3



# Différentiabilité des fonctions de E dans F

## 1. Problématique de la généralisation de la notion de dérivabilité

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soient $(E,\| \|_E)$, $(F,\| \|_F)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $D$ une partie de $E$.

### 1.1 Premiere situation

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est une application de $I$ dans $\mathbb{K}$ alors on définit la notion de dérivabilité en un point $a \in I$ via le taux d'accroissement $T_a(t) = \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$. Dans un tel cas de figure $T_a(t)$ est un quotient de scalaires. Cette notion est directement transférable aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $F$.

### 1.2 Seconde situation

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ est une application de $I$ dans $F$ alors on définit la notion de dérivabilité au point $a \in I$ via le taux d'accroissement $T_a(t) = \dfrac{1}{t-a}\big(f(t)-f(a)\big)$. Cette fois ci, $T_a(t)$ est le produit externe d'un scalaire par un vecteur.

### 1.3 Troisième situation

Si $f : D \subset E \to F$ est une application de $D$ dans $F$ alors la généralisation de la notion de dérivée en un point est bien plus problématique. En effet : pour $(a,t) \in D^2$ l'accroissement $t-a$ est un vecteur de $E$ alors que l'accroissement $f(t)-f(a)$ est un vecteur de $F$. Il n'est alors plus si évident de les comparer. La définition de la dérivabilité en un point n'étant pas directement transférable aux fonctions de $E$ dans $F$, nous allons en donner une caractérisation qui elle le sera.

**Proposition.–** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(F,\| \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une application et $a \in I$.
$f$ est dérivable au point $a$ si et seulement si il existe une application linéaire $u_a$ de $\mathbb{R}$ dans $F$ telle que : $\displaystyle\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-u_a(h)\|_F}{|h|} = 0$.

Dans ces conditions l'application linéaire $u_a$ est unique et est définie par $u_a(h) = hf'(a)$.

$u_a(h) = hf'(a) = df(a)(h)$

## 2. Notion d'application différentiable

Soient $(E,\| \|_E)$ et $(F,\| \|_F)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $U$ un <u>ouvert</u> de $E$.

**Théorème - Définition.–** Soit $f : U \subset E \to F$ une application et $a \in U$.

1) $f$ est différentiable au point $a$ si et seulement si il existe une application linéaire $u_a$ de $E$ dans $F$ telle que $\displaystyle\lim_{h\to 0_E, h\neq 0_E} \frac{\|f(a+h)-f(a)-u_a(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.\ (*)$

2) Si il existe une application linéaire $u_a$ de $E$ dans $F$ vérifiant $(*)$ alors elle est unique, est notée $df(a)$ et est appelée différentielle de $f$ au point $a$ ou encore application linéaire tangente à $f$ au point $a$.

<u>Remarque</u> : C'est le fait que $U$ soit un ouvert de $E$ qui assure, en cas d'existence, l'unicité de $u_a \in L(E,F)$ vérifiant $(*)$. Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable au point $a$ alors $df(a)$ est l'unique application linéaire continue de $E$ dans $F$ vérifiant $\displaystyle\lim_{h\to 0_E, h\neq 0_E} \frac{\|f(a+h)-f(a)-df(a)(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$.

**Théorème.–** Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable au point $a \in U$ alors on a les propriétés :

1) $\forall h \in E,\ df(a)(h) = \displaystyle\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{1}{t}\big[f(a+th)-f(a)\big]$.

2) Au voisinage de $0_E$ pour $h$ on a : $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|_E)$.

3) $f$ est continue au point $a$.

**Définition.–** On dit que $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur l'ouvert $U$ si et seulement si $f$ est différentiable en tout point $a$ de $U$. Dans ces conditions on dispose de l'application $df : U \subset E \to L(E,F)$ qui à tout point $a$ de $U$ associe la différentielle de $f$ au point $a$ alias $df(a)$. L'application $df$ est appelée différentielle de $f$.

## 3. Notion de dérivée directionnelle suivant un vecteur

Soient $(E,\| \|_E)$ et $(F,\| \|_F)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $U$ un <u>ouvert</u> de $E$.

**Définition.–** Soient $f : U \subset E \to F$, $h \in E$ et $a \in U$. On dit que $f$ admet une dérivée directionnelle suivant $h$ au point $a$ si et seulement si le vecteur $\frac{1}{t}[f(a+th) - f(a)]$ admet une limite dans $(F, \| \ \|_F)$ lorsque $t \to 0, t \neq 0$. Si tel est le cas, cette limite est notée $D_h f(a)$ et est appelée dérivée directionnelle de $f$ suivant $h$ au point $a$.

