Notion de limite pour les fonctions de E dans F

Soient $\left(E,\|\ \|_E\right)$, $\left(F,\|\ \|_F\right)$ et $\left(G,\|\ \|_G\right)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

1. Notion de limite suivant un ensemble

Définition.– Soient $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.
On dit que f tend vers b en a suivant A si et seulement si : pour toute suite $\left(a_n\right)$ d'éléments de A qui tend vers a dans $\left(E,\|\ \|_E\right)$, la suite $f\left(a_n\right)$ tend vers b dans $\left(F,\|\ \|_F\right)$.
On dit que f admet une limite dans F lorsque x tend vers a en appartenant à A si et seulement si il existe $b \in F$ tel que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a en appartenant à A.

Remarques

- ✓ Pour exprimer que f tend vers b en a suivant A on dit aussi que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a en appartenant à A. La notion de limite suivant un ensemble dépend des normes $\|\ \|_E$, $\|\ \|_F$ considérées sur les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F. Au lieu de « f tend vers b en a suivant A » il serait donc plus correct de dire « f tend vers b dans $\left(F,\|\ \|_F\right)$ en a suivant A dans $\left(E,\|\ \|_E\right)$ ».
- ✓ Si $\|\ \|_{1,E}$ et $\|\ \|_{2,E}$ sont deux normes équivalentes sur E et si $\|\ \|_{1,F}$ et $\|\ \|_{2,F}$ sont deux normes équivalentes sur F alors on a : f tend vers b dans $\left(F,\|\ \|_{1,F}\right)$ en a suivant A dans $\left(E,\|\ \|_{1,E}\right)$ si et seulement si f tend vers b dans $\left(F,\|\ \|_{2,F}\right)$ en a suivant A dans $\left(E,\|\ \|_{2,E}\right)$.
- ✓ Si E et F sont de dimension finie alors la notion de limite suivant un ensemble est indépendante des normes considérées sur E et sur F. S'agissant du concept de limite suivant un ensemble, il n'est pas utile, lorsque l'on travaille en dimension finie, de préciser les normes que l'on considère.
- ✓ Le fait que $a \in \overline{A}$ dans la définition de la notion de limite suivant A est très important car cela assure l'existence d'au moins une suite d'éléments de A qui tende vers a. En d'autres termes, la condition $a \in \overline{A}$ assure qu'il est possible de tendre vers a.
- ✓ Lorsque $\left(E,\|\ \|_E\right) = \left(\mathbb{R},|\ |\right)$ le symbole $\overline{A}$ fait référence à l'adhérence de A dans $\mathbb{R}$. Puisque $a \in \overline{A}$ cela n'autorise donc pas à priori a à valoir $-\infty$ ou $+\infty$. En considérant l'adhérence de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ on étend cette définition aux cas où $a = -\infty$ et $a = +\infty$.
- ✓ Lorsque $F = \mathbb{R}$ la définition s'étend sans modifications aux cas $b = -\infty$ et $b = +\infty$.

Exemple : cos et sin n'admettent pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème.– (caractère local de la notion de limite)
Soient $f : D \subset E \to F$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et V un voisinage de a dans E.
f tend vers b en a suivant A si et seulement si $f_{|D\cap V}$ tend vers b en a suivant $A \cap V$.

$V \in \mathcal{V}_E(a)$, $\lim\limits_{a,V\cap A} f_{|D\cap V} = b$

Théorème.– (Unicité de la limite en cas d'existence)
Soient $f : D \subset E \to F$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $(b,b') \in F^2$.
Si f tend vers b et vers b′ en a suivant A alors $b = b'$.

Notations : Pour exprimer que f tend vers b en a suivant A on écrit $\lim\limits_{a,A} f = b$ ou $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = b$. Lorsque $A = D$, $\lim\limits_{a,A} f$ est noté $\lim\limits_{a} f$. Lorsque $A = D\setminus\{a\}$, $\lim\limits_{a,A} f$ est noté $\lim\limits_{a,\neq} f$.
Lorsque $\left(E,\|\ \|\right) = \left(\mathbb{R},|\ |\right)$ et $A = D \cap \left]-\infty,a\right[$, $\lim\limits_{a,A} f$ est noté $\lim\limits_{a^-} f$.
Lorsque $\left(E,\|\ \|\right) = \left(\mathbb{R},|\ |\right)$ et $A = D \cap \left]a,+\infty\right[$, $\lim\limits_{a,A} f$ est noté $\lim\limits_{a^+} f$.

2. Premières propriétés de la limite suivant un ensemble

Théorème.– Soient $f : D \subset E \to F$, $\varphi : D \subset E \to \mathbb{R}^+$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.
1) Si $\lim\limits_{a,A} f = b$ alors $b \in \overline{f(A)}$.
2) Si $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{x\to a, x\in A} \|f(x)\|_F = \|b\|_F$.
3) Si $\|f(x) - b\|_F \le \varphi(x)$ pour tout $x \in A$ et si $\lim\limits_{a,A} \varphi = 0$ alors $\lim\limits_{a,A} f = b$.

