Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: des résultats fondamentaux

1. Théorème de la limite monotone (Mpsi)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. L'intervalle I est la forme $]\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta[$ ou $[\alpha,\beta]$ avec $(\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. L'intervalle $]\alpha,\beta[$ est noté $\overset{\circ}{I}$ et est appelé intérieur de I.

Théorème.– Si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone sur I alors :

1) f admet une limite finie à droite et à gauche en tout point $a \in \overset{\circ}{I}$.
2) $\lim\limits_{\alpha^+} f$ et $\lim\limits_{\beta^-} f$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$

Théorème 1.– Si $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante sur I alors :

1) f admet une limite finie à droite et à gauche en tout point $a \in \overset{\circ}{I}$ et on a :

$$\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f\,,\ \lim_{a^-} f = \sup_{I\cap]-\infty,a[} f \text{ et } \lim_{a^+} f = \inf_{I\cap]a,+\infty[} f\,.$$

2) f admet une limite à droite dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point α.
Si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{\alpha^+} f = \inf\limits_{I\cap]\alpha,+\infty[} f$ et sinon $\lim\limits_{\alpha^+} f = -\infty$.

3) f admet une limite à gauche dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point β.
Si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{\beta^-} f = \sup\limits_{I\cap]-\infty,\beta[} f$ et sinon $\lim\limits_{\beta^-} f = +\infty$.

Théorème 2.– Si $f : I \to \mathbb{R}$ est décroissante sur I alors :

1) f admet une limite finie à droite et à gauche en tout point $a \in \overset{\circ}{I}$ et on a :

$$\lim_{a^+} f \leq f(a) \leq \lim_{a^-} f\,,\ \lim_{a^-} f = \inf_{I\cap]-\infty,a[} f \text{ et } \lim_{a^+} f = \sup_{I\cap]a,+\infty[} f\,.$$

2) f admet une limite à droite dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point α.
Si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{\alpha^+} f = \sup\limits_{I\cap]\alpha,+\infty[} f$ et sinon $\lim\limits_{\alpha^+} f = +\infty$.

3) f admet une limite à gauche dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point β.
Si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{\beta^-} f = \inf\limits_{I\cap]-\infty,\beta[} f$ et sinon $\lim\limits_{\beta^-} f = -\infty$.

Remarque : Le résultat contenu dans les théorèmes 1 et 2 ainsi que dans le théorème qui les précède est connu sous le nom de théorème de la limite monotone. Grosso modo il garantit l'existence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une limite à droite et d'une limite à gauche pour une application monotone. Il précise de plus les conditions dans lesquelles ces limites sont finies.

2. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (Mpsi)

2.1 Continuité et intervalle

Théorème.– L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
Plus précisément : si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle I contenu dans D alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corollaire.– (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.

1) Si f prend les valeurs α et β alors f prend toutes les valeurs comprises entre α et β.
2) Si f prend une valeur négative et une valeur positive alors f s'annule au moins une fois.
3) Si f ne s'annule pas sur I alors f y est strictement de signe fixe.

Théorème.– L'image d'un segment par une application continue est un segment.
Plus précisément : si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un segment $[a,b]$ contenu dans D alors $f([a,b])$ est un segment.

Corollaire.– Une application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes. Plus précisément : si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un segment $[a,b]$ contenu dans D alors f est minorée et majorée sur $[a,b]$ et il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que $\inf\limits_{[a,b]} f = f(c)$ et $\sup\limits_{[a,b]} f = f(d)$.

2.2 Continuité et injectivité

Théorème.– Une application continue et injective sur un intervalle y est strictement monotone.

Théorème.– Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f induit une bijection de I sur J. De plus : $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J de même monotonie que f.

Remarque

✓ L'assertion « f induit une bijection de I sur J » signifie que l'application $\tilde{f} : I \to J$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est une bijection de I sur J. Si $J \neq \mathbb{R}$ alors les applications f et $\tilde{f}$ sont distinctes car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée. Dans la pratique $\tilde{f}$ est notée f, ce qui revient à considérer f non pas comme une application de I dans $\mathbb{R}$, mais comme une application de I dans J.

