Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre K désigne un corps et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Structure de K-espace vectoriel (Mpsi)

Définition.– On appelle K-espace vectoriel tout triplet $(E,+,\bullet)$ où E est un ensemble, + est une loi de composition interne et $\bullet$ une loi de composition externe sur E à domaine d'opérateurs dans K tels que :

(E_1) $(E,+)$ est un groupe abélien.

(E_2) $\forall \alpha \in K, \forall (x,y) \in E^2, \ \alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$.

(E_3) $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall x \in E, \ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$.

(E_4) $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall x \in E, \ (\alpha\times\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$.

(E_5) $\forall x \in E, \ 1_K\cdot x = x$.

Les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de K sont appelés des scalaires.

Proposition.– Soit $(E,+,\bullet)$ un K-espace vectoriel.

1) $\forall \alpha \in K, \ \alpha\cdot 0_E = 0_E$ et $\forall x \in E, \ 0_K\cdot x = 0_E$.
2) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \ \alpha\cdot x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_K$ ou $x = 0_E$.
3) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \ \alpha\cdot(-x) = (-\alpha)\cdot x = -(\alpha\cdot x)$ et $(-\alpha)\cdot(-x) = \alpha\cdot x$.

Théorème.– Soient $(E_1,+,\bullet),\cdots,(E_p,+,\bullet)$ des K-espaces vectoriels.

Pour $(x_1,\cdots,x_p)$, $(y_1,\cdots,y_p)$ dans $E_1\times\cdots\times E_p$ et α dans K on pose :

$(x_1,\cdots,x_p)+(y_1,\cdots,y_p) = (x_1+y_1,\cdots,x_p+y_p)$ et $\alpha\cdot(x_1,\cdots,x_p) = (\alpha x_1,\cdots,\alpha x_p)$.

$(E_1\times\cdots\times E_p,+,\bullet)$ est un K-espace vectoriel.

Il est appelé espace vectoriel produit des espaces vectoriels $(E_k,+,\bullet)$, $k \in [\![1,p]\!]$.

<u>Exemples importants</u>

- Soit $(K,+,\times)$ un corps. Pour $x = (x_1,\cdots,x_n)$, $y = (y_1,\cdots,y_n)$ dans K^n et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose :
  $x + y = (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$ et $\lambda\cdot x = (\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$.
  $(K^n,+,\bullet)$ est un K-espace vectoriel.
- Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Si (x,y), (x',y') sont des éléments de $E\times F$ et si $\lambda \in K$ alors on pose : $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$ et $\lambda\cdot(x,y) = (\lambda x,\lambda y)$.
  $(E\times F,+,\bullet)$ est un K-espace vectoriel.
- Soient I un ensemble et E K-espace vectoriel. L'ensemble des applications de I dans E est noté E^I. Pour $(f,g) \in (E^I)^2$ et $\lambda \in K$ on définit les applications $f+g : I \to E$ et $\lambda\cdot f : I \to E$ par les conditions : $\forall t \in I$, $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$ et $(\lambda\cdot f)(t) = \lambda f(t)$.
  $(E^I,+,\bullet)$ est un K-espace vectoriel.
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition.– Soient E un K-espace vectoriel et $x_1,\cdots,x_p$ des vecteurs de E.

Une combinaison linéaire de la famille $(x_1,\cdots,x_p)$ est un vecteur de E de la forme $\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_p x_p$ où $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ sont des scalaires. On note $Kx_1+\cdots+Kx_p$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1,\cdots,x_p)$.

On dit qu'une partie A de E est stable par combinaison linéaire si et seulement si : $\forall (x,y) \in A^2, \forall \alpha \in K, \ \alpha x + \beta y \in A$.

2. Notion de sous espaces vectoriels (Mpsi)

Soit $(E,+,\bullet)$ un K-espace vectoriel.

Définition.– On dit qu'une partie F de E est un sous espace vectoriel de $(E,+,\bullet)$ si et seulement si F est non vide et stable par combinaison linéaire.

<u>Remarques</u> : Soit F un sous espace vectoriel de E. Pour $(x,y) \in F^2$ et $\alpha \in K$, $x+y \in F$ et $\alpha x \in F$. On peut considérer $+_F : F\times F \to F$ et $\bullet_F : K\times F \to F$ définies par : $x +_F y = x+y$ et $\alpha \bullet_F x = \alpha x$. L'application $+_F$ est une loi de composition interne sur F et $\bullet_H$ une loi de composition externe sur F à domaine d'opérateurs dans K. On vérifie que $(F,+_F,\bullet_F)$ est un K-espace vectoriel.

