Espaces préhilbertiens

Dans tout le chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Notion de produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ qui vérifie :

$\varphi(x,\bullet)$ est linéaire pour tout $x\in E$ et $\varphi(\bullet,y)$ est linéaire pour tout $y\in E$.

Si $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur E, si $x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_q$ sont des vecteurs de E et si $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q$ sont des réels alors $\varphi\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i,\sum_{j=1}^{q}\beta_j y_j\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\alpha_i\beta_j\varphi(x_i,y_j)$.

Une forme bilinéaire φ sur E est dite symétrique si $\varphi(y,x)=\varphi(x,y)$ pour tout $(x,y)\in E^2$, positive si $\varphi(x,x)\geq 0$ pour tout $x\in E$ et définie si $(\varphi(x,x)=0 \Rightarrow x=0_E)$ pour tout $x\in E$.

Définition.– Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Un semi-produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique positive.(HP)

<u>Notation</u> :

Si $(\bullet|\bullet)$ est un semi-produit scalaire sur E alors pour tout vecteur $x\in E$ on pose : $\|x\|=\sqrt{(x\mid x)}$.

Le réel positif $\|x\|$ est appelé semi-norme du vecteur x.

Lorsque $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire ce même réel est appelé norme du vecteur x.

Définition.– Un espace préhilbertien réel est un couple $(E,(\bullet|\bullet))$ constitué d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ sur E.

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

1.1 Exemples et premières propriétés

➢ Pour $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ on pose : $(x\mid y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

➢ Pour $(A,B)\in M_n(\mathbb{R})^2$ on pose : $(A\mid B)=\mathrm{Tr}({}^tAB)$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

Si $A=(a_{ij})$ et $B=(a_{ij})$ alors $(A\mid B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$ et $\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$.

➢ Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]$ on pose : $(P\mid Q)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

➢ Pour $f\in M^0([a,b],\mathbb{R})$ et $g\in M^0([a,b],\mathbb{R})$ on pose : $(f\mid g)=\int_a^b fg$.

$(\bullet|\bullet)$ est un semi-produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M^0([a,b],\mathbb{R})$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

➢ On pose : $\ell^2(\mathbb{R})=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum|u_n|^2 \text{ converge}\right\}$. $\ell^2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour $u=(u_n)$ et $v=(v_n)$ dans $\ell^2(\mathbb{R})$ on pose : $(u\mid v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{R})$.

Théorème.– (Formulaire)

Soient $(\bullet|\bullet)$ un semi-produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et x,y deux vecteurs de E.

1) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x\mid y)$ et $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x\mid y)$.

2) $(x\mid y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$.

3) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

<u>Terminologie</u> :

Les formules du 1) sont appelées identités remarquables, la formule du 2) est appelée identité de polarisation et celle du 3) identité du parallélogramme.

1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Théorème.– (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(\bullet|\bullet)$ un semi-produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1) $\forall (x,y)\in E^2$, $|(x\mid y)|\leq\|x\|\|y\|$.

2) Si $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur E alors il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Théorème1.– (Inégalité de Minkowski)

Si $(\bullet|\bullet)$ un semi-produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E alors l'application $\| \ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une semi norme sur E dite semi-norme associée à $(\bullet|\bullet)$.

En particulier : $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. (Inégalité de Minkowski)

Théorème2.– (Inégalité de Minkowski)

Si $(\bullet|\bullet)$ un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E alors l'application $\| \ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E dite associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$.

Il y a égalité dans l'inégalité de Minkowski si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid y = \lambda x$.

<u>Remarque</u> : Si $(E,(\bullet|\bullet))$ est un espace préhilbertien et si $\| \ \|$ est la norme associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ alors $(E,\| \ \|)$ est un espace vectoriel normé.

<u>Exemples d'inégalités du type Minkowski</u>

- Pour $u = (u_1,\cdots,u_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose : $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$. $\| \ \|_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
- Pour $f \in M^0([a,b],\mathbb{K})$ on pose : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$. L'application $\| \ \|_2$ est une semi-norme sur $M^0([a,b],\mathbb{K})$. L'application $\| \ \|_2$ est une norme sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$.
- Pour $u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{K})$ on pose : $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$. $\| \ \|_2$ est une norme sur $\ell^2(\mathbb{K})$.