**Théorème.–** Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable au point $a \in U$ alors $f$ admet une dérivée directionnelle au point $a$ suivant tout vecteur $h$ et on a : $df(a)(h) = D_h f(a)$.

Remarque : La réciproque est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $f$ admet une dérivée suivant $h$ au point $(0,0)$ et $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

**Définition.–** Etant donné un vecteur $h$ de $E$, on dit que $f : U \subset E \to F$ admet une dérivée directionnelle suivant $h$ sur l'ouvert $U$ si et seulement si $f$ admet une dérivée directionnelle suivant $h$ en tout point $a$ de $U$. Dans ces conditions on dispose de l'application $D_h f : U \subset E \to F$ qui à tout point $a \in U$ associe le vecteur $D_h f(a)$. L'application $D_h f$ est appelée dérivée directionnelle suivant $h$ de $f$. Comme $f$, il s'agit d'une application de $U \subset E$ dans $F$ qui à tout point $a$ de $U$ associe un vecteur de $F$.

**Théorème.–** Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur l'ouvert $U$ alors pour tout $h \in E$, $f$ admet une dérivée directionnelle sur $U$ suivant tout vecteur $h$ et on a :
$\forall a \in U, \forall h \in E, \ D_h f(a) = df(a)(h)$.

## 4. Exemples fondamentaux d'applications différentiables

Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ et $(G, \| \ \|_G)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

**Proposition.–** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une application et $a \in I$.
$f$ est différentiable au point $a$ si et seulement si $f$ est dérivable au point $a$.
Dans ces conditions on a les formules : $\forall h \in \mathbb{R}, \ df(a)(h) = hf'(a)$ et $f'(a) = df(a)(1)$.

**Proposition.–** Si $u \in L(E,F)$ alors $u$ est différentiable sur $E$ et on a : $\forall a \in E, \ du(a) = u$.

$u(a+h) = u(a) + u(h)$

Donc $du(a) = u$

**Proposition.–** Si $f : U \subset E \to F$ est une application constante sur l'ouvert $U$ alors $f$ est différentiable sur $U$ et sa différentielle est nulle.

**Proposition.–** Si $B$ est une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$ alors $B$ est différentiable sur $E \times F$ et on a : $\forall (a,b) \in E \times F, \ \forall (h,k) \in E \times F, \ dB(a,b)(h,k) = B(h,b) + B(a,k)$.

$B(a+h, b+k) = B(a,b) + B(h,b) + B(a,k) + B(h,k)$ $\quad B(h,k) = \|h\| \|k\| B\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{k}{\|k\|}\right)$

$\leq \|h,k\|^2 \times k$ cst dans la boule unité

**Proposition.–** Soit $(E, (\bullet|\bullet))$ un espace euclidien.
Le produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ est différentiable sur $E \times E$ et pour $(a,b) \in E^2$ et $(h,k) \in E^2$ on a :
$d(\bullet|\bullet)(a,b)(h,k) = (h \mid b) + (a \mid k)$.

$(a+h \mid b+k) = (a \mid b+k) + (h \mid b+k)$
$= (a|b) + (a|k) + (h|b) + \underbrace{(h|k)}_{= o(\|h\|_E)}$ (C-S)

## 5. Opérations sur les applications différentiables

Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$, $(G, \| \ \|_G)$ et $(H, \| \ \|_G)$ des $\mathbb{R}$-espaces normés de dimension finie.

**Proposition.–** Soient $U$ un ouvert de $E$ et $a \in U$. On considère $f,g : U \subset E \to F$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
1) Si $f$ et $g$ sont différentiables au point $a$ alors $\alpha f + \beta g$ est différentiable au point $a$ et $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$.
2) Si $f$ et $g$ sont différentiables sur $U$ alors $\alpha f + \beta g$ est différentiable sur $U$ et $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$.

**Théorème.–** Soient $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$ et $a \in U$.
On considère $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$.
1) Si $f$ est différentiable au point $a$ et si $g$ est différentiable au point $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable au point $a$ et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.
2) Si $f$ est différentiable sur $U$ et $g$ est différentiable sur $V$ alors $g \circ f$ est différentiable sur $U$.