Théorème.– (Caractérisation de la notion de limite suivant un ensemble)
Soient $f : D \subset E \to F$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$, et $b \in F$.
1) $\lim\limits_{a,A} f = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \le \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\| \le \varepsilon$.
2) $\lim\limits_{a,A} f = b \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_F(b), \exists U \in \mathcal{V}_E(a),\ f(U \cap A) \subset V$.

Remarques :

- ✓ Lorsque $E = \mathbb{R}$ la partie 1 du théorème s'étend aux cas où $a = -\infty$ et $a = +\infty$:

$\lim\limits_{+\infty,A} f = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P > 0, \forall x \in A,\ x \ge P \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \le \varepsilon$.

$\lim\limits_{-\infty,A} f = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P > 0, \forall x \in A,\ x \le -P \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \le \varepsilon$.

La partie 2 s'étend aux cas $a = -\infty$ et $a = +\infty$ en considérant des voisinages dans $\overline{\mathbb{R}}$.

✓ Lorsque $F = \mathbb{R}$ la partie 1 du théorème s'étend aux cas $b = -\infty$ et $b = +\infty$:

$\lim\limits_{a,A} f = +\infty \Leftrightarrow \forall P > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq P.$

$\lim\limits_{a,A} f = -\infty \Leftrightarrow \forall P > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq -P.$

La partie 2 s'étend aux cas $b = -\infty$ et $b = +\infty$ en considérant des voisinages dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème.– Soient $f : D \subset E \to F$, $A \subset D$, $B \subset D$, $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et $b \in F$.

1) Si $\lim\limits_{a,B} f = b$ et si $A \subset B$ alors $\lim\limits_{a,A} f = b$.

2) $\lim\limits_{a,A\cup B} f = b \Leftrightarrow \lim\limits_{a,A} f = b$ et $\lim\limits_{a,B} f = b$.

Remarque :

Si $(E, \|\ \|) = (\mathbb{R}, |\ |)$ alors le théorème s'étend aux cas où $a = -\infty$ et $a = +\infty$ en considérant les adhérences dans $\overline{\mathbb{R}}$. Lorsque $F = \mathbb{R}$ le théorème s'étend aux cas $b = -\infty$ et $b = +\infty$.

Exemples :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a,\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}} = 1$ et $\lim\limits_{a,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}} = 0$. $1_{\mathbb{Q}}$ n'admet de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en aucun point.
- Soient $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1$ pour $x \in [0,2]$ et g coïncide avec f sauf en 1 où g vaut 2. $\lim\limits_{1} f$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 1 mais $\lim\limits_{1} g$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Par contre $\lim\limits_{1,\neq} g = 1$.

3. Limite suivant un ensemble et opérations sur les fonctions

Théorème.– Soient $f, g : D \subset E \to F$, $\alpha, \beta : D \subset E \to \mathbb{K}$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$. Si f, g admettent une limite en a suivant A dans F et si α, β admettent une limite en a suivant A dans $\mathbb{K}$ alors $\alpha f + \beta g$ admet une limite en a suivant A dans F et on a: $\lim\limits_{a,A}(\alpha f + \beta g) = \left(\lim\limits_{a,A} \alpha\right)\lim\limits_{a,A} f + \left(\lim\limits_{a,A} \beta\right)\lim\limits_{a,A} g.$

Théorème.– Soient $f : D \subset E \to F$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $g : D' \subset F \to G$, $B \subset D'$ et $c \in G$.

Si $\lim\limits_{a,A} f = b$, si $f(A) \subset B$ et si $\lim\limits_{b,B} g = c$ alors $\lim\limits_{a,A} g \circ f = c$.

4. Limite suivant un ensemble : deux situations fondamentales

4.1 Le cas d'une application à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que $\dim F < +\infty$ et on considère une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de F.

Soit $f : D \subset E \to F$ une application à valeurs dans F. Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on pose : $f_i = e_i^* \circ f$.

Si $x \in D$ alors $f_i(x)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(x)$ sur la base B et on a donc $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$.

L'application f_i est appelée $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur B. $f_i(x) = e_i^*(f(x))$

Proposition.– On suppose que $\dim F < +\infty$ et on considère une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de F.

Soient $f : D \subset E \to F$ une application, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.

On note f_i la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur la base B. Pour $x \in D$ on a donc $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$. Dans ces conditions : $\lim\limits_{a,A} f = b \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \lim\limits_{a,A} f_i = e_i^*(b)$.

