21

Polynômes d'un endomorphisme

Dans tout le chapitre, E désigne un K-espace vectoriel et u est un endomorphisme de E.
On suppose dans tout le chapitre que $E \neq \{0_E\}$.

1. Polynômes de l'endomorphisme u

Définition.–

1) Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k X^k$ un polynôme de $K[X]$. L'endomorphisme $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u^k$ est noté $P(u)$.
Par définition on a donc : $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u^k$.
2) Un polynôme P de $K[X]$ annule l'endomorphisme u si et seulement si $P(u) = 0_{L(E)}$.
Par définition on pose : $I_u = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.) ensemble des polynômes de $K[X]$ qui annulent u.
3) Un polynôme de l'endomorphisme u est endomorphisme de la forme $P(u)$ avec $P \in K[X]$.
Par définition on pose : $K[u] = \{P(u), P \in K[X]\}$. I_u : idéal annulateur de u.

Proposition.– Soit $P \in K[X]$.

1) Les sous espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.
2) Si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. $\lambda \in Sp\, u \Rightarrow P(\lambda) \in Sp\, P(u)$
3) Si P annule u alors toute valeur propre de u est une racine de P dans K et $\operatorname{Sp} u \subset R_K(P)$.
$P \in I_u \Rightarrow Sp\, u \subset R_K(P)$

Proposition.– Soit $P \in K[X]$.

1) Si u est diagonalisable alors $P(u)$ est diagonalisable. Plus précisément : si B est une base de E telle que $M_B(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ alors $M_B(P(u)) = \operatorname{Diag}(P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))$.
2) Si B est une base de diagonalisation de u alors B est une base de diagonalisation de $P(u)$.

Proposition.– Soit $P \in K[X]$.

1) Si u est trigonalisable alors $P(u)$ est trigonalisable. Plus précisément : si B est une base de E telle que $M_B(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & \lambda_n \end{bmatrix}$ alors $M_B(P(u)) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & P(\lambda_n) \end{bmatrix}$.

M_B est un (iso)morphisme de K algèbre de $(L(E), +, \circ, \cdot)$ ds $(M_n(K), +, \times, \cdot)$

2) Si B est une base de trigonalisation de u alors B est une base de trigonalisation de $P(u)$.

2. Polynôme minimal de l'endomorphisme u

Théorème.–(De structure)

1) L'application $\varphi_u : K[X] \to L(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de K-algèbres.
$\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall (P,Q) \in K[X]^2,\ (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u)$.
$\forall (P,Q) \in K[X]^2,\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
$1_{K[X]}(u) = \mathrm{Id}_E$.
2) $K[u] = \operatorname{Im} \varphi_u$ est la plus petite sous algèbre de $L(E)$ qui contient l'endomorphisme u.
Il s'agit d'une sous algèbre commutative de $L(E)$.
En particulier : $\forall (P,Q) \in K[X]^2, P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
3) $I_u = \operatorname{Ker} \varphi_u$ est un idéal de $K[X]$. L'idéal I_u est appelé idéal annulateur de u.
4) Ou bien $I_u = \{0_{K[X]}\}$, ou bien $I_u \neq \{0_{K[X]}\}$ et il existe un unique polynôme unitaire Π_u de $K[X]$ tel que $I_u = \Pi_u K[X]$. En cas d'existence, Π_u est appelé le polynôme minimal de u.

idéal : I un ss groupe de $(A,+)$ avec $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et $\forall a \in A, \forall i \in I,\ a i\ (= ia) \in I$

Remarques :

- ✓ φ_u est appelé morphisme d'évaluation associé à u. On a : $0(u) = 0_{L(E)}$, $1(u) = \mathrm{Id}_E$ et $X(u) = u$.
- ✓ I_u est un idéal de $K[X]$. C'est aussi un sous espace vectoriel de $K[X]$.
- ✓ Il est important de noter que la notion de polynôme minimal de l'endomorphisme u n'est définie que si l'idéal I_u n'est pas réduit au singleton $\{0_{K[X]}\}$.