**Proposition.–** Soient $U$ un ouvert de $E$ et $a \in U$.
On considère $f : U \subset E \to F$, $g : U \subset E \to G$ et $B : F \times G \to H$ bilinéaire.
1) Si $f$ et $g$ sont différentiables au point $a$ alors $B(f,g)$ est différentiable au point $a$ et $\forall h \in E, \ d(B(f,g))(a)(h) = B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h))$.
2) Si $f$ et $g$ sont différentiables sur $U$ alors $B(f,g)$ est différentiable sur $U$.

**Proposition.–** Soient $(E,(\bullet|\bullet))$ un espace euclidien, $a \in E$ et $h \in E$.

1) Si $f,g : E \to E$ sont des applications différentiables sur $E$ alors $(f \mid g)$ est différentiable sur $E$ et $d((f \mid g))(a)(h) = (df(a)(h) \mid g(a)) + (f(a) \mid dg(a)(h))$.
2) L'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = \|x\|^2$ est différentiable sur $E$ et : $dq(a)(h) = 2(a \mid h)$.
3) L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est différentiable sue $E \setminus \{0_E\}$ et $d(\| \ \|)(a)(h) = \frac{(a|h)}{\|a\|}$.

**Théorème.–** (Dérivée le long d'un arc)

Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $U$ un <u>ouvert</u> de $E$.

Soient $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ et $f : U \subset E \to F$ tels que $\gamma(I) \subset U$.

1) Si $\gamma$ est dérivable au point $t$ et si $f$ est différentiable au point $\gamma(t)$ alors $f \circ \gamma$ est dérivable au point $t$ et $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$.
2) Si $\gamma$ est dérivable sur $I$ et si $f$ est différentiable sur $U$ alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur $I$ et $(f \circ \gamma)' = (df \circ \gamma) \cdot \gamma'$.

**Proposition.–** Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$, $f : U \subset E \to F$, $a \in I$ et $h \in E$.

Il existe $\delta_a > 0$ tel que : $\forall t \in [-\delta_a, \delta_a]$, $a + th \in U$.

On dispose donc de $\varphi_a : [-\delta, \delta] \to F$ définie par $\varphi_a(t) = f(a + th)$.

Si $f$ est différentiable au point $a$ alors $\varphi_a$ est dérivable en $0$ et $df(a)(h) = \varphi_a'(0)$.

# La classe $C^1$ pour les fonctions de E dans $\mathbb{R}$

Tout ce qui a été vu pour les fonctions de E dans F, où $(E,\|\ \|_E)$ $(F,\|\ \|_F)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie s'applique bien sûr intégralement.
Dans tout ce qui suit, $(E,\|\ \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie $p \geq 1$.

## 1. Différentielle en un point d'une fonction de E dans $\mathbb{R}$

### 1.1 Le cas général

**Proposition.–** Soient U un ouvert de E, $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable au point $a \in U$.

$df(a) \in E^*$ et si $B = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E alors $df(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) e_j^*$.

**Proposition.–** Soient $(E,(\bullet|\bullet))$ un espace euclidien,
Soient U un ouvert de E et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable au point $a \in U$.
1) Il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ de E vérifiant $df(a) = (\nabla f(a) \mid \cdot)$ c'est-à-dire tel que : $\forall\, h \in E,\ df(a)(h) = (\nabla f(a) \mid h)$. Le vecteur $\nabla f(a)$ est appelé gradient de f au point a

2) Si $B = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormale de E alors $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) e_j$.

### 1.2 Le cas particulier fondamental

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Pour $j \in [\![1,p]\!]$ on pose : $dx_j = \varepsilon_j^*$.
La famille de formes linéaires $(dx_1, \cdots, dx_p)$ est une base de $(\mathbb{R}^p)^*$.
On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire usuel à savoir celui qui rend la base $\varepsilon$ orthonormale.

**Proposition.–** Si $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est différentiable au point a alors on a les formules suivantes :

$$df(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j \quad \text{et} \quad \nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \varepsilon_j.$$

On suppose désormais f différentiable sur U. On dispose donc de $df : U \subset \mathbb{R}^p \to (\mathbb{R}^p)^*$. La différentielle de f est une forme différentielle sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ c'est-à-dire une application de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans le dual de $(\mathbb{R}^p)^*$. Pour $j \in [\![1,p]\!]$, on note $dx_j$ la forme différentielle constante égale à la forme linéaire $dx_j$. L'application f est un champ de scalaire sur U c'est-à-dire une application qui à tout point a de U associe un réel. L'application $\nabla f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est un champ de vecteurs sur U c'est-à-dire une application qui à tout point a de U associe un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Pour $j \in [\![1,p]\!]$, on note $\varepsilon_j$ le champ de vecteurs constant égal au vecteur $\varepsilon_j$.

