Partie I : logique et calcul des propositions

Dans une association de jeunes détectives, les membres s'entraînent à résoudre des problèmes logiques. Ceux-ci respectent les règles suivantes : « Lors d'une conversation, un même membre aura un comportement constant : il dira toujours la vérité, ou ne dira jamais la vérité. »

Question I.1 *Soient n membres intervenant dans une même conversation. Chaque membre est représenté par une variable propositionnelle M_i avec $i \in [1 \cdots n]$ qui représente le fait que ce membre dit, ou ne dit pas, la vérité. Chaque membre fait une seule déclaration représentée par la variable propositionnelle D_i. Représenter le respect des règles dans cette conversation sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables M_i et D_i avec $i \in [1 \cdots n]$.*

Vous assistez à deux conversations sur la véracité des déclarations de deux groupes de trois membres de cette association.
Nous nommerons A, B et C les participants de la première conversation.

A : « Les seuls qui disent la vérité ici sont C et moi. »

B : « C ne dit pas la vérité. »

C : « Soit B dit la vérité. Soit A ne dit pas la vérité. »

Nous noterons A, B et C les variables propositionnelles associées au fait que A, B et C disent respectivement la vérité.
Nous noterons D_A, D_B et D_C les formules du calcul des propositions associées respectivement aux déclarations de A, B et C dans la conversation.

Question I.2 *Représenter les déclarations de la première conversation sous la forme de formules du calcul des propositions D_A, D_B et D_C dépendant des variables A, B et C.*

Question I.3 *En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer si A, B et C disent, ou ne disent pas, la vérité.*

Nous nommerons D, E et F les participants de la seconde conversation.

D : « Personne ne doit croire F. »

E : « D et F disent toujours la vérité. »

F : « E a dit la vérité. »

Nous noterons D, E et F les variables propositionnelles associées au fait que D, E et F disent respectivement la vérité.
Nous noterons D_D, D_E et D_F les formules du calcul des propositions associées respectivement aux déclarations de D, E et F dans la seconde conversation.

Question I.4 *Représenter les déclarations de la seconde conversation sous la forme de formules du calcul des propositions D_D, D_E et D_F dépendant des variables D, E et F.*

Question I.5 *En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer si D, E et F disent, ou ne disent pas, la vérité.*

Partie II : Algorithmique et programmation en CaML

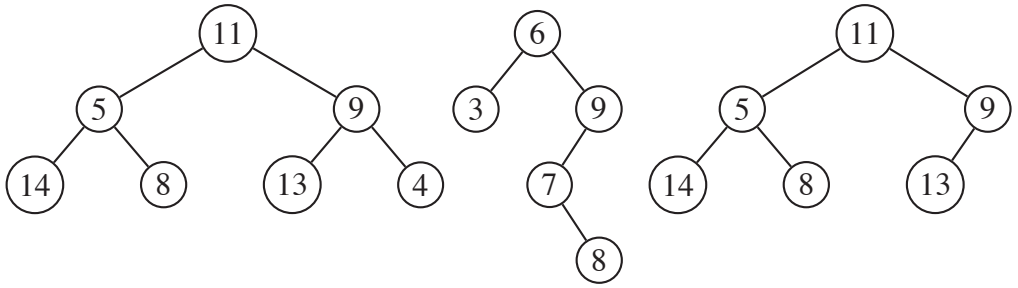
Cette partie doit être traitée par les étudiants qui ont utilisé le langage CaML dans le cadre des enseignements d'informatique. Les fonctions écrites devront être récursives ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives. Elles ne devront pas utiliser d'instructions itératives (c'est-à-dire `for`, `while`, ...) ni de références.

1 Préliminaire : Arbre binaire d'entiers

1.1 Définition

Déf. III.1 (Arbre binaire d'entiers) Un arbre binaire d'entiers a est une structure qui peut, soit être vide (notée $\emptyset$), soit être un nœud qui contient une étiquette entière (notée $\mathcal{E}(a)$), un sous-arbre gauche (noté $\mathcal{G}(a)$) et un sous-arbre droit (noté $\mathcal{D}(a)$) qui sont tous deux des arbres binaires d'entiers. L'ensemble des étiquettes de tous les nœuds de l'arbre a est noté $\mathcal{C}(a)$.

