5

Suites réelles ou complexes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et le symbole $|\ |$ désigne la valeur absolue ou le module suivant que l'on se trouve dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est par définition une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est donc l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

1. Suites convergentes, suites bornées (Mpsi)

Définition.– Soient (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$.

On dit que (x_n) tend vers a si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \varepsilon$.

Définition.– Soit (x_n) une suite de nombres <u>réels</u>.

On dit que (x_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \geq A$.

On dit que (x_n) tend vers $-\infty$ si et seulement si : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \leq -A$.

Théorème.– (Unicité de la limite)

1) Soit $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Si (x_n) tend vers a et vers b alors $a = b$.

2) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si (x_n) tend vers a et vers b alors $a = b$.

<u>Notations</u> : Si la suite (x_n) tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ alors un tel a est unique. Dans ces conditions cet unique a est appelé limite de la suite (x_n) et est noté $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou encore $\lim x_n$.

Théorème.– Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{K}$.

1) Si $\lim u_n = a$ alors $\lim |u_n| = |a|$.

2) Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - a| \leq v_n$ et si $\lim v_n = 0$ alors $\lim u_n = a$.

Définition.– Soient (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que (x_n) est bornée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M$.

Définition.– Soient (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que (x_n) est convergente dans $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe un élément de $\mathbb{K}$ vers lequel (x_n) tend.

On dit que (x_n) est divergente dans $\mathbb{K}$ si et seulement si elle n'est pas convergente dans $\mathbb{K}$.

Proposition.– Toute suite convergente dans $\mathbb{K}$ est bornée.

2. Limite et opérations algébriques (Mpsi)

Théorème.– Soient (x_n) et (y_n) des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ convergentes dans $\mathbb{K}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) Les suites $(\alpha x_n + \beta y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont convergentes dans $\mathbb{K}$ et on a les égalités : $\lim(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim x_n + \beta \lim y_n$ et $\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n)$.

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq 0$ si $\lim y_n \neq 0$ alors $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ converge dans $\mathbb{K}$ et $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Proposition.– Soient (x_n) et (y_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si (x_n) est bornée et si $\lim y_n = 0$ alors $\lim(x_n y_n) = 0$.

Proposition.– Soit (z_n) une suite complexe.

1) Si (z_n) converge dans $\mathbb{C}$ alors $(\overline{z_n})$ converge dans $\mathbb{C}$ et on a l'égalité : $\lim \overline{z_n} = \overline{\lim z_n}$.

2) La suite complexe (z_n) converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent dans $\mathbb{R}$ et si ces conditions sont remplies alors on a les égalités suivantes : $\lim z_n = \lim(\mathrm{Re}\, z_n) + i \lim(\mathrm{Im}\, z_n)$, $\lim \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(\lim z_n)$ et $\lim \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(\lim z_n)$.

3. Suites réelles et inégalités (Mpsi)

3.1 Premières propriétés

Théorème 1.– (Passage à la limite)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n$ alors on a : $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Théorème 2.– (Théorème d'encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que : $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) tendent vers $L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) tend vers L.

Remarque : Lorsque l'on utilise le théorème 1, on dit que l'on « passe à la limite » dans l'inégalité. Pour ce faire, il est vital de s'assurer que toutes les limites mises en jeu existent bien dans $\overline{\mathbb{R}}$. Le théorème 2 assure l'existence d'une limite. Il n'est donc pas de même nature. Le passage à la limite dans une inégalité ne conserve pas les inégalité strictes.

Proposition.– Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.
Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ u_n \leq v_n$ et si $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.
Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ u_n \leq v_n$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

Théorème.– Soient $L \in \overline{\mathbb{R}}$, (x_n) une suite réelle qui tend vers L et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
1) Si $\alpha < L$ alors : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ \alpha \leq x_n$.
2) Si $L < \beta$ alors : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ x_n \leq \beta$.

