DS n°4

Les élèves traiteront un et un seul des trois sujets suivants

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

SUJET 1

Type CENTRALE

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est bornée par un réel $K>0$ sipar définition la fonction $|\varphi|$ est majorée par K

1) Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à de $(e^x-1)^m$, lorsque x tend vers 0, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^j=\begin{cases}0 \text{ si } j \text{ est un entier entre 1 et } m-1,\\ m! \text{ si } j=m.\end{cases}$$

2) Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1\leq k\leq n$, on a :
$$(u_1u_2\dots u_k)^n\leq(u_1u_2\dots u_n)^k.$$

Partie I -

1. (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe [1] $\mathcal{C}^2$ par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbf{R}$ respectivement par M_0 et M_2.
   i. En écrivant, pour $h>0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :
   $$\forall x\in\mathbf{R}, |f'(x)|\leq\frac{M_0}{h}+\frac{M_2h}{2}.$$
   ii. En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

   (b)
   i. Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et de classe [2] $\mathcal{C}^3$ par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbf{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :
   $$\forall x\in\mathbf{R}, |f'(x)|\leq\frac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}.$$
   ii. Montrer que f'' est également bornée sur $\mathbf{R}$, on utilisera 1.(a).

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II -

2. Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe [3] $\mathcal{C}^n$ par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbf{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

   (a) i. Montrer que pour tout réel $h>0$,
   $$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leq\frac{M_nh^n}{n!}+2M_0.$$
   ii. En déduire que :
   $$\left|\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\binom{n-1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leq\sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}\left(\frac{M_nh^n}{n!}+2M_0\right).$$
   iii. En utilisant la question 1) du préliminaire montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

   (b) En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0\leq k\leq n$. On note alors $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|$.

   (c)
   i. Montrer que pour tout entier k tel que $0\leq k\leq n$, on a $M_k>0$.
   ii. En utilisant la suite finie $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ avec $u_k=2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :
   $$M_k\leq2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-k/n}M_n^{k/n}.$$
   Est-ce la meilleure majoration possible ?

---

1. Dans la réponse on pourra se limiter au cas où f est $\mathcal{C}^2$.
2. Dans la réponse on pourra se limiter au cas où f est $\mathcal{C}^3$.
3. Dans la réponse on pourra se limiter au cas où f est $\mathcal{C}^n$.

Partie III -

3. E (respectivement F) désigne l'espace des fonctions continues par morceaux (respectivement continues) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(x+1)+f(x)=0$ pour tout réel x. On admettra -c'est évident- que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme, notée ici N et définie par
$$N(f)=\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|.$$
   (a) Démontrer que pour toute fonction f dans E, il existe g unique dans F telle que, en tout point x où f est continue, on a $g'(x)=f(x)$. On note alors $g=T(f)$ ou $g=Tf$ et l'on définit ainsi une application T de E dans E.
   (b) On considère la fonction φ_0 de E telle que :
$$\varphi_0(0)=0,\ \varphi_0(x)=1 \text{ si } x\in\ ]0,1[.$$
   On pose $T^1=T$ et si $k\in\mathbf{N}^*$, $T^k=T\circ T^{k-1}$, puis pour $k\geq 1$, $\varphi_k=T^k(\varphi_0)$.
      i. Déterminer et représenter graphiquement sur le segment $[0,2]$ les fonctions φ_k pour $k=0,1,2,3,4$. Dans toute la suite, on notera $\lambda_k=N(\varphi_k)$.
      ii. Montrer que pour tout $k\in\mathbf{N}$ et tout $x\in\mathbf{R}$,
$$\varphi_k(-x)=(-1)^{k+1}\varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x)=(-1)^k\varphi_k(x).$$
      iii. Montrer que, pour $k\geq 1$
$$\lambda_{2k}=(-1)^k\varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1}=(-1)^k\varphi_{2k-1}(0).$$
   (c)
      i. Soit $f\in E$. Montrer que :
$$\forall x\in\mathbf{R}, 2Tf(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt.$$
      ii. En déduire que, pour tout $f\in E$, on a $2N(Tf)\leq N(f)$.
   (d) Déterminer les fonctions f de norme 1 de E telles que :
$$N(Tf)=\frac{1}{2}.$$
   (e) Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de norme 1 dans F telle que :
$$N(Tf)=\frac{1}{2}.$$
   (f) Soit maintenant p un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x+2p)=f(x)$ pour tout réel x.
      i. A. Montrer que si f a q zéros distincts sur $[0,2p[$, alors f' a au moins q zéros distincts sur $[0,2p[$.
         B. Montrer que si f et f' ont exactement q zéros distincts sur $[0,2p[$, alors elles n'ont aucun zéro commun.
      ii. Pour tout réel ν tel que $0<\nu<1$ et tout réel ρ, on définit la fonction $\ell : x\mapsto\varphi_n(x)-\nu f(x+\rho)$.
         A. On suppose que $N\left(f^{(n)}\right)\leq 1$. Montrer que $\ell^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0,2p[$.
         B. On suppose que $N(f)\leq\lambda_n$. Montrer que ℓ s'annule au moins $2p$ fois sur $[0,2p[$.
         C. En déduire que, si $N(f)\leq\lambda_n$ et $N\left(f^{(n)}\right)\leq 1$, les $\ell^{(k)}$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$ ont exactement $2p$ zéros sur I'intervalle $[0,2p[$.
      iii. On suppose f non constante.
         A. Montrer que l'on peut trouver α et β dans $[0,2p[$ tels que :
$$|f'(\alpha)|=N(f'),\ \varphi_n'(\beta)=\frac{\lambda_{n-1}}{N(f')}f'(\alpha).$$
         On pose alors $h(x)=\varphi_n(x)-\dfrac{\lambda_{n-1}f(x+\alpha-\beta)}{N(f')}$.
         B. Ici on suppose $n\geq 3$. Vérifier que $h'(\beta)=h''(\beta)=0$.
         C. En déduire que si $N(f)\leq\lambda_n$ et $N\left(f^{(n)}\right)\leq 1$ alors $N(f')\leq\lambda_{n-1}$.
         D. Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour $n=2$.
   (g) Montrer qu'il existe une fonction ω de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$ valant 1 sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ et 0 en dehors du segment $[-1,1]$ (on pourra utiliser la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\sin^n(t)\,dt$ sur le segment $[0,\pi]$).