Pour simplifier, les lois $+_F$ et $\bullet_F$ sont respectivement notées + et $\bullet$.

Proposition.–

1) Si F un sous espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.
2) $\{0_E\}$ et E sont des sous espaces vectoriels $(E,+,\bullet)$.
3) Une intersection de sous espaces vectoriel de E est un sous espace vectoriel de E.

2.1 Sous espace vectoriel engendré par une partie

Théorème.– Soit A une partie de E.

1) L'intersection de tous les sous espaces vectoriels de E qui contiennent A est un sous espace vectoriel de E. Il est noté $\text{Vect}(A)$ et est appelé sous vectoriel de E engendré par A.
2) $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient A.

Remarques : L'ensemble $\mathcal{F}_A$ des sous espaces vectoriels de E qui contiennent A est non vide car $E \in \mathcal{F}_A$ et par définition on a : $\text{Vect}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$. Il est à noter que $\text{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$ et que si A est un sous espace vectoriel de E alors $\text{Vect}(A) = A$.

Théorème.– Soient $x_1, \cdots, x_p$ des vecteurs de E. Le sous espace vectoriel engendré par la partie $\{x_1, \cdots, x_p\}$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$.
Autrement dit : $\text{Vect}(\{x_1, \cdots, x_p\}) = \mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_p$.

Exemples

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a les égalités suivantes : $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f'' - f = 0\} = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \mathbb{R}\,\text{ch} + \mathbb{R}\,\text{sh}$.
  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f'' + f = 0\} = \text{Vect}(\cos, \sin) = \mathbb{R}\sin + \mathbb{R}\cos$.
  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f'' - f = 0\} = \text{Vect}(e_1, e_{-1}) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_{-1}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ on a les égalités suivantes : $\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \mid f'' - f = 0\} = \text{Vect}(e_1, e_{-1}) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_{-1}$
  $\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \mid f'' + f = 0\} = \text{Vect}(e_i, e_{-i}) = \mathbb{C}e_i + \mathbb{C}e_{-i}$.

2.2 Somme de deux sous espaces vectoriels

Soient E_1 et E_2 des sous espaces vectoriels de E.
On pose : $E_1 + E_2 = \{x \in E, \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2 \mid x = x_1 + x_2\}$.

Théorème.–

1) $E_1 + E_2$ est un sous espace vectoriel de E appelé somme de E_1 et E_2.
2) $E_1 + E_2$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $E_1 \cup E_2$.
   Autrement dit : $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$.

Définition.– On dit que la somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si tout vecteur x de $E_1 + E_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
Pour exprimer que la somme $E_1 + E_2$ est directe on la note $E_1 \oplus E_2$.

Théorème.– La somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Définition.– On dit que les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E ssi tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

Si F est un sous espace vectoriel de E alors tout sous espace vectoriel G de E vérifiant $E = F \oplus G$ est appelé un supplémentaire de F dans E.

Théorème.– Les assertions suivantes sont équivalentes

1) Les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E
2) $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
3) $E = E_1 \oplus E_2$.

2.3 Somme de p sous espaces vectoriels

Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(E_1, \cdots, E_p)$ une famille de sous espaces vectoriels de E.
On pose : $E_1 + \cdots + E_p = \{x \in E, \exists (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \mid x = x_1 + \cdots + x_p\}$.

Théorème.–

1) $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous espace vectoriel de E appelé somme de $E_1, \cdots, E_p$.
2) $E_1 + \cdots + E_p$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $E_1 \cup \cdots \cup E_p$.
   Autrement dit : $E_1 + \cdots + E_p = \text{Vect}(E_1 \cup \cdots \cup E_p)$.

Définition.– On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe ssi tout vecteur x de $E_1 + \cdots + E_p$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + \cdots + x_p$ avec pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x_k \in E_k$.
Pour exprimer que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe, on la note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

Proposition.–

1) La somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe si et seulement si :
   $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, $(x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k = 0_E)$.
2) Si la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe alors : $\forall (k,l) \in [\![1,p]\!]^2$, $k \neq l \Rightarrow E_k \cap E_l = \{0_E\}$.

Définition.– On dit que les sous espaces vectoriels $E_1,\cdots,E_p$ sont supplémentaires dans E si et seulement si : $\forall x \in E, \exists! (x_1,\cdots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \mid x = x_1 + \cdots + x_p$.

Proposition.– $E_1,\cdots,E_p$ sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

3. Notion de sous espace affine (Mpsi)

Soit E un K-espace vectoriel.

