Théorème spectral

Dans tout le chapitre $(E,(\cdot|\cdot))$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note $\| \ \|$ la norme associé au produit scalaire.

1. L'espace euclidien $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose : $(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Proposition.– $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2$ on a : ${}^tXY = [(X \mid Y)]$.

Dans toute la suite on écrira : $(X \mid Y) = {}^tXY$. C'est abusif mais pratique...

Proposition.– Soient $A = (a_{ij})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tXAY = (X \mid AY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

2. Réduction des endomorphismes symétriques

Définition.– Soit u un endomorphisme de E.

On dit que u est dit symétrique si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \mid u(y)) = (u(x) \mid y)$.

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Proposition.– Soit u un endomorphisme de E et B une base <u>orthonormale</u> de E.

u est symétrique si et seulement si $M_B(u)$ est symétrique.

Proposition.– Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sp} u \neq \varnothing$.
2) Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3) Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

Théorème.– (Théorème spectral)

Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) Il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de E.
2) L'endomorphisme u est diagonalisable et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u alors $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u)$ et $E_{\lambda_1}(u), \cdots, E_{\lambda_r}(u)$ sont deux à deux orthogonaux.

3. Réduction des matrices symétriques réelles

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition.– La matrice A est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

Définition.– Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonalement semblable à B si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

<u>Remarque</u> : Pour exprimer que A est orthogonalement semblable à B on note $A \sim_{os} B$.

La relation « être orthogonalement semblable à » est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{R})$.

On a : $A \sim_{os} B \Leftrightarrow B \sim_{os} A$. Pour exprimer que A est orthogonalement semblable à B on dit aussi que A et B sont orthogonalement semblables.

Proposition.– Si A est symétrique réelle alors χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sp} A \neq \varnothing$.

Théorème.– (Théorème spectral)

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel.

Si la matrice <u>réelle</u> A est <u>symétrique</u> alors on a les propriétés suivantes :

1) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.
2) Il existe une base orthonormale $(X_1, \cdots, X_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
3) A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A alors $M_{n,1}(\mathbb{R}) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(A)$ et $E_{\lambda_1}(A), \cdots, E_{\lambda_r}(A)$ sont deux à deux orthogonaux.

Proposition.– $A \in S_n(\mathbb{R})$ ssi A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

4. Pour aller plus loin (HP)

4.1 Matrices symétriques réelles et matrices nilpotentes

Proposition.– Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ est nilpotente alors $A = 0$.

4.2 Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs

Définition.– Soit u un endomorphisme de E.

1) On dit que u est symétrique positif si et seulement si u est symétrique et vérifie : $\forall x \in E,\ (x \mid u(x)) \geq 0$.
2) On dit que u est symétrique défini positif si et seulement si u est symétrique positif et vérifie : $\forall x \in E,\ \big((x \mid u(x)) = 0 \Rightarrow x = 0_E\big)$.

Définition.– On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs de E.

Proposition.– Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) u est symétrique positif si et seulement si $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^+$.
2) u est symétrique défini positif si et seulement si et seulement si $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^{*+}$.

Théorème.– Si $u \in S^+(E)$ alors il existe un unique $v \in S^+(E)$ tel que $v^2 = u$.

Proposition.– Soit $u : E \to E$ une application. Pour $(x,y) \in E^2$ on pose : $\varphi_u(x,y) = (x \mid u(y))$.

1) Si $u \in L(E)$ alors φ_u est une forme bilinéaire sur E.
2) Si $u \in S(E)$ alors φ_u est une forme bilinéaire symétrique sur E.
3) Si $u \in S^+(E)$ alors φ_u est un semi-produit scalaire sur E.
4) Si $u \in S^{++}(E)$ alors φ_u est produit scalaire sur E.

4.3 Matrices symétriques positives, définies positives

Définition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) La matrice A est dite symétrique positive si et seulement si A est symétrique et vérifie ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2) La matrice A est dite symétrique définie positive si et seulement si A est symétrique positive et vérifie $\left({}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0\right)$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition.– On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $(X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2$ on pose : $\varphi_A(X,Y) = {}^tXAY$.

1) φ_A est une forme bilinéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2) Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors φ_A est une forme bilinéaire symétrique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
3) Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors φ_A est un semi-produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
4) Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors φ_A est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition.– Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$. Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition.– Soient $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base <u>orthonormale</u> de E, $(x,y) \in E^2$ et $u \in L(E)$.

1) u est symétrique positif $\Leftrightarrow$ $M_B(u)$ est symétrique positive.
2) u est symétrique défini positif $\Leftrightarrow$ $M_B(u)$ est symétrique définie positive.

Proposition.– Si la matrice <u>réelle</u> A est <u>symétrique</u> alors on a les caractérisations suivantes :

A est symétrique positive si et seulement si $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^+$.

A est symétrique définie positive si et seulement si et seulement si $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^{*+}$.

Proposition.–

1) La matrice réelle A est symétrique positive si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs.
2) La matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

Théorème.– Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Proposition.– Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

Théorème.– (Décomposition polaire)

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.