6

Séries numériques

1. Notion de série numérique (Mpsi)

Définition.– Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

La suite (A_n) est appelée série de terme général a_n et est notée $\sum a_n$.

Le scalaire A_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum a_n$.

Dire que la série $\sum a_n$ est convergente (resp divergente) dans $\mathbb{K}$ c'est dire que la suite (A_n) est convergente (resp divergente) dans $\mathbb{K}$. En cas de convergence de la série $\sum a_n$ le scalaire $\lim_{N\to+\infty} A_N$ est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et est appelé somme de la série $\sum a_n$.

Reste d'ordre n d'une série convergente

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note A la somme de la série et A_n sa somme partielle d'ordre n. Le scalaire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum a_n$.

Proposition.–

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = A - A_n$ et en particulier $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = R_{n-1} - R_n = A_n - A_{n-1}$.

2. Convergence d'une série (Mpsi)

Proposition.– Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1) Si la série $\sum a_n$ converge alors la suite (a_n) tend vers zéro.
2) Si la suite (a_n) ne tend pas vers zéro alors la série $\sum a_n$ diverge. Dans un tel cas de figure on parle de divergence grossière de la série $\sum a_n$.
3) La suite (a_n) converge si et seulement si la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$converge.

Proposition.– Soient (a_n), (b_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

1) Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes alors les séries $\sum (a_n + b_n)$ et $\sum \alpha a_n$ le sont aussi et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2) La série $\sum a_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ et $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ convergent. Dans ces conditions : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\, a_n\right) + i\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\, a_n\right)$.

Remarque : Si la série $\sum a_n$ converge et si la série $\sum b_n$ diverge alors la série $\sum (a_n + b_n)$ diverge. Si $\sum a_n$ diverge et si $\sum b_n$ converge alors $\sum (a_n + b_n)$ diverge. Si $\sum a_n$ diverge et si $\sum b_n$ diverge alors on ne peut rien dire à priori sur la convergence éventuelle de la série $\sum (a_n + b_n)$.

Théorème.– (Série géométrique)

La série $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$ et dans ces conditions $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Théorème.– (Développement décimal propre d'un réel)

Si $x \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $[0,9]$, non constante égale à 9 à partir d'un certain rang, telle que : $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Cette unique suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donnée par : $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$.

3. Calcul de la somme d'une série par télescopage

Proposition.– Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $p \leq n$ alors on a : $\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$.

4. Séries à termes positifs

4.1 Caractérisation de la convergence pour les séries à termes positifs

Théorème (Mpsi).– Soit (a_n) une suite de réels positifs.

On désigne par A_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum a_n$.

1) La série $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite (A_n) est majorée.
2) La série $\sum a_n$ diverge si et seulement si la suite (A_n) tend vers $+\infty$.

Remarque : Si (a_n) est une suite de réels positifs alors la suite (A_n) est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on peut parler de $\lim A_n$ qui appartient alors à $[0,+\infty]$. Autrement dit : si $\sum a_n$ est une série à termes positifs alors on peut parler de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ mais c'est un élément de $[0,+\infty]$.

Proposition 1 (Mpsi).–
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le a_n \le b_n$.

1) Si la série $\sum b_n$ converge alors la série $\sum a_n$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
2) Si la série $\sum a_n$ diverge alors la série $\sum b_n$ diverge.

Proposition 2.– Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs.

1) Si $a_n = O(b_n)$ et si la série $\sum b_n$ converge alors la série $\sum a_n$ converge.
   Si $a_n = O(b_n)$ et si la série $\sum a_n$ diverge alors la série $\sum b_n$ diverge.
2) Si $a_n = o(b_n)$ et si la série $\sum b_n$ converge alors la série $\sum a_n$ converge.
   Si $a_n = o(b_n)$ et si la série $\sum a_n$ diverge alors la série $\sum b_n$ diverge.
3) Si $a_n \sim b_n$ alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

Remarque : Les résultats précédents ont été établis pour des suites à termes positifs. Ils sont en fait valables si les suites sont à termes de signe fixe à partir d'un certain rang.

