

Maths

Schobert Néo

19 novembre 2021

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Convergence simple / convergence uniforme | 2 |
| 1.1 | 8 Novembre | 2 |
| 1.2 | Questions | 2 |
| 1.2.1 | Remarques | 2 |
| 1.3 | Session exercice 8 : | 2 |
| 1.3.1 | Exercice 21 (KDR) | 2 |
| 1.3.2 | Exercice 13 | 3 |
| 1.3.3 | Exercice 7 | 3 |
| 1.3.4 | Exercice 16 | 3 |
| 1.4 | 12 Novembre | 3 |
| 1.4.1 | Questions | 3 |
| 1.4.2 | Remarque | 4 |
| 2 | Integrale généralisée | 4 |
| 2.1 | 15 Novembre | 4 |
| 2.1.1 | Questions | 4 |
| 2.1.2 | Remarque | 5 |
| 2.2 | Session Exercice 9 : | 5 |
| 2.2.1 | Exercice 11 | 5 |
| 2.2.2 | Exercice 1 | 5 |
| 2.2.3 | Exercice 9 | 6 |
| 2.3 | 18 Novembre | 6 |
| 2.4 | 19 Novembre | 6 |
| 2.4.1 | Questions | 6 |
| 2.4.2 | Remarques | 6 |

1 Convergence simple / convergence uniforme

1.1 8 Novembre

1.2 Questions

- Qu'est-ce que la convergence simple ?
- Que dire de $g, h : A \subset D \rightarrow \mathbb{K}$ quand (f_n) converge simplement (CVS) vers g et h .
- Qu'est-ce que la limite simple (parler d'unicité)
- Propriétés qui se transmettent par convergence simple (2 trucs)
- Citer 2 propriétés qui ne se transmettent pas (citer 2 exemples)
- Quelle variable arrive en premier ? x ou n ?
- Parler de convergence simple / uniforme **sur un ensemble**
- Différence entre CVS et CVU.
- Quelle variable arrive en premier ? x ou n ?
- Propositions liées à la CVU. (restriction / CVU \Rightarrow CVS / $\| \cdot \|_{+\infty}$ / unicité)
- Qu'est-ce que la limite uniforme.
- Transfert de la continuité en CVU. (re-démontrer)
- Notation $\delta_n(x)$ et comment l'utiliser ?
- Méthode pour montrer une non CVU.
- Rappeler notion de convergence uniforme / simple sur série d'application.
- Convergence simple de $\sum f_n$ sur A (A définir)
- Grossière divergence en convergence de série d'application. (redémontrer)
- Caractérisation de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur A .
- Transfert de la continuité en CVU de séries d'applications.
- Quand dispose-t-on de (R_n) et S ?
- Définir convergence absolue et convergence normale d'une série d'application.
- Lien entre les 4 convergences.

1.2.1 Remarques

- Définir racine n -ième de $x \in \mathbb{R}$

1.3 Session exercice 8 :

1.3.1 Exercice 21 (KDR)

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. Mq S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

Pour la définition, montrer que $S(x)$ existe.

Penser au CSSA ($(\frac{1}{x+n})$ est décroissante et tend vers 0)

Ensuite, passer par la convergence uniforme puis par le théorème de transfert de continuité.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \mid x < y$.

Etudier $S(y) - S(x)$, puis repenser au CSSA et au fait que la somme est du signe de son premier

terme dans le CSSA. ($T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x(n+1)}$ est du signe de son premier terme.)

3. Le but ici est de vérifier une équation fonctionnelle pour $S(x)$.

On calcul alors $S(x+1)$, que l'on exprime en fonction de $S(x)$. Par changement de variable, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) = \frac{1}{x} - S(x)$$

S est C^0 en 1. On étudie alors les limites : $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$.

Donc $S(x) \sim_{0+} \frac{1}{x}$

Pour l'équivalent en $+\infty$, il faut avoir l'idée **d'encadrer** $S(x)$. Pour cela, utiliser la relation fonctionnelle et la monotonie de S en x et en $x-1$.

1.3.2 Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n!}$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} puis expliciter sa somme.

Ici, plutôt que de montrer la convergence uniforme en utilisant la convergence simple puis le reste R_n (qui doit tendre vers 0), on préfère utiliser la convergence normale.

$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$.

Donc comme la borne supérieure et le plus petit des majorants, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$

Par comparaison de SATP, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Donc on a convergence normale donc uniforme.