3.2 Suites réelles monotones

Définition.– Soit (x_n) une suite réelle.
On dit que (x_n) est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq x_{n+1}$.
On dit que (x_n) est décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leq x_n$.
On dit que (x_n) est majorée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq M$.
On dit que (x_n) est minorée si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq x_n$.

Théorème.– (Limite d'une suite réelle monotone)
Toute suite réelle monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :
1) Soit (x_n) est une suite réelle croissante. Si (x_n) est majorée alors (x_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ et $\lim x_n = \mathrm{Sup}\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$. Si (x_n) n'est pas majorée alors $\lim x_n = +\infty$.
2) Soit (x_n) une suite réelle décroissante. Si (x_n) est minorée alors (x_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ et $\lim x_n = \mathrm{Inf}\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$. Si (x_n) n'est pas minorée alors $\lim x_n = -\infty$.

Définition.– Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit que $((a_n),(b_n))$ est un couple de suites adjacentes si et seulement si (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $\lim(b_n - a_n) = 0$.

Théorème.– Si $((a_n),(b_n))$ est un couple de suites adjacentes alors les suites (a_n) et (b_n) convergent dans $\mathbb{R}$ vers la même limite L et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq L \leq b_n$.

4. Quelques situations fondamentales (Mpsi)

Théorème.– (Convergence d'une suite géométrique) : on considère $q \in \mathbb{K}$.
1) Si $|q| > 1$ alors $\lim |q|^n = +\infty$ et la suite (q^n) est divergente dans $\mathbb{K}$.
2) Si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$. Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante égale à 1.
3) Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$ alors (q^n) est divergente dans $\mathbb{K}$.

Proposition.– (Approximation décimale d'un réel)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $x_n = \dfrac{1}{10^n}\lfloor 10^n x \rfloor$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$.
1) (x_n) est une suite croissante de rationnels qui converge vers x.
(y_n) est une suite décroissante de rationnels qui converge vers x.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x - \dfrac{1}{10^n} \leq x_n \leq x \leq y_n \leq x + \dfrac{1}{10^n}$.
Le réel x_n (resp y_n) est appelé valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut (resp par excès).

Corollaire.– (Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
1) Tout réel est limite d'une suite croissante de rationnels.
2) Tout réel est limite d'une suite décroissante de rationnels.
3) Tout réel est limite d'une suite d'irrationnels.

Théorème.– Soit A une partie <u>non vide</u> de $\mathbb{R}$.
1) Si A est majorée alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers $\mathrm{Sup}\,A$.
Si A est non non majorée alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers $+\infty$.
2) Si A est minorée alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers $\mathrm{Inf}\,A$.
Si A est non minorée alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers $-\infty$.

Théorème.– (Sommes de Riemann)
1) Si $f \in M^0([a,b],\mathbb{K})$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$.
2) Si $f \in M^0([0,1],\mathbb{K})$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{[0,1]} f$.

5. Comparaison des suites (Mpsi)

5.1 Définitions

Définition.– Soient (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \neq 0$.

On dit que (a_n) est dominée par (b_n), et on note $a_n = O(b_n)$, si et seulement si $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ est bornée.

On dit que (a_n) est négligeable devant (b_n), et on note $a_n = o(b_n)$, si et seulement si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

On dit que (a_n) est équivalente (b_n), et on note $a_n \sim b_n$, si et seulement si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Remarques :

- ✓ $a_n = O(b_n)$ se lit « (a_n) est dominée par (b_n) » ou encore « (a_n) est un grand O de (b_n) ». Il ne s'agit pas d'égalités au sens habituel mais « d'égalités » qui se lisent de la gauche vers la droite.
- ✓ La définition ci-dessus se généralise au cas où la suite (b_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang en considérant la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N}$ où N est un entier tel que : $\forall n \geq N,\ b_n \neq 0$.
- ✓ Lorsque l'on écrit $a_n = O(b_n)$ où $a_n = o(b_n)$ ou $a_n \sim b_n$ il sera désormais implicitement supposé que la suite (b_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Théorème – (croissance comparée)

Si α,β,γ sont des réels strictement positifs alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$.