3.1 Terminologie et notations

Les éléments de E seront indifféremment appelés des vecteurs ou des points. Considéré comme un point un élément de E sera noté à l'aide des lettres majuscules $A, B, \cdots$, considéré comme un vecteur il sera noté à l'aide des symboles $\vec{x}, \vec{y}, \cdots$. Le vecteur nul de E alias 0_E est noté $\vec{0}$. Etant donnés deux points A et B de E, on pose $\overrightarrow{AB} = B - A$. On a donc : $B = A + \overrightarrow{AB}$. Bien que A et B soient appelés des points et que $\overrightarrow{AB}$ soit appelé vecteur « AB », les objets mathématiques A,B et $\overrightarrow{AB}$ sont tous du même type. Ce sont des éléments de E. Si A, B, C sont des points de E alors on a les propriétés suivantes : $\overrightarrow{AA} = 0_E$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Définition.– On suppose que E est <u>dimension finie</u> $p \geq 1$. Un repère affine de E est un couple (O, B) constitué d'un point O de E et d'une base $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ de E.

<u>Coordonnées d'un point dans un repère affine</u>

On suppose que E est <u>dimension finie</u> $p \geq 1$. Soit $(O, B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p))$ un repère affine de E.

Si M est un point de E alors $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur de E et il existe un unique $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p) \in K^p$ tel que $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{e}_i$ et M s'écrit de manière unique sous la forme $M = O + \alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{e}_p$.

Les scalaires $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ sont appelés les coordonnées de M dans (O, B).

3.2 Sous espaces affines

Etant donnés un point A de E et un sous espace vectoriel F de E on note $A + F$ la partie de E définie par $A + F = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in F\}$.

Proposition.– Soient A, B des points de E et F, G des sous espaces vectoriels de E.
Si $A + F = B + G$ alors $F = G$ mais le point A n'est pas nécessairement égal au point B.

Définition.– On appelle sous espace affine de E toute partie $\mathcal{W}$ de E qui peut s'écrire sous la forme $\mathcal{W} = A + F$ où A est un point de E et où F est un sous espace vectoriel de E. Dans une telle écriture le sous espace vectoriel F est unique et est appelé direction du sous espace affine $\mathcal{W}$.

Proposition.–

1) Tout sous espace vectoriel de E est un sous espace affine de E.
2) Si $\mathcal{W}$ est un sous espace affine de direction F de E alors $\mathcal{W} \neq \varnothing$ et $\forall M \in E$, $\mathcal{W} = M + F$.

Proposition.– Si $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ sont des sous espaces affines de E de directions respectives F_1 et F_2 alors ou bien $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \varnothing$ ou bien $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ est un sous espace affine de direction $F_1 \cap F_2$.

4. Familles de vecteurs d'un espace vectoriel (Mpsi)

4.1 Le cas d'une famille finie

Définition.– Soient E un K-espace vectoriel et $x_1,\cdots,x_p$ des vecteurs de E.

1) On dit que $(x_1,\cdots,x_p)$ est une famille libre si et seulement si pour tout $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p) \in K^p$ on a la propriété : $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i = 0_K$.
2) On dit que $(x_1,\cdots,x_p)$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire sous la forme : $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$ avec $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p) \in K^p$.
3) On dit que $(x_1,\cdots,x_p)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme : $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$ avec $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p) \in K^p$.
4) On dit que la famille $(x_1,\cdots,x_p)$ est une famille liée si et seulement si elle n'est pas libre. $(x_1,\cdots,x_p)$ est donc liée si et seulement si il existe $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p) \in K^p \setminus \{0_{K^p}\}$ tel que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0_E$.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel et $x_1,\cdots,x_p$ des vecteurs de E.

1) $(x_1,\cdots,x_p)$ est une génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_p)$.
2) $(x_1,\cdots,x_p)$ est une base de E si et seulement si $(x_1,\cdots,x_p)$ est libre et génératrice de E.
3) Si les x_i, $i \in [\![1,p]\!]$ sont tous <u>non nuls</u> alors on a les caractérisations suivantes :
   $(x_1,\cdots,x_p)$ est libre si et seulement si la somme $Kx_1 + \cdots + Kx_p$ est directe.
   $(x_1,\cdots,x_p)$ est une base de E si et seulement si $Kx_1,\cdots,Kx_p$ sont supplémentaires dans E.