Théorème.– (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$)

On considère des scalaires u, v dans $\mathbb{K}$.

1) $\big||u| - |v|\big| \le |u+v| \le |u| + |v|$.
2) $|u+v| = |u| + |v| \Leftrightarrow u = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid v = \lambda u$.

Proposition.– (Inégalité de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$)

Si $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{K}^n$ alors $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$.

Proposition.– (Inégalité de Minkowski dans $M^0([a,b],\mathbb{K})$)

Si $(f,g) \in M^0([a,b],\mathbb{K})^2$ alors $\sqrt{\int_{[a,b]} |f+g|^2} \le \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2} + \sqrt{\int_{[a,b]} |g|^2}$.

Proposition.– (Inégalité de Minkowski dans $\ell^2(\mathbb{K})$)

Si (u_n) et (v_n) sont des suites de $\ell^2(\mathbb{K})$ alors $\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \times \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2}$.

2. Notion d'orthogonalité dans un espace préhilbertien

Dans tout le paragraphe, $(E,(\bullet|\bullet))$ désigne un espace préhilbertien réel.

On note $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$. $(E,\| \ \|)$ est un espace vectoriel normé.

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition.–

1) Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux si et seulement si $(x \mid y) = 0$.
   Pour exprimer que x et y sont orthogonaux on note $x \perp y$.
2) Une famille $(x_1,\cdots,x_p)$ de vecteurs de E est dite orthogonale si et seulement si les vecteurs $x_1,\cdots,x_p$ sont deux à deux orthogonaux. Elle est dite orthonormale si et seulement si elle est orthogonale et si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in [1,p]$.

<u>Remarque</u> : La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire.
Si on change de produit scalaire alors on modifie la notion d'orthogonalité.

Proposition (Mpsi).–

1) Tout vecteur de E est orthogonal au vecteur nul. Le vecteur nul est le seul vecteur de E à être orthogonal à tout vecteur de E.
2) Si la famille $(x_1,\cdots,x_p)$ est orthogonale alors $\|x_1 + \cdots + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_p\|^2$.
3) $\forall (x,y) \in E^2$, $\left(x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. (théorème de Pythagore)
4) Toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est une famille libre.
5) Toute famille orthonormale de vecteurs de E est une famille libre.

<u>Remarque</u> : La propriété 3) est appelée propriété de Pythagore. Sa réciproque est fausse lorsque $p \ge 3$. Elle est par contre vraie que lorsque $p = 2$. On obtient alors le théorème de Pythagore.

Théorème (Mpsi).– (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

1) Si $(x_1,\cdots,x_p)$ est une famille libre de vecteurs de E alors il existe une unique famille orthonormale $(e_1,\cdots,e_p)$ qui vérifie :
$\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k) = \mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_k)$ et $(e_k \mid x_k) > 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
2) Si (x_n) est une suite libre de vecteurs de E alors il existe une unique suite orthonormale (e_n) qui vérifie : $\mathrm{Vect}(e_0,\cdots,e_k) = \mathrm{Vect}(x_0,\cdots,x_k)$ et $(e_k \mid x_k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque

✓ La famille $(e_1,\cdots,e_p)$ est appelée l'orthonormalisée de la famille libre $(x_1,\cdots,x_p)$.
Elle est donnée par les formules suivantes :

$$f_1 = x_1 \text{ et } e_1 = \frac{1}{\|f_1\|}f_1.\ f_2 = x_2 - (e_1 \mid x_2)e_1 \text{ et } e_2 = \frac{1}{\|f_2\|}f_2.$$

....

$$f_p = x_p - (e_1 \mid x_p)e_1 - (e_2 \mid x_p)e_2 - \cdots - (e_{p-1} \mid x_p)e_{p-1} \text{ et } e_p = \frac{1}{\|f_p\|}f_p.$$

✓ La suite (e_n) est appelée l'orthonormalisée de la suite libre (x_n). Elle est donnée par :

$$f_0 = x_0 \text{ et } e_0 = \frac{1}{\|f_0\|}f_0;\ f_p = x_p - \sum_{k=0}^{p-1}(e_k \mid x_p)e_k \text{ et } e_p = \frac{1}{\|f_p\|}f_p \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

2.2 Parties orthogonales

Définition.– Soient A, B deux parties de E.

