Calcul matriciel

Dans tout le chapitre, K désigne un corps et m, n, p des entiers naturels non nuls

1. Matrices de type n,p à coefficients dans un corps commutatif (Mpsi)

Définition.– Une matrice de type n,p à coefficients dans K est une famille $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ d'éléments de K indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. L'ensemble des matrices de type n,p est noté $M_{n,p}(K)$.

<u>Notations et vocabulaire</u>

- ✓ $M_{n,p}(K)$ est l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans K. Ainsi : $M_{n,p}(K) = K^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
- ✓ Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une matrice de type n,p à coefficients dans K. A est une famille d'éléments de K indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. C'est donc une application de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans K qui à tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ associe le scalaire $a_{i,j}$. Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on omet les indices et on note $A = (a_{ij})$. On représente la matrice A à l'aide d'un tableau rectangulaire comportant n lignes et p colonnes. i correspond à l'indice de ligne, j à l'indice de colonne. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$.
- ✓ Une matrice ligne (resp colonne) est une matrice de type $1,p$ (resp $n,1$). Une matrice carrée d'ordre n est une matrice de type n,n. L'ensemble $M_{n,n}(K)$ est noté $M_n(K)$.
- ✓ Pour $(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ on note $E_{kl}^{(np)}$ la matrice de $M_{n,p}(K)$ dont tous les éléments sont nuls sauf le $kl^{\text{ème}}$ qui lui vaut 1_K. On a donc : $E_{kl}^{(np)} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ où $\delta_{rs} = 0_K$ si $r\neq s$ et $\delta_{rr} = 1_K$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille $E_{kl}^{(np)}$ est simplement noté E_{kl}.

Définition.– Soit $A = (a_{kl}) \in M_{n,p}(K)$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$.

Le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne L_i de A est le vecteur de K^p défini par $L_i = (a_{i1},\cdots,a_{ip})$.

Le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne C_j de A est le vecteur de K^n défini par $C_j = (a_{1j},\cdots,a_{nj})$.

Définition.– Soit $A = (a_{kl}) \in M_{n,p}(K)$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$.

La $i^{\text{ème}}$ matrice ligne L_i de A est la matrice ligne de type $1,p$ définie par $L_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}$.

La $j^{\text{ème}}$ matrice colonne C_j de A est la matrice colonne de type $n,1$ définie par $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj}\end{bmatrix}$.

<u>Remarque</u> : Le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne et la $j^{\text{ème}}$ matrice colonne d'une matrice A sont notés de la même façon. Ce n'est pas un problème mais il importe de noter que dans le premier cas C_j est un vecteur de K^n $(C_j \in K^n)$ alors que dans le second il s'agit d'une matrice colonne de type $n,1$ $(C_j \in M_{n,1}(K))$.

Définition.– Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Une sous matrice de A est une matrice obtenue à partir de A en supprimant des lignes et des colonnes de A.

<u>Remarque</u> : Pour exprimer que B est une « sous matrice de A » on dit aussi que « B est une matrice extraite de A. »

1.1 Le K espace vectoriel des matrices de type n,p à coefficients dans K

Pour $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dans $M_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$ on pose :
$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ et $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Théorème.– $(M_{n,p}(K),+,\cdot)$ est un K-espace vectoriel de dimension égale à np. $(E_{11},\cdots,E_{1p},E_{21},\cdots,E_{2p},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{np})$ est une base de $M_{n,p}(K)$ appelée base canonique de $M_{n,p}(K)$. Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(K)$ on a : $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij}$.

1.2 Produit matriciel

Définition.– Soient $A = (a_{ik}) \in M_{n,m}(K)$ et $B = (b_{kj}) \in M_{m,p}(K)$. Le produit matriciel AB de A par B est la matrice de $M_{n,p}(K)$ définie par : $AB = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$.

<u>Remarque</u> : Pour pouvoir parler de AB le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. Il faut prendre garde à ce que AB peut très bien avoir un sens et BA ne pas en avoir.