**Proposition.–** Si $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est différentiable sur U alors :

$$df = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad \text{et} \quad \nabla f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon_j.$$

## 2. Notion d'extremum local

**Définition.–** Soient D une partie de E, $a \in D$ et $f : D \subset E \to \mathbb{R}$ une application.
On dit que f admet un maximum absolu au point a si et seulement si : $\forall\, x \in U,\ f(x) \leq f(a)$.
On dit que f admet un minimum absolu au point a si et seulement si : $\forall\, x \in D,\ f(a) \leq f(x)$.

**Définition.–** Soient D une partie de E, $a \in D$ et $f : D \subset E \to \mathbb{R}$ une application.
On dit que f admet un maximum local au point a ssi : $\exists\, V \in \mathcal{V}_E(a), \forall\, x \in D \cap V,\ f(x) \leq f(a)$.
On dit que f admet un minimum local au point a ssi : $\exists\, V \in \mathcal{V}_E(a), \forall\, x \in D \cap V,\ f(a) \leq f(x)$.
On dit que f admet un extremum local au point a si et seulement si f admet un minimum local ou un maximum local au point a.

**Proposition.–** Soient D une partie de E, $a \in D$ et $f : D \subset E \to \mathbb{R}$ une application.
1) Si il existe $r > 0$ tel que $f(x) - f(a)$ soit de signe fixe dans $D \cap BF(a,r)$ alors f admet un extremum local au point a.
2) Si pour tout $r > 0$, $f(x) - f(a)$ change strictement de signe dans $D \cap BF(a,r)$ alors f n'admet pas d'extremum local au point a.

**Théorème.–** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable au point a.
Si $\varphi$ admet un extremum local au point a alors $\varphi'(a) = 0$.

**Théorème.**– Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$, $a \in U$ et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $U$.

Si $f$ admet un extremum local au point $a$ alors $df(a) = 0_{E^*}$.

<u>Remarques</u> : Le résultat ci-dessus n'est plus vrai si l'on ne suppose pas $U$ ouvert dans $(E, \| \ \|_E)$.

**Définition.**– Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$, $a \in U$ et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable au point $a$.

On dit que $a$ est un point critique de $f$ si et seulement si $df(a) = 0_{E^*}$.

## 3. Vecteurs tangents à une partie

$(E, \| \ \|_E)$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

**Définition.**– Soient $A$ une partie non vide de $E$ et $a \in A$.

Un vecteur $v$ de $E$ est dit tangent à la partie $A$ au point $a$ si et seulement si il existe $r > 0$ et $\gamma : ]-r, r[ \to A$ dérivable en $0$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

L'ensemble des vecteurs tangents à la partie $A$ au point $a$ est noté $T_a(A)$.

**Proposition.**– Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$.

On pose $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\}$ et on considère $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

1) $T_{M_0}(S) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y\right\}$.

2) $\dim T_{M_0}(S) = 2$ et $T_{M_0}(S)$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément :

$$T_{M_0}(S) = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w \text{ avec } v = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \text{ et } w = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

3) $M_0 + T_{M_0}(S) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (z - z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)\right\}$.

Le plan affine $M_0 + T_{M_0}(S)$ est appelé plan tangent à $S$ au point $M_0$.

<u>Terminologie</u> : On dit $S$ est la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$ et que le plan tangent à $S$ au point $M_0$ a pour équation cartésienne $(z - z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$.

**Proposition.**– Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$ sur l'ouvert $U$ et $k \in \mathbb{R}$. On pose : $L_k = \{M \in U \mid f(M) = k\}$.

Si $L_k$ est non vide et si $M_0 \in L_k$ alors tout vecteur de $T_{M_0}(L_k)$ est orthogonal à $\nabla f(M_0)$.

<u>Terminologie</u> : La partie $L_k$ est une ligne de niveau de l'application $f$. La proposition nous dit qu'un vecteur tangent à une ligne de niveau de $f$ en $M_0$ est orthogonal au gradient de $f$ en $M_0$.

## 4. Expression du gradient et du laplacien en coordonnées polaires (HP)

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel.

On note $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on pose $O = (0,0)$.

Le triplet $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal de $\mathbb{R}^2$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $\vec{u}_\theta = (\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = (\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}$.

Pour tout réel $\theta$, $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ de scalaires sur $\mathbb{R}^2$.

