Intégrale généralisée

1. Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a,+\infty[$

On fixe $a \in \mathbb{R}$.

Définition.– On considère $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et on lui associe l'application $F : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_a^x f$.

1) On dit que l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est convergente si et seulement si l'application F admet une limite dans $\mathbb{K}$ en $+\infty$. Lorsque cette condition est remplie on pose : $\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$.
   Le scalaire $\int_a^{+\infty} f$ est alors appelé intégrale généralisée de f sur $[a,+\infty[$.
2) Pour exprimer que l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Remarques

✓ Préciser la nature de l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ c'est dire si elle est convergente ou divergente.
Cela revient à statuer sur l'existence dans $\mathbb{K}$ de la limite de la quantité $\int_a^x f$ lorsque $x \to +\infty$.
En cas d'existence, cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f$ et est appelée intégrale généralisée de f sur $[a,+\infty[$.

✓ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il y a deux manières pour l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ d'être divergente.
Ou bien F admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ et cette limite vaut $\pm\infty$, ou bien F n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. La situation où l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ converge correspond au cas : F admet une limite dans $\mathbb{R}$ en $+\infty$ et cette limite est finie.

✓ Une intégrale généralisée est aussi appelé une intégrale impropre.

Théorème.– On considère $\varphi : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positive sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et on lui associe l'application $\Phi : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par : $\Phi(x) = \int_a^x \varphi$.

1) Φ est croissante sur $[a,+\infty[$.
2) L'intégrale de φ sur $[a,+\infty[$ est convergente si et seulement si Φ est majorée sur $[a,+\infty[$.

Proposition.– Soient $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et $c \in [a,+\infty[$.

1) L'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est de même nature que l'intégrale de f sur $[c,+\infty[$ et en cas de convergence on a : $\int_a^{+\infty} f = \int_a^c f + \int_c^{+\infty} f$.
2) L'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est convergente si et seulement si les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et de $\operatorname{Im} f$ sur $[a,+\infty[$ sont convergentes et en cas de convergence on a les relations :
$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re} f + i\int_a^{+\infty} \operatorname{Im} f,\ \int_a^{+\infty} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(\int_a^{+\infty} f\right) \text{ et } \int_a^{+\infty} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(\int_a^{+\infty} f\right).$$

Proposition.– Soient $f,g : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) Si les intégrales de f et de g sur $[a,+\infty[$ sont convergentes alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ sur $[a,+\infty[$ est convergente et on a : $\int_a^{+\infty} \alpha f + \beta g = \alpha\int_a^{+\infty} f + \beta\int_a^{+\infty} g$.
2) Si $f \geq 0$ et si l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ converge alors $\int_a^{+\infty} f \geq 0$.
   Si $f \leq g$ et si les intégrales de f et g sur $[a,+\infty[$ sont convergentes alors $\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$.

Remarques :

✓ Si les intégrales de f et de g sur $[a,+\infty[$ sont convergentes alors l'intégrale de $f+g$ sur $[a,+\infty[$ est convergente et on a $\int_a^{+\infty} f+g = \int_a^{+\infty} f + \int_a^{+\infty} g$.

✓ Si l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est divergente et si l'intégrale de g sur $[a,+\infty[$ est convergente alors l'intégrale de $f + g$ sur $[a,+\infty[$ est divergente.

✓ Si les intégrales de f et de g sur $[a,+\infty[$ sont divergentes alors on ne peut rien dire à priori sur l'éventuelle convergence de l'intégrale de $f+g$ sur $[a,+\infty[$. Il se peut par exemple que l'intégrale de $f+g$ sur $[a,+\infty[$ converge et que les intégrales de f et de g sur $[a,+\infty[$ soient toutes deux divergentes. Dans un tel cas de figure il ne faut surtout pas écrire que $\int_a^{+\infty} f+g = \int_a^{+\infty} f + \int_a^{+\infty} g$ car si le premier symbole a un sens, les deux derniers n'en ont pas.

Théorème.– On considère $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et on suppose que l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est convergente.
Soit $R : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ définie par $R(x) = \int_x^{+\infty} f$.

1) $\forall x \in [a,+\infty[,\ R(x) = \int_a^{+\infty} f - \int_a^x f$ et $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.
2) Si f est continue sur $[a,+\infty[$ alors R est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $R' = -f$.

Remarque : La quantité $R(x)=\int_x^{+\infty} f$ est appelée reste d'ordre x de l'intégrale généralisée de f sur $[a,+\infty[$. 1) exprime que le reste d'ordre x d'une intégrale généralisée convergente tend vers 0.

2. Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a,b[$

On fixe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. (le cas $b=+\infty$ a été traité dans le paragraphe précédent)

Définition.– On considère $f:[a,b[\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b[$ et on lui associe l'application $F:[a,b[\to\mathbb{K}$ définie par : $F(x)=\int_a^x f$.

