Convergence simple et convergence uniforme

Soient D un ensemble quelconque et A une partie de D.

1. Convergence simple d'une suite d'applications

Soit (f_n) une suite d'applications de D dans $\mathbb{K}$ c'est-à-dire une suite d'éléments de $\mathbb{K}^D$.
Soit $f : A \subset D \to \mathbb{K}$ une application de A dans $\mathbb{K}$ c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}^A$.

Définition.– On dit que la suite d'applications (f_n) converge simplement sur A vers f si et seulement si : $\forall x \in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. On dit que la suite d'applications (f_n) converge simplement sur A si et seulement si il existe une application de A dans $\mathbb{K}$ vers laquelle (f_n) converge simplement sur A.

Proposition.– Soient $g, h : A \subset D \to \mathbb{K}$ des applications de A dans $\mathbb{K}$.
Si la suite d'applications (f_n) converge simplement sur A vers g et vers h alors $g = h$.

Remarque : Si (f_n) converge simplement sur A vers $f \in \mathbb{K}^A$ alors une telle application f est unique et est appelée limite simple sur A de la suite d'applications (f_n).

Proposition.– On suppose que A est une partie de $\mathbb{R}$.

1) Si (f_n) converge simplement sur A vers $f \in \mathbb{K}^A$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp décroissante) sur A alors f est croissante (resp décroissante) sur A.
2) Si A est un intervalle, si (f_n) converge simplement sur A vers $f \in \mathbb{K}^A$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe (resp concave) sur A alors f est convexe (resp concave) sur A.

Remarque : La convergence simple sur A de (f_n) vers f permet de transférer à f certaines propriétés communes à toutes les applications f_n mais c'est plutôt rare. Cela fonctionne pour des propriétés comme la monotonie ou la convexité mais cela n'est plus vrai pour des propriétés comme la continuité ou le caractère borné.

$f_n \; [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

Exemples :

- Etude de la convergence simple sur $[0,1]$ de (f_n) définie par : $f_n(x) = x^n$.
  On notera que le caractère continu des f_n n'est pas transmis à la limite simple.
- Etude de la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par : $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$.
  On notera que le caractère borné des f_n n'est pas transmis à la limite simple.
- On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et on considère $(f_n) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(z) = z^n$.
  Etude de la convergence simple de la suite d'applications (f_n).
- Soit (f_n) la suite d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ définie par : $f_n(x,y) = \sqrt[n]{x^2 + y^2}$.
  Etude de la convergence simple de la suite d'applications (f_n).

2. Convergence uniforme d'une suite d'applications

Soit (f_n) une suite d'applications de D dans $\mathbb{K}$ c'est-à-dire une suite d'éléments de $\mathbb{K}^D$.
Soit $f : A \subset D \to \mathbb{K}$ une application de A dans $\mathbb{K}$ c'est à dire un élément de $\mathbb{K}^A$.

Proposition.– La suite d'applications (f_n) converge simplement sur A vers f si et seulement si :
$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. $(*)$

Comme nous l'avons vu précédemment, la convergence simple sur A de (f_n) vers f ne permet pas de transmettre à f les propriétés que possèdent les applications f_n. De ce point de vue la convergence simple se révèle insuffisante. Nous allons introduire une convergence plus exigeante, à savoir la convergence uniforme. Pour ce faire nous allons renforcer la condition $(*)$ qui caractérise la convergence simple.

Définition.– On dit que la suite d'applications (f_n) converge uniformément sur A vers f si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Proposition.–

1) Si B est une partie de A et si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors (f_n) converge uniformément sur B vers $f_{|B}$.
2) Si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors (f_n) converge simplement sur A vers f.
3) (f_n) converge uniformément sur A vers f si et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^A = 0$.
4) Si (f_n) converge uniformément sur A vers $g \in \mathbb{K}^A$ et vers $h \in \mathbb{K}^A$ alors $g = h$.

Guillaume Roussel MP3 Montaigne

Remarque : Si (f_n) converge uniformément sur A vers $f \in \mathbb{K}^A$ alors une telle application f est unique et est appelée limite uniforme sur A de la suite d'applications (f_n).

Définition.– On dit que (f_n) converge uniformément sur A si et seulement si il existe une application de A dans $\mathbb{K}$ vers laquelle (f_n) converge uniformément sur A.

2.1 Convergence uniforme et transfert de la continuité

Théorème.– On suppose que A est une partie de $\mathbb{R}$ et on considère $a \in A$.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n|_A}$ est continue au point a et si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors f est continue au point a.
2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n|_A}$ est continue sur A et si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors f est continue sur A.

