Notion d'espace vectoriel normé

1. Norme sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ($\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition.– On appelle norme sur E toute application N de E dans $\underline{\mathbb{R}^+}$ telle que :

1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. (Homogénéïté)

2) $\forall (x,y) \in E^2, \ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. (Sous-additivité)

3) $\forall x \in E, \ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$. (Séparation)

Un espace vectoriel normé est un couple (E,N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.

Théorème.– Soient N est une norme sur E et $(x,y) \in E^2$.

1) $N(0_E) = 0$.

2) $|N(x) - N(y)| \leq N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

3) $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq N(x) + N(y)$.

Proposition.– $\mathbb{K}$ muni de $|\ |$ est un espace vectoriel normé.

Les normes sur $\mathbb{K}$ sont les $\alpha|\ |$ où $\alpha > 0$.

1.1 Notion de distance dans un espace vectoriel normé

Soit $\|\ \|$ une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour $(x,y) \in E^2$ on pose : $d(x,y) = \|y - x\|$.

Le réel positif $d(x,y)$ est appelé distance de x à y. Cette notion de distance dépend de la norme considérée sur E. Si on change la norme alors la distance associée est modifiée.

Proposition.– Soit $(x,y,z) \in E^3$.

1) $d(x,y) = d(y,x)$. (Symétrie)

2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (Inégalité triangulaire)

3) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. (Séparation)

Définition.– Etant donnés un vecteur x de E et une partie non vide A de E, le réel $d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$ est appelé distance du vecteur x à la partie A.

Proposition.– Si A est une partie non vide de E alors :

$\forall (x,y) \in E^2, \ |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

<u>Remarque</u> : La notion de distance peut se définir sur un ensemble quelconque. Si X est un ensemble alors on appelle distance sur X toute application $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall (x,y) \in X^2, \ d(x,y) = d(y,x)$. (Symétrie)

2) $\forall (x,y,z) \in X^3, \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (Inégalité triangulaire)

3) $\forall (x,y) \in X^2, \ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. (Séparation)

1.2 Comparaison de normes

Définition.– On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si : $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \ N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$.

Théorème.– Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

1.3 Notion de partie bornée dans un espace vectoriel normé

Définition.– Une partie A de E est dite bornée dans $(E, \|\ \|)$ si et seulement si :

$\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \ \forall x \in A, \ \|x\| \leq M$.

<u>Remarque</u> : La notion de partie bornée dépend de la norme $\|\ \|$ considérée sur E.

Si l'on change la norme sur E alors à priori on change la notion de partie bornée.

Proposition.– Soient A une partie de E et N_1, N_2 deux normes <u>équivalentes</u> sur E.

A est bornée dans $(E, N_1) \Leftrightarrow$ A est bornée dans (E, N_2).

<u>Remarque</u> : Si E est de dimension finie alors la notion de partie bornée est indépendante des normes considérées sur E vu qu'elles sont équivalentes.

2. Construction de normes

2.1 Norme associée à un produit scalaire

Théorème.– (Norme associée à un produit scalaire)

Soit $(\bullet|\bullet)$ un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour $x \in E$ on pose : $\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}$.

1) $\|\ \|$ est une norme sur E dite associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$.

2) Pour $(x,y) \in E^2$ on a : $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow (x = 0_E)$ ou $(\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid y = \lambda x)$.

Théorème.– Soit $(E,(\bullet|\bullet))$ un espace préhilbertien réel. La norme associée à $(\bullet|\bullet)$ est notée $\|\ \|$.

Soient F un sous espace vectoriel de E de dimension finie et x un vecteur de E.

1) $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$

2) $\forall\, y \in F \setminus \{p_F(x)\}$, $d(x,F) < \|x - y\|$.

2.2 Normes associées à une base en dimension finie

Théorème.– Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1,\cdots,e_p)$ une base de E.

Pour $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ on pose : $N_{B,1}(x) = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|$, $N_{B,2}(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|^2}$ et $N_{B,\infty}(x) = \underset{1\le i\le p}{\mathrm{Max}} |\alpha_i|$.

$N_{B,1}, N_{B,2}$ et $N_{B,\infty}$ sont des normes sur E.

Remarque : Pour tout $x \in E$ on a : $N_{B,1}(x) \le \sqrt{p}\, N_{B,2}(x) \le p\, N_{B,\infty}(x) \le p\, N_{B,1}(x)$.

Les normes $N_{B,1}, N_{B,2}$ et $N_{B,\infty}$ sont donc équivalentes, ce que l'on savait déjà puisque $\dim E < +\infty$.

2.3 Norme produit

Proposition.– Soient $(E_1,N_1),\cdots,(E_p,N_p)$ des espaces vectoriels normés.