Propriétés du produit matriciel

- $\forall A \in M_{n,m}(K), \forall B \in M_{m,q}(K), \forall C \in M_{q,p}(K),\ A(BC) = (AB)C.$
- $\forall (A_1,A_2) \in M_{n,m}(K)^2, \forall B \in M_{m,p}(K),\ (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B.$
- $\forall A \in M_{n,m}(K),\ \forall (B_1,B_2) \in M_{m,p}(K)^2,\ A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2.$
- $\forall A \in M_{n,m}(K), \forall B \in M_{m,p}(K), \forall \lambda \in K,\ (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$

Proposition.– Si $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ et si $(k,l) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$ alors $E_{ij}^{(nm)}E_{kl}^{(mp)} = \delta_{jk}E_{il}^{(np)}$.

Proposition.– Si $(A,B) \in M_n(K)^2$ et si $q \in \mathbb{N}^*$ alors : $AB = BA \Rightarrow (A+B)^q = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}A^kB^{q-k}$.

1.3 Transposition

Définition.– Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. La transposée ${}^tA$ de A est la matrice de $M_{p,n}(K)$ définie par : ${}^tA = (b_{kl})$ avec $b_{kl} = a_{lk}$. La matrice ${}^tA$ est appelée la transposée de A.
Ses vecteurs colonnes sont les vecteurs lignes de A et ses vecteurs lignes sont les vecteurs colonnes de A. Ses colonnes sont les lignes de A et ses lignes sont les colonnes de A.

Proposition.–

1) La transposition est un isomorphisme linéaire de $M_{n,p}(K)$ sur $M_{p,n}(K)$. En particulier :
$\forall (A,B) \in M_{n,p}(K), \forall (\alpha,\beta) \in K^2,\ {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\,{}^tA + \beta\,{}^tB.$
2) $\forall A \in M_{n,m}(K), \forall B \in M_{m,p}(K),\ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$
3) $\forall A \in M_{n,p}(K),\ {}^t({}^tA) = A.$

1.4 Noyau et image d'une matrice de type n,p

Définition.– Soit $A \in M_{n,p}(K)$.
Le noyau $\operatorname{Ker} A$ de A est la partie de $M_{p,1}(K)$ définie par :
$\operatorname{Ker} A = \{X \in M_{p,1}(K) \mid AX = 0_{M_{n,1}(K)}\}$.

L'image $\operatorname{Im} A$ de A est la partie de $M_{n,1}(K)$ définie par :
$\operatorname{Im} A = \{Y \in M_{n,1}(K), \exists X \in M_{p,1}(K) \mid Y = AX\}$.

Proposition.– Soit $A \in M_{n,p}(K)$.

1) $\operatorname{Ker} A$ est un sous espace vectoriel de $M_{p,1}(K)$. Si $L_1,\cdots,L_n$ sont les matrices lignes de A alors $\operatorname{Ker} A = \{X \in M_{n,1}(K) \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ L_iX = 0\}$.
2) $\operatorname{Im} A$ est un sous espace vectoriel de $M_{n,1}(K)$. Si $C_1,\cdots,C_p$ sont les matrices colonnes de A alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1,\cdots,C_p)$.
3) $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = p$. (formule du rang)

2. Matrices carrées d'ordre n (Mpsi)

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice carrée d'ordre n toute matrice de type n,n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $M_n(K)$. Il est à noter que si $(A,B) \in M_n(K)^2$ alors les produits matriciels AB et BA sont toujours définis et appartiennent à $M_n(K)$. Le produit matriciel induit une loi de composition interne sur $M_n(K)$. On note I_n la matrice carrée d'ordre n définie par : $I_n = (\alpha_{ij})$ avec $\alpha_{ij} = 0_K$ si $i \neq j$ et $\alpha_{ii} = 1_K$. Pour tout $A \in M_n(K)$ on a : $AI_n = I_nA = A$.

2.1 La K-algèbre $M_n(K)$

Théorème.–

1) $(M_n(K),+,\cdot)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n^2.
2) $(E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn})$ est une base du K-espace vectoriel $M_n(K)$.
Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(K)$ on a : $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$.
3) $(M_n(K),+,\times)$ est un anneau, non commutatif pour $n \geq 2$.
4) $(M_n(K),+,\times,\cdot)$ est une K-algèbre.