1) Les parties A et B sont dites orthogonales si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B c'est-à-dire si et seulement si : $\forall (a,b) \in A\times B,\ (a \mid b) = 0$. Pour exprimer que les parties A et B sont orthogonales on note $A \perp B$.
2) L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A. C'est une partie de E que l'on $A^\perp$. Ainsi : $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A,\ (x \mid a) = 0\}$.

Proposition.– Soient A et B des parties de E.

1) Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
2) $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$.
3) $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E.
4) $A^\perp = (\mathrm{Vect}\,A)^\perp$, $A \cap A^\perp \subset \{0_E\}$, $A \perp A^\perp$ et $A \subset (A^\perp)^\perp$.
5) $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Définition.– Soient F et G deux sous espace vectoriel de E. Pour exprimer que $E = F \oplus G$ et que $F \perp G$ on note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ et on dit que E est somme directe orthogonale de F et G.

Théorème.– Soient F et G des sous espaces vectoriels de E.

1) Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ alors $F = G^\perp$ et $G = F^\perp$.
2) Si $\dim F < +\infty$ alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

2.3 Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de dimension finie

Dans tout ce paragraphe F est un sous espace vectoriel de dimension finie de E.

Puisque $\dim F < +\infty$ on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.
On peut donc parler de la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (alias $p_{F,F^\perp}$) ainsi que de la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ (alias $s_{F,F^\perp}$).
La projection $p_{F,F^\perp}$ est simplement notée p_F et est appelée projection orthogonale sur F.
La symétrie $s_{F,F^\perp}$ est simplement notée s_F et est appelée symétrie orthogonale par rapport à F.
Il est à noter que : $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

Théorème (Mpsi).–

Si $(e_1,\cdots,e_p)$ est une base orthonormale de F alors $\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{k=1}^{p}(e_k \mid x)e_k$.

Théorème (Mpsi).– On considère $x \in E$ et on pose : $d(x,F) = \inf_{y\in F}\|x-y\|$.

1) $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.
2) $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F à vérifier : $\forall y \in F,\ \|x - p_F(x)\| \le \|x-y\|$.
3) $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$ et $\forall y \in F\setminus\{p_F(x)\},\ d(x,F) < \|x-y\|$.
4) $\|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2 = \|x\|^2$.

Théorème.– (Inégalité de Bessel)

Si $(e_1,\cdots,e_p)$ est une famille orthonormale de vecteurs de E alors : $\forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{p}(e_k \mid x)^2 \le \|x\|^2$.

Si (e_k) est une suite orthonormale de vecteurs de E alors : $\forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{+\infty}(e_k \mid x)^2 \le \|x\|^2$.

3. Suites totales et suites orthonormales totales

Soit $(E,(\bullet|\bullet))$ un espace préhilbertien réel. On note $\| \ \|$ la norme associé au produit scalaire $(\bullet|\bullet)$.

Définition.– Une suite (e_k) de vecteurs de E est dite totale si et seulement si pour tout vecteur x de E il existe une suite (α_k) de réels telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$.

<u>Remarque</u> : L'égalité $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$ signifie que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(E,\| \ \|)$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k - x \right\| = 0$. Pour exprimer cela on note $x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e_k$.

Théorème.– Soit (e_k) une suite <u>orthonormale</u> et <u>totale</u> de vecteurs de E.

1) $\forall x \in E,\ x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (e_k | x) e_k$.

2) $\forall (x,y) \in E^2,\ (x | y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (e_k | x)(e_k | y)$.

3) $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (e_k | x)^2$. (Egalité de Parseval)

Théorème.– Soit (e_k) une suite <u>orthonormale</u> et <u>totale</u> de vecteurs de E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \cdots, e_n)$ et on note p_n la projection orthogonale sur F_n.

Pour tout $x \in E$ la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(E,\| \ \|)$.

4. Notion de projecteur orthogonal

Définition.– On appelle projecteur orthogonal de E tout projecteur p de E qui vérifie :

$\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$.

Proposition.– Soit p est un projecteur orthogonal de E.

1) $E = \mathrm{Im}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, p$.

2) $\mathrm{Im}\, p = (\mathrm{Ker}\, p)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}\, p = (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$.

Théorème.– Soit p un projecteur de E.

p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

Proposition.– Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ alors $p_{F,G}$ est un projecteur orthogonal.

