Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout le chapitre K désigne un corps et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Notion de dimension (Mpsi)

Définition.– Un K-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ est dit de dimension finie si et seulement si il possède une famille génératrice finie.

Remarques : $E=\{0_E\}$ admet pour famille génératrice la famille vide mais aussi la famille (0_E) constituée du seul vecteur nul. $E=\{0_E\}$ est donc un K-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème – Soit $(E,+,\cdot)$ un K-espace vectoriel de dimension finie.

1) De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E. (théorème de la base extraite)
2) Toute famille libre peut être complétée en une base. (théorème de la base incomplète)

Théorème - Définition.– (Fondamental)
Dans tout K-espace vectoriel E de dimension finie il existe au moins une base et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce cardinal commun est appelé dimension du K-espace vectoriel E et est noté $\dim_K E$.

Remarques : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps K, $\dim_K E$ est simplement noté $\dim E$. Pour exprimer que E est de dimension finie on note $\dim E<+\infty$.

Exemples :

- $E=\{0_E\}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à 0.
- ✓ K^n est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
- ✓ $K_n[X]$ est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à $n+1$.
- ✓ $\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f''+f=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux.
- ✓ $K[X]$ et $C^0([0,1],\mathbb{K})$ ne sont pas des espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition.–

1) Si deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes et si E est de dimension finie alors F est de dimension finie et on a $\dim F=\dim E$.
2) Tout K-espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ est isomorphe à K^n.
3) Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Proposition.– Soit $(a,b)\in K^2$. On pose : $S_{\mathbb{K}}=\{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\}$. $S_{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{K}^2$ et par suite $\dim_{\mathbb{K}} S_{\mathbb{K}}=2$. Plus précisément, l'application $\Phi : S_{\mathbb{K}}\mapsto\mathbb{K}^2$ définie par $\Phi((u_n))=(u_0,u_1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $S_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}^2$.

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1) Tout sous espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a $\dim F\leq\dim E$.
2) Tout sous espace vectoriel F de E possède au moins un supplémentaire dans E et les supplémentaires de F dans E ont la même dimension.
3) Si F et G sont des sous espaces vectoriels de E vérifiant $F\subset G$ et $\dim F=\dim G$ alors $F=G$.

Définition.– Un sous espace affine $\mathcal{W}$ de E est dit de dimension finie si et seulement si sa direction F est sous espace vectoriel de E de dimension finie. Dans ces conditions, la dimension de l'espace vectoriel F est appelée la dimension du sous espace affine $\mathcal{W}$.

Définition.– Une droite vectorielle (resp affine) de E est sous espace vectoriel (resp sous espace affine) de E de dimension finie égale à un. Un plan vectoriel (resp affine) de E est sous espace vectoriel (resp sous espace affine) de E de dimension finie égale à deux.

Rang d'une famille finie de vecteurs :
Soient $x_1,\cdots,x_p$ des vecteurs de E. $\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_p)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. L'entier $\dim\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_p)$ est appelé rang de la famille $(x_1,\cdots,x_p)$ et est noté $\mathrm{rg}(x_1,\cdots,x_p)$.

2. Obtention de bases (Mpsi)

Soit $(E,+,\cdot)$ un K-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème.– Une famille libre de vecteurs de E comporte au plus $n = \dim E$ vecteurs et c'est une base si et seulement si elle en comporte exactement n. Une famille génératrice de E comporte au moins $n = \dim E$ vecteurs et c'est une base si et seulement si elle en comporte exactement n.

Proposition.– Si $E_1, \cdots, E_p$ sont des sous espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et si $B_k = \left(e_1^{(k)}, \cdots, e_{d_k}^{(k)}\right)$ est une base de E_k alors $B = \left(e_1^{(1)}, \cdots, e_{d_1}^{(1)}, \cdots, e_p^{(p)}, \cdots, e_{d_p}^{(p)}\right)$ est une base de E.

Remarque : La base B ainsi obtenue en « concaténant » des bases $B_1, \cdots, B_p$ de $E_1, \cdots, E_p$ est dite adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

Proposition.– Si F est un sous espace vectoriel de E et si $B_F = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de F alors il existe $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, \cdots, e_n$ de E tels que $B = (e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ soit une base de E.

Remarque : La base B ainsi obtenue en « complétant » une base B_F de F est dite adaptée au sous espace vectoriel F. Il s'agit en fait d'une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$.

3. Rang d'une application linéaire (Mpsi)

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux K-espaces vectoriels et $u \in L(E, F)$.