Proposition.– En cas d'existence, le polynôme minimal Π_u possède les propriétés suivantes :

1) Π_u est unitaire, annule u et divise tout polynôme annulateur de u.
On a donc : $\Pi_u(u) = 0_{L(E)}$ et $\forall P \in K[X],\ P(u) = 0_{L(E)} \Rightarrow \Pi_u \mid P$.
2) Π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré à annuler u.
Π_u est non constant et $\deg \Pi_u \geq 1$.
3) Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u et distinct de $\{0_E\}$ alors $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$.
4) Les racines de Π_u sont exactement les valeurs propres de u.

$Sp\, u = R_K(\Pi_u)$

Théorème.– Si $\dim E < +\infty$ alors on a les propriétés suivantes :

1) $I_u \neq \{0_{L(E)}\}$ et u admet un polynôme minimal.
2) $K[u]$ est de dimension $d = \deg \Pi_u$ et si $d \geq 1$ alors $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{d-1})$ est une base de $K[u]$.

Théorème.– (Cayley-Hamilton)
Si $\dim E < +\infty$ alors $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$ et $\Pi_u \mid \chi_u$ dans $K[X]$.

Remarque : Si P est un polynôme annulateur de u alors toute valeur propre de u est une racine de P. On a donc $\operatorname{Sp} u \subset R_P(K)$ mais l'inclusion inverse n'est pas nécessairement vraie. Elle l'est néanmoins pour certains polynômes très particuliers comme Π_u et χ_u. En effet : si $1 \leq \dim E < +\infty$ alors Π_u et χ_u sont des polynômes annulateurs de u qui vérifient : $\operatorname{Sp} u = R_{\Pi_u}(K) = R_{\chi_u}(K)$.

3. Théorème de décomposition des noyaux

Théorème.– (Des noyaux)

1) Si P et Q sont des polynômes de $K[X]$ premiers entre eux alors on a l'égalité $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.
2) Si $P_1, \cdots, P_r$ sont des polynômes de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux alors on a l'égalité $\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_r)(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(u)$.

Application au cas particulier important où l'on dispose d'un polynôme annulateur

Soit P un polynôme non constant et annulateur de u. Comme $P(u) = 0_{L(E)}$ on a $\operatorname{Ker} P(u) = E$.

Comme P est non constant, il existe des polynômes irréductibles unitaires et deux à deux distincts $P_1, \cdots, P_r$ des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ et un scalaire non nul λ tels que $P = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ (Décomposition en irréductibles dans $K[X]$).

Comme les polynômes $P_i^{\alpha_i}, i \in [\![1, r]\!]$ sont deux à deux premiers entre eux il vient : $E = \operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1^{\alpha_1}(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r^{\alpha_r}(u)$.

Supposons de plus que P soit scindé sur K.

Comme P est non constant, il s'écrit sous la forme $P = \lambda (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$ où λ est dans $K \setminus \{0_K\}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$ et où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des scalaires deux à deux distincts.

Comme les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}, i \in [\![1, r]\!]$ sont deux à deux premiers entre eux il vient : $E = \operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 Id_E)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u - \lambda_r Id_E)^{\alpha_r}$.

4. Polynômes annulateurs et diagonalisation en dimension finie

On suppose ici que E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Comme $\dim E < +\infty$, $I_u \neq \{0_{K[X]}\}$ et on dispose du polynôme minimal Π_u de u.

Comme $E \neq \{0_E\}$, Π_u est non constant.

Le caractère diagonalisable de u a déjà été caractérisé à l'aide du polynôme caractéristique χ_u.

Théorème.– (Fondamental)
L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur K et $\dim E_\lambda(u) = m_{\chi_u}(\lambda)$ pour toute valeur propre λ de u.

Le caractère diagonalisable de u peut aussi se caractériser à l'aide du polynôme minimal Π_u :

Théorème.– (Fondamental)
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) u est diagonalisable.
2) Π_u est scindé sur K et à racines simples.
3) Il existe un polynôme non constant scindé sur K et à racines simples qui annule u.