On lui associe le champ de scalaires $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

### 4.1 Expression du gradient en coordonnées polaires

On suppose $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le gradient $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs de classe $C^0$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $M = (x,y)$ le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées cartésiennes $x, y$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$.

$\nabla f(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)\vec{j}$ et si $M \neq O$ alors pour tout système $(r,\theta)$ de coordonnées polaires du point $M$ on a : $\nabla f(M) = \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}_\theta$.

### 4.2 Expression du laplacien en coordonnées polaires

On suppose $f$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Le Laplacien $\Delta f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est un champ de scalaire de classe $C^0$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $M = (x,y)$ le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées cartésiennes $x, y$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$.

$\Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$ et si $M \neq O$ alors pour tout système $(r,\theta)$ de coordonnées polaires du point $M$ on a : $\Delta f(M) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$.

# La classe $C^1$ pour les fonctions de E dans F

## 1. Notion de dérivées partielles

### 1.1 Le cas général

Soient $(E,\|\ \|_E)$, $(F,\|\ \|_F)$ et $(G,\|\ \|_G)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriel normés de dimension finie.
On pose $p = \dim E$, $n = \dim F$, $m = \dim G$ et on suppose $p \geq 1$, $n \geq 1$ et $m \geq 1$.

**Définition.–** Soient U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$, $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. et $j \in [\![1,p]\!]$. On dit que f admet une $j^{ème}$ dérivée partielle dans la base B au point $a \in U$ si et seulement si f est dérivable suivant $e_j$ au point a. Dans ces conditions le vecteur $D_{e_j}f(a)$ est noté $\partial_j f(a)$ et est appelé $j^{ème}$ dérivée partielle de f dans la base B au point a.

**Définition.–** Soient U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$, $B = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $j \in [\![1,p]\!]$. On dit que f admet une $j^{ème}$ dérivée partielle dans B sur U si et seulement si f admet une $j^{ème}$ dérivée partielle dans B en tout point a. de U. Dans ces conditions on dispose de l'application $\partial_j f : U \subset E \to F$ qui à tout point $a \in U$ associe le vecteur $\partial_j f(a)$. L'application $\partial_j f$ est appelée $j^{ème}$ dérivée partielle dans B de f.

**Théorème.–** Soient U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$, $B = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $j \in [\![1,p]\!]$. Pour $a \in U$ et en cas d'existence on a : $\partial_j f(a) = \lim\limits_{t \to 0, t \neq 0} \frac{1}{t}[f(a + te_j) - f(a)]$.

**Théorème.–** Soient U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$.
Soient $B = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une base de F. On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de f sur B. On a donc $f(x) = f_1(x)e'_1 + \cdots + f_n(x)e'_n$ pour tout $x \in D$.
Si f est différentiable au point a alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\partial_j f_i(a)$ existe et $M_{B,B'}(df(a)) = (\partial_j f_i(a))$.

**Théorème.–** Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable sur U et si g est différentiable sur V alors $g \circ f$ est différentiable sur U et : $\forall a \in U$, $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

**Théorème.–** (Règle de la chaîne)
Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ telles que $f(U) \subset V$. On suppose f différentiable sur U et g différentiable sur V.
Soient $B = (e_1, \cdots, e_p)$, $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ et $B'' = (e''_1, \cdots, e''_m)$ des bases de E,F et G.
On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de f dans B′ et $g_1, \cdots, g_m$ celles de g dans B″.
Les applications coordonnées de $g \circ f$ dans la base B″ sont $g_1 \circ f, \cdots, g_m \circ f$ et on a :
$\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\partial_j(g_i \circ f) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\partial_k g_i \circ f) \times \partial_j f_k$.

Autrement dit : $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\forall a \in U$, $\partial_j(g_i \circ f)(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \partial_k g_i(f(a)) \partial_j f_k(a)$.

### 1.2 Le cas particulier fondamental

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $a \in U$.
On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de f dans la base ε′.
On a donc $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.
Si f est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
On note $f = (f_1, \cdots, f_n)$.

En cas d'existence, la $j^{ème}$ dérivée partielle de $f_i$ dans la base ε au point a est noté $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ (au lieu de $\partial_j f_i(a)$) et est simplement appelée $j^{ème}$ dérivée partielle de l'application $f_i$ au point a.
(On ne fait alors plus référence à la base).
Si $f_i : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ admet une $j^{ème}$ dérivée partielle en tout point a de U alors on dispose de l'application $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ qui a tout point $a \in U$ associe le réel $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.
L'application $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ alors appelée $j^{ème}$ dérivée partielle de l'application $f_i$.