Proposition.– Soit $M : D \subset E \to M_{np}(\mathbb{K})$ une application qui à un vecteur x de E associe la matrice $M(x) = (m_{ij}(x))$ de $M_{np}(\mathbb{K})$. On considère $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$.

$\lim\limits_{x \to a, x \in A} M(x) = B \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \lim\limits_{x \to a, x \in A} m_{ij}(x) = b_{ij}$.

4.2 Le cas d'une application à valeurs dans un produit

Soient $(F_1, \|\ \|_{F_1}), \cdots, (F_n, \|\ \|_{F_n})$ des espaces vectoriels normés et $f : D \subset E \to F_1 \times \cdots \times F_n$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on note π_i l'application de $F_1 \times \cdots \times F_n$ dans F_i définie par : $\pi_i(y_1, \cdots, y_n) = y_i$.

L'application $f_i = \pi_i \circ f$ est une application de E dans F_i et $\forall x \in E$, $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$.

On note $f = (f_1, \cdots, f_n)$ et on dit que f_i est la $i^{\text{ème}}$ application composante de l'application f.

Théorème.– Soient $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $b = (b_1, \cdots, b_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$.

On munit $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ de sa structure d'espace vectoriel produit.

Dans ces conditions : $\lim\limits_{a,A} f = b \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \lim\limits_{a,A} f_i = b_i$.

5. Une extension

Définition.– Soit $D \subset E$ vérifiant : $\exists R > 0,\ E \setminus BO(0_E, R) \subset D$.

Soient $f : D \subset E \to F$ et $b \in F$.

On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si : pour toute suite (a_n) d'éléments de D qui vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \|a_n\| = +\infty$, la suite $f(a_n)$ tend vers b dans $(F, \|\ \|_F)$.

Proposition.– Soit $D \subset E$ vérifiant : $\exists R > 0,\ E \setminus BO(0_E, R) \subset D$.

Soient $f, g : D \subset E \to F$, $\alpha, \beta : D \subset E \to \mathbb{K}$ et $(b, b') \in F^2$.

1) Si $f(x)$ tend vers b et b' lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ alors $b = b'$.

   Pour exprimer que $f(x)$ tend vers b lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ on note $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = b$.

2) $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = b$ si et seulement si :

   $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in D,\ \|x\| \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$.

3) si $\alpha(x)$, $\beta(x)$ admettent une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ et si $f(x), g(x)$ admettent une limite dans F lorsque $\|x\| \to +\infty$ alors $(\alpha f + \beta g)(x)$ admet une limite dans F lorsque $\|x\| \to +\infty$ et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} (\alpha f + \beta g)(x) = \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \alpha(x) \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) + \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \beta(x) \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} g(x)$.

4) Les résultats obtenus dans le paragraphe 4 pour les applications à valeurs dans un espace de dimension finie et pour les applications à valeurs dans un produit se transposent immédiatement.

Notion de limite pour les fonctions de E dans $\mathbb{K}$

Soit $\left(E,\| \ \|_E\right)$ un espace vectoriel normé.

Tout ce qui a été vu pour les fonctions de E dans F, où $\left(F,\| \ \|_F\right)$ est un espace vectoriel normé, s'applique intégralement. On s'intéresse ici aux propriétés supplémentaires vérifiées par les fonctions de E dans $\mathbb{K}$ puis par les fonctions de E dans $\mathbb{R}$ et enfin par les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Fonctions de E dans $\mathbb{K}$: propriétés algébriques supplémentaires

Théorème.– Soient $\varphi,\psi : D\subset E\to\mathbb{K}$, $A\subset D$ et $a\in\overline{A}$. On suppose que les applications à valeurs scalaires φ et ψ admettent une limite en a suivant A dans $\mathbb{K}$. Dans ces conditions : $\varphi\psi$ admet une limite en a suivant A et $\lim\limits_{a,A}\varphi\psi=\left(\lim\limits_{a,A}\varphi\right)\times\left(\lim\limits_{a,A}\psi\right)$. Si de plus ψ ne s'annule pas sur A et si $\lim\limits_{a,A}\psi\neq 0$ alors $\dfrac{\varphi}{\psi}$ admet une limite en a suivant A et $\lim\limits_{a,A}\dfrac{\varphi}{\psi}=\dfrac{\lim\limits_{a,A}\varphi}{\lim\limits_{a,A}\psi}$.

2. Fonctions de E dans $\mathbb{R}$: limite suivant un ensemble et inégalités

Théorème 1.– (Passage à la limite)

Soient $\varphi,\psi : D\subset E\to\mathbb{R}$, $A\subset D$ et $a\in\overline{A}$. Si les fonctions φ et ψ admettent une limite en a suivant A et si de plus $\varphi(x)\le\psi(x)$ pour tout $x\in A$ alors $\lim\limits_{a,A}\varphi\le\lim\limits_{a,A}\psi$.