2.2 Le groupe $GL_n(K)$ des matrices inversibles

Définition.– On dit que $A \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si il existe $B \in M_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$. On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$.

Proposition.–

1) $(GL_n(K),\times)$ est un groupe d'élément neutre I_n.
2) Pour tout $(A,B) \in M_n(K)^2$ on a : $AB \in GL_n(K)$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3) $\forall P \in GL_n(K),\ {}^tP \in GL_n(K)$ et $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.
4) Si $A \in M_n(K)$ alors on a la caractérisation : $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0_{M_{n,1}(K)}\}$.

2.3 Exemples de sous algèbre de $M_n(K)$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.

On dit que A est triangulaire supérieure si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0_K$.

On dit que A est triangulaire inférieure si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0_K$.

On dit que A est diagonale si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0_K$.

Une telle matrice diagonale A est notée $A = \mathrm{Diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$.

Définition.– On note $T_n^s(K)$ $\left(\text{resp } T_n^i(K), \text{resp } D_n(K)\right)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, (resp triangulaires inférieures, resp diagonales) de $M_n(K)$.

Proposition.– Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

1) Si A et B sont triangulaires supérieures (resp triangulaires inférieures, resp diagonales) alors AB est une matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, resp diagonale) dont chaque élément diagonal est le produit des éléments diagonaux correspondants de A et B.
2) Si A est triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure) alors A est inversible si et seulement si les éléments diagonaux de A sont tous non nuls et dans ces conditions A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure) dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de A.
3) Si A est triangulaire supérieure (resp inférieure) et à diagonale nulle alors $A^n = 0$.

Proposition.– $T_n^s(K)$, $T_n^i(K)$ et $D_n(K)$ sont des sous algèbres de $(M_n(K), +, \times, \cdot)$.

3. Matrice d'une application linéaire (Mpsi)

Soient E, F des espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p \geq 1$, $\dim F = n \geq 1$ et $u \in L(E,F)$. On fixe une base $B = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et une base $C = (f_1, \cdots, f_n)$ de F.

3.1 Définition

u est parfaitement déterminée par la donnée des p vecteurs $u(e_1), \cdots, u(e_p)$.

Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, le vecteur $u(e_j)$ de F s'écrit de manière unique sur la base C.

$$u(e_j) = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \cdots + \alpha_{nj}f_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}f_i \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = f_i^*(e_j).$$

Autrement dit : α_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(e_j)$ sur la base $C = (f_1, \cdots, f_n)$.

L'application linéaire u est donc parfaitement déterminée par la donnée des np scalaires $(\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.

Définition.– La matrice de l'application linéaire u dans les bases B et C est la matrice $M_{B,C}(u)$ de $M_{n,p}(K)$ définie par : $M_{B,C}(u) = \left(f_i^*(u(e_j))\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$. En particulier, on retiendra que la $j^{\text{ième}}$ colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée par les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $C = (f_1, \cdots, f_n)$.

3.2 Traduction matricielle de l'action d'une application linéaire

Soit $x \in E$. On pose : $y = u(x)$.

Le vecteur x s'écrit de façon unique sur la base $B = (e_1, \cdots, e_p)$ sous la forme :

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_pe_p = \sum_{j=1}^{p} x_je_j \quad \text{avec} \quad x_j = e_j^*(x).$$

Le vecteur y s'écrit de façon unique sur la base $C = (f_1, \cdots, f_n)$ sous la forme :

$$u(x) = y_1f_1 + \cdots + y_nf_n = \sum_{i=1}^{n} y_if_i \quad \text{avec} \quad y_i = f_i^*(y).$$

On se propose d'exprimer les coordonnées $y_1, \cdots, y_n$ de $u(x)$ dans la base C en fonction des coordonnées $x_1, \cdots, x_p$ de x dans la base B.

Pour ce faire on adopte les notations suivantes : $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ et $A = M_{B,C}(u)$.