(h) Soit maintenant f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^{n}$ par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbf{R}$ et pour laquelle :

$$N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N\left(f^{(n)}\right) \leq 1.$$

Soit α un réel de l'intervalle $[0,1[$. Pour tout entier naturel p non nul, on note f_p la fonction de période $2p$ telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x) \omega(x/p) \text{ pour } |x| \leq p.$$

i. Montrer que $f_p^{(n)}$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et que l'on a, pour p assez grand,

$$N(f_p) \leq \lambda_n \text{ et } N\left(f_p^{(n)}\right) \leq 1.$$

ii. En déduire que l'on a encore $N(f') \leq \lambda_{n-1}$.

(i) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^{n}$ par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbf{R}$. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $f^{(k)}$ est bornée et que l'on a :

$$N\left(f^{(k)}\right) \leq N(f)^{1-k/n} N\left(f^{(n)}\right)^{k/n} \frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type $x \mapsto af(bx)$.)

Partie IV -

4. (a) On définit, pour p entier supérieur ou égal à 2, la fonction ψ_p de F, affine sur $\left[0, \frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right]$ et $\left[1-\frac{1}{p}, 1\right]$ et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0,\ \psi_p\left(\frac{1}{p}\right) = \psi_p\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1.$$

En utilisant le III.C, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} N\left(T^n(\psi_p)\right) = \lambda_n.$$

(b) En déduire que l'inégalité du III.1 ne peut être améliorée.

⋆ ⋆

⋆

SUJET 2

Type CCP

Ce sujet comporte deux exercices et un problème.

EXERCICE 1

Soient n un entier naturel non nul et J l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tout les coefficients sont égaux à 1.

1. Déterminer le rang de J. En déduire que J admet une valeur propre dont l'ordre de multiplicité est au moins $n-1$.
2. Déterminer le spectre de J.
3. Montrer que J est diagonalisable.
4. Déterminer $\exp(J)$.
5. Pour tout réel a on note $M_a = J + aI_n$. Pour quelles valeurs de a, M_a est-elle inversible ?
6. Exprimer pour tout réel a, M_a^2 en fonction des matrices I_n et M_a ; en déduire lorsque M_a est inversible, une expression de M_a^{-1}, en fonction de M_a et I_n.

EXERCICE 2

Pour tout entier $n \geq 0$, on définie l'application f_n par :

$$f_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}},$$

et l'on pose : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer la dérivée de l'application

$$g \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \ln\left(1+e^x\right),$$

   en déduire la valeur de u_0.
2. Donner la valeur de u_1, on pourra calculer $u_0 + u_1$.
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en déduire que cette suite converge.
   On notera ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
4. Calculer pour tout entier $n \geq 2$, $u_n + u_{n-1}$ et en déduire la valeur de ℓ.

PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de Picard, au moyen des séries, ce qui est l'objet de la partie I, et d'en voir plusieurs applications élémentaires dans les parties suivantes.

On désigne par E un espace vectoriel de **dimension finie**, il sera muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Une définition. Soit $k \in [0,1[$. On dira qu'une application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est une *contraction stricte* de rapport k de l'espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, si pour tout $(x,y) \in \mathbf{E}^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|.$$

Une notation. Pour tout entier naturel n et tout application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$, on notera f^n l'application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ définie par, pour tout $x \in \mathbf{E}$,

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois la fonction } f}\ , \text{ avec la convention } f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}.$$

Partie I : Le théorème du point fixe de Picard

Soient $k \in [0,1[$, $f \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ une contraction stricte de l'espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, de rapport k, et a un point de $\mathbf{E}$.

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout entier $n \geq 0$.

1. Exprimer x_n au moyen de a et de f, pour tout entier naturel n.

2. On pose pour tout entier naturel $u_n = x_{n+1} - x_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$, puis que :
   $$\|u_n\| \leq k^n \|f(a) - a\|.$$
3. Déduire de la question précédente que la série $\sum u_n$ converge.
4. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément ℓ de $\mathbf{E}$.
5. Montrer que f est continue.
6. En déduire que ℓ est un point fixe de f.
7. Montrer que f n'a pas d'autre point fixe que ℓ.

On vient de prouver le résultat suivant :

Théorème du point fixe : *Une contraction stricte f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ admet un et un seul point fixe ; pour tout élément a de $\mathbf{E}$, la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ce point fixe.*

Partie II : Exemples et contre exemples

1. **De la nécessité d'avoir une contraction stricte**
   On considère l'application g définie par :
   $$g \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$
   (a) Montrer que pour tout réel t, $|g'(t)| < 1$. En déduire que pour tout x et tout y réels,
   $$|g(x) - g(y)| < |y - x|.$$
   (b) Etudier et représenter l'application g.
   (c) L'application g admet-elle un point fixe ? L'application g est-elle une contraction stricte de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$?
2. Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout réel x, $|g'(x)| < \frac{1}{2}$. Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout réel x,
   $$f(x) = f \circ g(x).$$
   (a) Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout réel a, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$, converge vers ℓ.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x, $f(g^n(x)) = f(x)$.
   (c) Montrer que f est constante.
3. **Un système non linéaire dans $\mathbf{R}^2$**
   (a) On définit sur $\mathbf{R}^2$ les normes classiques $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, définie par
   $$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|\;;\; \|(x,y)\|_\infty = \sup\{|x|, |y|\},$$
   pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.
   On va s'intéresser à la résolution sur $\mathbf{R}^2$ du système d'inconnue (x,y) suivant :
   $$\begin{cases} 4x = \sin(x+y), \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y). \end{cases} \tag{†}$$
   On considère également l'application ψ définie par :
   $$\psi \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,;\; (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$
   (b) Vérifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}^2$.
   (c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
   (d) Démontrer que pour tout a et tout b réels, on a :
   $$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \text{ et } |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$
   (e) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

(f) Montrer que le sustème (†) admet une et une seule solution dans $\mathbf{R}^2$.

(g) Déterminer $\|\psi\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-\psi(0,0)\|_\infty$.

(h) L'application ψ est-elle une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$?
Quel commentaire peut on faire ?

Partie III : Un peu d'algèbre linéaire

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si A, B, C etc. sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on notera pour tout $(i,j)\in\{1,...,n\}^2$, $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ etc., leurs coefficients respectifs d'indice (i,j). De même si X, Y, Z etc. sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on désigne pour tout élément i de $\{1,...,n\}$, par x_i, y_i, z_i etc., leurs coefficients respectifs situés sur la i^{e} ligne.