Théorème 2.– (Encadrement)

Soient $\varphi,\omega,\psi : D\subset E\to\mathbb{R}$, $A\subset D$ et $a\in\overline{A}$. Si les fonctions φ et ψ admettent la même limite b en a suivant A et si de plus $\varphi(x)\le\omega(x)\le\psi(x)$ pour tout $x\in A$ alors ω admet une limite en a suivant A et $\lim\limits_{a,A}\omega=b$.

Remarque : Lorsque l'on utilise le théorème 1, on dit que l'on « passe à la limite » dans l'inégalité. Pour ce faire, il est vital de s'assurer que les limites mises en jeu existent bien. Le passage à la limite (sous réserve d'existence) dans une inégalité ne conserve pas les inégalité strictes.
Le théorème 2 n'est pas de même nature que le théorème 1 car il assure l'existence d'une limite.

3. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: théorème de la limite monotone (Mpsi)

On considère ici des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Théorème.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I\to\mathbb{R}$ une application. L'adhérence de I est de la forme $[\alpha,\beta]$ avec $(\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^2$. Si φ est monotone sur I alors $\lim\limits_{\alpha^+}\varphi$ et $\lim\limits_{\beta^-}\varphi$ existent dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et φ admet une limite finie à droite et à gauche en tout point $a\in\overset{\circ}{I}$.

Théorème 1.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I\to\mathbb{R}$ croissante sur I.

L'adhérence de I est de la forme $[\alpha,\beta]$ avec $(\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^2$.

1) φ admet une limite finie à droite et à gauche en tout point $a\in\overset{\circ}{I}$ et on a :

$$\lim_{a^-}\varphi\le\varphi(a)\le\lim_{a^+}\varphi,\ \lim_{a^-}\varphi=\sup_{I\cap]-\infty,a[}\varphi \text{ et } \lim_{a^+}\varphi=\inf_{I\cap]a,+\infty[}\varphi .$$

2) φ admet une limite à droite dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point α.
Si φ est minorée sur I alors $\lim\limits_{\alpha^+}\varphi=\inf\limits_{I\cap]\alpha,+\infty[}\varphi$. et sinon $\lim\limits_{\alpha^+}\varphi=-\infty$.

3) φ admet une limite à gauche dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point β.
Si φ est majorée sur I alors $\lim\limits_{\beta^-}\varphi=\sup\limits_{I\cap]-\infty,\beta[}\varphi$ et sinon $\lim\limits_{\beta^-}\varphi=+\infty$.

Théorème 2.– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I\to\mathbb{R}$ décroissante sur I.

L'adhérence de I est de la forme $[\alpha,\beta]$ avec $(\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^2$.

1) φ admet une limite finie à droite et à gauche en tout point $a\in\overset{\circ}{I}$ et on a :

$$\lim_{a^+}\varphi\le\varphi(a)\le\lim_{a^-}\varphi,\ \lim_{a^-}\varphi=\inf_{I\cap]-\infty,a[}\varphi \text{ et } \lim_{a^+}\varphi=\sup_{I\cap]a,+\infty[}\varphi .$$

2) φ admet une limite à droite dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point α.
Si φ est majorée sur I alors $\lim\limits_{\alpha^+}\varphi=\sup\limits_{I\cap]\alpha,+\infty[}\varphi$ et sinon $\lim\limits_{\alpha^+}\varphi=+\infty$.

3) φ admet une limite à gauche dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point β.
Si φ est minorée sur I alors $\lim\limits_{\beta^-}\varphi=\inf\limits_{I\cap]-\infty,\beta[}\varphi$ et sinon $\lim\limits_{\beta^-}\varphi=-\infty$.

Remarque : Le résultat contenu dans les théorèmes 1 et 2 ainsi que dans le théorème qui les précède est connu sous le nom de théorème de la limite monotone. Grosso modo il garantit l'existence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une limite à droite et d'une limite à gauche pour une application monotone. Il précise de plus les conditions dans lesquelles ces limites sont finies.

Continuité des fonctions de E dans F

Soient $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ et $(G, \|\ \|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

1. Applications continues

1.1 Continuité en un point

Définition.– Soient $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F et $a \in D$.

On dit que f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de D qui tend vers a la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Autrement dit : l'application f est continue au point a si et seulement si $\lim\limits_a f = f(a)$.