Théorème.– On pose : $\varepsilon_1 = (1_K, 0_K, 0_K, \cdots, 0_K), \cdots, \varepsilon_n = (0_K, 0_K, \cdots, 0_K, 1_K)$.
$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ est une base du K-espace vectoriel K^n et est appelée base canonique de K^n.

Proposition.– Soient E un K-espace vectoriel et $x \in E$.

1) La famille (x) est libre si et seulement si x est non nul. Une famille d'éléments de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres.
2) Si $(x_1,\cdots,x_p)$ est une famille libre et si x n'est pas une combinaison linéaire de la famille $(x_1,\cdots,x_p)$ alors $(x_1,\cdots,x_p,x)$ est une famille libre.
3) Si $(x_1,\cdots,x_p)$ est génératrice de E et si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ x_i est une combinaison linéaire de la famille $(y_1,\cdots,y_q)$ alors $(y_1,\cdots,y_q)$ est génératrice de E.

Exemples

- $(1,j)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ et (e_1,e_{-1}) sont des bases du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f''-f=0\}$.
- $(\cos,\sin)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f''+f=0\}$.
  (e_i,e_{-i}) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \mid f''+f=0\}$.
- $(1,X,\cdots,X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

4.2 Le cas d'une famille quelconque de vecteurs de E

Soient I un ensemble quelconque et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

Définition.– On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur de E qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i$ où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires.

Proposition.–

1) Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires alors $(\alpha_i x_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de vecteurs de E et le symbole $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i$ a bien un sens.
2) 0_E est la seule combinaison linéaire de la famille vide (cas où $I=\varnothing$).

Définition.–

1) On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ à valoir 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si elle n'est pas libre.
2) On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.
3) On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Traduction des définitions

$(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre $\Leftrightarrow \forall (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)},\ \sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \alpha_i = 0_K$.

$(x_i)_{i\in I}$ est une famille liée $\Leftrightarrow \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)} \setminus \{0_{K^{(I)}}\} \mid \sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0_E$.

$(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E $\Leftrightarrow \forall y \in E, \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)} \mid y = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$.

$(x_i)_{i\in I}$ est une base de E $\Leftrightarrow \forall y \in E, \exists! (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)} \mid y = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$.

Proposition.– Toute sur famille d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.
Toute sur famille d'une famille liée est une famille liée.
Toute sous famille d'une famille libre est une famille libre.

Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

Soit $B=(e_i)_{i\in I}$ une base du K-espace vectoriel E. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille presque nulle de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i$. Cette unique famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est appelée famille des coordonnées de x dans la base B et pour tout $i \in I$, le scalaire α_i est appelée coordonnée d'indice i du vecteur x dans la base B. Etant donné $i \in I$ on note e_i^* l'application de E dans K qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée d'indice i dans la base B.

Proposition.– Soit $B=(e_i)_{i\in I}$ une base de E.

1) Pour tout $x \in E$ on a : $x=\sum_{i\in I}e_i^*(x)e_i$.
2) Pour tout $i \in I$, e_i^* est une forme linéaire sur E.

Proposition.– (Bases de $K[X]$)

1) $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$.
2) Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de $K[X]$ vérifiant $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$.
3) Si $a \in K$ alors la suite $\left((X-a)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$ et pour tout $P \in K[X]$ on a :

$$P=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

5. Parties convexes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5.1 Notion de partie convexe

Définition.– Etant donnés deux points x et y de E on appelle segment d'extrémités x et y la partie de E notée $[x,y]$ définie par : $[x,y]=\{z\in E,\exists\lambda\in[0,1] \mid z=(1-\lambda)x+\lambda y\}$.

Définition.– Soit A une partie de E.

On dit que A est étoilée si et seulement si : $\exists a\in A,\forall x\in A,\ [a,x]\subset A$.

On dit que A est convexe si et seulement si : $\forall(x,y)\in A^2,[x,y]\subset A$.

Remarques :

✓ Il est à noter que dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on a : $\forall(x,y)\in E^2,\ [x,y]=[y,x]$.

✓ Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. La notation $[a,b]$ peut désormais s'interpréter de deux manières distinctes. La première consiste à interpréter $[a,b]$ comme étant un intervalle de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R},|\ |)$., la seconde consiste à interpréter $[a,b]$ comme le segment d'extrémités a et b du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. Dans le premier cas on a $[0,1]\neq[1,0]$ car $[1,0]=\varnothing$. Dans le second cas on a $[0,1]=[1,0]$.