La matrice X est appelée matrice colonne des coordonnées de x dans la base B.

La matrice Y est appelé matrice colonne des coordonnées de $y = u(x)$ dans la base C.

Théorème.– Avec ces notations ci-dessus on a : $\mathbf{Y = AX}$.

4. Relations entre applications linéaires et matrices (Mpsi)

Théorème.– Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p \geq 1$ et $\dim F = n \geq 1$. On fixe une base B de E et une base C de F.

L'application $M_{B,C} : L(E,F) \to M_{n,p}(K)$ qui à l'application linéaire $u \in L(E,F)$ associe la matrice $M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de $L(E,F)$ sur $M_{n,p}(K)$.

Traduction du théorème

✓ $\forall (u,v) \in L(E,F)^2, \forall (\alpha,\beta) \in K^2,\ M_{B,C}(\alpha u + \beta v) = \alpha M_{B,C}(u) + \beta M_{B,C}(v)$.
(linéarité de $M_{B,C}$)

✓ $\forall u \in L(E,F),\ u = 0_{L(E,F)} \Leftrightarrow M_{B,C}(u) = 0_{M_{n,p}(K)}$. (injectivité de $M_{B,C}$)

✓ Pour toute matrice $A \in M_{n,p}(K)$, il existe une unique application linéaire u de E dans F dont A soit la matrice dans les bases B et C. (bijectivité de $M_{B,C}$)

✓ La troisième propriété permet de traduire un problème matriciel en termes d'application linéaire. On peut par exemple prendre $E = K^p$, $F = K^n$ et pour B et C les bases canoniques respectives de K^p et K^n. Autrement dit : étant donnée $A \in M_{n,p}(K)$, il existe une unique application linéaire u de K^p dans K^n telle que $A = M_{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$ où ε et ε' sont les bases canoniques respectives de K^p et K^n.

Définition.– Soit $A \in M_{n,p}(K)$. L'unique application linéaire a de K^p dans K^n vérifiant $A = M_{\varepsilon,\varepsilon'}(a)$, où ε et ε' sont les bases canoniques respectives de K^p et K^n, est appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

Théorème.– Soient E, F, G des vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p \geq 1$, $\dim F = m \geq 1$ et $\dim G = n \geq 1$. On fixe une base B de E, une base C de F et une base D de G.
Si $u \in L(E,F)$ et si $v \in L(F,G)$ alors $M_{B,D}(v \circ u) = M_{C,D}(v) \times M_{B,C}(u)$.

Le cas particulier des endomorphismes

Théorème.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Fixons une base B de E.
L'application $M_B : L(E) \to M_n(K)$ qui à l'endomorphisme $u \in L(E)$ associe la matrice $M_B(u)$ est un isomorphisme de K-algèbre de $L(E)$ sur $M_n(K)$.

Traduction du théorème

✓ $M_B(\alpha u + \beta v) = \alpha M_B(u) + \beta M_B(v)$, $M_B(v \circ u) = M_B(v) \times M_B(u)$ et $M_B(Id_E) = I_n$.
(M_B est un morphisme de K – algèbres)

✓ $u = 0_{L(E)} \Leftrightarrow M_B(u) = 0_{M_n(K)}$. ($M_B$ est injective)

✓ Pour toute matrice $A \in M_n(K)$, il existe une unique endomorphisme a de E dont A est la matrice dans la base B. (M_B est bijective)

Définition.– Soit $A \in M_n(K)$. L'unique endomorphisme a de K^n vérifiant $A = M_\varepsilon(a)$, où ε est la base canonique de K^n, est appelé endomorphisme canoniquement associée à A.

Proposition.– Soient $u \in L(E)$ et B une base de E.
1) $u \in GL(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in GL_n(K)$.
2) Si u est bijectif alors $M_B(u^{-1}) = M_B(u)^{-1}$.

5. Matrice de passage - Changement de bases (Mpsi)

5.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Fixons une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et considérons p vecteurs $a_1, \cdots, a_p$ de E. Chaque vecteur a_j s'écrit sous la forme : $a_j = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(a_j) e_i$.

