18

Polynômes à une indéterminée

Dans tout le chapitre $(K,+,\times)$ désigne un corps.

1. La K-algèbre des polynômes à une indéterminée

Théorème.– Un polynôme à une indéterminée à coefficients dans K est un élément de $K^{(\mathbb{N})}$.
C'est donc une suite (a_n) d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang c'est à dire telle que :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ a_n = 0_K$.
Si $P = (a_n)$ est un polynôme alors les scalaires a_k, k décrivant $\mathbb{N}$, sont appelés les coefficients du polynôme P. On note aussi : $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$.
L'ensemble $K^{(\mathbb{N})}$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K est noté $K[X]$.

Remarque : Deux polynômes $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients c'est-à-dire si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

1.1 L'algèbre des polynômes

Soient $P = (a_n)$, $Q = (b_n)$ dans $K[X]$ et λ dans K.
On définit les polynômes $P+Q$, λP et $P \times Q$ par :

$$P + Q = (a_n + b_n),\ \lambda \cdot P = (\lambda a_n) \text{ et } P \times Q = (c_n) \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Il est important de remarquer que si l'addition des polynômes « coïncide » avec l'addition usuelle des suites d'éléments de K. il n'en est pas de même de la multiplication des polynômes. C'est d'ailleurs cette nouvelle multiplication qui fait tout l'intérêt de la notion de polynôme.

Théorème.– $(K[X],+,\times,\cdot)$ est une K-algèbre commutative.

1.2 Notation définitive d'un polynôme

Par définition on pose : $X = (0,1,0,\cdots,0,\cdots)$. X est donc le polynôme à coefficient dans K dont tous les coefficients sont nuls sauf le second (celui d'indice 1) qui lui vaut 1. On constate, en utilisant la définition de la multiplication des polynômes, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, le 1 se situant en $n^{\text{ème}}$ position, étant entendu que l'on numérote les positions en commençant par 0.
X^n est donc le polynôme à coefficient dans K dont tous les coefficients sont nuls sauf le $(n+1)^{\text{ème}}$ (celui d'indice n) qui lui vaut 1.

Théorème.– Pour tout polynôme P de $K[X]$ il existe une unique suite (a_n) d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang telle que $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$. Les a_n, $n \in \mathbb{N}$ sont les coefficients de P.

Remarques

✓ Il faut bien comprendre que le symbole $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ désigne une somme finie de polynômes qui vaut par définition $\sum_{n\in S_P} a_n X^n$ où S_P est l'ensemble fini défini par $S_P = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_K\}$.

✓ Via cette nouvelle notation l'égalité de deux polynômes se traduit de la façon suivante :
$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.
En particulier on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = 0_{K[X]} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.

✓ Les opérations dans la K-algèbre $K[X]$ s'écrivent quant à elles sous la forme :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n \text{ et } \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n.$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) X^n.$$

1.3 Composition de deux polynômes

Définition.– Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et Q deux polynômes de $K[X]$. On appelle composé de P par Q le polynôme noté $P \circ Q$ défini par : $P \circ Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Q^n$.

On obtient $P \circ Q$ à partir du polynôme P en substituant le polynôme Q au polynôme X dans l'expression de P. Pour cette raison le polynôme $P \circ Q$ est aussi noté $P(Q)$.La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $K[X]$. Elle est associative mais pas commutative. Il est à noter que si $P \in K[X]$ alors $P \circ X = P$ ce qui s'écrit encore $P(X) = P$.
Voilà qui justifie que P se note aussi $P(X)$.

1(2)

Fonction polynôme associée à un polynôme

Soit $P=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n \in K[X]$. Pour tout scalaire $x\in K$ on dispose du scalaire $P(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$.

L'application $\widetilde{P}:(x\to P(x))$ de K dans K est appelée fonction polynôme associée au polynôme P.

2. Des outils fondamentaux sur l'algèbre des polynômes

2.1 Degré d'un polynôme

Définition.– Le degré du polynôme $P=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$ de $K[X]$ est l'élément $\deg P$ de $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$ défini par : $\deg P=\max\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\neq 0\}$ si $P\neq 0$ et $\deg P=-\infty$ si $P=0$.

Proposition.– Le polynôme nul est l'unique polynôme de $K[X]$ dont le degré est strictement négatif.

Les polynômes de degré zéro sont les polynômes constants et non nuls.

Définition.– Soit $P=a_pX^p+a_{p-1}X^{p-1}\cdots+a_1X+a_0$ un polynôme de degré $p\in\mathbb{N}$. On a donc $a_p\neq 0$. Le coefficient a_p est appelé coefficient dominant de P.

