TD ANALYSE FONCTIONNELLE

H. Brézis
G. Tronel

don suggéré : 20,00 au bureau 428 (UMPA . ENS Lyon)

CHAPITRE I

LES THÉORÈMES DE HAHN-BANACH.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES FONCTIONS CONVEXES CONJUGUÉES.

$\boxed{\text{I.1}}$ *Propriétés de l'application de dualité.*

Soit E un espace vectoriel normé (= e.v.n.). Pour tout $x \in E$ on définit *l'application de dualité* par

$$F(x) = \{f \in E' \ ; \ \|f\| = \|x\| \text{ et } <f,x> = \|x\|^2\}.$$

1) Montrer que l'on a

$$F(x) = \{f \in E' \ ; \ \|f\| \leqslant \|x\| \text{ et } <f,x> = \|x\|^2\} \ ;$$

en déduire que F(x) est non vide, convexe et fermé.

2) Montrer que si E' est strictement convexe, alors F(x) est réduit à un élément.

(On rappelle qu'un e.v.n. est *strictement convexe* si pour tout couple f,g de cet espace tel que $\|f\| = \|g\| = 1$ et $f \neq g$ on a $\|tf + (1-t)g\| < 1 \quad \forall t \in]0,1[$).

3) Montrer que l'on a également

$$F(x) = \{f \in E' \ ; \ \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant <f,y-x> \quad \forall y \in E\}.$$

4) En déduire que

$$<F(x)-F(y),\ x-y> \geqslant 0 \quad \forall x,y \in E,$$

c'est-à-dire, plus précisément

$$<f-g,\ x-y> \geqslant 0 \quad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y).$$

Montrer que l'on a en fait

$$\langle f-g, x-y \rangle \geq (\|x\|-\|y\|)^2 \quad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y).$$

5) On suppose à nouveau que E' est strictement convexe. Soient $x,y \in E$ tels que

$$\langle F(x)-F(y), x-y \rangle = 0.$$

Montrer que $F(x) = F(y)$.

$\boxed{\text{I.2}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension n ; on considère une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E. Pour $x \in E$ on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$ et pour $f \in E'$ on pose $f_i = \langle f, e_i \rangle$.

1) On munit E de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

a) Déterminer explicitement (en fonction des f_i) la norme duale $\|f\|_{E'}$ d'un élément $f \in E'$.

b) Déterminer explicitement l'ensemble $F(x)$ (application de dualité) pour tout $x \in E$.

2) Reprendre les questions a) et b) si E est muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

3) Reprendre les questions a) et b) si E est muni de la norme

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

et plus généralement de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ avec } p \in]1, \infty[.$$

$\boxed{\text{I.3}}$ Soit $C([0,1]) = C([0,1]; \mathbb{R})$ muni de la norme usuelle

$$\|u\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

On considère $E=\{u\in C([0,1])\ ;\ u(0)=0\}$, de sorte que E est un sous-espace fermé de $C([0,1])$. On considère la forme linéaire

$$f : u\in E \mapsto f(u)=\int_0^1 u(t)\,dt.$$

1) Montrer que $f\in E'$ et calculer $\|f\|_{E'}$.

2) Peut-on trouver $u\in E$ tel que $\|u\|=1$ et $f(u)=\|f\|_{E'}$?

✓ $\boxed{\text{I.4}}$ On considère l'espace $E=c_0$ (espace des suites qui tendent vers 0, voir exercices du Chapitre XI).

A tout élément de c_0, $u=(u_1,u_2,u_3,\dots)$ on associe

$$f(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}u_n .$$

1) Vérifier que f est une forme linéaire continue sur E et calculer $\|f\|_{E'}$.

2) Peut-on trouver un élément $u\in E$ tel que

$$\|u\|=1 \quad \text{et} \quad f(u)=\|f\|_{E'} \ ?$$

✓ * $\boxed{\text{I.5}}$ Soit E un e.v.n. de dimension infinie.

1) Montrer qu'il existe une *base algébrique* $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $\|e_i\|=1\quad \forall i\in I$.

On rappelle qu'une base algébrique, ou base de Hamel, est un sous-ensemble $(e_i)_{i\in I}$ de E tel que tout $x\in E$ s'écrive de manière unique sous la forme :

$$x=\sum_{i\in J}x_i e_i \quad \text{avec} \quad J\subset I,\ J\ \textit{fini}.$$

(Utiliser le lemme de Zorn).

2) Construire une forme linéaire sur E qui n'est pas continue.

3) On suppose de plus que E est un Banach. Prouver que I est non dénombrable. (Utiliser le lemme de Baire, voir lemme II.1 du cours).

[illegible]

✓ $\boxed{\text{I.6}}$ Soit E un e.v.n. Montrer que tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E. (Si f est une forme linéaire sur E qui n'est pas continue on pourra montrer que $f\big(B(x_0,r)\big)=\mathbb{R}\quad \forall x_0\in E,\ \forall r>0$).

✓ $\boxed{\text{I.7}}$ Soit E un e.v.n. et soit $C \subset E$ convexe.

1) Montrer que $\overline{C}$ et Int C sont convexes.

2) Soient $x \in C$ et $y \in \text{Int } C$; montrer que

$$tx + (1-t)y \in \text{Int } C \quad \forall t \in [0,1[.$$

3) En déduire que si $\text{Int } C \neq \phi$, alors $\overline{C} = \overline{\text{Int } C}$.

✓ $\boxed{\text{I.8}}$ Soit E un e.v.n. de norme $\| \ \|$. Soit $C \subset E$ un convexe ouvert tel que $0 \in C$. On désigne par p la *jauge* de C (voir lemme I.2 du cours).

1) On suppose que C est symétrique (i.e. $-C = C$) et que C est borné. Montrer que p est une norme sur E et que p est équivalente à $\| \ \|$.

2) On considère maintenant $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|u\| = \underset{t \in [0,1]}{\text{Max}} |u(t)|$. Soit

$$C = \left\{u \in E \ ; \int_0^1 |u(t)|^2 dt < 1\right\}.$$

Vérifier que C est convexe, ouvert, symétrique et que $0 \in C$. C est-il borné ? Déterminer la jauge p de C. Montrer que p est une norme sur E ; est-elle équivalente à $\| \ \|$?

✓ $\boxed{\text{I.9}}$ *Hahn-Banach en dimension finie.* (, ; $\boxed{\text{V.9}}$)

Soit E un e.v.n. de *dimension finie*. Soit $C \subset E$ un convexe, non vide, tel que $0 \notin C$.

On se propose de montrer qu'il existe *toujours* un hyperplan qui sépare C et $\{0\}$ au sens large.

[Noter que :

i) On ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur C.

ii) Tout hyperplan est fermé (pourquoi ?)].

1) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ un sous-ensemble dénombrable de C, dense dans C. Pour chaque n on pose

$$C_n = \text{conv}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

(i.e. l'enveloppe convexe des points $x_1, x_2, \dots, x_n$). Vérifier que C_n est compact et que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ est dense dans C.

2) Montrer qu'il existe $f_n \in E'$ tel que

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle f_n, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C_n.$$

3) En déduire qu'il existe $f \in E'$ tel que

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle f, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Conclure.

4) Soient A et B deux sous-ensembles de E, convexes, non vides et disjoints. Montrer qu'il existe un hyperplan H qui sépare A et B au sens large.

$\boxed{\text{I.10}}$ Soit E un e.v.n. et soit I un ensemble d'indices. On se donne un sous-ensemble $(x_i)_{i\in I}$ de E et un sous-ensemble $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe $f \in E'$ tel que $\langle f, x_i\rangle = \alpha_i \quad \forall i \in I$.

(B) $\begin{cases} \text{Il existe une constante } M \geq 0 \text{ telle que pour toute partie finie } J \subset I \\ \text{et toute famille de réels } (\beta_i)_{i\in J} \text{ on a} \\ \left|\sum_{i\in J} \beta_i \alpha_i\right| \leq M \left\|\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right\|. \end{cases}$

Montrer que l'on peut choisir $f \in E'$ avec $\|f\|_{E'} \leq M$ dans l'implication (B) $\Rightarrow$ (A).

(Pour prouver que (B) $\Rightarrow$ (A), on pourra commencer par définir f sur l'espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{i\in I}$).

$\boxed{\text{I.11}}$ Soient E un e.v.n. et $M > 0$. Soient $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ n éléments de E' et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n réels fixés. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E \text{ tel que} \\ \|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon \quad \text{et} \quad \langle f_i, x_\varepsilon\rangle = \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$

(B) $\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \quad \forall \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ réels.

(Pour prouver que (B) $\Rightarrow$ (A) on pourra commencer par supposer que les (f_i) sont linéairement indépendants et s'inspirer de la démonstration du lemme III.3).
Comparer les exercices I.10, I.11 et le lemme III.3.

c lemme III.2 [illegible]

✓ $\boxed{\text{I.12}}$ Soient E un espace vectoriel, $f_1, f_2, \dots, f_n$ n formes linéaires sur E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ fixés. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe $x \in E$ tel que $f_i(x) = \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

(B) $\begin{cases} \text{Pour toute suite } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ de } \mathbb{R} \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0 \\ \text{on a aussi } \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = 0. \end{cases}$

$\boxed{\text{I.13}}$ Soit $E = \mathbb{R}^n$; on pose

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Soit M un sous-espace vectoriel de E tel que

$$M \cap P = \{0\}.$$

Montrer qu'il existe un hyperplan H de E tel que

$$M \subset H \quad \text{et} \quad H \cap P = \{0\}.$$

(On pourra commencer par prouver que $M^{\perp} \cap \operatorname{Int} P \neq \emptyset$).

$\boxed{\text{I.14}}$ Soit $E = \ell^1$ (espace des suites sommables ; voir exercices du Chapitre XI). On considère les deux ensembles :

$$X = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in E \ ; \ x_{2n} = 0, \quad \forall n \geq 1\}$$

et

$$Y = \{y = (y_n)_{n \geq 1} \in E \ ; \ y_{2n} = \frac{1}{2^n} y_{2n-1}, \quad \forall n \geq 1\}.$$

1) Vérifier que X et Y sont des sous-espaces fermés et montrer que

$$\overline{X + Y} = E.$$

2) Soit $c \in E$ défini par

$$\begin{cases} c_{2n-1} = 0 & \forall n \geq 1, \\ c_{2n} = \frac{1}{2^n} & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Vérifier que $c \notin X + Y$.

3) On pose $Z = X - c$. Noter que $Y \cap Z = \emptyset$. Existe-t-il un hyperplan fermé de E qui sépare Y et Z au sens large ?

Comparer le résultat obtenu à celui du théorème I.7 et à celui de l'exercice I.9.

Reprendre les mêmes questions dans $E = \ell^p$, $1 < p < \infty$, et dans $E = c_0$.

$\boxed{\text{I.15}}$ Soit E un e.v.n. et soit $C \subset E$ un convexe tel que $0 \in C$. On pose

$$C^* = \{f \in E' \ ; \ \langle f,x\rangle \leq 1 \quad \forall x \in C\},$$
$$C^{**} = \{x \in E \ ; \ \langle f,x\rangle \leq 1 \quad \forall f \in C^*\}.$$

1) Montrer que $C^{**} = \overline{C}$.

2) Que peut-on dire de C^* lorsque C est un sous-espace vectoriel de E ?

$\boxed{\text{I.16}}$ Soient E un e.v.n. et $f \in E'$ avec $f \neq 0$. On considère l'hyperplan H d'équation $[f = 0]$. On se propose de montrer que pour tout $x \in E$ on a

$$(*) \qquad \operatorname{dist}(x,H) = \operatorname*{Inf}_{y \in H} \|x-y\| = \frac{|\langle f,x\rangle|}{\|f\|}.$$

1) Vérifier que $|\langle f,x\rangle| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x,H) \quad \forall x \in E$.

2) Soit $u \in E$, $u \notin H$; en notant que $y = x - \frac{\langle f,x\rangle}{\langle f,u\rangle} u \in H$, montrer que

$$\operatorname{dist}(x,H) \leq \left|\frac{\langle f,x\rangle}{\langle f,u\rangle}\right| \|u\| \quad \forall x \in E.$$

3) Prouver (*).

4) Déterminer I_H^* et retrouver (*) à l'aide de la formule (17) du Chapitre I.

5) On prend maintenant $E = \{u \in C([0,1]) \ ; \ u(0) = 0\}$ et $\langle f,u\rangle = \int_0^1 u(t)dt$. Montrer que $\operatorname{dist}(u,H) = \left|\int_0^1 u(t)dt\right|$, $\forall u \in E$.

En déduire que si $u \in E$ et $u \notin H$, alors $\operatorname*{Inf}_{v \in H} \|u-v\|$ n'est pas atteint.

$\boxed{\text{I.17}}$ Vérifier que les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto]-\infty,+\infty]$ définies ci-dessous sont convexes s.c.i. et déterminer les fonctions conjuguées (On pourra aussi tracer les graphes et hachurer les épigraphes).

a) $\varphi(x) = ax + b$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.

b) $\varphi(x) = e^x$.

c) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

d) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$

e) $\varphi(x) = \begin{cases} -\log x & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

f) $\varphi(x) = \begin{cases} -(1-x^2)^{1/2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

g) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x| - \frac{1}{2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

h) $\varphi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ où $1 < p < \infty$.

i) $\varphi(x) = x^+ = \max\{x,0\}$.

j) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}x^p & \text{si } x \geq 0 \text{ où } 1 < p < +\infty \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$

k) $\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{p}x^p & \text{si } x \geq 0 \text{ où } 0 < p < 1 \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$

ℓ) $\varphi(x) = \frac{1}{p}[(|x|-1)^+]^p$ où $1 < p < \infty$.

$\boxed{\text{I.18}}$ Soit E un e.v.n.

1) Soient $\varphi, \psi : E \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ des fonctions telles que $\varphi \leq \psi$. Montrer que $\psi^* \leq \varphi^*$.

2) Soit $F : \mathbb{R} \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe s.c.i. telle que $F(0) = 0$ et $F(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = F(\|x\|)$.

Montrer que φ est convexe s.c.i. et que $\varphi^\star(f) = F^\star(\|f\|)$.

$\boxed{\text{I.19}}$ Soit $E = \ell^p$ avec $1 \leq p < \infty$ (voir exercices du Chapitre XI). Montrer que les fonctions $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ définies ci-dessous sont convexes s.c.i. et déterminer les fonctions conjuguées.

On note $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$.

a) $$\varphi(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k|x_k|^2 & \text{si } \sum\limits_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) $$\varphi(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} |x_k|^k$$

(vérifier que cette série est convergente pour tout $x \in E$).

c) $$\varphi(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k| & \text{si } \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{I.20}}$ Soient $E = E' = \mathbb{R}^2$ et $C = \{[x_1,x_2] \; ; \; x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$.

On définit sur E la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sqrt{x_1 x_2} & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

1) Montrer que φ est convexe s.c.i. sur E.

2) Déterminer $\varphi^\star$.

3) On introduit l'ensemble $D = \{[x_1,x_2] \; ; \; x_1 = 0\}$ et la fonction $\psi = I_D$; calculer les quantités

$$\inf_{x \in E}\{\varphi(x) + \psi(x)\} \quad \text{et} \quad \sup_{f \in E'}\{-\varphi^\star(-f) - \psi^\star(f)\}.$$

4) Comparer à la conclusion du théorème I.11 et expliquer la différence.

I.21 Soient E un e.v.n. et $A \subset E$ un fermé non vide. On pose

$$\varphi(x) = \mathrm{dist}(x,A) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} \|x-a\| .$$

1) Vérifier que $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \|x-y\| \quad \forall x,y \in E$.

2) On suppose que A est convexe. Montrer que φ est convexe.

3) Inversement prouver que si φ est convexe, alors A est convexe.

4) Montrer que $\varphi^* = (I_A)^* + I_{B_{E'}}$

(pour tout A, non nécessairement convexe).

I.22 *Inf-convolution*.

Soit E un e.v.n. Etant données deux fonctions $\varphi, \psi : E \to]-\infty,+\infty]$ on définit l'*inf-convolution* de φ et ψ de la manière suivante : pour tout $x \in E$ on pose

$$(\varphi \nabla \psi)(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in E} \{\varphi(x-y) + \psi(y)\}.$$

On remarquera que

i) $(\varphi \nabla \psi)(x)$ peut prendre les valeurs $\pm\infty$,

ii) $(\varphi \nabla \psi)(x) < +\infty$ si et seulement si $x \in D(\varphi) + D(\psi)$.

1) On suppose que $D(\varphi^*) \cap D(\psi^*) \neq \phi$. Vérifier que $(\varphi \nabla \psi)$ ne prend jamais la valeur $-\infty$ et montrer que

$$(\varphi \nabla \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

2) On suppose que $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \phi$. Montrer que

$$(\varphi+\psi)^* \leq (\varphi^* \nabla \psi^*) \text{ sur } E'.$$

3) On suppose que φ et ψ sont convexes et qu'il existe $x_0 \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ tel que φ soit continue en x_0. Montrer que

$$(\varphi+\psi)^* = (\varphi^* \nabla \psi^*) \text{ sur } E'.$$

4) On suppose que φ et ψ sont convexes s.c.i. et que $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \phi$. Montrer que

$$(\varphi^* \nabla \psi^*)^* = (\varphi+\psi) \text{ sur } E.$$

Etant donnée une fonction $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$, on pose

$$\text{epist}\,\varphi = \{[x,\lambda] \in E\times\mathbb{R}\ ;\ \varphi(x) < \lambda\}.$$

5) Vérifier que φ est convexe si et seulement si epist φ est un sous-ensemble convexe de $E\times\mathbb{R}$.

6) Soient $\varphi,\psi : E \to]-\infty,+\infty]$ des fonctions telles que $D(\varphi^*)\cap D(\psi^*) \neq \phi$. Montrer que

$$\text{epist}(\varphi\nabla\psi) = (\text{epist}\,\varphi) + (\text{epist}\,\psi)$$

(cette égalité s'entend au sens de l'addition algébrique de sous-ensembles de $E\times\mathbb{R}$).

7) En déduire que si $\varphi,\psi : E \to]-\infty,+\infty]$ sont des fonctions convexes telles que $D(\varphi^*)\cap D(\psi^*)\neq\phi$, alors $(\varphi\nabla\psi)$ est une fonction convexe.

I.23 *Régularisation par inf-convolution.*

Soit E un e.v.n. et soit $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ une function convexe s.c.i. telle que $\varphi\not\equiv+\infty$. On se propose de construire une suite de fonctions (φ_n) telle que :

(i) Pour tout n, $\varphi_n : E \to]-\infty,+\infty[$ est convexe et continue,

(ii) Pour tout $x\in E$, $\varphi_n(x)$ converge en croissant vers $\varphi(x)$.

A cet effet, on pose

$$\varphi_n(x) = \operatorname*{Inf}_{y\in E}\{n\|x-y\| + \varphi(y)\}.$$

1) Montrer que l'on peut trouver N assez grand tel que si $n\geq N$, alors $\varphi_n : E \to]-\infty,+\infty[$. Dans toute la suite on prendra $n\geq N$.

2) Montrer que φ_n est convexe (voir l'exercice I.22) et que

$$|\varphi_n(x_1)-\varphi_n(x_2)| \leq n\|x_1-x_2\| \quad \forall x_1,x_2\in E.$$

3) Déterminer $(\varphi_n)^*$.

4) Vérifier que $\varphi_n(x)\leq\varphi(x)$ $\forall x\in E$, $\forall n$. Montrer que pour tout $x\in E$ la suite $(\varphi_n(x))_n$ est croissante.

5) Soit $x\in D(\varphi)$; on choisit $y_n\in E$ tel que

$$\varphi_n(x) \leq n\|x-y_n\| + \varphi(y_n) \leq \varphi_n(x) + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

6) Pour $x \notin D(\varphi)$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty$ (on pourra raisonner par l'absurde).

I.24 *Semi-produit scalaire.*

Soit E un e.v.n.

1) Soit $\varphi : E \to]-\infty,+\infty[$ convexe. Etant donnés $x,y \in E$, on considère la fonction

$$h(t) = \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t}, \quad t > 0.$$

Vérifier que h est croissante sur $]0,+\infty[$ et en déduire que

$$\lim_{t\downarrow 0} h(t) = \operatorname*{Inf}_{t>0} h(t) \text{ existe dans } [-\infty,+\infty[.$$

On définit le *semi-produit scalaire* $[x,y]$ par

$$[x,y] = \operatorname*{Inf}_{t>0} \frac{1}{2t}\left[\|x+ty\|^2 - \|x\|^2\right].$$

2) Montrer que $|[x,y]| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y \in E$.

3) Montrer que

$$[x, \lambda x + \mu y] = \lambda \|x\|^2 + \mu[x,y] \quad \forall x,y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \mu \geq 0$$

et

$$[\lambda x, \mu y] = \lambda\mu[x,y] \quad \forall x,y \in E, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall \mu \geq 0.$$

4) Montrer que pour tout $x \in E$, la fonction $y \mapsto [x,y]$ est convexe.

Montrer que la fonction $G(x,y) = -[x,y]$ est s.c.i. sur $E \times E$.

5) Montrer que

$$[x,y] = \operatorname*{Max}_{f \in F(x)} \langle f, y \rangle \quad \forall x,y \in E$$

où F désigne l'application de dualité (voir corollaire I.3 du cours et exercice I.1). On pourra poser $\alpha = [x,y]$ et appliquer le théorème I.11 aux fonctions φ et ψ définies par

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\|x+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad z \in E$$

et

$$\psi(z) = \begin{cases} -t\alpha & \text{pour } z = ty \text{ et } t \geq 0 \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

6) Déterminer $[x,y]$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ avec $1 \leq p < \infty$ ou bien $\|x\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}} |x_i|$.

(on pourra s'aider des résultats de l'exercice I.2).

$\boxed{\text{I.25}}$ *Normes et fonctions strictement convexes.*

Soit E un e.v.n. On dit que la *norme* $\| \ \|$ est strictement convexe[1] si

$$\|tx + (1-t)y\| < 1, \ \forall x,y \in E \text{ avec } x \neq y, \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \forall t \in]0,1[.$$

On dit qu'une *fonction* $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ est strictement convexe si

$$\varphi\big(tx + (1-t)y\big) < t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x,y \in E \text{ avec } x \neq y, \ \forall t \in]0,1[.$$

1) Montrer que la *norme* $\| \ \|$ est strictement convexe si et seulement si la *fonction* $\varphi(x) = \|x\|^2$ est strictement convexe.

2) Même question avec $\varphi(x) = \|x\|^p$ et $1 < p < \infty$.

$\boxed{\text{I.26}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $G \subset E$ un sous-espace fermé. Soit $T : G \to F$ une application linéaire continue.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas toujours de prolongement $\tilde{T} : E \to F$ linéaire continu. A cet effet on considère un espace de Banach E et un sous-espace fermé $G \subset E$ sans supplémentaire topologique (voir la remarque 8 du Chapitre II). On prend $F = G$ et $T = I$. Montrer que T n'admet aucun prolongement $\tilde{T} : E \to F$ linéaire continu. (On pourra raisonner par l'absurde).

Comparer à la conclusion du Corollaire I.2.

(1) Dans ce cas on dit aussi que E est strictement convexe.

CHAPITRE I

$\boxed{\text{I.1}}$

1) Noter que l'égalité $<f,x> = \|x\|^2$ entraîne $\|x\| \leqslant \|f\|$. $F(x)$ est non vide d'après le Corollaire I.3 du cours. Il est clair, grâce à la seconde forme de $F(x)$, que $F(x)$ est convexe et fermé.

2) Dans un e.v.n. strictement convexe un ensemble convexe, non vide et contenu dans une sphère est réduit à un seul point.

3) Noter que

$$<f,y> \leqslant \|f\| \, \|y\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2.$$

Inversement, supposons que f vérifie :

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant <f,y-x> \quad \forall y \in E.$$

Dans (1) on choisit d'abord $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$; en faisant varier λ, il vient $<f,x> = \|x\|^2$. On choisit ensuite dans (1), y avec $\|y\| = \delta > 0$; il vient

$$<f,y> \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Par conséquent

$$\delta\|f\| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\| = \delta}} <f,y> \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

On conclut en prenant $\delta = \|x\|$.

4) Si $f \in F(x)$ on a

$$\frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant <f,y-x>$$

et si $g \in F(y)$ on a

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \leqslant \langle g, x-y \rangle .$$

Par addition il vient $\langle f-g, x-y \rangle \geqslant 0$. Par ailleurs on notera que

$$\begin{aligned} \langle f-g, x-y \rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle f, y \rangle - \langle g, x \rangle \\ &\geqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| . \end{aligned}$$

5) D'après la question 4) on sait déjà que $\|x\| = \|y\|$. D'autre part on a

$$\langle F(x)-F(y), x-y \rangle = [\,\|x\|^2 - \langle F(x), y \rangle\,] + [\,\|y\|^2 - \langle F(y), x \rangle\,]$$

et les termes entre crochets sont $\geqslant 0$.

Donc $\|x\|^2 = \|y\|^2 = \langle F(x), y \rangle = \langle F(y), x \rangle$; ce qui implique $F(x) \in F(y)$, d'où $F(x) = F(y)$ grâce à la question 2).

$\boxed{\text{I.2}}$

1a) $$\|f\|_{E'} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i| .$$

1b) $f \in F(x)$ si et seulement pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$ on a :

$$f_i = \begin{cases} (\operatorname{sign} x_i)\, \|x\|_1 & \text{si } x_i \neq 0, \\ \text{arbitraire dans l'intervalle } [-\|x\|_1, +\|x\|_1] & \text{si } x_i = 0. \end{cases}$$

2a) $$\|f\|_{E'} = \sum_{i=1}^{n} |f_i| .$$

2b) Etant donné $x \in E$ on considère

$$I = \{1 \leqslant i \leqslant n \ ; \ |x_i| = \|x\|_\infty\} .$$

Alors $f \in F(x)$ si et seulement si on a

(i) $f_i = 0 \quad \forall i \notin I$

(ii) $f_i x_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I$ et $\displaystyle\sum_{i \in I} |f_i| = \|x\|_\infty$.

3) $$\|f\|_{E'} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\Big)^{1/2}$$

et $f \in F(x)$ si et seulement si on a $f_i = x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$. Plus généralement on a

$$\|f\|_{E'} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\Big)^{1/p'} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

et $f \in F(x)$ si et seulement si on a $f_i = \dfrac{|x_i|^{p-2} x_i}{\|x\|_p^{p-2}}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

$\boxed{\text{I.3}}$

1) $\|f\|_{E'} = 1$ $\left(\text{noter que } f(t^\alpha) = \frac{1}{1+\alpha},\ \alpha > 0\right)$.

2) S'il existait un tel $u \in E$ on aurait $\int_0^1 (1-u)dt = 0$ et donc $u \equiv 1$ - absurde.

$\boxed{\text{I.5}}$

1) Soit P la famille des sous-ensembles de E linéairement indépendants. Il est facile de voir que P ordonné par l'inclusion est inductif. Grâce au lemme de Zorn, P admet un élément maximal ; c'est une base algébrique $(e_i)_{i\in I}$. Comme $e_i \neq 0$ $\forall i \in I$, on peut les normaliser, et supposer que $\|e_i\| = 1$ $\forall i \in I$.