4.2 Comparaison d'une série avec une intégrale

Théorème.– (Comparaison d'une série à une intégrale)
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi : [p,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante sur $[p,+\infty[$.

Pour tout entier $n \ge p$ on pose : $I_n = \int_p^n \varphi$.

1) La série $\sum_{n\ge p} \varphi(n)$ est de même nature que la suite $(I_n)_{n\ge p}$.
2) La série $\sum_{n\ge p}\left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi\right)$ est convergente.

Remarque : Les résultats du théorème ci-dessus résultent de l'inégalité $\varphi(k+1) \le \int_k^{k+1} \varphi \le \varphi(k)$ valable pour tout entier $k \ge p$. Encadrer $\int_k^{k+1} \varphi$ pour $k \ge p$ est donc l'idée fondamentale à retenir. Il est bon aussi de mémoriser qu'à partir de cette inégalité on peut obtenir un encadrement de la somme partielle de la série $\sum_{n\ge p} \varphi(n)$ à l'aide de I_n et I_{n+1}. Le même genre d'idée peut s'avérer utile lorsque φ est croissante sur $[p,+\infty[$, l'inégalité s'écrivant alors $\varphi(k) \le \int_k^{k+1} \varphi \le \varphi(k+1)$.

Théorème.– (Série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition.– (Comparaison à une série de Riemann)
Soit (a_n) une suite de réels positifs.

1) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = 0$ alors $a_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\sum a_n$ est convergente.
2) Si il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = +\infty$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(a_n)$ et $\sum a_n$ est divergente.

Remarque : Cette règle est très utile lorsque l'on a des logarithmes ou des exponentielles.

4.3 Sommation des relations de comparaison

Théorème 1.– (Sommation des relations de comparaison : le cas de divergence)
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On suppose que la série $\sum b_n$ diverge.

1) Si $a_n = O(b_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$.
2) Si $a_n = o(b_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$.
3) Si $a_n \sim b_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Théorème 2.– (Sommation des relations de comparaison : le cas de convergence)
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On suppose que la série $\sum b_n$ converge.

1) Si $a_n = O(b_n)$ alors la série $\sum a_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.
2) Si $a_n = o(b_n)$ alors la série $\sum a_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.
3) Si $a_n \sim b_n$ alors la série $\sum a_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

5. Séries absolument convergentes

Définition.– Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |a_n|$ est convergente. On dit que la série $\sum a_n$ est semi convergente si et seulement si la série $\sum a_n$ est convergente et non absolument convergente.

Théorème (Mpsi).– Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente alors la série $\sum a_n$ est convergente et on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Théorème.– (Règle de d'Alembert)

Soit (a_n) une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{K}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ avec $L \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

Si $L < 1$ alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente et en particulier $\lim a_n = 0$.

Si $L > 1$ alors $\lim |a_n| = +\infty$ et en particulier la série $\sum a_n$ est divergente.

Remarques :

✓ Si $L = 1$ alors on ne peut rien dire à priori sur la nature de la série $\sum a_n$.

✓ La règle de d'Alembert est particulièrement adaptée à la situation où a_n est égal à un produit.

6. Critère des séries alternées

Théorème.– (Critère des séries alternées)

Si (α_n) une suite réelle décroissante qui tend vers zéro alors la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente et si on note A_n la somme partielle d'ordre n, R_n le reste d'ordre n et A la somme de cette série alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A_{2n+1} \leq A \leq A_{2n}$, $|R_n| \leq \alpha_{n+1}$ et R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.

Remarque : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ donc du signe de $(-1)^{n+1} \alpha_{n+1}$.

On peut donc dire que R_n est du signe de son premier terme.

Théorème.– Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

2) Si $0 < \alpha \leq 1$ alors la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente.

3) Si $\alpha \leq 0$ alors la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est divergente.

7. Pour aller plus loin (HP)

7.1 Suite harmonique et constante d'Euler

Théorème.– Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1) La suite $(H_n - \ln n)_{n\geq1}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Sa limite γ est appelée constante d'Euler.

2) $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ et en particulier $H_n \sim \ln n$.