L'application $N : E_1 \times \cdots \times E_p \to \mathbb{R}^+$ définie par $N(x_1,\cdots,x_p) = \max(N_1(x_1),\cdots,N_p(x_p))$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_p$. Elle est appelée norme produit des normes $N_1,\cdots,N_p$. L'espace vectoriel normé $(E_1 \times \cdots \times E_p, N)$ est appelé espace vectoriel normé produit des espaces vectoriels normés $(E_1,N_1),\cdots,(E_p,N_p)$.

Remarques : Lorsque l'on munit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme N de la proposition on dit que l'on munit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de sa structure d'espace vectoriel normé produit. L'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ est l'espace vectoriel normé produit des espaces vectoriels normés $(\mathbb{K},|\ |),\cdots,(\mathbb{K},|\ |)$.

3. Boules d'un espace vectoriel normé

Définition.– Soient a un vecteur de E et r un réel strictement positif. Par définition on pose :

$BO(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$.

$BF(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| \le r\}$

$S(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$.

Les ensembles $BO(a,r)$, $BF(a,r)$, $S(a,r)$ sont respectivement appelés boule ouverte, boule fermée et sphère de centre a et de rayon r.

Remarque : Les notions de boules et de sphères dépendent de la norme $\|\ \|$ considérée sur E. Si l'on change de norme sur E alors les boules et les sphères sont modifiées.

Exemple : Soient $\|\ \|_1, \|\ \|_2, \|\ \|_\infty$ les normes de $\mathbb{R}^2$ associées à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$.

On désigne par B_1 (resp B_2, resp B_∞) la boule fermée de centre $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ et de rayon un de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1)$, (resp $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$, resp $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$.

Géométriquement B_1 est un losange, B_2 un disque et B_∞ un carré.

Proposition.– $BO(a,r)$ et $BF(a,r)$ sont des parties convexes de E.

4. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels normés

4.1 L'espace vectoriel normé des applications bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$

Théorème.– Soit D est un ensemble non vide quelconque.

1) $(B(D,\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

2) $B(D,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre et $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ pour tout $(f,g) \in B(D,\mathbb{K})^2$.

Proposition.– Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ on a : $\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Sup}} |u_n|$.

1) $(\ell^\infty(\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

2) $\ell^\infty(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$-algèbre et $\|uv\|_\infty \le \|u\|_\infty \|v\|_\infty$ pour tout $(u,v) \in \ell^\infty(\mathbb{K})^2$.

4.2 Normes sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Définition.– Pour $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ on pose :

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\quad \|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\quad\text{et}\quad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|.$$

Proposition.– $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Comme $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie elles sont deux à deux équivalentes.

4.3 Normes sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition.– Pour $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ on pose :

$$\|A\|_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|,\quad \|A\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2}\quad\text{et}\quad \|A\|_\infty=\max_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}|a_{ij}|.$$

Proposition.– $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Comme $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie ces trois normes sont équivalentes.

Proposition.– $\forall(A,B)\in M_n(\mathbb{K})^2,\ \|AB\|_\infty\le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Pour $A\in M_n(\mathbb{K})$ on pose : $N(A)=n\|A\|_\infty$.

N est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ qui vérifie : $\forall(A,B)\in M_n(\mathbb{K})^2,\ N(AB)\le N(A)N(B)$.

4.4 Normes sur $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

Définition.– Pour $P=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n\in\mathbb{K}[X]$ on pose :

$$\|P\|_1=\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|,\quad \|P\|_2=\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2}\quad\text{et}\quad \|P\|_\infty=\operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|a_n|.$$

Proposition.– $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur $K[X]$.

On a les inégalités $\|\ \|_\infty\le\|\ \|_2\le\|\ \|_1$ mais ces trois normes sont deux à deux non équivalentes.

4.5 Normes sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^0([a,b],\mathbb{K})$

Définition.– Pour $f\in M^0([a,b],\mathbb{K})$ on pose :

$$\|f\|_1=\int_a^b|f|,\quad \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f|^2}.\quad\text{et}\quad \|f\|_\infty=\operatorname{Sup}_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Proposition.–

1) $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ sont des semi-normes sur $M^0([a,b],\mathbb{K})$. $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $M^0([a,b],\mathbb{K})$.
2) $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$.
3) $\|\ \|_1\le\sqrt{b-a}\,\|\ \|_2$ et $\|\ \|_2\le\sqrt{b-a}\,\|\ \|_\infty$
4) Les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

Définition.–

Sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$, la norme $\|\ \|_1$ est appelée norme de la convergence en moyenne.

Sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$, la norme $\|\ \|_2$ est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$, la norme $\|\ \|_\infty$ est appelée norme de la convergence uniforme.

5. $\ell^1(\mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{K})$: des espaces de suites célèbres (HP)

$\ell^1(\mathbb{K})=\left\{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\mid \sum|u_n|\text{ converge}\right\}$.