Le coefficient a_0 est appelé coefficient constant du polynôme P.

Le polynôme P est dit unitaire si et seulement si $a_p=1_K$.

Théorème.– Soit $(P,Q)\in K[X]^2$.

1) $\deg(P+Q)\leq\max(\deg P,\deg Q)$ et il y a égalité si $\deg P\neq\deg Q$.
2) $\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$.
3) $\forall\alpha\in K\setminus\{0_K\}$, $\deg\alpha P=\deg P$.

X **Théorème.–** $(K[X],+,\times)$ est un anneau intègre.

L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(K[X],+,\times)$ est égal à l'ensemble des polynômes constants et non nuls c'est-à-dire à l'ensemble des polynômes de degré zéro.

Polynômes de degré inférieur ou égal à n

Théorème.– Fixons $n\in\mathbb{N}$. Par définition on pose : $K_n[X]=\{P\in K[X] \mid \deg P\leq n\}$.

1) $(K_n[X],+,\cdot)$ est un K espace vectoriel de dimension finie égale à $n+1$.
2) $(1,X,X^2,\cdots,X^n)$ est une base de $K_n[X]$ appelée base canonique de $K_n[X]$.
3) Plus généralement si $(P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $K_n[X]$ telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg P_k=k$ alors $(P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n)$ est une base de $K_n[X]$.

2.2 Division euclidienne

Définition.– Etant donnés des polynômes A et B de $K[X]$, on dit que A divise B dans $K[X]$, on note $A\mid B$, si et seulement si : $\exists Q\in K[X] \mid B=AQ$.

Proposition.– Tout polynôme divise le polynôme nul.

Un polynôme constant et non nul divise n'importe quel polynôme.

X

Proposition.– $\forall(A,B)\in K[X]^2$, $(A\mid B$ et $B\neq 0)\Rightarrow\deg A\leq\deg B$.

Théorème.– (Division euclidienne)

Soit $(A,B)\in K[X]^2$. Si $B\neq 0$ alors : $\exists!(Q,R)\in K[X]^2 \mid A=BQ+R$ et $\deg R<\deg B$.

2.3 Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

Définition.– Un polynôme P de $K[X]$ est dit scindé sur K si et seulement si : ou bien P est constant ou bien P est un produit de polynômes de degré un de $K[X]$.

Remarque : La notion de polynôme scindé est relative au corps K.

Considérons $P=(X-1)^2(X^2+1)$. $P\in\mathbb{R}[X]$ et $P\in\mathbb{C}[X]$.

P est scindé sur $\mathbb{C}$ car $P=(X-1)(X-1)(X-i)(X+i)$ mais P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème.– (Fondamental)

Soit $(x_1,\cdots,x_n)\in K^n$. Pour $p\in[\![1,n]\!]$ on pose : $\sigma_p^{(n)}=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([\![1,n]\!])}\prod_{i\in I}x_i=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n}x_{i_1}\cdots x_{i_p}$.

$$(X-x_1)\cdots(X-x_n)=X^n-\sigma_1^{(n)}X^{n-1}+\sigma_2^{(n)}X^{n-2}-\cdots+(-1)^k\sigma_k^{(n)}X^{n-k}+\cdots+(-1)^n\sigma_n^{(n)}.$$

Autrement dit : $(X-x_1)\cdots(X-x_n)=X^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sigma_k^{(n)}X^{n-k}$.

Remarques

- $\sigma_1^{(2)}=x_1+x_2$.
  $\sigma_2^{(2)}=x_1x_2$.
- $\sigma_1^{(3)}=x_1+x_2+x_3$.
  $\sigma_2^{(3)}=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.
  $\sigma_3^{(3)}=x_1x_2x_3$.

Polynôme scindé de degré 2 :

Soit $P \in K[X]$ de degré 2 scindé sur K.

On a donc : $P = aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$.

Les relations entre coefficients et racines s'écrivent :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Polynôme scindé de degré 3 :

Soit $P \in K[X]$ de degré 3 scindé sur K.

On a donc : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$

Les relations entre coefficients et racines s'écrivent :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}.$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}.$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}.$$

3. Racines d'un polynôme

3.1 Définition et caractérisation

Définition.– On dit que $a \in K$ est une racine de $P \in K[X]$ dans K si et seulement si $P(a) = 0_K$.

Théorème.– Si $a \in K$ et si $P \in K[X]$ alors : a est racine de P dans K $\Leftrightarrow$ $X - a \mid P$ dans $K[X]$.

Remarque : La notion de racine est relative au corps K.

