Réduction d'un endomorphisme

Dans tout le chapitre $(\mathrm{K},+,\times)$ est un corps commutatif. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme

Soit E un K-espace vectoriel.

Définition.– Soient $u : E \to E$ un endomorphisme de E et F un sous espace vectoriel de E.
On dit que F est stable par u si et seulement si $u(F) \subset F$ c'est à dire ssi : $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.
Pour exprimer que F est stable par u on dit aussi que u stabilise F.

Proposition.–
1) Les sous espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.
2) Une homothétie de E stabilise tous les sous espaces vectoriels de E. Si un endomorphisme de E stabilise toutes les droites vectorielles de E alors il s'agit d'une homothétie de E.

Proposition.– Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E.
1) Une intersection de sous espaces vectoriels stables par u est stable par u. $\cap, +$ conservent stabilité
2) Une somme de sous espaces vectoriels stables par u est stable par u.
3) Tout sous espace vectoriel de E contenu dans $\mathrm{Ker}\,u$ est stable par u.
Tout sous espace vectoriel de E contenant $\mathrm{Im}\,u$ est stable par u.
En particulier, $\mathrm{Ker}\,u$ et $\mathrm{Im}\,u$ sont stables par u.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.
Soient F un sous espace vectoriel de E de dimension $p \geq 1$ et B une base de E adaptée à F.

F est stable par u ssi $M_B(u) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ avec $A \in M_p(K)$, $C \in M_{p,n-p}(K)$ et $D \in M_{n-p}(K)$

Notion d'endomorphisme induit

Soient $u \in L(E)$ et F un sous espace vectoriel de E stable par u.
On a donc : $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

On peut considérer l'application $u_F : F \to F$ définie par : $\forall x \in F,\ u_F(x) = u(x)$.
On vérifie que $u_F \in L(F)$. u_F est appelé endomorphisme de F induit par u.

Remarque : Parler de u_F n'a de sens que si F est stable par u. Dans le cas ou F est stable par u on peut à la fois parler de l'endomorphisme u_F de F induit par u et de la restriction $u_{|F}$ de u à F. On ne les confondra pas. L'endomorphisme induit u_F est une application linéaire de F dans F alors que la restriction $u_{|F}$ est une application linéaire de F dans E. Si $F \neq E$ alors $u_F \neq u_{|F}$.

2. Eléments propres d'un endomorphisme

2.1 Notions de valeurs propres et de vecteurs propres

Soit E un K-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme de E.

Définition.–
On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si et seulement si : $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in K \mid u(x) = \lambda x$.
On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si et seulement si : $\exists x \in E \mid x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.
L'ensemble de toutes les valeurs propres de u est noté $\mathrm{Sp}\,u$ et est appelé spectre de u.

Remarques :
✓ Si $E = \{0_E\}$ alors $\mathrm{sp}(u) = \varnothing$.
✓ Soit $x \in E$. Si x est un vecteur propre de u alors il existe un unique $\alpha \in K$ vérifiant $u(x) = \alpha x$.
On dit alors que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre α.

Proposition.– Soit $\lambda \in K$.
1) $\lambda \in \mathrm{Sp}\,u \Leftrightarrow u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injectif.
2) Si $\dim E < +\infty$ alors : $\lambda \in \mathrm{Sp}\,u \Leftrightarrow u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non bijectif.
3) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,u$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda^p \in \mathrm{Sp}\,u^p$.
4) Si u est un automorphisme de E alors 0 n'est pas valeur propre de u et les valeurs propres de u^{-1} sont les inverses des valeurs propres de u.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$.
1) Si h est une homothétie de rapport λ alors $\mathrm{Sp}\,h = \{\lambda\}$.
2) Si p est un projecteur de E alors $\mathrm{Sp}\,p \subset \{0,1\}$.
Si p est un projecteur de E distinct de $0_{L(E)}$ et de Id_E alors $\mathrm{Sp}\,p = \{0,1\}$.

3) Si s est une symétrie de E alors $\operatorname{Sp} s \subset \{-1,1\}$.

Si s est une symétrie de E distinct de Id_E et de $-\mathrm{Id}_E$ alors $\operatorname{Sp} s = \{-1,1\}$.