5. Pour aller plus loin (HP)

5.1 Quelques propriétés supplémentaires

Soit $(E,(\bullet|\bullet))$ un espace préhilbertien réel.

Théorème.– Le produit scalaire $(\bullet|\bullet) : E \times E \to \mathbb{R}$ est continue sur $E \times E$.

Proposition.– Soit A une partie de E.

1) $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E.

2) $A^{\perp} = (\bar{A})^{\perp}$.

5.2 Une suite orthonormale et totale de $\ell^2(\mathbb{R})$

$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^2 \text{ converge} \right\}$. $\ell^2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ dans $\ell^2(\mathbb{R})$ on pose : $(u | v) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

$(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$ et par suite, $(\ell^2(\mathbb{R}),(\bullet|\bullet))$ est un espace préhilbertien réel.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère la suite $e^{(k)} = \left(e_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_n^{(k)} = \delta_{nk}$.

On a donc $e^{(k)} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ e^{(k)} \in \ell^2(\mathbb{R})$.

Proposition.– $\left(e^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale et totale d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$.

Espaces euclidiens

Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé un espace euclidien.

1. Propriétés fondamentales des espaces euclidiens

Théorème.– Tout espace euclidien de dimension $n \geq 1$ admet au moins une base orthonormale.

Théorème.– Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soient $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E.

1) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = (e_i \mid x)$.
2) $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Théorème.– Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1) Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E alors il existe une unique base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que : $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$ et $(e_k \mid x_k) > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   On dit que $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base orthonormalisée de la base $(x_1, \cdots, x_n)$.
2) Toute famille orthonormale de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormale.
3) Si u est un endomorphisme de E et si χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème.– Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Soient F, G des sous espaces vectoriels de E

1) $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.
2) $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
3) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Théorème.– (Représentation des formes linéaires)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Si φ est une forme linéaire sur E alors il existe un unique vecteur a de E tel que $\varphi = (a \mid \bullet)$.

2. Interprétation matricielle du produit scalaire

Définition.– Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
La matrice $G_B = ((e_i \mid e_j))$ est appelé matrice dans la base B du produit scalaire $(\bullet \mid \bullet)$.

Théorème.– Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Sot $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans B.

1) $(x \mid y) = {}^t X G_B Y$ et $\|x\|^2 = {}^t X G_B X$.
2) Si $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ est une base de E et si $P = P_B^{B'}$ alors $G_{B'} = {}^t P G_B P$.
3) B est une base orthonormale de E si et seulement si $G_B = I_n$.
4) Si B est une base orthonormale de E alors $(x \mid y) = {}^t X Y$ et $\|x\|^2 = {}^t X X$.

Proposition.– (Caractérisation des bases orthonormales)
Si B est une base orthonormale de E et si B' est une base de E alors :
La base B' est orthonormale si et seulement si $P_B^{B'} \in O_n(\mathbb{R})$.

<u>Un exemple important</u> :

$M_{n1}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $(X, Y) \in M_{n1}(\mathbb{R})^2$ on pose : $(X \mid Y) = {}^t XY$.
$(\bullet \mid \bullet)$ est un produit scalaire sur $M_{n1}(\mathbb{R})$. Il est à noter que : $\forall X \in M_{n1}(\mathbb{R})$, $\|X\|^2 = {}^t XX$.

3. Produit mixte dans un espace euclidien orienté

<u>Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie</u>

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Considérons deux bases B et B' de E. La matrice de passage $P_B^{B'}$ est inversible et par suite son déterminant est non nul. Comme $\det P_B^{B'} \in \mathbb{R}$, ou bien $\det P_B^{B'} > 0$ ou bien $\det P_B^{B'} < 0$. Orienter le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E c'est choisir arbitrairement une base B de E et décréter qu'elle est directe. Ceci étant fait, on dispose dans E de deux catégories de bases

1) Les bases B' de E telles que $\det P_B^{B'} > 0$. Ces bases sont dites directes.
2) Les bases B' de E telles que $\det P_B^{B'} < 0$. Ces bases sont dites indirectes.

A titre d'exemple supposons que E soit un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel de dimension 3 considérons une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de E. On oriente E en décrétant que B est une base directe. Dans ces conditions les bases (e_3, e_1, e_2) et (e_2, e_3, e_1) sont directes et les bases (e_1, e_3, e_2), (e_2, e_1, e_3), (e_3, e_2, e_1) sont indirectes.

