Intégration sur un segment des fonctions de $\mathbb{R}$ dans F

Soient $(F,\| \|_F)$, $(G,\| \|_G)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leq b$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Notion d'application continue par morceaux

Définition.– On dit que $f:[a,b]\to F$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma=(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{i-1},a_i[$ se prolonge en une application continue sur $[a_{i-1},a_i]$.
On dit que $f:I\to F$ est continue par morceaux sur l'intervalle I si et seulement si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I. L'ensemble des applications continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans F est noté $M^0([a,b],F)$. L'ensemble des applications continues par morceaux sur I à valeurs dans F est noté $M^0(I,F)$.

Proposition.–

1) Si $f:[a,b]\to F$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$.
2) Si $f:[a,b]\to F$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $\|f\|_F:[a,b]\to\mathbb{R}^+$, définie par $\|f\|_F(t)=\|f(t)\|_F$, est continue par morceaux sur $[a,b]$.
3) Si $f,g:[a,b]\to F$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et si α,β sont des scalaires alors $\alpha f+\beta g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
4) Soient $f:[a,b]\to F$ une application et $B=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de F. On note f_i la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur la base B. On a donc : $\forall t\in[a,b],\ f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t)e_i$.

   Dans ces conditions : $f\in M^0([a,b],F)\Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ f_i\in M^0([a,b],\mathbb{K})$.

<u>Remarques</u> :

✓ D'après 1), $M^0([a,b],F)\subset B([a,b],F)$.

✓ D'après 3), $M^0([a,b],F)$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $B([a,b],F)$.

2. Intégrale d'une application continue par morceaux

Lemme.– Soient $f\in M^0([a,b],F)$ et $B=(e_1,\cdots,e_n)$, $B'=(e'_1,\cdots,e'_n)$ deux bases de F.
On note φ_i (resp ψ_i) la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur B (resp B').

Dans ces conditions : $\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{[a,b]}\varphi_i\right)e_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{[a,b]}\psi_i\right)e'_i$.

Définition.– L'intégrale sur $[a,b]$ de $f\in M^0([a,b],F)$ est le vecteur $\int_{[a,b]}f$ de F défini par : $\int_{[a,b]}f=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{[a,b]}f_i\right)e_i$ où $B=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de F et où f_i est la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur B.

3. Propriétés fondamentales

Théorème.– Soient $f:[a,b]\to F$ continue par morceaux sur $[a,b]$ et $u\in L(F,G)$.
L'application $u\circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\int_{[a,b]}u\circ f=u\left(\int_{[a,b]}f\right)$.

Théorème.– Soient $f,g:[a,b]\to F$ continues par morceaux sur $[a,b]$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.

1) $\int_{[a,b]}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{[a,b]}f+\beta\int_{[a,b]}g$ et $\left\|\int_{[a,b]}f\right\|_F\leq\int_{[a,b]}\|f\|_F$.
2) Pour tout $c\in[a,b]$ on a : $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f$.
3) Si f et g ne diffèrent sur $[a,b]$ qu'en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}g$.

Théorème.– (Formule de Chasles)
Soient $f\in M^0(I,F)$ et $(\alpha,\beta)\in I^2$.

Si $\alpha\leq\beta$ alors on pose : $\int_\alpha^\beta f=\int_{[\alpha,\beta]}f$. Si $\alpha>\beta$ alors on pose : $\int_\alpha^\beta f=-\int_{[\beta,\alpha]}f$.

Dans ces conditions : pour tout $(\alpha,\beta,\gamma)\in I^3$ on a : $\int_\alpha^\beta f=\int_\alpha^\gamma f+\int_\gamma^\beta f$.

Guillaume Roussel MP3 Montaigne

Théorème.– (Sommes de Riemann)

1) Si $f \in M^0([0,1],F)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{[0,1]} f.$

2) Si $f \in M^0([a,b],F)$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f.$$

Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans F

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $(F, \| \|_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Définition et premières propriétés

Définition.– Soit $f : I \to F$, $a \in I$ et $T_a : I \setminus \{a\} \to F$ définie par : $T_a(t) = \frac{1}{t-a}[f(t) - f(a)]$.

1) On dit que f est dérivable au point a si et seulement si $\lim_{a, \neq} T_a$ existe dans F.
   En cas d'existence, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée vecteur dérivé de f au point a.
2) Si a n'est pas l'extrémité droite (resp gauche) de I, on dit que f est dérivable à droite (resp à gauche) en a si et seulement si $\lim_{a^+} T_a$ $\left(\text{resp } \lim_{a^-} T_a\right)$ existe dans F. En cas d'existence, cette limite est notée $f'_d(a)$ $\left(\text{resp } f'_g(a)\right)$ et est appelée vecteur dérivé à droite (resp à gauche) de f en a.

Définition.– Une application $f : I \to F$ est dite dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I. On note $D(I,F)$ l'ensemble des applications de I dans F dérivables sur I.
Lorsque f est dérivable sur I on dispose de l'application $f' : I \to F$ qui à tout réel $t \in I$ associe le vecteur $f'(t)$ de F. L'application f' est appelée application dérivée de f.

Proposition.– Soient $f : I \to F$ une application et $a \in I$.