1) On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente si et seulement si l'application F admet une limite dans $\mathbb{K}$ au point b. Lorsque cette condition est remplie on pose : $\int_a^b f=\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f$.

   Le scalaire $\int_a^b f$ est alors appelé intégrale généralisée de f sur $[a,b[$.
2) Pour exprimer que l'intégrale de f sur $[a,b[$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Exemples : Nature des intégrales $\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

Théorème.– On considère $\varphi:[a,b[\to\mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positive sur l'intervalle $[a,b[$ et on lui associe l'application $\Phi:[a,b[\to\mathbb{R}^+$ définie par : $\Phi(x)=\int_a^x \varphi$.

1) Φ est croissante sur $[a,b[$.
2) L'intégrale de φ sur $[a,b[$ est convergente si et seulement si Φ est majorée sur $[a,b[$.

Proposition.– Soient $f:[a,b[\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$ et $c\in[a,b[$.

1) L'intégrale de f sur $[a,b[$ est de même nature que l'intégrale de f sur $[c,b[$ et en cas de convergence on a : $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.
2) L'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente si et seulement si les intégrales de $\mathrm{Re} f$ et de $\mathrm{Im} f$ sur $[a,b[$ sont convergentes et en cas de convergence on a les relations :

$$\int_a^b f=\int_a^b \mathrm{Re} f+i\int_a^b \mathrm{Im} f,\ \int_a^b \mathrm{Re} f=\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) \text{ et } \int_a^b \mathrm{Im} f=\mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right).$$

Proposition.– Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.

1) Si les intégrales de f et de g sur $[a,b[$ sont convergentes alors l'intégrale de $\alpha f+\beta g$ sur $[a,b[$ est convergente et on a : $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.
2) Si $f\geq 0$ et si l'intégrale de f sur $[a,b[$ converge alors $\int_a^b f\geq 0$.

   Si $f\leq g$ et si les intégrales de f et g sur $[a,b[$ sont convergentes alors $\int_a^b f\leq\int_a^b g$.

Théorème.– On considère $f:[a,b[\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b[$ et on suppose que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente. Soit $R:[a,b[\to\mathbb{K}$ définie par $R(x)=\int_x^b f$.

1) $\forall x\in[a,b[,\ R(x)=\int_a^b f-\int_a^x f$ et $\lim\limits_{x\to b}R(x)=0$.
2) Si f est continue sur $[a,b[$ alors R est de classe C^1 sur $[a,b[$ et $R'=-f$.

Remarque : $R(x)=\int_x^b f$ est appelée reste d'ordre x de l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$.

Théorème.– Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente et on a : $\int_a^b f=\int_{[a,b]} f$.

Exemple : Existence de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$.

3. Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert de la forme $]a,b]$

On considère $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ avec $-\infty\leq a<b<+\infty$.

On notera que a peut valoir $-\infty$ et que b est réel.

Définition.– On considère $f:]a,b]\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $]a,b]$ et on lui associe l'application $F:]a,b]\to\mathbb{K}$ définie par : $F(x)=\int_x^b f$.

1) On dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ est convergente si et seulement si l'application F admet une limite dans $\mathbb{K}$ au point a. Lorsque cette condition est remplie on pose : $\int_a^b f=\lim\limits_{x\to a}\int_x^b f$.

   Le scalaire $\int_a^b f$ est alors appelé intégrale généralisée de f sur $]a,b]$.
2) Pour exprimer que l'intégrale de f sur $]a,b]$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Exemples : Calcul des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^0 e^t\,dt$ et $\int_0^1 \ln t\,dt$.

Théorème.– On considère $\varphi : \left]a,b\right] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et <u>positive</u> sur l'intervalle $\left]a,b\right]$ et on lui associe l'application $\Phi : \left]a,b\right] \to \mathbb{R}^+$ définie par : $\Phi(x) = \int_x^b \varphi$.

1) Φ est croissante sur $\left]a,b\right]$.
2) L'intégrale de φ sur $\left]a,b\right]$ est convergente si et seulement si Φ est majorée sur $\left]a,b\right]$.

Proposition.– Soient $f : \left]a,b\right] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $\left]a,b\right]$ et $c \in \left]a,b\right]$.

1) L'intégrale de f sur $\left]a,b\right]$ est de même nature que l'intégrale de f sur $\left]a,c\right]$ et en cas de convergence : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
2) L'intégrale de f sur $\left]a,b\right]$ est convergente si et seulement si les intégrales de $\mathrm{Re} f$ et de $\mathrm{Im} f$ sur $\left]a,b\right]$ sont convergentes et en cas de convergence on a les relations :
$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re} f + i\int_a^b \mathrm{Im} f,\ \int_a^b \mathrm{Re} f = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) \text{ et } \int_a^b \mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right).$$

Proposition.– Soient $f,g : \left[a,b\right[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $\left[a,b\right[$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) Si les intégrales de f et de g sur $\left[a,b\right[$ sont convergentes alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ sur $\left[a,b\right[$ est convergente et on a : $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$.
2) Si $f \geq 0$ et si l'intégrale de f sur $\left]a,b\right]$ converge alors $\int_a^b f \geq 0$.