Corollaire.– On suppose ici que $A = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n|_I}$ est continue sur I et si (f_n) converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers f alors f est continue sur I.

Remarque : Ces résultats sont utiles pour établir qu'il n'y a pas convergence uniforme sur A.

2.2 Etude pratique de la convergence uniforme

Proposition.– Soient $(f_n) \in (\mathbb{K}^D)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathbb{K}^A$. Pour $x \in A$ on pose : $\delta_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.

1) Si il existe une suite (ε_n) de réels positifs indépendants de $x \in A$ qui tend vers 0 et qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,\ \delta_n(x) \leq \varepsilon_n$ alors (f_n) converge uniformément sur A vers f.
2) Si il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que la suite $(\delta_n(a_n))$ ne tende pas vers zéro alors (f_n) ne converge pas uniformément sur A vers f.

Exemples

- Etude de la suite (f_n) d'éléments de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ définie par : $f_n(x) = x^n$.
- Etude de $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)^{\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n^2 x$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $|x| > \frac{1}{n}$.

3. Convergence simple et uniforme d'une série d'applications

Soit (f_n) une suite d'applications de D dans $\mathbb{K}$.

Définition.– Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$.
La suite d'applications (S_n) est appelée série d'applications de terme général f_n et est notée $\sum f_n$.
Dire que la série $\sum f_n$ converge simplement sur A (resp uniformément sur A) c'est dire que la suite d'applications (S_n) converge simplement sur A (resp uniformément sur A).
L'application S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série d'applications $\sum f_n$.

Proposition.– La série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A si et seulement si pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Définition.– On suppose que la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A.

1) La somme de la série $\sum f_n$ est l'application $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k : A \to \mathbb{K}$ définie par :
$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$
2) Le reste d'ordre n de la série $\sum f_n$ est l'application $R_n : A \to \mathbb{K}$ définie par :
$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Proposition.– Si la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement (resp uniformément) sur A alors la suite d'applications (f_n) converge simplement (resp uniformément) sur A vers l'application nulle.

Remarque : Ce résultat est utile pour établir que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur A.

Théorème.– On suppose que la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A.
On note R_n l'application reste d'ordre n de la série d'applications $\sum f_n$.
La série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la suite d'applications (R_n) converge uniformément sur A vers l'application nulle.

Théorème.– (Transfert de la continuité)
On suppose que A est une partie de $\mathbb{R}$ et on considère $a \in A$.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_{n|_A}$ est continue au point a et si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue au point a.

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_{n|_A}$ est continue sur A et si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Corollaire.– On suppose ici que $A = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n|_I}$ est continue sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

4. Convergence absolue et convergence normale d'une série d'applications

Soit (f_n) une suite d'applications de D dans $\mathbb{K}$.

Définition.– On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge absolument en tout point de A si et seulement si pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente.

Définition.– On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement sur A si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty^A$ converge.

Proposition.–
1) Si la série d'applications $\sum f_n$ converge absolument en tout point de A alors la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A.
2) Si la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement sur A alors la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A et absolument en tout point de A.

5. Approximation uniforme

Définition.– Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une application définie sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
1) On dit que f est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f soit constante sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$.
2) On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [0,n]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ se prolonge en une application continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$.

Définition.– On dit qu'une application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est une fonction polynôme si et seulement si :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Théorème.– Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors il existe une suite (f_n) d'applications en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Théorème.– (Weierstrass)
Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe une suite (P_n) de fonctions polynômes qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Karl Weierstrass (1815-1897)
Né en Westphalie et surnommé parfois « le père de l'analyse moderne », Weierstrass a introduit une grande rigueur dans les mathématiques. C'est par exemple lui qui le premier formule la notion de continuité à l'aide « des epsilon ». C'est lui qui introduit la notion de convergence uniforme, notion avec laquelle il construit de nombreuses nouvelles fonctions. On lui doit notamment un exemple d'application partout continue et nulle part dérivable. Il donne aussi une construction de l'ensemble des nombres réels qui a très largement inspiré toutes celles qui paraissent à cette époque. C'est en 1885 qu'il publie son désormais célèbre théorème d'approximation uniforme sur un segment d'une application continue par une application polynomiale. Notons que Weierstrass s'est aussi intéressé à l'algèbre linéaire en plein essor à cet époque. Pour l'anecdote, Weierstrass a assez peu publié et c'est surtout par l'intermédiaire du cours de ses élèves que ses résultats ont le plus souvent été connus...

Rayon de convergence d'une suite complexe

1. Définition et premières propriétés du rayon de convergence d'une suite

On désigne par $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes bornées.