Convention et notation : On définit le symbole $\mathrm{rg}\,u$ de la façon suivante. Si $\mathrm{Im}\,u$ est un espace vectoriel de dimension finie alors $\mathrm{rg}\,u = \dim \mathrm{Im}\,u$ et si $\mathrm{Im}\,u$ n'est pas de dimension finie alors $\mathrm{rg}\,u = +\infty$. Le symbole $\mathrm{rg}\,u$ est appelé rang de l'application linéaire u. On notera bien que $\mathrm{rg}\,u \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour exprimer que $\mathrm{rg}\,u$ appartient à $\mathbb{N}$ on dit que u est de rang fini.

Théorème.–

1) Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E alors S est isomorphe à $\mathrm{Im}\,u$.
2) Si $\dim E < +\infty$ alors u est de rang fini et $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{rg}\,u$. (formule du rang)

Proposition.– (Caractérisation des isomorphismes)

Si les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie et ont la même dimension n alors on a :

1) u bijective $\Leftrightarrow$ u injective $\Leftrightarrow$ u surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\,u = n$.
2) u bijective $\Leftrightarrow$ $\exists\, v \in L(F, E) \mid v \circ u = \mathrm{Id}_E$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, w \in L(F, E) \mid u \circ w = \mathrm{Id}_F$.

Proposition.– (Invariance du rang par composition avec un isomorphisme)

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$.

1) Si v est un isomorphisme de F sur G, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\,u$.
2) Si u est un isomorphisme de E sur F, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\,v$.

4. Calculs de dimensions (Mpsi)

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux K-espaces vectoriels.

Théorème.– (Espace vectoriel produit)

Si $\dim E < +\infty$ et $\dim F < +\infty$ alors $\dim(E \times F) < +\infty$ et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E et si $(f_1, \cdots, f_q)$ est une base de F alors la famille de vecteurs de $E \times F$ $\left((e_1, 0_F), \cdots, (e_p, 0_F), (0_E, f_1), \cdots, (0_E, f_q)\right)$ est une base de $E \times F$.

Remarques :

✓ Il ne faut pas confondre cette formule de calcul avec celle concernant les ensembles finis qui stipule que si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est fini et $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}\,E \times \mathrm{card}\,F$.

✓ La propriété se généralise au cas d'un produit de p espaces vectoriels. Si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim E_k < +\infty$ alors $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) < +\infty$ et $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k$.

Théorème.– (Espace vectoriel des applications linéaires de E dans F)

Si $\dim E < +\infty$ et $\dim F < +\infty$ alors $\dim L(E, F) < +\infty$ et $\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Théorème.– (Formule de Grassman)

Si E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de dimension finie de $(E, +, \cdot)$ alors on a la formule : $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$.

Proposition.– On suppose que $\dim E < +\infty$ et on considère des sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $E = E_1 \oplus E_2$
2) $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
3) $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$ et $E_1 + E_2 = E$.

Corollaire.– Si $\dim E < +\infty$ et si $u \in L(E)$ vérifie $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$ alors $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

Proposition.– Si $\dim E < +\infty$ et si $E_1, \cdots, E_p$ sont des sous espaces vectoriels de E alors :

1) $\dim(E_1 + \cdots + E_p) \leq \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$.
2) La somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe ssi $\dim(E_1 + \cdots + E_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$.

5. Pour aller plus loin (HP)

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in L(E)^2$.

1) $-\dim E + \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.
2) $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.
3) $\operatorname{rg}(u + v) = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \Leftrightarrow (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\}$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v)$.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n et $u \in L(E)$.
Il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$ et $\operatorname{Im} u^{p+1} = \operatorname{Im} u^p$. En particulier $\operatorname{rg} u^{n+1} = \operatorname{rg} u^n$.

Formes linéaires et hyperplans

Dans tout le chapitre $(K,+,\times)$ désigne un corps.

1. Formes linéaires (Mpsi)

Définition.– Soit E un K-espace vectoriel.

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire φ de E dans K.

L'espace $L(E,K)$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé espace dual de E.

Remarque : Le corps $(K,+,\times)$ peut être « vu » comme un K-espace vectoriel.

Il est donc légitime de parler d'application linéaire de E dans K.

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel.

1) Une forme linéaire sur E est soit nulle soit surjective.
2) Si E est de dimension finie alors E^* est de dimension finie et on a $\dim E^* = \dim E$.

Théorème.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Etant donné i dans $[\![1,n]\!]$, on désigne par e_i^* l'application de E dans K qui à tout vecteur x de E associe sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base B.

1) Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, e_i^* est une forme linéaire sur E et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.
2) $(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ est une base de E^*, est notée B^* et est appelée base duale de la base B.
3) $\forall x \in E$, $x = e_1^*(x)e_1 + \cdots + e_n^*(x)e_n$ et $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \varphi(e_1)e_1^* + \cdots + \varphi(e_n)e_n^*$.