   Si $f \leq g$ et si les intégrales de f et g sur $\left]a,b\right]$ sont convergentes alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Théorème.– On considère $f : \left]a,b\right] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $\left]a,b\right]$ et on suppose que l'intégrale de f sur $\left]a,b\right]$ est convergente. Soit $R : \left]a,b\right] \to \mathbb{K}$ définie par $R(x) = \int_a^x f$.

1) $\forall x \in \left]a,b\right],\ R(x) = \int_a^b f - \int_x^b f$ et $\lim_{x\to a} R(x) = 0$.
2) Si f est continue sur $\left]a,b\right]$ alors R est de classe C^1 sur $\left[a,b\right[$ et $R' = f$.

<u>Remarque</u> : $R(x) = \int_a^x f$ est appelée reste d'ordre x de l'intégrale généralisée de f sur $\left]a,b\right]$.

Théorème.– Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors l'intégrale de f sur $\left]a,b\right]$ est convergente et on a : $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$.

<u>Exemple</u> : l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

4. Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert $\left]a,b\right[$

On considère $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On peut donc avoir : $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Lemme.– Soit $f : \left]a,b\right[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $\left]a,b\right[$.
Si <u>il existe</u> $c \in \left]a,b\right[$ tel que l'intégrale de f sur $\left]a,c\right]$ <u>et</u> l'intégrale de f sur $\left[c,b\right[$ convergent alors <u>pour tout</u> $d \in \left]a,b\right[$, l'intégrale de f sur $\left]a,d\right]$ <u>et</u> l'intégrale de f sur $\left[d,b\right[$ convergent et on a l'égalité $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$.

Définition.– Soit $f : \left]a,b\right[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $\left]a,b\right[$.

1) On dit que l'intégrale de f sur $\left]a,b\right[$ est convergente si et seulement si il existe $c \in \left]a,b\right[$ tel que : l'intégrale de f sur $\left]a,c\right]$ <u>et</u> l'intégrale de f sur $\left[c,b\right[$ sont convergentes. Lorsque cette condition est remplie on pose : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Le scalaire $\int_a^b f$ est appelé intégrale généralisée de f sur $\left]a,b\right[$ et au vu du lemme il est indépendant du réel c considéré dans $\left]a,b\right[$.
2) Pour exprimer que l'intégrale de f sur $\left]a,b\right[$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Proposition.– Soit $f : \left]a,b\right[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $\left]a,b\right[$. L'intégrale de f sur $\left]a,b\right[$ est divergente si et seulement si il existe $c \in \left]a,b\right[$ tel que : l'intégrale de f sur $\left]a,c\right]$ est divergente <u>ou</u> l'intégrale de f sur $\left[c,b\right[$ est divergente.

<u>Exemples</u> : Nature des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t\,dt$ et $\int_0^1 \ln(1-t)\ln t\,dt$.

Proposition.– Soient $f : \left]a,b\right[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $\left]a,b\right[$.
L'intégrale de f sur $\left]a,b\right[$ est convergente si et seulement si les intégrales de $\mathrm{Re} f$ et de $\mathrm{Im} f$ sur $\left]a,b\right[$ sont convergentes et en cas de convergence on a les relations :
$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re} f + i\int_a^b \mathrm{Im} f,\ \int_a^b \mathrm{Re} f = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) \text{ et } \int_a^b \mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right).$$

Proposition.– Soient $f,g : \left]a,b\right[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $\left]a,b\right[$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) Si les intégrales de f et de g sur $\left]a,b\right[$ sont convergentes alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ sur $\left]a,b\right[$ est convergente et on a : $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$.

2) Si $f \geq 0$ et si l'intégrale de f sur $]a,b[$ converge alors $\int_a^b f \geq 0$.

Si $f \leq g$ et si les intégrales de f et g sur $]a,b[$ sont convergentes alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Théorème.–

1) Si $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a,b[$ et si l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente alors l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente et les intégrales généralisées correspondantes sont égales. (ce qui est heureux car elles sont toutes les deux notées de la même manière à savoir $\int_a^b f$.)

2) Si $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $]a,b]$ et si l'intégrale de f sur $]a,b]$ est convergente alors l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente et les intégrales généralisées correspondantes sont égales. (ce qui est heureux car elles sont toutes les deux notées de la même manière à savoir $\int_a^b f$.)