Remarques :

- ✓ Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$ (D'Alembert).
- ✓ Dans le cas favorable où $K = \mathbb{C}$ le polynôme minimal Π_u de u est scindé sur $\mathbb{C}$.
- ✓ La caractérisation 3) est très utile dans la pratique.

Proposition.– Si l'endomorphisme u est diagonalisable alors on a les propriétés suivantes :

1) Le spectre de u est non vide. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u.
2) $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u)$ et si B est une base de E adaptée à cette décomposition alors $M_B(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_r I_{d_r})$.
3) $\Pi_u = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$ et $\chi_u = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdots (X - \lambda_r)^{d_r}$ où $d_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$.

Proposition.– Si u est diagonalisable et si F est un sous espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$ et stable par u alors u_F est aussi diagonalisable.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, F un sous espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$ et u un endomorphisme diagonalisable de E.
F est stable par u si et seulement si F admet une base constituée de vecteurs propres de u.

5. Polynômes annulateurs et trigonalisation en dimension finie

On suppose ici que E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Comme $\dim E < +\infty$, $I_u \neq \{0_{K[X]}\}$ et on dispose du polynôme minimal Π_u de u.
Comme $E \neq \{0_E\}$, Π_u est non constant.

5.1 Etude du cas où u admet un polynôme annulateur non constant et scindé sur K

Théorème.– On suppose qu'il existe un polynôme P non constant et scindé sur K qui annule u.
Le polynôme P peut donc s'écrire sous la forme $P = \lambda(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$ où λ est dans $K\setminus\{0_K\}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$ et où $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ sont des scalaires deux à deux distincts. Alors :

1) $E = \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(u-\lambda_r \mathrm{Id}_E)^{\alpha_r}$
2) Pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $V_k = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k}$ est stable par u et l'endomorphisme de V_k induit par u est la somme de l'homothétie de rapport λ_k et d'un endomorphisme nilpotent.
3) Il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1}+N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{d_r}+N_r \end{pmatrix}$ où pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, N_k est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls et d_k est la dimension de $V_k = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k}$. Une telle matrice étant triangulaire supérieure, u est trigonalisable.

5.2 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Le caractère trigonalisable de u a déjà été caractérisé à l'aide du polynôme caractéristique χ_u :

Théorème.– (Fondamental)
u est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur K.

Le caractère trigonalisable de u peut aussi se caractériser à l'aide du polynôme minimal Π_u :

Théorème.– (Fondamental)
Les assertions suivantes sont équivalentes :

4) u est trigonalisable.
5) Π_u est scindé sur K.
1) Il existe un polynôme non constant et scindé sur K qui annule u.

Remarques :

✓ Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$ (D'Alembert). Dans le cas favorable où $K=\mathbb{C}$ le polynôme minimal Π_u de u est scindé sur $\mathbb{C}$ et l'endomorphisme u est trigonalisable.
✓ La caractérisation 3) est très utile dans la pratique.

Théorème.– Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

6. Pour aller plus loin (HP)

On suppose ici que E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Comme $\dim E < +\infty$, $I_u \neq \{0_{K[X]}\}$ et on dispose du polynôme minimal Π_u de u.
Comme $E \neq \{0_E\}$, Π_u est non constant.

6.1 L'algèbre $K[u]$

Théorème.–

1) Si $u \in GL(E)$ alors $u^{-1} \in K[u]$.
2) Toute sous algèbre de $(L(E),+,\circ,\bullet)$ contient les inverses de ses éléments inversibles dans $L(E)$.

6.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique

Proposition.– Soient $V_1,\cdots,V_r$ des sous espaces vectoriels de E stables par u, non réduit à $\{0_E\}$ et supplémentaires dans E. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ on note u_i l'endomorphisme de V_i induit par u.
Dès lors : $\Pi_u = \Pi_{u_1} \vee \cdots \vee \Pi_{u_r}$ et $\chi_u = \chi_{u_1} \times \cdots \times \chi_{u_r}$.

6.3 Exponentielle d'endomorphisme en dimension finie

Proposition.–

1) On suppose ici que $K=\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
Il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\mathrm{Exp}(u) = P(u)$. En particulier $\mathrm{Exp}(u) \in K[u]$.