1) Si f est dérivable au point a alors f est continue au point a.
2) Si $a \in \overset{\circ}{I}$ et si f est dérivable à droite et à gauche au point a alors f est continue au point a.
3) Si $a \in \overset{\circ}{I}$ alors : f est dérivable au point a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche au point a et si de plus $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition.– Si $f : I \to F$ est dérivable sur I alors f est continue sur I. La réciproque est fausse.

Proposition.– Soient $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F, $f : I \to F$ une application et $a \in I$.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on pose : $f_i = e_i^* \circ f$.

1) f est dérivable au point a si et seulement si f_i est dérivable au point a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
   Dans ces conditions : $f'(a) = f'_1(a)e_1 + \cdots + f'_n(a)e_n$.
2) f est dérivable sur I si et seulement si f_i est dérivable sur I pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
   Dans ces conditions : $f' = f'_1 e_1 + \cdots + f'_n e_n$.

Corollaire.– Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application à valeurs complexes.

1) f est dérivable sur I si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables sur I.
   Dans ces conditions : $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$, $(\operatorname{Re} f)' = \operatorname{Re} f'$ et $(\operatorname{Im} f)' = \operatorname{Im} f'$.
2) Si f est dérivable sur I alors $\overline{f}$ est dérivable sur I et $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.

Théorème.– Si $f : I \to F$ est dérivable sur l'intervalle I alors :
f est constante sur I si et seulement si f' est l'application nulle.

2. Dérivation et opérations sur les fonctions

Proposition.– Soient $f, g : I \to F$ des applications à valeurs vectorielles, $\alpha, \beta : I \to \mathbb{K}$ des applications à valeurs scalaires et $a \in I$.

1) Si les applications f, g et α, β sont dérivables au point a alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable au point a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha'(a)f(a) + \alpha(a)f'(a) + \beta'(a)g(a) + \beta(a)g'(a)$.
2) Si f, g sont dérivables sur I et α, β dérivables sur I. alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et :
   $(\alpha f + \beta g)' = \alpha' f + \alpha f' + \beta' g + \beta g'$.

Corollaire.– Soient $f, g : I \to F$ des applications, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $a \in I$.

1) Si les applications f, g sont dérivables au point a alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable au point a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha(a)f'(a) + \beta(a)g'(a)$.
2) Si f et g sont dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Proposition.–

1) L'ensemble $D(I,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2) L'application $D : D(I,F) \to F^I$ définie par $D(f) = f'$ est une application linéaire.

Théorème.– Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles, $f : J \to F$ une application à valeurs vectorielles tels que $\varphi(I) \subset J$ et $a \in I$.

1) Si φ est dérivable au point a et si f est dérivable au point $\varphi(a)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable au point a et on a : $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) f'(\varphi(a))$.
2) Si φ est dérivable sur I et si f est dérivable sur J alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

Proposition.– Soient $(F, \| \ \|_F)$ et $(G, \| \ \|_G)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f : I \to F$ une application, $a \in I$ et u une application linéaire de F dans G.

1) Si f est dérivable en a alors $u \circ f$ est dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.
2) Si f est dérivable sur I alors $u \circ f$ est dérivable sur I et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Proposition.– Soient $(F, \| \ \|_F)$, $(G, \| \ \|_G)$, $(H, \| \ \|_H)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, $f : I \to F$, $g : I \to G$, $a \in I$ et B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H.
On considère l'application $B(f,g) : I \to H$ définie par : $B(f,g)(t) = B(f(t), g(t))$.

1) Si f et g sont dérivables au point a alors l'application $B(f,g)$ est dérivable au point a et : $B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.
2) Si f et g sont dérivables sur I alors l'application $B(f,g)$ est dérivable sur I et : $B(f,g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Corollaire1.–

1) Si $\alpha, \beta : I \to \mathbb{K}$ sont des applications à valeurs scalaires dérivables sur I alors $\alpha\beta$ est dérivable sur I et $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta + \alpha\beta'$.
3) Si $f : I \to F$ et $\alpha : I \to \mathbb{K}$ sont dérivables sur I alors αf est dérivable sur I et : $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$.

Corollaire2.– Soit $(F, (\bullet|\bullet))$ un espace euclidien.
La norme associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ est noté $\| \ \|$.
Soient $f, g : I \to F$ des applications à valeurs vectorielles dérivables sur I.

1) L'application à valeurs scalaires $(f \mid g)$ est dérivable sur I et $(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$.
2) L'application à valeurs positives $\|f\|_F^2$ est dérivable sur I et $\left(\|f\|_F^2\right)' = 2(f \mid f')$.

Corollaire3.– Soit $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel de dimension finie.
Si $a : I \to L(F)$ et $f : I \to F$ sont des applications dérivables sur I alors l'application $a \cdot f : I \to F$ définie par $(a \cdot f)(t) = a(t)(f(t))$ est dérivable sur I et on a : $(a \cdot f)' = a' \cdot f + a \cdot f'$.