2) Comme E est de dimension infinie on peut supposer $\mathbb{N} \subset I$. Il existe une forme linéaire f (et une seule) telle que

$$f(e_i) = i \quad \text{si} \quad i \in \mathbb{N}$$

$$f(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \in I \setminus \mathbb{N}.$$

3) Supposons que I est dénombrable, i.e. $I = \mathbb{N}$. On considère F_n = espace vectoriel engendré par les $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors F_n est fermé (voir exercice XI.) et $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$. Grâce au lemme de Baire il existe n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. D'où $E = F_{n_0}$ - absurde.

$\boxed{\text{I.7}}$

1) Soient $x, y \in \overline{C}$, alors $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$ avec $x_n, y_n \in C$. Donc $tx + (1-t)y = \lim\,[tx_n + (1-t)y_n]$ et par suite $tx + (1-t)y \in \overline{C}$ $\forall t \in [0,1]$. Soient $x, y \in \operatorname{Int} C$; alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset C$ et $B(y,r) \subset C$. Par suite

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) \subset C \quad \forall t \in [0,1],$$

or $tB(x,r) + (1-t)B(y,r) = B[tx + (1-t)y, r]$.

2) Soit $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset C$. On a

$$tx + (1-t)B(y,r) \subset C, \quad \forall t \in [0,1],$$

c'est-à-dire $B[tx + (1-t)y, (1-t)r] \subset C$. Par conséquent $tx + (1-t)y \in \operatorname{Int} C$ $\forall t \in [0,1[$.

3) On fixe $y_0 \in C$. Etant donné $x \in C$ on a $x = \lim_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{n})x + \frac{1}{n}y_0]$. Or $(1-\frac{1}{n})x + \frac{1}{n}y_0 \in \operatorname{Int} C$ et donc $x \in \overline{\operatorname{Int} C}$.

On a ainsi prouvé que $C \subset \overline{\mathrm{Int}\, C}$; d'où

$$\overline{C} \subset \overline{\mathrm{Int}\, C}.$$

$\boxed{\text{I.8}}$

1) On sait déjà que

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in E \quad \text{et} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Il reste à prouver que :

i) $p(-x) = p(x) \quad \forall x \in E$; ceci résulte de la symétrie de C.

ii) $[p(x) = 0] \Rightarrow (x = 0)$; ceci résulte du fait que C est borné. Plus précisément soit $L > 0$ tel que $\|x\| \leq L \quad \forall x \in C$. Il est facile de voir que

$$p(x) \geq \frac{1}{L}\|x\| \quad \forall x \in E.$$

2) C n'est pas borné ; par exemple la suite $u_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{1+nt}$ vérifie $u_n \in C$ et $\|u_n\| = \sqrt{n}$. On a $p(u) = \left(\int_0^1 |u(t)|^2 dt\right)^{1/2}$; p est une norme qui n'est pas équivalente à la norme $\| \ \|$.

$\boxed{\text{I.9}}$

1) Soit

$$P = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\}$$

de sorte que P est un compact de $\mathbb{R}^n$ et C_n est l'image de P par l'application $\lambda \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

2) On applique Hahn-Banach, deuxième forme géométrique à C_n et $\{0\}$. On normalise ensuite la forme linéaire associée à l'hyperplan qui sépare C_n et $\{0\}$.

3) Evident.

4) On applique ce qui précède à $C = A - B$.

$\boxed{\text{I.10}}$

(A) $\Rightarrow$ (B) est trivial.

(B) $\Rightarrow$ (A). Soit G l'espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{i \in I}$. Etant donné $x \in G$ on écrit $x = \sum_{i \in J} \beta_i x_i$ et on pose $g(x) = \sum_{i \in J} \beta_i \alpha_i$.

On vérifie, grâce à l'hypothèse (B) que cette définition a un sens et que $|g(x)| \leq M\|x\|$ $\forall x \in G$. On prolonge ensuite g à E à l'aide du Corollaire I.2.

I.11

(A) $\Rightarrow$ (B) est trivial.

(B) $\Rightarrow$ (A). On suppose d'abord que les (f_i) sont linéairement indépendants. On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = (\langle f_1, x\rangle, \langle f_2, x\rangle, \dots, \langle f_n, x\rangle)$.

Soit $C = \{x \in E \; ; \; \|x\| \leq M+\varepsilon\}$. On cherche à montrer que $\alpha \in \varphi(C)$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\alpha \notin \varphi(C)$; on sépare $\varphi(C)$ et $\{\alpha\}$ au sens large (voir exercice I.9). Il existe donc $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta \neq 0$ tel que $\beta \cdot \varphi(x) \leq \beta \cdot \alpha$, $\forall x \in C$, i.e. $\langle \sum \beta_i f_i, x\rangle \leq \sum \beta_i \alpha_i$ $\forall x \in C$. Par suite $(M+\varepsilon)\|\sum \beta_i f_i\| \leq \sum \beta_i \alpha_i$ et grâce à l'hypothèse (B) on a $\sum \beta_i f_i = 0$. Comme les (f_i) sont linéairement indépendants on déduit que $\beta = 0$, ce qui est absurde.

Dans le cas général, on extrait des (f_i) un système linéairement indépendant maximal et on lui applique ce qui précède.

I.15

1) Il est clair que $C \subset C^{**}$ et que C^{**} est fermé.

Inversement supposons qu'il existe $x_0 \in C^{**}$ tel que $x_0 \notin \overline{C}$. On sépare $\{x_0\}$ et $\overline{C}$ au sens strict ; il existe donc $f_0 \in E'$ et $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f_0, x\rangle < \alpha_0 < \langle f_0, x_0\rangle \quad \forall x \in \overline{C}.$$

Comme $0 \in C$, alors $\alpha_0 > 0$; posant $f = \frac{1}{\alpha_0} f_0$ il vient

$$\langle f, x\rangle < 1 < \langle f, x_0\rangle \quad \forall x \in C.$$

Donc $f \in C^*$ et on aboutit à une contradiction car $x_0 \in C^{**}$.

2) Si C est un sous-espace vectoriel alors

$$C^* = \{f \in E' \; ; \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in C\} = C^\perp.$$

$\boxed{\text{I.16}}$

1) Noter que si $y \in H$, alors

$$|\langle f,x\rangle| = |\langle f,x-y\rangle| \leq \|f\| \, \|x-y\| .$$

2) Trivial.

3) Il résulte de 2) que

$$\|f\| = \sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{|\langle f,u\rangle|}{\|u\|} \leq \frac{|\langle f,x\rangle|}{\operatorname{dist}(x,H)} .$$

4)
$$(I_H)^*(g) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g \in \mathbb{R}f \\ +\infty & \text{si} \quad g \notin \mathbb{R}f. \end{cases}$$

(deux formes linéaires qui ont le même noyau sont colinéaires ; voir lemme III.2).

La formule (17) du Chapitre I s'écrit alors

$$\operatorname{dist}(x,H) = \max_{\substack{g\in \mathbb{R}f\\ \|g\|\leq 1}} \langle g,x\rangle .$$

5) On sait (voir exercice I.3) que $\|f\| = 1$ et donc $\operatorname{dist}(u,H) = |\langle f,u\rangle|$.

Supposons qu'il existe $\overline{v} \in H$ tel que $\|u-\overline{v}\| = \operatorname{dist}(u,H)$. Alors on a

$$\|u-\overline{v}\| = \left|\int_0^1 u(t)dt\right| \quad (\text{grâce à } (*)).$$

Donc $\max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)-\overline{v}(t)| = \left|\int_0^1 [u(t)-\overline{v}(t)]dt\right|$; comme $u(0) = \overline{v}(0) = 0$ cette égalité n'est possible que si $u - \overline{v} \equiv 0$ et donc $u \in H$.

$\boxed{\text{I.17}}$

a) $$\varphi^*(f) = \begin{cases} -b & \text{si} \quad f = a \\ +\infty & \text{si} \quad f \neq a. \end{cases}$$

b) $$\varphi^*(f) = \begin{cases} f\log f - f & \text{si} \quad f > 0 \\ 0 & \text{si} \quad f = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad f < 0. \end{cases}$$

c) $\varphi^*(f) = \; |f|.$

d) $\varphi^*(f) = \; 0.$

e) $$\varphi^*(f) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad f \geq 0 \\ -1-\log|f| & \text{si} \quad f < 0. \end{cases}$$

f) $\varphi^*(f) = (1+f^2)^{1/2}$.

g) $\varphi^*(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}f^2 & \text{si } |f| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |f| > 1. \end{cases}$

h) $\varphi^*(f) = \frac{1}{p'}|f|^{p'}$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

i) $\varphi^*(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq f \leq 1 \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$

j) $\varphi^*(f) = \begin{cases} \frac{1}{p'}f^{p'} & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0. \end{cases}$

k) $\varphi^*(f) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \geq 0 \\ -\frac{1}{p'}|f|^{p'} & \text{si } f < 0. \end{cases}$

ℓ) $\varphi^*(f) = |f| + \frac{1}{p'}|f|^{p'}$.

$\boxed{\text{I.19}}$ Les fonctions conjuguées sont définies sur $\ell^{p'}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ par :

a) $\varphi^*(f) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|f_k|^2 & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|f_k|^2 < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

b) $\varphi^*(f) = \begin{cases} \sum_{k=2}^{+\infty} a_k|f_k|^{k/(k-1)} & \text{si } \sum_{k=2}^{+\infty} a_k|f_k|^{k/(k-1)} < +\infty \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$

avec $a_k = \dfrac{(k-1)}{k^{k/(k-1)}}$.

c) $\varphi^*(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|f\|_{\ell^\infty} \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

$\boxed{\text{I.20}}$

1) Evident.

2) $\varphi^* = I_A$ où $A = \{[f_1,f_2]\ ;\ f_1 \leq 0,\ f_2 \leq 0 \ \text{ et } \ 4f_1f_2 \geq 1\}$.

3) On a

$$\operatorname*{Inf}_{x\in E}\{\varphi(x)+\psi(x)\} = 0$$

et

$$\psi^* = I_{D^\perp} \quad \text{où} \quad D^\perp = \{[f_1,f_2]\ ;\ f_2 = 0\}\ ;$$

Donc

$$\varphi^{\star}(-f) + \psi^{\star}(f) = +\infty \quad \forall f \in E'$$

et par suite

$$\sup_{f\in E'} \left\{-\varphi^{\star}(-f) - \psi^{\star}(f)\right\} = -\infty \ ,$$

4) Les hypothèses du Théorème I.11 ne sont pas satisfaites : il n'existe pas de point $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) < +\infty$, $\psi(x_0) < +\infty$ et φ continue en x_0.

$\boxed{\text{I.21}}$

1) On a

$$\|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\| .$$

Prenant les $\inf\limits_{a\in A}$ il vient $\varphi(x) \leq \|x-y\| + \varphi(y)$. Echangeant x,y on obtient $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \|x-y\|$.

2) Soient $x,y \in E$ et $t \in [0,1]$ fixés. Etant donné $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ et $b \in A$ tels que

$$\|x-a\| \leq \varphi(x) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|y-b\| \leq \varphi(y) + \varepsilon .$$

Donc

$$\|tx + (1-t)y - [ta + (1-t)b]\| \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + \varepsilon .$$

Or $[ta + (1-t)b] \in A$ et donc

$$\varphi\left(tx + (1-t)y\right) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

3) Comme A est fermé, on a $A = \{x \in E \ ; \ \varphi(x) \leq 0\}$ et donc A est convexe si φ est convexe.

4) On a

$$\begin{aligned}\varphi^{\star}(f) &= \sup_{x\in E}\left\{ \langle f,x\rangle - \inf_{a\in A}\|x-a\| \right\} = \\ &= \sup_{x\in E}\ \sup_{a\in A}\left\{ \langle f,x\rangle - \|x-a\| \right\} = \\ &= \sup_{a\in A}\ \sup_{x\in E}\left\{ \langle f,x\rangle - \|x-a\| \right\} = \\ &= (I_A)^{\star}(f) + I_{B_{E'}}(f) .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{I.22}}$

1) Soit $f \in D(\varphi^*) \cap D(\psi^*)$. On a $\forall x,y \in E$

$$<f,x-y> - \varphi(x-y) \leq \varphi^*(f)$$
$$<f,y> \quad - \psi(y) \quad \leq \psi^*(f)$$

et par addition il vient

$$(\varphi \nabla \psi)(x) \geq <f,x> - \varphi^*(f) - \psi^*(f).$$

En particulier $(\varphi \nabla \psi)$ ne prend jamais la valeur $-\infty$. On a

$$\begin{aligned}(\varphi \nabla \psi)^*(f) &= \sup_{x\in E}\{<f,x> - \inf_{y\in E}[\varphi(x-y) + \psi(y)]\} \\ &= \sup_{x\in E}\sup_{y\in E}\{<f,x> - \varphi(x-y) - \psi(y)\} \\ &= \sup_{y\in E}\sup_{x\in E}\{<f,x> - \varphi(x-y) - \psi(y)\} \\ &= \varphi^*(f) + \psi^*(f).\end{aligned}$$

2) Remarquer que $(\varphi+\psi) \not\equiv +\infty$.

Il s'agit de vérifier que $\forall f,g \in E'$, $\forall x \in E$ on a

$$<f,x> - \varphi(x) - \psi(x) \leq \varphi^*(f-g) + \psi^*(g).$$

Ceci est évident si l'on écrit

$$<f,x> = <f-g,x> + <g,x>.$$

3) Etant donné $f \in E'$ il faut montrer que

$$\sup_{x\in E}\{<f,x> - \varphi(x) - \psi(x)\} = \inf_{g\in E'}\{\varphi^*(f-g) + \psi^*(g)\}. \tag{1}$$

Or

$$\sup_{x\in E}\{<f,x> - \varphi(x) - \psi(x)\} = -\inf_{x\in E}\{\tilde\varphi(x) + \psi(x)\}$$

avec $\tilde\varphi(x) = \varphi(x) - <f,x>$.

Appliquant le théorème I.11 aux fonctions $\tilde\varphi$ et ψ on obtient

$$\inf_{x\in E}\{\tilde\varphi(x) + \psi(x)\} = \sup_{g\in E'}\{-\tilde\varphi^*(-g) - \psi^*(g)\},$$

ce qui correspond précisément à (1).

4) On a

$$\begin{aligned}(\varphi^* \nabla \psi^*)^*(x) &= \sup_{f\in E'} \{<f,x> - \inf_{g\in E'} [\varphi^*(f-g) + \psi^*(g)]\} \\ &= \sup_{f\in E'} \sup_{g\in E'} \{<f,x> - \varphi^*(f-g) - \psi^*(g)\} \\ &= \sup_{g\in E'} \sup_{f\in E'} \{<f,x> - \varphi^*(f-g) - \psi^*(g)\} \\ &= \varphi^{**}(x) + \psi^{**}(x).\end{aligned}$$

5), 6) et 7) sont des questions faciles.

$\boxed{\text{I.23}}$

1) On sait (voir proposition I.9) qu'il existe $f \in E'$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(y) \geq <f,y> - C \quad \forall y \in E$. Si l'on prend $n \geq \|f\|$, on a $\varphi_n(x) \geq -n\|x\| - C > -\infty$.

2) La fonction φ_n est l'inf-convolution de deux fonctions convexes ; elle est donc convexe (voir question 7) de l'exercice I.22).

Pour prouver que $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leq n\|x_1 - x_2\|$ on raisonne comme à la question 1 de l'exercice I.21.

3) $(\varphi_n)^* = I_{nB_{E'}} + \varphi^*$ grâce à la question 1) de l'exercice I.22.

4) Facile.

5) D'après la question 1) on a $\varphi(y) \geq -\|f\|\,\|y\| - C$, $\forall y \in E$. D'où il vient

$$n\|x - y_n\| \leq \|f\|\,\|y_n\| + C + \varphi(x) + \frac{1}{n}.$$

On en déduit d'abord que $\|y_n\|$ reste borné quand $n \to +\infty$ et puis que $\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = 0$. On a donc $\varphi_n(x) \geq \varphi(y_n) - \frac{1}{n}$ et comme la fonction φ est s.c.i. il vient $\liminf_{n\to+\infty} \varphi_n(x) \geq \varphi(x)$.

6) Supposons par l'absurde qu'il existe une constante C telle que $\varphi_n(x) \leq C \ \forall n$. On choisit y_n comme à la question 5) et on voit que $y_n \to x$. On a $\varphi(y_n) \leq C + \frac{1}{n}$ et donc $\varphi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \varphi(y_n) \leq C$; ce qui est absurde.

$\boxed{\text{I.24}}$

4) Pour chaque $t > 0$ fixé la fonction

$$y \mapsto \frac{1}{2t}[\|x+ty\|^2 - \|x\|^2]$$

est convexe. Donc la fonction $y \mapsto [x,y]$ est convexe comme *limite* de fonctions convexes. D'autre part $G(x,y) = \sup_{t>0} -\frac{1}{2t}[\|x+ty\|^2 - \|x\|^2]$ est s.c.i. comme *sup* de fonctions continues.

5) On sait déjà (voir question 3) de l'exercice I.1) que

$$\frac{1}{2}\|x+ty\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, ty\rangle$$

et donc

$$[x,y] \geq \langle f,y\rangle \quad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x).$$

D'autre part on a

$$\varphi^\star(f) = \frac{1}{2}\|f\|^2 - \langle f,x\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

et

$$\psi^\star(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \langle f,y\rangle + \alpha \leq 0 \\ +\infty & \text{si } \langle f,y\rangle + \alpha > 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\operatorname*{Inf}_{z\in E}\{\varphi(z)+\psi(z)\} = 0$. On déduit alors du théorème I.11 qu'il existe $f_0 \in E'$ tel que $\varphi^\star(f_0) + \psi^\star(-f_0) = 0$, c'est à dire $\langle f_0, y\rangle \geq \alpha$ et $\frac{1}{2}\|f_0\|^2 - \langle f_0,x\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 = 0$. Il en résulte que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0,x\rangle = \|x\|^2$; donc $f_0 \in F(x)$.

6) a) $\underline{1<p<\infty}$, $[x,y] = \dfrac{\sum |x_i|^{p-2} x_i y_i}{\|x\|_p^{p-2}}$.

b) $\underline{p=1}$, $[x,y] = \|x\|_1 \Big[\sum_{x_i \neq 0} (\operatorname{sign} x_i) y_i + \sum_{x_i = 0} |y_i| \Big]$.

c) $\underline{p=\infty}$, $[x,y] = \operatorname*{Max}_{i\in I}(x_i, y_i)$ où $I = \{1 \leq i \leq n \ ; \ |x_i| = \|x\|_\infty\}$.

$\boxed{\text{I.26}}$ Soit $\tilde{T} : E \to F$ un prolongement linéaire continu de T. On vérifie aisément que $E = N(\tilde{T}) + G$ et $N(\tilde{T}) \cap G = \{0\}$. Donc $N(\tilde{T})$ serait un supplémentaire topologique de G - absurde.

CHAPITRE II

LES THÉORÈMES DE BANACH-STEINHAUS ET DU GRAPHE FERMÉ, RELATIONS D'ORTHOGONALITÉ, OPÉRATEURS NON-BORNÉS, NOTION D'ADJOINT, CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS SURJECTIFS.

II.1 *Continuité des fonctions convexes.*

Soit E un espace de Banach et soit $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe s.c.i. Soit $x_0 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$.

1) Montrer qu'il existe deux constantes $R>0$ et M telles que

$$\varphi(x) \leq M \quad \forall x \in E \quad \text{avec} \quad \|x-x_0\| \leq R.$$

[On pourra introduire les ensembles

$$F_n = \{x \in E \ ; \ \|x-x_0\| \leq \rho \quad \text{et} \quad \varphi(x) \leq n\}].$$

2) Montrer que $\forall r<R$, $\exists L \geq 0$ tel que

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leq L\|x_1-x_2\|, \ \forall x_1,x_2 \in E \quad \text{avec} \ \|x_i-x_0\| \leq r, \ i=1,2.$$

Plus précisément, on peut choisir $L = \dfrac{2[M-\varphi(x_0)]}{R-r}$.

II.2 Soit E un espace vectoriel et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

i) $p(x+y) \leq p(x)+p(y) \quad \forall x,y \in E$,

ii) pour tout $x \in E$ fixé la fonction $\lambda \mapsto p(\lambda x)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

iii) si une suite (x_n) de E vérifie $p(x_n) \to 0$, alors $p(\lambda x_n) \to 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que si une suite (x_n) de E vérifie $p(x_n) \to 0$ et si une suite (α_n) de $\mathbb{R}$ vérifie $\alpha_n \to \alpha$, alors

$$p(\alpha_n x_n) \to 0.$$

[Etant donné $\varepsilon > 0$ on pourra introduire les ensembles

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ |p(\lambda x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n\}].$$

$\boxed{\text{II.3}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit (T_n) une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que pour chaque $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une ~~une~~ limite notée Tx.

Montrer que si $x_n \to x$ dans E, alors $T_n x_n \to Tx$ dans F.

$\boxed{\text{II.4}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $a(x,y) : E \times F \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que :

i) pour tout $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto a(x,y)$ est continue,

ii) pour tout $y \in F$ fixé, l'application $x \mapsto a(x,y)$ est continue.

Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|a(x,y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \forall x \in E, \ \forall y \in F.$$

[On pourra introduire un opérateur linéaire $T : E \to F'$ et prouver que T est un opérateur borné grâce au corollaire II.4].

$\boxed{\text{II.5}}$ Soit E un espace de Banach et soit (ε_n) une suite de réels positifs telle que $\lim \varepsilon_n = 0$.

Soit (f_n) une suite de E' vérifiant la propriété :

$$\begin{cases} \exists r > 0, \ \forall x \in E \ \text{ avec } \|x\| < r, \ \exists C(x) \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \langle f_n, x \rangle \leq \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \text{ pour tout } n. \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) est bornée.

[On pourra introduire $g_n = \dfrac{f_n}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|}$] .

$\boxed{\text{II.6}}$ *Opérateurs monotones localement bornés.*

Soient E un espace de Banach et D(A) un sous-ensemble de E. On dit qu'une application $A : D(A) \subset E \to E'$ est *monotone* si elle vérifie

$$\langle Ax-Ay, x-y\rangle \geq 0 \quad \forall x,y \in D(A).$$

1) Soit $x_0 \in \text{Int } D(A)$. Montrer qu'il existe deux constantes $R>0$ et C telles que

$$\|Ax\| \leq C \quad \forall x \in D(A) \text{ avec } \|x-x_0\| < R.$$

[On pourra raisonner par l'absurde et construire une suite (x_n) de $D(A)$ telle que $x_n \to x_0$ et $\|Ax_n\| \to \infty$. Choisir $r>0$ tel que $B(x_0,r) \subset D(A)$. Utiliser la monotonie de A aux points x_n et x_0+x avec $\|x\| < r$ et appliquer l'exercice II.5].

2) Généraliser le résultat de la question précédente à $x_0 \in \text{Int}[\text{conv } D(A)]$.

3) Généraliser le résultat de la question 1) au cas multivoque, c'est-à-dire que pour tout $x \in D(A)$, Ax est un sous-ensemble non vide de E' ; la monotonie s'exprime alors par l'inégalité

$$\langle f-g, x-y\rangle \geq 0 \quad \forall x,y \in D(A), \quad \forall f \in Ax, \quad \forall g \in Ay.$$

II.7 Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de réels et soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que pour élément $x = (x_n)$ de ℓ^p, alors $\sum|\alpha_n||x_n| < \infty$.

Montrer que $\alpha \in \ell^{p'}$.

(Pour la définition de ℓ^p voir exercices du Chapitre XI).

II.8 Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E'$ un opérateur linéaire tel que

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

Montrer que T est continu.

[On établira ce résultat par deux méthodes :

(i) Utiliser l'exercice II.6.

(ii) Appliquer le théorème du graphe fermé].

II.9 Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E'$ un opérateur linéaire tel que

$$<Tx,y> = <Ty,x> \quad \forall x,y \in E.$$

Montrer que T est continu.

$\boxed{\text{II.10}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que T est surjectif.

1) Soit M un sous-ensemble de E. Montrer que T(M) est fermé dans F si et seulement si $M + N(T)$ est fermé dans E.

2) En déduire que si M est un sous-espace vectoriel fermé de E et si $\dim N(T) < \infty$, alors T(M) est fermé.

$\boxed{\text{II.11}}$ Soient E un espace de Banach, $F = \ell^1$ et $T \in \mathcal{L}(R,F)$. On suppose que T est surjectif.

Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $T \circ S = I_F$; autrement dit T est inversible à droite.

[Ne pas appliquer le théorème II.10, mais chercher à définir explicitement S en introduisant la base canonique de ℓ^1].

$\boxed{\text{II.12}}$ Soient E et F deux espaces de Banach munis des normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que R(T) est fermé et que $\dim N(T) < \infty$. On considère sur E une autre norme $| \ |$, plus faible que la norme $\| \ \|_E$, i.e. $|x| \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|x\|_E \leq C\left(\|Tx\|_F + |x|\right) \quad \forall x \in E.$$

[On pourra raisonner par l'absurde].

$\boxed{\text{II.13}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{T \in \mathcal{L}(E;F) \ ; \ T \text{ est inversible à gauche}\}$$

est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.

[On pourra commencer par prouver que l'ensemble

$$\mathcal{O} = \{T \in \mathcal{L}(E,F) \ ; \ T \text{ est bijectif}\}$$

est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$].

II.14 Soient E et F deux espaces de Banach.

1) Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $R(T)$ est fermé si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\text{dist}(x, N(T)) \leq C\|Tx\| \quad \forall x \in E.$$

[On pourra utiliser l'espace quotient $E/N(T)$; voir exercice XI.

2) Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné et fermé. Montrer que $R(A)$ est fermé si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\text{dist}(u, N(A)) \leq C\|Au\| \quad \forall u \in D(A).$$

[On pourra introduire l'opérateur $T : E_0 \to F$ avec $E_0 = D(A)$ muni de la norme du graphe, $T = A$ et appliquer la question 1)].

II.15 Soient E_1, E_2 et F trois espaces de Banach. Soient $T_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$. On suppose que

$$R(T_1) \cap R(T_2) = \{0\} \quad \text{et} \quad R(T_1) + R(T_2) = F.$$

Montrer que $R(T_1)$ et $R(T_2)$ sont fermés.

[Il est utile d'introduire l'application $T : E_1 \times E_2 \to F$ définie par

$$T[x_1,x_2] = T_1x_1 + T_2x_2].$$

II.16 Soit E un espace de Banach. Soient G et L deux sous-espaces fermés de E. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\text{dist}(x, G \cap L) \leq C \, \text{dist}(x,L) \quad \forall x \in G.$$

Montrer que $G + L$ est fermé.

II.17 Soit $E = \ell^1$, de sorte que $E' = \ell^\infty$ (voir exercices du Chapitre XI).

On considère $N = c_0$ comme un sous-espace fermé de E'.