2) Si $K = \mathbb{R}$ et si u est diagonalisable alors il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $u = P(\mathrm{Exp}(u))$.

6.4 Décomposition de Dunford

Théorème.– Si l'endomorphisme u est trigonalisable alors il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes de E vérifiant : $u = d + n$, $d \circ n = n \circ d$, d diagonalisable et n nilpotent. De surcroît d et n sont des polynômes de l'endomorphisme u. On a donc : $(d,n) \in K[u]^2$.

Arthur Cayley (1821-1895)
Né dans une ville de la banlieue de Londres, Arthur Cayley passe les huit premières années de sa vie à Saint-Petersbourg en Russie. Lorsqu'il revient en Angleterre il montre de vives dispositions pour les mathématiques si bien que ses professeurs l'encouragent à poursuivre dans ce domaine ce qu'il fait en entrant au Trinity Collège de Cambridge où il excelle d'ailleurs dans toutes les matières. Ne pouvant obtenir immédiatement une chaire à l'université, Cayley devient avocat, métier qu'il exerce durant une petite quinzaine d'années. Cette activité qu'il juge ennuyeuse lui laisse du temps pour sa passion, les mathématiques. Il publiera d'ailleurs au cours de cette période plus de deux cents articles !!! En 1863, une chaire de mathématiques lui est proposée à Cambridge. Il l'occupe jusqu'à sa mort et publie en tout plus de neuf cents articles ce qui en fait après Euler, Cauchy et Erdös, le mathématicien le plus prolixe. Ses contributions sont nombreuses, notamment en théorie des groupes et en algèbre linéaire, deux domaines où des théorèmes portent son nom.

Dunford (1906-1986)
Mathématicien américain, Dunford est connu pour ces travaux en analyse fonctionnelle. Il a notamment donné son nom à la décomposition de Dunford, à la propriété de Dunford-Pettis et au théorème de Dunford-Schwartz. En 1981 il reçoit, avec son étudiant T.Schwartz, le prix leroy P.Steele décerné par l'American Mathematical Society pour leur ouvrage « Linear operators ».

William Rowan Hamilton (1805-1865)
Sir William Rowan Hamilton est un mathématicien, physicien et astronome irlandais. A l'instar d'un Gauss, Hamilton est un enfant prodige. A cinq ans il connait le latin et le grec, à quinze ans il étudie les « Principia » de Newton et à 17 ans « la mécanique céleste » de Laplace. En 1823, il entre au prestigieux Trinity Collège de Dublin où il se révèle un étudiant extrêmement brillant. En 1827 il est nommé professeur d'astronomie au Trinity Collège. De 1832 à 1835, il se consacre à obtenir une présentation algébrique des nombres complexes et les introduits comme couple de réels. Les années suivantes il tente de généraliser sa construction à des triplets de réels. Il finit par se rendre compte que ce n'est pas possible pour les triplets mais par contre ça l'est pour les quadruplets. Cela débouche sur la notion de quaternion. Hamilton pense que cette notion va révolutionner les mathématiques et consacre alors toute son énergie à les promouvoir. Les quaternions resteront néanmoins assez peu utilisés...

Polynômes d'une matrice carrée

Dans tout le chapitre, $(K,+,\times)$ est un corps et $A \in M_n(K)$ est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$.

1. Polynômes de la matrice carrée A

Définition.–

1) Soit $P = \sum_{k\in N} \alpha_k X^k$ un polynôme de $K[X]$. La matrice carrée $\sum_{k\in N} \alpha_k A^k$ est noté $P(A)$.
   Par définition on a donc : $P(A) = \sum_{k\in N} \alpha_k A^k$.
2) On dit qu'un polynôme P de $K[X]$ annule la matrice A si et seulement si $P(A) = 0_{M_n(K)}$.
   Par définition on pose : $I_u = \{P \in K[X] \mid P(A) = 0\}$.
3) Une matrice de la forme $P(A)$ avec $P \in K[X]$ est appelé un polynôme de la matrice carrée A.
   Par définition on pose : $K[A] = \{P(A), P \in K[X]\}$.