2.2 Sous espace propre associé à une valeur propre

Soit E un K-espace vectoriel, $u : E \to E$ un endomorphisme de E et $\lambda \in \operatorname{Sp} u$.

$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ.

$E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$ et $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$ car $\lambda \in \operatorname{Sp} u$.

Proposition.– Si v est un endomorphisme de E qui commute avec u alors on a les propriétés :

1) Tout sous espace propre de u est stable par v.
2) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Proposition.– Si λ est une valeur propre de u alors $E_\lambda(u)$ est stable par u et l'endomorphisme u_λ induit par u dans $E_\lambda(u)$ n'est autre que l'homothétie de rapport λ.

Théorème.–

1) Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de l'endomorphisme u alors $E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$.
2) Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre de vecteurs de E.
3) Si E est de dimension finie égale à n alors un endomorphisme u de E admet au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple : $(e_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

2.3 Lien avec la notion de polynôme caractéristique en dimension finie

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u : E \to E$ un endomorphisme de E.

Théorème.– Les valeurs propres de u sont les racines dans K du polynôme caractéristique de u.
Le spectre de u est une partie finie de K, éventuellement vide, de cardinal au plus n.

Exemple : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux et (e_1, e_2) une base de E.
L'endomorphisme u de E, défini par $u(e_1) = -e_2$ et $u(e_2) = e_1$, est sans valeurs propres.

Proposition.– Si a est un automorphisme de E alors $\operatorname{sp}(a^{-1} \circ u \circ a) = \operatorname{sp}(u)$.

Théorème.– Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ alors tout endomorphisme de E admet au moins une valeur propre.

Théorème.– Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u et distinct de $\{0_E\}$ alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Théorème.– Soit $\lambda \in K$. On note $m(\lambda)$ la multiplicité du scalaire λ dans le polynôme χ_u.

1) Si $m(\lambda) \geq 1$ alors λ est valeur propre de u et on a : $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$.
2) Si λ est une racine simple de χ_u alors λ est valeur propre de u et $\dim E_\lambda(u) = 1$.

3. Endomorphisme diagonalisable en dimension finie

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ $u : E \to E$ un endomorphisme de E.
Il est à noter que E est non réduit à $\{0_E\}$ car $n \geq 1$.

Définition.– L'endomorphisme u est dit diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Toute base B de E dans laquelle la matrice de u est diagonale est appelée une base de diagonalisation de u.

Proposition1.– On suppose u <u>diagonalisable</u> et on considère une base de diagonalisation $B = (e_1, \cdots, e_n)$. La matrice de u dans B étant diagonale on a $M_B(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distincts) dans K. Dès lors :

1) Chaque vecteur e_k de la base B est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_k.
2) $\chi_u = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ et $\operatorname{Sp} u = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

Proposition2.– Si l'endomorphisme u est <u>diagonalisable</u> alors on a les propriétés suivantes :

1) $\operatorname{Sp} u$ est fini et non vide. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u.
2) $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u)$ et si B est une base de E adaptée à cette décomposition alors $M_B(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_r I_{d_r})$.
3) $\chi_u = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdots (X - \lambda_r)^{d_r}$ où $d_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$.

Théorème.–

1) u est diagonalisable si et seulement si la somme des sous espaces propres de u est égale à E.
2) u est diagonalisable ssi il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Proposition.– Toute homothétie de E est diagonalisable, tout projecteur de E est diagonalisable et si $2_K \neq 0_K$ alors toute symétrie de E est diagonalisable.

Théorème.– (Fondamental)

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé sur K et $\dim E_\lambda(u) = m_{\chi_u}(\lambda)$ pour toute valeur propre λ de u.

Remarque : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$ (D'Alembert). Dans le cas favorable où $K = \mathbb{C}$ le polynôme caractéristique χ_u de u est automatiquement scindé sur $\mathbb{C}$.

Corollaire.– Si l'endomorphisme u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable et les sous espaces propres de u sont tous de dimension 1.

4. Endomorphisme trigonalisable en dimension finie

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ $u : E \to E$ un endomorphisme de E.
Il est à noter que E est non réduit à $\{0_E\}$ car $n \geq 1$.

Définition.– L'endomorphisme u de E est dit trigonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Toute base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure est appelée une base de trigonalisation de u.