$\ell^2(\mathbb{K})=\left\{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\mid \sum|u_n|^2\text{ converge}\right\}$.

$\ell^\infty(\mathbb{K})=\left\{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\mid (u_n)\text{ est bornée}\right\}$.

Proposition.– $\ell^1(\mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Proposition.– Pour $u=(u_n)$ et $v=(v_n)$ dans $\ell^2(\mathbb{R})$ on pose : $(u\mid v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{R})$.

Proposition.– Pour $u=(u_n)\in\ell^1(\mathbb{K})$ on pose : $\|u\|_1=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$.

Pour $u=(u_n)\in\ell^2(\mathbb{K})$ on pose : $\|u\|_2=\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2}$.

Pour $u=(u_n)\in\ell^\infty(\mathbb{K})$ on pose : $\|u\|_\infty=\operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

1) $(\ell^1(\mathbb{K}),\|\ \|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{K}),\|\ \|_2)$ et $(\ell^\infty(\mathbb{K}),\|\ \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.
2) On a les inclusions : $\ell^1(\mathbb{K})\subset\ell^2(\mathbb{K})\subset\ell^\infty(\mathbb{K})$.
3) Si $(u,v)\in(\ell^2(\mathbb{K}))^2$ alors $uv\in\ell^1(\mathbb{K})$ et $\|uv\|_1\le\|u\|_2\|v\|_2$.

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soit $(E,\| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

Une suite d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Si $x : \mathbb{N} \to E$ est une suite d'éléments de E, le vecteur $x(n)$ est noté x_n et la suite x est notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Suites convergentes, suites bornées dans $(E,\| \ \|)$

Définition.– Soient (x_n) une suite d'éléments de E et a un vecteur de E.
On dit que (x_n) tend vers a dans $(E,\| \ \|)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\| = 0$.

Théorème.– Soient a, b deux vecteurs de E et (x_n) une suite d'éléments de E.
Si (x_n) tend vers a et vers b dans $(E,\| \ \|)$ alors $a = b$.

Remarques :

- ✓ La notion de « tendre vers » est une notion qui dépend de la norme $\| \ \|$ considérée sur E.
  Si l'on change la norme alors à priori on change la notion de « tendre vers ».
- ✓ Si (x_n) tend vers a dans $(E,\| \ \|)$ alors a est unique et est appelé limite dans $(E,\| \ \|)$ de (x_n).
- ✓ Pour exprimer que (x_n) tend vers a dans $(E,\| \ \|)$ on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ dans $(E,\| \ \|)$.

Définition.– Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$.
La suite (x_n) est dite convergente dans $(E,\| \ \|)$ ssi il existe un vecteur de E vers lequel (x_n) tend.
Elle est dite divergente dans $(E,\| \ \|)$ si et seulement si elle n'est pas convergente dans $(E,\| \ \|)$.
La suite (x_n) est dite bornée dans $(E,\| \ \|)$ si et seulement si la suite $(\|x_n\|)$ est majorée.

Remarque : Les notions de suite bornée et de suite convergente dépendent de la norme $\| \ \|$ considérée sur E. Si l'on change la norme alors à priori on change les notions de suite bornée et de suite convergente.

Proposition.– Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $a \in E$ et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.

1) (x_n) est bornée dans $(E,N_2) \Leftrightarrow (x_n)$ est bornée dans (E,N_2).
2) (x_n) tend vers a dans $(E,N_1) \Leftrightarrow (x_n)$ tend vers a dans (E,N_2).
3) (x_n) est convergente dans $(E,N_2) \Leftrightarrow (x_n)$ est convergente dans (E,N_1).

Remarque : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors les notions de suite bornée, de suite qui tend vers a et de suite convergente sont indépendantes des normes considérées sur E vu qu'elles sont équivalentes. S'agissant des concepts qui viennent d'être évoqués, il n'est pas utile, dans un espace vectoriel de dimension finie, de préciser la norme que l'on considère.

Interprétation de la convergence uniforme en termes d'espace vectoriel normé

$(B(D,\mathbb{K}),\| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.
Soient (f_n) une suite d'éléments de $B(D,\mathbb{K})$ et $f \in B(D,\mathbb{K})$.
Dire que (f_n) converge uniformément vers f revient à dire que (f_n) converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(B(D,\mathbb{K}),\| \ \|_\infty)$.
Cette interprétation ne vaut que si les applications f_n et f sont bornées.

2. Propriétés des suites convergentes

Proposition.– Soient (x_n) une suite d'éléments de E et a un vecteur de E.

1) Si (x_n) est convergente alors (x_n) est bornée.
2) Si $\lim x_n = a$ alors $\lim\|x_n\| = \|a\|$.
3) Si $\lim x_n = a$ alors pour toute suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ de la suite (x_n) on a $\lim x_{\varphi(n)} = a$.
4) $\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim x_{2n} = a$ et $\lim x_{2n+1} = a$.