Proposition.– Soit $P \in K[X]$.

1) Les sous espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P(A)$ et $\operatorname{Im} P(A)$ sont stables par A.
2) Si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.
3) Si P annule A alors toute valeur propre de A est une racine de P dans K et $\operatorname{Sp} A \subset R_K(P)$.

Proposition.– Soit $P \in K[X]$.

Si A est diagonalisable alors la matrice $P(A)$ est diagonalisable. Si il existe $Q \in GL_n(K)$ et $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in K^n$ tels que $Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ alors $Q^{-1}P(A)Q = \operatorname{Diag}(P(\lambda_1),\cdots,P(\lambda_n))$.

Proposition.– Soit $P \in K[X]$.

1) Si A est trigonalisable alors la matrice $P(A)$ est trigonalisable.
2) Si il existe $Q \in GL_n(K)$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ alors } Q^{-1}P(A)Q \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0_K & \cdots & 0_K & P(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Proposition.–

1) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Si B est une base de E et si u est un endomorphisme de E alors pour tout polynôme P de $K[X]$ on a : $M_B(P(u)) = P(M_B(u))$.
2) Si a est l'endomorphisme canoniquement associé à A alors $P(a)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $P(A)$.

2. Polynôme minimal de la matrice carrée A

Théorème.–(De structure)

3) L'application $\varphi_A : K[X] \to M_n(K)$ définie par $\varphi_A(P) = P(A)$ est un morphisme de K-algèbres. Autrement dit :
   $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall (P,Q) \in K[X]^2,\ (\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$.
   $\forall (P,Q) \in K[X]^2,\ (PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$.
   $1_{K[X]}(A) = I_n$.
4) $K[A] = \operatorname{Im}\varphi_A$ est la plus petite sous algèbre de $M_n(K)$ qui contient la matrice A.
   Il s'agit d'une sous algèbre commutative de $M_n(K)$.
   En particulier : $\forall (P,Q) \in K[X]^2, P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$.
5) $I_A = \operatorname{Ker}\varphi_A$ est un idéal de $K[X]$. L'idéal I_A est appelé idéal annulateur de la matrice A.
   $I_A \neq \{0_{K[X]}\}$ et il existe un unique polynôme unitaire Π_A de $K[X]$ tel que $I_A = \Pi_A K[X]$.
   Le polynôme Π_A est appelé polynôme minimal de A.

<u>Remarques</u> :

✓ φ_A est appelé morphisme d'évaluation associé à A. On a :
  $0(A) = 0_{M_n(K)}$, $1(A) = I_n$ et $X(A) = A$.

✓ I_A est un idéal de $K[X]$. C'est aussi un sous espace vectoriel de $K[X]$.

✓ Notons que le polynôme minimal de la matrice A existe toujours, contrairement au polynôme minimal d'un endomorphisme dont l'existence n'a été garantie qu'en dimension finie.

Proposition.– Le polynôme minimal Π_A possède les propriétés suivantes :

1) Π_A est unitaire, annule A et divise tout polynôme annulateur de A.
   On a donc : $\Pi_A(A) = 0$ et $\forall P \in K[X],\ P(A) = 0 \Rightarrow \Pi_A \mid P$.
2) Π_A est le polynôme unitaire de plus petit degré à annuler A.
   Π_A est non constant et $\deg \Pi_A \geq 1$.
3) Les racines de Π_A sont exactement les valeurs propres de A.

Théorème.– $K[A]$ est de dimension $d = \deg \Pi_A$ et $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{d-1})$ est une base de $K[A]$.

Théorème.– (Cayley-Hamilton)

$\chi_A(A) = 0$ et $\Pi_A \mid \chi_A$ dans $K[X]$.

<u>Remarque</u> : Si P est un polynôme annulateur de A alors toute valeur propre de A est une racine dans K de P. On a donc $\operatorname{Sp} A \subset R_P(K)$ mais l'inclusion inverse n'est pas nécessairement vraie. Elle l'est néanmoins pour certains polynômes comme Π_A et χ_A. En effet :

$\operatorname{Sp} A = R_{\Pi_A}(K) = R_{\chi_A}(K)$.

