Compacité – Connexité par arcs

Soit $(E,\| \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Parties compactes d'un espace vectoriel normé

1.1 Définition et invariance de la notion pour des normes équivalentes

Définition.– On dit qu'une partie A de E est une partie compacte de $(E,\| \|)$ si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite qui converge vers un élément de A.

Remarques : A est une partie compacte de $(E,\| \|)$ si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A. La notion de partie compacte dépend de la norme $\| \|$ considérée sur E. Si on change la norme alors à priori on change la notion de partie compacte.

Proposition.– Soient A une partie de E et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.
A est une partie compacte de $(E,N_1) \Leftrightarrow A$ est une partie compacte de (E,N_2).

1.2 Premières propriétés

Proposition.–
1) Toute partie compacte est une partie fermée et bornée.
2) Toute partie fermée contenue dans une partie compacte est une partie compacte.
3) Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition.– Les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ à être des parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.

Théorème.– Si $\dim E < +\infty$ alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées.

Proposition.– Soient $(E,\| \|_E)$ et $(F,\| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F. On munit $E\times F$ de sa structure d'espace vectoriel normé produit.
Si A est un compact de E et si B est un compact de F alors $A\times B$ est un compact de $E\times F$.

Remarque : la propriété précédente se généralise au cas d'un nombre fini p de parties compactes.

1.3 Compacité et continuité

Théorème.– L'image d'un compact par une application continue est un compact. Plus précisément : si $f : D\subset E \to F$ est continue sur une partie compacte A de $(E,\| \|_E)$ contenue dans D alors $f(A)$ est une partie compacte de $(F,\| \|_F)$.

Théorème.– (Des bornes atteintes)
Toute fonction à valeurs réelles, continue sur un compact non vide, y est bornée et y atteint ses bornes. Plus précisément : si $\varphi : D\subset E \to \mathbb{R}$ est continue sur une partie compacte A de $(E,\| \|_E)$ non vide et contenue dans D alors l'application φ est bornée sur A et il existe $(y,z)\in A^2$ tels que $\underset{x\in A}{\operatorname{Inf}}\,\varphi(x)=\varphi(y)$ et $\underset{x\in A}{\operatorname{Sup}}\,\varphi(x)=\varphi(z)$.

Théorème.– (De Heine)
Toute application continue sur un compact est uniformément continue. Plus précisément : si $f : D\subset E\to F$ est continue sur D et si D est un compact de E alors f est uniformément continue.

2. Connexité par arcs

2.1 Notion de partie connexe par arcs

Définition.– Un arc de $(E,\| \|)$ est une application continue de $[0,1]$ dans E.

Définition.– Soit $\gamma : [0,1]\to E$ un arc de $(E,\| \|)$. Les points $x=\gamma(0)$ et $y=\gamma(1)$ sont respectivement appelés origine et but de l'arc γ et on dit que l'arc γ relie les points x et y. L'ensemble $\gamma([0,1])=\{\gamma(t),\ t\in[0,1]\}$ est appelé support de l'arc γ.

Remarques
- ✓ La notion d'arc est une notion qui dépend de la norme $\| \|$ considérée sur E. Ceci étant dit, lorsque le contexte est clair on parle simplement d'arc de E.
  Un arc de E est aussi appelé un chemin de E.
- ✓ Si a et b sont des réels tels que $a<b$ et si $f:[a,b]\to E$ est une application continue alors $\gamma:[0,1]\to E$ définie par $\gamma(t)=f(a+t(b-a))$ est un arc de E.

Définition.– On dit qu'une partie A de E est une partie connexe par arcs de $(E,\| \ \|)$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in A^2$ il existe un arc de E à support contenu dans A qui relie x à y.

Remarque : La notion de partie connexe par arcs dépend de la norme $\| \ \|$ considérée sur E.

2.2 Composantes connexes par arcs d'une partie A de E

On considère une partie A de E et $(a,b) \in E^2$. on dit que a est connecté à b dans A, et on note $a \sim_A b$, si et seulement si il existe un arc de E à support contenu dans A reliant a à b.