Remarque : Si il existe une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire inférieure alors u est trigonalisable car la matrice de u dans la base « inversée » $B' = (e_n, \cdots, e_1)$ est triangulaire supérieure.

Proposition1.– On suppose u trigonalisable et on considère une base de trigonalisation B. La matrice de u dans B étant triangulaire supérieure on a $M_B(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & \lambda_n \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distincts) dans K. Dans ces conditions :

1) $\chi_u = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ et $\mathrm{Sp}\, u = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.
2) $\mathrm{Tr}(u) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et $\det(u) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Proposition2.– Si l'endomorphisme u est trigonalisable alors on a les propriétés suivantes :

1) $\mathrm{Sp}(u)$ est fini et non vide et $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ dans le polynôme χ_u.
2) La trace de u est égale à la somme des valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité, ce qui s'écrit : $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda$.
3) Le déterminant de u est égal au produit des valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité, ce qui s'écrit $\det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Théorème.– (Fondamental)

u est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur K.

Théorème.– Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

5. Endomorphismes nilpotents

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. Notons que E est non réduit à $\{0_E\}$ car $n \geq 1$. Dès lors $\mathrm{Id}_E \neq 0_{L(E)}$ et $(L(E), +, \circ)$ est un anneau non nul. Pour $u \in L(E)$ on adopte les notations : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{u \text{ figurant } k \text{ fois}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition.– Un endomorphisme u de E est nilpotent si et seulement si : $\exists\, m \in \mathbb{N}^* \mid u^m = 0_{L(E)}$.

Proposition.–

1) L'endomorphisme nul $0_{L(E)}$ est nilpotent.
2) Un automorphisme de E n'est pas nilpotent.
3) Si u est un endomorphisme nilpotent de E alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0_{L(E)}\}$ existe et est appelé indice de nilpotence de u. Si $u = 0_{L(E)}$ alors $p = 1$ et si $u \neq 0_{L(E)}$ alors $p \geq 2$.
4) Si u est un endomorphisme nilpotent et non nul de E alors son indice de nilpotence p est supérieur ou égal à deux, $u^p = 0_{L(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{L(E)}$.
5) Si u est un endomorphisme nilpotent de E alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $\dim E$.

Proposition.– Si u est un endomorphisme nilpotent alors $sp(u) = \{0\}$.

Proposition.– Soit u un endomorphisme nilpotent de E. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{L(E)}$.

L'endomorphisme $Id_E - u$ est bijectif et on a : $(Id_E - u)^{-1} = Id_E + u + u^2 + \cdots + u^{p-1}$.

Théorème.– (Caractérisation des endomorphismes nilpotents en dimension finie)

Soit $u \in L(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) u est nilpotent.
2) Il existe une base B de E telle que $M_B(u)$ soit triangulaire supérieure à diagonale nulle.
3) u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
4) $\chi_u = X^n$.

6. Pour aller plus loin (HP)

6.1 Sous espace stable

Soit E un K-espace vectoriel.

Proposition.– Si $u \in L(E)$ et si $x \in E$ alors $\mathrm{Vect}\left(\left\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\right\}\right)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui est stable par u et qui contient x.

Proposition.– On suppose que $\dim E < +\infty$ et on considère $E_1, \cdots, E_p$ des sous espaces vectoriels non nuls stables par u et supplémentaires dans E.

Si u_k désigne l'endomorphisme induit par u dans E_k alors on a : $\chi_u = \chi_{u_1} \cdots \chi_{u_p}$.

6.2 Valeurs propres et endomorphismes diagonalisables

Proposition.– Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $(u,v) \in L(E)^2$.

Si $u \circ v = v \circ u$ alors u et v ont un vecteur propre en commun.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.

1) Si u est diagonalisable alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.
2) Si u est nilpotent et diagonalisable alors $u = 0_{L(E)}$.

   Si u est nilpotent et non nul alors u n'est pas diagonalisable.
3) Si $\mathrm{rg}\, u = 1$ alors : u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}\, u \neq 0$.

6.3 Endomorphismes codiagonalisables

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $(u,v) \in L(E)^2$.