Définition.– La matrice $M_B(a_1, \cdots, a_p)$ de la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ dans la base B est la matrice de $M_{n,p}(K)$ définie par : $M_B(a_1, \cdots, a_p) = (e_i^*(a_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. En particulier on retiendra que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_B(a_1, \cdots, a_p)$ est constituée par les coordonnées dans la base B du vecteur a_j

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et B une base de E. Une famille $(a_1, \cdots, a_n)$ de n vecteurs de E est une base de E ssi $M_B(a_1, \cdots, a_n)$ est inversible.

5.2 Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
On considère deux bases $B = (e_1, \cdots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ de E.

Définition.– La matrice $M_B(e'_1, \cdots, e'_n)$ est appelée matrice de passage de la base B à la base B'.
Il s'agit de la matrice des coordonnées de la famille de vecteurs $(e'_1, \cdots, e'_n)$ dans B. On la note $P_B^{B'}$.
La $j^{\text{ème}}$ colonne de $P_B^{B'}$ est constituée par les coordonnées dans B du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base B'.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et B, B', B'' trois bases de E.
1) $P_B^{B'} = M_{B',B}(Id_E) = M_B(e'_1, \cdots, e'_n)$.
2) $P_B^{B'} P_{B'}^{B''} = P_B^{B''}$.
3) $P_B^{B'}$ est inversible et $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = P_{B'}^{B}$.

5.3 Changement de base et vecteur

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

On considère deux bases $B = (e_1, \cdots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ de E et un vecteur x de E.

Le vecteur x s'écrit de façon unique sur la base B : $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

Le vecteur x s'écrit de façon unique sur la base B' : $x = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n$.

On pose : $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ et $P = P_B^{B'}$.

Théorème.– Avec les notations ci-dessus on a : $\mathbf{X = PX'}$.

5.4 Changement de base et application linéaire

Théorème.– Soient E, F deux K-espaces vectoriels avec $1 \leq \dim E = p < +\infty$ et $1 \leq \dim F = n < +\infty$. Soient $u \in L(E,F)$, B et B' deux bases de E et C, C' deux bases de F.

Dès lors : $\mathbf{M' = Q^{-1}MP}$ avec $M = M_{B,C}(u)$, $M' = M_{B',C'}(u)$, $P = P_B^{B'}$ et $Q = P_C^{C'}$.

Théorème.– (Le cas particulier des endomorphismes)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in L(E)$ et B, B' deux bases de E.

Dès lors : $\mathbf{M' = P^{-1}MP}$ avec $M = M_B(u)$, $M' = M_{B'}(u)$ et $P = P_B^{B'}$.

6. Rang d'une matrice (Mpsi)

Définition.– Le rang de la matrice $M \in M_{n,p}(K)$ est égal au rang de son système de vecteurs colonnes.

Si $M = (\alpha_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ et si $C_1, \cdots, C_p$ sont les vecteurs colonnes de M alors on a par définition :

$C_j = (\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj}) \in K^n$ et $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1, \cdots, C_p) = \dim \underbrace{\operatorname{Vect}(C_1, \cdots, C_p)}_{\text{sous espace vectoriel de } K^n}$.

Proposition.– $\forall M \in M_{n,p}(K)$, $\operatorname{rg} M = 0 \Leftrightarrow M = 0$.

Proposition.– La matrice $J_{n,p,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix}$ est de type n,p et son rang vaut r.

Proposition1.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Si $a_1, \cdots, a_p$ sont p vecteurs de E et si B est une base B de E alors $\operatorname{rg}(a_1, \cdots, a_p) = \operatorname{rg} M_B(a_1, \cdots, a_p)$.

Proposition2.– Soient E et F des vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p \geq 1$, $\dim F = n \geq 1$ et $u \in L(E,F)$. Pour toute base B de E et toute base C de F on a : $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} M_{B,C}(u)$.

Remarque : Tout calcul de rang peut se ramener au calcul du rang d'une matrice.

Proposition.– Soit $(A,B) \in M_{n,m}(K) \times M_{m,p}(K)$.