Théorème.– (Changement de variable)

On considère $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $(\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement monotone de classe C^1 de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ et si $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ est continue sur $]a,b[$ alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'$ sont de même nature et en cas de convergence on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt$.

Théorème.– (Intégration par parties)

On considère $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Si $u, v :]a,b[\to \mathbb{K}$ sont de classe C^1 sur $]a,b[$ et si uv admet des limites dans $\mathbb{K}$ en a et en b alors les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \text{ avec } [uv]_a^b = \lim_b uv - \lim_a uv.$$

Remarque : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dire que uv admet des limites dans $\mathbb{R}$ en a et en b signifie que uv admet des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et en b et que ces limites sont finies.

5. Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert

Soit I un intervalle semi-ouvert ou ouvert.

L'intervalle I est donc non vide, de la forme $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ ou de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, ou de la forme $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Dans tous les cas on dispose, pour $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I, de la notion d'intégrale convergente de f sur I et, en cas de convergence, de l'intégrale généralisée de f sur I notée $\int_a^b f$.

Définition.– Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I.

L'intégrale de f sur I est dite absolument convergente si et seulement si l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.

L'intégrale de f sur I est dite semi-convergente si et seulement si l'intégrale de f sur I est convergente et non absolument convergente.

Théorème.– Soit $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux sur I telles que $0 \leq \varphi \leq \psi$.

1) Si l'intégrale de ψ sur I est convergente alors l'intégrale de φ sur I est convergente et on a $0 \leq \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$.

2) Si l'intégrale de φ sur I est divergente alors l'intégrale de ψ sur I est divergente.

Théorème.– Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I. Si l'intégrale de f sur I est absolument convergente alors l'intégrale de f sur I est convergente et on a : $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Intégration sur un intervalle quelconque des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1. Notion d'application intégrable sur l'intervalle I

1.1 La définition

On considère $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I. Comme I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, ou bien I est un segment ou bien I est un intervalle semi-ouvert, ou bien I est un intervalle ouvert. Par conséquent, ou bien I est de la forme $[a,b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$, ou bien I est de la forme $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ ou de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, ou bien I est de la forme $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Si $I = [a,b]$ est un segment alors on dispose de l'intégrale de f sur le segment I à savoir $\int_a^b f$.
Dans le cas contraire, I est un intervalle semi-ouvert ou ouvert d'extrémités a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et on dispose, en cas de <u>convergence</u>, de l'intégrale généralisée de f sur I à savoir $\int_a^b f$.

Définition.– Une application $f : I \to \mathbb{K}$ est dite intégrable sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur I et si l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes : ou bien I est un segment ou bien l'intégrale de f sur I est absolument convergente. On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux sur I qui sont intégrables sur I.

Proposition.– Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur I.
1) Si $|f| \leq \varphi$ et si φ est intégrable sur I alors f est intégrable sur I.
2) f est intégrable sur I si et seulement si l'application à valeurs positives $|f|$ est intégrable sur I.
3) f est intégrable sur I ssi les applications à valeurs réelles $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont intégrables sur I.

Théorème.– $L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Les exemples de référence

Théorème.– Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
1) L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $]0,a]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
2) L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
3) L'application $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Théorème.– Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-\infty < a < b < +\infty$.
1) L'application $\left(t \to \frac{1}{(b-t)^\alpha}\right)$ est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.
2) L'application $\left(t \to \frac{1}{(t-a)^\alpha}\right)$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

2. Intégrale d'une application intégrable sur l'intervalle I

2.1 La définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ intégrable sur I.

Si $I = [a,b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$ alors on pose : $\int_I f = \int_a^b f$ où $\int_a^b f$ est l'intégrale de f sur $[a,b]$. Si I est un intervalle semi-ouvert ou ouvert d'extrémités a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ alors on pose $\int_I f = \int_a^b f$ où $\int_a^b f$ est l'intégrale généralisée de f sur I.
Dans tous les cas, le scalaire $\int_I f$ est appelé intégrale de f sur I.

2.2 Le calcul

Théorème.–

1) Si $-\infty < a < b \leq +\infty$ et si $f \in L^1([a,b[,\mathbb{K})$ alors $\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to b}\int_a^x f$.

2) Si $-\infty \leq a < b < +\infty$ et si $f \in L^1(]a,b],\mathbb{K})$ alors $\lim_{x\to a}\int_x^b f$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\int_{]a,b]} f = \lim_{x\to a}\int_x^b f$.

3) Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et si $f \in L^1(]a,b[,\mathbb{K})$ alors pour tout $c \in]a,b[$, $\lim_{x\to a}\int_x^c f$ et $\lim_{y\to b}\int_c^y f$ existent dans $\mathbb{K}$ et $\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f = \lim_{x\to a}\int_x^c f + \lim_{y\to b}\int_c^y f$.

Remarque : Soit $f \in M^0([a,b[,\mathbb{K})$.

Si $f \geq 0$ alors on a l'équivalence : f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Si f n'est pas à valeurs positives alors il se peut que $\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que l'intégrale de f sur $[a,b[$ soit convergente, et que malgré tout, f ne soit pas intégrable sur $[a,b[$.
Ce qui vient d'être énoncé pour $f \in M^0([a,b[,\mathbb{K})$ se transpose immédiatement au cas de $f \in M^0(]a,b],\mathbb{K})$.

Exemple : L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge mais $\left(t \to \frac{\sin t}{t}\right)$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2.3 Les propriétés fondamentales

Théorème.– Soient $f,g : I \to \mathbb{K}$ intégrables sur I et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur I et $\int_I \alpha f + \beta g = \alpha\int_I f + \beta\int_I g$.
2) $|f|$ est intégrable sur I et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.
3) $\overline{f}$ est intégrable sur I et $\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$.
4) Si f et g sont à valeurs réelles et si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$.

Théorème.– Si l'intérieur de I est non vide, si $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ est continue, positive et intégrable sur I et si $\int_I \varphi = 0$ alors $\varphi = 0_{\mathbb{R}^I}$.

Proposition.– (Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration)

1) Si $-\infty < a < b \leq +\infty$, si $f \in M^0([a,b[,\mathbb{K})$ et si $c \in]a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si f est intégrable sur $[c,b[$ et dans ces conditions $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.
2) Si $-\infty \leq a < b < +\infty$, si $f \in M^0(]a,b],\mathbb{K})$ et si $c \in]a,b[$ alors f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si f est intégrable sur $]a,c]$ et dans ces conditions $\int_{]a,b]} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
3) Si $-\infty < a \leq b < +\infty$, si $f \in M^0(]a,b[,\mathbb{K})$ et si $c \in]a,b[$ alors f est intégrable sur $]a,b[$ si et seulement si f est intégrable sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ et dans ces conditions $\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.

Proposition.– (De la « négligeabilité » des bornes vis-à-vis de l'intégrabilité)

1) Si $-\infty < a < b \leq +\infty$ et si $f \in L^1([a,b[,\mathbb{K})$ alors $f \in L^1(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f$.
2) Si $-\infty \leq a < b < +\infty$ et si $f \in L^1(]a,b],\mathbb{K})$ alors $f \in L^1(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f$.
3) Si $-\infty < a \leq b < +\infty$ et si $f \in M^0([a,b],\mathbb{K})$ alors f est intégrable sur les quatre intervalles $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ et $\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f$.

2.4 Espace vectoriel normé des applications continues et intégrables sur I

On suppose que l'intérieur de I est non vide. On note $L^1_c(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables et continues sur I. On a donc : $L^1_c(I,\mathbb{K}) = L^1(I,\mathbb{K}) \cap C^0(I,\mathbb{K})$.
$L^1(I,\mathbb{K})$ et $L^1_c(I,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriels et bien sûr $L^1_c(I,\mathbb{K}) \subset L^1(I,\mathbb{K})$.
Dans le cas particulier ou I est un segment $\mathbb{R}$ on a $L^1_c(I,\mathbb{K}) = C^0(I,\mathbb{K})$.

Proposition.– Pour $f \in L^1(I,\mathbb{K})$ on pose : $\|f\|_1 = \int_I |f|$.

1) $\| \ \|_1$ est une semi-norme sur $L^1(I,\mathbb{K})$ et $(L^1(I,\mathbb{K}),\| \ \|_1)$ est un espace vectoriel semi-normé.
2) $\| \ \|_1$ est une norme sur $L^1_c(I,\mathbb{K})$ et $(L^1_c(I,\mathbb{K}),\| \ \|_1)$ est un espace vectoriel normé.

2.5 La relation de Chasles

Soit $f \in L^1(I,\mathbb{K})$ et $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $]\min(a,b),\max(a,b)[\subset I$.
Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ alors $f \in L^1(]a,b[,\mathbb{K})$ et on pose $\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. Si $-\infty \leq b < a \leq +\infty$ alors $f \in L^1(]b,a[,\mathbb{K})$ et on pose $\int_a^b f = -\int_{]b,a[} f$. Si $-\infty \leq a \leq +\infty$ alors on pose $\int_a^a f = 0$.

Proposition.– Soient $f \in L^1(I,\mathbb{K})$ et $(a,b,c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ tel que $]\min(a,b,c),\max(a,b,c)[\subset I$.
Dans ces conditions : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

3. Critères de comparaison pour les fonctions à valeurs positives

Théorème.– Soient $\varphi,\psi : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux et positives sur I.
Si $0 \leq \varphi \leq \psi$ et si ψ est intégrable sur I alors φ l'est aussi et on a : $0 \leq \int_I \varphi \leq \int_I \psi$.
Si $0 \leq \varphi \leq \psi$ et si φ n'est pas intégrable sur I alors ψ n'est pas intégrable sur I.

th(r) =

Proposition 1.– Soient a,b dans $\overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty < a < b \leq +\infty$ et φ,ψ dans $M^0\left([a,b[,\mathbb{R}^+\right)$.

1) Si $\varphi \underset{b}{=} O(\psi)$ et si ψ est intégrable sur $[a,b[$ alors φ est intégrable sur $[a,b[$.
   Si $\varphi \underset{b}{=} O(\psi)$ et si φ n'est pas intégrable sur $[a,b[$ alors ψ n'est pas intégrable sur $[a,b[$.
2) Si $\varphi \underset{b}{=} o(\psi)$ et si ψ est intégrable sur $[a,b[$ alors φ est intégrable sur $[a,b[$.
   Si $\varphi \underset{b}{=} o(\psi)$ et si φ n'est pas intégrable sur $[a,b[$ alors ψ n'est pas intégrable sur $[a,b[$.
3) Si $\varphi \underset{b}{\sim} \psi$. alors φ est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si ψ est intégrable sur $[a,b[$.

Proposition 2.– Soit a,b dans $\overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $-\infty \leq a < b < +\infty$ et φ,ψ dans $M^0\left(]a,b],\mathbb{R}^+\right)$.

1) Si $\varphi \underset{a}{=} O(\psi)$ et si ψ est intégrable sur $]a,b]$ alors φ est intégrable sur $]a,b]$.
   Si $\varphi \underset{a}{=} O(\psi)$ et si φ n'est pas intégrable sur $]a,b]$ alors ψ n'est pas intégrable sur $]a,b]$.
2) Si $\varphi \underset{a}{=} o(\psi)$ et si ψ est intégrable sur $]a,b]$ alors φ est intégrable sur $]a,b]$.
   Si $\varphi \underset{a}{=} o(\psi)$ et si φ n'est pas intégrable sur $]a,b]$ alors ψ n'est pas intégrable sur $]a,b]$.
3) Si $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$. alors φ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si ψ est intégrable sur $]a,b]$.

<u>Une règle efficace à mettre en œuvre dans la pratique : la règle de Riemann</u>

1) Soient $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\varphi :]0,a] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positive sur $]0,a]$.
   Si il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha \varphi(t) = 0$ alors $\varphi(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et $\varphi \in L^1(]0,a],\mathbb{R})$.
   Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha \varphi(t) = +\infty$ alors $\frac{1}{t^\alpha} \underset{0^+}{=} o(\varphi(t))$ et $\varphi \notin L^1(]0,a],\mathbb{R})$.
2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positive sur $[a,+\infty[$.
   Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha \varphi(t) = 0$ alors $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et $\varphi \in L^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$.
   Si il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha \varphi(t) = +\infty$ alors $\frac{1}{t^\alpha} \underset{+\infty}{=} o(\varphi(t))$ et $\varphi \notin L^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$.

Cette règle est très utile lorsque l'on a des logarithmes et des exponentielles.

<u>Exemple</u> : $\left(t \mapsto e^{-t^2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Théorème.– (Comparaison d'une série à une intégrale généralisée)

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi : [p,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante sur $[p,+\infty[$.

1) La série $\sum\limits_{n\geq p} \varphi(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} \varphi$.
2) La série $\sum\limits_{n\geq p} \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi\right)$ est convergente.

<u>Remarque</u> : Le théorème est une conséquence de l'inégalité $\varphi(k+1) \leq \int_k^{k+1} \varphi \leq \varphi(k)$, valable pour tout entier $k \geq p$ (φ est décroissante sur $[p,+\infty[$). Encadrer $\int_k^{k+1} \varphi$ pour $k \geq p$ est donc l'idée fondamentale à retenir. Il est bon aussi de mémoriser qu'à partir de cette inégalité on peut obtenir un encadrement de la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq p} \varphi(n)$ à l'aide de I_n et I_{n+1}. Le même genre d'idée s'applique lorsque φ croît sur $[p,+\infty[$, l'inégalité initiale s'écrivant alors $\varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi \leq \varphi(k+1)$.

4. Intégration des relations de comparaison pour les fonctions à valeurs positives

Théorème 1.– (Intégration des relations de comparaison : le cas non intégrable)

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $\varphi,\psi : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux et <u>positives</u> sur $[a,b[$. On suppose que ψ n'est pas intégrable sur $[a,b[$.

