Maths

Schobert Néo

22 novembre 2021

Table des matières

1 Convergence simple / convergence uniforme

1.1 8 Novembre

1.2 Questions

— Qu'est-ce que la convergence simple ?
— Que dire de $g, h : A \subset D \to \mathbb{K}$ quand (f_n) converge simplement (CVS) vers g et h.
— Qu'est-ce que la limite simple (parler d'unicité)
— Propriétés qui se transmettent par convergence simple (2 trucs)
— Citer 2 propriétés qui ne se transmettent pas (citer 2 exemples)
— Quelle variable arrive en premier ? x ou n ?
— Parler de convergence simple / uniforme **sur un ensemble**
— Différence entre CVS et CVU.
— Quelle variable arrive en premier ? x ou n ?
— Propositions liées à la CVU. (restriction / CVU $\Rightarrow CVS$ / $||||_{+\infty}$ / unicité)
— Qu'est-ce que la limite uniforme.
— Transfert de la continuité en CVU. (re-démontrer)
— Notation $\delta_n(x)$ et comment l'utiliser ?
— Méthode pour montrer une non CVU.
— Rappeler notion de convergence uniforme / simple sur série d'application.
— Convergence simple de $\sum f_n$ sur A (A définir)
— Grossière divergence en convergence de série d'application. (redémontrer)
— Caractérisation de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur A.
— Transfert de la continuité en CVU de séries d'applications.
— Quand dispose-t-on de (R_n) et S ?
— Définir convergence absolue et convergence normale d'une série d'application.
— Lien entre les 4 convergences.

1.2.1 Remarques

— Définir racine n-ième de $x \in \mathbb{R}$

1.3 Session exercice 8 :

1.3.1 Exercice 21 (KDR)

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. Mq S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour la définition, montrer que $S(x)$ existe.
   Penser au CSSA $((\frac{1}{x+n})$ est décroissante et tend vers 0)
   Ensuite, passer par la convergence uniforme puis par le théorème de transfert de continuité.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* |\ x < y$.
   Etudier $S(y) - S(x)$, puis repenser au CSSA et au fait que la somme est du signe de son premier terme dans le CSSA. ($T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x(n+1)}$ est du signe de son premier terme.)
3. Le but ici est de vérifier une équation fonctionnelle pour $S(x)$.
   On calcul alors $S(x+1)$, que l'on exprime en fonction de $S(x)$. Par changement de variable, on obtient :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) = \frac{1}{x} - S(x)$
   S est C^0 en 1. On étudie alors les limites : $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$.
   Donc $S(x) \sim_{0^+} \frac{1}{x}$
   Pour l'équivalent en $+\infty$, il faut avoir l'idée **d'encadrer** $S(x)$. Pour cela, utiliser la relation fonctionnelle et la monotonie de S en x et en $x - 1$.

1.3.2 Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{n!}$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puis expliciter sa somme.

Ici, plutôt que de montrer la convergence uniforme en utilisant la convergence simple puis le reste R_n (qui doit tendre vers 0), on préfère utiliser la convergence normale.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$.

Donc comme la borne supérieur et le plus petit des majorants, $||f_n||_\infty \leq \frac{1}{n!}$

Par comparaison de SATP, $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

Donc on a convergence normale donc uniforme.

Elle converge donc simplement. On dispose alors de la somme $S(x)$.

On y étudie la limite sachant que la fonction Im est $\mathbb{R}$ linéaire et $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 < +\infty$ donc Im est C^0 sur $\mathbb{C}$.

1.3.3 Exercice 7

Soit (f_n) une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Montrer que f est une fonction polynôme.

Celui-ci est pas évident.

Il faut en fait repartir des définitions.

f_n est une fonction polynôme donc $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] || \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = P_n(t)$.

On a alors $||f_n - f||_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On remarque alors que toute fonction polynôme bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.

On s'intéresse alors aux "tranches de Cauchy".

C'est à dire, à $||f_{n+p} - f_n||_\infty$.

On montre que cette expression est bornée.

On a alors $\exists c_{n,p} \in \mathbb{R} | \forall t \in \mathbb{R},\ f_{n+p}(t) - f_n(t) = c_{n,p}$

$c_{n,p} = f_{n,p}(12) - f_n(12) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} f(12) - f_n(12)$

On a alors avec c_n la limite quand $p \to +\infty$ de $c_{n,p}$,

$f(t) - f_n(t) = c_n$

Donc $f(t) = f_N(t) + c_n$ f_N est une fonction pôlynomiale donc f est une fonction polynômiale.