3. Applications plusieurs fois dérivables

3.1 Définitions et notations

Considérons une application $f : I \to F$.
Par convention f est dite zéro fois dérivable sur I et on pose : $f^{(0)} = f$.
L'application f est dite une fois dérivable sur I ssi f est dérivable sur I et on pose alors : $f^{(1)} = f'$.
L'application f est dite deux fois dérivable sur I ssi $f^{(1)}$ est dérivable sur I et dans ces conditions on pose : $f^{(2)} = \left(f^{(1)}\right)'$.
Etant donné un entier $n \geq 1$, l'application f est dite n fois dérivable sur I ssi f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. Dans ces conditions on pose : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.
En cas d'existence, l'application $f^{(n)}$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ de f. L'application f est dite indéfiniment dérivable sur I ssi pour tout entier n, f est n fois dérivable sur I.

Définition.– Soit $f : I \to F$ une application.

1) On dit que f est de classe C^n sur I ssi f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.
2) On dit que f est de classe C^∞ sur I si et seulement si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exemple</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ si et $f(0) = 0$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

<u>Notations</u> :
L'ensemble des applications de I dans F qui sont n fois dérivables sur I est noté $D^n(I, F)$.
L'ensemble des applications de I dans F qui sont de classe C^n sur I est noté $C^n(I, F)$.
On pose : $C^\infty(I, F) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, F)$. Les applications de $C^\infty(I, F)$ sont dites de classe C^∞ sur I.

3.2 Propriétés

Proposition.– Si $f,g : I \to F$ sont n fois dérivables (resp de classe C^n) sur I et si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est n fois dérivable (resp de classe C^n) sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Proposition.– Soient $(F,\| \|_F)$, $(G,\| \|_G)$, $(H,\| \|_H)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f : I \to F$ et $g : I \to G$ et B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H.
Si f et g sont n fois dérivables (resp de classe C^n) sur I alors $B(f,g)$ est n fois dérivable (resp de classe C^n) sur I et $(B(f,g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f^{(k)},g^{(n-k)})$.

Corollaire1.– Si $\alpha,\beta : I \to \mathbb{K}$ sont des applications à valeurs scalaires n fois dérivables (resp C^n) sur I alors $\alpha\beta$ est n fois dérivable (resp C^n) sur I et $(\alpha\beta)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)}\beta^{(n-k)}$.

Corollaire2.– Si $f : I \to F$ et $\alpha : I \to \mathbb{K}$ sont n fois dérivables (resp de classe C^n) sur I alors αf est n fois dérivable (resp de classe C^n) sur I et $(\alpha f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)} f^{(n-k)}$.

Théorème.– Soient I,J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles, $f : J \to F$ une application à valeurs vectorielles tels que $\varphi(I) \subset J$. Si φ est n fois dérivable (resp de classe C^n) sur I et si f est n fois dérivable (resp de classe C^n) sur J alors $f \circ \varphi$ est n fois dérivable (resp de classe C^n) sur I.

4. Primitives d'une application continue

4.1 Primitive et intégrale

Définition.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une application. On dit que f admet une primitive sur I si et seulement si il existe une application $F : I \to F$ dérivable sur I et telle que : $\forall t \in I,\ F'(t) = f(t)$. On dit alors que F est une primitive de f sur I.

Théorème.– (Fondamental)
Toute application continue sur un intervalle I y admet au moins une primitive. Plus précisément, si $f : I \to F$ est <u>continue</u> sur <u>l'intervalle</u> I et si a est fixé dans I alors on a les propriétés suivantes :

1) L'application $F_a : I \to F$, définie par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a. Les primitives de f sur I sont les $F_a + k$, k décrivant F.
2) Si $(x_0,y_0) \in I \times F$ alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 au point x_0.

Théorème.– Si $f : I \to F$ est continue sur l'intervalle I et si F est une primitive de f sur I alors : $\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

<u>Remarque</u> : Si $f : I \to F$ est de classe C^1 alors : $\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'$.

Si de plus $f(a) = 0_F$ alors $f(x) = \int_a^x f'$ pour $x \in I$.

5. Changement de variable et intégration par parties

Théorème.– (Formule de changement de variable)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $\varphi : I \to J$ est de classe C^1 sur I et si $f : J \to F$ est continue sur J alors : $\forall (\alpha,\beta) \in I^2,\ \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

<u>Utilisation du théorème dans la pratique</u>

1) Supposons que l'on dispose $\int_a^b f(x)\,dx$ avec $(a,b) \in J^2$. Faire le changement de variable $x = \varphi(t)$ consiste à déterminer $(\alpha,\beta) \in I^2$ vérifiant $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, à remplacer a par α, b par β et x par $\varphi(t)$ puis à remplacer le symbole dx par le symbole $\varphi'(t)dt$.
Notons que φ n'est pas supposée bijective et que α,β n'ont aucune raison d'être uniques.
2) Supposons que l'on dispose $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ avec $(\alpha,\beta) \in I^2$. Faire le changement de variable $x = \varphi(t)$ consiste à remplacer α par $\varphi(\alpha)$, β par $\varphi(\beta)$ et $\varphi(t)$ par x puis à remplacer le symbole $\varphi'(t)dt$ par le symbole dx.

Proposition.–

1) Si $f : \mathbb{R} \to F$ est continue et T- périodique alors : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f = \int_0^T f$.
2) Si $f : [-a,a] \to F$ est continue et paire alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.
Si $f : [-a,a] \to F$ est continue et impaire alors $\int_{-a}^a f = 0$.