Exemple III.1 (Arbre binaire d'entiers) Voici trois exemples d'arbres binaires étiquetés par des entiers (les sous-arbres vides qui sont fils gauche ou droit des nœuds ne sont pas représentés) :



1.2 Profondeur d'un arbre

Déf. III.2 (Profondeur d'un arbre) Les branches d'un arbre relient la racine aux sous-arbres vides. La profondeur d'un arbre A est égale au nombre de liaisons entre nœuds de la branche la plus longue. Nous la noterons $\mid A \mid$. Nous associerons la profondeur -1 à l'arbre vide $\emptyset$.

Exemple III.2 (Profondeurs) Les profondeurs des trois arbres binaires de l'exemple III.1 sont respectivement 2, 3 et 2.

Question III.1 *Donner une définition de la profondeur d'un arbre a en fonction de $\emptyset$, $\mathcal{G}(a)$ et $\mathcal{D}(a)$.*

Question III.2 *Soit un ensemble non vide d'étiquettes donné, quelle est la forme de l'arbre contenant ces étiquettes dont la profondeur est maximale ? Quelle est la forme de l'arbre contenant ces étiquettes dont la profondeur est minimale ?*

1.3 Arbres binaires complets

Déf. III.3 (Arbre binaire complet) Un arbre binaire complet est un arbre binaire dont tous les niveaux sont complets, c'est-à-dire que tous les nœuds d'un même niveau ont deux fils non vides sauf les nœuds du niveau le plus profond qui n'ont aucun fils (c'est-à-dire deux fils vides).

Exemple III.3 (Arbre binaire complet) Le premier arbre binaire de l'exemple III.1 est complet.

Question III.3 *Montrer que, dans un arbre binaire complet non vide, le niveau de profondeur p contient 2^p nœuds.*

Question III.4 *Calculer le nombre n de nœuds d'un arbre binaire complet non vide de profondeur p.*

Question III.5 *En déduire la profondeur p d'un arbre binaire complet non vide contenant n éléments.*

2 Exercice : arbre binaire de recherche

L'objectif de cet exercice est d'étudier une implantation d'un arbre binaire de recherche et son utilisation dans un algorithme de tri d'une séquence d'entiers.

2.1 Arbre binaire de recherche d'entiers

Déf. III.4 (Arbre binaire de recherche) Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire d'entiers dont :
- les fils de la racine sont des arbres binaires de recherche ;
- les étiquettes de tous les nœuds composant le fils gauche de la racine sont inférieures ou égales à l'étiquette de la racine ;
- et les étiquettes de tous les nœuds composant le fils droit de la racine sont strictement supérieures à l'étiquette de la racine.

Ces contraintes s'expriment sous la forme :

$$ABR(a) \equiv a \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} ABR(\mathcal{G}(a)) \wedge ABR(\mathcal{D}(a)) \\ \wedge \forall v \in \mathcal{C}(\mathcal{G}(a)), v \leq \mathcal{E}(a) \\ \wedge \forall v \in \mathcal{C}(\mathcal{D}(a)), \mathcal{E}(a) < v \end{cases}$$

Exemple III.4 (Arbres binaires de recherche) Le deuxième arbre de l'exemple III.1 est un arbre binaire de recherche.

2.1.1 Représentation des arbres binaires en CaML

Un arbre binaire d'entiers est représenté par le type `arbre` dont la définition est :

```
type arbre =
  | Vide
  | Noeud of arbre * int * arbre;;
```

Dans l'appel `Noeud( fg, v, fd)`, les paramètres `fg`, `v` et `fd` sont respectivement le fils gauche, l'étiquette et le fils droit de la racine de l'arbre créé.

Exemple III.5 L'expression suivante :

```
Noeud(
   Noeud( Vide, 3, Vide)
   6,
   Noeud(
      Noeud(
         Vide,
         7,
         Noeud( Vide, 8, Vide)),
      9,
      Vide))
```

est alors associée au deuxième arbre binaire représenté graphiquement dans l'exemple III.1.

