4. Électromagnétisme

4.5. Propagation et rayonnement
C – Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique, réflexion sur un conducteur parfait

Table des matières

Introduction

1. Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur

1.1. Modèle du conducteur ohmique

- $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$ avec γ la conductivité électrique du milieu ohmique identique à celle en stationnaire tant que la fréquence temporelle est inférieure à une valeur seuil ($\approx 10^{14}$ Hz pour un métal).
- $\boxed{\rho = 0}$ car $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$ et $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma} \ll$ durée caractéristique d'évolution du champ électromagnétique dans le milieu ohmique.
- **Approximation usuelle** : courant de déplacement négligeable devant le courant de conduction : $\|\vec{j_D}\| \ll \|\vec{j}\|$.

➥ À quelle condition sur γ, ε_0 et ω, $\|\vec{j_D}\| \ll \|\vec{j}\|$?

➥ Est-ce vérifié dans le cuivre ($\gamma = 6 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$) ?

➥ Dans quel domaine de fréquences, est-ce vérifié dans l'eau de mer ($\gamma \approx 1\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$) ?

1.2. Modèle de l'onde

On s'intéresse au comportement d'une OPPM dans le milieu ohmique soit en représentation complexe

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\, \vec{e}_x\, \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}_0\, \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}$$

1.3. Équation de propagation du champ électrique dans le conducteur

On montre que

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Il s'agit d'une équation de **diffusion**.

➥ Démonstration :

➥ Commenter la non invariance par renversement du temps $t \to -t$.

1.4. Relation de dispersion

➥ Montrer, dans le cadre de l'**approximation** $\|\vec{j_D}\| \ll \|\vec{j}\|$, que l'équation de dispersion s'écrit :

$$\boxed{k^2 = -i\mu_0\gamma\omega}$$

Remarques

- Relation différente
  - de celle du vide :
  - de celle dans un plasma :
- Relation non linéaire entre k et ω : le milieu est donc **dispersif**.

1.5. Solutions et interprétation

➥ En posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$, montrer que

$$\boxed{k = \pm\frac{1-i}{\delta}}$$

On en déduit

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,\vec{e}_x\,\mathrm{e}^{\mp\frac{z}{\delta}}\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t\mp\frac{z}{\delta}\right)}$$

soit en notation réelle,

$$\vec{E}(M,t) = |E_0|\,\vec{e}_x\,\mathrm{e}^{\mp\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t\mp\frac{z}{\delta}+\varphi\right)$$

➥ Commenter les différents facteurs de l'expression du champ électrique.

➥ Que représente la grandeur δ ?

➥ Lorsque $k = k_1 + ik_2$ où $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, quels rôles respectifs jouent k_1 et k_2 pour l'onde électromagnétique ?

Exemple 1

Domaine	Fréquence	Longueur d'onde	δ	v_φ
Fréquences industrielles	50 Hz	6×10^3 km	9 mm	3 m/s
Radio GO	200 kHz	2 km	0,1 mm	0,2 km/s
Radio FM	100 MHz	3 m	6 µm	4 km/s
GSM / Wi-Fi	≈ 2 GHz	0,1 m	1 µm	2×10^1 km/s

TABLE 1 – Profondeur de peau et vitesse de phase pour le cuivre $\gamma = 6\times10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$

Exemple 2
Eau de mer : $\gamma \approx 1\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$.
On en déduit, avec f en hertz et δ en mètres,

$$\delta \approx \frac{5\times10^2}{\sqrt{f}}$$

➥ Dans quel domaine de fréquences, les sous-marins doivent-ils communiquer lorsqu'ils sont en immersion ?

1.6. Vitesse de phase et de groupe

- Vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}(k)} = \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$
- Vitesse de groupe $v_{gr} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\left(\mathrm{Re}(k)\right)} = 2v_\varphi$

➥ Commenter les définitions de ces deux vitesses en les comparant notamment à celles dans un plasma dilué.

➥ La propagation est-elle dispersive ?

1.7. Densité de courant dans le conducteur

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}(M,t) = \gamma|E_0|\vec{e}_x\,\mathrm{e}^{\mp\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t \mp \frac{z}{\delta} + \varphi\right)$$

➥ Dans quelle partie d'un conducteur les courants sont-ils significatifs ? Quel modèle de distribution de courants peut-on souvent adopter ?