Théorème.– (Formule d'intégration par parties)

Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to F$ sont de classe C^1 sur l'intervalle I alors :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b \alpha f' = \left[\alpha f\right]_a^b - \int_a^b \alpha' f.$$

6. Inégalité des accroissements finis et formules de Taylor

Théorème.– (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to F$ une application de classe C^1 sur l'intervalle I.

Si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|f'(t)\|_F \leq M$ pour tout $t \in I$ alors f est M-lipschitzienne sur I et :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq M|x-y|.$$

Théorème.– (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral)

Si $f : I \to F$ est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I alors pour tout $(a,x) \in I^2$ on a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Théorème.– (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ de classe C^{n+1} sur I. Si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\left\|f^{(n+1)}(t)\right\|_F \leq M$ pour tout $t \in I$ alors pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$ on a l'inégalité suivante :

$$\left\| f(x) - \left(f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) \right\|_F \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Théorème.– (Formule de Taylor Young)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to F$ une application et $a \in I$.

Si f est de classe C^n sur I alors il existe une application $\varepsilon : I \to F$ qui vérifie $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0_F$ et

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (t-a)^n \varepsilon(t).$$

Arcs paramétrés

Dans tout le chapitre E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On note $(\bullet|\bullet)$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme associée. Dans tout le chapitre, O est un point fixé de E.

Proposition.– Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale de E.
Soit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur non nul de E.
1) $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E.
2) Si la base B est directe alors la base B' l'est aussi.
3) Si $\vec{u}$ est unitaire alors $\vec{v}$ l'est aussi et $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormale de E.

1. Arcs paramétrés de E

Définition.– On appelle arc paramétré de E tout couple $\gamma = (I, \vec{f})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et où $\vec{f}$ est une application de I dans E. On dit que l'arc paramétré γ est de classe C^k si et seulement si l'application $\vec{f}$ est de classe C^k sur I.

Définition.– Soient $\gamma = (I, \vec{f})$ un arc paramétré de E et $t \in I$.
Le point $M_\gamma(t) = O + \vec{f}(t)$ est appelé point de γ de paramètre t.
Le vecteur $\vec{f}(t)$ est appelé vecteur position de γ au point $M_\gamma(t)$.
L'ensemble $C_\gamma = \{M \in E, \exists\, t \in I \mid M = M_\gamma(t)\}$ est appelé support de γ.
En cas d'existence, les vecteurs $\vec{f}'(t)$ et $\vec{f}''(t)$ sont respectivement appelés vecteur vitesse et vecteur accélération de γ au point $M_\gamma(t)$ et sont respectivement notés $\vec{v}_\gamma(t)$ et $\vec{a}_\gamma(t)$.

Remarques
- ✓ Il est important de ne pas confondre l'arc paramétré γ avec son support C_γ. Deux arcs paramétrés γ et δ peuvent avoir le même support et ne pas être égaux. En mécanique du point et dans le cas où $D = [0, +\infty[$ l'arc paramétré $\gamma = (I, \vec{f})$ est appelée un mouvement et le support C_γ en est la trajectoire. Deux mouvements différents peuvent avoir des trajectoires identiques.
- ✓ Un point M du support γ peut être associé à plusieurs valeurs distinctes du paramètre t. On peut donc avoir $M_\gamma(t_1) = M_\gamma(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$.
- ✓ Pour tout $t \in I$, $\vec{f}(t) = \overrightarrow{OM_\gamma}(t)$. On a donc l'égalité d'applications $\vec{f} = \overrightarrow{OM_\gamma}$.
Les applications à valeurs vectorielles $\vec{v}_\gamma$ et $\vec{a}_\gamma$ sont aussi notées $\dfrac{d\overrightarrow{OM_\gamma}}{dt}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM_\gamma}}{dt^2}$.
- ✓ Dans toute la suite l'arc paramétré γ sera toujours supposé de classe C^{CIF}.

Définition.– Soient $\gamma = (I, \vec{f})$ un arc paramétré de E et $t \in I$.
1) Le point $M_\gamma(t)$ est dit régulier si et seulement si $\vec{f}'(t) \neq 0_E$.
Dans le cas contraire $M_\gamma(t)$ est dit singulier ou encore stationnaire.
2) Le point $M_\gamma(t)$ est dit birégulier si et seulement si $(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t))$ est une famille libre.
3) L'arc paramétré γ est dit régulier (resp birégulier) si et seulement si pour tout $t \in I$ le point $M_\gamma(t)$ est régulier (resp birégulier).

Proposition.– Tout point birégulier est régulier.

2. Notion de tangente en un point à un arc paramétré

Soient $\gamma = (I, \vec{f})$ un arc paramétré de E et $a \in I$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ et $\forall\, t \in [a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$, $M_\gamma(t) \neq M_\gamma(a)$.
Pour tout $t \in [a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$ on peut donc parler de la droite affine $(M_\gamma(a)M_\gamma(t))$.

Pour tout $t \in [a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$ on pose : $\vec{u}_a(t) = \dfrac{\overrightarrow{M_\gamma(a)M_\gamma(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_\gamma(a)M_\gamma(t)}\right\|}$.