Proposition.–

1) Tout sous espace affine de E est une partie convexe de E.
2) Tout sous espace vectoriel de E est une partie convexe de E.
3) Si x et y sont des éléments de E alors $[x,y]$ est une partie convexe de E.
4) Toute partie convexe non vide de E est une partie étoilée de E.
5) Une intersection de parties convexes de E est une partie convexe de E.

Exemple : On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Un « haricot » n'est pas convexe ; un « donut » est non étoilé ; une étoile est étoilée et non convexe.

Théorème.– Les parties convexes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

5.2 Notion de barycentre

Théorème.– Soient $A_1,\cdots,A_p$ des points de E et $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ des réels. On pose : $\sigma=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i$.

1) Si $\sigma\neq0$ alors $G=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{p}\alpha_iA_i$ est l'unique point de E qui vérifie $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=0_E$.

Il est appelé barycentre du système $(A_1,\alpha_1),\cdots,(A_p,\alpha_p)$.

2) Si $\sigma=0$ alors : $\forall(M,N)\in E^2,\ \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{NA_i}$.

Terminologie :

✓ Pour $\alpha\neq0$, $G=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}A_i$ est le barycentre de $(A_1,\alpha),\cdots,(A_p,\alpha)$.

Le point $G=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}A_i$ est appelé isobarycentre des points $A_1,\cdots,A_p$.

✓ L'isobarycentre $I=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ des points A et B est appelé milieu du bipoint (A,B).

Proposition.– Une partie A de E est convexe si et seulement si elle contient les barycentres à coefficients positifs de ses points c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie : pour tout entier naturel non nul p, pour tout p-uplet $(A_1,\cdots,A_p)$ de points de A et pour tout p-uplet $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ de réels positifs dont la somme n'est pas nulle, le barycentre de $(A_1,\lambda_1),\cdots,(A_p,\lambda_p)$ appartient à A.

5.3 Lien entre les notions de fonction convexe et de partie convexe

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une application à valeurs réelles.

Définition.– L'ensemble $E_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in I \text{ et } f(x)\leq y\}$ est appelé épigraphe de f.

Proposition.– f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

6. Notion de K-algèbre

6.1 Structure de K-algèbre

Définition.– On appelle K-algèbre tout quadruplet $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ tel que :

(AL1) : $(\mathcal{A},+,\times)$ est un anneau.

(AL2) : $(\mathcal{A},+,\bullet)$ est un K-espace vectoriel.

(AL3) : $\forall(x,y)\in\mathcal{A}^2,\forall\alpha\in K,\ \alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$.

Une algèbre $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ est dite commutative si et seulement si l'anneau $(\mathcal{A},+,\times)$ est commutatif.
Une algèbre $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ est dite intègre si et seulement si l'anneau $(\mathcal{A},+,\times)$ est intègre.
Une algèbre $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ est dite de dimension finie si et seulement si le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{A},+,\bullet)$ est de dimension finie.

Exemples

- ✓ Si $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps alors $(\mathbb{K},+,\times,\times)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre intègre.
- ✓ Si D est un ensemble quelconque alors $(\mathbb{K}^D,+,\times,\bullet)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative mais non nécessairement intègre. En particulier $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times,\bullet)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- ✓ $(\mathbb{K}[X],+,\times,\bullet)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre de dimension infinie.
- ✓ $(M_n(\mathbb{K}),+,\times,\bullet)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre pour $n\geq 2$. Elle est de dimension finie égale à n^2. $(L(E),+,\circ,\bullet)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E\geq 2$. Si $\dim E = n$ alors $\dim L(E)=n^2$.

Définition.– Soient $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ une K-algèbre et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ est un sous algèbre de $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ si et seulement si :
1) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(x,y)\in\mathcal{B}^2,\ \alpha x+\beta y\in\mathcal{B}$.
2) $\forall(x,y)\in\mathcal{B}^2,\ xy\in\mathcal{B}$.
3) $1_{\mathcal{A}}\in\mathcal{B}$.

Exemples

- ➢ $B(D,\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $(\mathbb{K}^D,+,\times,\bullet)$.
- ➢ $E([a,b],\mathbb{K})$, $M^0([a,b],\mathbb{K})$ et $C^0([a,b],\mathbb{K})$ sont des sous algèbres de $(B([a,b],\mathbb{K}),+,\times,\bullet)$.
- ➢ Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point alors $M^0(I,\mathbb{K})$, $C^0(I,\mathbb{K})$, $D^n(I,\mathbb{K})$, $C^n(I,\mathbb{K})$, $D^\infty(I,\mathbb{K})$ et $C^\infty(I,\mathbb{K})$ sont des sous algèbres de $(\mathbb{K}^I,+,\times,\bullet)$.
- ➢ L'ensemble $T_n^s(\mathbb{K})$ (resp $T_n^i(\mathbb{K})$, resp $D_n(\mathbb{K})$) des matrices triangulaires supérieures (resp triangulaires inférieures, resp diagonales) d'ordre n est une sous algèbre de $(M_n(\mathbb{K}),+,\times,\bullet)$.

