Fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$: définitions et notations

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un ensemble quelconque.

Définition.– Une application f de E dans $\mathbb{K}$ est un « procédé » qui permet d'associer à tout élément x de E un unique élément $f(x)$ de $\mathbb{K}$ appelé image de x par f.

L'ensemble des applications de E dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^E$.

Définition.– Une fonction f de E dans $\mathbb{K}$ est un « procédé » qui permet d'associer à certains éléments x de E un unique élément $f(x)$ de $\mathbb{K}$ appelé image de x par f. L'ensemble des éléments de E qui ont une image par f est appelé ensemble de définition de f et est noté D_f.

Remarque : Si f est une fonction de E dans $\mathbb{K}$ alors f peut être considérée comme une application de D_f dans $\mathbb{K}$. L'étude des fonctions E dans $\mathbb{K}$ se ramène donc à l'étude des applications de D dans $\mathbb{K}$ où D est une partie de E.

Dans toute la suite, D désigne une partie non vide de l'ensemble E.

1. Premières définitions et notations (Mpsi)

Etant données f et g dans $\mathbb{K}^D$ on définit les applications $f+g : D \to \mathbb{K}$ et $f \times g : D \to \mathbb{K}$ par : $\forall t \in D$, $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ et $(f \times g)(t) = f(t)g(t)$.

On définit ainsi deux lois de composition internes $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}^D$.

Proposition.– $(\mathbb{K}^D, +, \times)$ est un anneau commutatif.

$0_{\mathbb{K}^D}$ est l'application constante égale à 0 et $1_{\mathbb{K}^D}$ est l'application constante égale à 1

L'ensemble $(\mathbb{K}^D)^\times$ des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{K}^D, +, \times)$ est égal à l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annule pas sur D.

Remarque : Le symbole $\times$ est souvent omis dans l'écriture des calculs. Les applications $0_{\mathbb{K}^D}$ et $1_{\mathbb{K}^D}$ sont souvent simplement notée 0 et 1. C'est abusif mais pratique. On prendra garde à ce que dans cet anneau la propriété $fg = 0$ n'implique pas nécessairement $(f = 0$ ou $g = 0)$.

Etant donnés α dans $\mathbb{K}$ et f dans $\mathbb{K}^D$ on note $\alpha\bullet f$ l'application de D dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall t \in D$, $(\alpha\bullet f)(t) = \alpha f(t)$.

On définit ainsi une loi de composition externe $\bullet$ sur $\mathbb{K}^D$ à domaine d'opérateurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition.– $(\mathbb{K}^D, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition.– Une application $f : D \to \mathbb{K}$ est dite bornée sur D si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in D$, $|f(x)| \leq M$.

L'ensemble des applications bornées de D dans $\mathbb{K}$ est noté $B(D, \mathbb{K})$.

Proposition.– $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée sur D si et seulement si f est minorée et majorée sur D.

Proposition.– $B(D, \mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire et par produit. Autrement dit : $\forall (f,g) \in B(D,\mathbb{K})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g \in B(D,\mathbb{K})$ et $fg \in B(D,\mathbb{K})$.

1.1 Applications à valeurs complexes

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une application à valeurs complexes.

L'application $\overline{f} : D \to \mathbb{C}$ définie par $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in D$ est appelée conjuguée de f. Comme f, il s'agit d'une application à valeurs complexes.

Les applications $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : D \to \mathbb{R}$ définies par $(\mathrm{Re} f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $(\mathrm{Im} f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$ pour tout $x \in D$ sont respectivement appelées partie réelle et partie imaginaire de l'application f. Ce sont toutes les deux des applications à valeurs réelles.

L'application $|f| : D \to \mathbb{R}^+$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$ pour tout $x \in D$ est appelée module de l'application f. Il s'agit d'une application à valeurs positives.

Proposition.– $f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f$, $\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$, $\mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$ et $|f|^2 = f\overline{f}$.

1.2 Applications à valeurs réelles

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des applications à valeurs réelles.

L'application $\min(f,g) : D \to \mathbb{R}$ définie par $\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$ pour tout $x \in D$ est appelée minimum des applications f et g.

L'application $\max(f,g) : D \to \mathbb{R}$ définie par $\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$ pour tout $x \in D$ est appelée maximum des applications f et g.

Proposition.– $\min(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\max(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$.

Soient $f:D\to\mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

Par définition on pose $f^- = \max(-f,0)$ et $f^+ = \max(f,0)$.

Les applications f^- et f^+ sont appelées partie négative et partie positive de l'application f.

Ce sont des applications à valeurs positives.

Proposition.– $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

Définition.– Soit $f:D\to\mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

f est dite majorée sur D si et seulement si : $\exists M\in\mathbb{R} \mid \forall x\in D,\ f(x)\le M$.

f est dite minorée sur D si et seulement si : $\exists m\in\mathbb{R} \mid \forall x\in D,\ f(x)\ge m$.