Proposition.– Soient (x_n), (y_n) dans $E^{\mathbb{N}}$, (α_n), (β_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et α, β dans $\mathbb{K}$.
(x_n) et (y_n) sont donc des suites de vecteurs et (α_n), (β_n) des suites de scalaires.

1) Si (x_n), (y_n), (α_n), (β_n) sont convergentes alors $(\alpha_n x_n + \beta_n y_n)$ est convergente et :
   $\lim(\alpha_n x_n + \beta_n y_n) = (\lim \alpha_n)(\lim x_n) + (\lim \beta_n)(\lim y_n)$.
2) Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes alors la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ est convergente et :
   $\lim(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim x_n + \beta \lim y_n$.

Proposition.– Soient $\left(E,\|\ \|_E\right)$ et $\left(F,\|\ \|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés.

On munit $E\times F$ de sa structure d'espace vectoriel normé produit.

Si $\left((x_n,y_n)\right)$ est une suite d'éléments de $E\times F$ et si $(a,b)\in E\times F$ alors :

$\lim(x_n,y_n)=(a,b)\Leftrightarrow \lim x_n=a$ et $\lim y_n=b$.

Remarque : Le résultat ci-dessus se généralise au cas de p espaces vectoriels normés.

2.1 Convergence en dimension finie

Proposition.– On suppose que $\dim E<+\infty$ et on considère une base $B=(e_1,\cdots,e_p)$ de E.

Si $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ et si $a\in E$ alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall j\in[\![1,p]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} e_j^*(x_n)=e_j^*(a)$.

2.2 Convergence des suites de matrices

Proposition.– Soient $A=(a_{ij})\in M_{np}(\mathbb{K})$ et (A_k) une suite de matrices de $M_{np}(\mathbb{K})$ avec $A_k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)$. La suite (A_k) tend vers A dans $M_{np}(\mathbb{K})$ si et seulement si : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ \lim\limits_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$.

Proposition.– Soient $(A_k),(B_k)$ dans $M_n(\mathbb{K})^2$ et A,B dans $M_n(\mathbb{K})$.

Si $\lim A_k=A$ et $\lim B_k=B$ dans $M_n(\mathbb{K})$ alors $\lim A_kB_k=AB$ dans $M_n(\mathbb{K})$.

3. Valeur d'adhérence d'une suite

Définition.– Soient $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ et $a\in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de (x_n) dans $\left(E,\|\ \|\right)$ si et seulement si il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) qui converge dans $\left(E,\|\ \|\right)$ vers a.

Remarque : La notion valeur d'adhérence est une notion qui dépend de la norme $\|\ \|$ considérée sur E. Si l'on change la norme alors on change la notion de valeur d'adhérence.

Proposition.– Soient $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$, $a\in E$ et N_1,N_2 deux normes équivalentes sur E.

a est valeur d'adhérence de (x_n) dans $(E,N_1)\Leftrightarrow a$ est valeur d'adhérence de (x_n) dans (E,N_2)

Proposition.– Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$.

1) Une suite convergente admet sa limite pour unique valeur d'adhérence.
2) Une suite qui admet deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

Exemple : La suite réelle $\left((-1)^n\right)$ admet exactement deux valeurs d'adhérence dans $(\mathbb{R},|\ |)$.

Théorème.– Dans un espace vectoriel normé de dimension finie :

1) Une suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.
2) Une suite bornée est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Définitions et notations

Définition.– Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

La suite (U_n) est appelée série de terme général u_n et est notée $\sum u_n$.

Dire que la série $\sum u_n$ est convergente (resp divergente) dans $(E, \| \ \|_E)$ c'est donc dire que la suite (U_n) est convergente (resp divergente) dans $(E, \| \ \|_E)$.

Le vecteur U_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$. En cas de convergence de la série $\sum u_n$, le vecteur $\lim\limits_{N \to +\infty} U_N$ est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelé somme de la série $\sum u_n$.

<u>Remarque</u> : La convergence d'une série d'éléments de E est une notion qui dépend de la norme $\| \ \|$ sauf bien sûr si $\dim E < +\infty$ car alors toutes les normes sont équivalentes sur E.

<u>Reste d'ordre n d'une série convergente</u>

Soit (u_n) une suite d'éléments de E telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note U la somme de la série et U_n sa somme partielle d'ordre n.

On appelle reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ le vecteur noté R_n défini par : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = U - U_n$ et en particulier : $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0_E$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = R_{n-1} - R_n = U_n - U_{n-1}$.

2. Séries convergentes

Proposition.– Soient (u_n) une suite d'éléments de E et $\alpha \in \mathbb{K}$.

1) Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) tend vers 0_E.

2) Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0_E alors la série $\sum u_n$ diverge.
   Dans un tel cas de figure on parle de divergence grossière de la série $\sum u_n$.

