Théorie des déterminants

Dans tout le chapitre $(K,+,\times)$ désigne un corps.

1. Formes p-linéaires sur un K-espace vectoriel (Mpsi)

Soient E un K-espace vectoriel et p un entier supérieur ou égal à deux.

Définition.– Une forme p-linéaire sur le K-espace vectoriel E est une application $\varphi : E^p \to K$ vérifiant : $\forall\, j \in [\![1,p]\!]$, $\forall\, (a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_p) \in E^{p-1}$, $\varphi(a_1,\cdots,a_{j-1},\bullet,a_{j+1},\cdots,a_p) \in L(E,K)$.

Remarque : Une forme 2-linéaire est appelée une forme bilinéaire.

Proposition.– Soit $\varphi : E^p \to K$ une forme p-linéaire sur E.

1) $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, (x_1,\cdots,x_p) \in E^p$, $\varphi(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_p) = \lambda^p \varphi(x_1,\cdots,x_p)$.
2) Soit $(x_1,\cdots,x_p) \in E^p$. Si l'un au moins des x_i est nul alors $\varphi(x_1,\cdots,x_p) = 0_K$.

Définition.– Une forme p-linéaire $\varphi : E^p \to K$ sur E est dite alternée si et seulement si $\varphi(x_1,\cdots,x_p) = 0_K$ pour tout p-uplet $(x_1,\cdots,x_p)$ de E^p dont au moins deux vecteurs sont égaux.

Remarque : Si $\varphi : E^2 \to K$ est une forme bilinéaire alors : φ est alternée $\Leftrightarrow \forall\, x \in E$, $\varphi(x,x) = 0_K$.

Proposition.– Soient $\varphi : E^p \to K$ une forme p-linéaire alternée et $(x_1,\cdots,x_p) \in E^p$.

1) On ne change pas la valeur prise par φ sur le p-uplet $(x_1,\cdots,x_p)$ en ajoutant à l'un des vecteurs du p-uplet une combinaison linéaire des autres.
2) Si la famille $(x_1,\cdots,x_p)$ est liée alors $\varphi(x_1,\cdots,x_p) = 0_K$.
3) $\forall\, \sigma \in S_p$, $\varphi(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1,\cdots,x_p)$.

2. Déterminant de n vecteurs dans un espace de dimension n (Mpsi)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Théorème fondamental.– Fixons une base $B = (e_1,\cdots,e_n)$ de E.

1) Il existe une unique forme n-linéaire alternée φ telle que $\varphi(e_1,\cdots,e_n) = 1_K$.
   Elle est appelée déterminant dans la base B et est notée $\det_B$.
2) $\forall\, \varphi \in \Lambda_n(E)$, $\exists!\, \lambda \in K \mid \varphi = \lambda \det_B$.
3) $\Lambda_n(E)$ est une droite vectorielle et $\{\det_B\}$ est une base de $\Lambda_n(E)$.

Définition.– Si B est une base de E et si $(x_1,\cdots,x_n) \in E^n$ alors le scalaire $\det_B(x_1,\cdots,x_n)$ est appelé déterminant de la famille de vecteurs $(x_1,\cdots,x_n)$ dans la base B.

Théorème.– Soient $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E et $(x_1,\cdots,x_n) \in E^n$.

1) $\det_B(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, e_1^*(x_{\sigma(1)})\cdots e_n^*(x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, e_{\sigma(1)}^*(x_1)\cdots e_{\sigma(n)}^*(x_n)$.
2) $(x_1,\cdots,x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_B(x_1,\cdots,x_n) \neq 0$.

2.1 Application aux systèmes linéaires carrés d'ordre n : formules de Cramer

On se donne $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(K)$ et $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(K)$ et on considère le système linéaire à n équations et à l'inconnue $(x_1,\cdots,x_n) \in K^n$: $(L) \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$.

En posant $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ le système (L) se réécrit matriciellement sous la forme $AX = B$.

