DM bis n$^{\text{o}}$11

Sous-groupes compacts du groupe linéaire

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme euclidienne est notée $\|.\|$. On note L(E) l'espace vectoriel des endomorphismes de E et GL(E) le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in$ C. De plus, pour toute famille $a_1, \ldots, a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in \mathrm{C}$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note Conv(F), le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que Conv(F) est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathrm{F}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A est notée A^{T}. La trace de A est notée Tr(A).

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes*

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $\mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{S}\mathrm{X} > 0$. On note $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. En déduire que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{R} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{R}^{\mathsf{T}}\mathrm{R}$. Réciproquement montrer que pour tout $\mathrm{R} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{R}^{\mathsf{T}}\mathrm{R} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4. Soit K un sous-ensemble compact de E et Conv(K) son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Définir une application Φ de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv(K)} = \Phi(\mathcal{H} \times \mathrm{K}^{n+1})$. En déduire que Conv(K) est un sous-ensemble compact de E.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $(x|y) = 0$ implique $(g(x)|g(y)) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)
   En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par $(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B})$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire).
   Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

C. Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $\mathrm{B}(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathrm{E}$ et de rayon r.

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$.
   (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{K}$, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{B}(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i = \emptyset$.

10. Montrer qu'il existe une sous famille finie $(\mathrm{F}_{i_1}, \ldots, \mathrm{F}_{i_p})$ de la famille $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{F}_{i_k} = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de GL(E) et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{N_G}(x) = \sup_{u\in\mathrm{G}} \|u(x)\|$.

11. Montrer que $\mathrm{N_G}$ est bien définie et que c'est une norme sur E.

12. Montrer en outre que $\mathrm{N_G}$ vérifie les deux propriétés suivantes :
    - pour tous $u \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N_G}(u(x)) = \mathrm{N_G}(x)$;
    - pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ avec x non nul, $\mathrm{N_G}(x + y) = \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

    Pour la deuxième propriété, on pourra utiliser le fait que si $z \in \mathrm{E}$, l'application qui à $u \in \mathrm{G}$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

On considère un élément $u \in \mathrm{L(E)}$, et on suppose que K est stable par u, c'est à dire que $u(\mathrm{K})$ est inclus dans K. Pour tout $x \in \mathrm{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(\mathrm{K}) = \sup_{x,y\in\mathrm{K}} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(\mathrm{K})}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit $r \geqslant 1$ un entier, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in \mathrm{K}$ tel que $u(a) = a$.
15. Montrer que $\mathrm{N_G}\left(\dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mathrm{N_G}(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$, on a

$$\mathrm{N_G}\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = \mathrm{N_G}(u_j(a)) + \mathrm{N_G}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

16. En déduire, pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.
17. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1,\ldots,r\}$.
18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in \mathrm{K}$ tel que pour tout $u \in \mathrm{G}$, $u(a) = a$.

E. Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{B})$. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.
Soit G un sous groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$, on définit l'application ρ_A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même par la formule $\rho_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{M}\mathrm{A}$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$ associe $\rho_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ est continue.
On note $\mathrm{H} = \{\rho_\mathrm{A} \,/\, \mathrm{A} \in \mathrm{G}\}$, $\Delta = \left\{\mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{A} \,/\; \mathrm{A} \in \mathrm{G}\right\}$ et $\mathrm{K} = \mathrm{Conv}(\Delta)$.

19. Montrer que $\rho_\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$.
20. Montrer que Δ est un compact contenu dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que K est un sous-ensemble compact de $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.
21. Montrer qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathrm{K}$ tel que pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$, $\rho_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$. En déduire l'existence de $\mathrm{N} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{NAN}^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{G} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{G}_1\mathrm{N} = \{\mathrm{N}^{-1}\mathrm{BN} /\ \mathrm{B} \in \mathrm{G}_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{N} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{NKN}^{-1} \subseteq \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P.

22. Montrer que $g \circ \sigma_\mathrm{P} \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_\mathrm{P} \circ g^{-1} = \sigma_{g(\mathrm{P})}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.