4

Equation différentielle linéaire d'ordre 1 pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$.

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des applications **continues** sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre un : $(L) : \ y' + a\,y = b$.

A l'équation (L) on associe l'équation différentielle homogène $(H) : \ y' + a\,y = 0$.

Définition.– Une application $f : I \to \mathbb{K}$ est dite solution de l'équation différentielle (L) sur l'intervalle I si et seulement si f est dérivable sur I et $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$ pour tout $t \in I$.

On note $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{K}$ qui sont solutions de (L) sur I.

1. Structure algébrique de l'ensemble des solutions

Théorème.– (De structure)

1) $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
2) Si $\varphi_0 : I \to \mathbb{K}$ est une solution de (L) sur I alors : $S_{I\to\mathbb{K}}(L) = \varphi_0 + S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

   Si $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est non vide alors $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est un sous espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

Remarque : pour déterminer toutes les solutions de (L) il suffit de savoir résoudre l'équation homogène (H) et de disposer d'une solution particulière de (L). Nous verrons (§3) que $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est non vide et que par suite $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est bien un sous espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

2. Résolution de l'équation homogène

Théorème.– Soit A est une primitive de a sur l'intervalle I.

1) $S_{I\to\mathbb{K}}(H) = \mathbb{K}e^{-A} = \left\{\lambda e^{-A},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.
2) $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension un et plus précisément $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$ est une droite vectorielle admettant $\left\{e^{-A}\right\}$ pour base.

Remarque : On peut aussi adopter aussi la notation : $S_{I\to\mathbb{K}}(H) = \left\{\left(t \to \lambda e^{-A(t)}\right),\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

3. Résolution de (L)

Théorème.– (L) admet toujours au moins une solution sur I. Autrement dit : $S_{I\to\mathbb{K}}(L) \neq \varnothing$.

Plus précisément : si A est une primitive sur I de a et si B est une primitive sur I de be^A alors $y_0 = Be^{-A}$ est une solution de (L) sur I.

Méthode de variation de la constante :

On peut retrouver le résultat ci-dessus en mettant en œuvre la stratégie suivante dite méthode de variation de la constante. Soit A une primitive de a sur I. On a : $S_{I\to\mathbb{K}}(H) = \left\{\lambda e^{-A},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

On considère $\lambda : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et pour l'instant quelconque et on pose : $y_0 = \lambda e^{-A}$.

Il est possible de choisir l'application λ de sorte que y_0 soit une solution de (L) sur I. En effet :

$y_0' + a\,y_0 = \lambda' e^{-A} - a\lambda e^{-A} + a\lambda e^{-A} = \lambda' e^{-A}$.

$y_0 \in S_{I\to\mathbb{K}}(L) \Leftrightarrow \lambda' = be^A$.

On prend pour application λ une primitive B de be^A sur I.

Dès lors $y_0 = B\,e^{-A}$ est une solution de (L) sur I.

Théorème.– Soient A est primitive sur I de a et B est une primitive sur I de be^A.

$S_{I\to\mathbb{K}}(L) = y_0 + \mathbb{K}e^{-A} = \left\{y_0 + \lambda e^{-A},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ avec $y_0 = Be^{-A}$.

4. Principe de superposition - théorème de Cauchy-Lipschitz

Proposition.– (Principe de superposition)

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère les équations différentielles $(L_1) : \ y' + a\,y = b_1$ et $(L_2) : \ y' + a\,y = b_2$.

Si φ_1 (resp φ_2) est une solution de (L_1) (resp (L_2)) sur I alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est une solution sur I de l'équation différentielle $(L) : \ y' + a\,y = b_1 + b_2$.

Théorème.– (Cauchy-Lipschitz)

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle $(L) : \ y' + a\,y = b$. Etant donnés $t_0 \in I$ et $\alpha_0 \in \mathbb{K}$ il existe une unique solution y de (L) sur I vérifiant $y(t_0) = \alpha_0$.

Guillaume Roussel MP3 Montaigne

Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient α,β des scalaires c'est à dire des éléments de $\mathbb{K}$.

Soit $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application continue sur l'intervalle I.