5.2 Règles de calcul concernant la domination et la négligeabilité

Soient (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}.a_n = o(b_n)$. Il est sous-entendu, si nécessaire, que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- ➢ Si $a_n = o(b_n)$ alors $a_n = O(b_n)$.
- ➢ Si $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(c_n)$ alors $a_n = O(c_n)$.
  Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$ alors $a_n = o(c_n)$.
- ➢ Si $a_n = O(b_n)$ alors $\lambda a_n = O(b_n)$. Si $a_n = O(\lambda b_n)$ alors $a_n = O(b_n)$.
  Si $a_n = o(b_n)$ alors $\lambda a_n = o(b_n)$. Si $a_n = o(\lambda b_n)$ alors
- ➢ Si $b_n = O(c_n)$ alors $a_n b_n = O(a_n c_n)$. Si $b_n = o(c_n)$ alors $a_n b_n = o(a_n c_n)$.
- ➢ Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = O(c_n)$ alors $a_n + b_n = O(c_n)$.
  Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$ alors $a_n + b_n = o(c_n)$.
- ➢ Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = O(d_n)$ alors $a_n b_n = O(c_n d_n)$.
  Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(d_n)$ alors $a_n b_n = o(c_n d_n)$.

En résumé : (les « égalités » se lisent de la gauche vers la droite)

- ➢ $o(b_n) = O(b_n)$.
- ➢ $O(O(c_n)) = O(c_n)$ et $o(o(c_n)) = o(c_n)$.
- ➢ $\lambda O(b_n) = O(b_n)$, $O(\lambda b_n) = O(b_n)$ et $\lambda o(b_n) = o(b_n)$, $o(\lambda b_n) = o(b_n)$.
- ➢ $a_n O(b_n) = O(a_n b_n)$ et $a_n o(b_n) = o(a_n b_n)$.
- ➢ $O(c_n) + O(c_n) = O(c_n)$ et $o(c_n) + o(c_n) = o(c_n)$.
- ➢ $O(c_n) \times O(d_n) = O(c_n d_n)$ et $o(c_n) \times o(d_n) = o(c_n d_n)$.

5.3 Propriétés de l'équivalence

Il est sous-entendu si nécessaire que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Proposition.– Soient (a_n), (b_n) des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $L \in \mathbb{K}$.

1) $a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n - b_n = o(b_n)$.
2) Si $a_n \sim b_n$ et $\lim b_n = L$ alors $\lim a_n = L$. Si $\lim a_n = L$ et $L \neq 0$ alors $a_n \sim L$.
3) Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$.
4) Si $a_n = b_n + c_n$ et $c_n = o(b_n)$ alors $a_n \sim b_n$.
5) Si (a_n) et (b_n) sont des suites réelles et si $a_n \sim b_n$ alors il existe un rang à partir duquel les réels a_n et b_n sont du même signe.

Règles de calcul concernant l'équivalence des suites

Soient (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- ➢ $a_n \sim a_n$ ||| Si $a_n \sim b_n$ alors $b_n \sim a_n$ ||| Si $a_n \sim b_n$ et $b_n \sim c_n$ alors $a_n \sim c_n$.
- ➢ Si $a_n = O(b_n)$ et $b_n \sim c_n$ alors $a_n = O(c_n)$ ||| Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n \sim c_n$ alors $a_n = o(c_n)$.
- ➢ Si $a_n \sim b_n$ alors $|a_n| \sim |b_n|$ et $a_n^p \sim b_n^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.
- ➢ Si $(a_n),(b_n)$ ne s'annulent pas et si $a_n \sim b_n$ alors $\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$ puis $a_n^p \sim b_n^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

  Si $(a_n),(b_n)$ sont des suites de réels strictement positifs et si $a_n \sim b_n$ alors pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.
- ➢ Si $a_n \sim c_n$ et $b_n \sim d_n$ alors $a_n b_n \sim c_n d_n$.
- ➢ **Mise en garde !!!** : $a_n \sim c_n$ et $b_n \sim d_n$ n'implique pas $a_n + b_n \sim c_n + d_n$.
- ➢ **Mise en garde !!!** : $a_n \sim b_n$ n'implique pas $e^{a_n} \sim e^{b_n}$.