<u>Le cas particulier des applications d'une variable réelle et à valeurs réelles</u>

On suppose ici que D est une partie de $\mathbb{R}$ et on considère une application $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

f est dite croissante sur D si et seulement si : $\forall (x,y)\in D^2,\ x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)$.

f est dite décroissante sur D si et seulement si : $\forall (x,y)\in D^2,\ x<y \Rightarrow f(x)\ge f(y)$.

f est dite monotone sur D si et seulement si f est croissante ou décroissante sur D.

2. Applications en escalier, applications continues par morceaux (Mpsi)

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Le segment $[a,b]$ est donc non vide et non réduit à un point.

2.1 Subdivision d'un segment

Définition.– On appelle subdivision du segment $[a,b]$ toute famille finie $\sigma=(a_i)_{i\in[0,n]}$ de points de $[a,b]$ vérifiant : $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$.

Le réel $\delta(\sigma)=\max\limits_{1\le i\le n}(a_i-a_{i-1})$ est appelé pas de la subdivision σ.

<u>Terminologie</u>

✓ Soit $\sigma=(a_i)_{i\in[0,n]}$ une subdivision de $[a,b]$. Comme $a<b$ on a nécessairement $n\ge 1$. Une telle subdivision σ comporte $n+1$ points et détermine n intervalles ouverts non vides et non réduits à un point, à savoir les $]a_{i-1},a_i[$ pour $i\in[1,n]$. $A(\sigma)=\{a_0,\cdots,a_n\}$ est une partie finie de $[a,b]$ qui contient a et b. La partie $A(\sigma)$ est appelée support de la subdivision σ.

✓ Si A est une partie finie de $[a,b]$ qui contient a et b alors il existe une unique subdivision σ de $[a,b]$ dont le support est égal à A (c'est-à-dire telle que $A(\sigma)=A$.)

✓ Soient σ et σ′ sont deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que σ est moins fine que σ′, ou encore que σ′ est plus fine que σ, si et seulement si $A(\sigma)\subset A(\sigma')$.

✓ Soient σ et σ′ sont deux subdivisions de $[a,b]$. Puisque $A(\sigma)\cup A(\sigma')$ est une partie finie de $[a,b]$ il existe une unique subdivision σ″ de $[a,b]$ vérifiant $A(\sigma'')=A(\sigma)\cup A(\sigma')$. Cette unique subdivision σ″ est notée $\sigma\vee\sigma'$. La subdivision $\sigma\vee\sigma'$ est plus fine que σ et σ′.

<u>Un exemple fondamental</u> : Pour $i\in[0,n]$ on pose : $a_i^{(n)}=a+i\dfrac{b-a}{n}$.

$\sigma_n=\left(a_i^{(n)}\right)_{i\in[0,n]}$ est une subdivision de $[a,b]$ et $\delta(\sigma_n)=\dfrac{b-a}{n}$.

2.2 Applications en escalier

Définition.– On dit que $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma=(a_i)_{i\in[0,n]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in[1,n]$, f soit constante sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1},a_i[$. Une telle subdivision σ est dite adaptée à f. L'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui sont en escalier sur $[a,b]$ est noté $E([a,b],\mathbb{K})$.

<u>Remarques</u>

✓ Aucune contrainte n'est imposée aux $f(a_i)$. Si f est en escalier sur $[a,b]$ et si σ est une subdivision adaptée à f alors une subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ est aussi adaptée à f.

✓ Soient f et g en escalier sur $[a,b]$. Si σ est une subdivision adaptée à f et si σ′ est une subdivision adaptée à g alors $\sigma\vee\sigma'$ est une subdivision adaptée à la fois à f et à g.

<u>Exemples</u>

➤ Toute application constante est en escalier sur $[a,b]$.

➤ L'application partie entière est en escalier sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

➤ Il existe des applications qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs et qui pourtant ne sont pas en escalier sur $[a,b]$.

Proposition.–

1) Toute application en escalier sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.
2) Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est en escalier sur $[a,b]$ alors $\overline{f}$ et $|f|$ sont en escalier sur $[a,b]$.
3) Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{K}$ en escalier sur $[a,b]$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.
   Les applications $\alpha f+\beta g$ et fg sont en escalier sur $[a,b]$.
4) Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont en escalier sur $[a,b]$ et à valeurs réelles alors les applications $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+ et f^- sont aussi en escalier sur $[a,b]$.

Proposition.– Soient $f\in E([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma=(a_i)_{i\in[0,n]}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

Si λ_i est la valeur constante prise par f sur $]a_{i-1},a_i[$, alors : $\int_{[a,b]}f=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\lambda_i$.

2.3 Applications continues par morceaux

Définition.– On dit que $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma=(a_i)_{i\in[0,n]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{i-1},a_i[$ se prolonge en une application continue sur le segment $[a_{i-1},a_i]$.
Une telle subdivision σ est dite adaptée à f. L'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui sont continues par morceaux sur $[a,b]$ est noté $M^0([a,b],\mathbb{K})$.

<u>Remarques</u>

✓ Aucune contrainte n'est imposée aux $f(a_i)$.

✓ Si f est en continue par morceaux sur $[a,b]$ et si σ est une subdivision adaptée à f alors toute subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ est aussi adaptée à f.