On considère l' équation différentielle du second ordre à coefficients constants : $(L):\ y'' + \alpha y' + \beta y = c$. A l'équation (L) on associe l'équation différentielle homogène : $(H):\ y'' + \alpha y' + \beta y = 0$.

Définition.– Une application $f : I \to \mathbb{K}$ est dite est solution de l'équation différentielle (L) sur l'intervalle I si et seulement si f est deux fois dérivable sur I et si $f''(t) + \alpha f'(t) + \beta f(t) = c(t)$ pour tout $t \in I$.

On note $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{K}$ qui sont solutions de (L) sur I.

1. Structure algébrique de l'ensemble des solutions

Théorème.– $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Si $\varphi_0 : I \to \mathbb{K}$ est une solution de (L) sur I alors : $S_{I\to\mathbb{K}}(L) = \varphi_0 + S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

Si $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est non vide alors $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est un sous espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

<u>Remarques</u> : Pour déterminer les solutions de (L) il suffit de savoir résoudre l'équation homogène (H) et de disposer d'une solution particulière de (L). Nous verrons (§3) que $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est non vide et que par conséquent $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est bien un sous espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

2. Résolution de l'équation homogène

<u>Notations</u> :Etant donné $a \in \mathbb{K}$ on note e_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ défini par : $e_a(t) = e^{at}$.

Etant donné $\omega \in \mathbb{R}$ on note $\cos_\omega$ et $\sin_\omega$ les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $\cos_\omega(t) = \cos\omega t$ et $\sin_\omega(t) = \sin\omega t$.

Etant donné $(\omega,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ on note $\cos_{\omega,\varphi}$ et $\sin_{\omega,\varphi}$ les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $\cos_{\omega,\varphi}(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ et $\sin_{\omega,\varphi}(t) = \sin(\omega t + \varphi)$.

On note Id l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définie par : $\mathrm{Id}(t) = t$.

Soient α,β des scalaires On considère l'équation différentielle : $(H):\ y'' + \alpha y' + \beta y = 0$.

On pose $P = X^2 + \alpha X + \beta$. Le polynôme P est appelé polynôme caractéristique de l'équation (H).

Théorème 1.– (Le cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

1) Si le polynôme P admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{C}$ alors $S_{I\to\mathbb{C}}(H)$ est donné par : $S_{I\to\mathbb{C}}(H) = \mathrm{Vect}(e_r, e_s) = \mathbb{C}e_r + \mathbb{C}e_s = \left\{\left(t \to A e^{rt} + B e^{st}\right), A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}\right\}$.
2) Si le polynôme P admet une unique racine r dans $\mathbb{C}$ alors $S_{I\to\mathbb{C}}(H)$ est donné par : $S_{I\to\mathbb{C}}(H) = \mathrm{Vect}(e_r, Te_r) = \mathbb{C}e_r + \mathbb{C}\,\mathrm{Id}\,e_r = \left\{\left(t \to (A + Bt)e^{rt}\right), A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}\right\}$.

<u>Remarque</u> : Si l'on est dans le cas 1) alors on pose : $h_1 = e_r$ et $h_2 = e_s$. Si l'on est dans le cas 2) alors on pose : $h_1 = e_r$ et $h_2 = Te_r$. Via ces notations, on constate que quel que soit le cas de figure, on a :

1) $S_{I\to\mathbb{C}}(H) = \mathrm{Vect}(h_1,h_2) = \mathbb{C}h_1 + \mathbb{C}h_2 = \left\{\lambda h_1 + \mu h_2\ ,\ (A,B) \in \mathbb{C}^2\right\}$.
2) $S_{I\to\mathbb{C}}(H)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension deux admettant (h_1,h_2) pour base.
3) L'application $W_{h_1,h_2} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix} = h_1h_2' - h_1'h_2$ ne s'annule pas sur I.

Théorème 2.– (Le cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

1) Si le polynôme P admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{R}$ alors $S_{I\to\mathbb{R}}(H)$ est donné par : $S_{I\to\mathbb{R}}(H) = \mathrm{Vect}(e_r, e_s) = \mathbb{R}e_r + \mathbb{R}e_s = \left\{\left(t \to A e^{rt} + B e^{st}\right), A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\right\}$.
2) Si le polynôme P admet une unique racine r dans $\mathbb{R}$ alors $S_{I\to\mathbb{R}}(H)$ est donné par : $S_{I\to\mathbb{R}}(H) = \mathrm{Vect}(e_r, Te_r) = \mathbb{R}e_r + \mathbb{R}Te_r = \left\{\left(t \to (A + Bt)e^{rt}\right), A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\right\}$.
3) Si le polynôme P n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ alors il admet deux racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ données par $r = \lambda - i\omega$ et $s = \lambda + i\omega$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$ et on a :
$$S_{I\to\mathbb{R}}(H) = \mathrm{Vect}(e_\lambda \cos_\omega, e_\lambda \sin_\omega) = \mathbb{R}e_\lambda \cos_\omega + \mathbb{R}e_\lambda \sin_\omega = \left\{\left(t \to e^{\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\right),\ A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\right\}.$$
De manière équivalente on a :
$$S_{I\to\mathbb{R}}(H) = \left\{Ae_\lambda \cos_{\omega,\varphi}, A \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(t \to Ae^{\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)\right), A \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}\right\}$$
$$S_{I\to\mathbb{R}}(H) = \left\{Ae_\lambda \sin_{\omega,\varphi}, A \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(t \to Ae^{\lambda t}\sin(\omega t + \varphi)\right), A \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarques

Si l'on est dans le cas 1) alors on pose : $h_1 = e_r$ et $h_2 = e_s$. Si l'on est dans le cas 2) alors on pose : $h_1 = e_r$ et $h_2 = Te_r$. Si l'on est dans le cas 3) alors on pose : $h_2 = e_\lambda \cos_\omega$ et $h_2 = e_\lambda \sin_\omega$.

Via ces notations, on constate que quel que soit le cas de figure, on a :

1) $S_{I\to\mathbb{R}}(H) = \mathrm{Vect}(h_1,h_2) = \mathbb{R}h_1 + \mathbb{R}h_2 = \{Ah_1 + Bh_2\,;(A,B)\in\mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}h_1 + \mathbb{R}h_2$.

2) $S_{I\to\mathbb{R}}(H)$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension deux admettant (h_1,h_2) pour base.

3) L'application $W_{h_1,h_2} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix} = h_1h_2' - h_1'h_2$ ne s'annule pas sur I.

Des cas particuliers importants

✓ On considère l'équation différentielle $(H) : y'' + \omega^2 y = 0$. ($\omega$ désigne un **réel non nul**)

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) &= \{(t \to A\cos\omega t + B\sin\omega t),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{(t\to A\cos(\omega t+\varphi)),\ (A,\varphi)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{(t\to A\sin(\omega t+\varphi)),\ (A,\varphi)\in\mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(H) &= \{(t\to Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}),\ (A,B)\in\mathbb{C}^2\} \\ &= \{(t\to A\cos\omega t + B\sin\omega t),\ (A,B)\in\mathbb{C}^2\}. \end{aligned}$$

✓ On considère l'équation différentielle $(H) : y'' - \omega^2 y = 0$. ($\omega$ désigne un **réel non nul**)

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) &= \{(t\to Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{(t\to A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) &= \{(t\to Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}),\ (A,B)\in\mathbb{C}^2\} \\ &= \{(t\to A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t),\ (A,B)\in\mathbb{C}^2\}. \end{aligned}$$

3. Résolution de l'équation avec second membre (L)

Soient α,β des scalaires et $c : I \to \mathbb{K}$ une application continue sur l'intervalle I.

On considère les équations différentielles : $(L) : y'' + \alpha y' + \beta y = c$ et $(H) : y'' + \alpha y' + \beta y = 0$.

On reprend ici les notations des remarques du paragraphe précédent.

On a donc : $S_{I\to\mathbb{K}}(H) = \mathbb{K}h_1 + \mathbb{K}h_2$ et l'application $W_{h_1,h_2} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix}$ ne s'annule pas sur I.

