Equations différentielles linéaires

Dans tout le chapitre, $(F, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$.

1. Autour de l'application $a \cdot f$

Définition.– Si $a : I \to L(F)$ est une application de I dans $L(F)$ et si $f : I \to F$ est une application de I dans F on note $a \cdot f$ l'application de I dans F définie par :
$\forall t \in I,\ (a \cdot f)(t) = a(t)(f(t))$.

Proposition.– Soient $a : I \to L(F)$ et $f : I \to F$ des applications.

1) $\forall (f_1, f_2) \in (F^I)^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{K}^I)^2,\ a \cdot (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 (a \cdot f_1) + \alpha_2 (a \cdot f_2)$.

2) $\forall (a_1, a_2) \in \left(L(F)^I\right)^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{K}^I)^2,\ (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \cdot f = \alpha_1 (a_1 \cdot f) + \alpha_2 (a_2 \cdot f)$.

Proposition.– Soient $a : I \to L(F)$ et $f : I \to F$ des applications.

1) Si a et f sont continues sur I alors $a \cdot f$ est continue sur I.

2) Si a et f sont dérivables sur I alors $a \cdot f$ est dérivable sur I et $(a \cdot f)' = a' \cdot f + a \cdot f'$.

3) Si a et f sont de classe C^k sur I alors $a \cdot f$ est de classe C^k sur I.

<u>Du coté des matrices</u> : On considère $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit $A \cdot X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par : $(A \cdot X)(t) = A(t)X(t)$.
$A \cdot (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 (A \cdot X_1) + \alpha_2 (A \cdot X_2)$ et $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \cdot X = \alpha_1 (A_1 \cdot X) + \alpha_2 (A_2 \cdot X)$.
Si A et X sont continues sur I alors $A \cdot X$ est continue sur I.

Si A et X sont dérivables sur I alors $A \cdot X$ est dérivable sur I et $(A \cdot X)' = A' \cdot X + A \cdot X'$.

Si A et X sont de classe C^k sur I alors $A \cdot X$ est de classe C^k sur I.

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre

2.1 Notations et définitions

Soient $a : I \to L(F)$ et $b : I \to F$ des applications <u>continues</u> sur I. On leur associe les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :
(L) : $x' = a \cdot x + b$
(H) : $x' = a \cdot x$.
Les applications a et b sont respectivement appelées coefficient et second membre de (L).
L'équation (L) est appelée équation différentielle avec second membre.
L'équation (H) est appelée équation différentielle homogène associée à (L).

Les équations différentielles (L) et (H) sont notées $\begin{cases} (L) : x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ (H) : x' = a(t)(x(t)) \end{cases}$.

Elles sont aussi « abusivement » notées sous la forme : $\begin{cases} (L) : x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ (H) : x' = a(t) \cdot x \end{cases}$

Définition.– On dit qu'une application $f : I \to F$ est solution de l'équation différentielle (L) sur I si et seulement si f est dérivable sur I et si $f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$ pour tout $t \in I$.
On note $S_{I \to F}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \to F$ qui sont solutions de (L) sur I.

<u>Remarques</u> :

✓ Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide contenu dans I. On dit que $f : J \to F$ est solution de (L) sur J ssi f est dérivable sur J et si $f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$ pour tout $t \in J$.

✓ Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur F, $S_{I \to F}(L)$ est simplement noté $S_I(L)$.

✓ Résoudre (L) dans F^I c'est déterminer $S_{I \to F}(L)$.

Proposition.– Toute solution de (L) sur I est de classe C^1 sur I. Si les applications a et b sont de classe C^k sur I alors toute solution de (L) sur I est de classe C^{k+1} sur I.

2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz et structure algébrique des solutions

Théorème.– (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a : I \to L(F)$ et $b : I \to F$ des applications <u>continues</u> sur I et (L) : $x' = a \cdot x + b$.
Pour tout couple $(t_0, x_0) \in I \times F$ il existe une unique solution f de (L) sur I vérifiant $f(t_0) = x_0$.

