} \mapsto \frac{1}{2}b(\vec{v}, \vec{v}) - \ell(\vec{v})$.

i. En évaluant pour $\vec{w} \in \mathbf{H}$, $J(\vec{u} + \vec{w})$, montrer que pour tout $\vec{v} \in \mathbf{H}$,

$$\frac{1}{2}b(\vec{u}, \vec{u}) - \ell(\vec{u}) \leq \frac{1}{2}b(\vec{v}, \vec{v}) - \ell(\vec{v}),$$

avec égalité si et seulement si $\vec{v} = \vec{u}$.

ii. Montrer dans le cas où $\mathbf{H}$ est de dimension finie que J est différentiable et calculer sa différentielle, interprèter...

Exercice A :

1. Considérer la restriction à $H^\perp$ de la projection p sur un supplémentaire F de H suivant H...
2. $H^\perp$ est réduit à l'application nulle tandis que H hyperplan est de codimension 1. Pour montrer que $H^\perp$ est réduit à l'application nulle on peut considérer g_n un élément de E, par exemple affine par morceaux qui positif, est nul en 0 et qui vaut 1 sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

Exercice B Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une famille liée de vecteurs deux à deux distincts, unitaires d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension $n \geq 2$. On suppose de plus qu'il existe un réel α tel que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, ...n\}$,

$$\langle\vec{e}_i|\vec{e}_j\rangle = \alpha.$$

1. On écrit la matrice de Gram associée $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ qui a un déterminant nul car cette famille est liée. On trouve $\alpha = \frac{1}{n-1}$.
2. $||\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... = \vec{e}_n||^2 = 0$...
3. Le rang de la famille $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est $(n-1)$. Considérer la sous- famille à $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1})$ qui, si elle n'était libre, vérifierait les même hypothèses que $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, ce qui donnerait une autre valeur de α.

Exercice D — Notons $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ l'ensemble des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui admettent un moment d'ordre 2. Le cours nous apprend que l'application

$$\phi \;:\; L^2(\Omega, \mathbf{P}) \times L^2(\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbf{R}\,; (X_1, X_2) \mapsto \mathrm{E}(X_1 X_2)$$

est une forme bilinéaire positive.

Imaginons un instant que ϕ soit un produit scalaire, le théorème de projection sur $\mathrm{vect}(1, X)$, nous apprend que F admet un minimum atteint pour un couple (a_0, b_0) tel que $a_0 X + b_0$ soit le projeté orthogonal de Y sur $\mathrm{vect}(1, X)$. Le couple (a_0, b_0) est la solution du système

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}(X^2) & \mathrm{E}(X \times 1) \\ \mathrm{E}(1 \times X) & \mathrm{E}(1 \times 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X \times Y) \\ \mathrm{E}(1 \times Y) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

système qui traduit l'orthogonalité de $Y - (aX + b)$ avec X(première ligne) et 1 (seconde), vecteurs qui engendrent $\mathrm{vect}(1, X)$.

Revenons au cas qui nous intéresse, le système (2) a pour déterminant $\mathrm{V}(X)$ qui est strictement positif. Il admet donc une et une seule solution (a_0, b_0) sans avoir à supposer le caractère défini de ϕ.

Montrons que F admet pour minimum $\mathrm{E}\big((Y - a_0 X - b_0)^2\big)$. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big((Y - aX - b)^2\big) =& \mathrm{E}\Big(\big(Y - a_0 X - b_0 + ((a_0 - a)X + (b_0 - b))\big)^2\Big) \\
=& \mathrm{E}\big((Y - a_0 X + b_0)^2\big) + \mathrm{E}\big(((a_0 - a)X - (b_0 - b))^2\big) + \\
& \qquad \mathrm{E}\big((Y - a_0 X - b_0)((a_0 - a)X + (b_0 - b))\big).
\end{aligned}$$

Mais par définition de (a_0, b_0), la variable aléatoire $(Y - a_0 X - b_0)$ est orthogonale[1] à X et à 1 donc à $\mathrm{vect}(1, X)$ et donc :

$$\mathrm{E}\big(Y - aX - b)^2\big) = \mathrm{E}\big((Y - a_0 X - b_0)^2\big) + \mathrm{E}\big(((a_0 - a)X - (b_0 - b))^2\big).$$

La positivité de ϕ nous dit alors que F admet pour minimum $\mathrm{E}\big((Y - a_0 X - b_0)^2\big)$. Reste à terminer les calculs.

Remarque. Notons que si $\mathrm{E}\big(((a_0 - a)X - (b_0 - b))^2\big)$ est nulle alors $(a_0 - a)X = (b_0 - b)$ presque sûrement et donc $(a_0 - a)^2 \mathrm{V}(X) = (b_0 - b)^2 \mathrm{V}(1) = 0$. Donc comme $\mathrm{V}(X) > 0$ on a $a = a_0$, puis $b = b_0$. Donc le minimum est atteint en $a_0 X + b_0$ et seulement en ce point.

1. Au sens des forme bilinéaires.