✓ Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b]$. Si σ est une subdivision adaptée à f et si σ' est une subdivision adaptée à g alors $\sigma\vee\sigma'$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et à g.

✓ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On dit que $f:I\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I si et seulement si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I. On note $M^0(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux sur I.

Proposition.–

1) Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.
2) Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors les applications $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$.
3) Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b]$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.
   Les applications $\alpha f+\beta g$ et fg sont continues par morceaux sur $[a,b]$.
5) Si f,g sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs réelles alors les applications $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+ et f^- sont aussi continues par morceaux sur $[a,b]$.

Proposition.– Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b]$ ne diffèrent sur $[a,b]$ qu'en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}g$.

<u>Exemples</u> :

➢ Toute application continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

➢ La partie entière ainsi que la partie fractionnaire sont dans $M^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Définition.– Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

1) On appelle période de f tout réel T vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)$.
   L'ensemble des périodes de l'application f est noté $P(f)$.
2) On dit que f est périodique si et seulement si f admet au moins une période non nulle.

Proposition.– Soit $f\in\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$.

1) $P(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. En particulier $0\in P(f)$.
2) f est périodique si et seulement si $P(f)\neq\{0\}$.

<u>Remarques</u>

✓ Si T est une période de f alors $-T$ est une période de f.
Si T est une période strictement positive de f alors on dit f est T-périodique.

✓ Pour tout $T>0$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ qui sont T-périodiques est stable par combinaison linéaire et par produit.

Exemples

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est constante alors f est périodique et $P(f) = \mathbb{R}$.
- $1_{\mathbb{Q}}$, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, est périodique et $P(1_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}$. L'application $1_{\mathbb{Q}}$ est périodique mais n'admet pas de plus petite période strictement positive.
- L'application partie fractionnaire $\{\ \}$ est périodique et $P(\{\ \}) = \mathbb{Z}$. L'application $\{\ \}$ est périodique et admet 1 pour plus petite période strictement positive.

Proposition. – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T périodique.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f = \int_0^T f.$

4. Applications paires et impaires

Définition.– Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est paire si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

On dit que f est impaire si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ qui sont paires est noté $P(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ qui sont impaires est noté $I(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Remarques :

- ✓ $P(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est stable par produit interne. Ce n'est pas le cas de $I(\mathbb{R},\mathbb{K})$.
- ✓ Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application de D dans $\mathbb{K}$.

  On dit que f est paire si et seulement si : $\forall x \in D,\ -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.

  On dit que f est impaire si et seulement si : $\forall x \in D,\ -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.

  Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est paire ou impaire alors D est symétrique par rapport à l'origine.
- ✓ Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est impaire et si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.

Proposition.– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si f est paire alors f' est impaire et si f est impaire alors f' est paire.

Proposition.– Soient $a > 0$ et $f : [-a,a] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[-a,a]$.

Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$ et si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f = 0$.

5. Norme infinie d'une application

Dans toute la suite D est un ensemble <u>non vide</u> quelconque et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^D$ l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{K}$.

Définition.– La norme infinie d'une application f de D dans $\mathbb{K}$ est l'élément $\|f\|_\infty$ de $[0,\underline{\underline{+\infty}}]$ défini par : $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]}\{|f(t)|,\ t \in D\}$.

<u>Remarque</u> : bien noter que $\|f\|_\infty \in [0,\underline{+\infty}]$ et que par suite on peut avoir $\|f\|_\infty = +\infty$.

Proposition.–Soit $f : D \to \mathbb{K}$ une application de D dans $\mathbb{K}$.

$\|f\|_\infty < +\infty \iff f$ est bornée sur D.

Proposition.– Soient $(f,g) \in (\mathbb{K}^D)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $\forall t \in D,\ |f(t)| \le \|f\|_\infty$.
2) $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0_{\mathbb{K}^D}$.
3) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.
4) $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

<u>Une notation</u> : Soit $f : D \to \mathbb{K}$ une application de D dans $\mathbb{K}$.

Si A est une partie <u>non vide</u> de D alors on pose $\|f\|_\infty^A = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]}\{|f(t)|,\ t \in A\}$.

6. Pour aller plus loin (HP)

6.1 Périodicité

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique alors $P(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$.

Le résultat qui suit précise la structure des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ et peut s'avérer utile dans l'étude des applications périodiques.

Théorème.– (Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$)

Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ alors ou bien H est dense dans $\mathbb{R}$ ou bien il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$. Plus précisément : si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit au singleton $\{0\}$ et si $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{*+})$ alors ou bien $\alpha = 0$ et H est dense dans $\mathbb{R}$ ou bien $\alpha > 0$ et $H = \alpha\mathbb{Z}$.

6.2 Parité

Théorème.– Soit $s : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ l'application définie par : $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R},\ s(f)(x) = f(-x)$.

1) s est une symétrie de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^{\mathbb{R}}}) = P(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^{\mathbb{R}}}) = I(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

2) $P(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $I(\mathbb{R},\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R},\mathbb{K}) \oplus I(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

3) $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}},\ \exists!(g,h) \in P(\mathbb{R},\mathbb{K}) \times I(\mathbb{R},\mathbb{K}) \mid\ f = g + h.\ (*)$

Le couple (g,h) de la formule $(*)$ est donné par : $g = \frac{1}{2}(f + s(f))$ et $h = \frac{1}{2}(f - s(f))$.