1) Si $\varphi \underset{b}{=} O(\psi)$ alors $\int_a^x \varphi(t)\,dt \underset{b}{=} O\left(\int_a^x \psi(t)\,dt\right)$.
2) Si $\varphi \underset{b}{=} o(\psi)$ alors $\int_a^x \varphi(t)\,dt \underset{b}{=} o\left(\int_a^x \psi(t)\,dt\right)$.
3) Si $\varphi \underset{b}{\sim} \psi$ alors $\int_a^x \varphi(t)\,dt \underset{b}{\sim} \int_a^x \psi(t)\,dt$.

Théorème 2.– (Intégration des relations de comparaison : le cas intégrable)

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $\varphi,\psi : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux et positives sur $[a,b[$. On suppose que ψ est intégrable sur $[a,b[$.

1) Si $\varphi \underset{b}{=} O(\psi)$ alors φ est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b \varphi(t)\,dt \underset{b}{=} O\left(\int_x^b \psi(t)\,dt\right)$.
2) Si $\varphi \underset{b}{=} o(\psi)$ alors φ est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b \varphi(t)\,dt \underset{b}{=} o\left(\int_x^b \psi(t)\,dt\right)$.
3) Si $\varphi \underset{b}{\sim} \psi$ alors φ est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b \varphi(t)\,dt \underset{b}{\sim} \int_x^b \psi(t)\,dt$.

5. Pour aller plus loin (HP)

5.1 Applications intégrables : quelques exemples de référence supplémentaires

Proposition.– (Exponentielle réelle et logarithme népérien)

1) $\left(t \mapsto e^{-t}\right)$ est intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

2) $\left(t \to \left|\ln(t)\right|\right)$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$ et $\int_0^1 \left|\ln t\right| dt = 1$.

$\left(t \to \left|\ln(t)\right|\right)$ n'est pas intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$. $\left(t \to \left|\ln(t)\right|\right)$ n'est pas intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$.

Proposition.– (Intégrales de Bertrand)

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \left]0,1\right[$ et $b \in \left]1,+\infty\right[$.

1) $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \left|\ln(t)\right|^\beta}\right)$ est intégrable sur $\left]0,a\right] \Leftrightarrow (\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

2) $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \left|\ln(t)\right|^\beta}\right)$ est intégrable sur $\left[b,+\infty\right[\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Proposition.– (Intégrale de Gauss)

1) L'application $\left(t \to e^{-t^2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

3) $\int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

Proposition.–

L'intégrale de $\left(t \to \frac{\sin t}{t}\right)$ sur $\left[1,+\infty\right[$ est convergente et on dispose de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ mais par contre l'application $\left(t \to \frac{\sin t}{t}\right)$ n'est pas intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$.

5.2 Une fonction célèbre : la fonction Γ

Proposition.– On pose : $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$.

1) Si $z \in \Delta$ alors $\left(t \to t^{z-1}e^{-t}\right) \in L^1\left(\left]0,+\infty\right[,\mathbb{C}\right)$ et on pose $\Gamma(z) = \int_{]0,+\infty[} t^{z-1}e^{-t}\,dt$.

2) $\forall z \in \Delta,\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5.3 L'intégrale généralisée de Dirichlet

Proposition.–

1) L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

2) $\left(t \to \dfrac{\sin t}{t}\right)$ est intégrable sur $\left]0,x\right]$ pour tout $x > 0$ mais n'est pas intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$.

3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Il s'agit d'une intégrale généralisée semi-convergente.

5.4 Espace vectoriel normé $L_c^2(I,\mathbb{K})$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On adopte les notations suivantes :

$L^2(I,\mathbb{K}) = \left\{f \in M^0(I,\mathbb{K}) \mid |f|^2 \in L^1(I,\mathbb{K})\right\}$ et $L_c^2(I,\mathbb{K}) = \left\{f \in C^0(I,\mathbb{K}) \mid |f|^2 \in L^1(I,\mathbb{K})\right\}$.

Proposition.–

1) $L^2(I,\mathbb{K})$ et $L_c^2(I,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $L_c^2(I,\mathbb{K}) \subset L^2(I,\mathbb{K})$.

2) Si I est un segment de $\mathbb{R}$ alors $L^2(I,\mathbb{K}) = M^0(I,\mathbb{K})$ et $L_c^2(I,\mathbb{K}) = C^0(I,\mathbb{K})$.

Proposition.– (L'espace préhilbertien $L_c^2(I,\mathbb{R})$)

Pour $(f,g) \in \left(L^2(I,\mathbb{R})\right)^2$ on pose : $(f \mid g) = \int_I fg$.

1) $(\bullet|\bullet)$ est un semi-produit scalaire sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel $L^2(I,\mathbb{R})$.

2) $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $L_c^2(I,\mathbb{R})$.

Proposition.– (L'espace vectoriel normé $L_c^2(I,\mathbb{K})$)

Pour $f \in L^2(I,\mathbb{K})$ on pose : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$.