✓ Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur I alors $f(I)$ est un intervalle et suivant que $I =]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b]$ on a $f(]a,b[) = \left]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\right[$, $f([a,b[) = \left[f(a), \lim_{b^-} f\right[$, $f(]a,b]) = \left]\lim_{a^+} f, f(b)\right]$ et $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Si f est strictement décroissante sur I, les résultats sont identiques mais en prenant soin d'intervertir les bornes $\left(\text{par exemple } f([a,b[) = \left]\lim_{b^-} f, f(a)\right]\right)$.

Définition (HP).– Un homéomorphisme de I sur J est une application $f : I \to J$ vérifiant :

1) f est une bijection de I sur J.
2) f est continue sur I.
3) f^{-1} est continue sur J.

3. Dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (Mpsi)

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

3.1 Dérivation et application réciproque

Théorème.– Soit $f : I \to J$ un <u>homéomorphisme</u> de I sur J et $a \in I$.

1) Si f est dérivable au point a alors : f^{-1} est dérivable au point $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

   Dans ces conditions : $\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

2) Si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur J si et seulement f' ne s'annule pas sur I.

   Dans ces conditions : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Théorème.– Soient $f : I \to J$ un <u>homéomorphisme</u> de I sur J et $n \geq 1$. Si f est de classe C^n sur I alors : f^{-1} est de classe C^n sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

3.2 Théorème de Rolle et formule des accroissements finis

Théorème.– Soient I un intervalle d'intérieur non vide, $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable au point a. Si f admet un extremum local au point a alors $f'(a) = 0$.

<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse et l'hypothèse a dans l'intérieur de I est vitale !!!

Théorème.– (Rolle)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème.– (Formule des accroissements finis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b$.

Dans ces conditions : $\exists\, c \in]a,b[$, $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

<u>Remarque</u> : Dans le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis, le réel c dépend de a, de b et de l'application f. Il n'a de plus aucune raison d'être unique !!! Les deux résultats (Rolle et formule des accroissements finis) sont faux pour les fonctions à valeurs complexes.

3.3 Dérivabilité et monotonie

Théorème.– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$.

1) f est constante sur I si et seulement si : $\forall t \in \mathring{I}$, $f'(t) = 0$.
2) f est croissante sur I si et seulement si : $\forall t \in \mathring{I}$, $f'(t) \geq 0$.
3) f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall t \in \mathring{I}$, $f'(t) \leq 0$.

Théorème.– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$.

1) Si f' est positive sur $\mathring{I}$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points de $\mathring{I}$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2) Si f' est négative sur $\mathring{I}$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points de $\mathring{I}$ alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème.– Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\ell = \lim\limits_{a,\neq} f'$ existe dans $\mathbb{R}$ alors f est dérivable au point a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue au point a.

Théorème.– Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{a,\neq} f' = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{t \to a, t \neq a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} = \pm\infty$ et f n'est pas dérivable au point a.

4. Pour aller plus loin (HP)

Théorème.– (Rolle généralisé)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$.

Si $\lim\limits_{+\infty} f = f(a)$ alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : On a aussi les variantes suivantes :

✓ Si $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ est continue sur $]-\infty, a]$, dérivable sur $]-\infty, a[$ et si $\lim\limits_{-\infty} f = f(a)$ alors il existe $c \in]-\infty, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

✓ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f$ alors il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

Théorème.– (Formule des accroissements finis généralisés)

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ avec $a < b$.

Dans ces conditions : $\exists\, c \in]a, b[, \ (f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$.

Fonctions convexes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

1. Définition et premières propriétés

Définition.–

L'application f est dite convexe sur l'intervalle I si et seulement si :

$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$

L'application f est dite concave sur l'intervalle I si et seulement si :

$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$

Remarque : f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I

Interprétation géométrique

$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I ssi le graphe de f est « au-dessous » de toutes ses cordes.

$f : I \to \mathbb{R}$ est concave sur I ssi le graphe de f est « au-dessus » de toutes ses cordes.