Considérons $P = (X-1)^2(X^2+1)$. $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

1 est l'unique racine de P dans $\mathbb{R}$. $1, i, -i$ sont les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Définition.– Soient P un polynôme non nul de $K[X]$ et $a \in K$.

Le plus grand entier naturel k vérifiant $(X-a)^k \mid P$ est appelé multiplicité de a dans P.

Il est noté $m_P(a)$. Lorsque $m_P(a) = 1$ on dit que a est une racine simple de P et lorsque $m_P(a) = 2$ on dit que a est une racine double de P.

Proposition.– Soient P un polynôme non nul de $K[X]$ et $a \in K$.

1) $m_P(a) = 0 \Leftrightarrow P(a) \neq 0_K$.

2) $m_P(a) \geq 1 \Leftrightarrow P(a) = 0_K$.

3.2 Nombre de racines d'un polynôme non nul

Proposition.– Soit $P \in K[X]$. Si $a_1, \cdots, a_p$ sont des racines deux à deux distinctes de P dans K alors $(X - a_1)^{m_P(a_1)} \cdots (X - a_p)^{m_P(a_p)} \mid P$ dans $K[X]$.

Théorème.–

1) Le nombre de racines dans K d'un polynôme non nul de $K[X]$ est majoré par son degré.

2) Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $(n+1)$ racines distinctes dans K est le polynôme nul.

3) Un polynôme de $K[X]$ qui admet une infinité de racines dans K est le polynôme nul.

Théorème.– (D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

4. Dérivation d'un polynôme

On suppose dans ce paragraphe que le corps K est contenu dans $\mathbb{C}$.

Définition.– Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$.

Le polynôme $P' = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n X^{n-1}$ est appelé polynôme dérivé du polynôme P et est noté P'.

Proposition.–

1) Si $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$ alors $P' = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} X^n$.

2) Le polynôme P est constant si et seulement si $P' = 0$.

3) Si le polynôme P est non constant alors P s'écrit $P = a_p X^p + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $p = \deg P \geq 1$ et dans ces conditions : $P' = p a_p X^{p-1} + \cdots + 2a_2 X + a_1$.

4) Pour tout $P \in K[X]$, $\deg P' \leq \deg P - 1$ et il y a égalité si P est non constant.

Proposition.– Soient $(P,Q) \in K[X]^2$ et $(\alpha,\beta) \in K^2$.

1) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$.

2) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Remarque : La dérivation des polynômes a été définie de manière algébrique et ne fait absolument pas appel à des notions d'analyse. En particulier la notion de limite est absente de la définition.

4.1 Dérivations successives d'un polynôme

On considère $D : K[X] \to K[X]$ définie par : $D(P) = P'$.

L'application D est appelé opérateur de dérivation dans $K[X]$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose : $D^k = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k \text{ fois}}$. Enfin on pose : $D^0 = Id_{K[X]}$.

Si $P \in K[X]$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $D^k(P)$ est appelé polynôme dérivé $k^{\text{ième}}$ de P et est noté $P^{(k)}$.

Proposition.–

1) $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\forall P \in K[X]$, $P^{(p+q)} = \left(P^{(p)}\right)^{(q)}$.

2) Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

3) Soient $P \in K[X]$ et $k \in \mathbb{N}$.

4) Si $k > \deg P$ alors $P^{(k)} = 0$ et si $1 \le k \le \deg P$ alors $\deg P^{(k)} = \deg P - k$.

5) $\forall (P,Q) \in K[X]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$. (Formule de Leibniz)

4.2 Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème.– (Formule de Taylor pour les polynômes)

Pour $P \in K[X]$ et $a \in K$ on a : $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$ et $P(X+a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!} X^n$.

Théorème.– Soient $P \in K[X] \setminus \{0\}$ et $a \in K$. On pose : $k = m_P(a)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $(X-a)^k$ divise P dans $K[X]$ et $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P dans $K[X]$.

2) $\exists Q \in K[X] \mid P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$.

3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

5. Polynômes d'interpolation de Lagrange

Théorème.– On considère $n+1$ scalaires $a_0, \cdots, a_n$ deux à deux distincts.

Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$ on pose : $L_j = \prod_{k\in[\![0,n]\!]\setminus\{j\}} \dfrac{(X-a_k)}{a_j - a_k}$.

1) L_j est l'unique polynôme de $K_n[X]$ qui vérifie : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_j(a_i) = \delta_{ij}$. Le polynôme L_j est appelé $j^{\text{ième}}$ polynôme interpolateur de Lagrange associé à la famille $(a_0, \cdots, a_n)$.

2) $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $K_n[X]$.

3) $\forall P \in K_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k$.