Remarque : Si f est l'exponentielle réelle alors la décomposition $(*)$ est donnée par $f = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$.

Intégration sur un segment

1. Intégrale sur un segment (Mpsi)

On considère deux réels a et b tels que $a \le b$. On note $M^0([a,b],\mathbb{K})$ l'algèbre des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. Si $f \in M^0([a,b],\mathbb{K})$ alors l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ est noté $\int_{[a,b]} f$. Il est à noter que si $a = b$ alors $\int_{[a,a]} f = 0$.

1.1 Propriétés fondamentales

Théorème.– Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $[a,b]$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) $\int_{[a,b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$ et $\left|\int_{[a,b]} f\right| \le \int_{[a,b]} |f|$.
2) Pour tout $c \in [a,b]$ on a : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
3) Si f et g ne diffèrent sur $[a,b]$ qu'en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.
4) $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$ et $\int_{[a,b]} \bar{f} = \overline{\int_{[a,b]} f}$.
5) Si f est à valeurs positives sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f \ge 0$.

   Si f et g sont à valeurs réelles et si $f \le g$ alors $\int_{[a,b]} f \le \int_{[a,b]} g$.

<u>Formule de Chasles</u> : Considérons un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f \in M^0(I,\mathbb{K})$ et $(a,b) \in I^2$.

Si $a \le b$ alors on pose : $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$. Si $a > b$ alors on pose : $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$.

Dans ces conditions : pour tout $(a,b,c) \in I^3$ on a : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

1.2 Sommes de Riemann

Théorème.– (Sommes de Riemann)

Si $f \in M^0([0,1],\mathbb{K})$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{[0,1]} f$.

Si $f \in M^0([a,b],\mathbb{K})$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$.

2. Primitives d'une application continue (Mpsi)

2.1 Primitive et intégrale

Définition.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f admet une primitive sur I si et seulement si il existe une application $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I et telle que : $\forall t \in I,\ F'(t) = f(t)$. On dit alors que F est une primitive de f sur I.

Théorème.– (Fondamental)

Toute application continue sur un intervalle I y admet au moins une primitive. Plus précisément, si $f : I \to \mathbb{K}$ est <u>continue</u> sur <u>l'intervalle</u> I et si a est fixé dans I alors on a les propriétés suivantes :

1) L'application $F_a : I \to \mathbb{K}$, définie par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a. Les primitives de f sur I sont les $F_a + k$, k décrivant $\mathbb{K}$.
2) Si $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{K}$ alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

Théorème.– Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue sur l'intervalle I et si F est une primitive de f sur I alors : $\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

<u>Remarques</u> : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 alors : $\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'$.

Si de plus $f(a) = 0$ alors $f(x) = \int_a^x f'$ pour $x \in I$.

Théorème.– Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

1) Si f est <u>continue</u> et <u>positive</u> sur $[a,b]$, si $\int_{[a,b]} f = 0$ et si $a < b$ alors $f = 0_{\mathbb{R}^{[a,b]}}$.
2) Si f est <u>continue</u> <u>positive</u> sur $[a,b]$ et distincte de l'application nulle alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

2.2 Primitives usuelles

Etant donné une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ on se propose de déterminer des intervalles I de $\mathbb{R}$ aussi grands que possible sur lesquels f est continue puis de déterminer pour chacun de ces intervalles I une primitive de f sur I. Pour rendre efficace le calcul d'une primitive on adopte de nouvelles notations.

Pour exprimer que F est une primitive de f sur I on adopte la notation $\int f(x)\,dx = F(x),\ x \in I$.

Ecrire $\int f(x)\,dx = F(x),\ x \in I$ revient à dire : F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Pour $a \in \mathbb{R}$: $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|$, $x \in]-\infty,a[\cup]a,+\infty[$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\int (x-a)^n\,dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}\setminus(\mathbb{N}\cup\{-1\})$: $\int (x-a)^p\,dx = \frac{(x-a)^{p+1}}{p+1}$, $x \in]-\infty,a[\cup]a,+\infty[$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$: $\int (x-a)^\alpha\,dx = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $x \in]a,+\infty[$.

Pour $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{\operatorname{sh} ax}{a}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{\operatorname{ch} ax}{a}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$, $x \in]0,+\infty[$.

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan} x$, $x \in \mathbb{R}$ et $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin} x$, $x \in]-1,1[$.

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$, $x \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$, $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$, $x \in]k\pi, \pi + k\pi[$.

3. Changement de variable et intégration par parties (Mpsi)

Théorème.– (Formule de changement de variable)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $\varphi : I \to J$ est de classe C^1 sur I et si $f : J \to \mathbb{K}$ est continue sur J alors : $\forall(\alpha,\beta) \in I^2$, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

Utilisation du théorème dans la pratique

Supposons φ de classe C^1 sur I et f continue sur J.