2.2 Tri d'une séquence d'entiers

2.2.1 Séquence d'entiers

Déf. III.5 (Séquence d'entiers) Une séquence s de taille n de valeurs entières v_i avec $1 \leq i \leq n$ est notée $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Une même valeur v peut figurer plusieurs fois dans s, nous noterons card(v, s) le cardinal de v dans s, c'est-à-dire le nombre de fois que v figure dans s avec :

$$\text{card}(v, \langle v_1, \ldots, v_n \rangle) = \text{card}\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n, v = v_i\}$$

Une séquence d'entiers est représentée par le type `sequence` dont la définition est :

```
type sequence == int list;;
```

Soit le programme en langage CaML :

```
let rec ajouter v a =
  match a with
    | Vide -> Noeud(Vide,v,Vide)
    | Noeud (g,e,d) ->
        if (v = e)
        then Noeud(Noeud(g,e,Vide),v,d)
        else
          (if (v < e)
          then Noeud((ajouter v g),e,d)
          else Noeud(g,e,(ajouter v d)));;

let trier s =
  let rec aux1 l r =
    match l with
      | [] -> r
      | t::q -> (aux1 q (ajouter t r)) in
  let rec aux2 a =
    match a with
      | Vide -> []
      | Noeud(g,v,d) -> (aux2 g) @ (v :: (aux2 d)) in
  (aux2 (aux1 s Vide));;
```

Soit la constante `exemple` définie et initialisée par :

```
let exemple = [ 2; 1; 3];;
```

Question III.6 *Détailler les étapes du calcul de* `(trier exemple)` *en précisant pour chaque appel aux fonctions* `ajouter`, `aux1`, `aux2` *et* `trier`, *la valeur du paramètre et du résultat.*

Question III.7 *Soit l'arbre binaire d'entiers* `p`, *soit l'entier* `e` *et soit l'arbre binaire d'entiers* `r` *tel que* `r = (ajouter e p)`, *montrer que :*

$$ABR(\texttt{p}) \Rightarrow ABR(\texttt{r})$$

Question III.8 *Soit la séquence* $\texttt{p} = \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ *de taille* m, *soit la séquence* $\texttt{r} = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle$ *de taille* n *telle que* `r = (trier p)`, *montrer que :*

$a)$ $m = n$
$b)$ $\forall i, 1 \leq i \leq m, \mathit{card}(p_i, r) = \mathit{card}(p_i, p)$
$c)$ $\forall i, 1 \leq i < n, r_i \leq r_{i+1}$

Question III.9 *Montrer que le calcul des fonctions* `ajouter`, `aux1`, `aux2` *et* `trier` *se termine quelles que soient les valeurs de leurs paramètres respectant le type des fonctions.*

Question III.10 *Donner des exemples de valeurs du paramètre* `s` *de la fonction* `trier` *qui correspondent aux meilleur et pire cas en nombre d'appels récursifs effectués.*
Calculer une estimation de la complexité dans les meilleur et pire cas de la fonction `trier` *en fonction du nombre de valeurs dans les séquences données en paramètre. Cette estimation ne prendra en compte que le nombre d'appels récursifs à* `ajouter`, `aux1`, `aux2` *et* `trier` *effectués.*

3 Problème : Représentation de systèmes creux

La résolution numérique de problèmes en physique repose souvent sur la recherche de solutions pour un système linéaire qui résulte de la discrétisation du modèle mathématique continu utilisé pour représenter le problème. Lorsque les différentes parties du problème sont faiblement couplées, le système linéaire contient un grand nombre de valeurs nulles. Il est alors qualifié de système creux. Cette notion peut être généralisée à un système contenant un grand nombre de valeurs identiques. Nous appelons cette valeur identique, valeur par défaut des éléments. Pour les systèmes faiblement couplés évoqués précédemment, cette valeur par défaut est 0.0.
L'objectif de ce problème est l'étude d'une représentation d'un vecteur creux par un arbre binaire en numérotant les nœuds par les indices des éléments du vecteur et en étiquetant les nœuds par les valeurs des éléments du vecteur différentes de la valeur par défaut. L'utilisation de cette structure permet de réduire le temps d'accès aux éléments du vecteur creux par rapport à l'utilisation naturelle d'une structure de liste. Par contre, cette structure utilise plus de mémoire que la liste mais moins que la représentation habituelle des vecteurs.
Un vecteur creux est représenté par un arbre binaire dont les noeuds sont soit vides, soit étiquetés par les valeurs des éléments contenus dans le vecteur creux qui sont différentes de la valeur par défaut, et les chemins de la racine de l'arbre aux nœuds sont extraits du codage binaire de l'indice de l'élément dont la valeur est contenue dans le nœud.