Il est à noter que $\vec{u}_a(t)$ est un vecteur directeur unitaire de la droite affine $(M_\gamma(a)M_\gamma(t))$.

Définition.–
1) On dit que l'arc paramétré γ admet une demi-tangente à gauche au point $M_\gamma(a)$ ssi le vecteur $\vec{u}_a(t)$ admet une limite lorsque $t \to a, t < a$. Dans ces conditions on pose : $\vec{u}_g = \lim\limits_{t \to a, t<a} \vec{u}_a(t)$.
2) On dit que l'arc paramétré γ admet une demi-tangente à droite au point $M_\gamma(a)$ ssi le vecteur $\vec{u}_a(t)$ admet une limite lorsque $t \to a, t > a$. Dans ces conditions on pose : $\vec{u}_d = \lim\limits_{t \to a, t>a} \vec{u}_a(t)$.

Définition.– On dit que l'arc paramétré γ admet une tangente au point $M_\gamma(a)$ si et seulement si γ admet une demi-tangente à gauche et à droite au point $M_\gamma(a)$ et si $\left(\vec{u}_d = \vec{u}_g \text{ ou } \vec{u}_d = -\vec{u}_g\right)$.

Dans ces conditions :

1) La droite affine $T_{a,\gamma} = M_\gamma(a) + \mathbb{R}\vec{u}_d$ est appelée tangente à γ au point $M_\gamma(a)$.

2) La droite affine $N_{a,\gamma} = M_\gamma(a) + \left(\mathbb{R}\vec{u}_d\right)^\perp$ est appelée normale à γ au point $M_\gamma(a)$.

Proposition.– On suppose que l'arc paramétré γ admet une tangente au point $M_\gamma(a)$.
Si $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base <u>orthonormale</u> de E et si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente $T_{a,\gamma}$ alors $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ est un vecteur directeur de la normale $N_{a,\gamma}$.

Théorème.– Si le point $M_\gamma(a)$ est régulier alors γ admet une tangente au point $M_\gamma(a)$ et le vecteur vitesse $\vec{f}'(a)$, qui est non nul, est un vecteur directeur de cette tangente.

3. Repère de Frenet (HP)

On suppose que E est orienté et on considère une base <u>orthonormale</u> <u>directe</u> $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de E.

Proposition.– Soit $\vec{u}$ un vecteur <u>unitaire</u> de E.
Il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ de E tel que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ soit une base orthonormale directe de E. Si $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$.

Définition.– Soient $\gamma = \left(I, \vec{f}\right)$ un arc paramétré C^1 régulier de E et $t \in I$.

On pose $\overrightarrow{T_\gamma}(t) = \dfrac{\vec{f}'(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|}$ et on note $\overrightarrow{N_\gamma}(t)$ l'unique vecteur unitaire de E tel que $\left(\overrightarrow{T_\gamma}(t), \overrightarrow{N_\gamma}(t)\right)$ soit une base orthonormale directe de E. Le vecteur $\overrightarrow{T_\gamma}(t)$ est appelé vecteur unitaire tangent à γ au point $M_\gamma(t)$, le vecteur $\overrightarrow{N_\gamma}(t)$ est appelé vecteur unitaire normal à γ au point $M_\gamma(t)$ et le repère orthonormal direct $\left(M_\gamma(t), \overrightarrow{T_\gamma}(t), \overrightarrow{N_\gamma}(t)\right)$ est appelé repère de Frenet au point $M_\gamma(t)$.

<u>Remarque</u> : si $\overrightarrow{T_\gamma}(t) = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors $\overrightarrow{N_\gamma}(t) = -b\vec{i} + a\vec{j}$.

Suites et séries d'applications à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soient $(E, \| \ \|_E)$ est un espace vectoriel normé, $D \subset E$ et $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension <u>finie</u>. L'ensemble des applications de D dans F est noté F^D.

1. Convergence simple et uniforme d'une suite d'applications

1.1 Convergence simple et uniforme sur une partie A de D

Soit (f_n) une suite d'applications de D dans F c'est-à-dire une suite d'éléments de F^D. Soient A une partie de D et $f : A \subset E \to F$ une application de A dans F c'est-à-dire un élément de F^A.

Définition.– On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A vers f si et seulement si $\forall x \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. On dit que la suite (f_n) converge uniformément sur A vers f si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, \ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$.

<u>Remarque</u> : f_n est une application de D dans F alors que f est une application de A dans F.

Proposition.–
1) Si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors (f_n) converge simplement sur A vers f.
2) (f_n) converge uniformément sur A vers f si et seulement si : $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^A = 0$.

<u>Remarque</u> : Dans 2) la condition $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty^A = 0$ est à interpréter au sens suivant : il existe un rang N à partir duquel la quantité $\|f - f_n\|_\infty^A$ est fini et la suite $\left(\|f_n - f\|_\infty^A\right)_{n\geq N}$ tend vers zéro.

1.2 Convergence simple et uniforme dans l'espace F^D

Soit (f_n) une suite d'éléments de F^D et $f \in F^D$.

Définition.– On dit que la suite (f_n) converge simplement vers f si et seulement si (f_n) converge simplement sur D vers f. On dit que la suite d'applications (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si (f_n) converge uniformément sur D vers f.