Définition.– Les endomorphismes u et v sont dits codiagonalisables si et seulement si il existe une base B de E dans laquelle les matrices de u et de v sont diagonales.

Proposition.–

1) Si u et v sont codiagonalisables alors $u \circ v = v \circ u$.
2) Si $u \circ v = v \circ u$ et si u et v sont diagonalisables alors u et v sont codiagonalisables.

Réduction d'une matrice carrée

Dans tout le chapitre $(K,+,\times)$ est un corps et $A \in M_n(K)$ est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$.

Définition.– Si F est un sous espace vectoriel de $M_{n,1}(K)$ on pose $A(F) = \{AX, X \in F\}$ et on dit que F est stable par A si et seulement si $A(F) \subset F$ c'est-à-dire ssi : $\forall X \in F$, $AX \in F$.

1. Eléments propres d'une matrice carrée

1.1 Notions de valeurs propres et de vecteurs propres

Définition.–

On dit que $X \in M_{n,1}(K)$ est un vecteur propre de A si et seulement si X est <u>non nul</u> et si il existe un scalaire $\lambda \in K$ vérifiant $AX = \lambda X$.

On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe une matrice colonne <u>non nulle</u> $X \in M_{n,1}(K)$ vérifiant $AX = \lambda X$.

L'ensemble de toutes les valeurs propres de A est noté $\mathrm{Sp}\,A$ et est appelé spectre de A.

Proposition.– Soient L un sous corps de $(K,+,\times)$ et $A \in M_n(L)$. Puisque $L \subset K$ on a $A \in M_n(K)$. L'ensemble des valeurs propres de A considérée comme matrice à coefficients dans L est noté $\mathrm{sp}_L\,A$. L'ensemble des valeurs propres de A considérée comme matrice à coefficients dans K est noté $\mathrm{sp}_K\,A$.

Il se peut que $\mathrm{sp}_L\,A \neq \mathrm{sp}_K\,A$ mais on a toujours l'inclusion $\mathrm{sp}_L\,A \subset \mathrm{sp}_K\,A$.

<u>Exemple</u> : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et on a $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}\,A \subset \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}\,A$. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ alors $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}\,A = \varnothing$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}\,A = \{-i,i\}$.

Théorème.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.

On considère une base $B = (e_1,\cdots,e_n)$ de E et $\lambda \in K$.

Le scalaire λ est une valeur propre de u si et seulement si λ est une valeur propre de $M_B(u)$.

Le vecteur $x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$ de E est un vecteur propre de u si et seulement si la matrice colonne $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $M_B(u)$. En particulier : $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(M_B(u))$.

Proposition.– Soit $\lambda \in K$.

1) λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible.
2) Si λ est une valeur propre de A alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, λ^p est une valeur propre de la A^p.
3) A est inversible si et seulement si 0_K n'est pas valeur propre de A. Dans ces conditions, les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.

Proposition.–

1) Si $A = \lambda I_n$ alors $\mathrm{Sp}\,A = \{\lambda\}$.
2) Si $A^2 = A$ avec $A \neq I_n$ et $A \neq 0$ alors $\mathrm{Sp}\,A = \{0,1\}$.
3) Si $A^2 = I_n$ avec $A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$ alors $\mathrm{Sp}\,A = \{-1,1\}$.

1.2 Sous espace propre associé à une valeur propre

On considère $\lambda \in K$ et on suppose que λ est une valeur propre de A.

Le sous espace vectoriel $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ de $M_{n,1}(K)$ est appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ.

On a $E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(K), AX = \lambda X\}$ et $E_\lambda(A) \neq \{0_{M_{n,1}(K)}\}$ car $\lambda \in \mathrm{Sp}\,A$.

Proposition.– Si B est une matrice carrée d'ordre n qui commute avec A alors on a les propriétés :

1) Tout sous espace propre de A est stable par B.
2) $\mathrm{Im}\,A$ et $\mathrm{Ker}\,A$ sont stables par B.

Proposition.– Si λ est une valeur propre de A alors $E_\lambda(A)$ est stable par A.

Théorème.–

1) Si $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice carrée A alors $E_{\lambda_1}(A) + \cdots + E_{\lambda_p}(A) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(A)$.
2) Une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre de vecteurs de $M_{n,1}(K)$.
3) Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes.

