Théorèmes d'interversion et théorèmes de transfert

1. Interversion de limites

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, D une partie de E et (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^D$. Soient A une parie de E contenue dans D, $a \in \overline{A}$ et $f \in \mathbb{K}^A$.

1.1 Le cas des suites d'applications

Théorème.– (De la double limite)

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{a,A} f_n$ existe dans $\mathbb{K}$ et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V_a de a dans A alors $\lim\limits_{a,A} f$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{a,A} f_n\right)$.

Corollaire.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{a,A} f_n$ existe dans $\mathbb{K}$ et si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors $\lim\limits_{a,A} f$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{a,A} f_n\right)$.

Remarques :

✓ Le résultat $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{a,A} f_n\right)$ se réécrit : $\lim\limits_{x\to a, x\in A}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a, x\in A} f_n(x)\right)$.

La convergence uniforme permet donc d'intervertir les limites.

✓ Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ les résultats s'étendent aux cas $a = -\infty$ et $a = +\infty$ à condition de considérer l'adhérence de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.2 Le cas des séries d'applications

Théorème.– (De la limite terme à terme)

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{a,A} f_n$ existe dans $\mathbb{K}$ et si $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage V_a de a dans A alors $\lim\limits_{a,A} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\lim\limits_{a,A} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{a,A} f_k$.

Corollaire.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{a,A} f_n$ existe dans $\mathbb{K}$ et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors $\lim\limits_{a,A} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ existe dans $\mathbb{K}$ et $\lim\limits_{a,A} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{a,A} f_k$.

2. Interversion des symboles limite et intégrale

2.1 Le cas des suites d'applications

Théorème 1.– Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Si (f_n) est une suite d'éléments de $C^0([a,b],\mathbb{K})$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f alors $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$.

Remarques

✓ L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$ s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n(t)\,dt = \int_{[a,b]} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$.

La convergence uniforme a donc permis d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\int_{[a,b]}$.

✓ Le théorème 1 n'est plus nécessairement vrai si l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.

Théorème 2.– (Convergence dominée)

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Si (f_n) est une suite d'éléments de $L^1(I,\mathbb{K})$ qui converge simplement sur I vers $f \in M^0(I,\mathbb{K})$ et si il existe $\varphi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f \in L^1(I,\mathbb{K})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Remarques

✓ L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$ s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$.

On peut donc intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\int_I$.

✓ L'hypothèse de convergence uniforme dans le théorème 1 est très restrictive car elle est en fait très forte et donc pas toujours remplie. De surcroit, même si elle est remplie cette hypothèse de convergence uniforme n'est pas toujours facile à vérifier. L'hypothèse de domination du théorème 2 est pour sa part beaucoup moins restrictive et lorsqu'elle est remplie souvent plus facile à vérifier. Le théorème 1 n'est plus valable si l'intervalle d'intégration n'est pas un segment alors que le théorème 2 n'impose aucune contrainte à l'intervalle d'intégration. Pour ces raisons il est clair que le théorème de convergence dominée est bien plus puissant que le théorème 1 et qu'il est donc à privilégier.

23

2.2 Le cas des séries d'applications

Théorème 1.– (Intégration terme à terme version convergence uniforme)
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et (f_n) est une suite d'éléments de $C^0([a,b],\mathbb{K})$.

Si $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{[a,b]} f_k$.

Théorème 2.– (Intégration terme à terme version convergence dominée)
Soit I un intervalle d'intérieur non vide et (f_n) une suite d'éléments de $L^1(I,\mathbb{K})$.

Si $\sum f_n$ converge <u>simplement</u> sur I, si $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \in M^0(I,\mathbb{K})$ <u>et</u> si $\sum \int_I |f_n|$ converge alors :

$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est intégrable sur I et $\int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_I f_k$.

<u>Remarques</u> :

- ✓ Il est important de remarquer que le théorème 2 constitue un moyen d'établir qu'une application f est intégrable sur I. Il suffit pour cela de « voir » f comme la fonction somme d'une série d'applications $\sum f_n$ qui vérifie les hypothèses du théorème.
- ✓ Les deux théorèmes d'intégration à terme à terme permettent de permuter le symbole d'intégration avec le symbole $\sum_{k=0}^{+\infty}$. Le théorème 1 n'est plus valable si l'intervalle n'est pas un segment alors que le théorème 2 n'impose aucune contrainte à l'intervalle d'intégration. Comme pour les suites d'applications le théorème 2 est bien plus puissant que le théorème 1 et il est donc à privilégier.