Proposition.– Soit $g, h : D \subset E \to F$ des applications de D dans F. Si la suite d'applications (f_n) converge simplement (resp uniformément) vers g et vers h alors $g = h$.

<u>Remarque</u> : Si la suite (f_n) converge simplement (resp uniformément) vers f alors une telle application f est unique et est appelée limite simple (resp limite uniforme) de la suite (f_n).

Définition.– On dit que la suite (f_n) converge simplement (resp uniformément) si et seulement si il existe une application de D dans $\mathbb{K}$ vers laquelle (f_n) converge simplement (resp uniformément).

Proposition.–
1) Si (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f.
2) (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si : $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

<u>Remarque</u> :
L'application $f_n - f$ n'étant pas nécessairement bornée on peut avoir $\|f - f_n\|_\infty = +\infty$. Dans 2) la condition $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ est donc à interpréter au sens suivant : il existe un rang N à partir duquel la quantité $\|f - f_n\|_\infty$ est fini et la suite de réels positifs $\left(\|f_n - f\|_\infty\right)_{n\geq N}$ tend vers zéro.

<u>Interprétation de la convergence uniforme en termes d'espace vectoriel normé</u>
$(B(D,F), \| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé et même un espace de Banach. Soient (f_n) une suite d'éléments de $B(D,F)$ et $f \in B(D,F)$. Dire que (f_n) converge uniformément vers f revient à dire que (f_n) converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(B(D,F), \| \ \|_\infty)$. Il est à noter que cette interprétation ne vaut que si les applications f_n et f sont bornées.

2. Théorèmes d'interversion de limites et suites d'applications

Théorème.– (De la double limite)
Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D, A une partie de D, $a \in \overline{A}$ et $f \in F^A$. Si f_n admet une limite en a suivant A pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si (f_n) converge <u>uniformément</u> vers f sur un voisinage V de a dans A alors f admet une limite en a suivant A et on a : $\lim_{a,A} f = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{a,A} f_n\right)$.

Théorème.– Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si (f_n) est une suite d'éléments de $C^0([a,b],F)$ qui converge <u>uniformément</u> sur $[a,b]$ vers f alors $f \in C^0([a,b],F)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$.

3. Théorèmes de transfert de propriétés et suites d'applications

Théorème.– (Caractère continu)

Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D, $f \in F^D$, $a \in D$ et $A \subset D$.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue au point a et si la suite d'applications (f_n) converge <u>uniformément</u> vers f sur un voisinage V de a dans D alors f est continue au point a.
2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et si pour tout $a \in A$ il existe un voisinage V_a de a tel que la suite (f_n) converge <u>uniformément</u> sur V_a vers f alors f est continue sur A.
3) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et si la suite d'applications (f_n) converge <u>uniformément</u> sur A vers f alors f est continue sur A.

Théorème.– (Intégration d'une limite uniforme sur un segment)

Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$, (f_n) une suite d'éléments de F^I et $f \in F^I$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si la suite d'applications (f_n) <u>uniformément sur tout segment contenu dans I</u> vers f alors f est continue sur I et la suite d'applications (F_n), définie par $F_n(x) = \int_a^x f_n$ pour tout $x \in I$, converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers l'application F définie par : $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f$.

Théorème.– (Caractère C^1)

Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite d'éléments de F^I et $(f,g) \in (F^I)^2$. Si f_n est de classe C^1 sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la suite (f_n) converge simplement sur I vers f et si la suite (f_n') converge <u>uniformément sur tout segment contenu dans I</u> vers g alors (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f, f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

Théorème.– (Caractère C^p)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite d'éléments de F^I et $(\varphi_0,\varphi_1\cdots,\varphi_p) \in (F^I)^{p+1}$. Si f_n est de classe C^p sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la suite $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge simplement sur I vers φ_k pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$ et si la suite $\left(f_n^{(p)}\right)$ converge <u>uniformément sur tout segment contenu dans I</u> vers φ_p alors la limite simple φ_0 de (f_n) est de classe C^p sur l'intervalle I et $\varphi_0^{(k)} = \varphi_k$ pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.

4. Séries d'applications à valeurs dans un espace de dimension finie

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition.– Soit (f_n) une suite d'éléments de F^D. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.

La suite d'applications (S_n) est appelée série d'applications de terme général f_n et est notée $\sum f_n$. Dire que la série $\sum f_n$ converge simplement (resp uniformément) c'est donc dire que la suite d'applications (S_n) converge simplement (resp uniformément). L'application S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série d'applications $\sum f_n$.

Définition.– Soit (f_n) une suite d'éléments de F^D telle que la série d'applications $\sum f_n$ <u>converge simplement</u>. On appelle application somme de la série d'applications $\sum f_n$ l'application de D dans F notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ et définie par : $\forall x \in D,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. On appelle application reste d'ordre n l'application de D dans F notée R_n et définie par : $\forall x \in D,\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

<u>Remarques</u> : En cas de convergence simple de $\sum f_n$ on dispose de l'application somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ ainsi que de l'application reste d'ordre n $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. On a : $\forall x \in D,\ R_n(x) = S(x) - S_n(x)$.

Proposition.– Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D et A une partie de D.