1) Supposons que l'on dispose de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ avec $(a,b) \in J^2$. Faire le changement de variable $x = \varphi(t)$ consiste à déterminer $(\alpha,\beta) \in I^2$ vérifiant $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, à remplacer a par α, b par β et x par $\varphi(t)$ puis à remplacer le symbole dx par le symbole $\varphi'(t)dt$. Notons que φ n'est pas supposée bijective et que α,β n'ont aucune raison d'être uniques ni même d'exister...

2) Supposons que l'on dispose de l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ avec $(\alpha,\beta) \in I^2$. Faire le changement de variable $x = \varphi(t)$ consiste à remplacer α par $\varphi(\alpha)$, β par $\varphi(\beta)$ et $\varphi(t)$ par x puis à remplacer le symbole $\varphi'(t)dt$ par le symbole dx.

Proposition.–

1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est continue et T- périodique alors : $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f = \int_0^T f$.

2) Si $f : [-a,a] \to \mathbb{K}$ est continue et paire alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

Si $f : [-a,a] \to \mathbb{K}$ est continue et impaire alors $\int_{-a}^a f = 0$.

Théorème.– (Formule d'intégration par parties)
Si $u,v : I \to \mathbb{K}$ sont de classe C^1 sur l'intervalle I alors : $\forall(a,b) \in I^2$, $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.

Théorème.– (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral)
Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I alors pour tout $(a,x) \in I^2$ on a la formule :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Théorème.– (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I alors pour $(a,x) \in I^2$:

$$\left|f(x) - \left(f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right)\right| \leq \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. Pour aller plus loin (HP)

Théorème.– (Lemme de Riemann-Lebesgue : version C^1)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos nt\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0$.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\,dt = 0$.

Michel Chasles (1793-1880)
Mathématicien français, Chasles entre à l'école polytechnique en 1812, effectue quelques travaux en géométrie puis devient agent de change ! Une fois ruiné il décide de reprendre ses travaux en géométrie, domaine dans lequel il devient rapidement la référence incontestée. Chasles s'est révélé un ardent défenseur des méthodes géométriques pourtant très méprisées à son époque.

Bernhard Riemann (1826-1866)
Né à près de Hanovre en Allemagne Riemann meurt à quarante ans en Italie à la suite d'une tuberculose. Malgré sa disparition précoce, son œuvre est colossale. Son apport est fondamental dans la définition de l'intégrale, en géométrie différentielle, en géométrie non euclidienne, en théorie des équations différentielles, en théorie des nombres et en topologie. Son exposé sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie est révolutionnaire et c'est cette nouvelle conception de la géométrie qui permettra plus tard à Einstein de disposer du bon cadre pour sa théorie de la relativité ! Riemann fût incontestablement un visionnaire de génie et ses idées, même non accompagnées de preuves, n'ont cessé d'inspirer les mathématiciens pendant près d'un siècle. A ce propos , une conjecture célèbre de Riemann concerne la fonction $\zeta\left(\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\right)$ et affirme que tous les zéros de la fonction ζ ont une partie imaginaire égale à $\frac{1}{2}$.
Cette conjecture est actuellement toujours ouverte...

Brook Taylor (1685-1731)
Mathématicien anglais, Taylor énonce en 1715 la célèbre formule qui porte aujourd'hui son nom. Il l'énonce sous la forme $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$ sans faire figurer de reste et sans se soucier des problèmes de convergence que peut poser une telle formulation. L'importance de ce résultat n'est véritablement reconnu qu'en 1772 date à laquelle Lagrange le qualifie de « principe de base du calcul différentiel ».

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
Giuseppe Lodovico Lagrangia est né le 25 janvier 1736 à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne. Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française). Lagrange étudia brillamment à l'université de sa ville natale; son intérêt pour les mathématiques ne se manifeste que vers 17 ans, à la lecture d'un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Il se plonge alors aussitôt, seul et sans aide, dans l'étude des mathématiques. Très rapidement, il obtient des résultats probants. A la fin de l'année 1755, Lagrange devient professeur à l'école d'artillerie de Turin., ville où il fonde en 1757 une académie des sciences. Son talent est très vite reconnu, et il écrit durant ses premières années de brillants mémoires où il applique les méthodes du calcul des variations à la mécanique. En 1764 notamment, Lagrange gagne le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris. Il le regagnera 1772, 1774 et 1780. En 1766, grâce à l'appui de D'Alembert, Lagrange succède à Euler au poste prestigieux de directeur des mathématiques à l'Académie des Sciences de Berlin. Il passera 20 ans là-bas. il publie avec une régularité impressionnante des mémoires qui touchent tous les domaines des mathématiques et de la mécanique : astronomie, probabilités, théorie des équations algébriques Les dernières années à Berlin sont consacrées à l'étude du monumental Traité de Mécanique Analytique, où il reprend, complète et unifie les connaissances accumulées depuis Newton. Ce livre, qui devient pour tous ses contemporains une référence, se veut notamment une apologie de l'utilisation des équations différentielles en mécanique.
En 1787, Lagrange part pour la France où il devient membre de l'Académie des Sciences de Paris. Il est un des rares à traverser la Révolution sans être inquiété: il est même Président de la Commission des poids et des mesures, et est à ce titre un des pères du système métrique et de l'adoption de la division décimale des mesures.
Lagrange participe encore à la création de l'Ecole Polytechnique dont il est le premier professeur d'analyse. Il décède le 10 avril 1813, après avoir reçu de Napoléon Ier tous les honneurs de la nation française.