Théorème $-n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Formule de Stirling)

6. Suites extraites – Théorème de Bolzano-Weierstrass (Mpsi)

Proposition.– Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors $\varphi(n) \geq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$.

Définition.– Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle suite extraite, ou encore sous suite, de la suite (x_n) toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemples : La suite (x_{6n}) est une suite extraite de (x_{2n}) mais aussi de (x_{3n}).

Proposition.– Soient (x_n) une suite réelle et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Si $\lim x_n = L$ alors pour toute suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ on a $\lim x_{\varphi(n)} = L$.
2) Si $\lim x_{2n} = L$ et $\lim x_{2n+1} = L$ alors $\lim x_n = L$.

Théorème.– (de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous suite convergente dans $\mathbb{K}$.

7. Pour aller plus loin (HP)

7.1 Convergence

Théorème.– (Convergence d'une suite d'entiers)

Une suite d'entiers relatifs est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est stationnaire.

Proposition.– Si (x_n) et (y_n) sont deux suites réelles convergentes dans $\mathbb{R}$ alors les deux suites réelles $(\min(x_n,y_n))$ et $(\max(x_n,y_n))$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$ et on a les égalités suivantes : $\lim \min(x_n,y_n) = \min(\lim x_n, \lim y_n)$, $\lim \max(x_n,y_n) = \max(\lim x_n, \lim y_n)$.

Théorème.– (Lemme de Riemann-Lebesgue : version C^1)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos nt \, dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt \, dt = 0$.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int} \, dt = 0$.

7.2 Théorème de Cesàro

Théorème.– Soit $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $L \in \mathbb{K}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = L$.

Si (x_n) est une suite réelle alors le résultat est encore valable lorsque L vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème.– Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = L$.

7.3 Suites de Cauchy

Définition.– Une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite de cauchy dans $\mathbb{K}$ si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$.

Théorème.– (Critère de Cauchy)

Une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est de Cauchy.

7.4 Deux résultats utiles

Proposition.– Soient $\mathcal{P}$ une propriété que peut posséder un élément de $\mathbb{K}$ et (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \mid x_n$ possède la propriété $\mathcal{P}$. Dans ces conditions, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ dont tous les termes possèdent la propriété $\mathcal{P}$.

Proposition.– Soient (a_n) et (b_n) des suites de réels strictement positifs.
Si $a_n \sim b_n$ et si $\lim b_n = L$ avec $L \in [0,+\infty] \setminus \{1\}$ alors $\ln a_n \sim \ln b_n$.

7.5 Des suites célèbres

Théorème.– (L'irrationnel e)

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1) Les suites (u_n) et (v_n) convergent dans $\mathbb{R}$ et ont même limite. Elle est notée e.
2) Le réel e est un irrationnel.

Théorème.– (Intégrale de Wallis)

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$.

1) (W_n) est une suite décroissante de réels positifs.

2) $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

3) $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et en particulier $\lim W_n = 0$.

Bernhard Riemann (1826-1866)
Né à près de Hanovre en Allemagne Riemann meurt à quarante ans en Italie à la suite d'une tuberculose. Malgré sa disparition précoce, son œuvre est colossale. Son apport est fondamental dans la définition de l'intégrale, en géométrie différentielle, en géométrie non euclidienne, en théorie des équations différentielles, en théorie des nombres et en topologie. Son exposé sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie est révolutionnaire et c'est cette nouvelle conception de la géométrie qui permettra plus tard à Einstein de disposer du bon cadre pour sa théorie de la relativité ! Riemann fût incontestablement un visionnaire de génie et ses idées, même non accompagnées de preuves, n'ont cessé d'inspirer les mathématiciens pendant près d'un siècle. A ce propos , une conjecture célèbre de Riemann concerne la fonction ζ $\left(\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right)$ et affirme que tous les zéros de la fonction ζ ont une partie imaginaire égale à $\frac{1}{2}$. Cette conjecture est actuellement toujours ouverte...