3. Transfert de la continuité

Soient D un ensemble, (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^D$, $a \in D$ et $f \in \mathbb{K}^D$.

3.1 Le cas des suites d'applications

Théorème.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue au point a et si (f_n) converge <u>uniformément</u> vers f sur un voisinage V_a de a dans D alors f est continue au point a.

Corollaire1.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D et si pour tout $a \in D$ il existe un voisinage V_a de a dans D tel que (f_n) converge <u>uniformément</u> sur V_a vers f alors f est continue sur D.

Corollaire2.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D et si (f_n) converge <u>uniformément</u> sur D vers f alors f est continue sur D.

Corollaire3.– On suppose ici que $D = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si (f_n) converge <u>uniformément</u> sur tout segment contenu dans I vers f alors f est continue sur I.

<u>Remarque</u> : Ces résultats peuvent être utilisés pour établir qu'il n'y a pas convergence uniforme.
La suite (f_n) d'éléments de $\mathbb{R}^{[0,1]}$, définie par $f_n(x) = x^n$, ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

3.2 Le cas des séries d'applications

Théorème.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue au point a et si $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur un voisinage V_a de a dans D alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue au point a.

Corollaire1.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D et si pour tout $a \in A$ il existe un voisinage V_a de a dans D tel que $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur V_a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur D.

Corollaire2.– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D et si $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur D alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur D.

Corollaire3.– On suppose ici que $D = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur tout segment contenu dans I alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

4. Transfert du caractère C^1

4.1 Le cas des suites d'applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème.– (Intégration d'une limite uniforme sur un segment)
Soient (f_n) une suite d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$.

On considère la suite d'applications (F_n) de I dans $\mathbb{K}$ définie par : $F_n(x) = \int_a^x f_n$.

Si (f_n) converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers $f \in \mathbb{K}^I$ alors

1) f est continue sur I.
2) (F_n) converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers $F \in \mathbb{K}^I$ définie par : $F(x) = \int_a^x f$.

Théorème.– Soient (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^I$ et $(f,g) \in (\mathbb{K}^I)^2$. Si :

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I
✓ (f_n) converge simplement sur I vers f
✓ (f_n') converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers g

alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

De surcroît et sous les même hypothèses :

(f_n) converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers f.

4.2 Le cas des séries d'applications

Théorème.– Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^I$. Si :

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I
✓ $\sum f_n$ converge simplement sur I
✓ $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

De surcroît et sous les même hypothèses :

$\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I.

5. Transfert du caractère C^2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

5.1 Le cas des suites d'applications

Théorème.– Soient (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^I$ et $(f,g,h) \in (\mathbb{K}^I)^3$. Si :

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^2 sur I
✓ (f_n) et (f_n') convergent simplement sur I respectivement vers f et g
✓ (f_n'') converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers h

alors f est de classe C^2 sur I, $f' = g$ et $f'' = h$.

De surcroît et sous les même hypothèses :

(f_n) et (f_n') converge uniformément sur tout segment contenu dans I respectivement vers f et g.

5.2 Le cas des séries d'applications

Théorème.– Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^I$. Si :

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^2 sur I
✓ $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent simplement sur I
✓ $\sum f_n''$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^2 sur I, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n''$.

De surcroît et sous les même hypothèses :

$\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent uniformément sur tout segment contenu dans I.

6. Transfert du caractère C^p

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

6.1 Le cas des suites d'applications

Théorème.– Soient (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^I$ et $(\varphi_0, \varphi_1 \cdots, \varphi_p) \in (\mathbb{K}^I)^{p+1}$. Si :

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^p sur I
✓ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers φ_k
✓ $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers φ_p

Alors φ_0 est de classe C^p sur I et $\varphi_0^{(k)} = \varphi_k$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.

De surcroît et sous les même hypothèses :

pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers φ_k

6.2 Le cas des séries d'applications

Théorème.– Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}^I$. Si :

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^p sur I

✓ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I

✓ $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.