3. Théorème de décomposition des noyaux

Théorème.– (Des noyaux)

1) Si P et Q sont des polynômes de $K[X]$ premiers entre eux alors on a l'égalité $\operatorname{Ker}(PQ)(A) = \operatorname{Ker} P(A) \oplus \operatorname{Ker} Q(A)$.
2) Si $P_1, \cdots, P_r$ sont des polynômes de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux alors on a l'égalité $\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_r)(A) = \operatorname{Ker} P_1(A) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(A)$.

<u>Application au cas particulier important où l'on dispose d'un polynôme annulateur</u>

Soit P un polynôme <u>non constant</u> et <u>annulateur</u> de A. Comme $P(A) = 0_{L(E)}$ on a $\operatorname{Ker} P(A) = M_{n,1}(K)$. Comme P est non constant, il existe des polynômes irréductibles unitaires et deux à deux distincts $P_1, \cdots, P_r$ des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ et un scalaire non nul λ tels que $P = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ (Décomposition en irréductibles dans $K[X]$).

Comme les polynômes $P_i^{\alpha_i}, i \in [\![1, r]\!]$ sont deux à deux premiers entre eux il vient : $M_{n,1}(K) = \operatorname{Ker} P(A) = \operatorname{Ker} P_1^{\alpha_1}(A) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r^{\alpha_r}(A)$.

Supposons de plus que P soit <u>scindé</u> sur K.

Comme P est non constant, il s'écrit sous la forme $P = \lambda (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$ où λ est dans $K \setminus \{0_K\}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$ et où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des scalaires deux à deux distincts.

Comme les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}, i \in [\![1, r]\!]$ sont deux à deux premiers entre eux il vient :

$M_{n,1}(K) = \operatorname{Ker} P(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_n)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_r I_n)^{\alpha_r}$.

4. Polynômes annulateurs et diagonalisation

Le caractère diagonalisable de A a déjà été caractérisé à l'aide du polynôme caractéristique χ_A :

Théorème.– (Fondamental)

La matrice A est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de A est scindé sur K et $\dim E_\lambda(A) = m_{\chi_A}(\lambda)$ pour toute valeur propre λ de A.

Le caractère diagonalisable de A peut aussi se caractériser à l'aide du polynôme minimal Π_A :

Théorème.– (Fondamental)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est diagonalisable.
2) Π_A est scindé sur K et à racines simples.
3) Il existe un polynôme non constant scindé sur K et à racines simples qui annule A.

<u>Remarques</u> : La caractérisation 3) est très utile dans la pratique.

Proposition.– Si l'endomorphisme A est <u>diagonalisable</u> alors on a les propriétés suivantes :

1) Le spectre de A est non vide. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de la matrice A.
2) $M_{n,1}(K) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(A)$ et A est semblable à $\operatorname{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_r I_{d_r})$.
3) $\Pi_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$ et $\chi_A = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdots (X - \lambda_r)^{d_r}$ où $d_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$.

5. Polynômes annulateurs et trigonalisation

5.1 Etude du cas où u admet un polynôme annulateur non constant et scindé sur K

Théorème.– On suppose qu'il existe un polynôme P non constant et scindé sur K qui annule A.

Le polynôme P peut donc s'écrire sous la forme $P = \lambda (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$ où λ est dans $K \setminus \{0_K\}$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$ et où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des scalaires deux à deux distincts. Alors :

1) $M_{n,1}(K) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_n)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_r I_n)^{\alpha_r}$
2) Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $V_k = \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$ est stable par A.

3) A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{d_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, N_k est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls et d_k est la dimension de $V_k = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$.

Une telle matrice étant triangulaire supérieure, la matrice A est trigonalisable.

5.2 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Le caractère trigonalisable de A a déjà été caractérisé à l'aide du polynôme caractéristique χ_A :

Théorème.– (Fondamental)

A est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de A est scindé sur K.