Etude locale d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

1. Préliminaires

Définition.– Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

On dit que a est adhérent à A dans $\overline{\mathbb{R}}$ ssi il existe une suite d'éléments de A qui tend vers a.

L'ensemble des points adhérents à A dans $\overline{\mathbb{R}}$ est noté $\overline{A}$ et est appelé adhérence de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition.–

1) Etant donné $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $[a-\alpha, a+\alpha]$ avec $\alpha > 0$.
2) On appelle voisinage de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]-\infty,-P]$ avec $P > 0$.
3) On appelle voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $[P,+\infty[$ avec $P > 0$.

Définition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application de D dans $\mathbb{K}$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $b \in \mathbb{K}$.

1) On dit que f tend vers b en a suivant A si et seulement si : pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers a , la suite $f(a_n)$ tend vers b.
2) Pour exprimer que f tend vers b en a suivant A on écrit $\lim\limits_{a,A} f = b$.
3) On dit que f admet une limite dans $\mathbb{K}$ en a suivant A si et seulement si il existe $b \in \mathbb{K}$ tel que f tende vers b en a suivant A.

<u>Remarques</u> : Pour exprimer que f tend vers b en a suivant A on dit aussi que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a en appartenant à A et on adopte alors la notation $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$.

Le fait que $a \in \overline{A}$ dans la définition de la notion de limite suivant A est important car cela assure l'existence d'au moins une suite d'éléments de A qui tende vers a.

<u>Exemples</u> :

➤ cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$ suivant $\mathbb{R}$.

➤ Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a,\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}} = 1$ et $\lim\limits_{a,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}} = 0$. Ainsi : $1_{\mathbb{Q}}$ n'admet pas de limite en a suivant $\mathbb{R}$.

2. Le cadre de travail

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$. Il importe de noter que a peut ne pas être dans A et qu'éventuellement a peut valoir $-\infty$ ou $+\infty$. On considère enfin une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition.– On dit que f « est d'un certain type » au voisinage de a dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que f « est d'un certain type » dans $V \cap A$.

<u>Remarques</u> :

✓ Comme exemple de « est d'un certain type » on peut donner « est définie », « ne s'annule pas » ou encore « est bornée ». Il est important que $a \in \overline{A}$ car cela assure que $V \cap A \neq \varnothing$ et donc que la notion considérée a un intérêt. Une fonction f définie au voisinage de a dans A peut très bien ne pas être définie au point a.

✓ Dire que f est définie au voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{Q}$ signifie qu'il existe $P > 0$ tel que f soit définie dans $[P,+\infty[\cap \mathbb{Q}$. Il est à noter que $+\infty \in \overline{\mathbb{Q}}$.

✓ Dire que f est bornée au voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ signifie qu'il existe $P > 0$ tel que f soit bornée dans $]-\infty,-P] \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. Il est à noter que $-\infty \in \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

✓ Dire que f ne s'annule pas au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{*+}$ signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f ne s'annule pas dans $[-\alpha,\alpha] \cap \mathbb{R}^{*+} =]0,\alpha]$.

<u>Situations usuelles en pratique</u>

1) $a \in \mathbb{R}$ et $A =]-\infty, a[$. (au voisinage à gauche de a, a exclu)
2) $a \in \mathbb{R}$ et $A =]a,+\infty[$. (au voisinage à droite de a , a exclu)
3) $a \in \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}\setminus\{a\}$. (au voisinage autour de a , a exclu)
4) $a = +\infty$ et $A = \mathbb{R}$ (au voisinage de $+\infty$)
5) $a = -\infty$ et $A = \mathbb{R}$ (au voisinage de $-\infty$)

3. Comparaison de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

3.1 Définitions et caractérisations

On considère une partie A de et $a \in \overline{A}$.

Définition.– Soient f, g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de a dans A.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a dans A.

1) On dit que f est dominée par g au voisinage de a dans A, et on note $f \underset{a}{=} O(g)$, si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a dans A.

2) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a dans A, et on note $f \underset{a}{=} o(g)$, si et seulement si $\lim\limits_{a,A} \frac{f}{g} = 0$.

3) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a dans A, et on note $f \underset{a}{\sim} g$, ssi $\lim\limits_{a,A} \frac{f}{g} = 1$.

Remarque : La notation $f \underset{a}{=} O(g)$ doit se lire « f est dominée par g » ou « f est un grand O de f », le « au voisinage de a dans A » étant sous-entendu. Il ne s'agit pas d'égalités au sens habituel mais « d'égalités » qui se lisent de la gauche vers la droite. On peut avoir $f = O(h)$, $g = O(h)$ et $f \neq g$.

Théorème (Mpsi) – (croissance comparée)

Si α, β, γ sont des réels strictement positifs alors $(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$ et $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$.

3.2 Règles de calcul concernant la domination et la négligeabilité

Soient f, g, h, k des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de a dans A et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est sous entendu, lorsque cela est nécessaire, que les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a dans A.