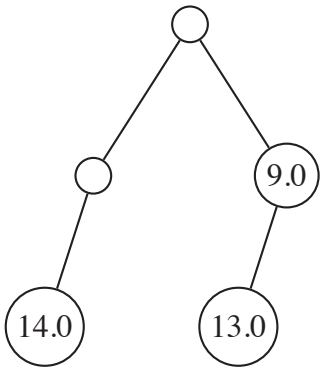
3.1 Arbre binaire partiel de réels

3.1.1 Définition

Un arbre binaire partiel de réels est un arbre binaire de réels dont certains nœuds ne contiennent pas d'étiquettes.

Déf. III.6 (Arbre binaire partiel de réels) Un arbre binaire partiel de réels a est une structure qui peut soit être vide (notée $\emptyset$), soit être un nœud qui contient une étiquette réelle (notée $\mathcal{E}(a)$), un sous-arbre gauche (noté $\mathcal{G}(a)$) et un sous-arbre droit (noté $\mathcal{D}(a)$) qui sont tous deux des arbres binaires partiels de réels, soit être une fourche qui est un nœud qui ne contient pas d'étiquette. L'ensemble des fourches de l'arbre a est noté $\mathcal{F}(a)$. L'ensemble des nœuds de l'arbre a qui ne sont pas des fourches est noté $\mathcal{N}(a)$.

Exemple III.6 (Arbre binaire partiel de réels) Voici un exemple d'arbre binaire partiel étiqueté par des réels (les sous-arbres vides des nœuds ne sont pas représentés) :



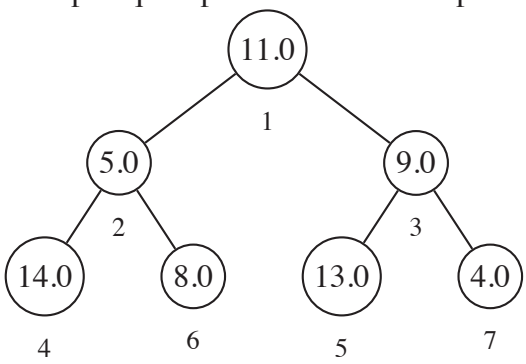
3.1.2 Numérotation hiérarchique des nœuds

Pour exploiter un arbre binaire partiel pour représenter un vecteur creux, il faut associer un indice à chaque nœud de l'arbre contenant une valeur.

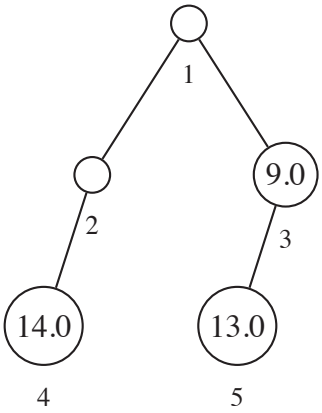
Déf. III.7 (Numérotation hiérarchique des nœuds) La numérotation hiérarchique des nœuds d'un arbre binaire consiste à associer le numéro 1 à la racine de l'arbre puis à calculer les numéros des fils dans un nœud à partir du numéro de leur père. Soit un nœud de numéro n à la profondeur p, le numéro de son fils gauche est $n + 2^p$, le numéro de son fils droit est $n + 2^{p+1}$.

Dans l'exemple suivant, le numéro de chaque nœud sera noté en-dessous de son étiquette.

Exemple III.7 Voici un arbre complet qui représente un vecteur plein de 7 éléments.



Le vecteur plein correspondant est :
$\{1 \mapsto 11.0, 2 \mapsto 5.0, 3 \mapsto 9.0, 4 \mapsto 14.0, 5 \mapsto 13.0, 6 \mapsto 8.0, 7 \mapsto 4.0\}$.
Voici un arbre partiel qui représente un vecteur creux de 3 éléments avec une valeur par défaut 0.0.



Le vecteur creux correspondant dont la valeur par défaut 0.0 des éléments est explicitée :
$\{1 \mapsto 0.0, 2 \mapsto 0.0, 3 \mapsto 9.0, 4 \mapsto 14.0, 5 \mapsto 13.0, 6 \mapsto 0.0, 7 \mapsto 0.0\}$.