Théorème.– On considère $(a_0, a_1 \cdots, a_n)$ et $(b_0, b_1 \cdots, b_n)$ dans K^{n+1}

Si $a_0, a_1 \cdots, a_n$ sont deux à deux distincts alors il existe un unique polynôme $P \in K_n[X]$ vérifiant : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

Le polynôme P est appelé polynôme interpolateur de $(b_0, b_1 \cdots, b_n)$ associé à la famille $(a_0, \cdots, a_n)$.

Il est donné par $P = \sum_{j=0}^{n} b_j L_j$ où L_j est le $j^{\text{ième}}$ polynôme interpolateur de Lagrange associé à la famille $(a_0, \cdots, a_n)$.

Corollaire.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une application de I dans $\mathbb{K}$.

Si $x_0, x_1 \cdots, x_n$ sont $n+1$ éléments deux à deux distincts de I alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n qui prend les mêmes valeurs que f aux points $x_0, x_1 \cdots, x_n$.

Le polynôme P est donné par $P = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j$ où L_j est le $j^{\text{ième}}$ polynôme interpolateur de Lagrange associé à la famille $(x_0, \cdots, x_n)$.

Exemples : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une application avec $a < b$.

- L'unique polynôme P de $\mathbb{K}_1[X]$ qui vérifie $P(a) = f(a)$ et $P(b) = f(b)$ est donné par :
  $P = f(a)\dfrac{X-b}{a-b} + f(b)\dfrac{X-a}{b-a}$.
- On pose $c = \dfrac{a+b}{2}$. On a donc $a < c < b$.
  L'unique polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$ qui vérifie $P(a) = f(a)$, $P(c) = f(c)$ et $P(b) = f(b)$ est donné par : $P = f(a)\dfrac{(X-c)(X-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\dfrac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\dfrac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$.

Jean le rond D'Alembert (1717-1783)
Abandonné à sa naissance sur les marches de l'église parisienne de Saint Jean le Rond (qui lui a donné son prénom), il est recueilli par la femme d'un artisan-vitrier qui l'élèvera comme son fils. En retour, d'Alembert vivra avec elle jusqu'à la mort de celle-ci (soit pendant 48 ans!). D'Alembert se révèle particulièrement doué pour les mathématiques et étudie avec succès le droit et la médecine. Après des premiers mémoires sur la mécanique des fluides et sur le calcul intégral, il est admis à 24 ans à l'Académie des Sciences comme associé astronome adjoint. En 1743, il publie son important Traité de la Dynamique, où il améliore la définition d'une force, et donne ce qu'on appelle désormais le principe de d'Alembert. En 1747, il écrit un article sur les cordes vibrantes, où, pour la première fois, il donne et résout l'équation aux dérivées partielles qui régit la propagation des ondes sonores. A compter de 1746, d'Alembert se lance avec Diderot dans une aventure monumentale, la rédaction de l'Encyclopédie. La fin de la vie de d'Alembert est marqué par la maladie, et il décède le 29 octobre 1783 des suites de ces maladies. Laissons la conclusion à sa mère adoptive, peu satisfaite des activités de son fils : "Qu'est-ce qu'un philosophe? C'est un fou qui se tourmente toute sa vie pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus".

Gauss (1777-1855)
Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick, est considéré par ses pairs comme le prince des mathématiciens. Il est à la fois le dernier des classiques, et le premier des modernes, c'est-à-dire qu'il a résolu les problèmes les plus classiques avec les méthodes les plus modernes. Gauss était un génie particulièrement précoce : à 5 ans, le maître demandait de calculer 1+2+...+100, et Gauss inscrivit immédiatement le résultat sur son ardoise : ce n'est pas qu'il fut un génial calculateur, mais il avait trouvé une formule générale pour calculer de telles sommes. A l'université, à 19 ans, il fut le premier à démontrer la loi de réciprocité quadratique, ce que ni Euler, ni Legendre n'avaient réussi à établir. Parmi ses autres prouesses, on peut citer la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dans sa thèse de doctorat en 1799 ainsi que l'invention de la théorie des congruences. Le génie de Gauss se manifesta dans d'autres domaines : on lui doit d'importants travaux en électricité, en optique, en théorie du potentiel. Le "gauss" est ainsi devenu l'unité d'induction magnétique.

Brook Taylor (1685-1731)
Mathématicien anglais, Taylor énonce en 1715 la célèbre formule qui porte aujourd'hui son nom. Il l'énonce sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots$ sans faire figurer de reste et sans se soucier des problèmes de convergence que peut poser une telle formulation. L'importance de ce résultat n'est véritablement reconnu qu'en 1772 date à laquelle Lagrange le qualifie de « principe de base du calcul différentiel ».