Remarques

- ✓ Tout comme la notion de limite, la notion de continuité dépend des normes considérées sur E et F. Si E et F sont de dimension finie alors la notion de continuité est indépendante des normes considérées sur E et sur F. S'agissant du concept de continuité, il n'est pas utile, lorsque l'on travaille en dimension finie, de préciser les normes que l'on considère.
- ✓ Pour parler de la continuité éventuelle de f au point a, f doit être définie au point a. Si f admet une limite en a suivant D alors cette limite vaut $f(a)$ et f est alors continue en a. Ainsi : f est continue au point a si et seulement si f admet une limite en a suivant D.
- ✓ Soit $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim x_n = a$. Si f est continue au point a alors $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$. La continuité de f au point a permet de permuter les symboles lim et f.
- ✓ L'application caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Théorème.– Soient $f : D \subset E \to F$ et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue au point a.
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \ \|x - a\|_E \le \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \le \varepsilon$.
3) $\forall V \in \mathcal{V}_F(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}_E(a), \ f(U \cap D) \subset V$.

1.2 Continuité sur une partie

Définition.– Soient $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F et $A \subset D$.

On dit que f est continue sur A si et seulement si f est continue en tout point de A.

On note $C^0(D,F)$ l'ensemble des applications de D dans F qui sont continues sur D.

Proposition.– Soient $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F et $A \subset D$.

1) Si f est continue sur A alors $f_{|A}$ est continue sur A. La réciproque est fausse.
2) Si $f_{|A}$ est continue sur A et si A est un ouvert alors f est continue sur A.

Remarque :

La restriction de $1_{\mathbb{Q}}$ à $\mathbb{Q}$ est continue sur $\mathbb{Q}$ mais $1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{Q}$.

Théorème.– Soit $f : D \subset E \to F$ une application continue sur D.

1) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de D.
2) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de D.

Corollaire.– Si $f : E \to F$ est continue sur E alors l'image réciproque par f de tout ouvert (resp de tout fermé) de F est un ouvert (resp un fermé) de E.

Théorème.– Si $f, g : D \subset E \to F$ sont continues sur D, coïncident sur $A \subset D$ et si A est dense dans D alors $f = g$.

2. Continuité et opérations sur les fonctions

Proposition.– Soient $f, g : D \subset E \to F$ des applications à valeurs vectorielles, $\alpha, \beta : D \subset E \to \mathbb{K}$ des applications à valeurs scalaires, $a \in D$ et $A \subset D$.

1) Si f, g et α, β sont continues au point a alors $\alpha f + \beta g$ est continue au point a.
2) Si f, g et α, β sont continues sur A alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur A.

Corollaire.– Soient $f, g : D \subset E \to F$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $a \in D$ et $A \subset D$.

1) Si f, g et α, β sont continues au point a alors $\alpha f + \beta g$ est continue au point a.
2) Si f, g et α, β sont continues sur A alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur A.

Remarque : Si D est une partie de E alors $C^0(D,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème.– Soient $f : D \subset E \to F$, $g : D' \subset F \to G$ telles que $f(D) \subset D'$, $a \in D$ et $A \subset D$.

1) Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue au point a.
2) Si f est continue sur A et si g est continue sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est continue sur A.

Définition (HP).– Soient A une partie de E, B une partie de F et $f : A \to B$ une application. On dit que f est un homéomorphisme de A sur B si et seulement si f vérifie les conditions

1) f est une bijection de A sur B.
2) f est continue sur A et f^{-1} est continue sur B.

<u>Remarque</u> : Il existe des applications bijectives continues dont la réciproque n'est pas continue.
On considère $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{U}$ définie par : $f(t) = e^{it}$.
f est une bijection de $]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{U}$, f est continue sur $\mathbb{U}$ et f^{-1} n'est pas continue sur $]-\pi, \pi]$.

3. Continuité : deux situations fondamentales

Proposition.– (Applications à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie)
On suppose que $\dim F < +\infty$ et on considère une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ de F. Soient $f : D \subset E \to F$ une application, $A \subset D$ et $a \in A$. On note f_i la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur la base B. On a donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$ pour tout $x \in D$. Dans ces conditions :

1) f est continue au point $a \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue au point a.
2) f est continue sur $A \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue sur A.

Corollaire.– Soient $f : D \subset E \to \mathbb{C}$ une application à valeurs complexes et $A \subset D$.

1) f est continue sur A si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues sur A.
2) Si f est continue sur A alors $\overline{f}$ est continue sur A.

Proposition.– (Applications à valeurs dans un produit)
Soient $(F_1, \| \ \|_{F_1}), \cdots, (F_n, \| \ \|_{F_n})$ des espaces normés, $f : D \subset E \to F_1 \times \cdots \times F_n$, $a \in D$ et $A \subset D$.
On note f_i la $i^{\text{ème}}$ application composante de l'application f. On a donc : $f = (f_1, \cdots, f_n)$.

1) f est continue au point $a \Leftrightarrow f_i$ est continue au point a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2) f est continue sur $A \Leftrightarrow f_i$ est continue sur A pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

4. Applications lipschitziennes

Définition.– Soient $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F.
On dit que f est lipschitzienne ssi : $\exists k \in \mathbb{R}^+ \mid \forall (x,y) \in D^2, \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$. $(*)$
On dit que f est contractante ssi : $\exists k \in [0,1[\mid \forall (x,y) \in D^2, \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.