7.2 Calcul de la somme d'une série via une transformation d'Abel

La transformation d'Abel est une transformation d'écriture qui généralise la technique du télescopage. Considérons deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de $\mathbb{K}$.

Pour $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$ on a : $\sum_{k=p}^{n} u_k (v_{k+1} - v_k) = u_n v_{n+1} - u_p v_p - \sum_{k=p+1}^{n} (u_k - u_{k-1}) v_k$.

L'intérêt de cette transformation est qu'elle permet de transférer le signe moins de (v_n) à (u_n).

7.3 Calcul de la somme d'une série via une représentation intégrale

Pour calculer la somme d'une série convergente $\sum a_n$ une option possible est de chercher à écrire a_n sous la forme d'une intégrale.

Proposition.– (Des sommes célèbres)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7.4 Séries de Bertrand

Théorème.– (Séries de Bertrand)

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

7.5 Règle de Raabe-Duhamel

Théorème.– (Règle de Raabe-Duhamel)

Soit (a_n) une suite de réels <u>strictement positifs</u> vérifiant : $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Il existe $\delta > 0$ tel que $a_n \sim \frac{\delta}{n^\alpha}$ et par suite la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

7.6 Obtention d'équivalents et de développements asymptotiques

Proposition.–

1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lambda$ alors $u_n \sim \lambda n$.
2) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si il existe $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha) = \lambda$ alors $u_n^\alpha \sim \lambda n$ puis $u_n \sim (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Proposition.– (Des équivalents célèbres)

1) $\ln n! \sim n \ln n$.
2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. si $\alpha \in]-\infty,1[$
3) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ si $\alpha \in]1,+\infty[$.

Proposition.– (Développement asymptotique de la suite harmonique)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Bernhard Riemann (1826-1866)
Né à près de Hanovre en Allemagne Riemann meurt à quarante ans en Italie à la suite d'une tuberculose. Malgré sa disparition précoce, son œuvre est colossale. Son apport est fondamental dans la définition de l'intégrale, en géométrie différentielle, en géométrie non euclidienne, en théorie des équations différentielles, en théorie des nombres et en topologie. Son exposé sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie est révolutionnaire et c'est cette nouvelle conception de la géométrie qui permettra plus tard à Einstein de disposer du bon cadre pour sa théorie de la relativité ! Riemann fût incontestablement un visionnaire de génie et ses idées, même non accompagnées de preuves, n'ont cessé d'inspirer les mathématiciens pendant près d'un siècle. A ce propos, une conjecture célèbre de Riemann concerne la fonction ζ $\left(\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\right)$ et affirme que tous les zéros de la fonction ζ ont une partie imaginaire égale à $\frac{1}{2}$. Cette conjecture est actuellement toujours ouverte...

Jean le rond D'Alembert (1717-1783)
Abandonné à sa naissance sur les marches de l'église parisienne de Saint Jean le Rond (qui lui a donné son prénom), il est recueilli par la femme d'un artisan-vitrier qui l'élèvera comme son fils. En retour, d'Alembert vivra avec elle jusqu'à la mort de celle-ci (soit pendant 48 ans!). D'Alembert se révèle particulièrement doué pour les mathématiques et étudie avec succès le droit et la médecine. Après des premiers mémoires sur la mécanique des fluides et sur le calcul intégral, il est admis à 24 ans à l'Académie des Sciences comme associé astronome adjoint. En 1743, il publie son important Traité de la Dynamique, où il améliore la définition d'une force, et donne ce qu'on appelle désormais le principe de d'Alembert. En 1747, il écrit un article sur les cordes vibrantes, où, pour la première fois, il donne et résout l'équation aux dérivées partielles qui régit la propagation des ondes sonores. A compter de 1746, d'Alembert se lance avec Diderot dans une aventure monumentale, la rédaction de l'Encyclopédie. La fin de la vie de d'Alembert est marqué par la maladie, et il décède le 29 octobre 1783 des suites de ces maladies. Laissons la conclusion à sa mère adoptive, peu satisfaite des activités de son fils : "Qu'est-ce qu'un philosophe? C'est un fou qui se tourmente toute sa vie pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus".