De surcroît et sous les même hypothèses :

pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I.

7. Fonction ζ de Riemann (HP)

On note $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ et pour $z \in \mathbb{C}$ on pose : $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$.

Proposition.–

1) ζ est définie et continue sur P.

2) ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Proposition.– On considère les suites d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$, définies par : $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1) $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ mais ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

2) $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et converge absolument en tout point de $]1, +\infty[$.

3) $\forall x \in]1, +\infty[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \left(2^{1-x} - 1\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Proposition.– $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ et plus précisément : $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$.

Séries entières : le retour

1. Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

Théorème.– Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1) La somme S_a de la série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$ est continue en tout point de son disque ouvert de convergence $D_a = D(0,R_a)$.
En particulier, S_a est continue sur $D_a = D(0,R_a)$.
2) La somme S_a de la série entière de la variable réelle $\sum a_n t^n$ est continue en tout point de son intervalle ouvert de convergence $]-R_a,R_a[$. En particulier, S_a est continue sur $]-R_a,R_a[$.

Remarque :

Il est important de noter que l'application S_a n'est pas nécessairement continue sur son ensemble de définition E_a. Le théorème ci-dessus assure simplement la continuité de S_a sur une partie de E_a à savoir $D(0,R_a)$ ou $]-R_a,R_a[$ selon les cas.

2. Intégration et dérivation de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème.– (Intégration terme à terme de la somme d'une série entière)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon $R_a > 0$ et de somme S_a.

1) Si α et β appartiennent à $]-R_a,R_a[$ alors $\int_\alpha^\beta S_a = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_\alpha^\beta t^n \, dt.$
2) L'unique primitive de S_a sur $]-R_a,R_a[$ qui s'annule en zéro est $T_a :]-R_a,R_a[\to \mathbb{C}$ définie par : $T_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. D'autre part : $R\left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n\right) = R_a$.

Proposition.–

$\forall x \in]-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

$\forall x \in]-1,1]$, $\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Théorème.– (Dérivation terme à terme de la somme d'une série entière)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon $R_a > 0$ et de somme S_a.

1) S_a est classe C^1 sur $]-R_a,R_a[$.
$\forall t \in]-R_a,R_a[$, $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$.
$R\left(\sum (n+1) a_{n+1} t^n\right) = R_a$.
2) S_a est classe C^∞ sur $]-R_a,R_a[$.
$\forall t \in]-R_a,R_a[$, $S_a^{(p)}(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) t^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n t^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n$.
$R\left(\sum \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n\right) = R_a$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!}$.

Théorème.– Soient $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$ deux séries entières de la variable réelle.

Si il existe $r > 0$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ pour tout $t \in]-r,r[$ alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème.–(HP)

Soit $a = (a_n)$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge.
On note S_a la somme de la série entière de la variable réelle $\sum a_n t^n$.

1) S_a est continue sur $[-1,1]$, $R_a \geq 1$ et $S_a(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2) S_a est dérivable en 1 si et seulement si la série $\sum n a_n$ converge.
Dans ces conditions : $S_a'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$.

3. Fonction développable en série entière

Définition.– Soient r un réel strictement positif et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si f est définie (au moins) sur $]-r,r[$ et si il existe une suite complexe (a_n) telle que : $\forall t \in]-r,r[$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Théorème.– Soient r un réel strictement positif et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ développable en série entière sur $]-r,r[$. Dans ces conditions :

1) f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n$ pour tout $t\in]-r,r[$.

2) f' est développable en série entière sur $]-r,r[$ et son développement s'obtient à partir de celui de f en dérivant terme à terme. Pour $p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est développable en série entière sur $]-r,r[$.

3) La primitive de f sur $]-r,r[$ qui s'annule en zéro est développable en série entière sur $]-r,r[$ et son développement s'obtient par intégration terme à terme de celui de f. Toute primitive de f sur $]-r,r[$ est développable en série entière sur $]-r,r[$.

Remarques :

✓ Si une fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ alors f est C^∞ sur $]-r,r[$.
La réciproque est fausse.

✓ Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, c'est-à-dire si il existe $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$ pour tout $t\in]-r,r[$, alors la suite (a_n) est unique et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
On résume cela en disant que l'on a unicité du développement en série entière de f sur $]-r,r[$.