1) Si la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors la suite d'applications (f_n) converge uniformément sur A vers l'application nulle.
2) On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur A et on note R_n l'application reste d'ordre n. La série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la suite d'applications (R_n) converge uniformément sur A vers l'application nulle.

Définition.– Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D et A une partie de D.

1) On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge absolument sur A si et seulement si la série de réels positifs $\sum \|f_n(x)\|_F$ converge pour tout $x \in A$.
2) On dit que la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement sur A si et seulement si f_n est bornée sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la série de réels positifs $\sum \|f_n\|_\infty^A$ converge.

23

Proposition.– Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D et A une partie de D.

1) Si la série d'applications $\sum f_n$ converge absolument sur A alors la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A.
2) Si la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement sur A alors la série d'applications $\sum f_n$ converge absolument et uniformément sur A.

4.2 Théorèmes d'interversion de limites et séries d'applications

Théorème.– (Limite terme à terme)

Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D, A une partie de D et $a \in \overline{A}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n admet une limite en a suivant A et si la série d'applications $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur un voisinage V de a dans A alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a suivant A et : $\lim\limits_{a,A} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{a,A} f_n$.

Théorème.– (Intégration terme à terme d'une série d'applications)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et (f_n) est une suite d'éléments de $C^0([a,b],F)$. Si la série d'applications $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n$.

4.3 Théorèmes de transfert de propriétés et séries d'applications

Théorème.– (Caractère continu)

Soient (f_n) une suite d'éléments de F^D, $f \in F^D$ $a \in D$ et $A \subset D$.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a et si la série d'applications $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur un voisinage V de a dans D alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.
2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et si pour tout $a \in A$ il existe un voisinage V_a de a tel que la série d'applications $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur V_a alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.
3) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et si la série d'applications $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> sur A alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Théorème.– (Caractère C^1)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'éléments de F^I. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est C^1 sur I, si la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série d'applications $\sum f_n'$ converge <u>uniformément sur tout segment contenu dans I</u> alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I, l'application somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est C^1 sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Théorème.– (Caractère C^p)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'éléments de F^I. Si f_n est de classe C^p sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la série d'applications $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ et si la série d'applications $\sum f_n^{(p)}$ converge <u>uniformément sur tout segment contenu dans I</u> alors l'application somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

5. Exponentielle de matrices, exponentielle d'endomorphismes

5.1 Application exponentielle dans $M_n(\mathbb{K})$

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ la série de matrices $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente et par définition on pose : $\mathrm{Exp}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. On dispose alors de l'application exponentielle $\mathrm{Exp} : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$.

Théorème.– L'application $\mathrm{Exp} : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème.– Pour tout A fixé dans $M_n(\mathbb{K})$ l'application $e_A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$, définie par $e_A(t) = \mathrm{Exp}(tA)$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_A'(t) = Ae_A(t) = e_A(t)A$.

5.2 Application exponentielle dans $L(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Pour tout $a \in L(E)$ la série d'endomorphismes $\sum \frac{a^k}{k!}$ est convergente et par définition on pose : $\mathrm{Exp}(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$. On dispose donc de l'application exponentielle $\mathrm{Exp} : L(E) \to L(E)$.

Théorème.– L'application $\operatorname{Exp} : L(E) \to L(E)$ est continue sur $L(E)$.

Théorème.– Pour tout a fixé dans $L(E)$ l'application $e_a : \mathbb{R} \to L(E)$ définie par $e_a(t) = \operatorname{Exp}(ta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e_a'(t) = a \circ e_a(t) = e_a(t) \circ a$.

Exponentielle

1. Exponentielle complexe

1.1 Définition et premières propriétés de l'exponentielle complexe

Définition.– Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^k}{k!}$ est convergente et on pose : $\operatorname{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Le complexe $\operatorname{Exp}(z)$ est appelée exponentielle de z.

Théorème.– $\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Exp}(u+v) = \operatorname{Exp}(u) \times \operatorname{Exp}(v)$.

Proposition.–

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Exp}(z) \neq 0$ et $\frac{1}{\operatorname{Exp}(z)} = \operatorname{Exp}(-z)$.
2) $\operatorname{Exp}(0) = 1$, $\operatorname{Exp}(1) = e$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Exp}(t) \in \mathbb{R}^{*+}$.
3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\operatorname{Exp}(z)} = \operatorname{Exp}(\overline{z})$ et $|\operatorname{Exp}(z)| = \operatorname{Exp}(\operatorname{Re} z)$.

Théorème.–

1) Tout complexe <u>non nul</u> peut s'écrire comme l'exponentielle d'un nombre complexe. Autrement dit : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists w \in \mathbb{C} \mid z = e^w$.
2) Tout complexe <u>de module 1</u> peut s écrire comme l'exponentielle d'un imaginaire pur. Autrement dit : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}, z = e^{it}$.

1.2 Continuité de l'exponentielle complexe, dérivabilité de $(t \mapsto \operatorname{Exp}(f(t)))$

Théorème.– L'application exponentielle complexe est continue sur $\mathbb{C}$.

Théorème.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 sur I.
L'application $F : I \to \mathbb{C}$ définie par $F(t) = \operatorname{Exp}(f(t))$ est de classe C^1 sur I et :
$\forall t \in I$, $F'(t) = f'(t)F(t)$.