Théorème.– (Structure de l'ensemble des solutions)
Soient $a : I \to L(F)$ et $b : I \to F$ des applications <u>continues</u> sur I et (L) : $x' = a \cdot x + b$ l'équation différentielle linéaire associée. On note (H) l'équation homogène associée à (L).

1) $S_{I\to F}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $D(I,F)$ de dimension égale à celle de F.
Si $t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0} : S_{I\to F}(H) \to F$ définie par $\Phi_{t_0}(h) = h(t_0)$ est un isomorphisme linéaire de $S_{I\to F}(H)$ sur F.

2) $S_{I\to F}(L)$ est un sous espace affine de $D(I,F)$ de direction $S_{I\to F}(H)$. En particulier $S_{I\to F}(L)$ est non vide et si f_0 est une solution de (L) sur I alors $S_{I\to F}(L) = f_0 + S_{I\to F}(H)$.

Terminologie : une base de $S_{I\to F}(H)$ est appelée un système fondamental de solutions de (H).

2.3 Notion de Wronskien

Soient $a : I \to L(F)$ et $b : I \to F$ des applications **continues** sur I et (L): $x' = a\cdot x + b$ l'équation différentielle linéaire associée. On note (H) l'équation homogène associée à (L).

Définition.– Soient $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de F et $(h_1,\cdots,h_n) \in (S_{I\to F}(H))^n$.
L'application à valeurs scalaires $W : I \to \mathbb{K}$ définie par $W(t) = \det_B(h_1(t),\cdots,h_n(t))$ est appelée wronskien de $(h_1,\cdots,h_n)$ dans la base B.

Théorème.– Soient $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de F et $(h_1,\cdots,h_n) \in (S_{I\to F}(H))^n$.
On note W le wronskien de $(h_1,\cdots,h_n)$ dans B. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) $(h_1,\cdots,h_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $S_{I\to F}(H)$.
2) Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.
3) Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

2.4 Détermination d'une solution « particulière » de (L) sur I

Soient $a : I \to L(F)$ et $b : I \to F$ des applications **continues** sur I et (L): $x' = a\cdot x + b$ l'équation différentielle linéaire associée. On note (H) l'équation homogène associée à (L).
$S_{I\to F}(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n = \dim F$.
Considérons une base $(h_1,\cdots,h_n)$ de $S_{I\to F}(H)$.

Il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant $b = \sum_{k=1}^{n}\beta_k h_k$.

Si $B = (e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E et si W est le wronskien de $(h_1,\cdots,h_n)$ dans la base B alors $\forall k \in [\![1,n]\!], \forall t \in I,\ \beta_k(t) = \frac{1}{W(t)}\det_B(h_1(t),\cdots,h_{k-1}(t),b(t),h_{k+1}(t),\cdots,h_n(t))$.

On considère $\alpha_1,\cdots,\alpha_n : I \to \mathbb{K}$ dérivables sur I et on pose : $f_0 = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k$.

Il est possible de choisir $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ de sorte que f_0 soit une solution de (L) sur I. En effet :

$$f_0' = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k' h_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k' = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k' h_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k (a\cdot h_k) \quad \text{et} \quad a\cdot f_0 = a\cdot\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(a\cdot h_k).$$

Par suite : $f_0 \in S_{I\to F}(L) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\alpha_k' h_k = \sum_{k=1}^{n}\beta_k h_k$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on décide de prendre pour application α_k une primitive de β_k sur I.

Dès lors $f_0 = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k$ est une solution de (L) sur I.

Remarque : La méthode exposée ci-dessus pour déterminer une solution « particulière » de (L) sur I est appelée méthode de variation des constantes. (oxymoron goguenard et primesautier…)

2.5 Système différentiel

Soient $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ des applications continues sur l'intervalle I.