Théorème.– Si A est inversible alors (L) admet une unique solution $(x_1,\cdots,x_n)$ donnée par :

$\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$ où $A_j = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j-1} & \beta_1 & \alpha_{1j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj-1} & \beta_n & \alpha_{nj+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ est la matrice carrée d'ordre n déduite de A en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre du système linéaire.

Proposition.– Le système linéaire homogène $(H)\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\cdots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \alpha_{n1}x_1+\cdots+\alpha_{nn}x_n=\beta_n\end{cases}$ admet au moins une solution non nulle dans K^n si et seulement si $\det A=0$.

2.2 Application à l'orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Orienter Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E c'est choisir une base $B=(e_1,\cdots,e_n)$ de E et « décréter » qu'elle est directe. A partir de là, si $B'=(e_1',\cdots,e_n')$ est une autre base de E alors $\det_B(e_1',\cdots,e_n')\neq 0$ et comme il s'agit d'un réel il n'y a que deux possibilités : ou bien $\det_B(e_1',\cdots,e_n')>0$ et on dit que la base B' est directe, ou bien $\det_B(e_1',\cdots,e_n')<0$ et on dit que la base B' est indirecte. Dans E il y a donc deux catégories de bases : celles qui sont directes et celles qui sont indirectes.

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois. Considérons une base $B=(e_1,e_2,e_3)$ de E et orientons E en décrétant qu'elle est directe. Dès lors : les bases (e_2,e_3,e_1) et (e_3,e_1,e_2) sont directes et les bases (e_1,e_3,e_2), (e_3,e_2,e_1) et (e_2,e_1,e_3) sont indirectes.

3. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie (Mpsi)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$.

Théorème-Définition.– Soit $u\in L(E)$. Si $B=(e_1,\cdots,e_n)$ et $B=(e_1',\cdots,e_n')$ sont des bases de E alors $\det_B(u(e_1),\cdots,u(e_n))=\det_{B'}(u(e_1'),\cdots,u(e_n'))$. Le scalaire $\det_B(u(e_1),\cdots,u(e_n))$ est indépendant de la base B considérée et ne dépend que de u. Il est noté $\det u$ et est appelé déterminant de l'endomorphisme u.

Proposition.– Soient B une base de E et u un endomorphisme de E.
$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$, $\det_B(u(x_1),\cdots,u(x_n))=(\det u)\times\det_B(x_1,\cdots,x_n)$.

Proposition.– Soient u et v des endomorphismes de E.
1) $\det Id_E=1$.
2) $\forall\lambda\in K$, $\det(\lambda u)=\lambda^n\det u$.
3) $\det(v\circ u)=(\det v)\times(\det u)$.
4) u est bijective si et seulement si $\det u\neq 0_K$. Si $u\in GL(E)$ alors $\det u^{-1}=\dfrac{1}{\det u}$.
5) $\det(u+v)$ n'est égal à rien de spécial et surtout pas à $\det u+\det v$.

4. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n (Mpsi)

Définition.– Soit $A\in M_n(K.)$ Le déterminant de la matrice A est le scalaire $\det A$ défini par : $\det A=\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_n)$ où $(C_1,\cdots,C_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A et où ε est la base canonique de K^n.

Remarques
✓ Si $A=(\alpha_{ij})$ alors pour $j\in[\![1,n]\!]$, $C_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj})=a_{1j}\varepsilon_1+\cdots+a_{nj}\varepsilon_n$.
✓ On ne parle de déterminant que pour une matrice carrée.
✓ Si $A=(a_{ij})$, le scalaire $\det A$ est aussi noté $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.
✓ On a $\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\ \alpha'&\beta'\end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta$ et $\det[\alpha]=\alpha$.