Lemme.– Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.
Si B et B' sont deux bases orthonormales directes de E alors $\det_B = \det_{B'}$.

Définition.– Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$ et $x_1,\cdots,x_n$ n vecteurs de E.
On appelle produit mixte des n vecteurs $x_1,\cdots,x_n$ le réel $[x_1,\cdots,x_n]$ défini par :
$[x_1,\cdots,x_n] = \det_B(x_1,\cdots,x_n)$ où B est une base orthonormale directe quelconque de E.

4. Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3 (HP)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois.

Théorème-définition.– Soit $(x,y) \in E^2$.
Il existe un unique vecteur v de E vérifiant : $\forall z \in E,\ [x,y,z] = (v \mid z)$.
Cet unique vecteur v est appelé produit vectoriel de x et de y et est noté $x \wedge y$.
Par définition même on a donc : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ [x,y,z] = (x \wedge y \mid z)$.

Proposition.– (Expression du produit vectoriel dans une base orthonormale directe)
Soient $B = (e_1,e_2,e_3)$ une <u>base orthonormale directe</u> de E et x,y deux vecteurs de E.

1) Si $\begin{cases} x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \end{cases}$ alors $x \wedge y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} e_3$.
2) $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Proposition 1.–

1) Le produit vectoriel est une application bilinéaire de $E \times E$ dans E. Autrement dit :
$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y,z) \in E_3^3,\ (\alpha x + \beta y) \wedge z = \alpha(x \wedge z) + \beta(y \wedge z)$.
$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y,z) \in E_3^3,\ z \wedge (\alpha x + \beta y) = \alpha(z \wedge x) + \beta(z \wedge y)$.
2) $\forall (x,y) \in E^2,\ x \wedge y = -y \wedge x$. En particulier : $\forall x \in E,\ x \wedge x = 0_E$.

Proposition 2.– Soient x et y deux vecteurs de E.

1) Le vecteur $x \wedge y$ est à la fois orthogonal à x et à y.
2) La famille (x,y) est libre si et seulement si $x \wedge y \neq 0_E$.
3) Si la famille (x,y) est libre alors $(x,y,x \wedge y)$ est une base directe de E.
4) $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \mid y)^2$.

5. Notion d'angle orienté, d'écart angulaire dans un espace euclidien

5.1 Angle orienté de deux vecteurs non nuls en dimension deux

On notera que seule la notion de « mesure d'angle » va être définie, la notion « d'angle » elle ne le sera pas. Il est aussi à noter que la notion de « mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls » n'a de sens qu'en dimension deux.

Définition.– Soient E un espace euclidien **orienté** de dimension 2 et $(x,y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$. On appelle mesure de l'angle orienté des vecteurs x et y tout réel θ vérifiant : $e^{i\theta} = \dfrac{(x \mid y) + i[x,y]}{\|x\|\|y\|}$.

Proposition.– Soient E un espace euclidien **orienté** de dimension 2 et $(x,y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$.

1) Il existe au moins une mesure θ_0 de l'angle orienté des vecteurs x et y.
2) Si θ_0 est une mesure de l'angle orienté des vecteurs x et y alors l'ensemble des mesures de l'angle orienté des vecteurs x et y est égal à $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.
3) Si θ est <u>une</u> mesure de l'angle orienté de vecteurs x et y alors on a les relations :
$(x \mid y) = \|x\|\|y\|\cos\theta$ et $[x,y] = \|x\|\|y\|\sin\theta$.

5.2 Ecart angulaire de 2 vecteurs non nuls en dimension n (HP)

Définition.– Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $(x,y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$.
On appelle écart angulaire des vecteurs x et y le réel θ défini par : $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\right)$.

Proposition.– Soit E un espace euclidien **orienté** de dimension 3 et $(x,y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$.
Si θ est l'écart angulaire des vecteurs x et y alors $\theta \in [0,\pi]$ et on a les relations suivantes :
$(x \mid y) = \|x\|\|y\|\cos\theta$ et $\|x \wedge y\| = \|x\|\|y\|\sin\theta$.

Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans tout le chapitre $(E,(\cdot|\cdot))$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note $\|\ \|$ la norme associé au produit scalaire.

Proposition.– Soient $u \in L(E)$ et $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormale de E.