On leur associe les systèmes différentiels $\begin{cases}(L): X' = A\cdot X + B \\ (H): X' = A\cdot X\end{cases}$.

Les applications A et B sont respectivement appelées coefficient et second membre de (L).
(H) est le système différentiel homogène associé à (L).

Définition.– On dit qu'une application $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ est solution du système différentiel (L) sur l'intervalle I si et seulement si X est dérivable sur I et si $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$. On note $S_{I\to M_{n,1}(\mathbb{K})}(L)$, ou simplement $S_I(L)$ lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ qui sont solutions de (L) sur I.

Interprétation en terme d'équation différentielle d'un système différentiel
Un système différentiel peut se voir comme une équation différentielle linéaire du premier ordre sur l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Par conséquent, tout ce qui a été vu précédemment pour les équations différentielles linéaires du premier ordre sur un espace vectoriel F de dimension finie $n \geq 1$ s'applique aux systèmes différentiels. En particulier :

Théorème.–
1) Si $(t_0, X_0) \in I \times M_{n,1}(\mathbb{K})$ alors il existe une unique solution X de (L) sur I vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$. (Cauchy-Lipschitz)
2) $S_I(H)$ est un sous espace vectoriel de $D(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension n et $S_I(L)$ est un sous espace affine de $D(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$ de direction $S_I(H)$.

Définition.– Soient $\mathcal{B}$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $(H_1,\cdots,H_n) \in (S_I(H))^n$. L'application $W : I \to \mathbb{K}$ définie par $W(t) = \det_{\mathcal{B}}(H_1(t),\cdots,H_n(t))$ est appelée wronskien de $(H_1,\cdots,H_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

<u>Interprétation en terme de système d'équations d'un système différentiel</u>

$A : I \to M_n(\mathbb{K})$ est une application continue sur I. Il existe donc n^2 applications continues $a_{ij} : I \to \mathbb{K}$ telles que $A = (a_{ij})$ c'est-à-dire telles que $A(t) = (a_{ij}(t))$ pour tout $t \in I$.

$B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application continue sur I. Il existe donc n applications continues $b_i : I \to \mathbb{K}$ telles que $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que $B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$ pour tout $t \in I$.

Considérons $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur I. Il existe donc n applications dérivables $x_j : I \to \mathbb{K}$ telles que $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ pour tout $t \in I$.

Avec ces notations, X est solution du système différentiel (L) sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots\cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i'(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + \cdots\cdots + a_{in}(t)x_n(t) + b_i(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots\cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad \text{pour tout } t \in I.$$

3. Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant

Soient a un endomorphisme de F et $b : I \to F$ une application continue sur I. On leur associe les équations différentielles suivantes : $\begin{cases} (L) : \ x' = a \circ x + b \\ (H) : \ x' = a \circ x \end{cases}$.

L'équation (H) est appelée équation différentielle homogène associée à (L).

Les équations différentielles (L) et (H) sont aussi notées : $\begin{cases} (L) : x'(t) = a(x(t)) + b(t) \\ (H) : x'(t) = a(x(t)) \end{cases}$.

On les note aussi « abusivement » sous la forme : $\begin{cases} (L) : x' = ax + b(t) \\ (H) : x' = ax \end{cases}$.

On dispose de $e_a : \mathbb{R} \to L(F)$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ e_a(t) = e^{ta}$. On rappelle que e_a est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R},\ e_a'(t) = a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a$.

Définition.– On dit qu'une application $f : I \to F$ est solution de l'équation différentielle (L) sur I si et seulement si f est dérivable sur I et si $f'(t) = a(f(t)) + b(t)$ pour tout $t \in I$. On note $S_{I\to F}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \to F$ qui sont solutions de (L) sur I.