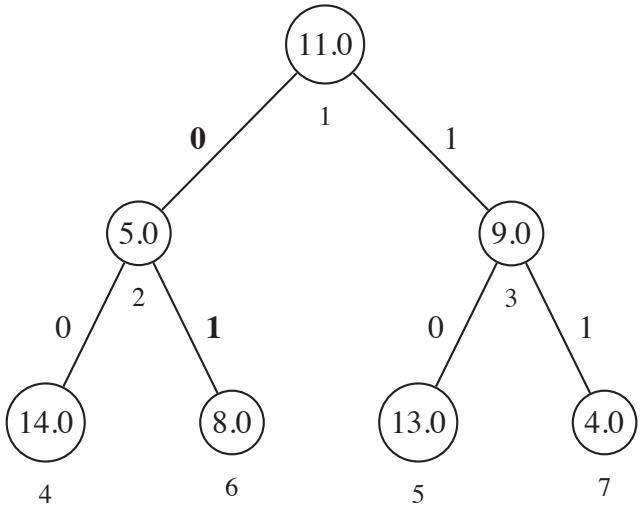
Question III.11 *Montrer que l'ensemble des nœuds de profondeur p est égal à l'intervalle* $[2^p, 2^{p+1} - 1]$.

Question III.12 *Montrer que la numérotation de chaque nœud est unique.*

3.1.3 Occurrence d'un nœud dans un arbre

Pour accéder à un nœud, nous devons représenter le chemin dans l'arbre allant de la racine au nœud. Pour cela, nous étiquetons la liaison entre un nœud et son fils gauche par l'entier 0 et la liaison entre un nœud et son fils droit par l'entier 1. Nous appelons alors occurrence, ou chemin, du nœud de numéro n la liste des étiquettes suivies pour aller de la racine à ce nœud. Dans l'exemple suivant, l'occurrence du nœud de numéro 6 étiqueté par la valeur 8.0 est $\langle 0, 1 \rangle$.

Exemple III.8



Si l'occurrence du nœud de numéro n situé à la profondeur p est notée $\langle c_1, \ldots, c_p \rangle$ (c_1 étant le lien avec la racine), on remarque que l'occurrence du père de n est $\langle c_1, \ldots, c_{p-1} \rangle$.

Question III.13 *Soit un nœud de numéro n situé à la profondeur p et d'occurence $\langle c_1, \ldots, c_p \rangle$, montrer que :*

$$n = 2^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+1} \times 2^i$$

Question III.14 *Exprimer la valeur du coefficient c_i en fonction de n et i.*

3.1.4 Représentation des arbres binaires partiels en CaML

Un arbre binaire partiel d'entiers est représenté par le type `arbre` dont la définition est :

```
type arbre =
| Vide
| Fourche of arbre * arbre
| Noeud of arbre * float * arbre;;
```

Dans l'appel `Noeud( fg, v, fd)`, les paramètres `fg`, `v` et `fd` sont respectivement le fils gauche, l'étiquette et le fils droit de la racine de l'arbre créé. Dans l'appel `Fourche( fg, fd)`, les paramètres `fg` et `fd` sont respectivement le fils gauche et le fils droit de la racine de l'arbre créé.

Exemple III.9 L'expression suivante :

```
Fourche(
   Fourche( Noeud( Vide, 14.0, Vide), Vide),
   Noeud(
```

```
        Noeud( Vide, 13.0, Vide),
        9.0,
        Vide))
```

est alors associée à l'arbre binaire représenté graphiquement dans l'exemple III.6.

3.1.5 Calcul du nombre de valeurs dans un arbre partiel

Question III.15 *Écrire en CaML une fonction* `taille` *de type* `arbre -> int` *telle que l'appel* `(taille a)` *renvoie le nombre de nœuds étiquetés contenus dans l'arbre binaire partiel* `a`*, c'est-à-dire le cardinal de* $\mathcal{N}(a)$*. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois l'arbre* `a`*. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*

3.1.6 Calcul des bornes d'un arbre partiel

Une paire d'entiers est représentée par le type `paire` défini par :

```
type arbre = int*int;;
```

Question III.16 *Écrire en CaML une fonction* `bornes` *de type* `arbre -> paire` *telle que l'appel*
`(bornes a)` *sur un arbre binaire partiel* `a` *non vide renvoie une paire d'entiers qui correspondent au plus petit, respectivement au plus grand, indice des valeurs contenues dans l'arbre* `a`*. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois l'arbre* `a`*. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*

3.1.7 Remplacement d'une valeur dans un arbre partiel

Question III.17 *Écrire en CaML une fonction* `remplacer` *de type* `int -> float -> arbre -> arbre` *telle que l'appel* `(remplacer i e a)` *sur un arbre binaire partiel* `a` *non vide contenant une valeur pour l'indice* `i` *renvoie un arbre binaire partiel contenant la valeur* `e` *à l'indice* `i` *et les mêmes valeurs que l'arbre* `a` *pour les autres indices que* `i`*. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois l'arbre* `a`*. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*

3.2 Codage d'un vecteur creux par un arbre partiel

L'arbre partiel utilisé dans les questions précédentes correspond à des vecteurs creux dont les valeurs par défaut sont 0.0. Ils ne contiennent donc que les valeurs différentes de 0.0. Cette représentation peut être étendue pour représenter des vecteurs creux avec d'autres valeurs par défaut. Les étiquettes contenues dans l'arbre partiel correspondent alors aux indices et valeurs des éléments du vecteur creux qui sont différentes de la valeur par défaut du vecteur. La valeur par défaut doit faire partie explicitement de la structure du vecteur creux.
Pour améliorer les performances d'accès, la structure de vecteur creux contient en plus de l'arbre partiel et de la valeur par défaut, les minimum et maximum des indices des valeurs contenues dans le vecteur qui sont différentes de la valeur par défaut ainsi que le nombre de valeurs différentes de la valeur par défaut.
Soit v un vecteur creux, nous noterons respectivement $\mathcal{V}_d(v)$, $\mathcal{V}_{min}(v)$, $\mathcal{V}_{max}(v)$, $\mathcal{V}_t(v)$ et $\mathcal{V}_a(v)$, la valeur par défaut, l'indice minimum, l'indice maximum, le nombre de valeurs différentes de la valeur par défaut et l'arbre partiel contenant les valeurs de v.

Déf. III.8 (Vecteur creux bien formé) Un vecteur creux implanté avec un arbre binaire partiel est bien formé si et seulement si :
– les indices minimum et maximum du vecteur creux correspondent aux bornes de l'arbre binaire partiel ;
– l'arbre binaire partiel ne contient pas la valeur par défaut du vecteur creux ;
– le nombre de valeurs contenues dans l'arbre binaire partiel est égal au nombre d'éléments différents de la valeur par défaut du vecteur creux ;
– l'arbre binaire partiel qui contient les valeurs ne doit pas contenir de fourches dont les sous-arbres gauche et droit sont tous deux vides.

Question III.18 *Exprimer la définition III.8 sous la forme d'une propriété $VBF(v)$ qui indique que v est un vecteur creux bien formé.*

Un vecteur creux est représenté par le type `vecteur` dont la définition est :

```
type vecteur = int * int * int * float * arbre;;
```

Dans l'expression `( imin, imax, t, v, a)`, les paramètres `imin`, `imax`, `t`, `v` et `a` sont respectivement l'indice minimum, l'indice maximum et le nombre des éléments dont la valeur est différente de la valeur par défaut, ainsi que la valeur par défaut et l'arbre binaire partiel contenant les valeurs du vecteur.

Question III.19 *Écrire en CaML une fonction `valider` de type `vecteur -> bool` telle que l'appel `(valider v)` renvoie la valeur `true` si le vecteur creux `v` est bien formé (c'est-à-dire si $VBF(v)$) et la valeur `false` sinon. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois l'arbre associé à `v`. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*

Question III.20 *Écrire en CaML une fonction `lire` de type `int -> vecteur -> float` telle que l'appel `(lire i v)` renvoie la valeur qui se trouve à l'indice `i` dans le vecteur creux `v`. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois l'arbre associé à `v`. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*

Question III.21 *Écrire en CaML une fonction `ecrire` de type `int -> float -> vecteur -> vecteur` telle que l'appel `(ecrire i e v)`, avec la valeur de `e` différente de la valeur par défaut de `v`, renvoie un vecteur creux contenant la valeur `e` à l'indice `i` et les mêmes valeurs que le vecteur creux `v` pour les autres indices que `i`. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois l'arbre associé à `v`. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*

Question III.22 *Écrire en CaML une fonction `somme` de type `vecteur -> vecteur -> vecteur` telle que l'appel `(somme v1 v2)` renvoie un vecteur creux dont les éléments ont pour valeur la somme des valeurs des éléments de `v1` et de `v2` de même indice. L'algorithme utilisé ne devra parcourir qu'une seule fois les arbres associés à `v1` et à `v2`. Cette fonction devra être récursive ou faire appel à des fonctions auxiliaires récursives.*