<u>Remarque</u> : Lorsque f vérifie $(*)$ on dit que l'application f est k-lipschitzienne.
La notion d'application lipschitzienne dépend des normes considérées sur E et F.

Proposition.– Soient $f, g : D \subset E \to F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

1) Si f est lipschitzienne alors f est continue sur D.
2) Si f et g sont lipschitziennes alors $\alpha f + \beta g$ est lipschitzienne.

Proposition.– Soient $f : D \subset E \to F$ et $g : D' \subset F \to G$ telles que $f(D) \subset D'$.
Si f est lipschitzienne et si g est lipschitzienne alors $g \circ f$ est lipschitzienne.

<u>Exemples</u>

- La norme $\| \ \|_E : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne. L'addition $+ : E \times E \to E$ est 2-lipschitzienne.
- Si A est une partie non vide de E alors $(x \mapsto d(x, A))$ est 1-lipschitzienne.
- Les applications $\cos$, $\sin$ et $(t \mapsto e^{it})$ sont 1-lipschitziennes.
- $\sqrt{\ }$ n'est pas lipschitzienne mais vérifie : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} = |x-y|^{\frac{1}{2}}$
  ↳ $\sqrt{\ }$ est $\frac{1}{2}$ Holderienne

5. Applications uniformément continues

Holderienne ⇒ uniformément continue

Proposition.– L'application $f : D \subset E \to F$ est continue sur D si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \forall y \in D, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \ \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$.

<u>Remarque</u> : Le réel strictement positif α dépend de ε mais aussi de y.

Définition.– L'application $f : D \subset E \to F$ est dite uniformément continue si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in D^2, \ \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$.

<u>Remarque</u> : Dans la définition de l'uniforme continuité le réel strictement positif α dépend de ε mais ne dépend plus de y. ε étant fixé, c'est le même α qui sert pour tous les y. La notion de continuité est une notion locale. La notion d'uniforme continuité est une notion globale.

Proposition.– Soit $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F.

1) Si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue.
2) Si f est uniformément continue alors f est continue sur D.

Théorème.– Soit $f : D \subset E \to F$ une application de D dans F.
L'application f est uniformément continue si et seulement si pour tout couple $((x_n),(y_n))$ de suites d'éléments de D vérifiant $\lim(x_n - y_n) = 0_E$ on a $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0_F$.

Remarques :

✓ Soit f l'application de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
L'application f est continue sur $[1,+\infty[$ mais n'est pas uniformément continue.

✓ $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne.

6. Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynômiale

6.1 Applications linéaires continues

Théorème.– Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
u est continue sur E si et seulement si : $\exists\, k \in \mathbb{R}^+ \mid \forall\, x \in E,\ \|u(x)\|_F \le k\|x\|_E$.

Théorème.– Si $\dim E < +\infty$ alors toute application linéaire de E dans F est continue sur E.

6.2 Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Définition.– Une application $B : E \times F \to G$ est dite bilinéaire si et seulement si :

1) Pour tout $x \in E$, l'application $B(x,\bullet)$ est linéaire.
2) Pour tout $y \in F$, l'application $B(\bullet,y)$ est linéaire.

Définition.– Soient $E_1,\cdots,E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application.
On dit que f est p-linéaire si et seulement si pour tout entier $j \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $p-1$ u-plet $(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \cdots \times E_p$, $f(x_1,\cdots,x_{j-1},\bullet,x_{j+1},\cdots,x_p)$ est linéaire.

Théorème.– Si $\dim E < +\infty$ et $\dim F < +\infty$ et si $B : E \times F \to G$ est une application bilinéaire alors B est continue sur $E \times F$ et : $\exists\, k \in \mathbb{R}^+, \forall\,(x,y) \in E^2 \mid \|B(x,y)\|_G \le k\|x\|_E\|y\|_F$.

Théorème.– Si $E_1,\cdots,E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et si $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est une application p-linéaire alors f est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ et il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall\,(x_1,\cdots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \mid \|f(x_1,\cdots,x_p)\|_F \le k\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_p\|_{E_p}$.

6.3 Continuité des fonctions polynômes en dimension finie

Définition.– On suppose $\dim E < +\infty$ et on considère une base $B = (e_1,\cdots,e_p)$ de E. On dit que $P : E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynôme relativement à B si et seulement si il existe des entiers naturels $n_1,\cdots,n_p$ et une famille $(a_{i_1\cdots i_p})_{(i_1,\cdots,i_p)\in[\![0,n_1]\!]\times\cdots\times[\![0,n_p]\!]}$ de scalaires tels que pour tout vecteur $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ de E on ait : $P(x) = \sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in[\![0,n_1]\!]\times\cdots\times[\![0,n_p]\!]} a_{i_1\cdots i_p} x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}$.