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
Elève brillant, Cauchy entre à l'école polytechnique à l'âge de seize ans puis devient ingénieur militaire. Encouragé par Lagrange à se consacrer aux mathématiques, Cauchy obtient en 1816 un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'école polytechnique et au collège de France. L'œuvre de Cauchy est énorme et ses travaux concernent de nombreux domaines mathématiques comme la théorie des groupes, l'algèbre linéaire, la théorie des équations différentielles et la théorie des fonctions holomorphes. C'est cependant en analyse que l'influence de Cauchy s'avérera la plus déterminante. Soucieux de rigueur, il introduit une notion précise de continuité et élabore une définition rigoureuse de l'intégrale. On lui doit aussi des travaux en astronomie mais aussi en physique où il donne des bases mathématiques à la théorie de l'élasticité.

Guido Fubini (1879-1943)
Guido Fubini est certainement l'un des plus grands mathématiciens italiens du début du $20^{\text{ième}}$ siècle. Il a successivement enseigné à l'université de Catane en Sicile, à l'université de Gêne, à l'université de Turin et à enfin à l'Institude for Advanced Study de Princeton. Ses contributions en mathématiques sont multiples. Elles touchent principalement la géométrie différentielle, l'analyse fonctionnelle, l'analyse complexe, le calcul des variations et la théorie des groupes. Il a aussi laissé son nom à un théorème d'intégration très important.

Niels Abel (1802-1829)
Né à Finnoy, une île norvégienne, c'est à l'âge de treize ans qu'Abel se découvre une passion pour les mathématiques . Son professeur de mathématiques, Holmboe, reconnaît son talent au point qu'il inscrit comme appréciation sur le bulletin d'Abel : « A l'excellence de son intelligence s'unit une passion et un intérêt insatiable pour la mathématique, si bien qu'à n'en pas douter, s'il lui est donné de vivre, il deviendra probablement un très grand mathématicien ». Pour la petite histoire le principal de l'établissement avait demandé à Holmboe de modifier ses derniers mots qui à l'origine étaient : « le plus grand mathématicien du monde » Grâce à des fonds récoltés par Holmboe, Abel poursuit ses études à l'université d'Oslo. Il obtient une bourse et l'utilise pour voyager en France, en Italie et en Allemagne où il rencontre quelques grands mathématiciens de l'époque. Abel publie ses premières recherches et se fait ainsi connaître du monde scientifique. Il demande alors sans succès un poste d'enseignant et, sans argent, déjà affaibli par la tuberculose, il rentre en Norvège où il meurt à l'age de vingt-sept ans. Deux jours plus tard arrive sa nomination à l'université de Berlin...Abel est l'un des initiateurs de la théorie des fonctions elliptiques et a fondé la théorie des intégrales abéliennes. On lui doit aussi de nombreux théorèmes d'analyse ainsi que la découverte d'équations algébriques résolubles par radicaux.

Joseph-Louis Bertrand (1822-1900)
Joseph Louis François Bertrand est un mathématicien français. Reçu premier à l'Ecole Polytechnique, il délaissera son poste d'ingénieur des Mines pour la recherche et l'enseignement en Mathématiques. Notamment professeur au collège de France, on lui doit de nombreux travaux en théorie des nombres, en géométrie différentielle et en calcul des probabilités. Bertrand sera reçu en 1856 à l'Académie des Sciences, dont il deviendra le secrétaire perpétuel à compter de 1874, et aussi à l'Académie Française, ce qui est un privilège rare pour un scientifique.

Duhamel (1797-1872)
Sa vie est fortement marquée par l'école Polytechnique : il y est reçu en 1813 (à 16 ans!), mais jugeant son rang trop mauvais, il refuse l'admission et repasse le concours un an plus tard : il est cette fois reçu second...Il devient docteur ès Sciences et occupe, à compter de 1830, la chaire d'analyse à l'Ecole Polytechnique. Il sera encore, toujours dans cette école, directeur des études de 1848 à 1851, et il succèdera à Poisson à l'Académie des Sciences en 1840. Les recherches principales de Duhamel concernent les équations aux dérivées partielles, notamment au sujet de la propagation de la chaleur ou de l'acoustique : ces travaux sont comparables à ceux que Fresnel réalisa en optique. Duhamel est aussi l'auteur de nombreuses publications pédagogiques, très appréciées par ses contemporains. Son nom est resté célèbre pour un critère de convergence des séries.