Exemples

- On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = at + b$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une application affine est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$.
- L'application valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Si $f,g : I \to \mathbb{R}$ sont convexes sur l'intervalle I alors $f+g$ est convexe sur I.

2. Diverses caractérisations du caractère convexe d'une fonction

Théorème.– (Convexité et inégalité des pentes)

L'application f est convexe sur I si et seulement si pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de I :

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Théorème.– (Convexité et taux d'accroissement)

f est convexe sur I ssi pour tout $a \in I$, l'application $\left(t \to \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}\right)$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Théorème.– (Convexité et dérivabilité)

Si f est dérivable sur I alors : f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Si f est deux fois dérivable sur I alors : f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.

3. Inégalités liées à la convexité

Théorème.– (Inégalité de convexité)

Si f est convexe sur I alors :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n, \forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Théorème.– (Convexité et tangente)

Si f est convexe et dérivable sur I alors : $\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$

Interprétation :

Le graphe d'une fonction convexe et dérivable est « au-dessus » de toutes ses tangentes.

Le graphe d'une fonction concave et dérivable est « au-dessous » de toutes ses tangentes.

Proposition.– (Des inégalités utiles)

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1.$

2) $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln x \leq x-1.$

3) $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sin x \geq \frac{2}{\pi}x.$

4. Pour aller plus loin (HP)

4.1 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Théorème.– Si f est convexe sur I alors :

1) f est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

2) f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

5

Théorème.– Si f est convexe sur I alors :

1) $\forall a \in \overset{\circ}{I}$, $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

2) $\forall a \in \overset{\circ}{I}, \forall b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b \Rightarrow f'_d(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b)$.

4.2 Inégalités de convexité

Proposition.– (Inégalité de la moyenne arithmético-géométrique)

Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels ~~strictement~~ positifs alors : $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Proposition.– (Inégalité de Hölder)

Soient p et q des réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

2) Si $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ sont des réels positifs alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

4.3 Un résultat utile

Théorème.– Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Otto Hölder (1859-1937)
Otto Hölder est un mathématicien allemand né à Stuttgart. Il enseigne à l'université de Leipzig de 1899 à 1929. On lui doit la célèbre inégalité qui porte son nom ainsi que le théorème de Jordan-Hölder (résultat de théorie des groupes d'abord énoncé dans une version plus faible par Jordan puis renforcé par la suite par Hölder).

Inégalités

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et le symbole $|\ |$ désigne la valeur absolue ou le module suivant que l'on se trouve dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Enfin on pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. L'ensemble totalement ordonné des nombres réels

On note $\leq$ la relation d'ordre usuelle de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. L'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ possède les propriétés fondamentales suivantes :

Théorème.–

1) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{N}$.
   Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément dans $\mathbb{N}$.
2) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{Z}$.
   Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément dans $\mathbb{Z}$.
3) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.
   Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

1.1 Notion d'intervalle (Mpsi)

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on adopte les définitions suivantes :

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

$]a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$, $]-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$, $[a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

$]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$, $]a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$, $]-\infty, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$

On pose enfin : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Cela nous conduit donc à neuf types d'ensembles.

Définition.– Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de l'un des neuf types ci-dessus. Un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$. Un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ ou de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

<u>Remarque</u> : Si $a > b$ alors $[a,b] =]a,b] = [a,b[=]a,b[= \varnothing$. L'ensemble vide est donc un intervalle. Un segment, un intervalle semi-ouvert, un intervalle ouvert sont non vides. Si I est un intervalle non vide alors ou bien I est un segment ou bien I est un intervalle semi-ouvert, ou bien I est un intervalle ouvert.

Théorème.–

1) Si a et b sont des réels tels que $a \leq b$ alors $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0,1]\}$.
2) Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si : $\forall (x,y) \in A^2,\ [x,y] \subset A$.

<u>Remarques</u> : la propriété 1) n'est valable que si $a \leq b$ car pour $a > b$, $[a,b] = \varnothing$.
La propriété 2) exprime que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si A est « sans trous ».