Définition.– Soient $(\mathcal{A},+,\times,\bullet)$ et $(\mathcal{A}',+,\times,\bullet)$ deux K-algèbres. On dit que $u:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ est un morphisme de K-algèbres si et seulement si :
1) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(x,y)\in\mathcal{A}^2,\ u(\alpha x+\beta y)=\alpha u(x)+\beta u(y)$.
2) $\forall(x,y)\in\mathcal{A}^2,\ u(xy)=u(x)u(y)$.
3) $u(1_{\mathcal{A}})=1_{\mathcal{A}'}$.

Remarques : Si $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$ on dit que u est un endomorphisme de K-algèbres. Si u est bijective on dit que u est un isomorphisme de K-algèbres. Si $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$ et si u est bijective alors on dit que u est un automorphisme de K-algèbres. Deux K-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme de K-algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des K-algèbres ce sont des K-espaces vectoriels. Si u est un morphisme de K-algèbre alors d'après 1) u est une application linéaire. La théorie sur les applications linéaires s'applique donc aux morphismes de K-algèbres.

Exemple : Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ et $B=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Soit $M_B : L(E)\to M_n(\mathbb{K})$ l'application qui à tout endomorphisme u de E associe la matrice $M_B(u)$ de u dans la base B. L'application M_B est un isomorphisme de K-algèbre.

7. Pour aller plus loin (HP)

Proposition.– Soient F,G des sous espaces vectoriels de E.
1) $F\cup G$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.
2) Si $F\neq E$ et $G\neq E$ alors $F\cup G\neq E$.

Proposition.– $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}=P(\mathbb{R},\mathbb{K})\oplus I(\mathbb{R},\mathbb{K})$. Autrement dit, toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une application paire et d'une application impaire. Si $f\in\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ alors $f=\frac{1}{2}(f+s(f))+\frac{1}{2}(f-s(f))$ où $\frac{1}{2}(f+s(f))$ est paire et où $\frac{1}{2}(f-s(f))$ est impaire.

Proposition.– Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et P est un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$. Etant donné $A\in\mathbb{K}[X]$ on note $r_P(A)$ et $q_P(A)$ le reste et le quotient de la division euclidienne de A par P.
Les applications r_P et q_P sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.
Plus précisément, r_P est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$ d'image $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et de noyau $P\mathbb{K}[X]$.
En particulier, $\mathbb{K}[X]=P\mathbb{K}[X]\oplus\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Applications linéaires

Dans tout le chapitre K désigne un corps et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Notion d'application linéaire (Mpsi)

1.1 Définitions et premières propriétés

Soient $(E,+,\cdot)$, $(F,+,\cdot)$ et $(G,+,\cdot)$ trois K-espaces vectoriels.

Définition.– Une application $u : E \to F$ de E dans F est dite linéaire si et seulement si : $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall (x,y) \in E^2,\ u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$.

Proposition.– Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1) $u(0_E) = 0_F$
2) $u\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(x_i)$ pour tout $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in K^p$ et pour tout $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$.
3) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indexée par un ensemble I quelconque.

   Pour toute famille presque nulle $(\alpha_i)_{i\in I}$ de scalaires on a : $u\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$.

Proposition.– (Homothéties)

1) Si $\alpha \in K$ alors $h_\alpha = \alpha Id_E$ est un endomorphisme de E et est appelé homothétie de rapport α.
2) $\forall(\alpha,\beta) \in K^2,\ h_\alpha \circ h_\beta = h_{\alpha\beta}$.
3) Si $\forall \alpha \in K \setminus \{0_K\},\ h_\alpha \in GL(E)$ et $(h_\alpha)^{-1} = h_{\alpha^{-1}}$.

<u>Noyau et image d'une application linéaire</u>

Définition.– Soit $u : E \to F$ une application linéaire de E dans F. On adopte les notations suivantes : $\operatorname{Ker} u = \{x \in E,\ u(x) = 0_F\}$ et $\operatorname{Im} u = \{y \in F,\ \exists\, x \in E \mid y = u(x)\}$.

Les ensembles Ker u et Im u sont respectivement appelés noyau et image de u.