<u>Remarque</u> : Notons encore a l'application de I dans $L(F)$ constante égale à l'endomorphisme a. On a donc $a(t) = a$ pour tout $t \in I$. Dans ces conditions l'équation différentielle $(L) : \ x' = a \circ x + b$ n'est rien d'autre que l'équation différentielle linéaire du premier ordre $x' = a \cdot x + b$. Tout ce qui a été vu dans le paragraphe précédent s'applique donc intégralement en prenant pour application $a : I \to L(F)$ l'application constante égale à l'endomorphisme a.

3.1 Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$

Théorème.– Soient $a \in L(F)$ et $(H) : \ x' = a \circ x$ l'équation différentielle associée.

1) Soient $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times F$ et $h_0 : \mathbb{R} \to F$ l'application définie par : $h_0(t) = \underbrace{e^{(t-t_0)a}}_{\text{endo}}(x_0)$.
   h_0 est l'unique solution de (H) sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur x_0 en t_0.
2) Soient $x_1,\cdots,x_n$ n vecteurs de F. Pour $k \in [1,n]$ on définit $h_k : \mathbb{R} \to F$ par : $h_k(t) = e^{ta}(x_k)$. L'application h_k est l'unique solution de (H) sur $\mathbb{R}$ qui vaut x_k en 0. $(h_1,\cdots,h_n)$ est une base de $S_{\mathbb{R}\to F}(H)$ si et seulement si $(x_1,\cdots,x_n)$ est une base de F.

Théorème.– Soient $a \in L(F)$ et $(H) : \ x' = a \circ x$ l'équation différentielle associée.

1) $S_{\mathbb{R}\to F}(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à celle de F.
2) $S_{\mathbb{R}\to F}(H) = \{(t \to e^{ta}(x)),\ x \in F\}$.
3) Si $B = (e_1,\cdots,e_n)$ est une base de F et si $h_1,\cdots,h_n : \mathbb{R} \to F$ sont définies par $h_k(t) = e^{ta}(e_k)$ alors $(h_1,\cdots,h_n)$ est une base de $S_{\mathbb{R}\to F}(H)$.

3.2 Détermination d'une solution « particulière » de (L) sur I

Soient a un endomorphisme de F, $b : I \to F$ une application continue sur I et $(L) : \ x' = a \circ x + b$ l'équation différentielle associée.

On considère une application dérivable $\lambda : I \to F$ et on pose $f_0 = e_a \cdot \lambda$. $f_0 : I \to F$ est définie par : $\forall t \in I,\ f_0(t) = (e_a \cdot \lambda)(t) = e_a(t)(\lambda(t))$.

Il est possible de choisir l'application λ de sorte que $f_0 \in S_{I\to F}(L)$. En effet :

$f_0' = e_a' \cdot \lambda + e_a \cdot \lambda' = (a \circ e_a) \cdot \lambda + e_a \cdot \lambda'$ et $a \circ f_0 = a \circ (e_a \cdot \lambda) = (a \circ e_a) \cdot \lambda$.

Par suite : $f_0 \in S_{I\to F}(L) \Leftrightarrow e_a \cdot \lambda' = b \Leftrightarrow \lambda' = e_{-a} \cdot b$.

On décide de prendre pour application λ une primitive sur I de $e_{-a} \cdot b$.

Dès lors $f_0 = e_a \cdot \lambda$ est une solution de (L) sur I.

Théorème.– Soient $a \in L(F)$, $b \in C^0(I,F)$ et $(L) : x' = a \circ x + b$ l'équation différentielle associée. On considère $(t_0, x_0) \in I \times F$ et on note f l'unique solution de (L) sur I qui prend la valeur x_0 en t_0. Dès lors : $\forall t \in I,\ f(t) = e_a(t - t_0)(x_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t-s)(b(s))\,ds$.

3.3 Système différentiel à coefficient constant

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ une application continue sur I.

On leur associe les systèmes différentiels suivants : $\begin{cases} (L) : X' = AX + B \\ (H) : X' = AX \end{cases}$.

Ils sont aussi notés sous la forme : $(L) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t) \\ (H) : X'(t) = AX(t) \end{cases}$.