1.2 Manipulation d'inégalités (Mpsi)

Proposition.– Soient a, b, c, d des nombres réels.

1) si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$. (Sommation d'inégalités)
2) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$. (Multiplication d'inégalités à termes positifs)
3) si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. (Inversion d'inégalités à termes positifs)
4) si $a \leq b$ et si $c \leq 0$ alors $bc \leq ac$. (Multiplication par un terme négatif)

<u>Remarque</u> : On peut sommer les inégalités mais il n'est pas licite de faire des différences ou des quotients. Quant au produit d'inégalités il n'est légitime que si tous les termes sont positifs.

1.3 Valeur absolue et partie entière (Mpsi)

Définition.– Soit x un réel.

1) La valeur absolue $|x|$ de x est le plus grand des deux réels x et $-x$. On a donc : $|x| = \max(x, -x)$. La partie positive x^+ de x est le plus grand des deux réels x et 0. On a donc : $x^+ = \max(x, 0)$. La partie négative x^- de x est le plus grand des deux réels 0 et $-x$. On a donc : $x^- = \max(0, -x)$. Le signe $sg(x)$ de x est défini par : $sg(x) = 1$ si $x > 0$, $sg(x) = -1$ si $x < 0$ et $sg(0) = 0$.
2) La partie entière $\lfloor x \rfloor$ de x est le plus grand entier relatif à être inférieur ou égal à x.
   Le plafond $\lceil x \rceil$ de x est le plus petit entier relatif à être supérieur ou égal à x.
   La partie fractionnaire $\{x\}$ du réel x est définie par : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Proposition.– Soient x, y des réels et a un réel positif.

1) $x^+, x^-, |x|$ sont des réels positifs vérifiant : $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.
   De plus : $|x| = sg(x)x$.
2) $x \le |x|$ et $-x \le |x|$. D'autre part : $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.
3) $\big||x| - |y|\big| \le |x+y| \le |x| + |y|$.

Proposition.– Soit x un nombre réel.

1) $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$.
2) $\{x\} \in [0,1[$ et $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.

1.4 Des inégalités utiles

Proposition.– $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Proposition.– $\forall t \in \mathbb{R},\ |t| \le t^2 + 1$.

Proposition.– $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \le \sqrt{|a-b|}$.

2. Inégalité des accroissements finis, inégalité de Taylor-Lagrange (Mpsi)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une application à valeurs scalaires.

Théorème.– (Inégalité des accroissements finis)

Si f est de classe C^1 sur I et si f' est bornée sur I alors :

$\forall (a,b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \le \|f'\|_\infty |b - a|$.

Exemple : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin x - \sin y| \le |x - y|,\ |\cos x - \cos y| \le |x - y|$ et $|e^{ix} - e^{iy}| \le |x - y|$.

Théorème.– (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si f est de classe C^{n+1} sur I et si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I alors pour tout $(a,x) \in I^2$ on a l'inégalité :

$$\left|f(x) - \left(f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right)\right| \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. Inégalités liées à la convexité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

Définition.– On dit que l'application f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si :

$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Théorème.– (Inégalité de convexité)

Si f est convexe sur I alors :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Théorème.– (Convexité et tangente)

Si f est convexe et dérivable sur I alors : $\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) \ge f(a) + (x-a)f'(a)$.

Interprétation : Le graphe d'une fonction convexe et dérivable est « au-dessus » de ses tangentes.

Proposition.– (Des inégalités utiles)

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \ge x + 1$.
2) $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln x \le x - 1$.
3) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x \ge \frac{2}{\pi}x$.

4. Norme sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Définition.– Une norme N sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
2) $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \le N(x) + N(y)$.
3) $\forall x \in E,\ (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$.

Définition.– Un espace vectoriel normé est un couple (E, N) constitué d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une norme N sur E.

Remarque : Une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés 1) et 2) ci-dessus est appelée une semi-norme sur E (HP). Si N est une semi norme sur E alors $N(0_E) = 0$ mais on peut avoir $N(x) = 0$ avec $x \neq 0_E$. Tout couple (E,N) constitué d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une semi-norme N sur E est appelé un espace vectoriel semi-normé (HP). Toute norme est bien sûr une semi-norme.