1.8. Aspect énergétique

Exercice

Soit un conducteur occupant le demi-espace $z > 0$. On s'intéresse à l'aspect énergétique pour une onde cherchant à se propageant dans la direction Oz, dans le sens des z croissants.

1. Montrer que
$$\underline{\vec{B}} = \pm \frac{1-i}{\delta\omega} E_0 \, \mathrm{e}^{\mp\frac{z}{\delta}} \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t \mp \frac{z}{\delta}\right)} \, \vec{e}_y$$
2. Exprimer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting en $z = 0$.
3. Exprimer la valeur moyenne temporelle de la puissance cédée, par unité de surface, à un cylindre de conducteur d'axe Oz.
4. Commenter.

2. Modèle du conducteur parfait

L'étude précédente a montré qu'une onde électromagnétique pénètre dans un conducteur réel sur une profondeur de l'ordre de quelques $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma \omega)}$ d'autant plus petite que γ est élevée.

On en déduit le **modèle du conducteur parfait** :

Un **conducteur parfait** est un conducteur ohmique de conductivité γ infinie pour toute fréquence.

$$\gamma \longrightarrow +\infty$$

➥ La puissance volumique cédée à la matière restant finie, en déduire que le champ électrique est nul dans un conducteur parfait.

➥ En déduire que la densité volumique de charge, le champ magnétique et la densité de courants volumiques sont également nuls.

Conclusion Dans un conducteur parfait en régime variable,

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{B} = \vec{0}, \quad \rho = 0, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

et

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\text{cédée à la matière}} = 0$$

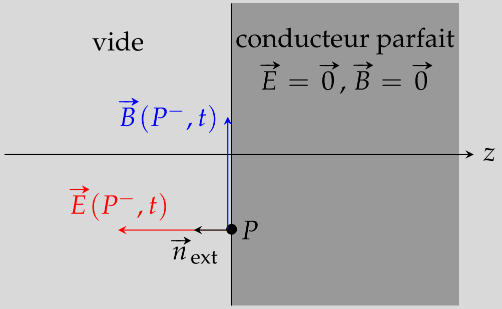
Courants électriques

Il n'y a pas de courants électriques au sein du conducteur dans le cadre du modèle du conducteur parfait.

Pour un conducteur réel, on a vu que $\|\vec{j}\|$ est significatif sur une épaisseur de l'ordre de δ.

➥ Proposer un modèle de distribution de courants adaptée.

Champ électromagnétique au voisinage d'un conducteur parfait



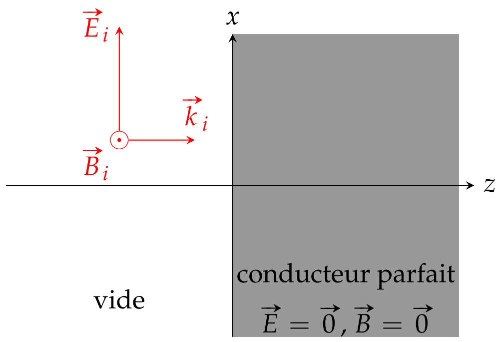
$$\begin{cases} \vec{E}(P^-, t) - \vec{E}(P^+, t) = \vec{E}(P^-, t) = \dfrac{\sigma(P,t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} \\ \vec{B}(P^-, t) - \vec{B}(P^+, t) = \vec{B}(P^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(P^-, t) \wedge \vec{n}_{\text{ext}} \end{cases}$$

Ces relations seront fournies en cas de besoin.

3. Réflexion d'une OPPM électromagnétique sur un conducteur parfait

On se restreint à l'étude de la réflexion d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) polarisée **rectilignement** arrivant sur le plan conducteur **parfait** en **incidence normale**.

3.1. Position du problème



➥ Expliquer qualitativement le rôle du champ électromagnétique incident sur les porteurs de charge du conducteur.

➥ En déduire l'existence d'une onde électromagnétique réfléchie. Pourquoi est-elle de même fréquence temporelle que l'onde incidente ?

➥ On se restreint au cas d'un OPPM incidente polarisée rectilignement avec $\vec{E}$ colinéaire à $\vec{e}_x$. Pourquoi traiter ce cas particulier permet ensuite de généraliser à n'importe quelle OPPM ?

➥ Écrire les composantes du champ électromagnétique incident.

➥ Quelle est l'écriture générale de l'onde électromagnétique réfléchie ?