Joseph-Ludwig Raabe (1801-1859)
Raabe a commencé à étudier les mathématiques en 1820, au Polytechnicum de Vienne. A l'automne 1831, il déménage à Zürich, où il devient professeur de mathématiques en 1833. En 1855, il devient professeur au nouveau Polytechnicum de Suisse. Il est principalement connu pour la de Raabe-Duhamel, une extension de la règle de D'Alembert permettant de déterminer la nature d'une série.

Familles sommables de nombres complexes

Soit I un ensemble. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

1. Somme d'une famille de d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+} = [0,+\infty]$

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Pour $K \in \mathcal{P}_f(I)$ on pose $S_K(x) = \sum_{k\in K} x_k$.

L'ensemble $\{S_K(x),\ K \in \mathcal{P}_f(I)\}$ des sommes finies d'éléments de la famille x est noté $\mathcal{S}_x$.

Définition.– Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.
La somme $\sum_{i\in I} x_i$ de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est l'élément de $[0,+\infty]$ défini par : $\sum_{i\in I} x_i = \mathrm{Sup}_{[0,+\infty]}\mathcal{S}_x$.

Remarque : La somme $\sum_{i\in I} x_i$ d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est toujours définie mais peut éventuellement valoir $+\infty$. Dans le paragraphe suivant, nous verrons que la somme $\sum_{i\in I} x_i$ d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de nombres réels n'est pas toujours définie. En fait, elle ne le sera que dans le cas favorable où la famille est sommable et ce sera alors un nombre réel (donc distinct de $+\infty$).

Proposition.– Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ des familles d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\alpha \in [0,+\infty]$.

1) Si $x_i \le y_i$ pour tout $i \in I$ alors $\sum_{i\in I} x_i \le \sum_{i\in I} y_i$.
2) $\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\sum_{i\in I} \alpha x_i = \alpha \sum_{i\in I} x_i$.
3) Si σ est une bijection de J sur I alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\sigma(j)}$.

Proposition.– Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.

1) Si I est vide alors $\sum_{i\in I} x_i = 0$. Si il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} = +\infty$ alors $\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.
2) Si I est fini et non vide alors $I = \{i_1,\cdots,i_p\}$ où les i_k, $k \in [\![1,p]\!]$ sont deux à deux distincts et on a : $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{p} x_{i_k} = x_{i_1} + \cdots + x_{i_p}$.
3) Si I est dénombrable alors $I = \{\sigma(n), n \in \mathbb{N}\}$ où σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur I et on a :

$$\sum_{i\in I} x_i = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}.$$ (Cette dernière limite vaut éventuellement $+\infty$)

Théorème.– (Lien avec les séries numériques)
Soit (u_n) une suite de réels positifs.

1) La suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $[0,+\infty]$.

   Elle est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et elle est finie si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. (l'égalité a lieu dans $[0,+\infty]$)
3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n < +\infty$ si et seulement si la série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente.
4) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n < +\infty$ alors pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série à termes positifs $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème.– (Sommation par paquets : cas positif)
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille de parties de I deux à deux disjointes dont la réunion est égale à I alors on a l'égalité : $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} x_i\right)$.

Applications :

✓ Si $I = A \cup B$ avec $A \cap B = \varnothing$ alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in A} x_i + \sum_{i\in B} x_i$.

✓ Si $I = A_1 \cup \cdots \cup A_p$ où les A_k sont deux à deux disjoints alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in A_1} x_i + \cdots + \sum_{i\in A_p} x_i$.

✓ Si $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où les A_n sont deux à deux disjoints alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in A_n} x_i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in A_n} x_i\right)$.

Exemple : Si $(q_1,\cdots,q_p) \in [0,1[^p$ alors $\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p} q_1^{\alpha_1}\cdots q_p^{\alpha_p} = \frac{1}{(1-q_1)\cdots(1-q_p)}$.