1.3.4 Exercice 16

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n^x e^{-nx}}_{f_n(x)}$. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f_n(x) = e^{-(n - ln(x))x} = o(\frac{1}{n^2})$.

Donc $\sum f_n(x)$ converge car $2 > 1$

Donc $S(x)$ existe. Donc S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On ne peut pas utiliser la convergence normale ici car on s'aperçoit en faisant le tableau de signe, que $||f_n||_\infty$=1

On se place alors sur un segment où ca marche et ok par convergence normale...

1.4 12 Novembre

1.4.1 Questions

- Définir le rayon de convergence.
- Lien r / borne.
- Rayon de convergence de la suite nulle.
- Rayon de convergence d'une suite constante non nulle.
- Si la suite (a_n) est bornée, alors R_a...
- Si la suite est convergente de limite non nulle alors R_a...
- Si la suite tend vers zéro, alors R_a...
- Si $|a_n| \ \leq |b_n|$, alors R_a...R_b.
- Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors R_a...R_b.

— Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a ... R_b$.
— Lien entre R_{a+b} et R_a et R_b.
— Lien entre $R_{\alpha a}$ et R_a.
— Suite $D(a)$ et $I(a)$. (suite dérivée et primitive)
— Lien suite série pour R_a.
— Règle d'Alembert.
— Rayon de convergence de la suite géométrique (a^n)
— Pour montrer $R_a \leq R_b$,
On prend $r \in [0, R_a[$ puis on montrer que la suite $(b_n r^n)$ est bornée.
— $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \forall p \in \mathbb{N}, (r+h)^{p+1} \leq (p+1)r^p h$
— Cas de la fraction rationnelle **non nulle**.
— Cas du produit de convolution.
— Qu'est-ce qu'une série entière de la variable complexe.
— Rayon de convergence d'une série entière.
— Définition ensemble de convergence de $\sum a_n z^n$, disque ouvert de $\sum a_n z^n$ et cercle d'incertitude de $\sum a_n z^n$.
— Définition somme de la série entière.
— Que peut-on dire du disque fermé D_r. Et que ne peut-on pas dire sur le disque ouvert de convergence D_a vis-à-vis de la convergence uniforme.
— Série entière produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
— $z \in \mathbb{C}, \in \mathbb{N}^*$, Rayon de convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-(p-1))z^{n-p}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n+p} z^n$ et somme de ces séries. Moyen mnémotechnique pour le 2. (dérivation)
— cas des fonctions trigonométriques / exponentielles et trigonométriques hyperboliques.
— Définition du cos d'un complexe... Revoir l'histoire de la définition des fonctions cos et sin.
— Tout pareil pour les séries entières de la variable réelle.
— Dernier théorème.

1.4.2 Remarque

2 Integrale généralisée

2.1 15 Novembre

2.1.1 Questions

— Notion d'intégrale généralisée
— Dans le cas d'une fonction positive, son intégrale est croissante. Sa convergence équivaut alors à sa majoration. (comme les SATPs)
— Parties réelles et imaginaires stables par intégration.
— Croissance de l'intégrale
— Faire bien **attention aux convergences**
— Que ne faut-il pas écrire quand l'intégrale de $f+g$ converge et l'intégrale de f et l'intégrale de g divergent.
— Définir le reste de l'intégrale et les conditions de dérivabilité.
— Définir intégrale généralisée de f sur $[a, b[$
— Dans le cas d'une fonction positive, son intégrale est croissante. Sa convergence équivaut alors à sa majoration. (comme les SATPs) (cas $[a, b[$)
— Une application continue par morceaux sur un **segment** est bornée.
— Condition pour avoir l'intégrale de f convergente sur $[a, b[$ quand f est continue par morceaux.
— Valeur de $arctanh$ en fonction de ln
— Quand on fait les calculs, on utilise la notation $F(x) = \int_a^x f$
— Tout pareil sur $]a, b]$
— Notion d'intégrale généralisée sur $]a, b[$
— Généralement, on prolonge par continuité la fonction.
Exemple : $g(t) = ln(t)ln(1-t)$.

g est continue sur $]0,1[$.
On pose $g(0)=g(1)=0$.
On a alors g est continue sur $[0,1]$
$g(t) \sim_{0^+} -tln(t)$ $g(t) \sim_{1^-} (t-1)ln(1-t)$
Alors $\int_0^1 g$ converge.