$M_B(u) = ((e_i \mid u(e_j)))$ et par suite $\mathrm{Tr}\, u = \sum_{k=1}^{n}(e_k \mid u(e_k))$.

1. Endomorphismes symétriques et matrices symétriques réelles

1.1 Réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Définition.– Soit u un endomorphisme de E.

On dit que u est dit symétrique si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Proposition.– Soit u un endomorphisme de E et B une base <u>orthonormale</u> de E.

u est symétrique si et seulement si $M_B(u)$ est symétrique.

Proposition.– Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sp}\, u \neq \varnothing$. En particulier, u admet au moins une valeur propre et toutes les valeurs propres de u sont réelles.
2) Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3) Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Théorème.– (Théorème spectral)

Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) Il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de E.
2) u est diagonalisable et si $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u alors $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u)$ et $E_{\lambda_1}(u),\cdots,E_{\lambda_r}(u)$ sont deux à deux orthogonaux.

1.2 Réduction des matrices symétriques réelles

Définition.– La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

Définition.– Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonalement semblable à B si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

<u>Remarque</u> : Pour exprimer que A est orthogonalement semblable à B on note $A \sim_{os} B$.

La relation « être orthogonalement semblable à » est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{R})$.

On a : $A \sim_{os} B \Leftrightarrow B \sim_{os} A$. Pour exprimer que A est orthogonalement semblable à B on dit aussi (puisqu'alors B est aussi orthogonalement semblable à A) que A et B sont orthogonalement semblables. Il est à noter que si $P \in O_n(\mathbb{R})$ alors $P^{-1} = {}^tP$.

Proposition.– Si A est symétrique réelle alors χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sp}\, A \neq \varnothing$. En particulier, A admet au moins une valeur propre et toutes ses valeurs propres sont réelles.

Théorème.– (Théorème spectral)

Si la matrice <u>réelle</u> A est <u>symétrique</u> alors on a les propriétés suivantes :

1) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.
2) A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A alors $M_{n,1}(\mathbb{R}) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(A)$ et $E_{\lambda_1}(A),\cdots,E_{\lambda_r}(A)$ sont deux à deux orthogonaux.

Proposition.– La matrice réelle A est symétrique si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

2. Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

2.1 Matrices orthogonales

Définition.– On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est noté $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition.–

1) $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$ et $\forall A \in O_n(\mathbb{R}),\ \det A \in \{-1,1\}$.
2) Une matrice orthogonale est inversible et a pour inverse sa transposée.

Définition.– Une matrice orthogonale de déterminant égal à 1 (resp -1) est dite positive (resp négative). L'ensemble des matrices orthogonales positives est noté $SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition.– (Groupe orthogonal et spécial orthogonal d'ordre n)

1) $(O_n(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe. Il est appelé groupe orthogonal d'ordre n.
2) $(SO_n(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe. Il est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Proposition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel (celui qui rend la base canonique orthonormale), on désigne par $(C_1,\cdots,C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de A et par $(L_1,\cdots,L_n)$ la famille des vecteurs lignes de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $A \in O_n(\mathbb{R})$.
2) $(C_1,\cdots,C_n)$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
3) $(L_1,\cdots,L_n)$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Proposition.– (Caractérisation des bases orthonormales)

Si B est une base orthonormale de E et si B' est une base de E alors :

La base B' est orthonormale si et seulement si $P_B^{B'} \in O_n(\mathbb{R})$.

Proposition.– Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{sp} A \subset \{-1,1\}$.

2.2 Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Définition.– Soit $f : E \to E$ une application.

On dit que f conserve le produit scalaire si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.

On dit que f conserve la norme si et seulement si $\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Définition.– Une isométrie vectorielle de E est un endomorphisme de E qui conserve la norme.
Un automorphisme orthogonal de E est un automorphisme de E qui conserve le produit scalaire.
Une rotation est un automorphisme orthogonal de déterminant égal à 1.
On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux.
On note $SO(E)$ l'ensemble des rotations de E.
On a donc : $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$.

Théorème.– Soit $u : E \to E$ une application (On notera que u n'est pas supposée linéaire).
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) L'application u est une isométrie vectorielle.
2) L'application u est un automorphisme orthogonal.
3) L'application u conserve le produit scalaire.
4) u est linéaire et l'image par u d'une base orthonormale de E est une base orthonormale de E.