Théorème.– Si $\dim E < +\infty$ et si B est une base de E alors toute fonction polynôme relativement à B est continue sur E.

7. Pour aller plus loin (HP)

7.1 Morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(F,+)$

Théorème.–

1) Si $f : \mathbb{R} \to F$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(s+t) = f(s) + f(t)$ pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe $a \in F$ tel que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = ta$.
2) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(s+t) = f(s) + f(t)$ pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

7.2 Continuité dans $M_n(\mathbb{K})$

Théorème.–

1) La trace et la transposition sont des applications continues sur $M_n(\mathbb{K})$.
2) Le produit matriciel est une application continue sur $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$.
3) Le déterminant est une application continue sur $M_n(\mathbb{K})$.
4) L'inverse est une application continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition.– Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si la suite (A^k) converge vers M dans $M_n(\mathbb{K})$ alors $M^2 = M$.

Théorème.–

1) $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.
2) $SL_n(\mathbb{K})$ est un fermé d'intérieur vide de $M_n(\mathbb{K})$.
3) $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$.
4) L'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide.

7.3 Norme subordonnée d'une application linéaire continue

L'ensemble $L_c(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que $E \neq \{0_E\}$.

Pour $u \in L_c(E,F)$ on pose : $|||u||| = \underset{x\in E\setminus\{0_E\}}{\operatorname{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Théorème.– L'application $||| \ ||| : L_c(E,F) \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur $L_c(E,F)$. Elle est appelée norme de $L_c(E,F)$ subordonnée aux normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$.

$(L_c(E,F), ||| \ |||)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition.– Soit u une application linéaire continue de E dans F.

$\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq |||u||| \times \|x\|_E$.

Proposition.– Soit u une application linéaire continue de E dans F.

1) Si il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ alors $|||u||| \leq k$.
2) $|||u||| = \underset{x\in BF(0_E,1)}{\operatorname{Sup}} \|u(x)\|_F = \underset{x\in S(0_E,1)}{\operatorname{Sup}} \|u(x)\|_F$.

Proposition.– Si $u \in L_c(E,F)$ et $v \in L_c(F,G)$ alors $v \circ u \in L_c(E,G)$ et $|||v \circ u||| \leq |||v||| \times |||u|||$.

7.4 La série géométrique dans $L(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de <u>dimension finie</u>.

Définition.– Une norme N sur $L(E)$ qui vérifie $N(Id_E) = 1$ et $N(u \circ v) \leq N(u)N(v)$ pour tout $(u,v) \in L(E)^2$ est appelée une norme d'algèbre sur $L(E)$.

Théorème.– Soit $\| \ \|$ une norme sur E. Pour $a \in L(E)$ on pose : $|||a||| = \underset{x\in E\setminus\{0_E\}}{\operatorname{Sup}} \dfrac{\|a(x)\|}{\|x\|}$.

$||| \ |||$ est une norme d'algèbre sur $L(E)$.

Théorème.– (Série géométrique dans $L(E)$)

Si N est une norme d'algèbre sur $L(E)$ et si $u \in L(E)$ vérifie $N(a) < 1$ alors $Id_E - a$ est bijective, la série $\sum a^k$ est absolument convergente et $(Id_E - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^k$.

7.5 La série géométrique dans $M_n(\mathbb{K})$

Définition.– Une norme N sur $M_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $N(I_n) = 1$ et $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tout $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ est appelée une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème.– Soit $\| \ \|$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on pose : $|||A||| = \underset{X\in M_{n,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}}{\operatorname{Sup}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

$||| \ |||$ est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème.– (Série géométrique dans $M_n(\mathbb{K})$)

Si N est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$ et si $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifie $N(A) < 1$ alors $I_n - A$ est inversible, la série $\sum A^k$ est absolument convergente et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Continuité des fonctions de E dans $\mathbb{K}$

Tout ce qui a été vu pour les fonctions de E dans F, où $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, s'applique intégralement. Nous nous intéressons ici aux propriétés supplémentaires vérifiées par les fonctions de E dans $\mathbb{K}$ puis par les fonctions de E dans $\mathbb{R}$ et enfin par les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Fonctions de E dans $\mathbb{K}$: des propriétés supplémentaires

Soit $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé.

Proposition.– Soient $\varphi, \psi : D \subset E \to \mathbb{K}$, $A \subset D$ $a \in D$ et $A \subset D$.

1) Si φ et φ sont continues au point a alors $\varphi\psi$ est continue au point a.
   Si φ et ψ sont continues sur A alors $\varphi\psi$ est continue sur A.
2) On suppose que ψ ne s'annule pas sur D. Si φ et ψ sont continues au point a alors $\dfrac{\varphi}{\psi}$ est continue au point a. Si φ et ψ sont continues sur A alors $\dfrac{\varphi}{\psi}$ est continue sur A.