Théorème.– Soit $A=(a_{ij})\in M_n(K)$. On note $(C_1,\cdots,C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de A, $(L_1,\cdots,L_n)$ la famille des vecteurs lignes de A et ε la base canonique de K^n.
1) $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.
2) $\det{}^tA=\det A$.
3) $\det A=\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_n)=\det_\varepsilon(L_1,\cdots,L_n)$.

Proposition.– Soient $(A,B)\in M_n(K)^2$.
1) $\det I_n=1$.
2) $\forall\lambda\in K$, $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$.
3) $\det(AB)=(\det A)\times(\det B)$.
4) A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$. Si A est inversible alors $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$.
5) $\det(A+B)$ n'est égal à rien de spécial et surtout pas à $\det A+\det B$.

5. Calcul effectif d'un déterminant (Mpsi)

Tout calcul de déterminant peut se ramener au calcul du déterminant d'une matrice carrée.

Proposition.– Soient E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et B une base de E.

1) Si $x_1,\cdots,x_n$ sont n vecteurs de E alors $\det_B(x_1,\cdots,x_n) = \det M_B(x_1,\cdots,x_n)$.

2) Si u est un endomorphisme u de E alors $\det u = \det M_B(u)$.

5.1 Quelques principes utiles pour le calcul d'un déterminant

On note $(C_1,\cdots,C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de $M \in M_n(K)$ et ε la base canonique du K-espace vectoriel K^n.

✓ Si on permute deux vecteurs colonnes de M alors le déterminant de M est changé en son opposé. Autrement dit : $\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_i,\cdots,C_j,\cdots,C_n) = -\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_j,\cdots,C_i,\cdots,C_n)$.

✓ Si on effectue une permutation σ sur la famille des vecteurs colonnes de M alors le déterminant de la matrice obtenue est égal à celui de M multiplié par $\varepsilon(\sigma)$. Autrement dit : $\det_\varepsilon(C_{\sigma(1)},\cdots,C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\times\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_n)$.

✓ Le déterminant de M dépend linéairement de chacun des vecteurs colonnes. On a donc :
$\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_{i-1},\lambda C_i,C_{i+1},\cdots,C_n) = \lambda\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\cdots,C_n)$
$\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_i'+C_i'',\cdots,C_n) = \det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_i',\cdots,C_n)+\det_\varepsilon(C_1,\cdots,C_i'',\cdots,C_n)$.

✓ On ne modifie pas le déterminant de M en ajoutant à l'un de ses vecteurs colonnes une combinaison linéaire des autres. Autrement dit :
$\det_\varepsilon\Big(C_1,\ldots,C_{j-1},C_j+\sum_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}\lambda_k C_k,C_{j+1},\ldots,C_n\Big) = \det_\varepsilon(C_1,\ldots,C_{j-1},C_j,C_{j+1},\ldots,C_n)$
Si la famille $(C_1,\cdots,C_n)$ des vecteurs colonnes de M est liée alors $\det M = 0$. En particulier si deux des colonnes de M sont égales alors $\det M = 0$.

Commentaire : Toutes les propriétés ci-dessus sont aussi valables en remplaçant les vecteurs colonnes de M par ses vecteurs lignes, ceci car $\det {}^tM = \det M$.

5.2 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Définition.– Soit $M = (\alpha_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n avec $n \geq 2$. On note M_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de M en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de M. Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ est appelé cofacteur de α_{ij} dans la matrice M.

Théorème.– Soit $M = (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$. On note A_{ij} le cofacteur de α_{ij} dans la matrice M.

1) $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\det M = \alpha_{1j}A_{1j}+\cdots+\alpha_{nj}A_{nj}$.

2) $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $\det M = \alpha_{i1}A_{i1}+\cdots+\alpha_{in}A_{in}$.

Remarques

✓ Lorsque l'on utilise la formule 1) on dit que l'on développe det M suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne.

✓ Lorsque l'on utilise la formule 2) on dit que l'on développe det M suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne.