Corollaire.– Si $a \in \mathbb{C}$ alors $e_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $e_a(t) = e^{at}$ est e C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $e_a' = a e_a$.

En particulier, l'exponentielle réelle $(t \mapsto e^t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée elle-même.

2. Exponentielle d'une matrice

$(M_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative pour $n \geq 2$.
L'espace vectoriel $(M_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ étant de dimension finie toutes les normes y sont équivalentes et toute série absolument convergente à termes dans $M_n(\mathbb{K})$ est convergente.

2.1 Définition et premières propriétés

Théorème - définition.– (Série exponentielle dans $M_n(\mathbb{K})$)

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

La matrice $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est appelée exponentielle de A et est notée $\operatorname{Exp}(A)$ ou encore e^A.

Théorème.– Soient $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

1) Si $AB = BA$ alors $\operatorname{Exp}(A+B) = \operatorname{Exp}(A) \times \operatorname{Exp}(B)$.
2) La matrice $\operatorname{Exp}(A)$ est inversible $\operatorname{Exp}(A)^{-1} = \operatorname{Exp}(-A)$.

Proposition.–

1) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}\operatorname{Exp}(A)P = \operatorname{Exp}(P^{-1}AP)$ et ${}^t\operatorname{Exp}(A) = \operatorname{Exp}({}^tA)$.
2) $\forall D \in D_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Exp}(D) \in D_n(\mathbb{K})$.
   Plus précisément : $\forall (\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\operatorname{Exp}(\operatorname{Diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)) = \operatorname{Diag}(e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n})$.
3) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(\operatorname{Exp}(A)) = e^{\operatorname{Tr} A}$.

2.2 Continuité de l'exponentielle, dérivabilité de $(t \mapsto \operatorname{Exp}(tA))$

Théorème.– L'application $\operatorname{Exp} : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème.– Pour tout A fixé dans $M_n(\mathbb{K})$ l'application $e_A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$ définie par $e_A(t) = \operatorname{Exp}(tA)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_A'(t) = Ae_A(t) = e_A(t)A$.

3. Exponentielle d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

$(L(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative pour $\dim E \geq 2$. L'espace vectoriel $(L(E),+,\cdot)$ étant de dimension finie toutes les normes y sont équivalentes et toute série absolument convergente à termes dans $L(E)$ est convergente.

3.1 Définition et premières propriétés

Théorème - définition.– (Série exponentielle dans $L(E)$)

Pour tout $a \in L(E)$ la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.

L'endomorphisme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ est appelée exponentielle de a et est notée $\mathrm{Exp}(a)$ ou encore e^a.

Proposition.– Soient $a \in L(E)$. Si B est une base de E alors $M_B(\mathrm{Exp}(a)) = \mathrm{Exp}(M_B(a))$.

Théorème.– Soient $(a,b) \in L(E)^2$.

1) Si $a \circ b = b \circ a$ alors $\mathrm{Exp}(a+b) = \mathrm{Exp}(a) \circ \mathrm{Exp}(b)$.
2) L'endomorphisme $\mathrm{Exp}(a)$ est bijectif et $\mathrm{Exp}(a)^{-1} = \mathrm{Exp}(-a)$.

Proposition.–

1) $\forall a \in L(E),\ \forall u \in GL(E),\ u^{-1} \circ \mathrm{Exp}(a) \circ u = \mathrm{Exp}(u^{-1} \circ a \circ u)$.
2) $\forall a \in L(E),\ \det(\mathrm{Exp}(a)) = e^{\mathrm{Tr}\,a}$.

3.2 Continuité de l'exponentielle, dérivabilité de $(t \mapsto \mathrm{Exp}(ta))$

Théorème.– L'application $\mathrm{Exp} : L(E) \to L(E)$ est continue sur $L(E)$.

Théorème.– Pour tout a fixé dans $L(E)$ l'application $e_a : \mathbb{R} \to L(E)$ définie par $e_a(t) = \mathrm{Exp}(ta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ e_a'(t) = a \circ e_a(t) = e_a(t) \circ a$.

4. Pour aller plus loin (HP)

4.1 Compléments sur l'exponentielle complexe

Théorème.– (De relèvement)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une application de classe C^1 sur I.

Si pour tout $t \in I$, $|f(t)| = 1$ alors il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ C^1 sur I telle que : $\forall t \in I,\ f(t) = e^{i\varphi(t)}$.

Théorème.– $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Exp}(z) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k$.

4.2 Compléments sur l'exponentielle d'une matrice

Théorème.– Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k = \mathrm{Exp}(A)$.

Proposition.–

1) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\mathrm{Exp}(A) = P(A)$.
2) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable alors il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(\mathrm{Exp}(A))$.

4.3 Compléments sur l'exponentielle d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Théorème.– Si $a \in L(E)$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\mathrm{Id}_E + \frac{a}{k}\right)^k = \mathrm{Exp}(a)$.

Proposition.–

1) Si $a \in L(E)$ alors il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\mathrm{Exp}(a) = P(a)$.
2) Si $a \in L(E)$ est diagonalisable alors il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $a = P(\mathrm{Exp}(a))$.