On dispose de l'application $e_A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ e_A(t) = e^{tA}$.
On rappelle que l'application e_A est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R},\ e_A'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Définition.– On dit qu'une application $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ est solution du système différentiel (L) sur I si et seulement si X est dérivable sur I et si $\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t)$.
On note $S_{I \to M_{n,1}(\mathbb{K})}(L)$, ou simplement $S_I(L)$, l'ensemble des applications $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ qui sont solutions de (L) sur I.

Théorème.–

1) Soient $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $H_0 : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $H_0(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$.
L'application H_0 est l'unique solution de (H) sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur X_0 en t_0.
2) Soient $X_1, \cdots, X_n$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $H_1, \cdots, H_n : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définies par : $H_k(t) = e^{tA} X_k$.
L'application H_k est l'unique solution de (H) sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur X_k en 0.
$(H_1, \cdots, H_n)$ est une base de $S_{\mathbb{R}}(H)$ si et seulement si $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
3) $S_{\mathbb{R}}(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $S_{\mathbb{R}}(H) = \{(t \to e^{tA}X), X \in M_{n,1}(\mathbb{K})\}$.
4) Soient $(t_0, X_0) \in I \times F$ et $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ l'unique solution de (L) qui prend la valeur X_0 en t_0. Pour tout $t \in I$: $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\,ds$.

<u>Détermination d'une solution particulière de (L) sur I :</u>
Soit $\Lambda : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ une application dérivable sur I. On pose $X_0 = e_A \cdot \Lambda$.
L'application $X_0 : I \to F$ est définie par : $\forall t \in I,\ X_0(t) = (e_A \cdot \Lambda)(t) = e^{tA}\Lambda(t)$.
Il est possible de choisir l'application Λ de sorte que X_0 soit une solution de (L) sur I.

En effet : $X_0' = e_A' \cdot \Lambda + e_A \cdot \Lambda' = (Ae_A) \cdot \Lambda + e_A \cdot \Lambda'$ et $AX_0 = A(e_A \cdot \Lambda) = (Ae_A) \cdot \Lambda$.
Par suite : $X_0 \in S_I(L) \Leftrightarrow e_A \cdot \Lambda' = B \Leftrightarrow \Lambda' = e_{-A} \cdot B$.
On décide de prendre pour application λ une primitive sur I de $e_{-A} \cdot B$.
Dès lors $X_0 = e_A \cdot \Lambda$ est une solution de (L) sur I.

<u>Interprétation en terme de système d'équations d'un SD à coefficient constant</u>
$A \in M_n(\mathbb{K})$. Il existe donc n^2 scalaires a_{ij} tels que $A = (a_{ij})$.
$B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application continue sur I. Il existe donc n applications continues $b_i : I \to \mathbb{K}$ telles que $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que $B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$ pour tout $t \in I$.

Considérons $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur I. Il existe donc n applications dérivables $x_j : I \to \mathbb{K}$ telles que $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ pour tout $t \in I$.

Avec ces notations, X est solution du système différentiel (L) sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots\cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i'(t) = a_{i1}x_1(t) + \cdots\cdots + a_{in}x_n(t) + b_i(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots\cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad \text{pour tout } t \in I.$$

4. Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

Soient $a_1, \cdots, a_n, b : I \to \mathbb{K}$ des applications **<u>continues</u>** sur I. On leur associe les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n :

$$\begin{cases} (L) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b \\ (H) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \end{cases}$$

(L) est appelée équation différentielle avec second membre. (H) est appelée équation différentielle homogène associée à (L). Les équations (L) et (H) sont aussi notées sous la forme :
$(L) : y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + a_2(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t)$.
$(H) : y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + a_2(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0$.
On les note aussi « abusivement » sous la forme :
$(L) : y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t)$.
$(H) : y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$.