Exemples :

- Pour tout $a \in K$, $B_a = \left(1,(X-a),\cdots,(X-a)^n\right)$ est une base de $K_n[X]$. Base duale de B_a ?
- Soient $a_0,\cdots,a_n$ des scalaires deux à deux distincts. On note L_j le $j^{\text{ème}}$ polynôme interpolateur de Lagrange associé à $(a_0,\cdots,a_n)$. $B = (L_0,\cdots,L_n)$ est une base de $K_n[X]$. Base duale de B?

2. Hyperplans (Mpsi)

Soit E un K-espace vectoriel. On notera bien que E n'a pas été supposé de dimension finie.

Définition.– Un hyperplan de E est un sous espace vectoriel de E qui peut s'écrire comme le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Un hyperplan affine de E est un sous espace affine de E dont la direction est un hyperplan de E.

Théorème.– Soit H un sous espace vectoriel de E.

1) Si H est un hyperplan de E alors $H \neq E$ et pour tout $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus Ka$.
2) Si il existe $a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que que $E = H \oplus Ka$ alors H est un hyperplan de E.

Remarque : En termes de droite vectorielle ce résultat se formule de manière équivalente sous la forme : Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle non contenue dans H alors $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan.

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.

1) Si H est un hyperplan de E alors il existe $(a_1,\cdots,a_n) \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ tel que $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ soit une équation de H dans la base B.
2) Si $(a_1,\cdots,a_n) \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ alors la partie de E d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base B est un hyperplan de E.

Remarques :

- ✓ Dire qu'une partie A de E a pour équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base B c'est dire qu'un vecteur x de E de coordonnées $x_1,\cdots,x_n$ dans B appartient à A si et seulement si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
- ✓ On suppose E de dimension 2 et on considère une base $B = (e_1,e_2)$ de E. Les hyperplans (vectoriels) de E sont les droites vectorielles. Ce sont les parties de E qui admettent une équation dans B de la forme $ax + by = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Les hyperplans affines de E sont les droites affines. Ce sont les parties de E qui admettent une équation dans B de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.
- ✓ On suppose E de dimension 3 et on considère une base $B = (e_1,e_2,e_3)$ de E. Les hyperplans (vectoriels) de E sont les plans vectoriels. Ce sont les parties de E qui admettent une équation dans B de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Les hyperplans affines de E sont les plans affines. Ce sont parties de E qui admettent une équation dans B de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n et $m \in \mathbb{N}$.

1) Les hyperplans de E sont les sous espaces vectoriels de E de dimension $n-1$.
2) Une intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$.
3) Tout sous espace vectoriel de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.

3. Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème.– (Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien)
Si $(E,(\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien et si φ est une forme linéaire sur E alors il existe un unique vecteur a de E tel que $\varphi = (a\,|\,\cdot)$.

Application : produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension trois
Soient E un espace euclidien orienté de dimension trois et $(x,y) \in E^2$.

Théorème-définition.– Il existe un unique vecteur v de E vérifiant : $\forall z \in E,\ [x,y,z] = (v\,|\,z)$.
Cet unique vecteur est appelé produit vectoriel de x et de y et est noté $x \wedge y$. Par définition même on a : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ [x,y,z] = (x \wedge y\,|\,z)$.

4. Pour aller plus loin (HP)

Soit E un K-espace vectoriel.

4.1 Une nouvelle caractérisation des hyperplans

Définition.– Un sous espace vectoriel F de E est dit maximal si et seulement si il est distinct de E et si les seuls sous espaces vectoriels de E qui contiennent F sont F et E

Théorème.– Une partie H de E est un hyperplan de E si et seulement si H est un sous espace vectoriel maximal de E.

4.2 Quelques propriétés des formes linéaires

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Si φ est une forme linéaire non nulle sur E alors il existe un vecteur x de E tel que $\varphi(x) = 1_K$.
Si x est un vecteur non nul de E alors il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x) = 1_K$.

Théorème.– Soit φ une forme linéaire non nulle sur le K-espace vectoriel E.
Toute forme linéaire ψ sur E qui s'annule sur $\operatorname{Ker}\varphi$ est proportionnelle à φ.

4.3 Le cas particulier de $M_n(K)$

Proposition.– Si $\varphi : M_n(K) \to K$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ qui vérifie $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour tout $(A,B) \in M_n(K)^2$ alors φ est proportionnel à la trace.

Théorème.– (Représentation des formes linéaires sur $M_n(K)$)
Si $\varphi : M_n(K) \to K$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ alors il existe une unique matrice $A \in M_n(K)$ telle que : $\forall M \in M_n(K),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

Théorème.– Tout hyperplan de $M_n(K)$ contient au moins une matrice inversible.