Définition.– Soit $a = (a_n)$ une suite complexe. On pose : $I_a = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n) \in \ell^\infty(\mathbb{C})\}$.
Le rayon de convergence R_a de la suite a est l'élément de $[0, \underline{\underline{+\infty}}]$ défini par : $R_a = \operatorname{Sup}_{[0,+\infty]} I_a$.

Proposition.– Soit $a = (a_n)$ une suite complexe et $r \in \mathbb{R}^+$.
1) Si $r < R_a$ alors la suite $(a_n r^n)$ est bornée et si $(a_n r^n)$ est bornée alors $r \le R_a$.
2) Si $r > R_a$ alors la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée et si $(a_n r^n)$ n'est pas bornée alors $r \ge R_a$.

Proposition.–
1) Le rayon de convergence de la suite nulle est égal à $+\infty$.
2) Le rayon de convergence d'une suite constante et non nulle est égal à 1.

Proposition.– Soit (a_n) une suite complexe.
1) Si la suite (a_n) est bornée alors $R_a \ge 1$.
2) Si la suite (a_n) est convergente de limite non nulle alors $R_a = 1$.
Si la suite (a_n) tend vers zéro alors $R_a \ge 1$.

Proposition.– Soit (a_n) une suite complexe.
1) Le rayon de convergence de la suite $(|a_n|)$ est égal à celui de la suite (a_n).
2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ le rayon de convergence de la suite $(a_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à celui de (a_n).
3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$ le rayon de convergence de la suite (αa_n) est égal à celui de (a_n).

Proposition.– Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux suites complexes.
1) Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| \le |b_n|$ pour tout $n \ge N$ alors $R_a \ge R_b$.
2) Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \ge R_b$. Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Proposition.– Soient $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ des suites complexes et $\alpha \in \mathbb{C}$.
1) $R_{a+b} \ge \min(R_a, R_b)$ et si $R_a \ne R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.
2) $R_{\alpha a} \ge R_a$. Plus précisément : $R_{\alpha a} = R_a$ si $\alpha \ne 0$ et $R_{\alpha a} = +\infty$ si $\alpha = 0$.

Proposition.– Soient $a = (a_n)$ une suite complexe.
1) On note $D(a)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ D(a)_n = (n+1)a_{n+1}$.
Le rayon de convergence de la suite $D(a)$ est égal à celui de la suite a.
2) On note $I(a)$ la suite définie par : $I(a)_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I(a)_n = \frac{a_{n-1}}{n}$.
Le rayon de convergence de la suite $I(a)$ est égal à celui de la suite a.

Corollaire.– Soient $a = (a_n)$ une suite complexe.
Les rayons de convergences des suites (a_n), (na_n) et $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\ge1}$ sont égaux.

2. Une caractérisation du rayon de convergence via les séries numériques

Théorème.– Soit $a = (a_n)$ une suite complexe. Le rayon de convergence R_a de la suite $a = (a_n)$ est l'unique élément de $[0, +\infty]$ qui possède les deux propriétés suivantes :
1) Pour tout complexe z vérifiant $|z| < R_a$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2) Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R_a$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Corollaire.– Soient $a = (a_n)$ une suite complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$.
1) Si la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente alors $|z_0| \le R_a$.
2) Si la série $\sum a_n z_0^n$ est divergente alors $|z_0| \ge R_a$.

Proposition.– (Règle de D'alembert)
Soit (a_n) une suite de complexes <u>non nuls</u>. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ avec $L \in \overline{\mathbb{R}^+}$ alors $R_a = \frac{1}{L}$.

Proposition.– Si $a \in \mathbb{C}^*$ alors le rayon de convergence de la suite géométrique (a^n) est égal à $\frac{1}{|a|}$.

non nulle
Proposition.– Si F est une fraction rationnelle à coefficient dans $\mathbb{C}$ n'ayant pas de pôles dans $\mathbb{N}$ alors le rayon de convergence de la suite $(F(n))$ est égal à 1.

Proposition.– Si c est le produit de convolution des suites a et b alors $R_c \ge \min(R_a, R_b)$.

Guillaume Roussel MP3 Montaigne

Séries entières : premier contact

1. Séries entières de la variable complexe

Définition.– Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
On dit que la série d'applications $\sum f_n$ est une série entière de la variable complexe si et seulement si il existe une suite complexe (a_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C},\ f_n(z) = a_n z^n$.