Si A est inversible (ce qui impose que $n = m$) alors $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B$.

Si B est inversible (ce qui impose que $m = p$) alors $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} A$.

Théorème.– Soit $A \in M_{n,p}(K)$.

1) Le rang d'une sous matrice de A est inférieur ou égal à celui de A.
2) Si il existe une sous matrice carrée d'ordre r de A qui est inversible alors $\operatorname{rg} A \geq r$.
3) Si A est non nulle et de rang r alors il existe au moins une sous matrice carrée d'ordre r de A qui est inversible.

Calcul matriciel : le retour

Dans tout le chapitre, K désigne un corps.

1. Matrices équivalentes et rang (Mpsi)

Théorème.– Soient E, F deux K-espaces vectoriels avec $1 \leq \dim E = p < +\infty$ et $1 \leq \dim F = n < +\infty$. Soient $u \in L(E,F)$, B, B' deux bases de E et C, C' deux bases de F. Si $M = M_{B,C}(u)$, $M' = M_{B',C'}(u)$, $P = P_B^{B'}$ et $Q = P_C^{C'}$ alors on a les propriétés suivantes : $P \in GL_p(K)$, $Q \in GL_n(K)$ et $Q^{-1}MP = M'$.

Définition.– Soient A et B dans $M_{n,p}(K)$. On dit que A est équivalente à B si et seulement si il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $Q^{-1}AP = B$.

<u>Remarque</u> : Pour exprimer que A est équivalente à B on note $A \sim_e B$. La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence sur $M_{n,p}(K)$. On a : $A \sim_e B \Leftrightarrow B \sim_e A$. Pour exprimer que A est équivalente à B on dit aussi (puisqu'alors B est aussi équivalente à A) que A et B sont équivalentes.

Définition.– Soient $A \in M_{n,p}(K)$, E un K-espace vectoriel de dimension p, F un K-espace vectoriel de dimension n et $u : E \to F$ une application linéaire. On dit que la matrice A représente l'application linéaire u si et seulement si il existe une base B de E et une base C de F telles que $A = M_{B,C}(u)$.

Proposition.– Deux matrices A et B de $M_{n,p}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire.

Théorème.– Soient E et F des-espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p \geq 1$ et $\dim F = n \geq 1$. Si $u \in L(E,F)$ est de rang r alors il existe une base B de E et une base C de F telles que $M_{B,C}(u) = J_{n,p,r}$.

Théorème.– Soit $(A,B) \in M_{n,p}(K)^2$.

1) la matrice A est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r}$.
2) Les matrices A et B ont le même rang si et seulement si elles sont équivalentes.
3) $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$.

2. Matrices semblables et trace (Mpsi)

2.1 Notion de matrices semblables

Théorème.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in L(E)$ et B, B' deux bases de E. Si $M = M_B(u)$, $M' = M_{B'}(u)$ et $P = P_B^{B'}$ alors $P \in GL_n(K)$ et $P^{-1}MP = M'$.

Définition.– Soient A et B dans $M_n(K)$. On dit que A est semblable à B si et seulement si il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = B$.

<u>Remarque</u> : Pour exprimer que A est semblable à B on note $A \sim_s B$. La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$. On a : $A \sim_s B \Leftrightarrow B \sim_s A$. Pour exprimer que A est semblable à B on dit aussi que A et B sont semblables.

Définition.– Soient $A \in M_n(K)$, E un K-espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$. On dit que la matrice A représente u ssi il existe une base B de E telle que $A = M_B(u)$.

Proposition.– Soit $(A,B) \in M_n(K)^2$.

1) Les matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme.
2) Si les matrices A et B sont semblables alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k le sont aussi. Plus précisément : si $P^{-1}AP = B$ avec $P \in GL_n(K)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $P^{-1}A^kP = B^k$.

2.2 Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Définition.– Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n. La trace $\operatorname{Tr}(A)$ de la matrice A est le scalaire défini par : $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Proposition.–

1) L'application trace est une forme linéaire non nulle sur $M_n(K)$.