3) La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n-1})$ converge.

Proposition.– Soient (u_n), (v_n) deux suites d'éléments de E et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors les séries $\sum (u_n + v_n)$ et $\sum \alpha u_n$ le sont aussi et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

<u>Remarque</u> : Si la série $\sum u_n$ converge et si la série $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge. Si $\sum u_n$ diverge et si $\sum v_n$ converge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Si $\sum u_n$ diverge et si $\sum v_n$ diverge alors on ne peut rien dire à priori sur la convergence éventuelle de la série $\sum (u_n + v_n)$. Il se peut notamment que la série $\sum (u_n + v_n)$ converge et dans ces conditions il ne faut surtout pas écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ car les deux derniers symboles n'en pas de sens.

Proposition.– On suppose que E est de dimension finie et on considère une base $B = (e_1, \cdots, e_p)$ de E. Soit (u_n) une suite d'éléments de E. La série vectorielle $\sum u_n$ converge dans E si et seulement si pour tout $j \in [1, p]$ la série numérique $\sum e_j^*(u_n)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Lorsque ces conditions sont réunies on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_1^*(u_n) \right) e_1 + \cdots + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_p^*(u_n) \right) e_p$.

<u>Remarque</u> : En cas de convergence on a donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{p} e_j^*(u_n) e_j \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_j^*(u_n) \right) e_j$.

3. Séries absolument convergentes

Définition.– Soit (u_n) une suite d'éléments de E.

On dit que la série vectorielle $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série de réels positifs $\sum \|u_n\|_E$ est convergente.

On dit que la série $\sum u_n$ est semi convergente si et seulement si $\sum u_n$ est convergente et non absolument convergente.

Théorème.– Soit (u_n) une suite d'éléments de E. Si $\dim E < +\infty$ et si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente et on a : $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

1

4. Exponentielle d'une matrice

$(M_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative pour $n \geq 2$.

L'espace vectoriel $(M_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ étant de dimension finie toutes les normes y sont équivalentes et toute série absolument convergente à termes dans $M_n(\mathbb{K})$ est convergente.

Théorème - définition.– (Série exponentielle dans $M_n(\mathbb{K})$)

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

La matrice $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est appelée exponentielle de A et est notée $\mathrm{Exp}(A)$ ou encore e^A.

Théorème.– Soient $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

1) Si $AB = BA$ alors $\mathrm{Exp}(A+B) = \mathrm{Exp}(A) \times \mathrm{Exp}(B)$.

2) La matrice $\mathrm{Exp}(A)$ est inversible $\mathrm{Exp}(A)^{-1} = \mathrm{Exp}(-A)$.

5. Exponentielle d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

$(L(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative pour $\dim E \geq 2$. Il faut donc prendre garde à ce pour a et b dans $L(E)$ on a à priori $a \circ b \neq b \circ a$.

L'espace vectoriel $(L(E),+,\cdot)$ étant de dimension finie toutes les normes y sont équivalentes et toute série absolument convergente à termes dans $L(E)$ est convergente.

Théorème - définition.– (Série exponentielle dans $L(E)$)

Pour tout $a \in L(E)$ la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.

L'endomorphisme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ est appelée exponentielle de a et est notée $\mathrm{Exp}(a)$ ou encore e^a.

Proposition.– Soient $a \in L(E)$. Si B est une base de E alors $M_B(\mathrm{Exp}(a)) = \mathrm{Exp}(M_B(a))$.

Théorème.– Soient $(a,b) \in L(E)^2$.

1) Si $a \circ b = b \circ a$ alors $\mathrm{Exp}(a+b) = \mathrm{Exp}(a) \circ \mathrm{Exp}(b)$.

2) L'endomorphisme $\mathrm{Exp}(a)$ est bijectif et $\mathrm{Exp}(a)^{-1} = \mathrm{Exp}(-a)$.

6. Pour aller plus loin (HP)

6.1 Exponentielle de matrices

$\lim_{N\to+\infty} P^{-1} M_N P = P^{-1}(\lim_{N\to+\infty} M_N) P$

car $(M \mapsto P^{-1}MP)$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$ (linéaire en dimension finie)

Théorème.– Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\lim_{k\to+\infty}\left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k = \mathrm{Exp}(A)$.

Proposition.–

1) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}\mathrm{Exp}(A)P = \mathrm{Exp}(P^{-1}AP)$ et ${}^t\mathrm{Exp}(A) = \mathrm{Exp}({}^tA)$.

2) $\forall D \in D_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Exp}(D) \in D_n(\mathbb{K})$.

Plus précisément : $\forall (\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\mathrm{Exp}(\mathrm{Diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n})$.

3) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(\mathrm{Exp}(A)) = e^{\mathrm{Tr}\,A}$.