Théorème.– Si N est une semi-norme sur E et si $(x,y) \in E^2$ alors :

1) $|N(x) - N(y)| \leq N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
2) $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq N(x) + N(y)$.

Théorème.– Soit D est un ensemble non vide quelconque.

1) $(B(D,\mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.
2) $\forall (f,g) \in B(D,\mathbb{K})^2$, $fg \in B(D,\mathbb{K})$ et $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Un cas particulier important :

L'espace vectoriel $B(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\ell^\infty(\mathbb{K})$.

Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ on pose : $\|u\|_\infty = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

$(\ell^\infty(\mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

$\forall (u,v) \in \ell^\infty(\mathbb{K})^2$, $uv \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ et $\|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$.

5. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5.1 Notion de produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Etant donnés une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $x \in E$ et $y \in E$, on note $\varphi(x,\cdot)$ et $\varphi(\cdot,y)$ les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par : $\varphi(x,\bullet)(z) = \varphi(x,z)$ et $\varphi(\bullet,y)(z) = \varphi(z,y)$.

Définition.– On appelle forme bilinéaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1) Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x,\bullet)$ est linéaire.
2) Pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\bullet,y)$ est linéaire.

Remarques : Pour exprimer que l'on a 1) (resp 2)) on dit que φ est linéaire à droite (resp à gauche).

Proposition.– Si φ est une forme bilinéaire sur E et si p,q sont des entiers naturels non nuls alors :

$$\forall (x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_q) \in E^{p+q},\ \forall (\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q) \in \mathbb{R}^{p+q},\ \varphi\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^q \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_i \beta_j \varphi(x_i,y_j).$$

Définition.– Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

On dit que φ est symétrique si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$.

On dit que φ est positive si et seulement si : $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$.

On dit que φ est définie si et seulement si : $\forall x \in E$, $(\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$.

Définition.– Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Un semi-produit scalaire sur E (HP) est une forme bilinéaire symétrique positive sur E.

Notation : Soit $(\bullet|\bullet)$ un produit scalaire sur E. Pour $x \in E$, on pose : $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Le réel positif $\|x\|$ est appelé norme du vecteur x. Lorsque $(\bullet|\bullet)$ est un semi-produit scalaire il est appelé semi-norme de x.

Définition.– Un espace préhilbertien réel est un couple $(E,(\bullet|\bullet))$ constitué d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ sur E. Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel $(E,(\bullet|\bullet))$ avec E de dimension finie.

Exemples

- Pour $x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose : $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

  $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- On note $M^0([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a,b]$ et $C^0([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues sur $[a,b]$.

  Pour $f \in M^0([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in M^0([a,b],\mathbb{R})$ on pose : $(f \mid g) = \int_a^b fg$.

  $(\bullet|\bullet)$ est un semi-produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M^0([a,b],\mathbb{R})$.

  $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Théorème.– (Formulaire)

Soient $(\bullet|\bullet)$ un semi-produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et x, y deux vecteurs de E.

1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$.

2) $(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$. (Identité de polarisation)

3) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. (Identité du parallélogramme)

5.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème.– (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(\bullet|\bullet)$ un semi-produit scalaire sur E et $(x,y) \in E^2$.

1) $|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|$.

2) Si $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire alors : $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow (x,y)$ est liée.

Proposition.– (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{K}^n$)

$\forall\ (x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{K}^{2n}$, $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$.

Proposition.– (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $M^0([a,b],\mathbb{K})$)

$\forall\ (f,g) \in \left(M^0([a,b],\mathbb{K})\right)^2$, $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \int_{[a,b]} |f||g| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2} \times \sqrt{\int_{[a,b]} |g|^2}$.

6. Inégalité de Minkowski

Théorème.– (Inégalité de Minkowski)

Soit $(\bullet|\bullet)$ un semi-produit scalaire sur E. Pour $x \in E$ on pose : $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

1) L'application $\|\ \|$ est une semi norme sur E dite semi-norme associée au semi-produit scalaire $(\bullet|\bullet)$. En particulier : $\forall\ (x,y) \in E^2$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Inégalité de Minkowski)

2) Si $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire alors :

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow (x = 0_E)$ ou $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid y = \lambda x$.

Remarque : Si $(E,(\bullet|\bullet))$ est un espace préhilbertien réel et si $\|\ \|$ est la norme associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ alors $(E,\|\ \|)$ est un espace vectoriel normé. On dit que $(E,\|\ \|)$ est l'espace vectoriel normé sous jacent à l'espace préhilbertien $(E,(\bullet|\bullet))$. L'inégalité de Minkowski est aussi appelée inégalité triangulaire.

Théorème.– (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$)

On considère des scalaires u, v dans $\mathbb{K}$.

1) $\big||u|-|v|\big| \leq |u+v| \leq |u|+|v|$.

2) $|u+v| = |u|+|v| \Leftrightarrow u = 0$ ou $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid v = \lambda u$.

Proposition.– (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}^n$)

Si $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{K}^n$ alors $\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$.

Proposition.– (Inégalité triangulaire dans $M^0([a,b],\mathbb{K})$)

Si $(f,g) \in M^0([a,b],\mathbb{K})^2$ alors $\sqrt{\int_{[a,b]} |f+g|^2} \leq \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2} + \sqrt{\int_{[a,b]} |g|^2}$.

Exemples

- Pour $u = (u_1,\cdots,u_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose : $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$.

  $\|\ \|_2$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

- Pour $f \in M^0([a,b],\mathbb{K})$ on pose : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$.

  $\|\ \|_2$ est une semi-norme sur $M^0([a,b],\mathbb{K})$.

  $\|\ \|_2$ est une norme sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$.

7. Inégalités de Markov et de Tchebychev

Proposition.– (Inégalité de Markov)

Si $X \in V_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{A})$ alors : $\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\varepsilon}$.

Proposition.– (Inégalité de Tchebychev)

Si $X \in L^2_d(\Omega,\mathcal{A},P)$ alors : $\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

8. Pour aller plus loin (HP)

8.1 Obtention de majorations en module via Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant 0. On définit le polynôme $T_n(f)$ par :

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} X + \frac{f''(0)}{2!} X^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n.$$

Le polynôme $T_n(f)$ est appelé $n^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor de f.

Si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I alors l'inégalité de Taylor Lagrange permet d'écrire :

$$\forall x \in I, \ \left|f(x) - T_n(f)(x)\right| \leq \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En particulier, on obtient :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$

Proposition.– (Inégalités de type Taylor-Lagrange)

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2!}$ et $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{3!}.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ |\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}.$

8.2 Obtention d'encadrements via Taylor-Lagrange

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a les inégalités suivantes :

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq \underset{x}{\cancel{1}} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

$$x - \frac{x^2}{2!} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Par parité, les inégalités concernant le $\cos$ sont en fait valables sur $\mathbb{R}$ et pas seulement sur $\mathbb{R}^+$.

8.3 Inégalités de convexité

Proposition.– (Inégalité de la moyenne arithmético-géométrique)

Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors : $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$

Proposition.– (Inégalité de Hölder)

Soient p et q des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

1) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$

2) Si $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ sont des réels positifs alors : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$

Brook Taylor (1685-1731)
Mathématicien anglais, Taylor énonce en 1715 la célèbre formule qui porte aujourd'hui son nom. Il l'énonce sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots$ sans faire figurer de reste et sans se soucier des problèmes de convergence que peut poser une telle formulation. L'importance de ce résultat n'est véritablement reconnu qu'en 1772 date à laquelle Lagrange le qualifie de « principe de base du calcul différentiel ».

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
Giuseppe Lodovico Lagrangia est né le 25 janvier 1736 à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne. Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française). Lagrange étudia brillamment à l'université de sa ville natale; son intérêt pour les mathématiques ne se manifeste que vers 17 ans, à la lecture d'un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Il se plonge alors aussitôt, seul et sans aide, dans l'étude des mathématiques. Très rapidement, il obtient des résultats probants. A la fin de l'année 1755, Lagrange devient professeur à l'école d'artillerie de Turin., ville où il fonde en 1757 une académie des sciences. Son talent est très vite reconnu, et il écrit durant ses premières années de brillants mémoires où il applique les méthodes du calcul des variations à la mécanique. En 1764 notamment, Lagrange gagne le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris. Il le regagnera 1772, 1774 et 1780. En 1766, grâce à l'appui de D'Alembert, Lagrange succède à Euler au poste prestigieux de directeur des mathématiques à l'Académie des Sciences de Berlin. Il passera 20 ans là-bas. il publie avec une régularité impressionnante des mémoires qui touchent tous les domaines des mathématiques et de la mécanique : astronomie, probabilités, théorie des équations algébriques Les dernières années à Berlin sont consacrées à l'étude du monumental Traité de Mécanique Analytique, où il reprend, complète et unifie les connaissances accumulées depuis Newton. Ce livre, qui devient pour tous ses contemporains une référence, se veut notamment une apologie de l'utilisation des équations différentielles en mécanique.
En 1787, Lagrange part pour la France où il devient membre de l'Académie des Sciences de Paris. Il est un des rares à traverser la Révolution sans être inquiété: il est même Président de la Commission des poids et des mesures, et est à ce titre un des pères du système métrique et de l'adoption de la division décimale des mesures.
Lagrange participe encore à la création de l'Ecole Polytechnique dont il est le premier professeur d'analyse. Il décède le 10 avril 1813, après avoir reçu de Napoléon Ier tous les honneurs de la nation française.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
Elève brillant, Cauchy entre à l'école polytechnique à l'âge de seize ans puis devient ingénieur militaire. Encouragé par Lagrange à se consacrer aux mathématiques, Cauchy obtient en 1816 un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'école polytechnique et au collège de France. L'œuvre de Cauchy est énorme et ses travaux concernent de nombreux domaines mathématiques comme la théorie des groupes, l'algèbre linéaire, la théorie des équations différentielles et la théorie des fonctions holomorphes. C'est cependant en analyse que l'influence de Cauchy s'avérera la plus déterminante. Soucieux de rigueur, il introduit une notion précise de continuité et élabore une définition rigoureuse de l'intégrale. On lui doit aussi des travaux en astronomie mais aussi en physique où il donne des bases mathématiques à la théorie de l'élasticité. Le plus prolifique des mathématiciens après Euler, Cauchy est responsable de la plupart des progrès effectués en analyse au dix-neuvième siècle.

Hermann Schwarz (1843-1921)
Elève de Weierstrass, Schwarz fit des études de chimie et de mathématiques à l'université de Berlin. Il a produit de nombreux travaux en analyse, notamment dans le domaine des fonctions holomorphes, des équations aux dérivées partielles ainsi qu' en théorie du potentiel.

Hermann Minkowski (1864-1909)
Né à Alexoten en Russie, Minkowski fit ses études en Allemagne où ses parents d'origine juive furent contraints d'émigrer pour permettre à leurs enfants de recevoir un enseignement que l'empire tsariste leur refusait. Minkowski se tourne très vite vers la théorie des nombres et dès l'âge de dix-huit ans obtient le grand prix de l'académie des sciences de France pour un travail sur la décomposition d'un nombre entier en somme de cinq carrés. Il s'intéresse aussi à la physique mathématique (Einstein sera son élève !) et donne une interprétation géométrique de la relativité restreinte (théorie établie en 1905 par Einstein...) dans un espace à quatre dimension aujourd'hui appelé espace de Minkowski.

Otto Hölder (1859-1937)
Otto Hölder est un mathématicien allemand né à Stuttgart. Il enseigne à l'université de Leipzig de 1899 à 1929. On lui doit la célèbre inégalité qui porte son nom ainsi que le théorème de Jordan-Hölder (résultat de théorie des groupes d'abord énoncé dans une version plus faible par Jordan puis renforcé par la suite par Hölder).