Proposition.–

1) $\sim_A$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble A.
2) La classe d'équivalence $[a]_{\sim_A}$ d'un élément a de A est la plus grande partie connexe par arcs de E qui contient a et qui est contenue dans A.
3) Si $(a_i)_{i\in I}$ est un système complet de représentants alors les $[a_i]_{\sim_A}$, $i \in I$ sont appelées les composantes connexes par arcs de la partie A. On a : $A = \bigcup_{i\in I} [a_i]_{\sim_A}$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow [a_i]_{\sim_A} \cap [a_j]_{\sim_A} = \varnothing$.

2.3 Premières propriétés

Proposition.– Toute partie A de E peut s'écrire comme une réunion de parties connexes par arcs deux à deux disjointes.

Proposition.–

1) Toute partie convexe non vide de E est une partie étoilée de E.
2) Toute partie étoilée de E est une partie connexe par arcs de E.
3) Toute partie convexe de E est une partie connexe par arcs de E.

Proposition.–

1) Si x et y sont des éléments de E alors $[x,y]$ est une partie convexe de E et par suite une partie connexe par arcs de $(E,\| \ \|)$.
2) Les boules ouvertes et les boules fermées de E sont des parties convexes de E. Ce sont donc des parties connexes par arcs de $(E,\| \ \|)$.

Exemples : On se place dans $(\mathbb{R}^2,\| \ \|_2)$.

- Un « haricot » est connexe par arcs et non convexe.
- Un « donut » est connexe par arcs et non étoilé.
- Une étoile est étoilée et non convexe.

Théorème.– Les parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R},| \ |)$ sont les intervalles. ← convexe

Remarque : Dans $(\mathbb{R},| \ |)$ les notions d'intervalles, de parties convexes et de parties connexes par arcs coïncident. C'est là une situation très exceptionnelle.

2.4 Connexité par arcs et continuité

Théorème.– L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs. Plus précisément : si $(E,\| \ \|_E)$ et $(F,\| \ \|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, si $f : D \subset E \to F$ est continue sur une partie connexe par arcs A de $(E,\| \ \|_E)$ alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de $(F,\| \ \|_F)$.

Théorème.– L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue à valeurs réelles est un intervalle. Plus précisément : si $f : D \subset E \to \mathbb{R}$ est continue sur une partie connexe par arcs A de $(E,\| \ \|_E)$ alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corollaire.– (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : D \subset E \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

Si D est connexe par arcs et si f est continue sur D alors on a les propriétés suivantes :

1) Si f prend les valeurs x et y alors f prend toutes les valeurs comprises entre x et y.
2) Si f prend une valeur négative et une valeur positive alors f s'annule au moins une fois.
3) Si f ne s'annule pas sur D alors f y est strictement de signe fixe.

Remarque : Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. D'après le théorème ci-dessus, l'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

Applications

- L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est connexe par arc mais non convexe.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective sur I alors f est strictement monotone sur I.

3. Pour aller plus loin (HP)

3.1 Parties compactes

Proposition.– Toute partie finie de E est une partie compacte de E.

Proposition.– $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.

3.2 Parties connexes par arcs

Proposition.–

1) $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $M_n(\mathbb{R})$.
2) $GL_n(\mathbb{C})$ est une partie connexe par arcs de $M_n(\mathbb{C})$.

Proposition.– Soit A une partie connexe par arcs de $(E, \| \ \|)$.

1) Si $f : A \subset E \to \{0,1\}$ est une application continue sur A alors f est constante sur A.
2) Si B est à la fois un ouvert et un fermé de A alors B est vide ou B est égal à A.
3) Les seules parties de E qui soient à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et E.

3.3 Le théorème de Darboux

Proposition.– Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si f' change de signe strictement sur I alors f' s'annule sur I.

Théorème.– (Darboux)

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.