2. Famille sommable de nombres complexes

Définition.– Une famille $(z_i)_{i\in I}$ de complexes est dite sommable si et seulement $\sum_{i\in I}|z_i| < +\infty$.

Proposition.– Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de réels est sommable si et seulement si les deux familles de réels positifs $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

Si une famille $(z_i)_{i\in I}$ de complexes est sommable alors les familles de réels $(\operatorname{Re} z_i)_{i\in I}$ et $(\operatorname{Im} z_i)_{i\in I}$ sont sommables.

Définition.– (Somme d'une famille sommable de nombres réels)

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille <u>sommable</u> de réels alors on pose : $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$.

Le réel $\sum_{i\in I} x_i$ ainsi défini est appelé somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Définition.– (Somme d'une famille sommable de nombres complexes)

Si $(z_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de complexes alors on pose : $\sum_{k\in I} z_k = \sum_{k\in I} \operatorname{Re} z_k + i\sum_{k\in I} \operatorname{Im} z_k$.

Le complexe ainsi défini est appelé somme de la famille $(z_k)_{k\in I}$.

Proposition.–

1) Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont des familles sommables de réels telles que $x_i \le y_i$ pour tout $i \in I$ alors $\sum_{i\in I} x_i \le \sum_{i\in I} y_i$.
2) Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont des familles sommables de complexes et si α,β sont des complexes alors la famille $(\alpha u_i + \beta v_i)_{i\in I}$ est sommable et on a : $\sum_{i\in I}(\alpha u_i + \beta v_i) = \alpha\sum_{i\in I} u_i + \beta\sum_{i\in I} v_i$.
3) Si $(z_i)_{i\in I}$ est une famille <u>sommable</u> de complexes et si σ est une bijection de I sur I alors la famille $(z_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et on a : $\sum_{i\in I} z_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} z_i$.

Proposition.– Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille <u>sommable</u> de complexes.

1) Si $I = \varnothing$ alors $\sum_{i\in I} z_i = 0$.
2) Si I est fini et non vide alors $I = \{i_1,\cdots,i_p\}$ où les i_k, $k \in [\![1,p]\!]$ sont deux à deux distincts et on a $\sum_{i\in I} z_i = \sum_{k=1}^{p} z_{i_k} = z_{i_1} + \cdots + z_{i_p}$.
3) Si I est dénombrable alors $I = \{\sigma(n), n \in \mathbb{N}\}$ où σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur I et on a : $\sum_{i\in I} z_i = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\sigma(n)}$.

Théorème.– (Lien avec les séries numériques)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est <u>absolument</u> convergente.
2) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable alors pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème.– (Sommation par paquets : cas sommable)

Soit $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.

Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties de I deux à deux disjointes dont la réunion vaut I.

1) $\sum_{i\in I}|z_i| = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda}|z_i|\right)$
2) $(z_i)_{i\in I}$ est sommable $\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda}|z_i|\right) < +\infty$.
3) Si la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable alors $\sum_{i\in I} z_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} z_i\right)$.

<u>Remarque</u> : L'égalité du 1) a lieu dans $[0,+\infty]$. Celle du 3) a lieu dans $\mathbb{C}$. Si l'on souhaite utiliser l'égalité du 3) il faut commencer par montrer que la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable. Pour cela on utilise la caractérisation du 2) et on se sert de l'égalité 1).

<u>Applications</u>

✓ Si $I = A\cup B$ avec $A\cap B = \varnothing$ et si la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable alors les familles $(z_i)_{i\in A}$ et $(z_i)_{i\in B}$ le sont et : $\sum_{i\in I} z_i = \sum_{i\in A} z_i + \sum_{i\in B} z_i$.

✓ Si $I = A_1 \cup \cdots \cup A_p$ où les A_k et si la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable alors les familles $(z_i)_{i\in A_1}, \cdots, (z_i)_{i\in A_p}$ le sont aussi et on a : $\sum_{i\in I} z_i = \sum_{i\in A_1} z_i + \cdots + \sum_{i\in A_p} z_i$.

✓ Si $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où les A_n sont deux à deux disjoints et si la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(z_i)_{i\in A_n}$ est sommable et : $\sum_{i\in I} z_i = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in A_n} z_i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in A_n} z_i\right)$.