2) $\forall (A,B) \in M_n(K)^2,\ Tr(AB) = Tr(BA)$.

3) $\forall A \in M_n(K), \forall P \in GL_n(K),\ Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$. (Invariance par similitude)

4) Deux matrices semblables ont même trace.

Théorème-Définition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.
Si B et B' sont des bases de E alors $Tr(M_B(u)) = Tr(M_{B'}(u))$. Le scalaire $Tr(M_B(u))$ est indépendant de la base B considérée. Il est noté $Tr(u)$ et est appelé trace de l'endomorphisme u.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $(u,v) \in L(E)^2$ et $(\alpha,\beta) \in K^2$.

1) $Tr(\alpha u + \beta v) = \alpha Tr(u) + \beta Tr(v)$.

2) $Tr(v \circ u) = Tr(u \circ v)$.

3) Si v est un automorphisme de E alors $Tr(v^{-1} \circ u \circ v) = Tr(u)$. (Invariance par similitude)

Proposition.– Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Si p est un projecteur de E alors $Tr\, p = (rg\, p)1_K$.

<u>Remarque</u> : $Tr\, p = (rg\, p)1_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{rg\, p \text{ fois}}$. Si K est un sous corps de $\mathbb{C}$ alors $Tr\, p = rg\, p$.

3. Opérations élémentaires sur les matrices (Mpsi)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $M_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

3.1 Matrices de permutation, matrices élémentaires de dilatation et de transvection

Définition.– A toute permutation $\sigma \in S_n$ on associe la matrice carrée $P_\sigma = (p_{ij})$ de $M_n(K)$ définie par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$. On dit que $A \in M_n(K)$ est une matrice de permutation si et seulement si il existe $\sigma \in S_n$ telle que $A = P_\sigma$.

Proposition.– Soit $(\sigma,\sigma')^2 \in S_n^2$.

1) $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

2) $P_\sigma \in GL_n(K)$, $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ et $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)1_K$.

Définition.– A tout $\alpha \in K^*$ et à tout $i \in [\![1,n]\!]$ on associe la matrice $D_i(\alpha)$ de $M_n(K)$ définie par $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii} = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,\alpha,1,\cdots,1)$. On dit que $A \in M_n(K)$ est une matrice élémentaire de dilatation si et seulement si il existe $\alpha \in K^*$ et $i \in [\![1,n]\!]$ tels que $A = D_i(\alpha)$.

Proposition.– Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $(\alpha,\alpha') \in (\mathbb{K}^*)^2$.

1) $D_i(\alpha)D_i(\alpha') = D_i(\alpha\alpha')$.

2) $D_i(\alpha) \in GL_n(\mathbb{K})$, $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(\alpha^{-1})$ et $\det D_i(\alpha) = \alpha$.

Définition.– A tout $\lambda \in K$ et à tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$ on associe la matrice $T_{i,j}(\lambda)$ de $M_n(K)$ définie par $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$. On dit que $A \in M_n(K)$ est une matrice élémentaire de transvection si et seulement si il existe $\lambda \in K$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$ tels que $A = T_{i,j}(\lambda)$.

Proposition.– Soient $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$.

1) $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\lambda') = T_{i,j}(\lambda + \lambda')$.

2) $T_{i,j}(\lambda) \in GL_n(\mathbb{K})$, $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$ et $\det T_{i,j}(\lambda) = 1$.

3.2 Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les matrices

Proposition.– (opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice)
Soient $A \in M_n(K)$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

1) $P_{(i,j)}A$ se déduit de A en permutant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

2) $D_i(\alpha)A$ se déduit de A en multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par α $(L_i \leftarrow \alpha L_i)$.

3) $T_{i,j}(\lambda)A$ se déduit de A en additionnant à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A, λ fois la $j^{\text{ème}}$ ligne de A $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)$.

Proposition.– (opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice)
Soient $A \in M_n(K)$, $\alpha \in K^*$, $\lambda \in K$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

1) $AP_{(i,j)}$ se déduit de A en permutant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A $(C_i \leftrightarrow C_j)$.