**Proposition.–** Pour $a = (a_1, \cdots, a_p) \in U$ et en cas d'existence on a les formules suivantes :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \cdots, a_p) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{1}{t}\left[f_i(a_1, \cdots a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \cdots a_p) - f_i(a_1, \cdots a_{j-1}, a_j, a_{j+1} \cdots, a_p)\right].$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \cdots, a_p) = f_i(a_1, \cdots a_{j-1}, \bullet, a_{j+1} \cdots a_p)'(a_j).$$

**Définition.–** Pour $f=(f_1,\cdots,f_n):U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$, $a\in U$ et en cas d'existence, la matrice $J_f(a)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice jacobienne de $f$ au point $a$.

**Théorème.–** Si $f=(f_1,\cdots,f_n):U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ est différentiable au point $a$ alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existe et $M_{\varepsilon,\varepsilon'}(df(a))=J_f(a)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$.

**Théorème.–** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,\cdots,f_n):U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ différentiable sur $U$ et $g=(g_1,\cdots,g_m):V\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ différentiable sur $V$ telles que $f(U)\subset V$.
On dispose de l'application $g\circ f=(g_1\circ f,\cdots,g_m\circ f):U\subset\mathbb{R}^p\xrightarrow{f}V\subset\mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R}^m$.

$$\forall i\in[\![1,m]\!],\ \forall j\in[\![1,p]\!],\ \frac{\partial(g_i\circ f)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\circ f\right)\times\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

$$\forall i\in[\![1,m]\!],\ \forall j\in[\![1,p]\!],\ \forall a\in U,\ \frac{\partial(g_i\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

<u>Remarque</u> : Il se peut que $f$ admette des dérivées partielles au point $a$ et que $f$ ne soit pas différentiable au point $a$.

## 2. Applications de classe $C^1$

### 2.1 Le cas général

Soient $(E,\|\ \|_E)$ et $(F,\|\ \|_F)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriel normés de dimension finie.
On pose $p=\dim E$, $n=\dim F$ et on suppose $p\geq 1$ et $n\geq 1$.

**Définition.–** Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$ et $f:U\subset E\to F$.
On dit que $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ si et seulement si $f$ est différentiable sur $U$ et la différentielle $df$ est continue sur $U$.
On note $C^1(U,F)$ l'ensemble des applications de $U$ dans $F$ de classe $C^1$ sur $U$.

**Proposition.–** Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$ et $f:U\subset E\to F$.
Si $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ alors $f$ est différentiable sur $U$.
Si $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ alors $f$ est continue sur $U$.

<u>Remarques</u> :

- ✓ On rappelle que si $f$ est différentiable sur l'ouvert $U$ alors on dispose de l'application $df:U\subset E\to L(E,F)$ qui à tout point $a$ de $E$ associe l'application linéaire $df(a)$.
- ✓ Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f:I\subset\mathbb{R}\to F$ une application. Pour une telle application $f$ on dispose de deux définitions de la notion de classe $C^1$. Celle adoptée dans le chapitre « dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $F$ » et celle adoptée dans le présent chapitre. Ces deux définitions coïncident. De surcroît, si $f$ est de classe $C^1$ dans $U$ alors : $\forall a\in U,\ \forall h\in\mathbb{R},\ df(a)(h)=hf'(a)$.

**Théorème.–** Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$, $f:U\subset E\to F$ et $B=(e_1,\cdots,e_p)$ une base de $E$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) L'application $f$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $U$.
2) Les $p$ dérivées partielles $\partial_1 f,\cdots,\partial_p f$ de $f$ dans $B$ existent et sont continues sur $U$.

**Proposition.–** Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$, $f:U\subset E\to F$, $B=(e_1,\cdots,e_p)$ une base de $E$ et $B'=(e'_1,\cdots,e'_n)$ une base de $F$. On note $f_1,\cdots,f_n$ les applications coordonnées de $f$ dans $B'$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) L'application $f$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $U$.
2) Les $np$ dérivées partielles $\partial_j f_i$, $i\in[\![1,n]\!]$, $j\in[\![1,p]\!]$ dans $B$ existent et sont continues sur $U$.

### 2.2 Le cas particulier fondamental

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ et $a\in U$.
On note $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\varepsilon'=(\varepsilon'_1,\cdots,\varepsilon'_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f_1,\cdots,f_n$ les applications coordonnées de $f$ dans la base $\varepsilon'$.
On a donc $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ pour tout $x=(x_1,\cdots,x_p)\in\mathbb{R}^p$.
Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $f_1,\cdots,f_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

**Théorème.–** $f=(f_1,\cdots,f_n):U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ est de classe $C^1$ sur $U$ si et seulement si les $np$ dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}:U\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, existent et sont continues sur $U$.

