Relations

1. Notion de relation sur un ensemble (Mpsi)

Intuitivement, une relation sur un ensemble E est un « procédé » qui permet de relier entre eux les éléments de E et cela sans aucune contrainte. Formalisons cette idée !!!

Définition.– On appelle relation tout couple $\mathcal{R}=(E,\Gamma)$ où E est un ensemble et où Γ est une partie de $E\times E$. Une telle relation $\mathcal{R}$ est appelée une relation sur l'ensemble E.

<u>Terminologie</u> : Soit $\mathcal{R}=(E,\Gamma)$ une relation sur E.
L'ensemble Γ est appelé le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
Etant donné deux éléments x et y de E, on dit que x est en relation avec y si et seulement si le couple (x,y) appartient à Γ. Pour exprimer cela on note $x\,\mathcal{R}\,y$.

Définition.– Soit $\mathcal{R}$ une relation sur l'ensemble E.
$\mathcal{R}$ est dite réflexive si et seulement si : $\forall x\in E,\ x\mathcal{R}x$.
$\mathcal{R}$ est dite symétrique si et seulement si : $\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
$\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si et seulement si : $\forall (x,y)\in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x)\Rightarrow x=y$.
$\mathcal{R}$ est dite transitive si et seulement si : $\forall (x,y,z)\in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z)\Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2. Relation d'équivalence (Mpsi)

Définition.– On appelle relation d'équivalence sur l'ensemble E toute relation $\sim$ sur E qui est réflexive, symétrique et transitive.

Définition.– Soient $\sim$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E et x un élément de E.
L'ensemble $\{y\in E \mid y\sim x\}$ est noté $[x]_\sim$ et est appelé classe d'équivalence de x.
Il s'agit d'une partie de E et on dit que ses éléments en sont des représentants.

Théorème.– Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E.
1) $\forall x\in E,\ x\in[x]_\sim$ et $[x]_\sim\neq\varnothing$.
2) $\forall (x,x')\in E^2,\ [x]_\sim=[x']_\sim \Leftrightarrow x\sim x'$.
3) $\forall (x,x')\in E^2,\ [x]_\sim=[x']_\sim$ ou bien $[x]_\sim\cap[x']_\sim=\varnothing$.

Théorème.– Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E alors il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telle que : $E=\bigcup_{i\in I}[x_i]_\sim$ et $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j\Rightarrow [x_i]_\sim\cap[x_j]_\sim=\varnothing$.
Une telle famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée un système complet de représentants de $(E,\sim)$.

2.1 Relation de congruence modulo n

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ on pose par définition $a\equiv_n b \Leftrightarrow a-b\in n\mathbb{Z}$.
La relation $\equiv_n$ est appelée congruence modulo n.
Au lieu de $a\equiv_n b$ on note aussi $a\equiv b\,(n)$ et on lit « a est congru à b modulo n ».

Théorème.– La relation $\equiv_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
La classe d'équivalence de l'entier relatif a est égal à l'ensemble $a+n\mathbb{Z}$ et est notée $\bar{a}$.

Théorème.– La famille $(\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{n-1})$ est un système complet de représentants de $(\mathbb{Z},\equiv_n)$.
On a donc : $\mathbb{Z}=\bar{0}\cup\bar{1}\cup\cdots\cup\overline{(n-1)}$ et les parties $\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{(n-1)}$ à sont deux à deux disjointes.

Proposition.– Soient a,b,c,d des entiers relatifs.
Si $a\equiv b\,(n)$ et $c\equiv d\,(n)$ alors $a+c\equiv b+d\,(n)$. (compatibilité avec l'addition)
Si $a\equiv b\,(n)$ et $c\equiv d\,(n)$ alors $ac\equiv bd\,(n)$. (compatibilité avec la multiplication)

2.2 Deux exemples de relation d'équivalence

- Soit $f:E\to F$ une application. Pour $(x,y)\in E^2$ on pose : $x\sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$.
  La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E dite associée à f.
  La classe d'équivalence de $x\in E$ est égal à l'ensemble des éléments de E qui ont la même image que x par f. Autrement dit : $[x]_\sim=\{y\in E \mid f(y)=f(x)\}$.
- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose : $x\equiv_\alpha y \Leftrightarrow y-x\in\alpha\mathbb{Z}$.
  La relation $\equiv_\alpha$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Elle est appelée congruence modulo α.