6.2 Exponentielle d'endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème.– Si $a \in L(E)$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{Id}_E + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{Exp}(a)$.

Proposition.–

1) $\forall a \in L(E)$, $\forall u \in GL(E)$, $u^{-1} \circ \mathrm{Exp}(a) \circ u = \mathrm{Exp}(u^{-1} \circ a \circ u)$.

2) $\forall a \in L(E)$, $\det(\mathrm{Exp}(a)) = e^{\mathrm{Tr}\,a}$.

Topologie d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Voisinages d'un point dans un espace vectoriel normé

1.1 Définition et invariance de la notion pour des normes équivalentes

Définition.– Soient a un point de E et V une partie de E.

On dit que V est un voisinage de a dans $(E, \| \ \|)$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $BF(a,r) \subset V$. On note $\mathcal{V}_E(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $(E, \| \ \|)$.

Remarque : La notion de voisinage d'un point dépend de la norme $\| \ \|$ considérée sur E.
Si l'on change la norme alors à priori on change la notion de voisinage.

Proposition.– Soient V une partie de E, a un point de E et N_1, N_2 2 normes équivalentes sur E.
V est un voisinage de a dans $(E, N_1) \Leftrightarrow V$ est un voisinage de a dans (E, N_2).

1.2 Propriétés et premiers exemples

Proposition.– Soit $a \in E$.

1) Tout voisinage de a contient a.
2) Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a.
3) Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.
4) Une réunion (quelconque mais non vide) de voisinages de a est un voisinage de a.

Proposition.– Soit $a \in E$. Pour tout $r > 0$, $BO(a,r)$ et $BF(a,r)$ sont des voisinages de a.

Théorème.– Une suite (x_n) d'éléments de E tend vers $a \in E$ dans $(E, \| \ \|)$ si et seulement si :
$\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ x_n \in V$.

Extension du concept de voisinage à la droite numérique achevée

$(\mathbb{R}, | \ |)$ est un espace vectoriel normé. $\overline{\mathbb{R}}$ qui n'est même pas muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel ne peut bien sûr pas être considéré comme un espace vectoriel normé. On peut néanmoins étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ le concept de voisinage d'un point de la manière suivante.

Définition.– On appelle voisinage de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]-\infty, -P]$ avec $P > 0$.
On appelle voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $[P, +\infty[$ avec $P > 0$.
Etant donné $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $[a - \alpha, a + \alpha]$ avec $\alpha > 0$.

2. Parties ouvertes d'un espace vectoriel normé

2.1 Définition et invariance de la notion pour des normes équivalentes

Définition.– On dit qu'une partie A de E est une partie ouverte de $(E, \| \ \|)$ si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire ssi A vérifie : $\forall a \in A, \exists r_a > 0 \mid BF(a, r_a) \subset A$.

Remarque : La notion de partie ouverte dépend de la norme $\| \ \|$ considérée sur E.
Si l'on change la norme alors à priori on change la notion de partie ouverte.

Proposition.– Soient A une partie de E et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.
A est une partie ouverte de $(E, N_1) \Leftrightarrow A$ est une partie ouverte de (E, N_2).

2.2 Propriétés et premiers exemples

Proposition.–

1) $\varnothing$ et E sont des parties ouvertes.
2) Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.
3) Une réunion quelconque de parties ouvertes est une partie ouverte.

Proposition.– $BO(a,r)$ est une partie ouverte de E.

Exemples

- l'ensemble vide et E sont des parties ouvertes de $(E, \| \ \|)$.
- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'intervalle $]a,b[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, | \ |)$ mais pas $]a,b]$, $[a,b[$ et $[a,b]$. Les intervalles $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$ sont des ouverts de $(\mathbb{R}, | \ |)$ mais pas $]-\infty,a]$ et $[a,+\infty[$.

3. Parties fermées d'un espace vectoriel normé

3.1 Définition et invariance de la notion pour des normes équivalentes

Définition.– On dit qu'une partie A de E est une partie fermée de $(E, \| \ \|)$ si et seulement si A contient les limites de ses suites convergentes.

Remarque : La notion de partie fermée dépend de la norme $\| \ \|$ considérée sur E.
Si l'on change la norme alors à priori on change la notion de partie fermée.

Proposition.– Soient A une partie de E et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.
A est une partie fermée de $(E, N_1) \Leftrightarrow A$ est une partie fermée de (E, N_2).

Remarque :
La terminologie employée pourrait laissée à penser que la notion de partie fermée est le contraire de la notion de partie ouverte. Il n'en est rien !!! En effet, une partie de E peut-être à la fois ouverte et fermée mais aussi ni ouverte, ni fermée. Cela étant dit, comme l'illustre on va le voir dans le paragraphe qui suit, il y a un lien fort entre la notion de partie ouverte et la notion de partie fermée.