Définition.– On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de zéro ssi il existe $r>0$ tel que f soit définie et développable en série entière sur $]-r,r[$.

Proposition.– Une combinaison linéaire de fonctions développables en série entière au voisinage de 0 est développable en série entière au voisinage de 0. Un produit de fonctions développables en série entière au voisinage de 0 est développable en série entière au voisinage de 0.

Définition.– Soient r un réel strictement positif et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $]-r,r[$. La série entière $\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n$ est appelée série de Taylor de f en 0.

Remarques : Supposons f développable en série entière au voisinage de 0.

✓ Le rayon de convergence R de la série de Taylor de f en 0 est strictement positif et il existe $r>0$ tel que $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n$ pour tout $t\in]-r,r[$.

✓ On a $r\le R$ mais, même dans le cas où f serait définie sur $]-R,R[$, il n'y a pas de raisons que l'égalité $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n$ soit valable sur $]-R,R[$.

✓ Il est à noter qu'il est possible que la série de Taylor de f en 0 ait un rayon de convergence égal à $+\infty$ et que f ne soit pas développable en série entière au voisinage de zéro.

3.1 Développements en série entière usuels

$\forall\, t\in]-1,1[,\ \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$.

$\forall\, t\in]-1,1[,\ \ln(1-t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}$. (La formule est encore valable pour $t=-1$)

$\forall\, t\in]-1,1[,\ \operatorname{Arctan} t=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}$. (La formule est encore valable pour $t=1$)

$\forall\,\alpha\in\mathbb{C},\forall\, t\in]-1,1[,\ (1+t)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}t^n$ avec : $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n\ge1$ et $\binom{\alpha}{0}=1$.

$\forall\, t\in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}t^n$ et $\sqrt{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{t^n}{2n-1}$.

$\forall\, t\in\mathbb{R},\ e^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}$.

$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \cos t=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\operatorname{ch} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$

$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \sin t=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\operatorname{sh} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exemple : Développement en série entière de Arcsin et de Arccos sur $]-1,1[$.

4. Fonctions génératrices de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition.– Soit $X:\Omega\to\mathbb{N}$ une VAD sur $(\Omega,\mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice G_X de X est la somme de la série entière de la variable réelle $\sum\mathbb{P}(X=k)t^k$.

Proposition.– Soient $X,Y:\Omega\to\mathbb{N}$ des VAD sur $(\Omega,\mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Si $X\sim Y$ alors $G_X=G_Y$.

Théorème.– Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une VAD sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = k)t^k$ et D l'ensemble de définition de la fonction génératrice G_X de X.

1) $R \geq 1$, $[-1,1] \subset D$ et pour tout $t \in D$ on a : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

   G_X est de classe C^∞ sur $]-R, R[$.

2) $\forall t \in [-1,1]$, $|G_X(t)| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$.

   G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

Théorème.– Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une VAD sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.

2) $X \in L^1_d(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1.

   Dans ces conditions : $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

3) $X \in L^2_d(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

   Dans ces conditions : $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$.

4) $X \in L^p_d(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si et seulement si G_X est p fois dérivable en 1.

   Dans ces conditions : $\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-(p-1))) = G_X^{(p)}(1)$.

Proposition.– Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une VAD sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Si $X \in L^2_d(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors G_X est deux fois dérivable en 1 et on a les formules suivantes :

$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$, $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$ et $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

Proposition.– Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = pt + (1-p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

2) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (pt + (1-p))^n$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

3) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\forall t \in \left]\frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

4) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Théorème.– Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ des VAD sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Si X et Y sont indépendantes pour $\mathbb{P}$ alors : $\forall t \in [-1,1]$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$.

Théorème.– Soient $X_1, \cdots, X_p : \Omega \to \mathbb{N}$ des VAD sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si $X_1, \cdots, X_p$ sont mutuellement indépendantes pour $\mathbb{P}$ alors : $\forall t \in [-1,1]$, $G_{X_1 + \cdots + X_p}(t) = G_{X_1}(t) \times \cdots \times G_{X_p}(t)$.

5. Pour aller plus loin (HP)

5.1 Rayon de convergence

Théorème.– Si le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif alors le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est égal à $+\infty$.