Définition.– On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (L) sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}(t) + a_1(t)f^{(n-1)}(t) + + \cdots + a_n(t)f(t) = b(t)$ pour tout $t \in I$. On note $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{K}$ qui sont solutions de (L) sur I.

Proposition.– Toute solution de (L) sur l'intervalle I est de classe C^n sur I. Si les applications $a_1,\cdots,a_n$ et b sont de classe C^k sur I alors toute solution de (L) sur I est de classe C^{n+k} sur I.

Interprétation en terme de système différentiel

Soit $y : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivable sur I. On lui associe $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par : $X = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$.

On a donc $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$ pour tout $t \in I$. X est dérivable sur I et $X' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix}$.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b \Leftrightarrow \begin{cases} y' = y' \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \\ y^{(n)} = -\left(a_n y + \cdots + a_1 y^{(n-1)}\right) + b \end{cases}.$$ On en déduit que :

$$y \in S_{I\to\mathbb{K}} \Leftrightarrow X' = A\cdot X + B \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Il est à noter que $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des applications.

$$\text{Pour } t \in I : A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

La résolution de (L) sur I est équivalente à la résolution sur I du système différentiel $X' = A\cdot X + B$. Cette remarque permet de ramener l'étude des équations différentielles scalaires d'ordre n à celle des systèmes différentiels et donc à celle des équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

Théorème.– (Cauchy-Lipschitz)

On considère $a_1,\cdots,a_n,b : I \to \mathbb{K}$ des applications **continues** sur l'intervalle I et $(L) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b$ l'équation différentielle associée.

Pour tout $(t_0,\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^{n-1}$ il existe une unique solution f de (L) sur I vérifiant les conditions initiales : $f(t_0) = \alpha_0$, $f'(t_0) = \alpha_1$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}$.

Théorème.– (Structure de l'ensemble des solutions)

On considère $a_1,\cdots,a_n,b : I \to \mathbb{K}$ des applications **continues** sur l'intervalle I et $(L) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b$ l'équation différentielle associée.

On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (L).

1) $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ de dimension n.
2) Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0} : S_{I\to\mathbb{K}}(H) \to \mathbb{K}^n$ définie par
$\Phi_{t_0}(h) = \left(h(t_0),\cdots,h^{(n-1)}(t_0)\right)$ est un isomorphisme linéaire de $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$ sur $\mathbb{K}^n$.
3) $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est un sous espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$. En particulier $S_{I\to\mathbb{K}}(L)$ est non vide et si f_0 est une solution de (L) sur I alors $S_{I\to\mathbb{K}}(L) = f_0 + S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.

Définition.– Soit $(h_1,\cdots,h_n)$ une famille de n éléments de $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$. On appelle wronskien de $(h_1,\cdots,h_n)$ l'application $W : I \to \mathbb{K}$ définie par : $W(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) & \cdots & \cdots & h_n(t) \\ h_1'(t) & & & h_n'(t) \\ \vdots & & & \\ h_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & h_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$.

Théorème.– Soient $(h_1,\cdots,h_n) \in \left(S_{I\to\mathbb{K}}(H)\right)^n$ et W le wronskien associé.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $(h_1,\cdots,h_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $S_{I\to\mathbb{K}}(H)$.
2) Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.
3) Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

5. Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 : quelques situations

5.1 Réduction à une équation différentielle linéaire d'ordre un dans un cas favorable

Soient $a,b,c : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur I et $(L) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 associée. On note (H) l'équation homogène associée et on suppose que l'on dispose d'une solution $h : I \to \mathbb{K}$ de (H) sur I qui ne s'annule pas sur I. Dans ces conditions la résolution de (L) sur I peut se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1. La méthode est la suivante :

On considère $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I et on pose : $z = \frac{y}{h}$.

$y = hz$ puis $y' = h'z + hz'$ et $y'' = h''z + 2h'z' + hz''$.