Déterminer

$$N^\perp = \{x \in E \; ; \; \langle f,x \rangle = 0 \quad \forall f \in N\}$$

et

$$N^{\perp\perp} = \{f \in E' \; ; \; \langle f,x \rangle = 0 \quad \forall x \in N^\perp\};$$

vérifier que $N^{\perp\perp} \neq N$.

✓ $\boxed{\text{II.18}}$ Soit $E = C([0,1])$ muni de sa norme usuelle. On considère l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par

$$D(A) = C^1([0,1]) \quad \text{et} \quad Au = u'.$$

1) Vérifier que $\overline{D(A)} = E$.

2) A est-il borné ?

3) A est-il fermé ?

4) On considère l'opérateur $B : D(B) \subset E \to E$ défini par

$$D(B) = C^2([0,1]) \quad \text{et} \quad Bu = u'.$$

B est-il fermé ?

$\boxed{\text{II.19}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné avec $\overline{D(A)} = E$.

1) Montrer que

$$N(A^{\star}) = R(A)^{\perp}$$
et
$$N(A) \subset R(A^{\star})^{\perp}.$$

2) On suppose de plus que A est fermé ; montrer que

$$N(A) = R(A^{\star})^{\perp}.$$

On abordera directement ces questions sans chercher à reproduire la démonstration du corollaire II.17. Pour la question 2) on pourra raisonner par l'absurde, considérer $u \in R(A^{\star})^{\perp}$ tel que $[u,0] \notin G(A)$ et appliquer Hahn-Banach.

$\boxed{\text{II.20}}$ Soient E un espace de Banach et $A : D(A) \subset E \to E'$ un opérateur non-borné avec $\overline{D(A)} = E$.

1) On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\text{(P)} \qquad \langle Au, u \rangle \geq -C\|Au\|^2 \quad \forall u \in D(A).$$

Montrer que $N(A) \subset N(A^{\star})$.

2) Inversement on suppose que $N(A) \subset N(A^{\star})$. Montrer que si A est fermé et si $R(A)$ est fermé, alors il existe une constante C telle que l'on ait (P).

[II.21] Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$.

On considère l'opérateur $B : D(B) \subset E \to F$ défini par

$$D(B) = D(A), \quad B = A + T.$$

1) Montrer que B est fermé.

2) Montrer que $D(B^*) = D(A^*)$ et $B^* = A^* + T^*$.

[II.22] Soit E un espace de Banach de dimension infinie. On fixe un élément $a \in E$, $a \neq 0$, ainsi qu'une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ non continue (de telles formes existent, voir exercice I.5). On considère l'opérateur $A : E \to E$ défini par

$$Ax = x - f(x)a, \quad x \in E.$$

1) Déterminer $N(A)$ et $R(A)$.

2) $G(A)$ est-il fermé ?

3) Déterminer A^* (préciser avec soin $D(A^*)$)

4) Déterminer $N(A^*)$ et $R(A^*)$.

5) Comparer $N(A)$ et $R(A^*)^{\perp}$ ainsi que $N(A^*)$ et $R(A)^{\perp}$.

6) Confronter les résultats obtenus avec ceux de l'exercice II.19.

[II.23] On se propose ici de donner un exemple d'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ non-borné, fermé avec $\overline{D(A)} = E$ tel que $\overline{D(A^*)} \neq E'$.

Soit $E = \ell^1$, de sorte que $E' = \ell^\infty$. On considère l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par

$$D(A) = \{u = (u_n) \in \ell^1 \; ; \; (n u_n) \in \ell^1\}$$

et
$$Au = (n u_n).$$

1) Vérifier que $\overline{D(A)} = E$ et que A est fermé.

2) Déterminer $D(A^*)$, A^* et $\overline{D(A^*)}$.

$\boxed{\text{II.24}}$ Soit E un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle - voir corollaire II.17 - que

$$N(T)^{\perp} \supset \overline{R(T^{*})}.$$

On se propose de donner un exemple où cette inclusion est stricte.

Soit $E = \ell^1$ de sorte que $E' = \ell^{\infty}$. On considère l'opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$Tu = \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1} \quad \text{où} \quad u = (u_n)_{n \geq 1}.$$

Déterminer $N(T)$, $N(T)^{\perp}$, T^{*}, $R(T^{*})$ et $\overline{R(T^{*})}$.

$\boxed{\text{II.25}}$ Soient E, F et G trois espaces de Banach. Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné avec $\overline{D(A)} = E$. Soit $T \in \mathcal{L}(F,G)$. On considère l'opérateur $B : D(B) \subset E \to G$ défini par $D(B) = D(A)$ et $B = T \circ A$.

1) Déterminer B^{*}.

2) Montrer que B n'est pas nécessairement fermé même si A est fermé.

$\boxed{\text{II.26}}$ Soient E, F et G trois espaces de Banach.

1) Soient $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $(S \circ T)^{*} = T^{*} \circ S^{*}$.

2) On suppose que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijectif. Montrer que T^{*} est bijectif et que $(T^{*})^{-1} = (T^{-1})^{*}$.

$\boxed{\text{II.27}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\psi : F \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe. On suppose qu'il existe un point de $R(T)$ où ψ est finie et continue.

On pose

$$\varphi(x) = \psi(Tx),\ x \in E.$$

Montrer que pour tout $f \in F'$ on a

$$\varphi^{*}(T^{*}f) = \inf_{g \in N(T^{*})} \psi^{*}(f-g) = \min_{g \in N(T^{*})} \psi^{*}(f-g).$$

CHAPITRE II

$\boxed{\text{II.1}}$ Quitte à faire une translation on peut toujours supposer que $x_0 = 0$.

1) Soit $X = \{x \in E \ ; \ \|x\| \leq \rho\}$; on choisit $\rho > 0$ assez petit pour que $X \subset D(\varphi)$. Les ensembles F_n sont fermés et $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$. D'après le lemme de Baire il existe n_0 tel que $\mathrm{Int}(F_{n_0}) \neq \phi$. Soient $x_1 \in E$ et $\rho_1 > 0$ tels que $B(x_1, \rho_1) \subset F_{n_0}$.

Soit maintenant $x \in E$ avec $\|x\| < \frac{1}{2}\rho_1$; on écrit $x = \frac{1}{2}(x_1 + 2x) + \frac{1}{2}(-x_1)$ et donc $\varphi(x) \leq \frac{1}{2} n_0 + \frac{1}{2}\varphi(-x_1)$.

2) Il existe $\xi \in E$ et $t \in [0,1]$ tels que $\|\xi\| = R$ et $x_2 = tx_1 + (1-t)\xi$. On a donc

$$\varphi(x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)M$$

et par suite $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq (1-t)[M - \varphi(x_1)]$.

Or $x_2 - x_1 = (1-t)(\xi - x_1)$, et par conséquent $\|x_2 - x_1\| \geq (1-t)(R-r)$; d'où

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq \frac{\|x_2 - x_1\|}{R - r}[M - \varphi(x_1)] .$$

D'autre part si l'on prend $x_2 = 0$ il vient $t\|x_1\| = (1-t)R$ et donc

$$(1-t) = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\| + R} \leq \frac{1}{2} .$$

On obtient alors $\varphi(0) - \varphi(x_1) \leq \frac{1}{2}[M - \varphi(x_1)]$ et par suite $M - \varphi(x_1) \leq 2[M - \varphi(0)]$.

$\boxed{\text{II.2}}$ Noter que les F_n sont fermés et que $\bigcup_{n \geq 1} F_n = \mathbb{R}$. Grâce au lemme de Baire, il existe n_0 tel que $\mathrm{Int}\, F_{n_0} \neq \phi$. Donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que $|p((\lambda_0 + t)x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n_0, \ \forall t$ avec $|t| < \delta$.

D'autre part on note que

$$p(\alpha_k x_k) \leqslant p\big((\lambda_0+\alpha_k-\alpha)x_k\big) + p\big((\alpha-\lambda_0)x_k\big)$$

$$-p(\alpha_k x_k) \leqslant -p\big((\lambda_0+\alpha_k-\alpha)x_k\big) + p\big((\lambda_0-\alpha)x_k\big).$$

Donc $|p(\alpha_k x_k)| \leqslant 2\varepsilon$ pour k assez grand.

$\boxed{\text{II.4}}$ Grâce à i) on peut introduire un opérateur linéaire

$$T : E \to F' \text{ tel que } a(x,y) = \langle Tx, y\rangle_{F',F} \quad \forall x,y.$$

Il s'agit de prouver que T est un opérateur borné, i.e. que $T(B_E)$ est borné dans F'. Grâce au corollaire II.4 il suffit de *fixer* $y \in F$ et de montrer que $\langle T(B_E), y\rangle$ est borné ; ceci résulte de ii).

$\boxed{\text{II.6}}$

1) On a $\langle Ax_n - A(x_0+x), x_n - x_0 - x\rangle \geqslant 0$ et donc $\langle Ax_n, x\rangle \leqslant \varepsilon_n \|Ax_n\| + C(x)$ avec $\varepsilon_n = \|x_n - x_0\|$ et $C(x) = \|A(x_0+x)\|(1+\|x\|)$ (en supposant que $\varepsilon_n \leqslant 1$, $\forall n$). On déduit de l'exercice II.5 que $\|Ax_n\|$ reste borné - absurde.

2) Supposons qu'il existe une suite (x_n) de D(A) telle que $x_n \to x_0$ et $\|Ax_n\| \to \infty$. On choisit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \operatorname{conv} D(A)$.

Donc si $x \in E$ avec $\|x\| < r$, on peut écrire

$$x_0 + x = \sum_{i=1}^m t_i y_i \quad \text{avec} \quad t_i \geqslant 0 \ \ \forall i, \ \ \sum_{i=1}^m t_i = 1 \quad \text{et} \quad y_i \in D(A) \ \ \forall i,$$

(bien entendu t_i, y_i et m dépendent de x). On a

$$\langle Ax_n - Ay_i, x_n - y_i\rangle \geqslant 0$$

et donc $t_i\langle Ax_n, x_n - y_i\rangle \geqslant t_i\langle Ay_i, x_n - y_i\rangle$. Par conséquent il vient

$$\langle Ax_n, x_n - x_0 - x\rangle \geqslant \sum_{i=1}^m t_i \langle Ay_i, x_n - y_i\rangle.$$

D'où

$$\langle Ax_n, x\rangle \leqslant \varepsilon_n \|Ax_n\| + C(x)$$

avec $\varepsilon_n = \|x_n - x_0\|$ et $C(x) = \sum_{i=1}^m t_i \|Ay_i\|(1 + \|x_0 - y_i\|)$.

3) Soit $x_0 \in \mathrm{Int}\, D(A)$. On montre comme à la question 1) qu'il existe deux constantes $R>0$ et C telles que

$$\|f\| \leq C \quad \forall x \in D(A) \quad \text{avec } \|x-x_0\| < R \quad \text{et} \quad \forall f \in Ax.$$

$\boxed{\text{II.7}}$ Pour $x \in \ell^p$ on pose $T_n x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, de sorte que pour chaque $x \in \ell^p$, $T_n x$ converge vers une limite. D'après le théorème de Banach-Steinhaus il existe une constante C telle que

$$|T_n x| \leq C \|x\|_{\ell^p} \quad \forall x \in \ell^p \quad \forall n.$$

En choisissant convenablement x on voit que $\alpha \in \ell^{p'}$ et $\|\alpha\|_{\ell^{p'}} \leq C$.

$\boxed{\text{II.8}}$ Méthode (ii). Vérifions que le graphe de T est fermé. Soit (x_n) une suite de E avec $x_n \to x$ et $Tx_n \to f$. On a $\langle Tx_n - Ty, x_n - y\rangle \geq 0$ et à la limite

$$\langle f - Ty, x-y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in E.$$

Choisissant $y = x + tz$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $z \in E$ on voit que $f = Tx$.

$\boxed{\text{II.10}}$

1) On suppose d'abord que $T(M)$ est fermé. Alors $T^{-1}(T(M))$ est fermé ; or $T^{-1}(T(M)) = M + N(T)$.

Inversement supposons que $M + N(T)$ est fermé. Comme T est surjectif on a $T\big(\complement(M+N(T))\big) = \complement T(M)$. D'après le théorème de l'application ouverte on sait que $T\big(\complement(M+N(T))\big)$ est ouvert, et donc $T(M)$ est fermé.

2) On sait (voir exercice XI.) que si M est un sous-espace vectoriel fermé et si N est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors $M+N$ est fermé.

$\boxed{\text{II.11}}$ D'après le théorème de l'application ouverte il existe $c>0$ tel $T(B_E) \supset c\, B_F$. Soit (e_n) la base canonique de ℓ^1, c'est-à-dire

$$e_n = (0,0,\dots,0,\underset{(n)}{1},0,\dots).$$

Il existe $u_n \in E$ avec $\|u_n\| \leq 1/c$ tel que $T(u_n) = e_n$.

Etant donné $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell^1$ on pose $Sy = \sum_{n=1}^{\infty} y_n u_n$. Cette série est bien convergente et on vérifie facilement que S répond à la question.

$\boxed{\text{II.12}}$ Quitte à considérer T comme un opérateur de E sur $R(T)$, on peut toujours supposer que T est *surjectif*.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite (x_n) de E telle que

$$\|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \|Tx_n\|_F + |x_n| < \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème de l'application ouverte il existe une constante $c > 0$ telle que $T(B_E) \supset c\, B_F$. Comme $\|Tx_n\| < \frac{1}{n}$, il existe $y_n \in E$ tel que

$$Tx_n = Ty_n \quad \text{et} \quad \|y_n\| < \frac{1}{nc}.$$

On peut donc écrire $x_n = y_n + z_n$ avec $z_n \in N(T)$ et $\|y_n\|_E \to 0$. Par suite $\|z_n\|_E \to 1$.

D'autre part $|x_n| < \frac{1}{n}$; d'où $|z_n| < \frac{1}{n} + |y_n| \leq \frac{1}{n} + M\|y_n\|$ et $|z_n| \to 0$.

Ceci est impossible car les normes $\|\ \|_E$ et $|\ |$ sont équivalentes sur $N(T)$ (puisque $\dim N(T) < \infty$).

$\boxed{\text{II.13}}$ Soit d'abord $T \in \mathcal{O}$; on sait (voir corollaire II.6) que $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Supposons que $U \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\|U\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Montrons que $T + U \in \mathcal{O}$; en effet on écrit

$$T + U = T\big(I + (T^{-1}U)\big)$$

et il est bien connu que $I + (T^{-1}U)$ est bijectif puisque $\|T^{-1}U\| < 1$ (conséquence facile du théorème de point fixe de Banach, voir théorème V.7).

Soit maintenant $T \in \Omega$. On sait (grâce au théorème II.11) que $R(T)$ est fermé et admet un supplémentaire topologique dans F. Soit $P : F \to R(T)$ un projecteur continu. L'opérateur PT est bijectif de E sur $R(T)$ et par conséquent on peut lui appliquer ce qui précède. Soit $U \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\|U\| < \delta$; si l'on choisit δ assez petit l'opérateur $(PT + PU) : E \to R(T)$ est encore inversible et on peut introduire $(PT+PU)^{-1}$ élément de $\mathcal{L}(R(T),E)$. On pose $S=(PT+PU)^{-1}P$. Il est clair que $S\in\mathcal{L}(F,E)$ et que $S(T+U)=I_E$.

II.14

1) On considère l'espace de Banach $\tilde{E}=E/N(T)$ et la surjection canonique $\Pi : E \to \tilde{E}$ de sorte que $\|\Pi x\|_{\tilde{E}} = \operatorname{dist}(x,N(T))$ $\forall x\in E$.

On factorise T sous la forme $T=\tilde{T}\circ\Pi$ avec $\tilde{T}\in\mathcal{L}(\tilde{E},F)$ et $\tilde{T}$ injectif. Bien sûr $R(T)=R(\tilde{T})$ et donc $R(T)$ fermé $\Leftrightarrow R(\tilde{T})$ fermé.

Grâce au corollaire II.6 on voit que

$$R(T) \text{ fermé} \Leftrightarrow \exists C \text{ tel que } \|y\|_{\tilde{E}} \leq C\|\tilde{T}y\| \ \forall y\in\tilde{E},$$

$$\text{et trivialement} \Leftrightarrow \exists C \text{ tel que } \|\Pi x\|_{\tilde{E}} \leq C\|\tilde{T}\Pi x\| \ \forall x\in E,$$

$$\Leftrightarrow \exists C \text{ tel que } \operatorname{dist}(x,N(T)) \leq C\|Tx\| \ \forall x\in E.$$

II.15 L'opérateur $T : E_1\times E_2 \to F$ est linéaire continu et surjectif. D'après le théorème de l'application ouverte il existe une constante C telle que

$$\begin{cases} \forall f\in F \quad \exists x_1\in E_1, \quad \exists x_2\in E_2 \quad \text{avec} \quad T_1x_1+T_2x_2=f \\ \quad \text{et} \quad \|x_1\|+\|x_2\|\leq C\|f\|. \end{cases}$$

Soit $u\in E_1$; on pose $f=T_1u$. Il existe donc $x_1\in E_1$ tel que $T_1x_1=T_1u$ et $\|x_1\|\leq C\|f\|$. Par suite $\operatorname{dist}(u,N(T_1))\leq\|u-(u-x_1)\|\leq C\|T_1u\|$ $\forall u\in E_1$. On applique alors l'exercice II.14.

II.16 Soit Π la surjection canonique de E sur E/L. On considère l'opérateur $T : G \to E/L$ défini par $Tx=\Pi x$ pour $x\in G$. On a

$$\operatorname{dist}(x,N(T)) = \operatorname{dist}(x,G\cap L) \leq C \operatorname{dist}(x,L) = C\|Tx\| \quad \forall x\in G.$$

Il en résulte (voir exercice II.14) que $R(T)=\Pi(G)$ est fermé. Donc $\Pi^{-1}[\Pi(G)]=G+L$ est fermé.

$\boxed{\text{II.20}}$ On rappelle que $N(A^*) = R(A)^{\perp}$.

1) Soient $u \in N(A)$ et $v \in D(A)$; on a

$$\langle A(u+tv), u+tv \rangle \geq -C\|A(u+tv)\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'où l'on déduit que $\langle Av,u\rangle = 0$ et donc $u \in R(A)^{\perp}$.

2) $D(A)$ muni de la norme du graphe est un Banach ; $R(A)$ muni de la norme induite par E' est un Banach. L'opérateur $A : D(A) \to R(A)$ vérifie les hypothèses du théorème de l'application ouverte. Donc il existe une constante C telle que

$$\forall f \in R(A), \quad \exists v \in D(A) \quad \text{avec} \quad Av = f \quad \text{et} \quad \|v\|_{D(A)} \leq C\|f\| ;$$

en particulier $\|v\| \leq C\|f\|$.

Soit $u \in D(A)$; on applique ce qui précède à $f = Au$. Il existe alors $v \in D(A)$ tel que $Au = Av$ et $\|v\| \leq C\|Au\|$. Comme $u - v \in N(A) \subset R(A)^{\perp}$ on a

$$\langle Au,u\rangle = \langle Av,u\rangle = \langle Av,v\rangle \geq -\|Av\|\,\|v\| \geq -C\|Au\|^2.$$

$\boxed{\text{II.22}}$

1) On distingue deux cas :

<u>cas i)</u> $f(a) = 1$

alors $N(A) = \mathbb{R}a$ et $R(A) = N(f)$;

<u>cas ii)</u> $f(a) \neq 1$

alors $N(A) = \{0\}$ et $R(A) = E$.

2) $G(A)$ n'est pas fermé ; sinon on déduirait du théorème du graphe fermé que A est borné. Or A n'est pas borné puisque f n'est pas continue.

3) $D(A^*) = \{u \in E' \; ; \langle u,a\rangle = 0\}$ et $A^*u = u \quad \forall u \in D(A^*)$.

4) $N(A^*) = \{0\}$ et $R(A^*) = \{u \in E' \; ; \langle u,a\rangle = 0\}$.

5) On a $R(A)^{\perp} = \{0\}$ et $R(A^*)^{\perp} = \mathbb{R}a$ (noter que $N(f)$ est dense dans E - voir exercice I.6).

Donc $N(A^*) = R(A)^{\perp}$ et $N(A) \subset R(A^*)$.

Dans le cas ii) on a $N(A) \neq R(A^*)^{\perp}$.

6) On voit que si A n'est pas fermé il peut se produire que $N(A) \neq R(A^*)^{\perp}$.

II.23

1) Il est clair que $D(A)$ est dense dans E ; vérifions que A est fermé.

Soit (u^j) une suite de $D(A)$ telle que $u^j \to u$ dans E et $Au^j \to f$ dans E. Il en résulte que

$$\begin{cases} u_n^j \to u_n & \forall n \quad (j \to \infty) \\ nu_n^j \to f_n & \forall n \quad (j \to \infty). \end{cases}$$

Donc $n u_n = f_n \quad \forall n$; par suite $u \in D(A)$ et $Au = f$.

2) $$D(A^*) = \{v = (v_n) \in \ell^\infty \ ; \ (n v_n) \in \ell^\infty\}$$

$$A^* v = (n v_n) \quad \text{et} \quad \overline{D(A^*)} = c_0 .$$

II.25

1) On a $D(B^*) = \{v \in G' \ ; \ T^* v \in D(A^*)\}$ et $B^* v = A^* T^* v \quad \forall v \in D(B^*)$.

2) Si $D(A) \neq E$ et $T = 0$, alors B n'est pas fermé. En effet on peut trouver une suite (u_n) dans $D(A)$ telle que $u_n \to u$, avec $u \notin D(A)$; alors $B u_n \to 0$, mais $u \notin D(B)$.

II.26

1) Trivial.

2) On sait (voir corollaire II.6) que $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$. D'autre part on a

$$T^{-1} \circ T = I_E \quad \text{et} \quad T \circ T^{-1} = I_F .$$

Donc

$$T^* \circ (T^{-1})^* = I_{E'} \quad \text{et} \quad (T^{-1})^* \circ T^* = I_{F'} .$$

Par suite T^* est bijectif et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

II.27 On a

$$\begin{aligned} \varphi^*(T^* f = \operatorname*{Sup}_{x \in E} & \ \{< T^* f, x > - \varphi(x)\} \\ = \operatorname*{Sup}_{y \in R(T)} & \ \{< f, y > - \psi(y)\} \\ = - \operatorname*{Inf}_{y \in F} & \ \{\psi(y) + \zeta(y)\} \end{aligned}$$

où $\zeta(y) = - < f, y > + I_{R(T)}(y)$.

Grâce au théorème I.11 on obtient

$$\varphi^*(T^*f) = \underset{g\in F'}{\mathrm{Min}} \{\zeta^*(g) + \psi^*(-g)\}.$$

Or

$$\zeta^*(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ f+g \in R(T)^\perp \\ +\infty & \text{si } \ f+g \notin R(T)^\perp . \end{cases}$$

Par suite

$$\varphi^*(T^*f) = \underset{f+g\in N(T^*)}{\mathrm{Min}} \psi^*(-g) = \underset{h\in N(T^*)}{\mathrm{Min}} \psi^*(f-h).$$

CHAPITRE III

TOPOLOGIES FAIBLES, ESPACES RÉFLEXIFS, ESPACES SÉPARABLES, ESPACES UNIFORMÉMENT CONVEXES.

$\boxed{\text{III.1}}$ Soit E un espace de Banach et soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E, compact pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. Montrer que A est borné.

$\boxed{\text{III.2}}$ Soit E un espace de Banach et soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. On pose

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Montrer que $\sigma_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

$\boxed{\text{III.3}}$ Soit E un espace de Banach. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble convexe. Montrer que la fermeture de A pour la topologie forte et pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ coïncident.

$\boxed{\text{III.4}}$ Soit E un espace de Banach et soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Montrer qu'il existe une suite (y_n) de E telle que :

$$\text{(a)} \quad y_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}\right) \quad \forall n$$

et

$$\text{(b)} \quad y_n \to x \text{ fortement.}$$

2) Montrer qu'il existe une suite (z_n) de E telle que :

$$\text{(a)} \quad z_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right) \quad \forall n$$

et

$$\text{(b)} \quad z_n \to x \text{ fortement.}$$

✓ **III.5** Soit E un espace de Banach et soit $K \subset E$ un sous-ensemble de E, compact pour la topologie forte. Soit (x_n) une suite de K telle que $x_n \to x$ pour $\sigma(E,E')$. Montrer que $x_n \to x$ fortement.
[On pourra raisonner par l'absurde].

✓ **III.6** Soit X un espace topologique et soit E un espace de Banach. Soient $u,v : X \to E$ deux applications continues de X à valeurs dans E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Montrer que l'application $x \mapsto u(x) + v(x)$ est continue de X à valeurs dans E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$.

2) Soit $a : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'application $x \mapsto a(x)u(x)$ est continue de X à valeurs dans E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$.

✓ **III.7** Soit E un espace de Banach. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble fermé pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. Soit $B \subset E$ un sous-ensemble compact pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Montrer que $A + B$ est fermé pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

2) On suppose de plus que A et B sont convexes, non vides et disjoints. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé séparant A et B au sens strict.

[illegible] NT [illegible]

✓ **III.8** Soit E un espace de Banach de dimension infinie. On se propose de montrer que la topologie faible $\sigma(E,E')$ n'est pas métrisable. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une métrique $d(x,y)$ sur E telle que la topologie associée coïncide avec la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Pour tout entier $k \geq 1$ on désigne par V_k un voisinage de 0 pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ tel que

$$V_k \subset \{x \in E \ ; \ d(x,0) < \tfrac{1}{k}\}.$$

Montrer qu'il existe une suite (f_n) de E' telle que tout $g \in E'$ s'écrive sous forme d'une combinaison linéaire finie des f_n.

[On pourra utiliser le lemme III.2].

2) En déduire que E' est de dimension finie.

[On pourra appliquer le lemme de Baire comme à l'exercice I.5].

3) Conclure.

4) Prouver par une méthode similaire que la topologie faible * $\sigma(E',E)$ n'est pas métrisable.

$\boxed{\text{III.9}}$ Soit E un espace de Banach ; soit M un sous-espace vectoriel de E et soit $f_0 \in E'$.

Montrer qu'il existe $g_0 \in M^\perp$ tel que

$$\operatorname*{Inf}_{g\in M^\perp} \| f_0 - g \| = \| f_0 - g_0 \| .$$

On établira ce résultat par deux méthodes :

1) en utilisant le théorème I.11,

2) en utilisant la topologie faible * $\sigma(E',E)$.

$\boxed{\text{III.10}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, de sorte que $T^* \in \mathcal{L}(F',E')$. Montrer que T^* est continu de F' muni de la topologie $\sigma(F',F)$ à valeurs dans E' muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

$\boxed{\text{III.11}}$ Soit E un espace de Banach et soit $A : E \to E'$ une application monotone (voir l'exercice II.6). On suppose que pour tout $x,y \in E$ l'application

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \langle A(x+ty), y \rangle$$

est continue en $t = 0$.

Montrer que A est continu de E fort dans E' muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

$\boxed{\text{III.12}}$ Soit E un espace de Banach et soit $x_0 \in E$. Soit $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe s.c.i., $\varphi \not\equiv +\infty$.