- Dans le changement de variable MPSI, on pose $t=\varphi(u)$. Il faut alors seulement $\varphi \in \mathscr{C}^1$
- Dans le nouveau changement de variable, cas des intégrales impropres, il faut $\varphi :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ une bijection strictement monotone de classe $\mathscr{C}^1$ de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.
  On a alors si f est continue sur $]a,b[$, $\int_a^b f$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'$ sont de même nature.
  Dans le cas où ça converge, $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$
- Dans l'intégration par partie MPSI, on doit avoir la fonction qu'on primitive qui est $\mathscr{C}^0$ et la fonction qu'on dérive qui est $\mathscr{C}^1$.
- Dans le nouveau théorème d'intégration par partie, cas des intégrales impropres, il faut en plus que, pour $\int_a^b u'v$,
  uv admette une limite en a et en b
- Définition d'une intégrale absolument convergente. D'une intégrale semi-convergente.
- Comparaison de deux fonctions continues par morceaux $0 \leq \varphi \leq \psi$
  La convergence de l'intégrale de φ se déduit alors de celle de ψ.
  La divergence de l'intégrale de ψ se déduit alors de celle de φ.
- Conditions pour appliquer l'inégalité triangulaire à l'intégrale.

2.1.2 Remarque

2.2 Session Exercice 9 :

2.2.1 Exercice 11

$a_0=1$, $a_{n+1}=arctan(a_n)$
$f(x)=arctan(x)$
$g(x)=f(x)-x$
Avec un tableau de signe, f est croissante.
puis $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{-x^2}{1+x^2}\leq 0$
$g(0)=0$ et g décroissante donc :
$a_{n+1}-a_n=g(a_n)\leq 0$
(a_n) décroissante et minorée par 0 donc (a_n) converge.
Posons $\ell = lima_n$, $\ell \in \mathbb{R}^+$
$a_{n+1}=f(a_n)$ et f' $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et PPL : $\ell=f(\ell)$
i.e $g(l)=0$ puis $\ell=0$
(a_n) converge donc $R_a\geq 1$
$arctan(u)=u-\frac{u^3}{3}+o(u^3)$
$a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^3}{3}+o(a_n^3)$ $lima_n=0$
$a_{n+1}=a_n(1-\frac{a_n^2}{3}+o(a_n^2))$
on calcul alors a_{n+1}^{-2} (l'idée viens du carré dans les parenthèses)
On montre ainsi que $lima_{n+1}^{-2}-a_n^{-2}=\frac{2}{3}$
Ainsi, $a_n^{-2} \sim \frac{2n}{3}$
$a_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$
On montre alors que $R_a=1$ en étudiant $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ avec $b_n=\frac{K}{n^{\frac{1}{2}}}$
On en déduit alors E_a en étudiant le comportement aux limites.

2.2.2 Exercice 1

5)

$a_n = \frac{ch(n)}{n}$.
On a alors $R_a = R_{(na_n)}$
$na_n \sim ch(n) \sim \frac{e^n}{2}$
$R_a = R_{(e^n)} = \frac{1}{|e|} = \frac{1}{e}$

2.2.3 Exercice 9

2.3 18 Novembre

— Notion d'intégrabilité.
— Ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$
— Caractérisation de l'intégrabilité
— Exemple de référence d'applications intégrables.
— Quelles sont les conditions pour écrire $\int_I f$
— intégrable $\Rightarrow$ intégrale généralisée converge. La réciproque est fausse.
— Toute intégrale semi-convergente converge mais la fonctions qui lui est associée n'est pas intégrable.
— Conditions pour avoir $\int_I \varphi \Rightarrow \varphi = 0_{\mathbb{R}^I}$ (4 conditions)

2.4 19 Novembre

2.4.1 Questions

— Si c'est intégrable, les bornes sont négligeables.

2.4.2 Remarques

—

2.5 22 Novembre

2.5.1 Questions

— Rappeler le théorème de Riemann-Lebesgue
— Rappeler le théorème de la limite de la dérivée.
— Majoration de $|fg|$
— Théoreme de convergence dominée

2.5.2 Remarques