Il vient : $y \in S_{I\to\mathbb{K}}(L) \Leftrightarrow z' \in S_{I\to\mathbb{K}}(E)$ avec $(E) : u' + \left(a + 2\frac{h'}{h}\right)u = \frac{c}{h}$.

5.2 Exemples de mise en œuvre de la méthode de variation des constantes

Soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur I et $(L) : y'' + ay' + by = c$ l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 associée. On note (H) l'équation homogène associée et on désigne par (φ, ψ) un système fondamental de solutions de (H).

Il est possible d'exprimer les solutions de (L) sur I à l'aide de φ, ψ et d'une intégrale.

6. Pour aller plus loin

6.1 Complément sur le wronskien

Proposition.– Soient $a : I \to L(F)$ continue sur I et $(H) : x' = a \cdot x$ l'équation différentielle linéaire homogène associée. Soient $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $(h_1, \cdots, h_n) \in (S_{I\to F}(H))^n$.

On note W le wronskien de $(h_1, \cdots, h_n)$ dans la base B.

1) $W \in C^1(I, F)$ et $\forall t \in I$, $W'(t) = \mathrm{Tr}(a(t))W(t)$.

2) Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $t \in I$ on a : $W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(a(s))\,ds\right)$.

Proposition.– Soient $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ continue sur I et $(H) : X' = A \cdot X$ le système différentiel homogène associé. Soient $\mathcal{B}$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $(H_1, \cdots, H_n) \in (S_I(H))^n$.

On dispose du wronskien $W : I \to \mathbb{K}$ défini par : $W(t) = \det_{\mathcal{B}}(H_1(t), \cdots, H_n(t))$.

1) $W \in C^1(I, \mathbb{K})$ et on a $W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))W(t)$.

2) Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $t \in I$ on a : $W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\,ds\right)$.

Proposition.– Soient $a \in L(F)$ et $(H) : x' = a \circ x$ l'équation différentielle homogène à coefficient constant associée. Soient $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $h_1, \cdots, h_n : \mathbb{R} \to F$ définies par $h_k(t) = e^{ta}(e_k)$. Le wronskien W de $(h_1, \cdots, h_n)$ dans B vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = e^{t(\mathrm{Tr}\,a)}$.

Proposition.– Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $(H) : X' = AX$ le système différentiel homogène à coefficient constant associé. Soient $B = (E_1, \cdots, E_n)$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $H_1, \cdots, H_n : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définies par : $H_k(t) = e^{tA}E_k$. Le wronskien W de $(H_1, \cdots, H_n)$ dans B vérifie :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = e^{t(\mathrm{Tr}\,A)}$.

Proposition.– Soient $a_1, \cdots, a_n, b : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur l'intervalle I et $(H) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$ l'équation différentielle homogène associée. Soient $(h_1, \cdots, h_n) \in (S_{I\to\mathbb{K}}(H))^n$ et W le wronskien associé.

1) $\forall t \in I$, $W'(t) = -a_1(t)W(t)$.

2) Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $t \in I$ on a : $W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right)$.

6.2 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles (HP)

Proposition.– Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ des applications continues sur I et $(H) : y'' + py' + qy = 0$

1) Si (φ, ψ) est une base de $S_{I\to\mathbb{R}}(H)$ alors φ et ψ n'ont pas de zéros en commun.

2) Les zéros d'une solution non nulle de (H) sur I sont isolés. Autrement dit :
si h est une solution non nulle de (H) sur I et si t_0 est un zéro de h alors il existe $\alpha > 0$ tel que h ne s'annule pas dans $([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \cap I) \setminus \{t_0\}$.

3) Si I est un segment alors une solution non nulle de (H) sur I admet un nombre fini de zéros.

Proposition.– Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue positive et distincte de l'application nulle.

Toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + qy = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Toute solution non nulle sur $\mathbb{R}$ de $y'' - qy = 0$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Proposition.– Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

L'équation différentielle $y'' + qy = 0$ admet au moins une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.