<u>Remarques</u> :

- ✓ Une série entière est donc une série d'applications d'un type particulier.
- ✓ Soit (a_n) une suite complexe. On lui associe la série d'applications $\sum f_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C},\ f_n(z) = a_n z^n$. La série d'applications $\sum f_n$ est une série entière de la variable complexe et est dite associée à la suite (a_n). Elle est abusivement notée $\sum a_n z^n$.
- ✓ Via l'abus de notation précédent, le symbole $\sum a_n z^n$ peut désormais s'interpréter de deux manières. Il peut soit désigner la série numérique de terme général $a_n z^n$ ou bien désigner la série d'applications $\sum f_n$ où f_n est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f_n(z) = a_n z^n$.

2. Rayon de convergence d'une série entière

Définition.– Soit $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite complexe $a = (a_n)$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le rayon de convergence R_a de la suite (a_n).
Il est aussi noté $R\left(\sum a_n z^n\right)$. Par définition on a donc : $R\left(\sum a_n z^n\right) = R_a$.

Théorème.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a.
R_a est l'unique élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ qui possède les deux propriétés suivantes :

1) Pour tout complexe z vérifiant $|z| < R_a$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2) Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R_a$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Corollaire.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1) Si la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente alors $|z_0| \le R_a$.
2) Si la série $\sum a_n z_0^n$ est divergente alors $|z_0| \ge R_a$.

Proposition.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) $\forall \lambda \in \underline{\underline{\mathbb{C}^*}},\ R\left(\sum \lambda z^n\right) = 1$.
2) $\forall \lambda \in \underline{\underline{\mathbb{C}^*}},\ R\left(\sum \lambda a_n z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$.
3) $\forall p \in \mathbb{N},\ R\left(\sum a_{n+p} z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$.
4) $R\left(\sum |a_n| z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$.
5) $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\ge1} n a_n z^{n-1}\right)$.
6) $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right)$.

Proposition.– Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.

1) Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| \le |b_n|$ pour tout $n \ge N$ alors $R_a \ge R_b$.
2) Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \ge R_b$.
3) Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Proposition.– (Règle de D'Alembert)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ne 0$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ avec $L \in \overline{\mathbb{R}^+}$ alors $R_a = \frac{1}{L}$.

Proposition.– Si $a \in \mathbb{C}^*$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a^n z^n$ est égal à $\frac{1}{|a|}$.

Si F est une fraction rationnelle à coefficient dans $\mathbb{C}$ n'ayant pas de pôles dans $\mathbb{N}$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum F(n)\, z^n$ est égal à 1.

3. Somme d'une série entière

Définition.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a.
L'ensemble E_a des nombres complexes z pour lesquels la série numérique $\sum a_n z^n$ est convergente est appelé ensemble de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
L'ensemble $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_a\}$ est appelé disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$.
L'ensemble $C_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_a\}$ est appelé cercle d'incertitude de la série entière $\sum a_n z^n$.

<u>Remarque</u> : $D_a \cup C_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R_a\}$. Si $R_a = 0$ alors $D_a = \varnothing$ et $C_a = \{0\}$. Si $R_a = +\infty$ alors $D_a = \mathbb{C}$ et $C_a = \varnothing$.

Proposition.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a.

1) $0 \in E_a$ et en particulier $E_a \neq \varnothing$.
2) $D_a \subset E_a \subset D_a \cup C_a$.

Définition.– On appelle somme de la série entière $\sum a_n z^n$ l'application $S_a : E_a \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in E_a$, $S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

__Remarque__ : Il est à noter que S_a n'est rien d'autre que l'application somme de la série d'applications $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par : $f_n(z) = a_n z^n$.

Proposition.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) La somme S_a de la série entière $\sum a_n z^n$ est définie (au moins) en tout point de D_a.
En particulier S_a est toujours définie en 0 et on a $S_a(0) = a_0$.
2) La somme S_a de la série entière $\sum a_n z^n$ n'est définie en aucun point de $\mathbb{C} \setminus (D_a \cup C_a)$.

Théorème.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) La série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point de son disque ouvert de convergence.
2) Pour tout $r \in [0, R_a[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur le disque fermé $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Autrement dit : la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur tout disque fermé contenu dans son disque ouvert de convergence D_a.

__Remarque__ : La série entière $\sum a_n z^n$ n'a par contre aucune raison de converger uniformément sur le disque ouvert de convergence D_a. Pour s'en convaincre il suffit de considérer $\sum z^n$.

4. Opérations sur les séries entières

Définition.– Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ des séries entières et $\alpha \in \mathbb{C}$.
La somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.
La série entière produit de $\sum a_n z^n$ par le scalaire α est la série entière $\sum \alpha a_n z^n$.
La série entière produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où la suite (c_n) est définie par : $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition.– Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons R_a et R_b.