1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $\exists R>0$, $\exists M<+\infty$ tels que $\varphi(x)\leq M$ $\forall x\in E$ avec $\|x-x_0\|\leq R$,

(B) $\lim\limits_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\to+\infty}} \{\varphi^*(f)-\langle f,x_0\rangle\} = +\infty$.

2) Moyennant l'hypothèse (A) ou (B) prouver que

$$\operatorname{Inf}_{f\in E'} \{\varphi^*(f)-\langle f,x_0\rangle\} \text{ est atteint.}$$

[On pourra utiliser la topologie $\sigma(E',E)$, ou bien le théorème I.11].

Quelle est la valeur de cet Inf ?

$\boxed{\text{III.13}}$ Soit E un espace de Banach. Soient (x_n) une suite de E et $x\in E$. On pose

$$K_n = \overline{\operatorname{conv} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x_i\}} \ .$$

1) On suppose que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$. Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

2) On suppose que E est réflexif. Montrer que, réciproquement, si (x_n) est bornée et si $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n=\{x\}$, alors $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$.

$\boxed{\text{III.14}}$ Soit E un espace de Banach réflexif et soit I un ensemble d'indices. On se donne un sous-ensemble $(f_i)_{i\in I}$ de E' et un sous-ensemble $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$. Soit $M>0$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe $x\in E$ avec $\|x\|\leq M$ tel que $\langle f_i,x\rangle=\alpha_i$ $\forall i\in I$.

(B) $\begin{cases} \text{On a} \quad \left|\sum\limits_{i\in J}\beta_i\alpha_i\right| \leq M \left\|\sum\limits_{i\in J}\beta_i f_i\right\| \\ \text{pour toute partie finie } J\subset I \text{ et toute famille de réels } (\beta_i)_{i\in J}. \end{cases}$

Comparer aux exercices I.10, I.11 et au lemme III.3.

III.15 *Barycentre d'une mesure sur un ensemble convexe.*

Soit E un espace de Banach réflexif et soit $K \subset E$ convexe, fermé et borné. K est donc compact pour la topologie $\sigma(E,E')$ et on considère l'espace $F = C(K)$ muni de sa norme usuelle.

On fixe $\mu \in F'$ avec $\|\mu\| = 1$. On suppose que $\mu \geq 0$ i.e.

$$\langle \mu, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in C(K),\ u \geq 0 \text{ sur } K.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ unique telle que

$$(1) \qquad \langle \mu, f_{|K}\rangle = \langle f, x_0\rangle \quad \forall f \in E'.$$

[On pourra commencer par montrer qu'il existe $x_0 \in E$ vérifiant (1) et prouver ensuite à l'aide de Hahn-Banach que $x_0 \in K$].

III.16 Soit E un espace de Banach.

1) Soit (f_n) une suite de E'. On suppose que pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle$ converge vers une limite.

Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que $f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie faible $\star$ $\sigma(E',E)$.

2) On suppose maintenant que E est réflexif. Soit (x_n) une suite de E telle que pour tout $f \in E'$ $\langle f, x_n\rangle$ converge vers une limite.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

3) Construire un exemple d'espace E non réflexif où la conclusion de 2) tombe en défaut.

[On pourra prendre $E = c_0$ (voir exercices du Chapitre XI) et $x_n = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{(n)},0,0\ldots)$].

III.17

1) Soit (x^n) une suite d'éléments de ℓ^p avec $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour la topologie $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$. Montrer que :

a) (x^n) est borné dans ℓ^p,

b) $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ pour tout i, où l'on note

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n, \dots)$$

et

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots).$$

2) Réciproquement, soit (x^n) une suite d'éléments de ℓ^p avec $1 < p \leq \infty$.

On suppose que :

a) (x^n) est borné dans ℓ^p,

b) $x_i^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i$ pour tout i.

Montrer que $x \in \ell^p$ et que $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ pour la topologie $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$.

$\boxed{\text{III.18}}$ Pour chaque entier $n \geq 1$ on pose

$$e^n = (0, 0, \dots, \underset{(n)}{1}, 0 \dots).$$

1) Montrer que $e^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans ℓ^p pour la topologie $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$ avec $1 < p \leq \infty$.

2) Montrer qu'il n'existe aucune sous-suite extraite (e^{n_k}) qui converge dans ℓ^1 pour la topologie $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$.

3) Donner un exemple d'espace de Banach E et d'une suite (f_n) de E' telle que $\|f_n\| = 1$ $\forall n$ et telle que (f_n) ne possède aucune sous-suite convergente pour la topologie faible $\star$ $\sigma(E', E)$. Y-a-t-il contradiction avec la compacité de $B_{E'}$ pour $\sigma(E', E)$?

[On pourra choisir $E = \ell^\infty$].

$\boxed{\text{III.19}}$ Soient $E = \ell^p$ et $F = \ell^q$ avec $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$|a(t)| \leq C|t|^{p/q} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etant donné

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in \ell^p$$

on pose

$$Ax = (a(x_1), a(x_2), \dots, a(x_i), \dots).$$

1) Montrer que $Ax \in \ell^q$ et que l'application $x \mapsto Ax$ est continue de ℓ^p (fort) dans ℓ^q (fort).

2) Montrer que si (x^n) est une suite de ℓ^p telle que $x^n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(\ell^p,\ell^{p'})$, alors $Ax^n \rightharpoonup Ax$ pour la topologie faible $\sigma(\ell^q,\ell^{q'})$.

3) En déduire que A est continue de B_E muni de la topologie $\sigma(E,E')$ à valeurs dans F muni de la topologie $\sigma(F,F')$.

III.20 Soit E un espace de Banach.

1) Montrer qu'il existe un espace topologique compact K et une isométrie de E dans C(K) muni de sa norme usuelle.

[On pourra choisir $K = B_{E'}$ muni de la topologie faible * $\sigma(E',E)$].

2) On suppose de plus E séparable. Montrer qu'il existe une isométrie de E dans ℓ^∞.

III.21 Soit E un espace de Banach séparable. Soit (f_n) une suite bornée de E'. Montrer directement, sans faire appel aux propriétés de métrisabilité de E', qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible * $\sigma(E',E)$.

[Utiliser un procédé de suite diagonale].

III.22 Soit E un espace de Banach de dimension infinie vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

a) E' est séparable,

b) E est réflexif.

Montrer qu'il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ et $x_n \rightharpoonup 0$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

III.23 La démonstration du théorème II.15 est considérablement simplifiée si on suppose de plus que X est réflexif. Pourquoi ?

[Examiner l'implication (b) $\Rightarrow$ (a)].

$\boxed{\text{III.24}}$ Soit E un espace de Banach. On se propose de démontrer le théorème III.25', c'est-à-dire que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) E' est séparable.

(B) B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

Pour l'implication (A) ⇒ (B) on pourra s'inspirer de la démonstration du théorème III.25.

Pour l'implication (B) ⇒ (A) on procède comme suit.

Soit $d(x,y)$ une métrique définie sur B_E qui induise la topologie $\sigma(E,E')$. On pose

$$U_n = \{x \in B_E \,;\, d(x,0) < \tfrac{1}{n}\}.$$

Soit V_n un voisinage de 0 pour $\sigma(E,E')$, de la forme

$$V_n = \{x \in E \,;\, |\langle f,x\rangle| < \varepsilon_n \quad \forall f \in \Phi_n\},$$

avec $\varepsilon_n > 0$, $\Phi_n \subset E'$ fini, et tel que $V_n \subset U_n$. Soit $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ et soit F l'espace vectoriel engendré par D. On va montrer que F est dense dans E' pour la topologie forte. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\overline{F} \neq E'$.

1) Montrer qu'il existe $\xi \in E''$ et $f_0 \in E'$ tels que

$$\langle \xi, f_0\rangle > 1, \quad \langle \xi, f\rangle = 0 \quad \forall f \in F \quad \text{et} \quad \|\xi\| = 1.$$

2) Soit

$$W = \{x \in B_E \,;\, |\langle f_0, x\rangle| < 1/2\}.$$

Montrer qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que $V_{n_0} \subset W$.

3) Prouver qu'il existe $x_1 \in B_E$ tel que

$$\begin{cases} |\langle f,x_1\rangle - \langle \xi,f\rangle| < \varepsilon_{n_0} & \forall f \in \Phi_{n_0} \\ |\langle f_0,x_1\rangle - \langle \xi,f_0\rangle| < 1/2. \end{cases}$$

4) En déduire que $x_1 \in V_{n_0}$ et que $\langle f_0, x_1\rangle > 1/2$.

5) Conclure.

$\boxed{\text{III.25}}$ Soit K un espace métrique compact non réduit à un nombre fini de points.

Montrer que l'espace $C(K)$ muni de sa norme usuelle n'est pas réflexif.

[Introduire une suite (a_n) de points de K telle que $a_n \to a$ et $a_n \neq a$ $\forall n$. Considérer la forme linéaire $f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(a_n)$, $u \in C(K)$ et s'inspirer de l'exercice I.4].

$\boxed{\text{III.26}}$ Soit F un espace de Banach séparable et soit (a_n) un sous-ensemble dense de B_F.

On considère l'opérateur linéaire $T : \ell^1 \to F$ qui à $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ associe $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_i$.

1) Montrer que T est un opérateur borné surjectif.

Dans la suite on suppose de plus que F est de dimension infinie et que F' est séparable.

2) Montrer que T n'admet pas d'inverse à droite.

[On pourra utiliser les résultats du problème

3) En déduire que N(T) n'admet pas de supplémentaire topologique dans ℓ^1.

4) Déterminer T^*.

$\boxed{\text{III.27}}$ Soit E un espace de Banach séparable de norme $\| \ \|$. On désigne aussi par $\| \ \|$ la norme duale sur E'. On se propose de construire sur E une norme équivalente à $\| \ \|$, strictement convexe, et dont la norme duale est aussi strictement convexe.

Soit $(a_n) \subset B_E$ un sous-ensemble dense de B_E. Soit $(b_n) \subset B_{E'}$ un sous-ensemble dense dans $B_{E'}$ pour la topologie $\sigma(E', E)$. Pourquoi un tel ensemble existe-t-il ?

Pour $f \in E'$ on pose

$$\|f\|_1 = \left\{ \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, a_n \rangle|^2 \right\}^{1/2}.$$

1) Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme équivalente à $\| \ \|$.

2) Montrer que la norme $\| \ \|_1$ est strictement convexe.

[On pourra utiliser l'exercice I.25].

Pour $x \in E$ on pose

$$\|x\|_2 = \left\{ \|x\|_1^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle b_n, x\rangle|^2 \right\}^{1/2}$$

$\left(\text{où } \|x\|_1 = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} \langle f, x\rangle\right)$.

3) Montrer que $\| \ \|_2$ est une norme strictement convexe équivalente à $\| \ \|$.

4) Montrer que la norme duale de $\| \ \|_2$ est aussi strictement convexe.

[On pourra utiliser un résultat de l'exercice I.22].

5) Proposer une autre approche à l'aide des résultats du problème

$\boxed{\text{III.28}}$ Soit E un espace de Banach uniformément convexe. On désigne par F l'application de dualité (multivoque) de E dans E' ; voir corollaire I.3 et exercice I.1.

Montrer que pour tout $f \in E'$ il existe $x \in E$ unique tel que $f \in F(x)$.

$\boxed{\text{III.29}}$ Soit E un espace de Banach uniformément convexe.

1) Montrer que

$\forall M > 0, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tel que

$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta \quad \forall x, y \in E$ avec $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ et $\|x-y\| > \varepsilon$.

[On pourra raisonner par l'absurde].

2) Même question si l'on remplace $\| \ \|^2$ par $\| \ \|^p$ avec $1 < p < \infty$.

$\boxed{\text{III.30}}$ Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \ \|$. On suppose qu'il existe sur E une norme $| \ |$ uniformément convexe et équivalente à $\| \ \|$.

Montrer que, pour tout $k > 1$, il existe une norme $|\!|\!| \ |\!|\!|$ uniformément convexe telle que

$$\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq k\|x\| \quad \forall x \in E.$$

[On pourra poser $|\!|\!|x|\!|\!|^2 = \|x\|^2 + \alpha|x|^2$ avec $\alpha > 0$ assez petit et appliquer l'exercice III.29].

Application : $E = \mathbb{R}^n$.

III.31 Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Montrer que

$\forall\varepsilon>0,\quad \forall\alpha\in\,]0,\frac{1}{2}[,\quad \exists\delta>0$ tel que

$$\|tx+(1-t)y\|\leq 1-\delta$$

$\forall t\in[\alpha,1-\alpha],\quad \forall x,y\in E$ avec $\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1$ et $\|x-y\|\geq\varepsilon$.

[Si $\alpha\leq t\leq\frac{1}{2}$ on pourra écrire $tx+(1-t)y=\frac{y+z}{2}$].

III.32 *Projection sur un convexe fermé dans un espace uniformément convexe.*

Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit $C\subset E$ convexe, fermé et non vide.

✓ 1) Montrer que pour tout $x\in E$

$$\inf_{y\in C}\|x-y\|$$

est atteint en un point unique de C noté $P_C x$.

2) Montrer que toute suite minimisante (y_n) converge fortement vers $P_C x$.

3) Montrer que l'application $x\longmapsto P_C x$ est continue de E fort dans E fort.

4) Plus précisément, montrer que P_C est uniformément continue sur les bornés de E.

[On pourra utiliser l'exercice III.29].

Soit $\varphi : E\longrightarrow\,]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $\varphi\not\equiv+\infty$.

5) Montrer que pour tout $x\in E$ et tout entier $n\geq 1$

$$\inf_{y\in E}\{n\|x-y\|^2+\varphi(y)\}$$

est atteint en un point unique noté y_n.

6) Montrer que $y_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}P_C x$ où $C=\overline{D(\varphi)}$.

CHAPITRE III

$\boxed{\text{III.1}}$ D'après le théorème de Banach-Steinhaus il suffit de vérifier que pour tout $f \in E'$ l'ensemble $f(A)$ est borné. Or f est continue pour la topologie $\sigma(E,E')$ et A est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$. Donc $f(A)$ est compact et par suite borné.

$\boxed{\text{III.2}}$ Il faut vérifier que pour tout $f \in E'$, $\langle f,\sigma_n\rangle \to \langle f,x\rangle$. Or $\langle f,\sigma_n\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle f,x_i\rangle$ et $\langle f,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle$.

$\boxed{\text{III.4}}$

1) On pose $G_n = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}\right)$. Comme $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$ on en déduit que $x \in \overline{G_n}^{\sigma(E,E')}$ $\forall n$. D'autre part, comme G_n est convexe les fermetures de G_n pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ et pour la topologie forte coïncident (voir exercice III.3). Par suite $x \in \overline{G_n}$ $\forall n$. Donc, on peut construire une suite (y_n) telle que $y_n \in G_n$ $\forall n$ et $y_n \to x$ fortement.

2) On pose $K_n = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right)$; de sorte que (K_n) est une suite croissante de convexes. Soit $\rho_n = \operatorname{dist}(x,K_n)$; montrons que $\rho_n \downarrow 0$. En effet, supposons par l'absurde que $\rho_n \geq \rho > 0$ pour tout n. On peut alors séparer au sens large le convexe ouvert $B(x,\rho)$ et le convexe $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Par conséquent, il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que

$$\langle f,x+\rho y\rangle \leq \langle f,x_n\rangle \quad \forall n, \quad \forall y \in E \text{ avec } \|y\| < 1.$$

D'où il résulte que $\langle f,x\rangle + \rho\|f\| \leq \langle f,x\rangle$ - absurde.

56

III.7

1) Soit $x \notin (A+B)$. On va construire W voisinage de 0 pour la topologie $\sigma(E,E')$ tel que

$$(x+W) \cap (A+B) = \phi .$$

Pour tout $y \in B$ il existe $V(y)$ voisinage convexe de 0 tel que

$$\big(x + V(y)\big) \cap (A+y) = \phi$$

(car $A+y$ est fermé et $x \notin A+y$).

On a

$$B \subset \bigcup_{y \in B} \big(y - \tfrac{1}{2} V(y)\big)$$

et comme B est compact il existe I fini tel que

$$B \subset \bigcup_{i \in I} \big(y_i - \tfrac{1}{2} V(y_i)\big) \quad \text{avec} \quad y_i \in B.$$

On pose

$$W = \frac{1}{2} \bigcap_{i \in I} V(y_i) .$$

Alors $(x+W) \cap (A+B) = \phi$. En effet supposons par l'absurde qu'il existe $w \in W$ tel que

$$x + w \in (A+B).$$

Donc il existe $i \in I$ tel que

$$x + w \in A + y_i - \tfrac{1}{2} V(y_i).$$

Comme $V(y_i)$ est convexe, on en déduit qu'il existe $w' \in V(y_i)$ tel que $x + w' \in A + y_i$. Par suite $\big(x + V(y_i)\big) \cap (A+y_i) \neq \phi$ – absurde.

Remarque. Lorsque E' est *séparable* et A est *borné* on peut utiliser des *suites* pour prouver que $A+B$ est fermé car la topologie faible restreinte aux bornés est métrisable (voir théorème III.25'). Le raisonnement devient alors plus simple. En effet soit $x_n = a_n + b_n$ avec $x_n \to x$ pour $\sigma(E,E')$, $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Montrons que $x \in (A+B)$. Comme B est faiblement compact on peut supposer que $b_{n_k} \to b$ pour $\sigma(E,E')$ avec $b \in B$. D'où $a_{n_k} \to x - b$ pour $\sigma(E,E')$; comme A est faiblement fermé on en déduit que $x - b \in A$ et par suite $x \in (A+B)$.

2) D'après ce qui précède $(A-B)$ est faiblement fermé et donc aussi fortement fermé. On peut alors séparer $\{0\}$ – convexe compact – et $(A-B)$ – convexe fermé – au sens strict.

III.8

1) Comme V_k est un voisinage de 0 pour $\sigma(E,E')$ on peut toujours supposer (voir proposition III.4) que V_k est de la forme

$$V_k = \{x \in E \ ; \ |<f,x>| < \varepsilon_k \quad \forall f \subset F_k\}$$

où $\varepsilon_k > 0$ et F_k est un sous-ensemble fini de E'. Par suite l'ensemble $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ est dénombrable.

Montrons que tout $g \in E'$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de F.

Soit $g \in E'$ fixé et soit $V = \{x \in E \ ; \ |<g,x>| < 1\}$. Comme V est un voisinage de 0 pour la topologie $\sigma(E,E')$, il existe k tel que $\{x \in E \ ; \ d(x,0) < \frac{1}{k}\} \subset V$ et a fortiori $V_k \subset V$.

Si $x \in E$ est tel que $<f,x> = 0 \quad \forall f \in F_k$, alors $tx \in V_k \quad \forall t \in \mathbb{R}$, et par suite $tx \in V \quad \forall t \in \mathbb{R}$; donc $<g,x> = 0$.

On déduit du lemme III.2 que g est combinaison linéaire d'éléments de F_k.

2) On raisonne exactement comme à l'exercice I.5, question 3).

3) Si dim $E' < \infty$, alors nécessairement dim $E < \infty$. En effet, dim $E'' < \infty$ et on a une injection canonique J de E dans E''.

4) On utilise ici le lemme suivant :

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in E$ tels que $[f \in E' \ ; \ <f,x_i> = 0 \quad \forall i] \Rightarrow [<f,y> = 0]$. Alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. (ce lemme est une conséquence facile du lemme III.2).

III.9

1) Appliquer le théorème I.11 avec

$$\varphi(x) = <f_0,x> + I_{B_E}(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) = I_M(x).$$

2) On utilise le fait que :

a) $B_{E'}$ est compact pour la topologie faible * $\sigma(E',E)$,

b) $M^{\perp}$ est fermé pour la topologie faible * $\sigma(E',E)$ (pourquoi ?).

$\boxed{\text{III.11}}$ Il suffit de montrer que si une suite (x_n) de E converge fortement vers x, alors $Ax_n \rightharpoonup Ax$ pour $\sigma(E',E)$, i.e. $\langle Ax_n,y\rangle \to \langle Ax,y\rangle \quad \forall y \in E$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $y \in E$ tel que $\langle Ax_n,y\rangle \not\to \langle Ax,y\rangle$.

D'après l'exercice II.6 on sait déjà que (Ax_n) est borné. On peut donc extraire une sous-suite telle que $\langle Ax_{n_k},y\rangle \to \ell \neq \langle Ax,y\rangle$.

Appliquant la monotonie de A il vient

$$\langle Ax_{n_k} - A(x+ty),\ x_{n_k} - x - ty\rangle \geq 0.$$

A la limite on obtient

$$-t\ell + t\langle A(x+ty),y\rangle \geq 0.$$

D'où l'on déduit (distinguer les cas $t>0$ et $t<0$) que $\ell = \langle Ax,y\rangle$ - absurde.

$\boxed{\text{III.12}}$

1) L'hypothèse (A) implique que $\varphi^*(f) \geq R\|f\| + \langle f,x_0\rangle - M \quad \forall f \in E'$.

Inversement on suppose (B) et on note $\psi(f) = \varphi^*(f) - \langle f,x_0\rangle$. Montrons qu'il existe des constantes $k>0$ et C telles que

$$(1) \qquad \psi(f) \geq k\|f\| - C \quad \forall f \in E'.$$

Quitte à faire une translation on peut supposer que $\psi(0) < \infty$ (voir proposition I.9). On fixe $\alpha > \psi(0)$; grâce à l'hypothèse (B) il existe $r>0$ tel que

$$\psi(g) \geq \alpha \quad \forall g \in E' \quad \text{avec} \quad \|g\| \geq r.$$

Etant donné $f \in E'$ avec $\|f\| \geq r$ on écrit

$$\psi(tf) \leq t\psi(f) + (1-t)\psi(0) \quad \text{avec} \quad t = \frac{r}{\|f\|}$$

et comme $t\|f\| = r$ il vient $\alpha - \psi(0) \leq \frac{r}{\|f\|}[\psi(f) - \psi(0)]$. Ceci conduit à (1). En passant de (1) à la relation conjuguée on obtient (A).

2) La fonction ψ est convexe s.c.i. pour la topologie $\sigma(E',F)$. L'hypothèse (B) entraîne que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ l'ensemble $\{f\in E' ;\ \psi(f)\leq\lambda\}$ est borné Par suite cet ensemble est compact pour la topologie $\sigma(E',E)$ (grâce au théorème III.15). Donc $\operatorname{Inf}_{E'}\psi$ est atteint.

D'autre part on a

$$\operatorname{Inf}_{E'}\psi = -\operatorname{Sup}_{f\in E'}\{<f,x_o> - \varphi^*(f)\} = -\varphi^{**}(x_o) = -\varphi(x_o).$$

On pourrait aussi retrouver ces résultats en appliquant le théorème I.11 aux fonctions φ et $I_{\{x_o\}}$ (noter que la fonction φ est continue en x_o - voir exercice II.1).

III.13

1) Pour tout p fixé on a $x_{p+n}\in K_p$ $\forall n$. A la limite (quand $n\to\infty$) on obtient $x\in K_p$ puisque K_p est faiblement fermé (voir théorème III.7).

D'autre part soit V un voisinage convexe de x pour la topologie $\sigma(E,E')$. Il existe N tel que $x_n\in V$ $\forall n\geq N$. Donc $K_n\subset\overline{V}$ $\forall n\geq N$ et par suite $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\subset\overline{V}$. Or $\bigcap_{V\in\mathcal{U}}\overline{V}=\{x\}$ où $\mathcal{U}$ désigne la famille des voisinages convexes de x pour $\sigma(E,E')$ (justifier !).

2) Soit V un voisinage ouvert de x pour la topologie $\sigma(E,E')$. On pose

$$K'_n = K_n\cap\complement V.$$

K_n est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$ (K_n est convexe fermé borné dans un réflexif - voir corollaire III.19) ; donc K'_n est aussi compact.

D'autre part $\bigcap_{n=1}^{\infty}K'_n=\emptyset$ et par suite il existe N tel que $K'_N=\emptyset$, c'est-à-dire $K_N\subset V$.

III.18

2) Supposons par l'absurde que $e^{n_k}\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} a$ dans ℓ^1 pour la topologie $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$.

Alors $<\xi,e^{n_k}>\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}<\xi,a>$ $\forall\xi\in\ell^\infty$. On considère l'élément particulier $\xi\in\ell^\infty$ défini par

$$\xi = (0,\ 0,\ \ldots\underset{(n_1)}{-1},\ 0,\ \ldots\underset{(n_2)}{1},\ 0,\ \ldots\underset{(n_3)}{-1},\ 0,\ \ldots)$$

et donc $<\xi, e^{n_k}> = (-1)^k$ ne converge pas quand $k \to \infty$. Contradiction.

3) Soit $E = \ell^\infty$ de sorte que $\ell^1 \subset E'$. On pose $f_n = e^n$. Supposons que $f_{n_k} \to f$ dans E' pour la topologie $\sigma(E',E)$, c'est-à-dire $<f_{n_k},\xi> \to <f,\xi>$ pour tout $\xi \in E$. On considère l'élément particulier ξ défini comme à la question 2) et donc $<f_{n_k},\xi> = (-1)^k$ ne converge pas - absurde. Il n'y a pas de contradiction avec le théorème III.15 ; ceci montre seulement que $B_{E'}$ muni de la topologie $\sigma(E',E)$ est ici un espace compact *non métrisable*. On retrouve aussi le fait que $E = \ell^\infty$ n'est pas séparable (appliquer le théorème III.25).

III.19

1) Commencer par vérifier que si $x^n \to x$ dans ℓ^p (fort) alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \quad \text{tel que} \quad \sum_{i=I}^{\infty} |x_i^n|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall n.$$

2) Utiliser l'exercice III.17.

3) Comme l'espace B_E est métrisable pour la topologie faible (voir théorème III.25') il suffit de vérifier la continuité de A sur les *suites*.

III.20

1) On considère l'application $T : E \to C(K)$ définie par

$$(Tx)(t) = <t,x>, \quad x \in E \quad \text{et} \quad t \in B_{E'} = K.$$

On a bien $\|Tx\| = \sup_{t\in K} |(Tx)(t)| = \|x\|$.

2) $K = B_{E'}$ est un espace métrique compact pour la topologie $\sigma(E',E)$. Il existe donc un sous-ensemble (t_n) dénombrable dense dans K.

On considère l'application $S : E \to \ell^\infty$ définie par

$$Sx = (<t_1,x>, <t_2,x>, \ldots <t_n,x>, \ldots).$$

Vérifier que $\|Sx\|_{\ell^\infty} = \|x\|$.

III.21 Soit (a_i) un sous-ensemble dénombrable dense de E. On extrait une première sous-suite telle que $<f_{n_k},a_1>$ converge quand $k \to \infty$. Puis on extrait une sous-sous-suite telle que $\langle f_{n_k''}, a_2\rangle$ converge etc ... . Par un procédé usuel de suite diagonale on obtient alors une suite notée (g_k), extraite de la suite (f_n), telle que $\langle g_k, a_i\rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell_i \quad \forall i$.