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ alors $\lambda f \underset{a}{=} O(g)$. Si $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
  Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$. Si $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} o(g)$.
- Si $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $fg \underset{a}{=} O(fh)$. Si $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $fg \underset{a}{=} o(fh)$.
- Si $f \underset{a}{=} O(h)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} O(h)$. Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} O(h)$ et $g \underset{a}{=} O(k)$ alors $fg \underset{a}{=} O(hk)$. Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(k)$ alors $fg \underset{a}{=} o(hk)$.

En résumé : (les « égalités » se lisent de la gauche vers la droite)

- $o(g) \underset{a}{=} O(g)$.
- $O(O(h)) \underset{a}{=} O(h)$ et $o(o(h)) \underset{a}{=} o(h)$.
- $\lambda O(g) \underset{a}{=} O(g)$ et $O(\lambda g) \underset{a}{=} O(g)$ et $\lambda o(g) \underset{a}{=} o(g)$ et $o(\lambda g) \underset{a}{=} o(g)$.
- $f O(g) \underset{a}{=} O(fg)$ et $f o(g) \underset{a}{=} o(fg)$.
- $O(h) + O(h) \underset{a}{=} O(h)$ et $o(h) + o(h) \underset{a}{=} o(h)$.
- $O(h) \times O(k) \underset{a}{=} O(hk)$ et $o(h) \times o(k) \underset{a}{=} o(hk)$.

3.3 Propriétés de l'équivalence

Il est sous-entendu, en cas de besoin, que les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a dans A.

Proposition.– Soient f, g, h des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de a dans A et $L \in \mathbb{K}$.

1) $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$.
2) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{a,A} g = L$ alors $\lim\limits_{a,A} f = L$. Si $\lim\limits_{a,A} f = L$ et $L \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} L$.
3) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(f)$.
4) Si $f = g + h$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{\sim} g$.
5) Si f et g sont à valeurs réelles et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors les fonctions f et g sont du même signe au voisinage de a dans A..

Règles de calcul concernant l'équivalence des fonctions

Soient f, g, h, k des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de a dans A et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $f \underset{a}{\sim} f$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $|f| \underset{a}{\sim} |g|$ et $f^p \underset{a}{\sim} g^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f^p \underset{a}{\sim} g^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et en particulier $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$. Si f et g sont strictement positives au voisinage de a dans A et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors $fg \underset{a}{\sim} hk$.

  Mise en garde !!! : $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ n'implique pas $f + g \underset{a}{\sim} h + k$.

3.4 Des équivalences utiles

➢ Au voisinage de zéro

$e^x-1\underset{0}{\sim}x$, $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$, $\sin x\underset{0}{\sim}x$, $\operatorname{sh}x\underset{0}{\sim}x$, $\tan x\underset{0}{\sim}x$, $\operatorname{th}x\underset{0}{\sim}x$.

$\operatorname{Arcsin}x\underset{0}{\sim}x$ et $\operatorname{Arctan}x\underset{0}{\sim}x$.

$\sin x-x\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^3}{6}$, $\operatorname{sh}x-x\underset{0}{\sim}\dfrac{x^3}{6}$, $\cos x-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$, $\operatorname{ch}x-1\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$.

➢ Au voisinage de un :

$\ln x\underset{1}{\sim}x-1$, $\operatorname{Arccos}x\underset{1^-}{\sim}\sqrt{2(1-x)}$.

➢ Au voisinage de l'infini :

Si $a_p\neq 0$ alors $a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_1x+a_0\underset{\infty}{\sim}a_px^p$.

Si $a_p\neq 0$ et $b_q\neq 0$ alors $\dfrac{a_px^p+\cdots+a_0}{b_qx^q+\cdots+b_0}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{a_px^p}{b_qx^q}$.

$\operatorname{sh}x\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}e^x$, $\operatorname{ch}x\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}e^x$, $\operatorname{sh}x\underset{-\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2}e^{-x}$, $\operatorname{ch}x\underset{-\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

4. Développements limités pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ (Mpsi)

On considère $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définie au voisinage de a dans A avec $A=\mathbb{R}\setminus\{a\}$ (resp $A=]-\infty,a[$, resp $A=]a,+\infty[$). Puisque $a\in\mathbb{R}$ il existe $\alpha>0$ tel que f soit définie dans $[a-\alpha,a+\alpha]\setminus\{a\}$ (resp $[a-\alpha,a[$, resp $]a,a+\alpha]$). Il importe de noter qu'ici a est réel et ne peut pas valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition.– Étant donné $n\in\mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a dans A si et seulement si il existe $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ $a_0,\cdots,a_n$ tels qu'au voisinage de a dans A on ait : $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$. $(*)$

Remarque : L'égalité $(*)$ est valable au voisinage de a dans A c'est à dire pour x dans un ensemble de la forme $[a-\alpha,a+\alpha]\setminus\{a\}$ (resp $[a-\alpha,a[$, resp $]a,a+\alpha]$). Le terme $o\left((x-a)^n\right)$ désigne une quantité $\varepsilon(x)$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to a,x\neq a}\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)^n}=0$.