La classe d'équivalence du réel x est égal à l'ensemble $x+\alpha\mathbb{Z}$.
Au lieu de $x \equiv_a y$ on note aussi $x \equiv y\,(a)$ et on lit « x est congru à y modulo α ».

3. Relation d'ordre (Mpsi)

Définition.– On appelle relation d'ordre sur l'ensemble E toute relation $\leq$ sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive. On appelle ensemble ordonné tout couple $(E,\leq)$ où E est un ensemble et où $\leq$ est une relation d'ordre sur E.

Définition.– Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné.
Deux éléments a et b de E sont dits comparables si et seulement si $a \leq b$ ou $b \leq a$.
Si deux éléments quelconques de E sont comparables on dit que $\leq$ est une relation d'ordre total.
Dans le cas contraire on dit que $\leq$ est une relation d'ordre partiel.

Exemples importants

- Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on pose par définition : $a \leq b \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{R}^+$.
  La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$. Elle est appelée ordre usuel de $\mathbb{R}$.
- Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ on pose par définition : $a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N},\ b = aq$.
  La relation $\mid$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$. Elle est appelée divisibilité sur $\mathbb{N}$.
- Pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ on pose par définition : $a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z},\ b = aq$.
  La relation $\mid$ est réflexive et transitive mais ce n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{Z}$.
  Elle est appelée divisibilité sur $\mathbb{Z}$.
- Soit E un ensemble. Pour $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ on pose par définition : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$.
  La relation $\subset$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$. Elle est appelée inclusion.
  Si E admet au moins deux éléments distincts alors l'inclusion est un ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$.

4. Eléments remarquables dans un ensemble ordonné (Mpsi)

Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

4.1 Plus grand, plus petit élément

Théorème - définition.–

1) Si il existe un élément $b \in A$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in A$ alors cet élément est unique.
   Il est appelé le plus grand élément de A et est noté $\max A$.
2) Si il existe un élément $a \in A$ tel que $a \leq x$ pour tout $x \in A$ alors cet élément est unique.
   Il est appelé le plus petit élément de A et est noté $\min A$.

Remarque : L'existence d'un plus grand élément (resp plus petit élément) pour une partie A n'est pas garantie. Il est à noter qu'en cas d'existence l'élément $\max A$ (resp $\min A$) appartient à A.
Les notions introduites dépendent fondamentalement de l'ensemble ordonné dans lequel on se place.

Exemple :
Dans $(\mathbb{N},\leq)$, $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément et $\min_{(\mathbb{N},\leq)} \mathbb{N} = 0$.
Dans $(\mathbb{N},\mid)$, $\max_{(\mathbb{N},\mid)} \mathbb{N} = 0$ et $\min_{(\mathbb{N},\mid)} \mathbb{N} = 1$.

4.2 Majorant, minorant

Définition.–

1) On dit que A est majorée dans $(E,\leq)$ si et seulement si: $\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$.
   Si ces conditions sont réunies alors on dit que M est un majorant de A dans $(E,\leq)$.
2) On dit A est minorée dans $(E,\leq)$ si et seulement si : $\exists m \in E, \forall x \in A, m \leq x$.
   Si ces conditions sont réunies alors on dit que m est un minorant de la partie A dans $(E,\leq)$.
3) On dit que A est bornée dans $(E,\leq)$ si et seulement si A est majorée et minorée dans $(E,\leq)$.

Remarques :

- ✓ Un majorant ou un minorant n'appartient pas nécessairement à la partie A.
- ✓ L'existence d'un majorant où d'un minorant de la partie A n'est pas garantie.
- ✓ Si la partie A admet un plus grand élément alors $\max A$ appartient à A.
  En cas d'existence, $\max A$ est un majorant de A dans $(E,\leq)$.
- ✓ Si la partie A admet un plus petit élément alors $\min A$ appartient à A.
  En cas d'existence, $\min A$ est un minorant de A dans $(E,\leq)$.

4.3 Borne supérieure, borne inférieure

Théorème - définition.–

1) Si l'ensemble des majorants de A dans $(E,\leq)$ admet un plus petit élément alors cet élément est unique, est appelé borne supérieure de A dans $(E,\leq)$ et est noté $\operatorname{Sup} A$.
   Par définition, et en cas d'existence, $\operatorname{Sup} A$ est le plus petit des majorants de A dans $(E,\leq)$.

2) Si l'ensemble des minorants de A dans $(E,\leq)$ admet un plus grand élément alors cet élément est unique, est appelé borne inférieure de A dans $(E,\leq)$ et est noté $\operatorname{Inf} A$.