Proposition.– Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1) Ker u est un sous espace vectoriel de E et u est injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
2) Im u est un sous espace vectoriel de F et u est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} u = F$.

<u>Terminologie</u> : Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

- ✓ Si u est bijective alors on dit que u est un isomorphisme de K-espace vectoriels de E sur F.
- ✓ Si $F = K$ alors on dit que u est une forme linéaire sur E.
- ✓ Si $E = F$ alors on dit que u est un endomorphisme du K-espace vectoriel E.
- ✓ Si $E = F$ et u est bijective alors on dit que u est un automorphisme du K-espace vectoriel E.
- ✓ On dit que les K-espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme de K-espace vectoriel de E sur F.

<u>Notations</u> :

- ✓ On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\operatorname{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F.
- ✓ L'ensemble $L(E,K)$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé espace dual de E.
- ✓ L'ensemble $L(E,E)$ des endomorphismes de E est noté $L(E)$.
- ✓ L'ensemble $\operatorname{Isom}(E,E)$ des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

<u>Exemples</u>

- ➢ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. L'application $D : \mathcal{D}^1(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^I$ définie par $D(f) = f'$ est une application linéaire.
- ➢ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'application $I : M^0([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $I(f) = \int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire sur $M^0([a,b],\mathbb{K})$.

1.2 Opérations algébriques sur les applications linéaires

Proposition.–

Si $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$ alors $v \circ u \in L(E,G)$.

Si $u \in \operatorname{Isom}(E,F)$ alors $u^{-1} \in \operatorname{Isom}(F,E)$.

Proposition.– $L(E,F)$ est un sous espace vectoriel de $(F^E,+,\cdot)$ et par suite, muni des lois induites, $L(E,F)$ est un K-espace vectoriel.

Proposition.–

1) Si $v \in L(F,G)$ alors $(u \to v \circ u)$ est une application linéaire de $L(E,F)$ dans $L(E,G)$.
2) Si $u \in L(E,F)$ alors $(v \to v \circ u)$ est une application linéaire de $L(F,G)$ dans $L(E,G)$.

Remarque : Les propriétés énoncées ci-dessus se traduisent concrètement par :

$$\forall (\alpha_1,\alpha_2) \in K^2, \forall (u_1,u_2) \in L(E,F)^2, \forall v \in L(F,G), v \circ (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 (v \circ u_1) + \alpha_2 (v \circ u_2)$$

$$\forall (\alpha_1,\alpha_2) \in K^2, \forall (v_1,v_2) \in L(F,G)^2, \forall u \in L(E,F), (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \circ u = \alpha_1 (v_1 \circ u) + \alpha_2 (v_2 \circ u)$$

1.3 Applications linéaires et sous espaces vectoriels

Proposition.– Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1) Si E' est un sous espace vectoriel de E alors $u(E')$ est un sous espace vectoriel de F.
2) Si F' est un sous espace vectoriel de F alors ${}^{-1}u(F')$ est un sous espace vectoriel de E.

Théorème.– Soient $E_1,\cdots,E_p$ des sous espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$. Si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, u_k est une application linéaire de E_k dans F alors il existe une unique application linéaire u de E dans F dont la restriction à E_k soit égale à u_k pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

1.4 Applications linéaires et famille de vecteurs

Proposition.– Si $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ alors $u\left(\mathrm{Vect}\left(\{x_i, i \in I\}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(\{u(x_i), i \in I\}\right)$.

Proposition.– L'image d'une famille liée de vecteurs de E par une application linéaire de E dans F est une famille liée de vecteurs de F. L'image d'une famille libre de vecteurs de E par une application linéaire injective de E dans F est une famille libre de vecteurs de F. L'image d'une famille génératrice de E par une application linéaire surjective de E dans F est une famille génératrice de F. L'image d'une base de E par une application linéaire bijective de E dans F est une base de F.

Théorème.– Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire u de E dans F vérifiant : $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. Elle est injective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est libre, surjective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est génératrice de F, bijective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une base de F et pour tout $x \in E$ on a : $u(x) = \sum_{i\in I} e_i^*(x) f_i$.

Théorème.– Si des applications linéaires de E dans F coïncident sur une base de E alors elles sont égales.

2. Projecteurs et symétries d'un K-espace vectoriel E (Mpsi)

Soit $(E,+,\cdot)$ un K-espace vectoriel.

2.1 Projecteurs

Définition.– Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Tout vecteur x de E s'écrit donc de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $(y,z) \in F \times G$.
L'application de E dans E qui à x associe y est appelée projection sur F parallèlement à G.
Elle est notée $p_{F,G}$.