1.3 Lien avec la notion de polynôme caractéristique

Théorème.– Les valeurs propres de A sont les racines dans K du polynôme caractéristique de A. Le spectre de A est une partie finie de K, éventuellement vide, de cardinal au plus n.

Exemple : Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Proposition.– Deux matrices semblables ont le même spectre.

Théorème.–

Une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut ne pas admettre de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

Théorème.– Soit $\lambda \in K$. On note $m(\lambda)$ la multiplicité du scalaire λ dans le polynôme χ_A.

1) Si $m(\lambda) \geq 1$ alors λ est valeur propre de A et on a : $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m(\lambda)$.
2) Si λ est une racine simple de χ_A alors λ est valeur propre de A et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

2. Matrice carrée diagonalisable

Définition.– La matrice A est dite diagonalisable dans $M_n(K)$ si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire ssi : $\exists P \in GL_n(K)$, $\exists D \in D_n(K) \mid P^{-1}AP = D$.

Proposition.– Soient E un K espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, B une base de E et $u \in L(E)$. u est diagonalisable si et seulement si $M_B(u)$ est diagonalisable.

Proposition.– A est diagonalisable dans $M_n(K)$ si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Proposition1.– On suppose A diagonalisable dans $M_n(K)$ et on considère $P \in GL_n(K)$ et $D \in D_n(K)$ telles que $P^{-1}AP = D$. D étant diagonale on a $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dans K, non nécessairement deux à deux distincts. Dans ces conditions :

1) Si $P = [X_1 \ \cdots \ X_n]$ avec $X_k \in M_{n,1}(K)$ alors chaque X_k est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ_k.
2) $\chi_A = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_n)$ et $Sp A = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

Théorème.– Si la matrice A est diagonalisable dans $M_n(K)$ alors on a les propriétés suivantes:

1) Le spectre de A est non vide. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A.
2) $M_{n,1}(K) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(A)$ et A est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_r I_{d_r})$.
3) $\chi_A = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdots (X - \lambda_r)^{d_r}$ où $d_k = \dim E_{\lambda_k}(A)$.

Théorème.–

1) A est diagonalisable ssi la somme des sous espaces propres de A est égale à $M_{n,1}(K)$.
2) A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $M_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

Théorème.– (Fondamental)

La matrice A est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé sur K et $\dim E_\lambda(A) = m_{\chi_A}(\lambda)$ pour toute valeur propre λ de A.

Remarque : Si $K = \mathbb{C}$ le polynôme caractéristique χ_A de A est automatiquement scindé sur $\mathbb{C}$.

Corollaire.– Si $A \in M_n(K)$ admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et les sous espaces propres de A sont tous de dimension 1.

3. Matrice carrée trigonalisable

Définition.– La matrice A est dite trigonalisable dans $M_n(K)$ si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure c'est-à-dire si et seulement si il existe $P \in GL_n(K)$ et $T \in T_n^s(K)$ telles que $P^{-1}AP = T$.

Proposition.–

1) Une matrice semblable à une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.
2) Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, B une base de E et $u \in L(E.)$ L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si $M_B(u)$ est trigonalisable.
3) La matrice A est diagonalisable dans $M_n(K)$ si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Proposition1.– On suppose A trigonalisable.

On a donc : $P^{-1}AP = T$ avec $P \in GL_n(K)$ et $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & \lambda_n \end{bmatrix}$ où $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in K^n$.

$\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$, $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$, $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Proposition2.– Si la matrice carrée A est trigonalisable alors on a les propriétés suivantes :

1) $\operatorname{Sp}(A)$ est fini et non vide et $\chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m(\lambda)}$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ dans le polynôme χ_A.
2) La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité, ce qui s'écrit : $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda$.
3) Le déterminant de A est égal au produit des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité, ce qui s'écrit $\det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Théorème.– (Fondamental)

A est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de A est scindé sur K.

Théorème.– Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

4. Matrices nilpotentes

$(M_n(K),+,\times)$ est un anneau. $0_{M_n(K)}$ est la matrice nulle et $1_{M_n(K)} = I_n$.