James Stirling (1692-1770)
Né en écosse, Stirling publie son premier travail en 1717. Il y prolonge et complète la théorie des courbes planes de degré trois élaborée par Newton. Stirling quitte ensuite la grande bretagne pour aller enseigner à Venise puis rentre à Glasgow en 1722. Il se rend à Londres en 1724 et y enseigne pendant une dizaine d'années. L'équivalent de la factorielle de n pour lequel Stirling est le plus célèbre apparait dans « Methodus différentialis » un livre publié en 1730 et portant principalement sur les méthodes d'accélération de convergence pour les séries numériques. On lui doit aussi la définition des nombres qui portent son nom.

Bernhard Bolzano (1781-1848)
Né à Prague, Bolzano fait des études de théologie, de philosophie et de mathématiques. Ordonné prêtre il devient professeur de sciences de la religion et consacre son temps libre à l'étude des mathématiques. Ses recherches sont très peu diffusées et leur coté novateur surprend ses contemporains. On lui doit (1934) le premier exemple d'application partout continue et nulle part dérivable, mais cet exemple restera méconnu. A tel point qu'en 1861, lorsque Karl Weierstrass exhibe lui aussi une telle application il pense être le premier à le faire ! Bolzano s'est aussi beaucoup intéressé, et cela bien avant Georg Cantor, aux ensembles infinis ainsi qu'à la logique. Le théorème de Bolzano-Weierstrass a quant à lui été énoncé vers 1830 par Bolzano et démontré par Karl Weierstrass vers 1860.

Karl Weierstrass (1815-1897)
Né en Westphalie et surnommé parfois " le père de l'analyse moderne ", Weierstrass a introduit une grande rigueur dans les mathématiques. C'est par exemple lui qui le premier formule la notion de continuité à l'aide " des epsilon ". C'est lui qui introduit la notion de convergence uniforme, notion avec laquelle il construit de nombreuses nouvelles fonctions. On lui doit notamment un exemple d'application partout continue et nulle part dérivable. Il donne aussi une construction de l'ensemble des nombres réels qui a très largement inspiré toutes celles qui paraissent à cette époque. C'est en 1885 qu'il publie son désormais célèbre théorème d'approximation uniforme sur un segment d'une application continue par une application polynomiale. Notons que Weierstrass s'est aussi intéressé à l'algèbre linéaire en plein essor à cet époque. Pour l'anecdote, Weierstrass a assez peu publié et c'est surtout par l'intermédiaire du cours de ses élèves que ses résultats ont le plus souvent été connus...

Henri Lebesgue (1875-1941)
Né à Beauvais, Lebesgue fait des études brillantes (classes préparatoires au lycée Louis-Le-Grand puis école normale supérieure). Dans sa thèse qu'il soutient en 1902 il présente la théorie d'une nouvelle intégrale qui porte aujourd'hui son nom. La principale faiblesse de l'intégrale de Riemann était son inaptitude à assurer simplement les permutations de limites. L'intégrale de Lebesgue la remplace et se révèle d'une efficacité redoutable. Cette nouvelle théorie de l'intégration va permettre un développement très important de l'analyse de Fourier.

Ernesto Cesàro (1859-1906)
Mathématicien Italien, Cesàro fait ses études en Belgique puis devient professeur à l'université de Naples. Entre autres choses on lui doit la mise en place de liens entre arithmétique et calcul intégral ainsi qu'une étude du comportement des séries entières sur le cercle de convergence.