<u>Exemple</u> : Si $z_1, \cdots, z_p$ sont des nombres complexes de module strictement inférieur à 1 alors la famille $\left(z_1^{\alpha_1}\cdots z_p^{\alpha_p}\right)_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p}$ est sommable et on a : $\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p} z_1^{\alpha_1}\cdots z_p^{\alpha_p} = \frac{1}{(1-z_1)\cdots(1-z_p)}$.

3. Théorème de Fubini

Théorème.– (Fubini cas positif)

Pour toute famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels <u>positifs</u> on a l'égalité (elle a lieu dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} a_{p,q}\right) = \sum_{q\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{p,q}\right).$$

Théorème.– Soit $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) La famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

2) La série $\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}|a_{p,q}|\right)$ est convergente.

3) La série $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|a_{p,q}|\right)$ est convergente.

Théorème.– (Fubini cas sommable)

Soit $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

1) Si $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable alors on a l'égalité : $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right)$.

2) Si $\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) \neq \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right)$ alors la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

4. Produit de Cauchy de deux séries

Définition.– Soit (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

La suite (c_n) est appelée produit de convolution des deux suites (a_n) et (b_n).

La série $\sum c_n$ est appelée produit de Cauchy des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Théorème.– (Produit de convolution de deux suites sommables)

Soit (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (a_n) et (b_n) sont des suites sommables alors le produit de convolution (c_n) est une suite sommable et on a l'égalité : $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right)$.

Théorème.– (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)

Soit (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est une série absolument convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

5. Exponentielle complexe

Définition.– Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et on pose : $\operatorname{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Le complexe $\operatorname{Exp}(z)$ est appelée exponentielle de z.

Théorème.– $\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Exp}(u+v) = \operatorname{Exp}(u) \times \operatorname{Exp}(v)$.

Proposition.–

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Exp}(z) \neq 0$ et $\frac{1}{\operatorname{Exp}(z)} = \operatorname{Exp}(-z)$.

2) $\operatorname{Exp}(0) = 1$, $\operatorname{Exp}(1) = e$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Exp}(t) \in \mathbb{R}^{*+}$.

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\operatorname{Exp}(z)} = \operatorname{Exp}(\overline{z})$ et $|\operatorname{Exp}(z)| = \operatorname{Exp}(\operatorname{Re} z)$.

Définition.– (Applications circulaires et hyperboliques complexes)

Etant donné $z \in \mathbb{C}$ le complexe $\mathrm{Exp}(z)$ est noté e^z et on adopte les définitions suivantes :

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \qquad \mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right).$$

Proposition.– Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ on a les égalités suivantes :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\mathrm{ch}\, z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}\, z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Guido Fubini (1879-1943)

Guido Fubini est certainement l'un des plus grands mathématiciens italiens du début du 20ième siècle. Il a successivement enseigné à l'université de Catane en Sicile, à l'université de Gêne, à l'université de Turin et à enfin à l'Institude for Advanced Study de Princeton. Ses contributions en mathématiques sont multiples. Elles touchent principalement la géométrie différentielle, l'analyse fonctionnelle, l'analyse complexe, le calcul des variations et la théorie des groupes. Il a aussi laissé son nom à un théorème d'intégration très important.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Elève brillant, Cauchy entre à l'école polytechnique à l'âge de seize ans puis devient ingénieur militaire. Encouragé par Lagrange à se consacrer aux mathématiques, Cauchy obtient en 1816 un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'école polytechnique et au collège de France. L'œuvre de Cauchy est énorme et ses travaux concernent de nombreux domaines mathématiques comme la théorie des groupes, l'algèbre linéaire, la théorie des équations différentielles et la théorie des fonctions holomorphes. C'est cependant en analyse que l'influence de Cauchy s'avérera la plus déterminante. Soucieux de rigueur, il introduit une notion précise de continuité et élabore une définition rigoureuse de l'intégrale. On lui doit aussi des travaux en astronomie mais aussi en physique où il donne des bases mathématiques à la théorie de l'élasticité.