Dans la suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de la norme classique $\|\cdot\|_\infty$ définie par,

$$\|X\|_\infty = \sup_{i\in\{1,...,n\}} |x_i|,$$

pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sera muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|M\| = \sup_{i\in\{1,...n\}} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|,$$

pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On se propose d'étudier le système linéaire suivant d'inconnue X :

$$AX = B \tag{‡}$$

où B est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que, pour $i=1,2,...,n$:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\in\{1,...n\}\setminus\{i\}} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\|MX\|_\infty \le \|M\|\|X\|_\infty.$$
3. Montrer que (‡) admet une et une seule solution, on la notera Z_0.
4. Déterminer une matrice $\tilde{A}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, une matrice $\tilde{B}$, élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que :
$$\tilde{A}Z_0 + \tilde{B} = Z_0\,;\, \|\tilde{A}\| < 1.$$
5. Soit $U\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ par :
$$X_0 = U\,;\forall n\in\mathbf{N}, X_{n+1} = \tilde{A}X_n + \tilde{B}.$$
En utilisant le théorème de Picard, montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à déterminer.
Montrer sans utiliser le théorème de Picard que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la limite précédemment trouvée.

⋆ ⋆
⋆

SUJET 3

Type POLYTECHNIQUE

Notations

Soit d un entier strictement positif. On note $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille d et I_d désigne la matrice identité. Le produit de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ est noté $A \times B$ ou plus simplement AB. On appelle commutateur de A et B la matrice

$$[A, B] = AB - BA.$$

On munit $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ d'une norme *d'algèbre* $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que pour toutes matrices A et B éléments de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$,

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

On note $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ le groupe linéaire des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ qui sont inversibles et $\mathrm{SL}_d(\mathbf{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ formé des éléments de déterminant 1.

La première et la troisième parties sont consacrées à l'étude de matrices carrées de taille $d = 0$, la deuxième partie est largelent indépendante des autres.

Première parties

On considère l'ensemble des matrices carrées de taille 3, triangulaires supérieures strictes :

$$L = \{M_{p,q,r}, (p, q, r) \in \mathbf{R}^3\}, \text{ où } M_{p,q,r} = \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit $\mathbf{H} = \{I_3 + M, M \in L\}$.

1. Calculer l'exponentielle de la matrice $M_{p,q,r}$.

2a. Montrer que l'on définit une loi de groupe $*$ sur $\mathbf{L}$ en posant pour $M, N \in \mathbf{L}$:

$$M * N = M + N + \frac{1}{2}[M, N].$$

On explicitera l'inverse de $M_{p,q,r}$.

2b. Déterminer les matrices $M_{p,q,r} \in \mathbf{L}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbf{L}$ pour la loi $*$. $(\mathbf{L}, *)$ est-il commutatif ?

3. Montrer que pour toutes matrices $M, N \in \mathbf{L}$, on a :

$$(\exp M) \times (\exp N) = \exp(M * N).$$

4. Soient M et N deux éléments de $\mathbf{L}$. Montrer que

$$\exp([M, N]) = \exp(M)\exp(N)\exp(-M)\exp(-N).$$

5. Montrer que $\mathbf{H}$ muni du produit usuel des matrices est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$ et que

$$\exp : (\mathbf{L}, *) \to (\mathbf{H}, \times)$$

est un isomorphisme de groupes.

Deuxième partie

On considère dans cette partie deux matrices A et B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.
Dans les questions **6** et **7**, on suppose de plus que A et B commutent avec $[A, B]$.

6a. Montrer que $[A, \exp(B)] = \exp(B)[A, B]$.

6b. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)$.

6c. En déduire la formule :

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right).$$

7. On note $\mathcal{L} = \mathrm{Vect}(A, B, [A, B])$.

7a. Si $M, N \in \mathcal{L}$, montrer que $[M, N]$ commute avec M et N.

7b. Soit $G = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{L}\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe et que l'application

$$\Phi : \mathbf{H} \to G, \quad \exp(M_{p,q,r}) \mapsto \exp(pA + qB + r[A, B]),$$

est un morphisme de groupes.

Dans toute la suite de cette partie, A et B sont à nouveau deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

8. Soit $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ qui converge vers $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. Elle est donc bornée : soit $\lambda > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\|D_n\| \leq \lambda$.

8a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Justifier que $\dfrac{n!}{(n-k)!n^k} \to 1$ quand $n \to +\infty$ et que si $n \geq k$ (et $n \geq 1$),

$$0 \leq 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1.$$

En déduire que

$$\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(D_n)^k \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

8b. Montrer que pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 0$,

$$\|(D_n)^k - D^k\| \leq k\lambda^{k-1}\|D_n - D\|.$$

8c. Conclure que $\left(I_d + \dfrac{D_n}{n}\right)^n \to \exp(D)$ quand $n \to +\infty$.