Proposition.– $C^0(D, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

2. Le cas des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition.– On dit que $P : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction polynôme si et seulement si il existe des entiers naturels $n_1, \cdots, n_p$ et une famille $\left(a_{i_1\cdots i_p}\right)_{(i_1,\cdots,i_p)\in[0,n_1]\times\cdots\times[0,n_p]}$ de réels tels que pour tout $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $P(x_1, \cdots, x_p) = \displaystyle\sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in[0,n_1]\times\cdots\times[0,n_p]} a_{i_1\cdots i_p} x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}$. On dit que $F : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle si et seulement si il existe deux fonctions polynômes P et Q sur $\mathbb{R}^p$ telles que : $F(x_1, \cdots, x_p) = \dfrac{P(x_1, \cdots, x_p)}{Q(x_1, \cdots, x_p)}$ pour tout $(x_1, \cdots, x_p) \in D$.

Proposition.–

1) Pour tout $j \in [1,p]$, $p_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $p_j(x_1, \cdots, x_p) = x_j$ est continue sur $\mathbb{R}^p$.
2) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}^p$.
3) Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

3. Le cas des fonctions définies à l'aide d'une intégrale à paramètre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ,
On considère une partie A de E et un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On considère $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$.
Pour $x \in A$ on note $f(x, \bullet)$ l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie par : $f(x, \bullet)(t) = f(x, t)$.
Pour $t \in I$ on note $f(\bullet, t)$ l'application de A dans $\mathbb{K}$ définie par : $f(\bullet, t)(x) = f(x, t)$.

Si pour tout $x \in A$ l'application $f(x, \bullet)$ est intégrable sur I alors on dispose de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$.

Théorème 1.– Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x, \bullet) \in L^1(I, \mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.
On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

- ✓ pour tout $t \in I$, $f(\bullet, t)$ est continue sur A
- ✓ il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, \ |f(x,t)| \le \varphi(t)$

alors F est continue sur A.

Remarque : La seconde hypothèse est vitale. Elle est appelée hypothèse de domination.

Théorème 2.– Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que $f(x, \bullet) \in L^1(I, \mathbb{K})$ pour tout $x \in A$.
On dispose donc de l'application $F : A \to \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$. Si :

- pour tout $t \in I$, $f(\bullet, t)$ est continue sur A
- pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V_a de a dans A et $\varphi_a \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ tels que : $\forall x \in V_a, \forall t \in I, \ |f(x,t)| \le \varphi_a(t)$

alors F est continue sur A.

4. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: des propriétés fondamentales (Mpsi)

Théorème.– L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Corollaire.– (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient I un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ <u>continue</u> sur I.

4) Si φ prend les valeurs x et y alors φ prend toutes les valeurs comprises entre x et y.

5) Si φ prend une valeur négative et une valeur positive alors φ s'annule au moins une fois.

6) Si φ ne s'annule pas sur I alors φ y est strictement de signe fixe.

Théorème.– L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Corollaire.– Une application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes. Plus précisément : si $\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a,b]$ alors φ est minorée et majorée sur $[a,b]$ et il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que $\underset{t\in[a,b]}{\operatorname{Inf}} \varphi(t) = \varphi(c)$ et $\underset{t\in[a,b]}{\operatorname{Sup}} \varphi = \varphi(d)$.

Théorème.– Une application continue et injective sur un intervalle y est strictement monotone.

Théorème.– Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> et <u>strictement</u> <u>monotone</u> sur <u>l'intervalle</u> I alors $J = \varphi(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ induit une bijection de I sur J. De plus : $\varphi^{-1} : J \to I$ est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur J de même monotonie que φ.

<u>Remarques</u>

✓ L'assertion « φ induit une bijection de I sur J » signifie que $\tilde{\varphi} : I \to J$ définie par $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ est une bijection de I sur J. Si $J \neq \mathbb{R}$ alors les applications φ et $\tilde{\varphi}$ sont différentes car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée. Dans la pratique $\tilde{\varphi}$ est notée φ, ce qui revient à considérer φ non pas comme une application de I dans $\mathbb{R}$, mais comme une application de I dans J.

✓ Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur I alors $\varphi(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et suivant que $I =]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b]$ on a $\varphi(]a,b[) =]\lim_{a^+} \varphi, \lim_{b^-} \varphi[$, $\varphi([a,b[) = [\varphi(a), \lim_{b^-} \varphi[$, $f(]a,b]) =]\lim_{a,a^+} \varphi, \varphi(b)]$ et $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Si φ est continue et strictement décroissante sur I, c'est la même chose mais en intervertissant les bornes. Par exemple, $\varphi([a,b[) =]\lim_{b^-} \varphi, \varphi(a)]$.