On rappelle que par définition : $A^0 = I_n$ et $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{A \text{ figurant } k \text{ fois}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition.– Une matrice A de $M_n(K)$ est nilpotente si et seulement si : $\exists\, m \in \mathbb{N}^* \mid A^m = 0$.

Proposition.–

1) La matrice nulle de $M_n(K)$ est nilpotente.
2) Une matrice inversible de $M_n(K)$ n'est pas nilpotente.
3) Si A est une matrice nilpotente de $M_n(K)$ alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0\}$ existe et est appelé indice de nilpotence de A. Si $A = 0$ alors $p = 1$ et si $A \neq 0$ alors $p \geq 2$.
4) Si A est une matrice nilpotente et non nulle de $M_n(K)$ alors son indice de nilpotence p est supérieur ou égal à deux, $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

Proposition.– Si A est une matrice nilpotente de $M_n(K)$ alors $\operatorname{sp}(A) = \{0\}$.

Proposition.– Soit A est une matrice nilpotente de $M_n(K)$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

La matrice $I_n - A$ est inversible et on a : $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$.

Théorème.– (Caractérisation des matrices nilpotentes)

Soit $A \in M_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est nilpotente.
2) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.
3) A est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
4) $\chi_A = X^n$.

5. Pour aller plus loin (HP)

5.1 Sous espace stable

Proposition.– Si $A \in M_n(K)$ et si $X \in M_{n,1}(K)$ alors $\operatorname{Vect}(\{A^k X, k \in \mathbb{N}\})$ est le plus petit sous espace vectoriel de $M_{n,1}(K)$ qui est stable par A et qui contient X.

5.2 Valeurs propres et matrices diagonalisables

Proposition.– Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2$.

Si $AB = BA$ alors A et B ont un vecteur propre en commun.

Proposition.–

1) Si A est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.
2) Si A est à la fois nilpotente et diagonalisable alors A est nulle.
   Si A est nilpotente et non nulle alors A n'est pas diagonalisable.
3) Si $\operatorname{rg} A = 1$ alors : A diagonalisable $\Leftrightarrow \operatorname{Tr} A \neq 0$.

5.3 Matrices codiagonalisables

Soit $(A,B) \in M_n(K)^2$.

Définition.– Les matrices A et B sont dites codiagonalisables si et seulement si il existe $P \in GL_n(K)$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Proposition.–

1) Si A et B sont codiagonalisables alors $AB = BA$.
2) Si $AB = BA$ et si A et B sont diagonalisables alors A et B sont codiagonalisables.

5.4 Matrices stochastiques

Définition.– Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si et seulement si :

1) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geq 0.$ (tous les coefficients de A sont positifs)
2) $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$ (La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1)

Définition.– L'ensemble des matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$ est noté $ST_n(\mathbb{R})$.

Proposition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $U = {}^t[1 \ \cdots \ 1]$.

La matrice A est stochastique si et seulement si ses coefficients sont positifs et si $AU = U$.

Proposition.–

1) $ST_n(\mathbb{R})$ est stable pour le produit matriciel.
2) $ST_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
3) $ST_n(\mathbb{R})$ est un convexe compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition.– Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \in [0,1]$.
2) 1 est valeur propre de A et $U = {}^t[1 \ \cdots \ 1]$ est un vecteur propre associé.
3) Toute valeur propre complexe de A est de module inférieur ou égal à 1.
4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est stochastique.
5) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} A^k$ est stochastique.

5.5 Rayon spectral d'une matrice à coefficients complexes

Définition.– Le rayon spectral d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est le réel positif : $\rho(A) = \max_{\lambda \in SpA} |\lambda|$.

Proposition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1) $\rho(I_n) = 1$.
2) $0 \leq \rho(A) \leq n\|A\|_\infty$.
3) $\forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A^k) = \rho(A)^k$.
4) Si A est diagonalisable et si $\rho(A) < 1$ alors (A^k) converge vers la matrice nulle.
5) Si (A^k) converge dans $M_n(\mathbb{C})$ vers B et si $\rho(A) < 1$ alors $B = 0$.

5.6 Un peu de topologie matricielle

Proposition.–

1) L'ensemble $\Delta_n(\mathbb{C})$, des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont le spectre est de cardinal n, est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
2) L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.