1) $\left(L^2(I,\mathbb{K}), \|\ \|_2\right)$ est un espace vectoriel semi-normé. $\left(L_c^2(I,\mathbb{K}), \|\ \|_2\right)$ est un espace vectoriel normé.

2) Si $(f,g) \in \left(L^2(I,\mathbb{K})\right)^2$ alors $fg \in L^1(I,\mathbb{K})$ et $\|fg\|_1 \le \|f\|_2 \|g\|_2$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

1. Un théorème fondamental : le théorème de convergence dominée

Théorème.– (Convergence dominée)

Si (f_n) est une suite d'éléments de $L^1(I,\mathbb{K})$ qui converge simplement sur I vers $f \in M^0(I,\mathbb{K})$ et si il existe $\varphi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f \in L^1(I,\mathbb{K})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt = 0$.

2. Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans tout ce qui suit, A est une partie de $\mathbb{R}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On considère $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$.

Pour $x \in A$ on note $f(x,\bullet)$ l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie par : $f(x,\bullet)(t) = f(x,t)$.

Pour $x \in A$, $f(x,\bullet)$ est donc l'application $(t \mapsto f(x,t))$.

Pour $t \in I$ on note $f(\bullet,t)$ l'application de A dans $\mathbb{K}$ définie par : $f(\bullet,t)(x) = f(x,t)$.

Pour $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est donc l'application $(x \mapsto f(x,t))$.

Si pour tout $x \in A$ l'application $f(x,\bullet)$ est intégrable sur I alors on dispose de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$.

L'objectif du chapitre est d'étudier la continuité de l'application F puis lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'étudier la dérivabilité de l'application F.

2.1 Continuité de l'application F

Théorème 1.– Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x,\bullet) \in L^1(I,\mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.

On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

- ✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est continue sur A
- ✓ il existe $\varphi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall x \in A, \forall t \in I, \ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$

alors F est continue sur A.

Remarque : La seconde hypothèse est vitale. Elle est appelée hypothèse de domination.

Théorème 2.– On suppose ici que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x,\bullet) \in L^1(I,\mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.

On dispose donc de $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

- ✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est continue sur A
- ✓ pour tout segment S de $\mathbb{R}$ contenu dans A il existe $\varphi_S \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que :

  $\forall x \in S, \forall t \in I, \ |f(x,t)| \leq \varphi_S(t)$

alors F est continue sur A.

2.2 Dérivabilité de l'application F

Dans tout ce paragraphe, on suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.– Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x,\bullet) \in L^1(I,\mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.

On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

- ✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est de classe C^1 sur A
- ✓ pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ est continue par morceaux sur I
- ✓ il existe $\varphi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$

alors F est de classe C^1 sur A et on a la formule : $\forall x \in A, \ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Remarque : La troisième hypothèse est vitale. Elle est appelée hypothèse de domination.

Théorème 2.– Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x,\bullet) \in L^1(I,\mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.

On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

- ✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est de classe C^1 sur A
- ✓ pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ est continue par morceaux sur I
- ✓ pour tout segment S de $\mathbb{R}$ contenu dans A il existe $\varphi_S \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que :

  $\forall x \in S, \forall t \in I, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_S(t)$

alors F est de classe C^1 sur A et on a la formule : $\forall x \in A, \ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Théorème 3.– Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x,\bullet) \in L^1(I,\mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.

On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est de classe C^2 sur A

✓ pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ est intégrable sur I

✓ pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\bullet)$ est continue par morceaux sur I

✓ pour tout segment S de $\mathbb{R}$ contenu dans A il existe $\varphi_S \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall x \in S, \forall t \in I, \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi_S(t)$$

alors F est de classe C^2 sur A et on a :

$$\forall x \in A,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \text{ et } F''(x) = \int_I \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt.$$

Théorème 4.– Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x,\bullet) \in L^1(I,\mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.

On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet,t)$ est de classe C^k sur A

✓ pour tout $x \in A$, pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\bullet)$ est intégrable sur I

✓ pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\bullet)$ est continue par morceaux sur I

✓ pour tout segment S de $\mathbb{R}$ contenu dans A il existe $\varphi_S \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall x \in S, \forall t \in I, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_S(t)$$

alors F est de classe C^k sur A et on a : $\forall x \in A,\ \forall j \in [\![1,k]\!],\ F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,dt.$

3. Etude de la fonction gamma (HP)

On note $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ et pour tout $z \in \Delta$ on pose : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$.

Proposition.–

1) $\forall z \in \Delta,\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.
3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Théorème.–

1) Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
2) Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
3) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

<u>Propriétés supplémentaires</u>

✓ Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

✓ $\exists!\, \alpha \in]0,+\infty[\ |\ \Gamma'(\alpha) = 0$.

$\alpha \in]1,2[$, Γ est strictement décroissante sur $]0,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

✓ $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{0^+} \Gamma = +\infty$.

✓ $\lim\limits_{+\infty} \Gamma = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.