On en déduit (grâce à la densité des a_i) que $\langle g_k, a\rangle \to \ell_a \quad \forall a\in E$. D'où il résulte que g_k converge pour la topologie $\sigma(E',E)$ (voir l'exercice III.16).

$\boxed{\text{III.22}}$

a) B_E est métrisable pour la topologie $\sigma(E,E')$ (voir théorème III.25'). D'autre part 0 est adhérent à la sphère unité pour la topologie $\sigma(E,E')$ (voir remarque 2 au Chapitre III).

b) Comme $\dim E = \infty$, on peut construire un sous-espace E_0 fermé (donc réflexif), séparable et de dimension infinie. On applique à E_0 le cas a).

$\boxed{\text{III.25}}$ Supposons, par l'absurde, que $C(K)$ soit réflexif. Alors $E = \{u\in C(K)\ ;\ u(a) = 0\}$ est aussi réflexif et $\underset{u\in B_E}{\operatorname{Sup}} f(u)$ est atteint.

D'autre part $\underset{u\in B_E}{\operatorname{Sup}} f(u) = 1$; en effet $\forall N$, $\exists u\in E$ tel que $0\leq u\leq 1$ et $u(a_i) = 1 \quad \forall i = 1,2,\dots,N$ (appliquer par exemple le théorème de Tietze-Urysohn). Donc il existe $u\in B_E$ tel que $f(u) = 1$. On a alors $u(a_n) = 1 \quad \forall n$, et $u(a) = 0$ - absurde.

$\boxed{\text{III.26}}$

1) Soit $y\in B_F$. Il existe n_1 tel que $\|y - a_{n_1}\| < 1/2$. L'ensemble $\frac{1}{2}(a_i)_{i>n_1}$ est dense dans $\frac{1}{2}B_E$ et donc il existe $n_2 > n_1$ tel que

$$\|y - a_{n_1} - \frac{1}{2}a_{n_2}\| < \frac{1}{4}.$$

Par récurrence on construit une suite $n_k\uparrow\infty$ telle que

$$y = a_{n_1} + \frac{1}{2}a_{n_2} + \frac{1}{4}a_{n_3} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}a_{n_k} + \dots$$

2) Par l'absurde. Supposons qu'il existe $S\in\mathcal{L}(F,\ell^1)$ tel que $T\circ S = I_F$. Par ailleurs, soit (y_n) une suite de F telle que $\|y_n\| = 1 \quad \forall n$ et $y_n \rightharpoonup 0$ pour la

topologie faible $\sigma(F,F')$. Alors $Sy_n \to 0$ pour la topologie faible $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$. On en déduit (voir problème) que $Sy_n \to 0$ fortement dans ℓ^1. Donc $y_n = TSy_n \to 0$ - absurde.

3) Voir théorème II.10.

4) $T^* = F' \to \ell^\infty$ est défini par

$$T^* v = (\langle v,a_1\rangle, \langle v,a_2\rangle, \dots, \langle v,a_n\rangle, \dots).$$

$\boxed{\text{III.27}}$ $B_{E'}$ est un espace métrisable compact pour la topologie $\sigma(E',E)$. Il existe donc un sous-ensemble dénombrable dense pour cette topologie.

1) On a $\|f\| \leq \|f\|_1 \leq \sqrt{2}\ \|f\| \quad \forall f \in E'$.

2) On pose $|f|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f,a_n\rangle|^2$. Remarquer que $|\ |$ est une norme (pourquoi ?).

Il s'agit de vérifier que la *fonction* $f \mapsto \|f\|^2 + |f|^2$ est strictement convexe.

On montre aisément que $\forall t \in [0,1], \quad \forall f,\ g \in E'$

$$(*) \qquad |tf + (1-t)g|^2 + t(1-t)|f-g|^2 = t|f|^2 + (1-t)|g|^2.$$

Par conséquent la fonction $f \mapsto |f|^2$ est strictement convexe ainsi que la fonction $f \mapsto \|f\|^2 + |f|^2$.

3) Même méthode qu'à la question 2). Noter que si $\langle b_n,x\rangle = 0 \quad \forall n$, alors $x = 0$ (pourquoi ?).

4) On pose $|x| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle b_n,x\rangle|^2 \right\}^{1/2}$ et on désigne par $|f|$ la norme duale - rien à voir avec la norme définie à la question 2) !

Il faut vérifier que la fonction $f \mapsto \frac{1}{2}\|f\|_2^2$ est strictement convexe. Or cette fonction coïncide avec la conjuguée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_2^2$. Appliquant l'exercice I.22 (question 3)) on voit que

$$\|f\|_2^2 = \operatorname*{Inf}_{h \in E'} \{\|f-h\|_1^2 + |h|^2\} = \operatorname*{Min}_{h \in E'} \{\|f-h\|_1^2 + |h|^2\}.$$

D'autre part on a encore l'identité (*). En effet on a

$$\frac{1}{2}|tf+(1-t)g|^2 = \sup_{x}\{<tf+(1-t)g,x> - \frac{1}{2}|x|^2\}$$

$$\frac{1}{2}|f-g|^2 = \sup_{y}\{<f-g,y> - \frac{1}{2}|y|^2\}$$

et donc

$$\frac{1}{2}|tf+(1-t)g|^2 + \frac{1}{2}t(1-t)|f-g|^2 =$$

$$= \sup_{x,y}\{<tf+(1-t)g,x> + t(1-t)<f-g,y> - \frac{1}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}t(1-t)|y|^2\}.$$

On conclut grâce au changement de variables

$$x = t\xi + (1-t)\eta \quad \text{et} \quad y = \xi - \eta.$$

Soient $f,g \in E'$; on fixe $h_1,h_2 \in E'$ tels que

$$\|f\|_2^2 = \|f-h_1\|_2^2 + |h_1|^2$$

$$\|g\|_2^2 = \|g-h_2\|_1^2 + |h_2|^2.$$

Soit $t \in]0,1[$; on a

$$\|tf+(1-t)g\|_2^2 \leq \|tf+(1-t)g-(th_1+(1-t)h_2)\|_1^2 + |th_1+(1-t)h_2|^2$$

$$< t\|f\|_2^2 + (1-t)\|g\|_2^2,$$

sauf si $f-h_1 = g-h_2$ et $h_1 = h_2$ i.e. $f=g$.

[III.28] E étant réflexif, $\sup_{x\in B_E} <f,x>$ est atteint en un point $x_0 \in B_E$. Alors $x = x_0\|f\|$ vérifie $f \in F(x)$.

Autre méthode. Soit F' l'application de dualité de E' dans E". L'ensemble F'(f) est non vide (corollaire I.3) ; soit $\xi \in F'(f)$. Comme E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $Jx = \xi$ (J est l'injection canonique de E dans E"). On a

$$\|\xi\| = \|f\| = \|x\| \quad \text{et} \quad <\xi,f> = \|f\|^2 = <f,x>.$$

Donc $f \in F(x)$.

Unicité. Soient x_1 et x_2 tels que $f \in F(x_1)$ et $f \in F(x_2)$. Alors $\|x_1\| = \|x_2\| = \|f\|$ et donc si $x_1 \neq x_2$ on a

$$\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| < \|f\|.$$

D'autre part $<f,x_1> = <f,x_2> = \|f\|^2$ et donc

$$\|f\|^2 = <f,\frac{x_1+x_2}{2}> < \|f\|^2 \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2.$$

III.29

1) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $M_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites (x_n), (y_n) telles que

$$\|x_n\| \leq M, \quad \|y_n\| \leq M, \quad \|x_n - y_n\| > \varepsilon_0 \quad \text{et}$$

(1) $$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\|^2 > \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \frac{1}{n}.$$

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $\|x_n\| \to a$ et $\|y_n\| \to b$. On obtient alors $a+b \geq \varepsilon_0$ et $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Par suite $a = b \neq 0$. On pose

$$x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{et} \quad y'_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

Pour n assez grand on a $\|x'_n - y'_n\| \geq \frac{\varepsilon_0}{a} + o(1)$ (ici, et dans la suite, on désigne par $o(1)$ diverses quantités positives ou négatives qui tendent vers 0 quand $n \to \infty$). Grâce à l'uniforme convexité, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\left\|\frac{x'_n + y'_n}{2}\right\| \leq 1 - \delta_0.$$

Donc $$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \leq a(1-\delta_0) + o(1).$$

D'après (1) on a $$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\|^2 \geq a^2 + o(1).$$

D'où $a^2 \leq a^2(1-\delta_0)^2 + o(1)$ - absurde.

III.32

1) Le minimum est atteint car E est réflexif et on peut appliquer le corollaire III.20. L'unicité provient du fait que E est strictement convexe et donc la *fonction* $y \mapsto \|y-x\|^2$ est strictement convexe.

2) Soit (y_n) une suite minimisante ; on pose

$$d_n = \|x - y_n\| \quad \text{et} \quad d = \operatorname*{Inf}_{y \in C} \|x-y\|, \text{ de sorte que } d_n \to d.$$

On peut extraire une sous-suite (y_{n_k}) telle que $y_{n_k} \rightharpoonup z$ faiblement. On a alors $z \in C$ et $\|x-y\| \leq d$ (pourquoi ?).

Par conséquent il vient

$$\begin{cases} x-y_{n_k} \rightharpoonup x-z \\ \|x-y_{n_k}\| \to d = \|x-z\|. \end{cases}$$

Il en résulte (voir proposition III.30) que $y_{n_k} \to z$ fortement. L'unicité de la limite implique que *toute la suite* y_n converge fortement vers $P_C x$ (précisez le raisonnement).

3) et 4). Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ et des suites (x_n), (y_n) telles que

$$\|x_n\| \leq M, \ \|y_n\| \leq M, \ \|x_n - y_n\| \to 0 \text{ et } \|P_C x_n - P_C y_n\| \geq \varepsilon_o \quad \forall n.$$

On a donc

$$\|x_n - P_C x_n\| \leq \left\| x_n - \frac{P_C x_n + P_C y_n}{2} \right\|$$

$$\leq \left\| \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{P_C x_n + P_C y_n}{2} \right\| + o(1)$$

et de même

$$\|y_n - P_C y_n\| \leq \left\| \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{P_C x_n + P_C y_n}{2} \right\| + o(1).$$

Par conséquent on obtient

(1) $$\frac{1}{2}\|x_n - P_C x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n - P_C y_n\|^2 \leq \left\| \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{P_C x_n + P_C y_n}{2} \right\|^2 + o(1).$$

D'autre part on pose

$$a_n = x_n - P_C x_n \quad \text{et} \quad b_n = y_n - P_C y_n,$$

de sorte que $\|a_n - b_n\| \geq \varepsilon_o + o(1)$ et $\|a_n\| \leq M'$, $\|b_n\| \leq M'$.

Grâce à l'exercice III.29 il existe $\delta_o > 0$ tel que

$$\left\| \frac{a_n + b_n}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|a_n\|^2 + \frac{1}{2}\|b_n\|^2 - \delta_o$$

c'est-à-dire

(2) $$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{P_C x_n + P_C y_n}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_n - P_C x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n - P_C y_n\|^2 - \delta_o.$$

Combinant (1) et (2) on trouve une contradiction.

5) Raisonner comme à la question 1).

6) On a

$$n\|y_n - x\|^2 + \varphi(y_n) \leq n\|y-x\|^2 + \varphi(y) \quad \forall y \in D(\varphi). \tag{3}$$

En utilisant le fait que φ est minoré par une fonction affine continue (proposition I.9) on voit que (y_n) reste borné quand $n \to \infty$. (Précisez). On extrait une sous-suite (y_{n_k}) telle que $y_{n_k} \rightharpoonup z$ faiblement et donc $z \in \overline{D(\varphi)}$ (pourquoi ?). On déduit de (3) que

$$\|z-x\| \leq \|y-x\| \quad \forall y \in D(\varphi) \text{ et ensuite } \forall y \in \overline{D(\varphi)}.$$

Donc $z = P_C x$ où $C = \overline{D(\varphi)}$.

D'autre part, grâce à (3) on a

$$\limsup \|y_n - x\| \leq \|y-x\| \quad \forall y \in \overline{D(\varphi)}$$

et en particulier

$$\limsup \|y_n - x\| \leq \|z-x\|.$$

On conclut que $y_{n_k} \to z$ fortement. Enfin, grâce à l'unicité de la limite, c'est *toute la suite* (y_n) qui converge fortement vers $P_C x$.

CHAPITRE IV

LES ESPACES L^p .

Dans tout ce chapitre, et sauf indication supplémentaire, Ω désigne un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie.

On note $\| \ \|_p$ au lieu de $\| \ \|_{L^p}$.

$\boxed{\text{IV.1}}$ Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

On pose

$$f(x) = (1 + |x|^\alpha)^{-1} (1 + |\log|x||^\beta)^{-1}, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

A quelles conditions $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$?

$\boxed{\text{IV.2}}$ Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.

1) Pour chaque $r \in \mathbb{R}$ et n entier ≥ 1 on pose

$$T_n r = \begin{cases} r & \text{si} \quad |r| \leq n \\ \dfrac{nr}{|r|} & \text{si} \quad |r| > n. \end{cases}$$

Montrer que $T_n f \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$.

2) Soit (Ω_n) une suite croissante d'ensembles mesurables tels que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Soit χ_n la fonction caractéristique de Ω_n.

Montrer que $\chi_n f \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$.

3) Montrer que $\chi_n T_n f \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$.

$\boxed{\text{IV.3}}$ On suppose que $|\Omega| < \infty$. Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Montrer que $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection continue. Plus précisément on a

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder].

$\boxed{\text{IV.4}}$

1) Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Vérifier que $h(x) = \operatorname{Max}\{f(x), g(x)\} \in L^p(\Omega)$.

2) Soient (f_n) et (g_n) deux suites de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, telles que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \to g$ dans $L^p(\Omega)$.

On pose

$$h_n = \operatorname{Max}\{f_n, g_n\}.$$

Montrer que $h_n \to h$ dans $L^p(\Omega)$.

3) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ et soit (g_n) une suite $L^\infty(\Omega)$.

On suppose que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, $g_n \to g$ p.p. et $\|g_n\|_\infty \leq C$.

Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^p(\Omega)$.

$\boxed{\text{IV.5}}$

1) Soient k fonctions $f_1, f_2, \dots, f_k$ telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $\forall i$, avec $1 \leq p_i \leq \infty$ $\forall i$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1$.

On pose

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x).$$

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ et que

$$\|f\|_p \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}.$$

[Commencer par le cas $k = 2$; procéder ensuite par récurrence] .

2) En déduire que si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout r compris entre p et q.

Plus précisément, si l'on écrit $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ alors

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \, \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

nöt $\|f\|_r \leq C[f]_p^{\alpha}\,[f]_q^{1-\alpha}$, iod '21. Hölder, C.6.

$\boxed{\text{IV.6}}$ Soient $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.

1) Montrer que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est un sous-ensemble dense de $L^p(\Omega)$.

2) Montrer que l'ensemble

$$\{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \ ; \ \|f\|_q \leq 1\}$$

est fermé dans $L^p(\Omega)$.

3) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et que } \|f_n\|_q \leq C.$$

Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et que $f_n \to f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout r compris entre p et q, $r \neq q$.

$\boxed{\text{IV.7}}$ On suppose que $|\Omega| < \infty$.

1) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $f \in \bigcap\limits_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\|f\|_p \leq C \quad \forall\, 1 \leq p < \infty.$$

Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3) Construire une fonction $f \in \bigcap\limits_{1 \leq p < \infty} L^p(]0,1[)$ telle que $f \notin L^\infty(]0,1[)$.

$\boxed{\text{IV.8}}$ Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Soit $a(x)$ une fonction mesurable définie sur Ω. On suppose que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$.

Montrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec

$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \text{si } p < \infty \\ q & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

[On pourra appliquer le théorème du graphe fermé].

$\boxed{\text{IV.9}}$ Soit $X \subset L^1(\Omega)$ un sous-espace vectoriel fermé. On suppose que

$$X \subset \bigcup_{1 < q \leq \infty} L^q(\Omega).$$

1) Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que $X \subset L^p(\Omega)$.

[Pour tout entier $n \geq 1$ on pourra considérer l'ensemble

$$X_n = \{f \in X \cap L^{1+(1/n)}(\Omega)\ ;\ \|f\|_{1+(1/n)} \leq n\}].$$

2) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|f\|_p \leq C\|f\|;\quad \forall f \in X.$$

$\boxed{\text{IV.10}}$ *Inégalité de Jensen.*

On suppose que $|\Omega| < \infty$.

Soit $j : \mathbb{R} \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $j \not\equiv +\infty$.

Soit $f \in L^1(\Omega)$ tel que $f(x) \in D(j)$ p.p. et $j(f) \in L^1(\Omega)$.

Montrer que

$$j\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega j(f).$$

$\boxed{\text{IV.11}}$ *Intégrandes convexes.*

On suppose que $|\Omega| < \infty$. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

On considère la fonction $J : L^p(\Omega) \to]-\infty,+\infty]$ définie par

$$J(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u(x))dx & \text{si}\quad j(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si}\quad j(u) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

1) Montrer que J est convexe.

2) Montrer que J est s.c.i.

[On pourra commencer par supposer que $j \geq 0$ et utiliser le lemme de Fatou].

3) Prouver que la fonction conjuguée $J^\star : L^{p'}(\Omega) \to]-\infty,+\infty]$ est donnée par

$$J^\star(f) = \begin{cases} \int_\Omega j^\star(f(x))dx & \text{si}\quad j^\star(f) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si}\quad j^\star(f) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

[Lorsque $1 < p < \infty$ on pourra introduire $J_n(u) = J(u) + \frac{1}{n}\int |u|^p$ et commencer par déterminer $J_n^\star$].

4) On désigne par ∂j (resp. ∂J) le sous-différentiel de j (resp. J) ; voir problème

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$; montrer que

$$f \in \partial J(u) \Leftrightarrow f(x) \in \partial j\big(u(x)\big) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

IV.12 *Espaces* $L^\alpha(\Omega)$ *avec* $0<\alpha<1$.

Soit $0<\alpha<1$. On pose

$$L^\alpha(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \;;\; u \text{ mesurable et } |u|^\alpha \in L^1(\Omega)\}$$

et

$$[u]_\alpha = \left(\int |u|^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

1) Vérifier que $L^\alpha(\Omega)$ est un espace vectoriel mais $[\;]_\alpha$ n'est pas une norme. Plus précisément montrer que si $u, v \in L^\alpha(\Omega)$, $u \geq 0$ p.p. et $v \geq 0$ p.p. alors

$$[u+v]_\alpha \geq [u]_\alpha + [v]_\alpha .$$

2) Montrer que

$$[u+v]_\alpha^\alpha \leq [u]_\alpha^\alpha + [v]_\alpha^\alpha \quad \forall u, v \in L^\alpha(\Omega).$$

IV.13 L^p *est uniformément convexe pour* $1<p\leq 2$ *(méthode de C. Morawetz).*

1) Soit $1<p<\infty$. Montrer qu'il existe une constante C (dépendant seulement de p) telle que

$$|a-b|^p \leq C\left(|a|^p + |b|^p\right)^{1-s}\left(|a|^p + |b|^p - 2\left|\frac{a+b}{2}\right|^p\right)^s \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

où $s = p/2$.

2) En déduire que $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe pour $1<p\leq 2$.

[Utiliser la question précédente et l'inégalité de Hölder].

IV.14 Soit $1<p<\infty$.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe une constante $C_\varepsilon>0$ telle que

$$\Big|\,|a+b|^p - |a|^p - |b|^p\,\Big| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que :

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.

ii) la suite (f_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$, i.e. $\|f_n\|_p \leq M \quad \forall n$.

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \{|f_n|^p - |f_n - f|^p\} = \int_\Omega |f|^p.$$

[On pourra appliquer la question 1) avec $a = f_n - f$ et $b = f$. Il est utile d'introduire, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la suite $\varphi_n = \left(\left| |f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p \right| - \varepsilon |f_n - f|^p\right)^+$ où $t^+ = \max(t, 0)$].

3) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et soit $f \in L^p(\Omega)$ tels que :

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.

ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Montrer que $\|f_n - f\|_p \to 0$.

$\boxed{\text{IV.15}}$ *Théorèmes d'Egorov et de Vitali.*

On suppose que $|\Omega| < \infty$.

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telles que

$$f_n \to f \text{ p.p. } (|f| < \infty \text{ p.p.}).$$

1) Soit $\alpha > 0$ fixé.

Montrer que $\left| [|f_n - f| > \alpha] \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (1).

2) Plus précisément, soit

$$S_n(\alpha) = \bigcup_{k \geq n} [|f_k - f| > \alpha].$$

Montrer que $|S_n(\alpha)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) (Egorov). Montrer que

$$\left| \begin{array}{l} \forall \delta > 0 \quad \exists A \subset \Omega \text{ mesurable tel que} \\ |A| < \delta \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } \Omega \setminus A. \end{array} \right.$$

[Etant donné $m \geq 1$ entier, prouver en utilisant 2) qu'il existe $\Sigma_m \subset \Omega$ mesurable tel que $|\Sigma_m| < \frac{\delta}{2^m}$ et il existe N_m entier tel que

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall k \geq N_m, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Sigma_m].$$

4) (Vitali). Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que :

(1) On rappelle les notations $|A| = \text{mes } A$ et $[g > \alpha] = \{x \in \Omega ; g(x) > \alpha\}$.

i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\int_A |f_n|^p \leq \varepsilon \quad \forall n$ et $\forall A$ mesurable avec $|A| < \delta$.

ii) $f_n \to f$ p.p.

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

$\boxed{\text{IV.16}}$ Soit $\Omega =]0,1[$.

1) On considère la suite (f_n) de fonctions définies par $f_n(x) = ne^{-nx}$.

Montrer que :

i) $f_n \to 0$ p.p.

ii) (f_n) est bornée dans $L^1(\Omega)$,

iii) $f_n \not\to 0$ dans $L^1(\Omega)$,

iv) $f_n \not\to 0$ pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Montrer qu'il n'existe aucune sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$.

2) Soit $1 < p < \infty$. On considère la suite (g_n) de fonctions définies par $g_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}$.

Montrer que :

i) $g_n \to 0$ p.p.

ii) (g_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$,

iii) $g_n \not\to 0$ dans $L^p(\Omega)$,

iv) $g_n \longrightarrow 0$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

$\boxed{\text{IV.17}}$ Soit $1 < p < \infty$. Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que :

i) (f_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$,

ii) $f_n \to f$ p.p.

1) Montrer que $f_n \to f$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

[On pourra commencer par montrer que si $f_n \to \tilde{f}$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ et $f_n \to f$ p.p. alors $f = \tilde{f}$ p.p. (utiliser l'exercice III.4)].

2) Même conclusion si l'on remplace l'hypothèse ii) par ii') $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

3) On suppose maintenant que $|\Omega| < \infty$ et on fait les hypothèses i) et ii).

Montrer que $\|f_n - f\|_q \to 0$ pour tout q, $1 \leq q < p$.

[On pourra introduire les fonctions tronquées $T_k f_n$ (voir exercice IV.2) ou bien utiliser Egorov].

$\boxed{\text{IV.18}}$ *Fonctions de Rademacher.*

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. On suppose que f est T-périodique i.e.

$$f(x+T) = f(x) \text{ p.p.}$$

On pose

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

On considère la suite (u_n) de $L^p(0,1)$ définie par

$$u_n(x) = f(nx), \quad x \in]0,1[.$$

1) Montrer que $u_n \rightharpoonup \overline{f}$ dans $L^p(0,1)$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

2) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \|u_n - \overline{f}\|_p$.

3) Examiner les exemples suivants :

i) $u_n(x) = \sin nx$,

ii) $u_n(x) = f(nx)$ où f est 1-périodique et

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in]0,1/2[\\ \beta & \text{si } x \in]1/2,1[. \end{cases}$$

Les fonctions de l'exemple ii) sont les *fonctions de Rademacher*.

$\boxed{\text{IV.19}}$

1) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que :

i) $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$,

ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Montrer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

2) Construire une suite (f_n) de $L^1(0,1)$, $f_n \geq 0$ telle que :

i) $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$,

ii) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$,

iii) $\|f_n - f\|_1 \not\to 0$.

3) Comparer aux résultats de l'exercice IV.14.

$\boxed{\text{IV.20}}$ On suppose que $|\Omega| < \infty$. Soient $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$.

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$|a(t)| \leq C(|t|^{p/q} + 1) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On considère l'application $A : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ définie par

$$(Au)(x) = a(u(x)), \; x \in \Omega.$$

1) Montrer que A est continu de $L^p(\Omega)$ fort dans $L^q(\Omega)$ fort.

2) On prend ici $\Omega =]0,1[$. On suppose que pour toute suite (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ alors $Au_n \rightharpoonup Au$ pour $\sigma(L^q, L^{q'})$.

Montrer que la fonction a est très particulière.

[On pourra utiliser les fonctions de Rademacher ; voir exercice IV.18].

$\boxed{\text{IV.21}}$ Etant donnée une fonction $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = u_0(x+n)$.

1) On suppose que $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$. Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$.

2) On suppose que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que $u_0(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$ au sens suivant :

pour tout $\delta > 0$ l'ensemble $[|u_0| > \delta]$ est de mesure finie.

Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^\infty, L^1)$.

3) On prend $u_0 = \chi_{]0,1[}$.

Montrer qu'il n'existe aucune sous-suite (u_{n_k}) qui converge dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

$\boxed{\text{IV.22}}$

1) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$ et soit $f \in L^p(\Omega)$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $\quad f_n \to f$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

(B) $\left\{ \begin{array}{l} \|f_n\|_p \leq C \\ \text{et} \\ \int_E f_n \to \int_E f \quad \forall E \subset \Omega, \ E \text{ mesurable et } |E| < \infty. \end{array} \right.$

2) Si $p = 1$ et $|\Omega| < \infty$ vérifier que (A) $\Leftrightarrow$ (B).

3) On suppose maintenant que $p = 1$ et que $|\Omega| = \infty$. Montrer que (A) $\Rightarrow$ (B). Construire un exemple montrant que, en général, (B) $\not\Rightarrow$ (A).

[On pourra utiliser l'exercice IV.21, question 3)].

4) Soit (f_n) une suite de $L^1(\Omega)$ et soit $f \in L^1(\Omega)$ avec $|\Omega| = \infty$. On suppose que :

a) $f_n \geq 0 \ \forall n$ et $f \geq 0$ p.p. sur Ω,

b) $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$,

c) $\int_E f_n \to \int_E f \quad \forall E \subset \Omega$, E mesurable et $|E| < \infty$.

Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^1(\Omega)$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

[On pourra commencer par prouver que

$$\int_F f_n \to \int_F f \quad \forall F \subset \Omega, \ F \text{ mesurable et } |F| \leq \infty].$$

$\boxed{\text{IV.22}}$ Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et soit $1 \leq p \leq \infty$. On se propose de montrer que l'ensemble

$$C = \{u \in L^p(\Omega) \ ; \ u \geq f \text{ p.p.}\}$$

est fermé dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

On considère d'abord le cas $1 \leq p < \infty$.

1) Montrer que C est convexe et fermé dans $L^p(\Omega)$ fort. En déduire que C est fermé pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

On considère maintenant le cas $p = \infty$.