4.1 Propriétés fondamentales

Théorème.– Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a alors celui-ci est unique. Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a alors pour tout $p\in[0,n]$ f admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de a. Ce dernier s'obtient par troncature du premier.

Théorème.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{K}$ de classe C^1 sur I et $a\in I$.

Si l'application f' admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a donné par $f'(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$ alors l'application f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a donné par la formule :

$$f(x)=f(a)+a_0(x-a)+a_1\frac{(x-a)^2}{2}+\cdots+a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+o\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Théorème.– (Formule de Taylor Young)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{K}$ une application et $a\in I$. Si f est de classe C^n sur I alors l'application f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a donné par la formule :

$$f(t)=f(a)+(t-a)f'(a)+\frac{(t-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(t-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+o\left((t-a)^n\right).$$

4.2 Développements limités usuels au voisinage de zéro

➢ $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+o(t^n)$.

➢ $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+\cdots+\dfrac{t^n}{n!}+o(t^n)$.

➢ $\cos t=1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}+o(t^{2n+1})$.

➢ $\sin t=t-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(t^{2n+2})$.

➢ $\operatorname{ch}t=1+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}+\cdots+\dfrac{t^{2n}}{(2n!)}+o(t^{2n+1})$.

➢ $\operatorname{sh}t=t+\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!}+\cdots+\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(t^{2n+2})$.

➢ $\tan t=t+\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{2}{15}t^5+o(t^6)$ et $\operatorname{th}t=t-\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{2}{15}t^5+o(t^6)$.

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + o(t^n)$.
- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}t^n + o(t^n)$

Les développements limités au voisinage de zéro des fonctions Arctan, Arcsin et Arccos s'obtiennent à partir des développements limités de leurs dérivées.

5. Etude locale d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (Mpsi)

5.1 Etude d'une fonction au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ensemble de la forme $[a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$ avec $\alpha > 0$. On suppose que f admet un développement limité au voisinage de a de la forme suivante :

$f(t) = a_0 + a_1(t-a) + a_p(t-a)^p + o\left((t-a)^p\right)$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geq 2$. (1)

Quitte à prolonger ou à modifier f au point a on peut toujours supposer que $f(a) = a_0$.

Dès lors, $\lim\limits_{a,\neq} f = a_0$ et f est continue au point a.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = a_1$ et f est dérivable au point a avec $f'(a) = a_1$

On note T_a la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative C_f de f.

Elle a pour équation cartésienne : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$f(t) - [f'(a)(t-a) + f(a)] \underset{a}{\sim} a_p(t-a)^p$ donc la quantité $f(t) - [f'(a)(t-a) + f(a)]$ est du signe de $a_p(t-a)^p$ au voisinage de a.

Cela permet de préciser localement la position de la courbe C_f par rapport à la droite T_a.

Quatre cas de figure sont possibles suivant la parité de p et le signe de a_p. Notons que lorsque p est impair la courbe « traverse sa tangente ». On dit alors que C_f admet un point d'inflexion au point de C_f d'abscisse a.

Proposition.– Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[a-\alpha, a+\alpha]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Si C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a alors $f''(a) = 0$.

<u>Remarques</u> :

✓ La réciproque est fausse ! ! !

✓ Tout ce qui a été énoncé ci-dessus dans le cas où la fonction f est définie sur $[a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$ avec $\alpha > 0$ reste valable si f est simplement définie sur $[a-\alpha, a[$ (resp $]a, a+\alpha]$) en remplaçant « continue » par « continue à gauche» (resp « continue à droite»), « dérivable » par « dérivable à gauche» (resp « dérivable à droite») et $f'(a)$ par $f'_g(a)$ (resp $f'_d(a)$).

5.2 Etude locale au voisinage de l'infini

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \pm\infty$. Pour préciser les choses on commence à s'intéresser au rapport $\frac{f(t)}{t}$.

Si $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$ alors on dit que C_f admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy).

Si $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$ alors on dit que C_f admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox).

On suppose désormais, qu'au voisinage de $+\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme $f(t) \underset{+\infty}{=} at + b + \frac{c}{t^p} + o\left(\frac{1}{t^p}\right)$ avec $p \geq 2$ et $c \neq 0$.

Dès lors $\lim\limits_{t\to+\infty} [f(t) - (at+b)] = 0$ et on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

$f(t) - (at+b) \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{t^p}$ donc les quantités $f(t) - (at+b)$ et $\frac{c}{t^p}$ sont du même signe au voisinage de $+\infty$. Cela permet de préciser au voisinage de $+\infty$, la position de C_f par rapport à Δ.

6. Pour aller plus loin (HP)

Proposition.– Soient f, g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de a dans A.

1) $e^f \underset{a}{\sim} e^g \Leftrightarrow \lim\limits_{a,A}(f-g) = 0$. **Mise en garde !!!** : $f \underset{a}{\sim} g$ n'implique pas $e^f \underset{a}{\sim} e^g$.

2) Si f et g sont strictement positives au voisinage de a dans A, si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{a,A} g = L$ avec $L \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$ alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.