3.2 Propriétés et premiers exemples

Théorème.– Soit A une partie de E.
A est une partie fermée de $(E, \| \ \|)$ si et seulement si $E \setminus A$ est une partie ouverte de $(E, \| \ \|)$.
A est une partie ouverte de $(E, \| \ \|)$ si et seulement si $E \setminus A$ est une partie fermée de $(E, \| \ \|)$.

Proposition.–
1) $\varnothing$ et E sont des parties fermées.
2) Tout singleton est une partie fermée.
3) Une intersection quelconque de parties fermées est une partie fermée.
4) Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.

Proposition.– $BF(a,r)$ et $S(a,r)$ sont des parties fermées de $(E, \| \ \|)$.

Exemples :

- $\varnothing$ et E sont des fermées de $(E, \| \ \|)$. Toute partie finie de E est une partie fermée de $(E, \| \ \|)$.
- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'intervalle $[a,b]$ est un partie fermé de $(\mathbb{R}, | \ |)$ mais $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$. Les intervalles $]-\infty,a]$ et $[a,+\infty[$ sont des fermés de $(\mathbb{R}, | \ |)$ mais pas $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$.

Théorème.– Si F est un sous espace vectoriel de E et si $\dim F < +\infty$ alors F est un fermé de E.

4. Adhérence d'une partie dans un espace vectoriel normé

4.1 Définition et invariance de la notion pour des normes équivalentes

Définition.– Soient a un point de E et A une partie de E.
On dit que a est adhérent à A ssi il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers a.
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A. L'ensemble $\overline{A}$ est appelée adhérence de A.

Remarque : La notion de point adhérent est une notion qui dépend de la norme considérée sur E.
Si on change la norme alors à priori on change la notion de point adhérent.

Proposition.– Soient A une partie de E, $a \in E$ et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.
a est adhérent à A dans $(E, N_1) \Leftrightarrow a$ est adhérent à A dans (E, N_2).

4.2 Propriétés et premiers exemples

Théorème.– Soient A une partie de E et $a \in E$.
Le point a est adhérent à A si et seulement si : $\forall r > 0$, $BF(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

Proposition.– Soient A et B des parties de E.
$A \subset \overline{A}$ et si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposition.– $\overline{BO(a,r)} = \overline{BF(a,r)} = BF(a,r)$, pour tout $a \in E$ et pour tout $r > 0$.

Exemple : On se place dans $(\mathbb{R},|\ |)$ et on considère trois nombres réels a,b,c tel que $a<b<c$.
$\overline{]a,b[}=\overline{[a,b[}=\overline{]a,b]}=\overline{[a,b]}=[a,b]$, $\overline{]-\infty,a[}=\overline{]-\infty,a]}=]-\infty,a]$,
$\overline{]a,+\infty[}=\overline{[a,+\infty[}=[a,+\infty[$.
$\overline{[a,b[\cup]b,c[}=[a,c]$, $\overline{\mathbb{Q}}=\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

Extension du concept d'adhérence à la droite numérique achevée

$(\mathbb{R},|\ |)$ est un espace vectoriel normé. $\overline{\mathbb{R}}$ qui n'est même pas muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel ne peut bien sûr pas être considéré comme un espace vectoriel normé. On peut néanmoins étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ les concepts de point adhérent et d'adhérence d'une partie.

Définition.– Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
On dit que a est adhérent à A dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers a dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont adhérents à A est noté $\overline{A}^{\overline{\mathbb{R}}}$ et est appelé adhérence de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque : A est une partie de $\mathbb{R}$ mais a peut éventuellement valoir $-\infty$ ou $+\infty$.
A étant une partie de $\mathbb{R}$ on peut parler de son adhérence $\overline{A}^{\mathbb{R}}$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R},|\ |)$ et de son adhérence $\overline{A}^{\overline{\mathbb{R}}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Le rapport entre ces deux notions est le suivant : $\overline{A}^{\mathbb{R}}=\overline{A}^{\overline{\mathbb{R}}}\cap\mathbb{R}$.

5. Partie dense dans un espace vectoriel normé

5.1 Définition et invariance de la notion pour des normes équivalentes

Définition.– Une partie A de E est dite dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite d'éléments de A. Si A et B sont des parties de E telles que $B\subset A$ alors on dit que B est dense dans A si et seulement si tout point de A est limite d'une suite d'éléments de B.

Remarque : La notion de partie dense dépend de la norme $\|\ \|$ considérée sur E.
Si on change la norme alors à priori on change la notion de partie dense.

Proposition.– Soient A,B des parties de E et N_1,N_2 deux normes équivalentes sur E.
B est dense dans A dans $(E,N_1)\Leftrightarrow B$ est dense dans A dans (E,N_2).