2) Montrer que

$$C = \{u \in L^\infty(\Omega) \ ; \ \int u\varphi \geq \int f\varphi \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega), \ f\varphi \in L^1(\Omega) \ \text{ et } \ \varphi \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

[On pourra commencer par supposer que $f \in L^\infty(\Omega)$. Dans le cas général on pourra introduire $\omega_n = [|f| < n]$].

3) En déduire que C est fermé dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

4) Soient $f_1,f_2\in L^\infty(\Omega)$ avec $f_1\leq f_2$ p.p. Montrer que l'ensemble

$$\{u\in L^\infty(\Omega)\ ;\ f_1\leq u\leq f_2 \text{ p.p.}\}$$

est compact dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

$\boxed{\text{IV.24}}$ Soit $u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Soit (ρ_n) une suite régularisante. Soit (ζ_n) une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|\zeta_n\|_\infty\leq 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \zeta_n\to\zeta \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N.$$

On pose

$$v_n=\rho_n\star(\zeta_n u) \quad \text{et} \quad v=\zeta u.$$

1) Montrer que $v_n\to v$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

2) Montrer que $\int_B |v_n-v|\to 0$ pour toute boule B.

$\boxed{\text{IV.25}}$ *Régularisation des fonctions de* $L^\infty(\Omega)$.

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert.

1) Soit $u\in L^\infty(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\Omega)$ telle que :

a) $\|u_n\|_\infty\leq\|u\|_\infty$,

b) $u_n\to u$ p.p. sur Ω,

c) $u_n\to u$ dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

2) Si de plus $u\geq 0$ p.p. montrer qué l'on peut prendre en outre

d) $u_n\geq 0$.

3) Vérifier que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

$\boxed{\text{IV.26}}$ Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $f\in L^1_{loc}(\Omega)$.

1) Montrer que $f\in L^1(\Omega)$ si et seulement si

$$A=\operatorname{Sup}\left\{\int f\varphi\ ;\ \varphi\in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty\leq 1\right\}<\infty$$

et dans ce cas $A=\|f\|_1$.

2) Montrer que $f^+\in L^1(\Omega)$ si et seulement si

$$B = \mathrm{Sup}\left\{\int f\varphi \ ;\ \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \ \text{ et } \ \varphi \geq 0\right\} < \infty$$

et dans ce cas $B = \|f^+\|_1$.

3) Mêmes questions si l'on remplace $C_c(\Omega)$ par $C_c^\infty(\Omega)$.

4) En déduire que

$$\left(\int f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right) \Rightarrow \left(f = 0 \text{ p.p.}\right)$$

$$\text{et} \quad \left(\int f\varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0\right) \Rightarrow \left(f \geq 0 \text{ p.p.}\right).$$

$\boxed{\text{IV.27}}$ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soient $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tels que $u \neq 0$ p.p. sur un sous-ensemble de Ω de mesure positive.

On suppose que

$$\left(\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ et } \int u\varphi > 0\right) \Rightarrow \left(\int v\varphi \geq 0\right).$$

Montrer qu'il existe une constante $\lambda \geq 0$ telle que

$$v = \lambda u.$$

$\boxed{\text{IV.28}}$ Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $\int \rho = 1$. On pose $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$.

Montrer que $\rho_n \star f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

$\boxed{\text{IV.29}}$ Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe une fonction $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que :

a) $0 \leq u_n \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$,

b) $u_n = 1$ sur K,

c) $\mathrm{Supp}\, u_n \subset K + B\left(0, \frac{1}{n}\right)$,

d) $|D^\alpha u_n(x)| \leq C_\alpha n^{|\alpha|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall \alpha$ multi-entier

(où C_α est une constante qui dépend seulement de α).

[Soit χ_n la fonction caractéristique de l'ensemble $K + B\left(0, \frac{1}{2n}\right)$. On pourra prendre $u = \rho_{2n} \star \chi_n$].

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. On pose

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \text{ de sorte que } 1 \leq r \leq \infty.$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ fixé la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.

[On pourra introduire $\alpha = p/q'$, $\beta = q/p'$ et écrire

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^\alpha |g(y)|^\beta \left(|f(x-y)|^{1-\alpha} |g(y)|^{1-\beta}\right)].$$

2) On pose

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Prouver que $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et que $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

3) On suppose maintenant que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que $(f \star g) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que si $1 < p < \infty$ alors

$$(f \star g)(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty.$$

$\boxed{\text{IV.31}}$ Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$.

Pour chaque $r > 0$ on pose

$$f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy, \; x \in \mathbb{R}^N.$$

1) Montrer que $f_r \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ et que $f_r(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ ($r > 0$ étant fixé).

2) Montrer que $f_r \xrightarrow[r \to 0]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

[On pourra écrire $f_r = f \star \varphi_r$ avec φ_r convenablement choisi].

$\boxed{\text{IV.32}}$

1) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Vérifier que $f \star g = g \star f$ et que $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$; on suppose que $f \star \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Montrer que $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Généraliser au cas où $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

3) Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée. On considère l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ défini par

$$Tf = g \star f.$$

Vérifier que T est borné. Déterminer $T^\star$, $TT^\star$ et $T^\star T$; que remarque-t-on ? A quelle condition sur g a-t-on $T^\star = T$?

$\boxed{\text{IV.33}}$ On fixe une fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \not\equiv 0$ et on considère la famille de fonctions

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n\}$$

où $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

1) Soit $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que

$$\|\tau_h f - f\|_p \leqslant \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

2) Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

$\boxed{\text{IV.34}}$ Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est borné.

2) Montrer $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné tel que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Comparer au corollaire IV.26.

$\boxed{\text{IV.35}}$ Soit $G \in L^p(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée avec $1 \leqslant p < \infty$ et soit

$$\mathcal{F} = G \star \mathcal{B}$$

où $\mathcal{B}$ désigne un borné de $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Montrer que $\mathcal{F}_{|\Omega}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$ pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Comparer au corollaire IV.27.

IV.36 *Famille équi-intégrable.*

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ est *équi-intégrable* s'il vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{F}$ est borné dans $L^1(\Omega)$ (1)

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \\ \int_E |f| < \varepsilon \quad \forall E \subset \Omega, \ E \text{ mesurable avec } |E| < \delta \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}, \end{array} \right.$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega \subset \Omega \text{ mesurable avec } |\omega| < \infty \text{ tel que} \\ \qquad \int_{\Omega \setminus \omega} |f| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}. \end{array} \right.$$

Soit (Ω_n) une suite croissante d'ensembles mesurables avec $|\Omega_n| < \infty \ \forall n$, telle que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est équi-intégrable si et seulement si on a :

$$\text{(d)} \quad \lim_{t \to \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{[|f| > t]} |f| = 0$$

et

$$\text{(e)} \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\Omega \setminus \Omega_n} |f| = 0.$$

2) Montrer que si $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$ alors $\mathcal{F}$ est équi-intégrable. La réciproque est-elle vraie ?

---

(1) On peut montrer que (a) est une conséquence de (b) et (c) si la mesure est diffuse (i.e. sans atomes).
Considérer par exemple $\Omega = \mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.

CHAPITRE IV

IV.4

2) Noter que $h_n = \frac{1}{2}(|f_n - g_n| + f_n + g_n)$.

3) Noter que $f_n g_n = (f_n - f)g_n + f(g_n - g)$ et que $f(g_n - g) \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ par convergence dominée.

IV.6

1) Noter que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et plus précisément $\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1$.
Comme Ω est σ-fini on écrit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ avec $|\Omega_n| < \infty \ \forall n$.

Etant donné $f \in L^p(\Omega)$ alors $\chi_n T_n f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\chi_n T_n f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\Omega)$ (voir exercice IV.2).

2) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $\|f_n\|_q \leq 1$.

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $f_n \to f$ p.p. (théorème IV.9). On déduit du lemme de Fatou que $f \in L^q(\Omega)$ et $\|f\|_q \leq 1$.

3) On sait déjà, grâce à la question 2), que $f \in L^q(\Omega)$ et donc $f \in L^r(\Omega)$ pour tout r compris entre p et q. D'autre part on écrit $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ avec $0 < \alpha < 1$ et l'on a

$$\|f_n - f\|_r \leq \|f_n - f\|_p^\alpha \, \|f_n - f\|_q^{1-\alpha} \leq \|f_n - f\|_p^\alpha \, (2C)^{1-\alpha}.$$

IV.7

1) On a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty |\Omega|^{1/p}$ et donc $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

D'autre part, soit $0 < k < \|f\|_\infty$ et soit

$$A = \{x \in \Omega \ ; \ |f(x)| > k\}.$$

Alors

$$|A| \neq 0 \quad \text{et} \quad \|f\|_p \geq k|A|^{1/p}$$

Par suite $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq k \quad \forall k < \|f\|_\infty$.

2) Soit $k > C$ et soit A défini comme ci-dessus. Alors $k^p|A| \leq \|f\|_p^p \leq C^p$ et donc $|A| \leq \left(\frac{C}{k}\right)^p \quad \forall p$. Il en résulte que $|A| = 0$.

3) $f(x) = \log|x|$.

IV.8 On considère l'opérateur linéaire $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ défini par $Tu = au$. Le graphe de T est fermé. En effet, soit (u_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $au_n \to f$ dans $L^q(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $u_n \to u$ p.p. et $au_n \to f$ p.p. Donc $f = au$ p.p. i.e. $f = Tu$.

Par suite T est un opérateur borné (théorème II.7) et il existe une constante C telle que

$$\|au\|_q \leq C\|u\|_p \quad \forall u \in L^p(\Omega). \tag{1}$$

1er cas : $p < \infty$.

On déduit de (1) que

$$\int |a|^q|v| \leq C^q\|v\|_{p/q} \quad \forall v \in L^{p/q}(\Omega).$$

L'application $v \mapsto \int |a|^q v$ définit une forme linéaire continue sur $L^{p/q}(\Omega)$ et par conséquent $|a|^q \in L^{(p/q)'}(\Omega)$.

2ème cas : $p = \infty$.

On choisit $u \equiv 1$ dans (1).

IV.9

1) X muni de la norme $\| \ \|_1$ est un espace de Banach. Pour chaque n, X_n est un sous-ensemble fermé de X (voir exercice IV.6).

D'autre part, $\bigcup_n X_n = X$. En effet, soit $f \in X$; il existe $q > 1$ tel que $f \in L^q(\Omega)$. Donc $f \in L^{1+1/n}(\Omega)$ dès que $1 + \frac{1}{n} \leq q$ et de plus

$$\|f\|_{1+1/n} \leq \|f\|_1^{\alpha_n} \|f\|_q^{1-\alpha_n} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{1+1/n} = \frac{\alpha_n}{1} + \frac{1-\alpha_n}{q}.$$

Par conséquent $f \in X_n$ pour n assez grand.

Grâce au lemme de Baire, il existe n_0 tel que $\operatorname{Int} X_{n_0} \neq \emptyset$. Par suite $X \subset L^{1+1/n_0}(\Omega)$.

2) L'identité $I : X \to L^p(\Omega)$ est un opérateur linéaire dont le graphe est fermé. C'est donc un opérateur borné.

$\boxed{\text{IV.10}}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x)t \leq j\big(f(x)\big) + j^*(t) \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

et en intégrant on obtient

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right)t \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega j(f) + j^*(t).$$

Donc

$$\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \left\{\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right)t - j^*(t)\right\} \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega j(f).$$

$\boxed{\text{IV.11}}$

1) Soient $u_1, u_2 \in D(J)$ et $t \in [0,1]$. Alors $j\big(tu_1 + (1-t)u_2\big)$ est mesurable (car j est continue). D'autre part $j\big(tu_1 + (1-t)u_2\big) \leq tj(u_1) + (1-t)j(u_2)$. Enfin il existe des constantes a et b telles que $j(s) \geq as + b \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Donc

$$j\big(tu_1 + (1-t)u_2\big) \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad J\big(tu_1 + (1-t)u_2\big) \leq tJ(u_1) + (1-t)J(u_2).$$

2) Supposons d'abord que $j \geq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\{u \in L^p(\Omega) \ ; \ J(u) \leq \lambda\}$$

est fermé. En effet soit (u_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\int j(u_n) \leq \lambda$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $u_n \to u$ p.p. On déduit du lemme de Fatou que $j(u) \in L^1(\Omega)$ et que $\int j(u) \leq \lambda$. Donc J est s.c.i. Dans le cas général on pose $\tilde{j}(s) = j(s) - as - b \geq 0$. Alors $\tilde{J}$ est s.c.i. et donc aussi $J(u) = \tilde{J}(u) + a\int u + b|\Omega|$.

3) Notons d'abord que

$$J^*(f) \leq \int j^*(f) \quad \text{si} \quad j^*(f) \in L^1(\Omega).$$

En effet on a

$$fu - j(u) \leq j^*(f) \quad \text{p.p.}$$

et donc

$$\sup_u\left\{\int fu-\int j(u)\right\}\leqslant\int j^*(f).$$

L'inégalité inverse est plus délicate. On commence par supposer que $1<p<\infty$.

On pose

$$j_n(t)=j(t)+\frac{1}{n}|t|^p,\ t\in\mathbb{R}.$$

On va montrer que

$$(1)\qquad J_n^*(f)=\int j_n^*(f)\quad\forall f\in L^{p'}(\Omega).$$

En effet, soit $f\in L^{p'}(\Omega)$; pour presque tout $x\in\Omega$ fixé

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\left\{f(x)u-j(u)-\frac{1}{n}|u|^p\right\}$$

est atteint en un point unique noté $u(x)$ tel que

$$j\big(u(x)\big)+\frac{1}{n}|u(x)|^p-f(x)u(x)\leqslant j(0).$$

Il en résulte que $u\in L^p(\Omega)$ et que $j(u)\in L^1(\Omega)$ (pourquoi ?)

Donc $J_n^*(f)\geqslant\int j_n^*(f)$; or on connaît déjà l'inégalité inverse, d'où (1).

Comme $J\leqslant J_n$, on a $J_n^*\leqslant J^*$ i.e.

$$\int j_n^*(f)\leqslant J^*(f).$$

D'autre part, pour tout $s\in\mathbb{R}$, $j_n^*(s)\uparrow j^*(s)$ quand $n\uparrow\infty$; en effet $j_n^*=j^*\nabla\left(\frac{1}{n}|\ |^p\right)^*$ (voir exercice I.22) et on procède ensuite comme à l'exercice I.23.

On conclut, grâce au théorème de convergence monotone que si $f\in D(J^*)$ alors

$$j^*(f)\in L^1(\Omega)\quad\text{et}\quad\int j^*(f)\leqslant J^*(f).$$

Dans le cas où $p=1$ on reprend la méthode ci-dessus, par exemple, avec

$$j_n(t)=j(t)+\frac{1}{n}t^2.$$

4) On suppose d'abord que $f(x)\in\partial j\big(u(x)\big)$ p.p. sur Ω. Alors

$$j(v)-j\big(u(x)\big)\geqslant f(x)\big(v-u(x)\big)\quad\forall v\in\mathbb{R}\text{ et p.p. sur }\Omega.$$

Prenant $v=0$ on voit que $j(u)\in L^1(\Omega)$ et donc

$$J(v)-J(u)\geqslant\int f(v-u)\quad\forall v\in D(J).$$

Inversement supposons que $f\in\partial J(u)$ alors on a $J(u)+J^*(f)=\int fu.$

Donc

$$j(u)\in L^1(\Omega),\ j^*(f)\in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_\Omega \{j(u)+j^*(f)-fu\}=0.$$

Comme $j(u)+j^*(f)-fu\geq 0$ p.p. on conclut que

$$j(u)+j^*(f)-fu=0 \text{ p.p.} \quad \text{i.e.} \quad f\in\partial j(u) \text{ p.p.}$$

$\boxed{\text{IV.12}}$ On pose $u^\alpha=f$, $v^\alpha=g$ et $p=1/\alpha$.

Il s'agit de montrer que

$$(1) \qquad \left(\int f\right)^p+\left(\int g\right)^p\leq\left[\int\left(f^p+g^p\right)^{1/p}\right]^p.$$

On pose $a=\int f$ et $b=\int g$, de sorte que

$$a^p+b^p=\int a^{p-1}f+b^{p-1}g\leq\int(a^p+b^p)^{1/p'}(f^p+g^p)^{1/p}$$
$$=(a^p+b^p)^{1/p'}\int(f^p+g^p)^{1/p}.$$

D'où $(a^p+b^p)^{1/p}\leq\int(f^p+g^p)^{1/p}$ i.e. (1).

$\boxed{\text{IV.13}}$

1) On se ramène à prouver que

$$\underset{t\in[-1,+1]}{\operatorname{Inf}}\left\{\frac{(|t|^p+1)^{1-s}\left(|t|^p+1-2\left|\frac{t+1}{2}\right|^p\right)^s}{|t-1|^p}\right\}>0.$$

Il suffit de montrer que

$$\underset{t\in[-1,+1]}{\operatorname{Inf}}\left\{\frac{|t|^p+1-2\left|\frac{t+1}{2}\right|^p}{|t-1|^2}\right\}>0.$$

Or la fonction $\varphi(t)=|t|^p+1-2\left|\frac{t+1}{2}\right|^p$ vérifie

$$\varphi(t)>0\quad\forall t\in[-1,+1],\ \varphi(1)=\varphi'(1)=0 \quad\text{et}\quad \varphi''(1)>0.$$

$\boxed{\text{IV.14}}$

1) On se ramène à montrer que $\forall\varepsilon>0\quad\exists C_\varepsilon>0$ tel que

$$\left|\,|t+1|^p-|t|^p-1\right|\leq\varepsilon|t|^p+C_\varepsilon\quad\forall t\in\mathbb{R}\ ;$$

ceci équivaut à

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{\left||t+1|^p - |t|^p - 1\right|}{|t|^p} = 0.$$

2) On a $0 \leq \varphi_n \leq C_\varepsilon |f|^p$ et d'autre part $\varphi_n \to 0$ p.p. On en déduit par convergence dominée que $\int \varphi_n \to 0$. Par ailleurs on a

$$\left||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p\right| \leq \varphi_n + \varepsilon |f_n - f|^p$$

et donc

$$\int \left||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p\right| \leq \int \varphi_n + \varepsilon (2M)^p.$$

Il vient

$$\limsup_{n\to\infty} \int \left||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p\right| \leq \varepsilon (2M)^p, \quad \forall \varepsilon > 0$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \int \left||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p\right| = 0.$$

3) Appliquer la question 2).

IV.15

1) et 2) Soit $g_n = \chi_{S_n}$ (fonction caractéristique de S_n). Alors $g_n \to 0$ p.p. et $|g_n| \leq 1$. On en déduit par convergence dominée ($|\Omega| < \infty$) que $\int g_n \to 0$ i.e. $|S_n| \to 0$.

3) Soit $m \geq 1$ entier ; on applique la question 2) avec $\alpha = 1/m$. On peut donc trouver un entier N_m tel que $|S_{N_m}(\frac{1}{m})| < \frac{\delta}{2^m}$.

On pose $\Sigma_m = S_{N_m}(\frac{1}{m})$ et on a donc

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall k \geq N_m, \ \forall x \in \Omega \setminus \Sigma_m.$$

On pose enfin $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Sigma_m$ de sorte que $|A| < \delta$. Montrons que $f_n \to f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. Etant donné $\varepsilon > 0$ on fixe un entier $m_0 > 1/\varepsilon$. On a donc

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k \geq N_{m_0}, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Sigma_{m_0},$$

et a fortiori

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k \geq N_{m_0}, \quad x \in \Omega \setminus A.$$

4) Etant donné $\varepsilon > 0$ on fixe d'abord $\delta > 0$ grâce à i) et puis $A \subset \Omega$ grâce à la question 3). On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} \text{et} \quad \displaystyle\int_A |f_n|^p \leq \varepsilon \quad \forall n \\ \\ f_n \longrightarrow f \text{ uniformément sur } \Omega\setminus A. \end{array}\right.$$

On en déduit (par Fatou) que $\int_A |f|^p \leq \varepsilon$ et

$$\int_\Omega |f_n - f|^p \leq \int_A |f_n - f|^p + \int_{\Omega\setminus A} |f_n - f|^p \leq 2^p \varepsilon + |\Omega| \, \|f_n - f\|^p_{L^\infty(\Omega\setminus A)} .$$

IV.16

1) Noter que $\int f_n \varphi \longrightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$. Supposons, par l'absurde, que

$$f_{n_k} \longrightarrow f \text{ pour } \sigma(L^1, L^\infty).$$

Alors $\int f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$ et par suite (lemme IV.2) $f = 0$ p.p.

D'autre part, on a $\int f_{n_k} \longrightarrow \int f = 0$; mais $\int f_{n_k} = \int^{n_k} e^{-t}\, dt \longrightarrow 1$ - absurde.

2) iv) Noter que $\int g_n \varphi \longrightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$ et utiliser le fait que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^{p'}(\Omega)$ (car $p > 1$ et $p' < \infty$).

IV.17

1) Prouvons d'abord que si une suite (f_n) vérifie :

a) $f_n \longrightarrow \tilde{f}$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$,

b) $f_n \longrightarrow f$ p.p.

alors $f = \tilde{f}$.

En effet, il existe une suite (g_n) de $L^p(\Omega)$ telle que

c) $g_n \in \text{conv}\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$,

d) $g_n \longrightarrow \tilde{f}$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

Il résulte de b) et c) que $g_n \longrightarrow f$ p.p.

D'autre part (théorème IV.9) il existe une sous-suite (g_{n_k}) telle que $g_{n_k} \longrightarrow \tilde{f}$ p.p. Donc $f = \tilde{f}$ p.p.

Montrons maintenant sous les hypothèses i) et ii) que $f_n \longrightarrow f$, pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \longrightarrow \tilde{f}$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$. Grâce à ce qui précède on a $f = \tilde{f}$ p.p. L'"unicité de la limite" en-

et donc

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^q \leq (2C)^q \, \delta^{1-(q/p)} \quad \forall \delta > 0.$$

$\boxed{\text{IV.18}}$

1) On vérifie aisément que $\int_a^b u_n(t)dt \to (b-a)\overline{f}$. On en déduit que $u_n \to \overline{f}$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ si $1 < p \leq \infty$ (car les fonctions en escalier sont alors denses dans $L^{p'}$). Lorsque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on approche f par une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, T-périodique, telle que $\frac{1}{T}\int_0^T |f-g| < \varepsilon$.

Soit $v_n(x) = g(nx)$, $x \in]0,1[$ et soit $\varphi \in L^\infty(0,1)$. On a

$$\left|\int u_n \varphi - \overline{f}\int \varphi\right| \leq 2\varepsilon \|\varphi\|_\infty + \left|\int v_n \varphi - \overline{g}\int \varphi\right|$$

et donc $\limsup_{n\to\infty} \left|\int u_n \varphi - \overline{f}\int \varphi\right| \leq 2\varepsilon \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varepsilon > 0$. Par conséquent $u_n \to \overline{f}$ pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$.

2) $\lim_{n\to\infty} \|u_n - \overline{f}\|_p = \left[\frac{1}{T}\int_0^T |f - \overline{f}|^p\right]^{1/p}$.

3) i) $u_n \to 0$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$

ii) $u_n \to \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

$\boxed{\text{IV.20}}$

1) Soit (u_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ fort. On peut extraire une sous-suite telle que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ p.p. et $|u_{n_k}| \leq v \quad \forall k$ avec $v \in L^p(\Omega)$ (théorème IV.9).

On en déduit par convergence dominée que $Au_{n_k} \to Au$ dans $L^q(\Omega)$ fort.

L'"unicité de la limite" permet de conclure que *toute* la suite $Au_n \to Au$ (détailler !)

2) On utilise la suite (u_n) de l'exercice IV.18, question 3 ii). Alors $u_n \to \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ et $Au_n \to \frac{1}{2}\left(a(\alpha)+a(\beta)\right)$. On en déduit que

$$a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(a(\alpha) + a(\beta)\right), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

et donc la fonction a est nécessairement *affine*.

traîne que *toute* la suite (f_n) converge faiblement vers f (détailler le raisonnement).

2) On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \to f$ p.p. D'après ce qui précède on sait que $f_{n_k} \to f$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$. L'"unicité de la limite" entraîne que *toute* la suite (f_n) converge faiblement vers f (détailler le raisonnement).

3) <u>1ère méthode</u>. On écrit

(1) $$\|f_n - f\|_q \leq \|f_n - T_k f_n\|_q + \|T_k f_n - T_k f\|_q + \|T_k f - f\|_q .$$

Pour tout $k > 0$ on a

$$\int |f_n - T_k f_n|^q \leq \int_{[|f_n| \geq k]} |f_n|^q .$$

D'autre part on a

$$\int |f_n|^p \leq C^p \quad \text{et donc} \quad k^{p-q} \int_{[|f_n| \geq k]} |f_n|^q \leq C^p .$$

On en déduit que

(2) $$\|f_n - T_k f_n\|_q \leq \left(\frac{C^p}{k^{p-q}}\right)^{1/q} \quad \forall n.$$

Le lemme de Fatou entraîne que

(3) $$\|f - T_k f\|_q \leq \left(\frac{C^p}{k^{p-q}}\right)^{1/q} .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on *fixe* k assez grand pour que $\left(\frac{C^p}{k^{p-q}}\right)^{1/q} < \varepsilon$. Par convergence dominée on voit que $\|T_k f_n - T_k f\|_q \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et donc il existe N tel que

(4) $$\|T_k f_n - T_k f\|_q < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Combinant (1) (2) (3) et (4) on obtient

$$\|f_n - f\|_q < 3\varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

<u>2ème méthode</u>. On applique Egorov : étant donné $\delta > 0$ il existe $A \subset \Omega$ tel que $|A| < \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$. On écrit

$$\begin{aligned}
\int |f_n - f|^q &= \int_{\Omega \setminus A} + \int_A \\
&\leq \|f_n - f\|^q_{L^\infty(\Omega \setminus A)} |\Omega| + \|f_n - f\|_p^q \, |A|^{1-(q/p)} \\
&\leq \|f_n - f\|^q_{L^\infty(\Omega \setminus A)} |\Omega| + (2C)^q \, \delta^{1-(q/p)}
\end{aligned}$$

IV.21

1) Vérifier que $\int_I u_n(t)dt \to 0$ $\forall I$ intervalle borné. Conclure grâce à la densité dans $L^{p'}(\mathbb{R})$ des fonctions en escalier.

2) Noter que $\int_I u_n(t)dt \to 0$ $\forall I$ intervalle borné. En effet, étant donné $\varepsilon>0$, on fixe $\delta>0$ tel que $\delta(\|u_0\|_\infty+|I|)<\varepsilon$. On pose $E=[|u_0|>\delta]$. On écrit

$$\int_I u_n(t)dt=\int_{I+n} u_0(t)dt=\int_{(I+n)\cap E} u_0+\int_{(I+n)\cap \complement E} u_0 .$$

On choisit N de sorte que $|(I+n)\cap E|<\delta$ $\forall n\geqslant N$ (pourquoi est-ce possible ?). On a alors

$$\left|\int_I u_n(t)dt\right|\leqslant\delta\|u\|_\infty+\delta|I|<\varepsilon \quad \forall n\geqslant N.$$

Conclure grâce à la densité dans $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions en escalier.