Leonhard Euler (1707-1783)
Né à Bâle en 1707, Euler étudia les mathématiques sur les conseils de Bernouilli qui était ami avec son père. Son œuvre scientifique est considérable. Il est intervenu de manière décisive en astronomie, en physique et bien sûr en mathématiques. Il a notamment introduit le concept de fonction et découvert une très jolie relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe. D'une santé fragile il décède d'une hemorragie cérébrale à Saint-Petersbourg.

John Wallis (1616-1703)
Wallis est l'un des plus grands mathématiciens anglais du XVII^{ème} siècle. Après des études à Cambridge il est ordonné prêtre en 1640 et gagne sa vie comme aumonier à Londres. En 1649 il accède à la chaire de géométrie d'Oxford qu'il occupera jusqu'à sa mort. Membre fondateur de la Royal Society de Londres, Wallis s'intéressa aussi à la logique, à la théologie, à la grammaire anglaise et à la philosophie.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
Elève brillant, Cauchy entre à l'école polytechnique à l'âge de seize ans puis devient ingénieur militaire. Encouragé par Lagrange à se consacrer aux mathématiques, Cauchy obtient en 1816 un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'école polytechnique et au collège de France. L'œuvre de Cauchy est énorme et ses travaux concernent de nombreux domaines mathématiques comme la théorie des groupes, l'algèbre linéaire, la théorie des équations différentielles et la théorie des fonctions holomorphes. C'est cependant en analyse que l'influence de Cauchy s'avérera la plus déterminante. Soucieux de rigueur, il introduit une notion précise de continuité et élabore une définition rigoureuse de l'intégrale. On lui doit aussi des travaux en astronomie mais aussi en physique où il donne des bases mathématiques à la théorie de l'élasticité.

Exemples d'étude de suites réelles ou complexes

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites récurrentes affines d'ordre 1 (Mpsi)

On fixe (a,b) dans $\mathbb{K}^2$ et on considère une suite d'éléments (u_n) de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$. Lorsque $a = 1$ on dit que (u_n) est une suite arithmétique. Lorsque $b = 0$ on dit que (u_n) est une suite géométrique. Dans ces deux cas particuliers on peut exprimer u_n en fonction de n. On suppose désormais $a \neq 1$ et $b \neq 0$. L'équation $x = ax + b$ admet une unique solution à savoir $c = \frac{b}{1-a}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - c$. La suite (v_n) est une suite géométrique. On peut donc exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 (Mpsi)

On fixe (a,b) dans $\mathbb{K}^2$ et on note $S_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des suites (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. $S_{\mathbb{K}} = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$.

Théorème.– Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On considère une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose : $P = X^2 - aX - b$.

1) Si le polynôme P admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors il existe un unique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
2) Si le polynôme P admet une unique racine r dans $\mathbb{K}$ alors il existe un unique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + n\beta)r^n$.

Remarques

- ✓ Si P admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors $S_{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension deux admettant le couple de suites $\left((r_1^n),(r_2^n)\right)$ comme base.
- ✓ Si P admet une unique racine r dans $\mathbb{K}$ alors $S_{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension deux admettant le couple de suites $\left((r^n),(nr^n)\right)$ comme base.
- ✓ Tous les résultats énoncés ci-dessus sont valables que $\mathbb{K}$ soit égal à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{R}$. Il y a néanmoins une situation qui n'est pas traitée par le théorème ci-dessus. Il s'agit du cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où P n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Théorème.– Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que le polynôme $P = X^2 - aX - b$ n'admette pas de racines dans $\mathbb{R}$. Le polynôme P admet alors deux racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ de la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Si (u_n) est une suite de réels vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors il existe un unique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta)r^n$.

Remarque : Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et si $P = X^2 - aX - b$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$ alors $S_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux admettant $\left((r^n\cos n\theta),(r^n\sin n\theta)\right)$ comme base.