Par définition, et en cas d'existence, $\operatorname{Inf} A$ est le plus grand des minorants de A dans $(E,\leq)$.

<u>Remarques</u>

- ✓ Pour une partie A de E, l'existence de $\operatorname{Sup} A$ et de $\operatorname{Inf} A$ n'est pas garantie.
  En cas d'existence, on notera que, contrairement au plus grand élément, $\operatorname{Sup} A$ n'appartient pas nécessairement à A.
- ✓ En cas d'existence, on notera que, contrairement au plus petit élément, $\operatorname{Inf} A$ n'appartient pas nécessairement à A.

5. L'ensemble totalement ordonné des nombres réels (Mpsi)

On note $\leq$ la relation d'ordre usuelle de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. L'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R},\leq)$ possède les propriétés fondamentales suivantes :

Théorème.–

1) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{N}$.
   Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément dans $\mathbb{N}$
2) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{Z}$.
   Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément dans $\mathbb{Z}$.
3) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.
   Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

5.1 Notion d'intervalle (Mpsi)

Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on adopte les définitions suivantes :

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$

$]a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a< x\leq b\}$

$[a,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x< b\}$

$]a,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid a< x< b\}$,

$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$, $[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$

$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$, $]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq b\}$

$]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

Cela nous conduit donc à neuf types d'ensembles.

Définition.– Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de l'un des neuf types ci-dessus.
Un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $-\infty<a\leq b<+\infty$.
Un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]a,b]$ avec $-\infty\leq a<b<+\infty$ ou de la forme $[a,b[$ avec $-\infty<a<b\leq+\infty$.
Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]a,b[$ avec $-\infty\leq a<b\leq+\infty$.

<u>Remarque</u> : Si $a>b$ alors $[a,b]=]a,b]=[a,b[=]a,b[=\varnothing$. L'ensemble vide est donc un intervalle. Un segment, un intervalle semi-ouvert, un intervalle ouvert sont non vides. Si I est un intervalle <u>non vide</u> alors ou bien I est un segment ou bien I est un intervalle semi-ouvert, ou bien I est un intervalle ouvert.

Théorème.–

Si a et b sont des réels tels que $a\leq b$ alors $[a,b]=\{(1-\lambda)a+\lambda b\,,\,\lambda\in[0,1]\}$.

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si : $\forall (x,y)\in A^2,\ [x,y]\subset A$.

<u>Remarques</u> : la propriété 1) n'est valable que si $a\leq b$ car pour $a>b$, $[a,b]=\varnothing$.
La propriété 2) exprime que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si A est « sans trous ».

5.2 Manipulation d'inégalités

Proposition.– Soient a,b,c,d des nombres réels.

1) si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$. (Sommation d'inégalités)
2) si $0\leq a\leq b$ et $0\leq c\leq d$ alors $ac\leq bd$. (Multiplication d'inégalités à termes positifs)
3) si $0<a\leq b$ alors $\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{a}$. (Inversion d'inégalités à termes positifs)
4) si $a\leq b$ et si $c\leq 0$ alors $bc\leq ac$. (Multiplication par un terme négatif)

<u>Remarque</u> : On peut sommer les inégalités mais il n'est pas licite de faire des différences ou des quotients. Quant au produit d'inégalités il n'est légitime que si tous les termes manipulés sont positifs.

Demi droite réelle positive achevée

On pose : $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$. On a donc : $[0,+\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

L'ensemble $[0,+\infty]$ est appelé demi-droite réelle positive achevée et est aussi noté $\overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Ordre dans $\overline{\mathbb{R}^+} = [0,+\infty]$

1.1 Extension à $[0,+\infty]$ de l'ordre réel et propriété fondamentale

On note $\leq$ la relation d'ordre usuelle de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On convient que $x \leq +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Dès lors $([0,+\infty], \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Théorème.– Toute partie A de $[0,+\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0,+\infty]$.

Plus précisément :

1) Si $A = \varnothing$ alors $\mathrm{Sup}_{[0,+\infty]} A = 0$.
2) Si $+\infty \in A$ alors $\mathrm{Sup}_{[0,+\infty]} A = +\infty$.
3) Si A est non vide et si $+\infty \notin A$ alors ou bien A est majorée dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sup}_{[0,+\infty]} A$ est un réel positif ou bien A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sup}_{[0,+\infty]} A = +\infty$.