2) $AD_i(\alpha)$ se déduit de A en multipliant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par α $(C_i \leftarrow \alpha C_i)$.

3) $AT_{j,i}(\lambda)$ se déduit de A en additionnant à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A λ fois la $j^{\text{ème}}$ colonne de A $(C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j)$.

Théorème.– Soit $A \in M_{n,p}(K)$.

1) Une matrice A' déduite de A par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes s'écrit $A' = UA$ avec $U \in GL_n(K)$. Une telle matrice A' est équivalente à A. Elle a le même noyau, la même image et le même rang que A.
2) Une matrice A' déduite de A par une succession d'opérations élémentaires sur les colonnes s'écrit $A' = AV$ avec $V \in GL_p(K)$. Une telle matrice A' est équivalente à A. Elle a le même noyau, la même image et le même rang que A.
3) Une matrice A' déduite de A par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes s'écrit $A' = UAV$ avec $U \in GL_n(K)$ et $V \in GL_p(K)$. Une telle matrice A' est équivalente à A. Elle a le même noyau, la même image et le même rang que A.

3.3 Application au calcul du rang

On considère $A \in M_{n,p}(K)$ et on se propose de déterminer son rang. Par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes on transforme A en une matrice A' de la forme : $A' = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ où le premier bloc diagonal est une matrice carrée d'ordre r.

Les opérations élémentaires ne modifiant pas le rang on a : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$. Ainsi : $\operatorname{rg} A = r$.

3.4 Application au calcul de l'inverse

On considère $A \in GL_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n inversible. En effectuant exclusivement des opérations élémentaires sur les lignes de A on transforme A en la matrice identité I_n. Parallèlement, en effectuant les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice I_n on transforme I_n en une matrice B. On a : $I_n = UA$ et $B = UI_n$ où $U \in GL_n(K)$. Il vient donc $BA = I_n$ puis $A^{-1} = B$.

4. Pour aller plus loin (HP)

4.1 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition.– Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n.

On dit que A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.

On dit que A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont symétriques.

On note $A_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont antisymétriques.

Proposition.– Soit K un corps vérifiant $1_K + 1_K \neq 0_K$.

1) Si $A \in M_n(K)$ est antisymétrique alors ses éléments diagonaux sont nuls.
2) $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$. Autrement dit : $\forall M \in M_n(K),\ \exists!(S,A) \in S_n(K) \times A_n(K) \mid M = S + A$.
3) $\dim S_n(K) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(K) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

4.2 Formes linéaires et hyperplans de $M_n(K)$

Proposition.– Si $\varphi : M_n(K) \to K$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ qui vérifie $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour tout $(A,B) \in M_n(K)^2$ alors φ est proportionnel à la trace.

Théorème.– (Représentation des formes linéaires sur $M_n(K)$)

Si $\varphi : M_n(K) \to K$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ alors il existe une unique matrice $A \in M_n(K)$ telle que : $\forall M \in M_n(K),\ \varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.

Théorème.– Tout hyperplan de $M_n(K)$ contient au moins une matrice inversible.

4.3 Générateurs du groupe linéaire et spécial linéaire

Théorème.– (Générateurs du groupe linéaire)

Toute matrice A de $GL_n(K)$ peut s'écrire sous la forme $A = T_1 \dots T_s D_n(\det A)$ où $s \in \mathbb{N}$ et où $T_1, \cdots, T_s$ sont des matrices élémentaires de transvection. L'ensemble constitué des matrices élémentaires de transvection et de dilatation engendre le groupe $(GL_n(K), \times)$.

Théorème.– (Générateurs du groupe spécial linéaire)

Toute matrice A de $SL_n(K)$ peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires de transvection. L'ensemble des matrices élémentaires de transvection engendre $(SL_n(K), \times)$.

4.4 L'espace euclidien $M_n(\mathbb{R})$

Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ on pose : $(A \mid B) = \operatorname{Tr}({}^tAB)$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

Il est à noter que si $A = (a_{ij})$ et $B = (a_{ij})$ alors $(A \mid B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ et $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.