Le caractère trigonalisable de A peut aussi se caractériser à l'aide du polynôme minimal Π_A :

Théorème.– (Fondamental)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est trigonalisable.
2) Π_A est scindé sur K.
3) Il existe un polynôme non constant et scindé sur K qui annule A.

Remarques :

✓ Si $K = \mathbb{C}$ alors Π_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et la matrice A est trigonalisable.

✓ La caractérisation 3) est très utile dans la pratique.

Théorème.– Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

6. Pour aller plus loin (HP)

6.1 L'algèbre K[A]

On rappelle que par définition : $K[A] = \{P(A), P \in K[X]\}$.

Théorème.–

1) Si $A \in GL(E)$ alors $A^{-1} \in K[A]$.
2) Une sous algèbre de $M_n(K)$ contient les inverses de ses éléments inversibles dans $M_n(K)$.

6.2 Exponentielle de matrices

Proposition.–

1) On suppose ici que $K = \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\mathrm{Exp}(A) = P(A)$.
2) Si A est diagonalisable et si $K = \mathbb{R}$ alors il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(\mathrm{Exp}(A))$.

6.3 Décomposition de Dunford

Théorème.– Si la matrice A est trigonalisable alors il existe un unique couple (D,N) de matrices de $M_n(K)$ vérifiant : $A = D + N$, $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. De surcroît : D et N sont des polynômes de A. On a donc : $(D,N) \in K[A]^2$.

Arthur Cayley (1821-1895)
Né dans une ville de la banlieue de Londres, Arthur Cayley passe les huit premières années de sa vie à Saint-Petersbourg en Russie. Lorsqu'il revient en Angleterre il montre de vives dispositions pour les mathématiques si bien que ses professeurs l'encouragent à poursuivre dans ce domaine ce qu'il fait en entrant au Trinity Collège de Cambridge où il excelle d'ailleurs dans toutes les matières. Ne pouvant obtenir immédiatement une chaire à l'université, Cayley devient avocat, métier qu'il exerce durant une petite quinzaine d'années. Cette activité qu'il juge ennuyeuse lui laisse du temps pour sa passion, les mathématiques. Il publiera d'ailleurs au cours de cette période plus de deux cents articles !!! En 1863, une chaire de mathématiques lui est proposée à Cambridge. Il l'occupe jusqu'à sa mort et publie en tout plus de neuf cents articles ce qui en fait après Euler, Cauchy et Erdös, le mathématicien le plus prolixe. Ses contributions sont nombreuses, notamment en théorie des groupes et en algèbre linéaire, deux domaines où des théorèmes portent son nom.

Dunford (1906-1986)
Mathématicien américain, Dunford est connu pour ces travaux en analyse fonctionnelle. Il a notamment donné son nom à la décomposition de Dunford, à la propriété de Dunford-Pettis et au théorème de Dunford-Schwartz. En 1981 il reçoit, avec son étudiant T.Schwartz, le prix leroy P.Steele décerné par l'American Mathématical Society pour leur ouvrage « Linear operators ».

William Rowan Hamilton (1805-1865)
Sir William Rowan Hamilton est un mathématicien, physicien et astronome irlandais. A l'instar d'un Gauss, Hamilton est un enfant prodige. A cinq ans il connait le latin et le grec, à quinze ans il étudie les « Principia » de Newton et à 17 ans « la mécanique céleste » de Laplace. En 1823, il entre au prestigieux Trinity Collège de Dublin où il se révèle un étudiant extrêmement brillant. En 1827 il est nommé professeur d'astronomie au Trinity Collège. De 1832 à 1835, il se consacre à obtenir une présentation algébrique des nombres complexes et les introduits comme couple de réels. Les années suivantes il tente de généraliser sa construction à des triplets de réels. Il finit par se rendre compte que ce n'est pas possible pour les triplets mais par contre ça l'est pour les quadruplets. Cela débouche sur la notion de quaternion. Hamilton pense que cette notion va révolutionné les mathématiques et consacre alors toute son énergie à les promouvoir. Les quaternions resteront néanmoins assez peu utilisés...