5.2 Propriétés et premiers exemples

Proposition.– Soit A une partie de E.
1) A est dense dans E si et seulement si A rencontre toute ouvert non vide de E.
2) A est dense dans E si et seulement si $\overline{A}=E$.

Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

6. Intérieur et frontière - Voisinages, ouverts et fermés relatifs

6.1 Intérieur d'une partie

Définition.– Soient a un point de E et A une partie de E.
On dit que a est un point intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de a dans $(E,\|\ \|)$.
L'ensemble des points de E qui sont intérieurs à A est noté $\mathring{A}$ et est appelé intérieur de A.

Proposition.– Soient A et B des parties de E. On a : $\mathring{A}\subset A$ et si $A\subset B$ alors $\mathring{A}\subset\mathring{B}$.

Proposition.– $\overset{\circ}{\overbrace{BO(a,r)}}=\overset{\circ}{\overbrace{BF(a,r)}}=BO(a,r)$ pour tout $a\in E$ et pour tout $r>0$.

Exemple : On se place dans $(\mathbb{R},|\ |)$ et on considère $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.
$\overset{\circ}{\overbrace{]a,b[}}=\overset{\circ}{\overbrace{[a,b[}}=\overset{\circ}{\overbrace{]a,b]}}=\overset{\circ}{\overbrace{[a,b]}}=]a,b[$
$\overset{\circ}{\overbrace{]-\infty,a[}}=\overset{\circ}{\overbrace{]-\infty,a]}}=]-\infty,a[$ et $\overset{\circ}{\overbrace{]a,+\infty[}}=\overset{\circ}{\overbrace{[a,+\infty[}}=]a,+\infty[$.
$\mathring{\mathbb{Q}}=\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}=\varnothing$.

6.2 Frontière d'une partie

Définition.– La frontière d'une partie A de E est l'ensemble $\overline{A}\setminus\mathring{A}$. On le note $Fr(A)$ ou ∂A.

Proposition.– Pour tout $a\in E$ et pour tout $r>0$: $Fr(BO(a,r))=Fr(BF(a,r))=S(a,r)$.

Exemple : On se place dans $(\mathbb{R},|\ |)$ et on considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
$Fr([a,b]) = Fr([a,b[) = Fr(]a,b]) = Fr(]a,b[) = \{a,b\}$.
$Fr(]-\infty,a[) = Fr(]-\infty,a]) = Fr(]a,+\infty[) = Fr([a,+\infty[) = \{a\}$.
$Fr(\mathbb{Q}) = Fr(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

6.3 Voisinages, ouverts et fermés relatifs à une partie

Définition.– Soient A une partie de E et $a \in A$.
Toute partie de la forme $V \cap A$ où $V \in \mathcal{V}_E(a)$ est appelée un voisinage de a dans A.
Toute partie de la forme $\Omega \cap A$ où Ω est un ouvert de $(E,\|\ \|)$ est appelée un ouvert de A.
Toute partie de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de $(E,\|\ \|)$ est appelée un fermé de A.

Remarque : Un voisinage de a dans A est aussi appelé un voisinage de a relatif à A. Un ouvert de A (resp un fermé de A) est aussi appelé un ouvert relatif à A (resp un fermé relatif à A).

Exemples
- Un voisinage de a relatif à E n'est rien d'autre qu'un voisinage de a dans $(E,\|\ \|)$.
  Un ouvert relatif à E n'est rien d'autre qu'une partie ouverte de $(E,\|\ \|)$.
  Un fermé relatif à E n'est rien d'autre qu'une partie fermée de $(E,\|\ \|)$.
- $[0,1[$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^+$ mais pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.
  $]0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^{*+}$ mais pas un fermé de $\mathbb{R}$.
  $[0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^+$ mais pas un fermé de $\mathbb{R}$.
- Si A est un voisinage de a dans E alors tout voisinage de a dans A est un voisinage de a dans E. Si A est un ouvert de E alors tout ouvert de A est un ouvert de E. Si A est un fermé de E alors tout fermé de A est un fermé de E.

7. Pour aller plus loin (HP)

Proposition.–
1) L'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.
2) L'intérieur d'un sous espace vectoriel distinct de E est vide.
3) Un hyperplan est soit fermé soit dense.

Proposition.– Si A est une partie non vide de E alors : $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Proposition.– Soit A une partie de E.

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}.$$

Proposition.– Soit A une partie de E.
1) $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A.
   A est un fermé de E si et seulement si $\overline{A} = A$.
2) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A.
   A est un ouvert de E si et seulement si $\mathring{A} = A$.
3) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ et par suite $Fr(A)$ est une partie fermée de E.

Proposition.– Soient $(E,(\bullet|\bullet))$ un espace préhilbertien réel et A une partie de E. On munit E de la norme $\|\ \|$ associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ ce qui en fait un espace vectoriel normé.
1) $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E.
2) $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.