3) Supposons que $u_{n_k}\to u$ dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^1,L^\infty)$. On considère la fonction $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$f=\sum_i(-1)^i\,\chi_{]-n_i,-n_i+1[} .$$

Alors $\int u_{n_k}f=(-1)^k$ ne converge pas !

IV.22

1) Pour prouver que (B) $\Rightarrow$ (A) utiliser le fait que l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_E avec E mesurable et $|E|<\infty$ est dense dans $L^{p'}(\Omega)$ (car $1\leqslant p'<\infty$).

2) Utiliser le fait que l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_E ($E\subset\Omega$, E mesurable) est dense dans $L^\infty(\Omega)$ (justifier cette assertion !).

4) Etant donné $\varepsilon>0$ on fixe $\omega\subset\Omega$, ω mesurable, $|\omega|<\infty$ et

(1) $$\int_{\complement\omega} f<\varepsilon .$$

On a

(2) $$\int_{\complement\omega} f_n=\int_{\complement\omega} f+\left(\int_\omega f-\int_\omega f_n\right)+\left(\int_\Omega f_n-\int_\Omega f\right)$$

et donc

$$\int_{\complement\omega} f_n=\int_{\complement\omega} f+o(1) \quad \text{grâce à b) et c).}$$

D'autre part, on a

$$\int_F f_n = \int_{F\cap\omega} f_n + \int_{F\cap\complement\omega} f_n = \int_{F\cap\omega} f + \int_{F\cap\complement\omega} f_n + o(1)$$

et donc

$$\int_F f_n - \int_F f = \int_{F\cap\complement\omega} (f_n - f) + o(1).$$

Combinant (1), (2) et (3) on voit que

$$\left|\int_F f_n - \int_F f\right| \leq 2\varepsilon + o(1).$$

On en déduit que $\int_F f_n \to \int_F f$.

On conclut en utilisant le fait que l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_F avec $F\subset\Omega$, F mesurable et $|F|\leq\infty$ est dense dans $L^\infty(\Omega)$ (justifier !)

$\boxed{\text{IV.23}}$

1) Soit (u_n) une suite de C telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ fort. On peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k} \to u$ p.p. Donc $u \geq f$ p.p.

2) Soit $u\in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\int u\varphi \geq \int f\varphi \quad \forall\varphi\in L^1(\Omega),\ f\varphi\in L^1(\Omega),\ \varphi\geq 0 \ \text{ p.p.}$$

On va montrer que $u\geq f$.

On écrit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ avec $|\Omega_n| < \infty$ et on pose

$$\Omega'_n = \Omega_n \cap [|f| < n] \text{ de sorte que } \bigcup \Omega'_n = \Omega.$$

Soit $A = [u < f]$. Choisissant $\varphi = \chi_{\Omega'_n\cap A}$ on voit que $\int_{\Omega'_n\cap A} |f-u| \leq 0$ et donc

$$|A\cap\Omega'_n| = 0 \quad \forall n.$$

Par conséquent $|A| = 0$.

3) Noter que pour $\varphi\in L^1(\Omega)$ fixé avec $f\varphi\in L^1(\Omega)$ l'ensemble $\{u\in L^\infty(\Omega)\ ;\ \int u\varphi \geq \int f\varphi\}$ est fermé pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

$\boxed{\text{IV.24}}$

1) Soit $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\int v_n\varphi = \int u\zeta_n(\check{\rho}_n\star\varphi) = \int u\zeta_n(\check{\rho}_n\star\varphi - \varphi) + \int u\zeta_n\varphi .$$

et donc

$$\left|\int v_n\varphi-\int v\varphi\right| \leq \|u\|_\infty \,\|\check{\rho}_n\star\varphi-\varphi\|_1 + \|u\|_\infty \,\|(\zeta_n-\zeta)\varphi\|_1 .$$

Le premier terme tend vers 0 grâce au théorème IV.22 et le second terme tend vers 0 par convergence dominée.

2) Soit $B = B(x_0,R)$ et soit χ la fonction caractéristique de $B(x_0,R+1)$. Posons $\tilde{v}_n = \rho_n\star(\zeta_n\chi u)$; alors $\tilde{v}_n = v_n$ sur $B(x_0,R)$. En effet

$$\operatorname{Supp}(\tilde{v}_n-v_n) \subset \overline{B\left(0,\tfrac{1}{n}\right) + \complement B(x_0,R+1)}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_B |v_n-v| = \int_B |\tilde{v}_n-\chi v| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\tilde{v}_n-\chi v| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\rho_n\star(\zeta_n-\zeta)\chi u| + \int_{\mathbb{R}^N}|(\rho_n\star\chi v) - \chi v| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|(\zeta_n-\zeta)\chi u| + \int_{\mathbb{R}^N}|(\rho_n\star\chi v) - \chi v| \to 0.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{IV.25}}$ Soit $\bar{u}$ le prolongement de u par 0 en dehors de Ω. Soit

$$\Omega_n = \left\{x\in\Omega \ ;\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{2}{n} \text{ et } |x| < n\right\}.$$

Soit ζ_n (resp. ζ) la fonction caractéristique de Ω_n (resp. Ω) de sorte que $\zeta_n \to \zeta$ sur $\mathbb{R}^N$.

On pose

$$v_n = \rho_n\star(\zeta_n\bar{u}).$$

Alors $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ et grâce à l'exercice IV.24, on a

$$\int_B |v_n-\bar{u}| \to 0 \text{ pour toute boule } B.$$

Pour chaque boule B on peut donc extraire une sous-suite qui converge vers $\bar{u}$ p.p. sur B. Par un procédé de *suite diagonale* on construit une sous-suite extraite (v_{n_k}) qui converge vers $\bar{u}$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$.

$\boxed{\text{IV.26}}$

1) Supposons que $A<\infty$. Montrons que $f\in L^1(\Omega)$ et $\|f\|_1 \leq A$. On a

$$\left|\int f\varphi\right| \leq A\|\varphi\|_\infty \quad \forall\varphi\in C_c(\Omega).$$

Soit $K\subset\Omega$ compact et soit $\psi\in C_c(\Omega)$ avec $0\leqslant\psi\leqslant 1$ et $\psi=1$ sur K.

Soit $u\in L^\infty(\Omega)$; on considère une suite (u_n) de $C_c(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty \quad\text{et}\quad u_n\to u \text{ p.p. sur } \Omega$$

(voir exercice IV.25). On a

$$\left|\int f\psi u_n\right|\leqslant A\|u\|_\infty.$$

A la limite (par convergence dominée) on obtient

$$\left|\int f\psi u\right|\leqslant A\|u\|_\infty \quad \forall u\in L^\infty(\Omega).$$

Prenant $u=\text{signe}(f)$ on voit que $\int_K|f|\leqslant A$. Comme K est un compact arbitraire de Ω on en déduit que $f\in L^1(\Omega)$ et $\|f\|_1\leqslant A$.

2) Supposons que $B<\infty$. On a

$$\int f\varphi\leqslant B\|\varphi\|_\infty \quad \forall\varphi\in C_c(\Omega),\ \varphi\geqslant 0.$$

Reprenant la même méthode qu'à la question 1) on obtient

$$\int f\psi u\leqslant B\|u\|_\infty \quad \forall u\in L^\infty(\Omega),\ u\geqslant 0.$$

Prenant $u=\chi_{[f>0]}$ on voit que $\int_K f^+\leqslant B$.

$\boxed{\text{IV.27}}$ On commence par examiner une situation abstraite. Soit E un e.v. et soient f,g deux formes linéaires sur E telles que $f\not\equiv 0$. On suppose que

$$\Big(\varphi\in E \text{ et } f(\varphi)>0\Big)\Rightarrow\Big(g(\varphi)\geqslant 0\Big).$$

On va montrer qu'il existe une constante $\lambda\geqslant 0$ telle que $g=\lambda f$.

On fixe $\varphi_0\in E$ tel que $f(\varphi_0)=1$. Pour chaque $\varphi\in E$ on a

$$f\Big(\varphi-f(\varphi)\varphi_0+\varepsilon\varphi_0\Big)=\varepsilon>0$$

et donc

$$g\Big(\varphi-f(\varphi)\varphi_0+\varepsilon\varphi_0\Big)\geqslant 0 \quad \forall\varepsilon>0.$$

Par suite $g(\varphi)\geqslant f(\varphi)g(\varphi_0)$ $\forall\varphi\in E$.

Posant $\lambda=g(\varphi_0)\geqslant 0$ on obtient $g=\lambda f$.

<u>Application.</u> $E=C_c^\infty(\Omega)$, $f(\varphi)=\int u\varphi$ et $g(\varphi)=\int v\varphi$.

$\boxed{\text{IV.30}}$ 1) et 2). Noter que $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{r}=1$ et d'autre part $(1-\alpha)r=p$, $(1-\beta)r=q$.

On écrit (x étant fixé)

$$f(x-y)g(y)=\varphi_1(y)\varphi_2(y)\varphi_3(y),$$

avec $\varphi_1(y)=|f(x-y)|^\alpha$, $\varphi_2(y)=|g(y)|^\beta$ et $\varphi_3(y)=|f(x-y)|^{1-\alpha}|g(y)|^{1-\beta}$.

Donc

$$\varphi_1\in L^{q'}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \varphi_2\in L^{p'}(\mathbb{R}^N).$$

Par ailleurs

$$|\varphi_3(y)|^r=|f(x-y)|^p|g(y)|^q.$$

Grâce au théorème IV.15 on sait que pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$ la fonction $|\varphi_3(y)|^r$ est intégrable. Appliquant Hölder (voir exercice IV.5) on en déduit que pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$ la fonction $y\mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable et

$$\int|f(x-y)||g(y)|dy\leq \|f\|_p^\alpha\|g\|_q^\beta\left(\int|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)^{1/r}.$$

Donc

$$|(f\star g)(x)|^r\leq \|f\|_p^{\alpha r}\|g\|_q^{\beta r}\int|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy$$

et par conséquent

$$\int|(f\star g)(x)|^r dx\leq \|f\|_p^{\alpha r}\|g\|_q^{\beta r}\|f\|_p^p\|g\|_q^q=\|f\|_p^r\|g\|_q^r.$$

3) Si $1<p<\infty$ et $1<q<\infty$, il existe des suites (f_n) et (g_n) dans $C_c(\mathbb{R}^N)$ telles que $f_n\to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g_n\to g$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors $f_n\star g_n\in C_c(\mathbb{R}^N)$ et $\|(f_n\star g_n)-(f\star g)\|_\infty\to 0$.

Par conséquent $(f\star g)(x)\to 0$ quand $|x|\to\infty$.

$\boxed{\text{IV.34}}$ Etant donné $\varepsilon>0$ on recouvre $\mathcal{F}$ par un nombre fini de boules

$$\mathcal{F}\subset\bigcup_{i=1}^k B(f_i,\varepsilon).$$

2) Pour chaque i, il existe $\delta_i>0$ tel que

$$\|\tau_h f_i-f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}<\varepsilon \quad \forall h\in\mathbb{R}^N \text{ avec } |h|<\delta_i$$

(voir lemme IV.4).

On pose $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i$. Vérifier que

$$\|\tau_h f - f\| < 3\varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

3) Pour chaque i, il existe $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné tel que

$$\|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_i)} < \varepsilon.$$

On pose $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$. Vérifier que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < 2\varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

CHAPITRE V

LES ESPACES DE HILBERT

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert muni du produit scalaire (,) et de la norme associée | |.

$\boxed{V.1}$ *Identité du parallélogramme*

Soit E un e.v.n. dont la norme $\| \ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2+\|b\|^2), \quad \forall a,b \in E.$$

On se propose de montrer que l'expression

$$(u,v) = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2) \quad u,v \in E$$

définit un produit scalaire tel que $(u,u) = \|u\|^2$.

1) Vérifier que

$$(u,v) = (v,u), \ (-u,v) = -(u,v) \text{ et } (u,2v) = 2(u,v), \ \forall u,v \in E.$$

2) Montrer que

$$(u+v,w) = (u,w) + (v,w) \quad \forall u,v,w \in E.$$

[On pourra appliquer l'identité du parallélogramme successivement avec (i) $a = u$, $b = v$, (ii) $a = u+w$, $b = v+w$ et (iii) $a = u+v-w$, $b = w$].

3) Montrer que $(\lambda u,v) = \lambda(u,v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u,v \in E.$

[Considérer d'abord le cas où $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$].

4) Conclure.

100

Soit Ω un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie. On suppose qu'il existe $A \subset \Omega$ mesurable avec $0 < |A| < |\Omega|$.

On considère l'espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ muni de sa norme usuelle $\| \ \|_p$.

Montrer que $\| \ \|_p$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, sauf si $p = 2$.

[On pourra considérer des fonctions à supports disjoints].

telles

$\boxed{V.3}$ Soient (u_n) une suite de H et (t_n) une suite de $]0,+\infty[$ tels que

$$(t_n u_n - t_m u_m, u_n - u_m) \leq 0 \quad \forall m,n.$$

1) On suppose que la suite (t_n) est *croissante* (non nécessairement bornée).

Montrer que la suite (u_n) converge.

[On pourra commencer par vérifier que la suite $|u_n|$ est décroissante].

2) On suppose que la suite (t_n) est *décroissante*.

Montrer que l'on a l'alternative :

(i) ou bien $|u_n| \to \infty$.

(ii) ou bien (u_n) converge.

Si $t_n \to t > 0$, alors (u_n) converge et si $t_n \to 0$, alors les cas (i) et (ii) peuvent se produire.

$\boxed{V.4}$ Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Soient $f \in H$ et $u = P_K f$.

Montrer que

$$|v-u|^2 \leq |v-f|^2 - |u-f|^2 \quad \forall v \in K.$$

En déduire que

$$|v-u| \leq |v-f| \quad \forall v \in K.$$

Interprétation géométrique.

V.5

1) Soit (K_n) une suite *décroissante* de convexes fermés de H telle que

$\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

Montrer que, pour tout $f \in H$, la suite $u_n = P_{K_n} f$ converge (fortement) vers une limite ; identifier cette limite.

2) Soit (K_n) une suite *croissante* de convexes fermés non vides de H.

Montrer que, pour tout $f \in H$, la suite $u_n = P_{K_n} f$ converge (fortement) vers une limite ; identifier cette limite.

Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée inférieurement.

Montrer que la suite $\alpha_n = \operatorname{Inf}_{K_n} \varphi$ converge et identifier la limite.

V.6 *Projection radiale sur la boule unité.*

Soit E un e.v.n. de norme $\| \ \|$.

On pose

$$Tu = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \leq 1 \\ \dfrac{u}{\|u\|} & \text{si } \|u\| \geq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $\|Tu - Tv\| \leq 2\|u-v\| \quad \forall u,v \in E$.

2) Montrer que, en général, on ne peut pas améliorer la constante 2.

[Considérer $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|u\| = |u_1| + |u_2|$, avec $u = (u_1, u_2)$].

3) Que peut-on dire si la norme $\| \ \|$ est associée à un produit scalaire ?

V.7 *Projection sur un cône convexe.*

Soit $K \subset H$ un cône convexe de sommet 0, c'est-à-dire

$$\lambda u + \mu v \in K, \quad \forall \lambda, \mu > 0, \quad \forall u, v \in K ;$$

on suppose de plus que K est fermé.

Soit $f \in H$; montrer que $u = P_K f$ est *caractérisé* par les propriétés :

$$u \in K, \ (f-u, u) = 0 \text{ et } (f-u, v) \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

$\boxed{\text{V.8}}$ Soit Ω un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie.

Soit $h : \Omega \to [0,+\infty[$ une fonction mesurable. Soit

$$K = \{u \in L^2(\Omega) \; ; \; |u(x)| \leq h(x) \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Vérifier que K est un convexe fermé non vide de $H = L^2(\Omega)$. Déterminer $P_K f$ pour tout $f \in H$.

$\boxed{\text{V.9}}$ Soient $A \subset H$ et $B \subset H$ deux convexes fermés non vides tels que $A \cap B = \phi$ et B est borné. On pose

$$C = A - B.$$

1) Montrer que C est un convexe fermé.

2) On pose $u = P_C 0$ et on écrit $u = a_o - b_o$ avec $a_o \in A$ et $b_o \in B$ (ceci est possible car $u \in C$).

Vérifier que $|a_o - b_o| = \text{dist}(A,B) = \operatorname*{Inf}_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a-b|$.

Déterminer $P_A b_o$ et $P_B a_o$.

3) Soit $a_1 \in A$ et $b_1 \in B$ un autre couple tel que $|a_1 - b_1| = \text{dist}(A,B)$.

Montrer que $u = a_1 - b_1$.

Construire un exemple où le couple $[a_o, b_o]$ est unique (resp. n'est pas unique).

[Faire des dessins !].

4) Donner une démonstration simple du théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique, dans le cas d'un espace de Hilbert.

$\boxed{\text{V.10}}$ Soit $F : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1.

Soit $K \subset H$ un convexe et soit $u \in K$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in K$,

(ii) $(F'(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K$.

Exemple : $F(v) = |v-f|^2$ avec $f \in H$ fixé.

V.11 Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$. 103

Soit $f \in H$, $f \neq 0$.

1) Montrer que

$$m = \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in M \\ |u|=1}} (f,u)$$

est atteint en un point unique.

2) Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H$ et soit E l'espace vectoriel engendré par $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$.

Déterminer m dans les cas suivants :

(i) $M = E$.

(ii) $M = E^{\perp}$.

3) Examiner le cas particulier ~~à~~ où $H = L^2(0,1)$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t$ t^2, $\varphi_3(t) = t^3$.

V.12 *Complétion d'un espace préhilbertien.*

Soit E un espace vectoriel muni du produit scalaire (u,v). E muni de la norme associée $|u| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ n'est *pas* supposé complet (on dit alors que E est préhilbertien).

Vérifier que le dual E', muni de la norme duale $\|f\|_{E'}$ est complet.

Soit $\sigma : E \to E'$ l'application définie par

$$\langle \sigma(u), v \rangle_{E',E} = (u,v) \quad \forall u,v \in E.$$

Vérifier que σ est une isométrie linéaire ; à quelle condition σ est-elle surjective ?

On se propose de montrer que $R(\sigma)$ est dense dans E' et que E' est un espace de Hilbert pour la norme $\|\ \|_{E'}$.

1) Transporter sur $R(\sigma)$ le produit scalaire de E et le prolonger à $\overline{R(\sigma)}$ en un produit scalaire noté $((f,g))$, $f,g \in \overline{R(\sigma)}$.

Vérifier que la norme associée $((f,f))^{\frac{1}{2}}$ coïncide sur $\overline{R(\sigma)}$ avec $\|f\|_{E'}$.

Montrer que l'on a

$$((f,\sigma(v))) = \langle f,v \rangle \quad \forall v \in E, \ \forall f \in \overline{R(\sigma)}$$

parenthèses de même taille que les autres dans la même formule voir

[Etant donné $f \in E'$ on pourra transporter f en une forme linéaire sur $R(\sigma)$ et appliquer ensuite le théorème de représentation de Riesz-Fréchet dans $\overline{R(\sigma)}$].

En déduire que E' est un espace de Hilbert pour la norme $\| \ \|_{E'}$.

3) Conclure que le complété de E peut être identifié à E'.

$\boxed{\text{V.13}}$ Soit E un e.v.n. muni de la norme $\| \ \|_E$. On rappelle que l'application de dualité F est définie pour chaque $u \in E$ par

$$F(u) = \{f \in E' \ ; \ \|f\|_{E'} = \|u\|_E \text{ et } \langle f,u\rangle = \|u\|_E^2\} .$$

1) On suppose que F vérifie la propriété

$$F(u) + F(v) \subset F(u+v) \quad \forall u,v \in E.$$

Montrer que la norme $\| \ \|_E$ est associée à un produit scalaire.

[On pourra utiliser l'exercice V.1].

2) Inversement si la norme $\| \ \|_E$ est associée à un produit scalaire, que peut-on dire de F ?

[On pourra appliquer des résultats des exercices V.12 et I.1].

$\boxed{\text{V.14}}$ Soit $a(u,v) = H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue telle que

$$a(v,v) \geq 0 \qquad v \in H.$$

Montrer que la fonction $v \in H \mapsto F(v) = a(v,v)$ est convexe, de classe C^1 et déterminer sa différentielle.

$\boxed{\text{V.15}}$ Soit $G \subset H$ un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert H. Soit F un espace de Banach. Soit $T : G \to F$ un opérateur linéaire continu.

Montrer que l'on peut prolonger T en un opérateur $S : H \to F$ tel que

$$\|S\|_{\mathcal{L}(H,F)} = \|T\|_{\mathcal{L}(G,F)} .$$

$\boxed{\text{V.16}}$ *Le triplet* $V \subset H \subset V'$.

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(,)$ et de la norme associée $|\ |$. On identifie H et son dual H'.

Soit $V \subset H$ un sous-espace vectoriel, dense dans H. On suppose que V est muni d'une norme $\|\ \|$ qui en fait un espace de Banach réfléxif. On suppose enfin que l'injection canonique $V \subset H$ est continue, c'est-à-dire,

$$|v| \leqslant C\|v\| \quad \forall v \in V.$$

On considère l'opérateur linéaire $T : H \to V'$ défini par

$$\langle Tf, v\rangle_{V',V} = (f,v) \quad \forall v \in V, \quad \forall f \in H.$$

1) Vérifier que $\|Tf\|_{V'} \leqslant C|f| \quad \forall f \in H$.

2) Montrer que T est injective.

3) Montrer que $T(H)$ est dense dans V'.

4) Soit $\varphi \in V'$; montrer que $\varphi \in R(T)$ si et seulement s'il existe une constante $a \geqslant 0$ telle que $|\langle \varphi, v\rangle| \leqslant a|v| \quad \forall v \in V$.

$\boxed{\text{V.17}}$ Soient $M, N \subset H$ deux sous-espaces vectoriels fermés. On suppose que $M \perp N$, c'est-à-dire $(u,v) = 0 \quad \forall u \in M, \quad \forall v \in N$.

Montrer que $M + N$ est fermé.

$\boxed{\text{V.18}}$ Soient E un Banach, H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E,H)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T admet un inverse à gauche,

(ii) il existe une constante C telle que $\|u\| \leqslant C|Tu| \quad \forall u \in E$.

mieux marqué

$\boxed{\text{V.19}}$ Soit (u_n) une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement. On suppose que $\limsup |u_n| \leqslant |u|$.

Montrer que $u_n \to u$ fortement, sans faire appel à la proposition III.30.

$\boxed{\text{V.20}}$ Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur tel que $(Su,u) \geqslant 0 \quad \forall u \in H$.

1. Montrer que $N(S) = R(S)^{\perp}$.

106

2) Vérifier que $I+tS$ est bijectif pour tout $t>0$.

3) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} (I+tS)^{-1} f = P_{N(S)} f, \quad \forall f\in H.$$

[Deux méthodes sont possibles :

a) Envisager les cas où $f\in N(S)$ et $f\in R(S)$.

b) Commencer par établir la convergence faible].

$\boxed{\text{V.21}}$ *Itérées de contractions linéaires et le théorème ergodique de Kakutani-Yosida.*

Soit $T\in\mathcal{L}(H,H)$ avec $\|T\|\leq 1$. Soit $f\in H$. On définit, pour tout entier $n\geq 1$,

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}(f+Tf+T^2f+\dots+T^{n-1}f)$$

et

$$\mu_n(f) = \left(\frac{I+T}{2}\right)^n f.$$

On se propose de montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(f) = P_{N(I-T)} f.$$

1) Vérifier que $N(I-T) = R(I-T)^{\perp}$.

2) Soit $f\in R(I-T)$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

Contra $|\sigma_n(f)|\leq\frac{C}{n} \quad \forall n.$ →

3) En déduire que, pour tout $f\in H$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f) = P_{N(I-T)} f.$$

4) On pose $S=\frac{1}{2}(I+T)$. Montrer que

$$(*) \qquad |u-Su|^2+|Su|^2\leq|u|^2 \quad \forall u\in H.$$

En déduire que

$$\sum_{i=0}^{\infty}|S^iu-S^{i+1}u|^2\leq|u|^2 \quad \forall u\in H$$

et que

$$|S^n(u-Su)|\leq\frac{|u|}{\sqrt{n+1}} \quad \forall u\in H, \quad \forall n\geq 1.$$

× 5) Soit $f\in R(I-T)$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

×

$$|\mu_n(f)|\leq\frac{C}{\sqrt{n}} \quad \forall n\geq 1 .$$

6) En déduire que, pour tout $f \in H$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(f) = P_{N(I-T)} f.$$

$\boxed{\text{V.22}}$ Soit $C \subset H$ un convexe fermé et soit $T : C \to H$ une contraction, c'est-à-dire

$$|Tu - Tv| \leq |u-v| \quad \forall u,v \in C.$$

1) Soit (u_n) une suite de C telle que

$$u_n \to u \text{ faiblement et } u_n - Tu_n \to f \text{ fortement.}$$

Montrer que $u - Tu = f$.

X [Commencer par le cas où $C = H$ et utiliser l'inégalité $((u-Tu)-(v-Tv), u-v) \geq 0$ $\forall u,v \in C$].

2) En déduire que si C est borné et $T(C) \subset C$ alors T admet un point fixe.

[Considérer $T_\varepsilon u = (1-\varepsilon)Tu + \varepsilon a$ avec $a \in C$ fixé et $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$].

C $\boxed{\text{V.23}}$ *Une inégalité de Zarantonello.*

Soit $T : H \to H$ une contraction. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_i \geq 0$ $\forall i$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ des éléments de H.

On pose $\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$.

Montrer que

$$\left| T\sigma - \sum_{i=1}^n \alpha_i Tu_i \right|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left[|u_i - u_j|^2 - |Tu_i - Tu_j|^2 \right].$$

[On pourra écrire

$$\left| T\sigma - \sum_{i=1}^n \alpha_i Tu_i \right|^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j (T\sigma - Tu_i, T\sigma - Tu_j)$$

et noter que $(a,b) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2)$].

Que peut-on en déduire si T est une isométrie ? (c'est-à-dire $|Tu - Tv| = |u-v|$ $\forall u,v \in H$).

$\boxed{\text{V.24}}$ *Propriété de Banach-Saks*

1) Soit (u_n) une suite de H telle que $u_n \to 0$ faiblement. Construire par récurrence une suite extraite (u_{n_j}) telle que $u_{n_1} = u_1$ et

abaisser un peu u_1

$$|(u_{n_j}, u_{n_k})| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 2 \text{ et } \forall j = 1, 2, \dots, k-1.$$

En déduire que la suite (σ_p) définie par $\sigma_p = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} u_{n_j}$ converge fortement vers 0 quand $p \to \infty$.

[On pourra estimer $|\sigma_p|^2$].

2) Soit (u_n) une suite bornée de H.

Montrer qu'il existe une suite extraite (u_{n_i}) telle que la suite (σ_p) définie par $\sigma_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} u_{n_i}$ converge fortement vers une limite quand $p \to \infty$.