### 2.3 Opérations sur les applications de classe $C^1$

**Proposition.–** Toute application linéaire de $E$ dans $F$ est de classe $C^1$ sur $E$.

**Proposition.**– Si $U$ est un ouvert de $E$, si $f, g : U \subset E \to F$ sont classe $C^1$ sur $U$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est classe $C^1$ sur $U$. Par suite, $C^1(U, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Théorème.**– Soient $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$. Si $f : U \subset E \to F$ est de classe $C^1$ sur $U$, si $g : V \subset F \to G$ est de classe $C^1$ sur $V$ et si $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est de classe $C^1$ sur $U$.

### 2.4 Caractérisation des applications constantes via la différentielle

**Proposition.**– Soient $U$ un ouvert de $E$, $f : U \subset E \to F$ de classe $C^1$ sur $U$ et $(a, b) \in U^2$.
Si $\gamma : [0,1] \to E$ est un arc de classe $C^1$, d'origine $a$, de but $b$, à support dans $U$ alors on a la formule $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$.

**Théorème.**– Soient $U$ un ouvert de $E$, $f : U \subset E \to F$ de classe $C^1$ sur $U$.
Si $U$ est connexe par arcs alors $f$ est constante sur $U$ si et seulement si $df$ est nulle sur $U$.

## 3. Applications de classe $C^2$

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriel normés de dimension finie.
On pose $p = \dim E$, $n = \dim F$ et on suppose $p \geq 1$ et $n \geq 1$.

### 3.1 Le cas général

**Définition.**– Soient $U$ un ouvert de $E$ et $f : U \subset E \to F$.
On dit que $f$ est de classe $C^2$ sur $U$ si et seulement si $f$ est différentiable sur $U$ et la différentielle $df$ est de classe $C^1$ sur $U$. On note $C^2(U, F)$ l'ensemble des applications de $U$ dans $F$ de classe $C^2$ sur $U$.

**Proposition.**– Soient $U$ un ouvert de $E$ et $f : U \subset E \to F$.
Si $f$ est de classe $C^2$ sur $U$ alors $f$ est de classe $C^1$ sur $U$.

**Théorème.**– Soient $U$ un ouvert de $E$, $f : U \subset E \to F$ et $B = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $E$.
L'application $f$ est de classe $C^2$ sur $U$ ssi les $p^2$ dérivées partielles $\partial_{j_1}(\partial_{j_2} f)$ de $f$ dans $B$, $(j_1, j_2) \in [\![1, p]\!]^2$, existent et sont continues sur $U$.

Remarque : Le fait que $\partial_{j_1}(\partial_{j_2} f)$ existe sur $U$ suppose implicitement que $\partial_{j_2} f$ existe sur $U$.

**Théorème.**– (Schwarz)
Soient $U$ un ouvert de $E$, $f : U \subset E \to F$ et $B$ une base de $E$.
Si $f$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$ alors $\partial_{j_1}(\partial_{j_2} f) = \partial_{j_2}(\partial_{j_1} f)$ pour tout $(j_1, j_2) \in [\![1, p]\!]^2$.

### 3.2 Le cas particulier fondamental

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $a \in U$.
On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de $f$ dans la base $\varepsilon'$.
On a donc $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.
Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
En cas d'existence, l'application $\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j_2}}\right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}$.
Toujours en cas d'existence, l'application $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.
Comme l'application $f$, l'application $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}$ est une application de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

**Théorème.**– $f = (f_1, \cdots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de classe $C^2$ sur $U$ ssi les $np^2$ dérivées partielles $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $(i, j_1, j_2) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]^2$, existent et sont continues sur $U$.

**Théorème.**– Si l'application $f = (f_1, \cdots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$ alors :
$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (j_1, j_2) \in [\![1, p]\!]^2$, $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}$.

### 3.3 Opérations sur les applications de classe $C^2$

**Proposition.**– Toute application linéaire de $E$ dans $F$ est de classe $C^2$ sur $E$.
**Proposition.**– Si $U$ est un ouvert de $E$, si $f, g : U \subset E \to F$ sont classe $C^2$ sur $U$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est classe $C^2$ sur $U$. Par suite, $C^2(U, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Théorème.**– Soient $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$. Si $f : U \subset E \to F$ est de classe $C^2$ sur $U$, si $g : V \subset F \to G$ est de classe $C^2$ sur $V$ et si $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est de classe $C^2$ sur $U$.