1.2 Norme infinie d'une application

Dans toute la suite D est un ensemble <u>non vide</u> quelconque et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^D$ l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{K}$.

Définition.– La norme infinie d'une application f de D dans $\mathbb{K}$ est l'élément $\|f\|_\infty$ de $[0,\underline{\underline{+\infty}}]$ défini par : $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]}\{|f(t)|, t \in D\}$.

<u>Remarque</u> : bien noter que $\|f\|_\infty \in [0,\underline{\underline{+\infty}}]$ et que par suite on peut avoir $\|f\|_\infty = +\infty$.

Proposition.– Soit $f : D \to \mathbb{K}$ une application de D dans $\mathbb{K}$.

$\|f\|_\infty < +\infty \Leftrightarrow$ f est bornée sur D.

Proposition.– Soient $(f,g) \in (\mathbb{K}^D)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $\forall t \in D$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$.
2) $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0_{\mathbb{K}^D}$.
3) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.
4) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

<u>Une notation</u> : Soit $f : D \to \mathbb{K}$ une application de D dans $\mathbb{K}$.

Si A est une partie <u>non vide</u> de D alors on pose $\|f\|_\infty^A = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]}\{|f(t)|, t \in A\}$.

1.3 Rayon de convergence d'une suite

On désigne par $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes bornées.

Définition.– Soit $a = (a_n)$ une suite complexe. On pose : $I_a = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n) \in \ell^\infty(\mathbb{C})\}$.

Le rayon de convergence R_a de la suite $a = (a_n)$ est l'élément de $[0,\underline{\underline{+\infty}}]$ défini par : $R_a = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]} I_a$.

Proposition.– Soit $a = (a_n)$ une suite complexe et $r \in \mathbb{R}^+$.

1) Si $r < R_a$ alors la suite $(a_n r^n)$ est bornée et si $(a_n r^n)$ est bornée alors $r \leq R_a$.
2) Si $r > R_a$ alors la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée et si $(a_n r^n)$ n'est pas bornée alors $r \geq R_a$.

Proposition.–

1) Le rayon de convergence de la suite nulle est égal à $+\infty$.
2) Le rayon de convergence d'une suite constante et non nulle est égal à 1.

Proposition.– Soit (a_n) une suite complexe.

1) Si la suite (a_n) est bornée alors $R_a \geq 1$.
2) Si la suite (a_n) est convergente de limite non nulle alors $R_a = 1$.
   Si la suite (a_n) tend vers zéro alors $R_a \geq 1$.

2. Addition et multiplication dans $\overline{\mathbb{R}^+} = [0,+\infty]$

2.1 Extension à $[0,+\infty]$ de l'addition et la multiplication réelles

On étend à l'ensemble $[0,+\infty]$ l'addition et la multiplication dont on dispose sur $\mathbb{R}$ en adoptant les définitions suivantes :

$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$
$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.
$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$.

2.2 Somme d'une famille d'éléments de $[0,+\infty]$

Soit I un ensemble. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.
Pour $K \in \mathcal{P}_f(I)$ on pose $S_K(x) = \sum_{k\in K} x_k$.

Enfin on note : $\mathcal{S}_x = \{S_K(x),\ K \in \mathcal{P}_f(I)\}$.

Définition.– Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.
La somme $\sum_{i\in I} x_i$ de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est l'élément de $[0,+\infty]$ défini par : $\sum_{i\in I} x_i = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]}\,\mathcal{S}_x$

Remarque : La somme $\sum_{i\in I} x_i$ d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est toujours définie mais peut éventuellement valoir $+\infty$.

Proposition.– Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ des familles d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\alpha \in [0,+\infty]$.

1) Si $x_i \le y_i$ pour tout $i \in I$ alors $\sum_{i\in I} x_i \le \sum_{i\in I} y_i$.
2) $\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\sum_{i\in I} \alpha x_i = \alpha \sum_{i\in I} x_i$.
3) Si σ est une bijection de J sur I alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\sigma(j)}$.
4) Si σ est une bijection de I sur I alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$.

Proposition.– Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.

1) Si I est vide alors $\sum_{i\in I} x_i = 0$.
2) Si il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} = +\infty$ alors $\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.
3) Si I est fini non vide alors $I = \{i_1, \cdots, i_p\}$ où les i_k, $k \in [\![1,p]\!]$ sont deux à deux distincts et :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{p} x_{i_k} = x_{i_1} + \cdots + x_{i_p}.$$