<u>Remarque</u> : les notions d'isométrie vectorielle, d'automorphisme orthogonal et d'application conservant le produit scalaire sont donc équivalentes.

Proposition.– On considère un endomorphisme u de E et une base <u>orthonormale</u> B de E.

1) $u \in O(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$ et $u \in SO(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in SO_n(\mathbb{R})$.
2) Si u est un automorphisme orthogonal alors le déterminant de u vaut 1 ou -1.

Proposition.– $(O(E),\circ)$ est un groupe. Il est appelé groupe orthogonal de l'espace euclidien E.
$(SO(E),\circ)$ est un groupe. Il est appelé groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E.

Définition.– Une réflexion de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Proposition.–

1) Toute symétrie orthogonale s_F par rapport à un sous espace vectoriel F de E est un automorphisme orthogonal. D'autre part $\det s_F = (-1)^{\dim E - \dim F}$.
2) Toute réflexion de E est un automorphisme orthogonal de déterminant égal à -1.

<u>Remarque</u> : Un projecteur orthogonal distinct de Id_E n'est pas un automorphisme orthogonal !!!

3. Groupe orthogonal d'un espace euclidien de dimension deux (Mpsi)

Dans tout ce paragraphe E désigne un espace euclidien <u>**orienté**</u> de dimension <u>**deux**</u>.

3.1 Description de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

Pour $(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$ on a $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1+\theta_2)$ et $S(\theta_1)S(\theta_2) = R(\theta_1-\theta_2)$.

Proposition.– $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.
$(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe commutatif et $(O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe.

3.2 Rotations en dimension deux

Théorème - définition.– Soit r une rotation de E. Il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormale directe B de E, $M_B(r) = R(\theta_0)$. Si θ'_0 est un autre réel vérifiant $M_B(r) = R(\theta'_0)$ pour toute base orthonormale directe de E_2 alors $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \theta'_0 + 2\pi\mathbb{Z}$. L'ensemble $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ est appelé ensemble des mesures de la rotation r et tout réel θ de cet ensemble est appelé une mesure de la rotation r.

Proposition.– Soit r une rotation de E et θ une mesure quelconque de r.
1) Pour toute base orthonormale directe B de E on a $M_B(r) = R(\theta)$.
2) Pour toute base orthonormale indirecte B de E on a $M_B(r) = R(-\theta)$.
3) Si a est un vecteur unitaire de E alors $\cos\theta = (a \mid r(a))$ et $\sin\theta = [a \mid r(a)]$.

3.3 Description du groupe orthogonal en dimension deux

Les hyperplans de E sont les droites vectorielles donc les réflexions de E ne sont rien d'autre que les symétries orthogonales par rapport à une droite vectorielle.

Théorème.– (Classification par les invariants)
Soit u un automorphisme orthogonal de E. On pose : $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
1) Si $\dim F = 2$ alors $u = \mathrm{Id}_E$.
2) Si $\dim F = 1$ alors u est une réflexion de E.
3) Si $\dim F = 0$ alors u est une rotation de E.

Théorème.– (Groupe orthogonal de E_2 et réflexions)
Un automorphisme orthogonal du plan euclidien E est soit une réflexion soit une rotation.
Une rotation du plan euclidien E peut s'écrire comme une composée de deux réflexions.
Un automorphisme orthogonal du plan euclidien E est soit une réflexion, soit la composée de deux réflexions.

4. Réduction en base orthonormale des automorphismes orthogonaux

Théorème.– Soit u est un automorphisme orthogonal de E.
1) $\mathrm{sp}\, u \subset \{-1,1\}$.
2) Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3) Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.
4) Si u est diagonalisable alors $u = s_F$ où $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
5) Il existe un sous espace vectoriel de E de dimension un ou deux qui est stable par u.

Théorème.– Soit u un automorphisme orthogonal de E.
1) Il existe une base <u>orthonormale</u> B de E telle que $M_B(u)$ soit de la forme
$$\begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_{\theta_r} \end{bmatrix}$$
où p, q, r sont des entiers naturels éventuellement nuls et où $\theta_1, \cdots, \theta_r$ sont des réels de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ ce qui assure que $R_{\theta_k} \neq I_2$ et $R_{\theta_k} \neq -I_2$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.
2) $\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = p$, $\dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = q$ et $p + q + 2r = n$.
3) u est une rotation si et seulement si $\dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ est pair.