3. Une stratégie d'étude pour les suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et A une partie de $\mathbb{R}$ contenue dans D. On suppose que la partie **A est stable par f** c'est à dire que : $\forall x \in A,\ f(x) \in A$. On considère alors la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in A$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. La condition « **A stable par f** » assure que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A$. La suite (u_n) est dite suite récurrente associée à l'application f.

Stratégie d'étude : On détermine, si la situation est favorable, les seules limites possibles de la suite (u_n). (cf paragraphe 3.1). Ensuite, on se ramène à l'une des deux situations de référence (cf paragraphes 3.2 et 3.3. Pour ce faire on étudie les variations de f et le signe de g définie par $g(x) = f(x) - x$.

3.1 Limites possibles de la suite (u_n) dans un cas favorable

Dans la pratique on procède ainsi : on suppose que la suite (u_n). est convergente dans $\mathbb{R}$ et on pose $L = \lim u_n$. On suppose que **f est continue est continue au point** L. Il vient alors $L = f(L)$ c'est à dire $g(L) = 0$. On obtient alors les valeurs possibles de f.

3.2 Première situation de référence

On se place ici sous les hypothèses :

✓ A stable par f c'est à dire : $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

✓ f croissante sur A.

✓ $u_0 \in A$.

Dans ces conditions : La suite (u_n) est monotone et tous ces termes appartiennent à A. Comme (u_n) est monotone, le signe de $u_1 - u_0 = g(u_0)$ permet de préciser la monotonie de la suite (u_n).

3.3 Seconde situation de référence

On se place ici sous les hypothèses :

✓ A stable par f c'est à dire : $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

✓ f décroissante sur A.

✓ $u_0 \in A$.

Dans ces conditions : Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à A. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires. On dit que la suite (u_n) est oscillante. Dans la pratique on s'intéresse à la suite (u_{2n}) en posant $v_n = u_{2n}$. On constate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f \circ f(v_n)$. La suite (v_n) est une suite récurrente associée à l'application $\varphi = f \circ f$. Comme A est stable par φ, que $\varphi = f \circ f$ est croissante sur A en tant que composée de fonctions décroissantes sur A et que $v_0 = u_0 \in A$, on est ramené pour l'étude de la suite $(v_n) = (u_{2n})$ à la première situation de référence. Le comportement de la suite (u_{2n+1}) se déduit de celui de la suite (u_{2n}) grâce à la relation $u_{2n+1} = f(u_{2n})$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ayant été étudiées on est en mesure de conclure quant à la nature de la suite (u_n).

Remarques

✓ Les résultats de ce paragraphe ne s'appliquent que si l'application f est indépendante de n.

✓ La stratégie d'étude présentée ne s'applique pas si la suite (u_n) étudiée est à valeurs complexes.

✓ Même lorsqu'elle s'applique il ne faut pas être systématique dans la mise en œuvre de la méthode car il y a des cas de figure où elle n'est guère adaptée. Une autre voie possible est donnée par le théorème du point fixe exposé à la fin du chapitre.

4. Théorème du point fixe (HP)

Terminologie :

➢ On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle contient les limites de ses suites convergentes.

➢ Soient $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et A une partie de D. On dit que A est stable par f si et seulement si : $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

➢ Soient $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, A une partie de D et $k \in \mathbb{R}^+$.

On dit que $f_{|A}$ est k-lipschitzienne si et seulement si :

$\forall (x,y) \in \underline{\underline{A}}^2,\ |f(x) - f(y)| \le k|x-y|$.

On dit que $f_{|A}$ est contractante sur A si et seulement si $f_{|A}$ est k-lipschitzienne avec $k \in [0,1[$.

Théorème.– (du point fixe)

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de D dans $\mathbb{R}$ et $A \subset D$.

Si A est une partie fermée non vide stable par f et si $f_{|A}$ est contractante alors :

1) L'application f admet un unique point fixe ℓ dans A.

2) Si $a \in A$, alors la suite (a_n) définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers ℓ.