✓ Le calcul d'un déterminant $n\times n$ se ramène au calcul de n déterminants $(n-1)\times(n-1)$. En itérant on ramène le calcul d'un déterminant $n\times n$ au calcul de déterminants 2×2..

Définition.– Soit $M = (\alpha_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n avec $n \geq 2$. La comatrice de M est la matrice carrée $\mathrm{Com}(M)$ définie par $\mathrm{Com}\,M = (A_{ij})$ avec A_{ij} cofacteur de α_{ij} dans la matrice M.

Théorème.– Soit $M \in M_n(K)$.

$M\,{}^t\mathrm{Com}\,M = {}^t\mathrm{Com}\,M\,M = (\det M)I_n$ et si M est inversible alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{Com}\,M$.

Remarques :

✓ La formule précédente n'est opérationnelle pour le calcul de l'inverse que lorsque $n \in \{2,3\}$.

✓ Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ est inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$.

6. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (Mpsi)

On additionne et on multiplie les matrices par blocs comme les matrices à coefficients scalaires. Il faut simplement faire attention à l'ordre des facteurs puisque le produit matriciel n'est pas commutatif (contrairement à la multiplication dans K) et veiller à ce que la taille des blocs soient compatibles.

Théorème.– Si $A \in M_p(K)$, $C \in M_{p,q}(K)$ et $D \in M_q(K)$ alors $\det\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D\end{bmatrix} = (\det A)\times(\det D)$.

Remarques

✓ Si $M = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1q} \\ 0 & N_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & N_{q-1q} \\ 0 & \cdots & 0 & N_{qq}\end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs où pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, N_{kk} est une matrice carrée alors $\det M = (\det N_{11})\times\cdots\times(\det N_{qq})$.

✓ Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, resp diagonale) est égal au produit de ses éléments diagonaux.

✓ Si $M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$ avec $A \in M_p(K), B \in M_{q,p}(K), C \in M_{p,q}(K), D \in M_q(K)$ alors il ne faut pas penser que l'on a $\det M = (\det A)(\det D) - (\det B)(\det C)$ car c'est bien faux !!!

7. Déterminant de Vandermonde (Mpsi)

Le déterminant de Vandermonde $V_n(a_1, \cdots, a_n)$ associé à la famille de scalaires $(a_1, \cdots, a_n)$ est le déterminant d'ordre n défini par :

$$V_n(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Proposition.– $V_n(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i)$. Le déterminant de Vandermonde $V_n(a_1, \cdots, a_n)$ est non nul si et seulement si les scalaires $a_1, \cdots, a_n$ sont deux à deux distincts.

<u>Application aux polynômes d'interpolation de Lagrange</u>

On considère $(a_0, a_1 \cdots, a_n)$ et $(b_0, b_1 \cdots, b_n)$ dans K^{n+1} et on suppose que les scalaires $a_0, a_1 \cdots, a_n$ sont deux à deux distincts. Il existe un unique polynôme $P \in K_n[X]$ vérifiant : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(a_k) = b_k$. P est appelé polynôme interpolateur de $(b_0, b_1 \cdots, b_n)$ associé à la famille $(a_0, \cdots, a_n)$.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

Né en 1735 à Paris, Alexandre-Théophile Vandermonde est un mathématicien français. C'est le déterminant auquel il a laissé son nom qui l'a rendu célèbre. Mathématicien mais aussi musicien, économiste et chimiste il travaille notamment avec Bezout et Lavoisier. En 1771, Vandermonde devient membre de l'académie des sciences. En 1794 il devient membre du conservatoire national des arts et métiers puis examinateur au concours d'entrée de l'école polytechnique et professeur à l'école normale supérieure.

Polynôme caractéristique

Dans tout le chapitre $(K,+,\times)$ désigne un corps.

1. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

La notion de déterminant d'une matrice carrée a été abordée pour des matrices à coefficients dans un corps. Si l'anneau des polynômes $K[X]$ n'est pas un corps, le corps des fractions rationnelles $K(X)$ en est un et on peut donc appliquer la théorie des déterminants à des matrices carrées à coefficients dans $K(X)$. Si $M=(F_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K alors $\det M \in K(X)$.