9a. Soit $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ telle que $\|D\| \leq 1$. Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ indépendante de D telle que

$$\|\exp(D) - I_d - D\| \leq \mu\|D\|^2.$$

9b. Montrer qu'il existe une constante $\nu > 0$, et pour tout $n \geq 1$ une matrice $C_n \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, tels que

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n \quad \text{et} \quad \|C_n\| \leq \frac{\nu}{n^2}.$$

10. Déduire de ce qui précède que

$$\exp(A+B) = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n.$$

Troisième partie

Soit T un réel strictement positif. On note $E(T)$ l'ensemble constitué des couples (u, v) de fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs réelles.

Un *chemin de Carnot contrôlé par* $(u, v) \in E(T)$ est une application $\gamma : [0, T] \to \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de classe C^1 solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} \gamma'(t) = u(t)\gamma(t)M_{1,0,0} + v(t)\gamma(t)M_{0,1,0}, \\ \gamma(0) = I_3, \end{cases}$$

où les matrices $M_{1,0,0}$ et $M_{0,1,0}$ ont été introduites dans la première partie.

11a. Pour tout $(u, v) \in E(T)$, justifier l'existence d'un unique chemin de Carnot controlé par (u, v).

11b. Montrer que γ vérifie

$$\forall t \in [0,T], \qquad \gamma(t) \in \mathbf{H},$$

et calculer explicitement, en fonction de t, u et v les fonctions $p(t)$, $q(t)$ et $r(t)$ telles que

$$\gamma(t) = \exp(M_{p(t),q(t),r(t)}).$$

12. Pour tout $(\theta,\varphi) \in \mathbf{R}^2$ et $t \in \mathbf{R}$, on définit les contrôles

$$u_{\theta,\varphi}(t) = \sin(\theta - \varphi t) \qquad \text{et} \qquad v_{\theta,\varphi}(t) = \cos(\theta - \varphi t),$$

et on note $\gamma_{\theta,\varphi}(t) = \exp(M_{p(t),q(t),r(t)})$ le chemin de Carnot controlé par $(u_{\theta,\varphi}, v_{\theta,\varphi})$.

12a. On suppose $\varphi \neq 0$. Calculer $p(t)$ et $q(t)$ et vérifier que

$$r(t) = \frac{t\varphi - \sin(t\varphi)}{2\varphi^2}.$$

12b. Calculer de même $\gamma_{\theta,0}(t)$.

La *sphère de Carnot* est l'ensemble :

$$B(1) = \left\{(p,q,r) \in \mathbf{R}^3 \mid \exists(\theta,\varphi) \in [-\pi,\pi] \times [-2\pi,2\pi],\ \gamma_{\theta,\varphi}(1) = \exp(M_{p,q,r})\right\}.$$

13. On définit les fonctions f et g sur $]0,2\pi]$ par :

$$f(s) = \frac{2(1-\cos s)}{s^2} \qquad \text{et} \qquad g(s) = \frac{s - \sin s}{2s^2}.$$

Montrer que f et g se prolongent par continuité sur $[0,2\pi]$; que f est alors une bijection continue de $[0,2\pi]$ sur un ensemble qu'on précisera ; et que g atteint son maximum en π.

14. Montrer que si $(p,q,r) \in B(1)$ avec $r \geq 0$ alors $r = g \circ f^{-1}(p^2+q^2)$.
Énoncer et établir une réciproque.

On pourra donner l'allure de la fonction $s \mapsto g \circ f^{-1}(s^2)$ pour $s \in [0,1]$ et notamment les tangentes en $s=0$ et $s=1$.

15. Montrer l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $(p,q,r) \in B(1)$, on ait

$$c_1^{-1} \leq p^2 + q^2 + |r| \leq c_1.$$

16a. Montrer que pour tout $(p,q,r) \in \mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, il existe un unique $\lambda > 0$ tel que :

$$(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1).$$

16b. En déduire que pour tout point $A \in \mathbf{H}$, il existe un réel positif $T(A)$ et des paramètres (θ,φ) (dépendants également de A) tels que A soit l'extrémité du chemin de Carnot contrôlé par $(u_{\theta,\varphi}, v_{\theta,\varphi}) \in E(T(A))$.

16c. Montrer l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $(p,q,r) \in \mathbf{R}^3$,

$$c_2^{-1}\sqrt{p^2+q^2+|r|} \leq T(\exp(M_{p,q,r})) \leq c_2\sqrt{p^2+q^2+|r|}.$$

* *
*