Proposition.– Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.

1) $p_{F,G}$ est un endomorphisme de E qui vérifie $p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}$.
2) $\mathrm{Im}\, p_{F,G} = F$ et $\mathrm{Ker}\, p_{F,G} = G$.
3) $p_{F,G} + p_{G,F} = \mathrm{Id}_E$ et $p_{F,G} \circ p_{G,F} = p_{G,F} \circ p_{F,G} = 0_{L(E)}$.

Définition.– On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

Théorème.– Soit p un projecteur de E.

1) $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Autrement dit : $\forall x \in E,\ x \in \mathrm{Im}\, p \Leftrightarrow p(x) = x$.
2) $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.
3) p n'est autre que la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

Théorème.– Une application $p : E \to E$ est un projecteur de E si et seulement si il existe deux sous espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que $p = p_{F,G}$.

2.2 Symétries

Dans tout ce paragraphe on suppose que : $1_K + 1_K \neq 0_K$.

Définition.– Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.
L'application $s_{F,G} = 2p_{F,G} - \mathrm{Id}_E$ est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Proposition.– Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.

1) $s_{F,G}$ est un endomorphisme de E vérifiant $s_{F,G} \circ s_{F,G} = Id_E$.

   $Ker(s_{F,G} - Id_E) = F$ et $Ker(s_{F,G} + Id_E) = G$.

2) $s_{F,G} + s_{G,F} = 0_{L(E)}$ et $s_{F,G} \circ s_{G,F} = s_{G,F} \circ s_{F,G} = -Id_E$.

Définition.– On appelle symétrie de E tout endomorphisme s de E vérifiant $s \circ s = Id_E$.

Théorème.– Soit s une symétrie de E.

1) s est un automorphisme de E et $s^{-1} = s$.
2) $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$.
3) s n'est autre que la symétrie par rapport à $Ker(s - Id_E)$ parallèlement à $Ker(s + Id_E)$.

Théorème.– Une application $s : E \to E$ est une symétrie de E si et seulement si il existe deux sous espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que $s = s_{F,G}$.

3. Pour aller plus loin (HP)

Soit $(E,+,\cdot)$ un K-espace vectoriel.

3.1 Homothéties

Proposition.– Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E.

1) Si $(\forall x \in E, \exists \lambda_x \in K \mid u(x) = \lambda_x . x)$ alors u est une homothétie de E.
2) Si pour tout $x \in E$ la famille $(x, u(x))$ est liée alors u est une homothétie de E.

3.2 Noyau et image des itérées d'un endomorphisme

Proposition.– Soit $u \in L(E)$.

1) $Ker\, u = Ker\, u^2 \Leftrightarrow Im\, u \cap Ker\, u = \{0_E\}$.

3) $Im\, u = Im\, u^2 \Leftrightarrow Im\, u + Ker\, u = E$.

Proposition.– Soit $u \in L(E)$.

1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $Ker\, u^k \subset Ker\, u^{k+1}$ et $Im\, u^{k+1} \subset Im\, u^k$.
2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Ker\, u^k = Ker\, u^{k+1}) \Rightarrow (Ker\, u^{k+1} = Ker\, u^{k+2})$.

   Si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Ker\, u^p = Ker\, u^{p+1}$ alors $Ker\, u^k = Ker\, u^p$ pour tout $k \geq p$.
3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Im\, u^{k+1} = Im\, u^k) \Rightarrow (Im\, u^{k+2} = Im\, u^{k+1})$.

   Si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Im\, u^p = Im\, u^{p+1}$ alors $Im\, u^k = Im\, u^p$ pour tout $k \geq p$.

3.3 Famille de projecteurs associée à une décomposition de E en somme directe

Théorème.– Soient $(E,+,\cdot)$ un K-espace vectoriel et $E_1, \cdots, E_p$ des sous espaces vectoriels supplémentaires dans E. On a donc : $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $x_k \in E_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$. On note p_k l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe le vecteur x_k.

1) p_k est un projecteur de E. $Im\, p_k = E_k$ et $Ker\, p_k = E_1 + \cdots + E_{k-1} + E_{k+1} + \cdots + E_p$.

4) $\sum_{k=1}^{p} p_k = Id_E$, $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $p_k^2 = p_k$ et $\forall (k,l) \in [\![1,p]\!]^2$, $k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0_{L(E)}$.

La famille $(p_1, \cdots, p_p)$ de projecteurs de E est appelée famille de projecteurs associée à la décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.