1) $R_{\alpha a} = +\infty$ si $\alpha = 0$ et $R_{\alpha a} = R_a$ si $\alpha \neq 0$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_a$ on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n z^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
2) $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ et $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.
3) Le rayon de convergence R_c de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

5. Sommes de quelques séries entières classiques

Proposition.– On considère $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Si $|z| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
2) Si $|z| < 1$ alors $\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1)) z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$.
3) Si $|z| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Proposition.– Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ on a :

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.
2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} z$.
3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} z$.

6. Séries entières de la variable réelle

Définition.– Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On dit que la série d'applications $\sum f_n$ est une série entière de la variable réelle si et seulement si il existe une suite complexe (a_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = a_n t^n$.

Remarque : Soit (a_n) une suite complexe. On lui associe la série d'applications $\sum f_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = a_n t^n$. La série d'applications $\sum f_n$ est une série entière de la variable réelle. Elle est dite associée à la suite complexe (a_n) et est abusivement notée $\sum a_n t^n$. Via cet abus de notation, le symbole $\sum a_n t^n$ peut désormais s'interpréter de deux manières. Il peut soit désigner la série numérique de terme général $a_n t^n$ ou bien désigner la série d'applications $\sum f_n$ où f_n est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f_n(t) = a_n t^n$. En général le contexte est clair et permet d'éviter toute confusion.

6.1 Rayon de convergence, intervalle de convergence, ensemble de convergence, somme

Soit $\sum a_n t^n$ la série entière de la variable réelle associée à la suite complexe (a_n).
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est par définition le rayon de convergence R_a de la suite $a = (a_n)$. Il est aussi noté $R\left(\sum a_n t^n\right)$. Ce rayon de convergence ne dépend que de la suite (a_n) et par définition même : $R\left(\sum a_n t^n\right) = R_a = R\left(\sum a_n z^n\right)$. Concernant le rayon de convergence, tout ce qui a été fait pour les séries entières de la variable complexe s'applique intégralement et sans aucun changement aux séries entières de la variable réelle.
L'ensemble E_a des nombres réels t pour lesquels la série numérique $\sum a_n t^n$ est convergente est appelé ensemble de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$.
L'intervalle $]-R_a, R_a[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$.

Proposition.– $]-R_a, R_a[\subset E_a \subset [-R_a, R_a]$.

La somme de la série entière $\sum a_n t^n$ est l'application $S_a : E_a \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall t \in E_a$, $S_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.
L'application S_a est définie en tout point de $]-R_a, R_a[$ et n'est définie en aucun point de $\mathbb{R} \setminus [-R_a, R_a]$. Concernant le fait que S_a soit définie ou non aux point R_a et $-R_a$, toutes les éventualités sont possibles. Pour s'en convaincre il suffit de considérer les séries entières $\sum t^n$, $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n^2}$.

Théorème.– Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ et de somme S_a.

1) La série entière $\sum a_n t^n$ converge absolument sur $]-R_a, R_a[$.
2) La série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]-R_a, R_a[$.
3) La somme S_a est continue sur $]-R_a, R_a[$.

Remarque : La série entière $\sum a_n t^n$ n'a par contre aucune raison de converger uniformément sur $]-R_a, R_a[$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer $\sum t^n$.

Jean le rond D'Alembert (1717-1783)
Abandonné à sa naissance sur les marches de l'église parisienne de Saint Jean le Rond (qui lui a donné son prénom), il est recueilli par la femme d'un artisan-vitrier qui l'élèvera comme son fils. En retour, d'Alembert vivra avec elle jusqu'à la mort de celle-ci (soit pendant 48 ans!). D'Alembert se révèle particulièrement doué pour les mathématiques et étudie avec succès le droit et la médecine. Après des premiers mémoires sur la mécanique des fluides et sur le calcul intégral, il est admis à 24 ans à l'Académie des Sciences comme associé astronome adjoint. En 1743, il publie son important Traité de la Dynamique, où il améliore la définition d'une force, et donne ce qu'on appelle désormais le principe de d'Alembert. En 1747, il écrit un article sur les cordes vibrantes, où, pour la première fois, il donne et résout l'équation aux dérivées partielles qui régit la propagation des ondes sonores. A compter de 1746, d'Alembert se lance avec Diderot dans une aventure monumentale, la rédaction de l'Encyclopédie. La fin de la vie de d'Alembert est marqué par la maladie, et il décède le 29 octobre 1783 des suites de ces maladies. Laissons la conclusion à sa mère adoptive, peu satisfaite des activités de son fils : "Qu'est-ce qu'un philosophe? C'est un fou qui se tourmente toute sa vie pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus".