DM bis n°10
Sujet type Mines-Centrale

Notations

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
On note pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathrm{A}_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in\ \{0,1\}^n \right\}$$

$$\mathrm{D}_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in\ \{0,1\}^n \right\} \text{ et } \mathrm{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{D}_n$$

$$\pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$$

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N},\ d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))$$

Soit Z une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes et telle que $\mathrm{Z}(\Omega)$ soit fini. En notant $\Re(\mathrm{Z})$ et $\Im(\mathrm{Z})$ les parties réelle et imaginaire de Z, on définit l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \mathbb{E}(\Re(\mathrm{Z})) + \mathrm{i}\ \mathbb{E}(\Im(\mathrm{Z}))$$

Si $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes, mutuellement indépendantes et telles que $\mathrm{Z}_j(\Omega)$ soit fini pour tout j, on admet que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{Z}_j)$$

I. Fonction caractéristique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Pour X variable aléatoire réelle avec $\mathrm{X}(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{X}})$$

On définit également

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul et t un réel.

1. Montrer
$$\Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$
2. En déduire
$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$$
3. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{\mathrm{X}_n})_{n\geqslant 1}$.
4. Étudier la continuité de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{\mathrm{X}_n}$.
5. Montrer que X_n et $-\mathrm{X}_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n\ :\ \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) \end{cases}$$
7. La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

II. Ecriture binaire

Soit n un entier naturel non nul. On pose
$$\Phi_n\ :\ \begin{cases} \{0,1\}^n \to [\![0, 2^n - 1]\!] \\ (x_j)_{j\in\ [\![1,n]\!]} \mapsto \sum\limits_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \end{cases}$$

8. Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant que $\mathrm{Im}(\Phi_n) \subset [\![0, 2^n - 1]\!]$.
9. Préciser $\mathrm{Im}(\Phi_n)$ en fonction de A_n.
10. Montrer par récurrence
$$\forall k \in [\![0, 2^n - 1]\!],\ k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$$
11. En déduire que Φ_n est bijective.
12. Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(\mathrm{D}_n)_{n\geqslant 1}$ puis vérifier $\mathrm{D} \subset [0, 1[$.
13. Établir
$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ \pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$$
14. Justifier
$$\forall x \in [0, 1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}$$
15. Établir
$$\forall (x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*,\ d_j(x) \in \{0, 1\}$$
16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier $x \in \mathrm{D}_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.
17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application
$$\Psi_n\ :\ \begin{cases} \{0,1\}^n \to \mathrm{D}_n \\ (x_j)_{j\in\ [\![1,n]\!]} \mapsto \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \end{cases}$$

   est bijective.

18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$$

III. Développement dyadique, loi de composition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{U}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Y}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{U}_k}{2^k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x),\ \mathrm{G}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x)$$

19. Justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_n \in [0,1[\,\right) = 1$$

20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathrm{D}_n,\ \mathrm{F}_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$$

21. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathrm{D}_n,\ \mathrm{G}_n(x) = x$$

22. Établir, pour tout entier naturel non nul n, que Y_n suit une loi uniforme sur D_n.
23. Réciproquement, soit n un entier naturel non nul et soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur D_n. Montrer qu'il existe des variables aléatoires $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$ mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et telles que

$$\mathrm{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_k}{2^k}$$

IV. Développement dyadique, étude asymptotique

On conserve les notations introduites dans la partie III.

24. Soit x réel. Établir la monotonie des suites $(\mathrm{F}_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(\mathrm{G}_n(x))_{n \geqslant 1}$.
25. En déduire la convergence simple des suites de fonctions $(\mathrm{F}_n)_{n \geqslant 1}$ et $(\mathrm{G}_n)_{n \geqslant 1}$.
26. Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{D} \cup \{1\},\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{F}_n(x) = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{G}_n(x) = x$$

27. Généraliser les résultats obtenus à la question précédente pour tout $x \in [0,1]$.
28. Montrer que pour tout intervalle non vide $\mathrm{I} \subset [0,1]$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in \mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I}) \quad \text{avec} \quad \ell(\mathrm{I}) = \sup \mathrm{I} - \inf \mathrm{I}$$

29. En déduire que, pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{E}(f(\mathrm{Y}_n)))_{n \geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.
30. À l'aide du résultat précédent, proposer une autre démonstration du résultat obtenu à la question 6.
31. *Une application.* Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer sa valeur.

    `On pourra considérer` $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}_n})\,\mathrm{d}t$.

V. Dénombrabilité

32. L'ensemble D est-il dénombrable ?
33. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbb{N} /\ x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.
34. Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A \mapsto \mathbf{1}_A \end{cases}$ est bijective.
35. Montrer que l'application
$$\Psi : \begin{cases} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1] \\ (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{cases}$$
est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

On note $D^* = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \text{si } \Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^* \\ \frac{\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 1 \\ \frac{1+\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D^* \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

36. Montrer que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.
37. Conclure que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.