Proposition.– Soit $M=(F_{ij}) \in M_n(K(X))$. Si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, F_{ij} est un polynôme de $K[X]$ alors $\det M$ est un polynôme de $K[X]$.

Théorème-Définition.– Soit $A \in M_n(K)$. La matrice $XI_n - A$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps des fractions rationnelles $K(X)$. Son déterminant est un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans le corps K. Il est appelé polynôme caractéristique de A, est noté χ_A. et est donné par l'égalité : $\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Proposition.– Soit $A \in M_n(K)$.

1) $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$.
2) Si $A \in M_2(K)$ alors $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.
3) Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\chi_{\overline{A}} = \overline{\chi_A}$.

Proposition.–

1) Si $A \in M_p(K)$, $C \in M_{p,q}(K)$, $D \in M_q(K)$ et si $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ alors $\chi_M = \chi_A \chi_D$.
2) Si A est triangulaire d'éléments diagonaux $a_1,\cdots,a_n$ alors $\chi_A = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$.
3) Si $M = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1q} \\ 0 & N_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & N_{q-1q} \\ 0 & \cdots & 0 & N_{qq} \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs où pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, N_{kk} est une matrice carrée alors $\chi_M = \chi_{N_{11}} \cdots \chi_{N_{qq}}$.

Proposition.–

1) $\forall A \in M_n(K), \forall P \in GL_n(K)$, $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$. (Invariance par similitude)
2) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
3) Une matrice carrée et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

2. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème-Définition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in L(E)$. Si B et B' sont des bases de E alors $\chi_{M_B(u)} = \chi_{M_{B'}(u)}$. Le polynôme $\chi_{M_B(u)}$ est donc indépendant de la base B considérée. Il est noté χ_u et est appelé polynôme caractéristique de u.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.

1) $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
1) Si v est un automorphisme de E alors $\chi_{v^{-1} \circ u \circ v} = \chi_u$. (Invariance par similitude)

3. Pour aller plus loin (HP)

3.1 Matrice compagnon d'un polynôme

Si $A \in M_n(K)$ alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n. Réciproquement, si P est un polynôme unitaire de degré n, on peut se demander si il existe une matrice $A \in M_n(K)$ dont le polynôme caractéristique soit égal à P. La réponse est positive comme nous allons le voir ci-après.

Proposition.– Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ de $K[X]$. On pose : $C_P = \begin{bmatrix} 0_K & \cdots & \cdots & 0_K & -a_0 \\ 1_K & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_K & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & 1_K & -a_{n-1} \end{bmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice C_P est égal à P.

La matrice C_P est appelé matrice compagnon du polynôme P.

3.2 Quelques propriétés supplémentaires du polynôme caractéristique

Proposition.– Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie et si u est un endomorphisme de rang un alors : $\chi_u = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(u))$.

Proposition.– Si $A \in M_n(K)$ est une matrice de rang un alors $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.

Proposition.– $\forall (A,B) \in (M_n(K))^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

3.3 Application invariante par similitude

Soit X un ensemble quelconque et $f : M_n(K) \to X$ une application de $M_n(K)$ dans X. On dit que f est invariante par similitude si et seulement si deux matrices semblables ont la même image par f c'est-à-dire si et seulement si f vérifie la propriété $f(P^{-1}AP) = f(A)$ pour tout $(A,P) \in M_n(K) \times GL_n(K)$. Dans un tel cas de figure, et si E est un K-espace vectoriel de dimension n, alors on peut associer à f l'application $F : L(E) \to X$ définie par $F(u) = f(M_B(u))$ où B est une base quelconque de E.

Proposition.– Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. Les applications rang, trace, déterminant et polynôme caractéristique sont invariantes par similitude sur $M_n(K)$.