Comparer au résultat de l'exercice III.4.

$\boxed{\text{V.25}}$ *Variations sur le lemme d'Opial.*

Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Soit (u_n) une suite de H telle que, pour *chaque* $v \in K$ la suite $(|u_n - v|)$ est décroissante.

1) Vérifier que la suite $(\text{dist}(u_n, K))$ est décroissante.

2) Montrer que la suite $(P_K u_n)$ converge fortement vers une limite notée $\ell \in K$.

[On pourra utiliser l'exercice V.4].

3) On suppose ici que la suite (u_n) vérifie la propriété :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Pour toute sous-suite } (u_{n_k}) \text{ qui converge faiblement vers un} \\ \text{élément } \bar{u} \in H, \text{ alors } \bar{u} \in K. \end{cases}$$

Montrer que $u_n \rightharpoonup \ell$ faiblement.

4) On suppose ici que $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(K - K) = H$.

Montrer qu'il existe un $u \in H$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement et que $P_K u = \ell$.

5) On suppose ici que Int $K \neq \phi$.

Montrer qu'il existe un $u \in H$ tel que $u_n \to u$ fortement.

[On pourra se ramener au cas où K est une boule].

6) On pose $\sigma_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ et on suppose que la suite (σ_n) vérifie vérifie la propriété (P).

Montrer que $\sigma_n \rightharpoonup \ell$ faiblement.

$\boxed{V.26}$ Soit (e_n) une base Hilbertienne de H.

1) Vérifier que $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ faiblement.

Soit (a_n) une suite bornée de réels.

On pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

2) Montrer que $|u_n| \to 0$.

3) Montrer que $\sqrt{n}\, u_n \rightharpoonup 0$ faiblement.

$\boxed{V.27}$ Soit $D \subset H$ un sous-ensemble tel que l'espace vectoriel engendré par D soit dense dans H.

Soit (E_n) une suite de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux. On pose $P_n = P_{E_n}$.

On suppose que

$$\sum |P_n u|^2 = |u|^2 \quad \forall u \in D.$$

Montrer que H est somme Hilbertienne des (E_n).

$\boxed{V.28}$ On suppose que H est séparable.

1) Soit $V \subset H$ un sous-espace vectoriel dense dans H.

Montrer que V contient une base Hilbertienne de H.

2) Soit (e_n) une suite orthonormée, c'est-à-dire

$$(e_i, e_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } |e_i| = 1 \quad \forall i.$$

Montrer que l'on peut compléter les (e_n) en une base Hilbertienne.

$\boxed{V.29}$ *Un lemme de Grothendieck*

Soit Ω un espace mesuré avec $|\Omega| < \infty$. Soit $1 \leq p < \infty$.

Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\Omega)$.

On suppose que $E \subset L^\infty(\Omega)$.

On se propose de montrer que $\dim E < \infty$.

1) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_p \quad \forall u \in E.$$

[On pourra appliquer la remarque II.5 du cours].

2) Prouver qu'il existe une constante M telle que

$$\|u\|_\infty \leqslant M\|u\|_2 \quad \forall u \in E.$$

[On pourra distinguer les cas $1 \leqslant p \leqslant 2$ et $2 < p < \infty$].

3) En déduire que E est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$.

acer peu niveau paragraphe

On suppose que $\dim E = \infty$ et on introduit dans E une suite orthonormée (e_i) pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

4) On fixe un entier k.

Montrer qu'il existe $\omega \subset \Omega$ négligeable tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i(x) \leqslant M\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2\right)^{1/2}, \quad \forall x \in \Omega \setminus \omega, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k.$$

[Commencer par considérer $\alpha \in \mathbb{Q}^k$].

5) En déduire que $\sum_{i=1}^{k} |e_i(x)|^2 \leqslant M^2 \quad \forall x \in \Omega \setminus \omega$.

6) Conclure.

Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ un système orthonormal de $H = L^2(0,1)$ et $p(t)$ une fonction de $L^2(0,1)$.

Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$(*)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t p(s)\, e_n(s)\, ds \right|^2 \leqslant \int_0^t |p(s)|^2\, ds .$$

En déduire que

$$(**)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left| \int_0^t p(s)\, e_n(s)\, ds \right|^2 dt \leqslant \int_0^1 |p(t)|^2 (1-t)\, dt$$

On suppose que (e_n) est une base Hilbertienne. Montrer qu'on a égalité dans $(*)$ et dans $(**)$.

Inversement, montrer que si on a égalité dans $(**)$ et si $p(t) \neq 0$ p.p. alors (e_n) est une base Hilbertienne.

Exemple : $p \equiv 1$.

112-33) Base de Haar

Étant donné un entier $n \geq 1$ on écrit $n = k + 2^p$
avec $p \geq 0$, $k \geq 0$, entiers tels que $k \leq 2^p - 1$.
On considère la fonction φ_n définie sur $]0,1[$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{p/2} & \text{si } k2^{-p} < t < (k+\frac{1}{2})2^{-p} \\ -2^{p/2} & \text{si } (k+\frac{1}{2})2^{-p} < t < (k+1)2^{-p} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On pose $\varphi_0 \equiv 1$.
Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une base Hilbertienne de
$L^2(0,1)$.

32| Système de Rademacher. Base de Walsh

Pour chaque entier $i \geq 0$ on considère la fonction r_i définie sur $]0,1[$ par
$$r_i(t) = (-1)^{E(2^i t)} \quad (E(x) = \text{partie entière de } x)$$

1) Vérifier que $(r_i)_{i\geq 0}$ est un système orthonormé.

2) Est ce que $(r_i)_{i\geq 0}$ est une base Hilbertienne ? [Considérer la fonction $u = r_1 r_2$].

3) Etant donné un entier $n \geq 0$ on considère son écriture en base 2, c'est à dire $n = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i 2^i$ avec $\alpha_i = 0$ ou 1. On pose
$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{\ell} r_{i+1}(t)^{\alpha_i}.$$
Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$ qui complète le système $(r_i)_{i\geq 0}$.

CHAPITRE V

$\boxed{V.1}$

1) Pour montrer que $(u,2v) = 2(u,v)$ appliquer l'identité du parallélogramme avec $a = u+v$ et $b = v$.

2) Former (i) − (ii) + (iii).

3) Noter, grâce à la définition de (,), que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda u, v)$ est continue.

$\boxed{V.2}$ Soient $A, B \subset \Omega$ mesurables avec $A \cap B = \phi$, et $0 < |A| < \infty$, $0 < |B| < \infty$ (vérifier que A et B existent).

Soient $u = \chi_A$ et $v = \chi_B$.

On suppose d'abord que $1 \leq p < \infty$. On a $\|u+v\|_p^p = \|u-v\|_p^p = |A| + |B|$ et donc $\|u+v\|_p^2 + \|u-v\|_p^2 = 2(|A|+|B|)^{2/p}$.

D'autre part $2(\|u\|_p^2 + \|v\|_p^2) = 2(|A|^{2/p} + |B|^{2/p})$.

Enfin on note que

$$(\alpha+\beta)^{2/p} > \alpha^{2/p} + \beta^{2/p} \quad \forall \alpha,\beta > 0 \text{ si } p < 2$$

$$(\alpha+\beta)^{2/p} < \alpha^{2/p} + \beta^{2/p} \quad \forall \alpha,\beta > 0 \text{ si } p > 2.$$

On utilise les mêmes fonctions u,v pour le cas $p = \infty$.

$\boxed{V.3}$ On vérifie que

$$(*) \qquad 2(t_n u_n - t_m u_m, u_n - u_m) = (t_n + t_m)|u_n - u_m|^2 + (t_n - t_m)(|u_n|^2 - |u_m|^2).$$

D'où l'on déduit

$$(t_n - t_m)(|u_n|^2 - |u_m|^2) \leq 0 \quad \forall m,n \;.$$

1) Soient $n > m$, alors $t_n \geq t_m$ et $|u_n| \leq |u_m|$. (Noter que si $t_n = t_m$, alors $u_n = u_m$ grâce à (*)).

116

D'autre part on a pour $n>m$,

$$(t_n+t_m)|u_n-u_m|^2 \leq (t_n-t_m)(|u_m|^2-|u_n|^2) \leq \cancel{(t_n+t_m)(|u_m|^2-|u_n|^2)} \quad t_n(|u_m|-|u_n|)$$

et donc

$$|u_n-u_m|^2 \leq |u_m|^2 - |u_n|^2 \quad .$$

Il en résulte que $|u_n| \downarrow \ell$ quand $n \uparrow \infty$ et (u_n) est de Cauchy.

2) Soient $n>m$, alors $t_m \geq t_n$ et $|u_m| \leq |u_n|$. Pour $n>m$ on a

$$(t_n+t_m)|u_n-u_m|^2 \leq (t_m-t_n)(|u_n|^2-|u_m|^2) \leq \cancel{(t_m+t_n)(|u_n|^2-|u_m|^2)} \quad t_m(|u_n|^2-|u_m|^2)$$

et donc

$$|u_n-u_m|^2 \leq |u_n|^2 - |u_m|^2 \quad .$$

On a l'alternative :

(i) ou bien $|u_n| \uparrow \infty$ quand $n \uparrow \infty$,

(ii) ou bien $|u_n| \uparrow \ell < \infty$ quand $n \uparrow \infty$ et dans ce cas (u_n) est de Cauchy.

D'autre part, si l'on pose $v_n = t_n u_n$ et $s_n = 1/t_n$ on a

$$(s_n v_n - s_m v_m, v_n - v_m) \leq 0,$$

et donc (v_n) converge d'après la question 1). On en déduit que si $t_n \longrightarrow t > 0$ alors (u_n) converge.

Enfin si $t_n \longrightarrow 0$ les cas (i) et (ii) peuvent se produire. Prendre, par exemple, $H = \mathbb{R}$ et (i) $u_n = C/t_n$, (ii) $u_n = C$.

$\boxed{\text{V.4}}$ Noter que

$$|v-u|^2 = |v-f|^2 - |u-f|^2 + 2(f-u, v-u) \quad .$$

$\boxed{\text{V.5}}$

1) Soit $K = \bigcap_n K_n$; on va montrer que $u_n \longrightarrow u = P_K f$.

La suite $d_n = |f-u_n| = \text{dist}(f, K_n)$ est croissante et majorée. Donc $d_n \longrightarrow \ell < \infty$.

Appliquant l'identité du parallélogramme (avec $a = f-u_n$ et $b = f-u_m$) on obtient

aligner

$$\left|f - \frac{u_n+u_m}{2}\right|^2 + \left|\frac{u_n-u_m}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|f-u_n|^2 + |f-u_m|^2).$$

On en déduit que

$$|u_n-u_m|^2 \leq 2(d_m^2-d_n^2) \text{ si } m \geq n.$$

Donc $u_n \to u$, et il est clair que $u \in K$. D'autre part on a $|f-u_n| \leq |f-v|$ $\forall v \in K_n$; en particulier on a $|f-u_n| \leq |f-v|$, $\forall v \in K$ et à la limite $|f-u| \leq |f-v|$ $\forall v \in K$.

2) Soit $K = \overline{\bigcup_n K_n}$; K est convexe (pourquoi ?)

On va montrer que $u_n \to u = P_K f$.

La suite $d_n = |f-u_n| = \text{dist}(f,K_n)$ est décroissante et donc $d_n \to \ell$.

D'autre part on a ici

$$|u_n-u_m|^2 \leq 2(d_n^2-d_m^2) \text{ si } m \geq n$$

et donc $u_n \to u$ avec $u \in K$.

Enfin on note que $|f-u_m| \leq |f-v|$, $\forall v \in K_n$ si $m \geq n$ et à la limite (quand $m \to \infty$) il vient $|f-u| \leq |f-v|$ $\forall v \in \bigcup K_n$. La suite (α_n) est décroissante et donc converge vers une limite notée α.

Montrons que $\alpha = \operatorname{Inf}_K \varphi$. D'abord il est clair que $\operatorname{Inf}_K \varphi \leq \alpha_n$ et donc $\operatorname{Inf}_K \varphi \leq \alpha$. D'autre part, soit $u \in K$ et soit $u_n = P_{K_n} u$. Alors $\alpha_n \leq \varphi(u_n)$ et à la limite on obtient $\alpha \leq \varphi(u)$ (car $u_n \to u$). On a donc établi que $\alpha \leq \operatorname{Inf}_K \varphi$.

$\boxed{V.6}$

1) Considérons, par exemple, le cas où $\|u\| \geq 1$ et $\|v\| \leq 1$.

On a

$$\|Tu-Tv\| = \left\| \frac{u}{\|u\|} - v \right\| = \frac{\|(u-v)+(v-v\|u\|)\|}{\|u\|}$$

$$\leq \|u-v\| + \|u\| - 1 \leq 2\|u-v\|,$$

décaler un peu à droite pour aligner

$\leq$

car $\|u\| \leq \|u-v\| + \|v\| \leq \|u-v\| + 1$.

2) Soient $u = (1,0)$ et $v = (1,\alpha)$. Alors

$$\|Tu-Tv\| = \frac{2|\alpha|}{1+|\alpha|} \text{ et } \|u-v\| = |\alpha|.$$

On choisit alors $\alpha \neq 0$, arbitrairement voisin de 0.

3) T coïncide avec P_{B_E}. Il suffit de vérifier que si $\|u\| \geq 1$, alors

$$\left(u - \frac{u}{\|u\|},\ v - \frac{u}{\|u\|}\right) \leq 0 \quad \forall v \in B_E.$$

V.10

118

(i) ⇒ (ii). On écrit que

$$F(u) \leq F((1-t)u + tv) \quad \forall t \in]0,1[, \quad \forall v \in K,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{t}[F(u+t(v-u)) - F(u)] \geq 0.$$

On obtient (ii) en passant à la limite quand $t \to 0$.

(ii) ⇒ (i). On remarque que

$$F(v) - F(u) \geq (F'(u), v-u) \quad \forall u,v \in H.$$

En effet, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) = F(u + t(v-u))$ est convexe, de classe C^1 et donc $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$.

V.12 σ est surjective si et seulement si E est complet.

1) On transporte sur $R(\sigma)$ le produit scalaire de E en posant

$$((\sigma(u), \sigma(v))) = (u,v) \quad \forall u,v \in E.$$

On note que

$$|((f,g))| \leq \|f\|_{E'} \|g\|_{E'} \quad \forall f,g \in R(\sigma).$$

On peut donc prolonger par continuité et densité le produit scalaire $((\,,\,))$ à $\overline{R(\sigma)}$ qui devient ainsi un *espace de Hilbert*.

2) Soit $f \in E'$; l'application $g \in R(\sigma) \mapsto \langle f, \sigma^{-1}(g) \rangle$ définit une forme linéaire continue sur $R(\sigma)$ que l'on peut prolonger (par continuité) à $\overline{R(\sigma)}$. Appliquant alors le théorème de Riesz-Fréchet dans $\overline{R(\sigma)}$ on trouve un élément $h \in \overline{R(\sigma)}$ tel que $((h,g)) = \langle f, \sigma^{-1}(g) \rangle$, $\forall g \in R(\sigma)$. D'où $((h, \sigma(v))) = \langle f, v \rangle$, $\forall v \in E$ c'est-à-dire $\langle h, v \rangle = \langle f, v \rangle$ $\forall v \in E$. Donc $f \in \overline{R(\sigma)}$.

c'est-à

3) On a construit une isométrie $\sigma : E \to E'$ avec $R(\sigma)$ dense dans E' et E' complet. Ceci signifie que E' est le complété de E (à un isomorphisme près).

V.13

1) On va établir l'identité du parallélogramme. Soient $f \in F(u)$, $g \in F(v)$; alors $f \pm g \in F(u \pm v)$ et donc il vient

$$\langle f+g, u+v \rangle = \|u+v\|^2$$

$$\langle f-g, u-v \rangle = \|u-v\|^2.$$

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

2) Soit $\sigma : E \to E'$ l'application introduite à l'exercice V.12. Alors $F(u) = \{\sigma(u)\}$. En effet il est clair que $\sigma(u) \in F(u)$. D'autre part, on sait que E' est un Hilbert pour la norme $\| \ \|_{E'}$. En particulier E' est strictement convexe et donc (voir Exercice I.1) $F(u)$ est réduit à un élément.

$\boxed{\text{V.14}}$ L'inégalité $a\big(tu + (1-t)v, tu + (1-t)v\big) \leq ta(u,u) + (1-t)a(v,v)$ équivaut à $t(1-t)a(u-v,u-v) \geq 0$.

Identifiant H et H' on introduit l'opérateur

$$A \in \mathcal{L}(H,H) \text{ tel que } a(u,v) = (Au,v) \quad \forall u,v \in H.$$

Alors $F'(u) = Au + A^* u$; en effet on a

$$F(u+h) - F(u) = (Au + A^* u, h) + a(h,h).$$

$\boxed{\text{V.15}}$ On commence par prolonger T par continuité en un opérateur $\tilde{T} : \overline{G} \to F$. On pose ensuite $S = \tilde{T} \circ P_{\overline{G}}$ où $P_{\overline{G}}$ est la projection de H sur $\overline{G}$.

$\boxed{\text{V.18}}$

(ii) $\Rightarrow$ (i). L'hypothèse (ii) entraîne que T est injectif et que $R(T)$ est fermé. D'autre part $R(T)$ admet un supplémentaire topologique (puisque H est un Hilbert). On peut alors appliquer le théorème II.11 et conclure que T admet un inverse à gauche.

(i) $\Rightarrow$ (ii). L'hypothèse (i) entraîne que T est injectif et que $R(T)$ est fermé. On en déduit (ii) grâce au théorème II.20.

$\boxed{\text{V.19}}$ Noter que

$$\limsup |u_n - u|^2 = \limsup \left(|u_n|^2 - 2(u_n,u) + |u|^2\right) \leq 0.$$

120

$\boxed{\text{V.20}}$

1) Si $u \in N(S)$ on a $(Sv, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in H$; remplaçant v par tv on voit que $(Sv - Su, v)$

$(Sv, u) = 0 \quad \forall v \in H.$

Inversement si $u \in R(S)^{\perp}$ on a $(Sv - Su, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$; remplaçant v par tv

on voit que $(Su, v) = 0 \quad \forall v \in H.$

[Voir aussi le problème 16].

2) Appliquer Lax-Milgram (corollaire V.8).

3) <u>Méthode</u> a). On pose $u_t = (I+tS)^{-1} f.$

<u>Si $f \in N(S)$</u>, alors $u_t = f, \quad \forall t > 0.$

<u>Si $f \in R(S)$</u> on écrit $f = Sv$ et l'on a $u_t + S(tu_t - v) = 0$; d'où l'on déduit

que, $(u_t, tu_t - v) \leq 0$ et $|u_t| \leq \frac{1}{t}|v|$.

Par conséquent $u_t \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$; on en déduit que $u_t \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ pour tout $f \in \overline{R(S)}$

(préciser le raisonnement). Dans le cas général où $f \in H$, on décompose $f = f_1 + f_2$

avec $f_1 = P_{N(S)} f$ et $f_2 = P_{\overline{R(S)}} f$

Supprimer
Ce donc

<u>Méthode</u> b). On a $u_t + tSu_t = f$ et donc $|u_t| \leq |f|$. On peut supposer que

$u_{t_n} \rightharpoonup u$ faiblement et par suite $Su = 0$, c'est-à-dire $u \in N(S)$.

D'après la question 1) on a $(Su_t, v) = 0 \quad \forall v \in N(S)$. D'où l'on déduit que

$(f - u_t, v) = 0 \quad \forall v \in N(S)$ et à la limite $(f-u, v) = 0 \quad \forall v \in N(S)$. Par conséquent

$u = P_{N(S)} f$ et l'unicité de la limite entraîne que $u_t \xrightarrow[t \to +\infty]{} u$ (préciser).

D'autre part on a $(Su_t, u_t) \geq 0$, c'est-à-dire $(Su, u_t) \geq 0$ et donc

$$\limsup_{t \to +\infty} |u_t|^2 \leq (f, u) = |u|^2$$

$(f - u_t, v)$

On conclut que $u_t \to u$ fortement.

$\boxed{\text{V.21}}$

20

1) Poser $S = I - T$ et appliquer la question 1) de l'exercice V.~~19~~.

2) Ecrire $f = u - Tu$ et noter que $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}(u - T^n u)$.

3) Vérifier d'abord que $\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f) = 0 \quad \forall f \in \overline{R(I-T)}$

Etant donné $f \in H$, on décompose $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in N(I-T)$ et

$f_2 \in N(I-T)^{\perp} = \overline{R(I-T)}$.

On a alors $\sigma_n(f) = \sigma_n(f_1) + \sigma_n(f_2) = f_1 + \sigma_n(f_2)$.

4) Appliquer successivement l'inégalité (*) à u, Su, $S^2u, \dots, S^nu, \dots$ et faire la somme. Noter que

$$|S^nu-S^{n+1}u| \leq |S^iu-S^{i+1}u| \quad \forall i=0,1,\dots,n.$$

5) On écrit $f=u-Tu=2(u-Su)$ et on obtient $|\mu_n(f)| \leq \frac{2(u)}{\sqrt{n+1}}$. 2|u|

6) Procéder comme à la question 3).

$\boxed{\text{V.25}}$

2) Soit $m>n$. On applique l'exercice V.4 avec $f=u_m$, $v=P_Ku_n$ et on obtient

$$|P_Ku_n-P_Ku_m|^2 \leq |P_Ku_n-u_m|^2-|P_Ku_m-u_m|^2$$
$$\leq |P_Ku_n-u_n|^2-|P_Ku_m-u_m|^2 \ .$$

Donc la suite (P_Ku_n) est de Cauchy.

3) On suppose que $u_{n_k} \to \overline{u}$ faiblement. On note que

$$(u_n-P_Ku_n, v-P_Ku_n) \leq 0 \quad \forall v \in K,$$

et passant à la limite suivant n_k il vient $(\overline{u}-\ell, v-\ell) \leq 0 \quad \forall v \in K$.

Comme $\overline{u} \in K$, on peut choisir $v=\overline{u}$ et on obtient $\overline{u}=\ell$. L'unicité de la limite entraîne que $u_n \to \ell$ faiblement (préciser).

4) Pour tout $v \in K$ on pose $f(v)=\lim_{n\to\infty} |u_n-v|^2$ et on voit que $\lim_{n\to\infty} (u_n, v-w)$ existe $\forall v,w \in K$.

On en déduit que $\varphi(z)=\lim_{n\to\infty} (u_n,z)$ existe $\forall z \in H$ et on écrit $\varphi(z)=(u,z)$ grâce au théorème de Riesz-Fréchet. Enfin on note que $(u-\ell, v-\ell) \leq 0 \quad \forall v \in K$ et donc $\ell=P_Ku$.

5) Après translation et dilatation on peut toujours supposer que $K=B_H$. Donc $|u_n| \downarrow \alpha$.

<u>Si $\alpha<1$</u>, alors $u_n=P_Ku_n$ à partir d'un certain rang.

<u>Si $\alpha \geq 1$</u>, on note que $P_Ku_n=\frac{u_n}{|u_n|}$ converge fortement et donc aussi (u_n).

6) On a $(u_n-P_Ku_n, v-P_Ku_n) \leq 0 \quad \forall v \in K$ et donc $(u_n-\ell, v-\ell) \leq \varepsilon_n \quad \forall v \in K$ avec $\varepsilon_n \to 0$ (et ε_n dépend de v).

Par addition on obtient $(u_n-\ell, v-\ell) \leq \varepsilon'_n \quad \forall v \in K$ avec $\varepsilon'_n \to 0$.

122 Si $\sigma_{n_k} \rightharpoonup \bar{\sigma}$ faiblement, alors $\bar{\sigma}\in K$ et on a $(\bar{\sigma}-\ell, v-\ell)\leq 0 \quad \forall v\in K$. D'où $\bar{\sigma}=\ell$. L'unicité de la limite entraîne que $\sigma_n \rightharpoonup \ell$ faiblement.

$\boxed{\text{V.26}}$

1) Noter que $\sqrt{n}\,u_n$ est borné et pour chaque j fixé, $(\sqrt{n}\,u_n, e_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{V.27}}$ Soit F la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les (E_n). Il faut montrer que $F = H$ ou encore $F^{\perp} = \{0\}$.

On vérifie que $\sum |P_n u|^2 = |P_F u|^2 \quad \forall u\in H$ et donc $|P_F u| = |u| \quad \forall u\in D$; d'où $P_{F^{\perp}}u = 0 \quad \forall u\in H$.

$\boxed{\text{V.28}}$

1) On sait que V est séparable (voir proposition III.22).

Soit (v_n) un sous-ensemble de V dénombrable et dense. On procède ensuite comme dans la démonstration du théorème V.10.

$\boxed{\text{V.29}}$

2) Si $2<p<\infty$ on utilise l'inégalité $\|u\|_p \leq \|u\|_{\infty}^{1-2/p}\,\|u\|_2^{2/p}$.

Noter que *tout* espace de Hilbert (séparable ou non) de dimension infinie admet une suite orthonormée.

$|\Omega|$ 6) En intégrant sur Ω on obtient $k\leq M^2(\Omega)$, d'où l'on déduit une majoration de $\dim E$.

Pour $t \in [0,1]$ fixé on considère la fonction $u_t(s) = p(s)\chi_{[0,t]}$

on écrit que $\sum_{n=1}^{\infty} |(u_t, e_n)| \leq \|u_t\|_2^2$.

On déduit de l'égalité dans (**) qu'il y a égalité dans (*) pour p.p. $t \in [0,1]$. Par conséquent on a $u_t = \sum_{n=1}^{\infty} (u_t, e_n) e_n$ pour p.p. $t \in [0,1]$ et donc $u_t \in \overline{E}$ = espace vectoriel fermé engendré par les (e_n). Il reste à vérifier que l'espace engendré par les (u_t) est dense dans L^2. Soit donc $f \in L^2$ tel que $\int_0^1 f u_t = 0$ p.p. t. D'où il vient $\int_0^t f p = 0$ $\forall t \in [0,1]$ et $f p = 0$ p.p.

31 | On vérifie aisément que $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ si $i \neq j$

124 $n = 2^{p+1} - 1$, soit E l'espace engendré par $[\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n]$ et soit F l'espace engendré par les fonctions caractéristiques des intervalles $\left]\frac{i}{2^{p+1}}, \frac{i+1}{2^{p+1}}\right[$ avec i entier, $0 \leq i \leq 2^{p+1} - 1$.

Il est clair que $E \subset F$, $\dim E = n+1 = 2^{p+1}$ et $\dim F = 2^{p+1}$. Donc $E = F$.

32

La fonction $u = r_1 r_2$ est orthogonale à toutes les autres $(r_i)_{i \geq 0}$ et $u \not\equiv 0$. Donc $(r_i)_{i\geq 0}$ n'est pas une base Hilbertienne.

On vérifie aisément que $(w_n)_{n\geq 0}$ est un système orthonormé et que $w_0 = r_0$, $w_{2^l} = r_{l+1}$ $\forall l \geq 0$. Pour prouver que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une base Hilbertienne on raisonne comme à l'exercice V. 31.