Proposition.– Si $\dim E$ est impaire et si u est une rotation de E alors $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Théorème-définition.– (Rotation en dimension trois)
Soient E un espace euclidien <u>**orienté**</u> de dimension <u>**trois**</u> et r est une rotation de E telle que $r \neq \mathrm{Id}_E$.
1) $D = \mathrm{Ker}(r - \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle de E et r induit dans le plan euclidien $D^\perp$ une rotation $\tilde{r}$ distincte de $\mathrm{Id}_{D^\perp}$. On dit que r est une rotation axiale d'axe D.
2) On choisit un vecteur <u>unitaire</u> k de D (deux choix possibles) et on <u>oriente</u> l'axe D de la rotation r en décrétant que (k) est une base directe de D. On considère une base orthonormale (i, j) de $D^\perp$ telle que $B = (i, j, k)$ soit une base directe de E et on <u>oriente</u> le plan vectoriel $D^\perp$ en décrétant que (i, j) est une base directe du plan euclidien $D^\perp$. Si θ est une mesure de la rotation $\tilde{r}$ alors on a : $M_B(r) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{Tr}\, r = 1 + 2\cos\theta$.

Remarques :

- ✓ On résume le processus du 2) qui a consisté à orienter successivement D et $D^{\perp}$ après avoir choisi un vecteur unitaire k de D en disant que l'on a orienté D et $D^{\perp}$ par le vecteur unitaire k. Il est à noter qu'il y a deux choix possibles pour le vecteur k.
- ✓ Ce n'est qu'une fois que le plan euclidien $D^{\perp}$ a été orienté que parler d'une mesure de la rotation $\tilde{r}$ a un sens. Toute mesure de la rotation $\tilde{r}$ est alors appelée une mesure de la rotation r.

5. Pour aller plus loin (HP)

5.1 Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs

Définition.– Soit u un endomorphisme de E.

1) On dit que u est symétrique positif si et seulement si u est symétrique et vérifie : $\forall x \in E,\ (u(x)\mid x) \geq 0$.
2) On dit que u est symétrique défini positif si et seulement si u est symétrique positif et vérifie : $\forall x \in E,\ \big((u(x)\mid x) = 0 \Rightarrow x = 0_E\big)$.
3) On note $S^{+}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs de E.

Proposition.– Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) u est symétrique positif si et seulement si $\mathrm{Sp}\,u \subset \mathbb{R}^{+}$.
2) u est symétrique défini positif si et seulement si et seulement si $\mathrm{Sp}\,u \subset \mathbb{R}^{*+}$.

Théorème.– Si $u \in S^{+}(E)$ alors il existe un unique $v \in S^{+}(E)$ tel que $v^2 = u$.

5.2 Matrices symétriques positives, définies positives

Définition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) La matrice A est dite symétrique positive si et seulement si A est symétrique et vérifie ${}^{t}XAX \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2) La matrice A est dite symétrique définie positive si et seulement si A est symétrique positive et vérifie $\left({}^{t}XAX = 0 \Rightarrow X = 0\right)$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
3) On note $S_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition.– Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors ${}^{t}AA \in S_n^{+}(\mathbb{R})$. Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^{t}AA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition.– Soient $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormale de E, $(x,y) \in E^2$ et $u \in L(E)$.

1) u est symétrique positif $\Leftrightarrow$ $M_B(u)$ est symétrique positive.
2) u est symétrique défini positif $\Leftrightarrow$ $M_B(u)$ est symétrique définie positive.

Proposition.– Si la matrice réelle A est symétrique alors on a les caractérisations suivantes :

A est symétrique positive si et seulement si $\mathrm{Sp}\,A \subset \mathbb{R}^{+}$.

A est symétrique définie positive si et seulement si et seulement si $\mathrm{Sp}\,A \subset \mathbb{R}^{*+}$.

Proposition.–

1) La matrice réelle A est symétrique positive si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs.
2) La matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

Théorème.– Si $A \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ alors il existe une unique matrice $B \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Proposition.– Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{t}PP$.

Théorème.– (Décomposition polaire)

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

5.3 Des décompositions en somme directe utiles

Proposition.–

1) Si u est un automorphisme orthogonal alors $E = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
2) Si u est un endomorphisme symétrique alors $E = \mathrm{Im}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,u$.