# 4. Applications de classe $C^k$

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriel normés de dimension finie.

On pose $p = \dim E$, $n = \dim F$ et on suppose $p \geq 1$ et $n \geq 1$.

## 4.1 Le cas général

**Définition.–** Soient $U$ un ouvert de $E$ et $f : U \subset E \to F$. On dit que $f$ est de classe $C^k$ sur $U$ si et seulement si $f$ est différentiable sur $U$ et la différentielle $df$ est de classe $C^{k-1}$ sur $U$. On note $C^k(U,F)$ l'ensemble des applications de $U$ dans $F$ de classe $C^k$ sur $U$.

**Proposition.–** Si $U$ est un ouvert de $E$ et si $f : U \subset E \to F$ est de classe $C^k$ sur $U$ alors $f$ est de classe $C^q$ sur $U$ pour tout $q \in [\![0,k]\!]$.

**Théorème.–** Soient $U$ un ouvert de $E$, $f : U \subset E \to F$ et $B = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $E$.
L'application $f$ est de classe $C^k$ sur l'ouvert $U$ ssi les $p^k$ dérivées partielles $\partial_{j_1}\left(\partial_{j_2}\left(\cdots\left(\partial_{j_k} f\right)\cdots\right)\right)$ de $f$ dans $B$, $(j_1, \cdots, j_k) \in [\![1,p]\!]^k$, existent et sont continues sur l'ouvert $U$.

## 4.2 Le cas particulier fondamental

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $a \in U$.
On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de $f$ dans la base $\varepsilon'$.
On a donc $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.
Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

**Théorème.–** L'application $f = (f_1, \cdots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de classe $C^k$ sur $U$ si et seulement si les $np^k$ dérivées partielles $\dfrac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}} : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $(i, j_1, \cdots, j_k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]^k$, existent et sont continues sur l'ouvert $U$.

## 4.3 Opérations sur les applications de classe $C^k$

**Proposition.–** Toute application linéaire de $E$ dans $F$ est de classe $C^k$ sur $E$.

**Proposition.–** Si $U$ est un ouvert de $E$, si $f, g : U \subset E \to F$ sont classe $C^k$ sur $U$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est classe $C^k$ sur $U$. Par suite, $C^k(U,F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Théorème.–** Soient $U$ un <u>ouvert</u> de $E$, $V$ un <u>ouvert</u> de $F$. Si $f : U \subset E \to F$ est de classe $C^k$ sur $U$, si $g : V \subset F \to G$ est de classe $C^k$ sur $V$ et si $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est de classe $C^k$ sur $U$.

# 5. Notion de $C^1$ difféomorphisme (HP)

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriel normés de dimension finie.
On pose $p = \dim E$, $n = \dim F$ et on suppose $p \geq 1$ et $n \geq 1$.

**Définition.–** Soient $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$.
On appelle $C^1$ difféomorphisme de $U$ sur $V$ toute bijection $\Phi$ de $U$ sur $V$ telle que $\Phi$ soit de classe $C^1$ sur $U$ et $\Phi^{-1}$ soit de classe $C^1$ sur $V$.

**Proposition.–** Soient $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$.
1) Si $\Phi$ est un $C^1$ difféomorphisme de $U$ sur $V$ alors pour tout $a \in U$, $d\Phi(a)$ est un isomorphisme linéaire de $E$ sur $F$ et $d\Phi(a)^{-1} = d(\Phi^{-1})(\Phi(a))$.
2) Si $\Phi$ est un $C^1$ difféomorphisme de $U$ sur $V$ alors $\dim E = \dim F$.

**Proposition.–**
1) Si il existe un $C^1$ difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors $p = n$.
2) Si $n \neq p$ alors il n'existe pas de $C^1$ difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3) Soient $U, V$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ un $C^1$ difféomorphisme de $U$ sur $V$.
   Pour tout $a \in U$, $J_\Phi(a) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $J_\Phi(a)^{-1} = J_{\Phi^{-1}}(\Phi(a))$.

**Théorème.–** (Passage en coordonnées polaires)
On considère $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
1) $\Phi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. $\Phi$ est surjective mais non injective. $\Phi$ n'est donc pas bijective.
2) L'application $P : ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0), t \leq 0\}$ définie par $P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $C^1$ difféomorphisme de $]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leq 0\}$.
3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0), t \leq 0\}$, $P^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\,\mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.