3.2. Détermination de l'onde réfléchie

3.3. Structure de l'onde résultante

$$\vec{E}(M,t) = 2E_0 \sin(kz)\sin(\omega t + \varphi_0)\,\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = 2\frac{E_0}{c}\cos(kz)\cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{e}_y$$

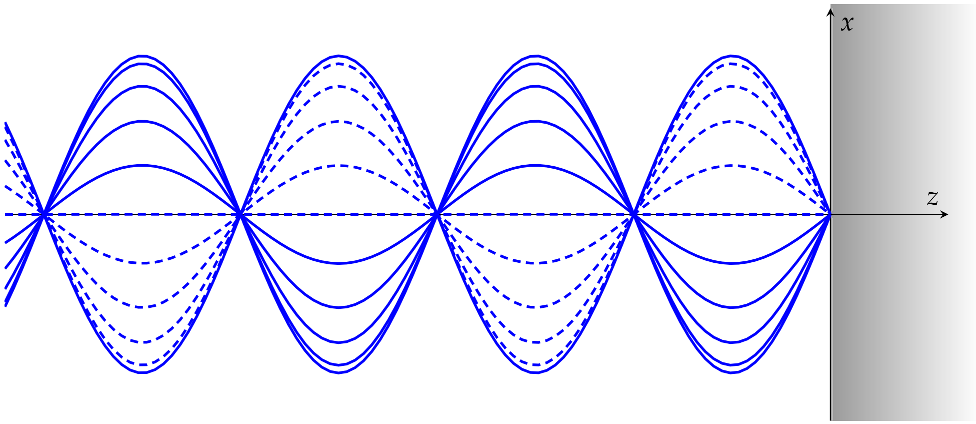


Figure 1 – Champ électrique de l'onde stationnaire résultante

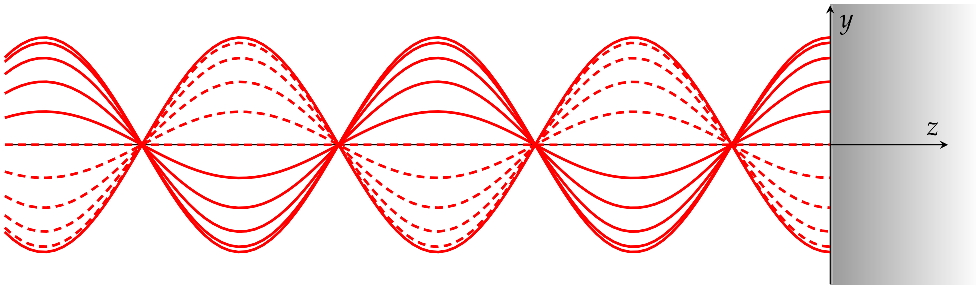


Figure 2 – Champ magnétique de l'onde stationnaire résultante

	Champ électrique $\vec{E}$	Champ magnétique $\vec{B}$
$z_n = n\dfrac{\lambda}{2}$		
$z'_n = \dfrac{\lambda}{4} + n\dfrac{\lambda}{2}$		

TABLE 2 – Ventres et nœuds de vibration

Aspect énergétique

1. Montrer que l'onde stationnaire ne propage pas d'énergie.

2. Montrer que la valeur moyenne temporelle de l'énergie électromagnétique volumique est uniformément répartie.

3.4. Courants surfaciques

➥ Montrer que le vecteur densité de courants surfaciques s'écrit

$$\vec{j}_s = 2\varepsilon_0 c E_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \vec{e}_x$$

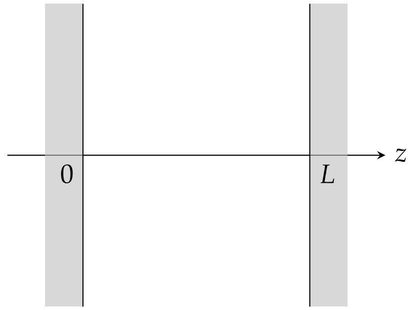
4. Cavité résonante

4.1. Position du problème

Une **cavité** est un volume vide délimité par des parois conductrices.

Un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ peut-il exister dans cette cavité ? Si non, pourquoi ? Si oui, y a-t-il des conditions d'existence ?

Exemple avec une cavité unidimensionnelle



4.2. Recherche des modes d'ondes stationnaires