5.2 Somme d'une série entière

Théorème.– Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R_a > 0$ et de somme S_a.

1) Si il existe $z_0 \in C_a$ tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ soit absolument convergente alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur $D_a \cup C_a$.

2) Si il existe $z_0 \in C_a$ tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ soit <u>absolument</u> convergente alors S_a est continue en tout point de $D_a \cup C_a$.

Théorème.– Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon $R_a > 0$ et de somme S_a.

1) Si la série numérique $\sum a_n R_a^n$ est <u>absolument</u> convergente alors la série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-R_a, R_a]$.

2) Si la série numérique $\sum a_n R_a^n$ est <u>absolument</u> convergente alors S_a est continue sur $[-R_a, R_a]$.

5.3 Expression intégrale des coefficients d'une série entière et conséquences

Si $\sum a_n t^n$ est une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R_a > 0$ et de somme S_a alors on peut exprimer les coefficients a_n à l'aide des dérivées successives de S_a au point 0. On a en effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon de convergence $R_a > 0$ nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une expression intégrale des coefficients a_n.

Théorème.– (Formule intégrale de Cauchy)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ de somme S_a.

1) $\forall r \in]0, R_a[, \forall n \in \mathbb{N}, \; a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_a\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,d\theta.$

2) En particulier : $\forall r \in]0, R_a[, \quad S_a(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_a\left(re^{i\theta}\right)d\theta.$

Théorème.– (Liouville)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$ et de somme S_a.

S_a est définie sur $\mathbb{C}$ et si S_a est bornée sur $\mathbb{C}$ alors S_a est constante.

Théorème.– (Principe du maximum)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ et de somme S_a.

Si $|S_a(z)| \le |S_a(0)|$ pour tout $z \in D_a$ alors S_a est constante sur D_a.

5.4 Une condition pour qu'une fonction C^∞ soit développable en série entière

Si une fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors f est de classe C^∞ sur $]-r, r[$.
Comme en atteste la proposition qui suit, la réciproque est fausse.

Proposition.– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 0$ et $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t \in \mathbb{R}^*$.

L'application f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de zéro.

Théorème.– (Bernstein)

Si $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur $]-r, r[$ et si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est positive sur $]-r, r[$ alors f est développable en série entière au voisinage de zéro.

Brook Taylor (1685-1731)
Mathématicien anglais, Taylor énonce en 1715 la célèbre formule qui porte aujourd'hui son nom. Il l'énonce sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots$ sans faire figurer de reste et sans se soucier des problèmes de convergence que peut poser une telle formulation. L'importance de ce résultat n'est véritablement reconnu qu'en 1772 date à laquelle Lagrange le qualifie de « principe de base du calcul différentiel ».

Joseph Liouville (1809-1882)
Mathématicien français, Joseph Liouville fait ses études au collège Saint-Louis de Paris et intègre l'école polytechnique. Préférant une carrière académique à une carrière d'ingénieur, il commence à enseigner en 1831. En 1838, il obtient une chaire à l'école polytechnique et est élu à l'académie des sciences l'année suivante. Liouville a travaillé dans de nombreux domaines, de l'astronomie aux mathématiques pures. Parmi ses travaux les plus célèbres on peut citer : la découverte des nombres transcendants en 1844, le problème des valeurs au bord des solutions d'équations différentielles et les intégrales elliptiques. Enfin, c'est Liouville qui le premier prend conscience de l'importance des travaux d'Evariste Galois, mésestimés du vivant de ce dernier.

Serguei Bernstein (1880-1968)
Serguei Bernstein est un mathématicien ukrainien. Il réalise ses études doctorales en France. Dans sa thèse, soumise à la Sorbonne en 1904 sous la direction d'Emile Picard, il résout partiellement le 19ème problème de Hilbert. L'œuvre de Bernstein est vaste et variée. Il s'intéresse à l'approximation des fonctions et via les polynômes, qui portent désormais son nom, il donne une preuve constructive du célèbre théorème de Weierstrass. Bernstein est aussi un grand probabiliste connu pour ses inégalités de déviation, pour une axiomatisation de la théorie des probabilités et des généralisations de la loi des grands nombres.