Montrons que (L) admet toujours au moins une solution sur I.

Stratégie :

Soient $A, B : I \to \mathbb{K}$ des applications dérivables sur I.

Il est à noter que A et B sont des applications et non des scalaires.

On considère $y_0 : I \to \mathbb{K}$ définie par : $y_0 = A h_1 + B h_2$.

Montrons qu'il est possible de choisir A, B de sorte que y_0 soit une solution de (L) sur I.

On a : $y_0' = Ah_1' + Bh_2' + A'h_1 + B'h_2$.

Pour ne pas faire apparaître de termes en A'', B'' on impose la condition $\mathbf{A'h_1 + B'h_2 = 0}$.

Dès lors : $y_0 = Ah_1 + Bh_2$, $y_0' = Ah_1' + Bh_2'$ et $y_0'' = Ah_1'' + Bh_2'' + A'h_1 + B'h_2$.

On constate que si les applications A, B vérifient la condition : $(*)\ \begin{cases} A'h_1 + B'h_2 = 0 \\ A'h_1' + B'h_2' = c \end{cases}$ alors l'application y_0 est une solution de (L) sur I.

Pour tout t fixé dans I, le système, aux inconnues scalaires x et y, $\begin{cases} h_1(t)x + h_2(t)y = 0 \\ h_1'(t)x + h_2'(t)y = c(t) \end{cases}$ admet un unique couple solution donné par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & h_2(t) \\ c(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} h_1(t) & 0 \\ h_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}}$.

On décide de prendre pour application A une primitive sur I de $\left(t \to \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & h_2(t) \\ c(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}}\right)$ et pour B une primitive sur I de $\left(\dfrac{\begin{vmatrix} h_1(t) & 0 \\ h_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}}\right)$. Dès lors la conditions $(*)$ est vérifiée et l'application $y_0 : I \to \mathbb{K}$ définie par $y_0 = Ah_1 + Bh_2$ est une solution de (L) sur I.

Remarque : La méthode exposée ci-dessus est appelée méthode de variation de la constante. Comme on va le voir dans le paragraphe suivant, on peut parfois éviter d'y avoir recours.

Théorème.– $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est un sous espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

En particulier $S_{I\to\mathbb{K}}(L) \neq \varnothing$.

4. Résolution de l'équation (L) dans un cas favorable

Soient α,β des scalaires et $c : I \to \mathbb{K}$ une application continue sur l'intervalle I.

On considère l'équation différentielle $(L) : y'' + \alpha y' + \beta y = c$.

On suppose ici que l'application c est de la forme : $c(t) = Q(t)e^{at}$ où Q est une fonction polynôme et où a est un élément de $\mathbb{K}$.

Dans ces conditions, on peut chercher une solution particulière $y_0 : I \to \mathbb{K}$ sous la forme : $y_0(t) = t^m R(t)e^{at}$ où R est une fonction polynôme de même degré que Q, $m = 0$ si a n'est pas racine de P dans $\mathbb{K}$, $m = 1$ si a est racine simple de P dans $\mathbb{K}$, $m = 2$ si a est racine double de P dans $\mathbb{K}$.

5. Principe de superposition - théorème de Cauchy-Lipschitz

Proposition.– (Principe de superposition)
Soient α, β des scalaires et $c_1, c_2 : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues sur I. On considère les équations différentielles $(L_1) : y'' + \alpha y' + \beta y = c_1$ et $(L_2) : y'' + \alpha y' + \beta y = c_2$. Si φ_1 (resp φ_2) est une solution de (L_1) (resp (L_2)) sur I alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est une solution sur I de $(L) : y'' + \alpha y' + \beta y = c_1 + c_2$.

Théorème.– (de Cauchy - Lipschitz)
Soient α, β des scalaires et $c : I \to \mathbb{K}$ une application continue sur l'intervalle I.
On considère l'équation différentielle $(L) : y'' + \alpha y' + \beta y = c$.
Étant donné $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{K}^2$ il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (L) sur I vérifiant les conditions : $y(t_0) = \alpha_0$ et $y'(t_0) = \beta_0$.