Elle converge donc simplement. On dispose alors de la somme $S(x)$.

On y étudie la limite sachant que la fonction Im est \mathbb{R} linéaire et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 < +\infty$ donc Im est C^0 sur \mathbb{C} .

1.3.3 Exercice 7

Soit (f_n) une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Montrer que f est une fonction polynôme.

Celui-ci est pas évident.

Il faut en fait repartir des définitions.

f_n est une fonction polynôme donc $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = P_n(t)$.

On a alors $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On remarque alors que toute fonction polynôme bornée sur \mathbb{R} est constante.

On s'intéresse alors aux "tranches de Cauchy".

C'est à dire, à $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty$.

On montre que cette expression est bornée.

On a alors $\exists c_{n,p} \in \mathbb{R} \mid \forall t \in \mathbb{R}, f_{n+p}(t) - f_n(t) = c_{n,p}$

$c_{n,p} = f_{n,p}(12) - f_n(12) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(12) - f_n(12)$

On a alors avec c_n la limite quand $p \rightarrow +\infty$ de $c_{n,p}$,

$f(t) - f_n(t) = c_n$

Donc $f(t) = f_n(t) + c_n$ est une fonction polynomiale donc f est une fonction polynomiale.

1.3.4 Exercice 16

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n^x e^{-nx}}_{f_n(x)}$. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f_n(x) = e^{-(n-\ln(x))x} = o(\frac{1}{n^2})$.

Donc $\sum f_n(x)$ converge car $2 > 1$

Donc $S(x)$ existe. Donc S est définie sur \mathbb{R}_+^* .

On ne peut pas utiliser la convergence normale ici car on s'aperçoit en faisant le tableau de signe, que $\|f_n\|_\infty = 1$

On se place alors sur un segment où ça marche et ok par convergence normale...

1.4 12 Novembre

1.4.1 Questions

- Définir le rayon de convergence.
- Lien r / borne.
- Rayon de convergence de la suite nulle.
- Rayon de convergence d'une suite constante non nulle.
- Si la suite (a_n) est bornée, alors $R_a \dots$
- Si la suite est convergente de limite non nulle alors $R_a \dots$
- Si la suite tend vers zéro, alors $R_a \dots$
- Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \dots R_b$.
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \dots R_b$.

- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a \dots R_b$.
- Lien entre R_{a+b} et R_a et R_b .
- Lien entre $R_{\alpha a}$ et R_a .
- Suite $D(a)$ et $I(a)$. (suite dérivée et primitive)
- Lien suite série pour R_a .
- Règle d'Alembert.
- Rayon de convergence de la suite géométrique (a^n)
- Pour montrer $R_a \leq R_b$,
On prend $r \in [0, R_a[$ puis on montre que la suite $(b_n r^n)$ est bornée.
- $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \forall p \in \mathbb{N}, (r+h)^{p+1} \leq (p+1)r^p h$
- Cas de la fraction rationnelle **non nulle**.
- Cas du produit de convolution.
- Qu'est-ce qu'une série entière de la variable complexe.
- Rayon de convergence d'une série entière.
- Définition ensemble de convergence de $\sum a_n z^n$, disque ouvert de $\sum a_n z^n$ et cercle d'incertitude de $\sum a_n z^n$.
- Définition somme de la série entière.
- Que peut-on dire du disque fermé D_r . Et que ne peut-on pas dire sur le disque ouvert de convergence D_a vis-à-vis de la convergence uniforme.
- Série entière produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
- $z \in \mathbb{C}, \in \mathbb{N}^*$, Rayon de convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(p-1))z^{n-p}, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n+p} z^n$ et somme de ces séries. Moyen mnémotechnique pour le 2. (dérivation)
- cas des fonctions trigonométriques / exponentielles et trigonométriques hyperboliques.
- Définition du cos d'un complexe... Revoir l'histoire de la définition des fonctions cos et sin.
- Tout pareil pour les séries entières de la variable réelle.
- Dernier théorème.

1.4.2 Remarque

2 Intégrale généralisée

2.1 15 Novembre

2.1.1 Questions

- Notion d'intégrale généralisée
- Dans le cas d'une fonction positive, son intégrale est croissante. Sa convergence équivaut alors à sa majoration. (comme les SATPs)
- Parties réelles et imaginaires stables par intégration.
- Croissance de l'intégrale
- Faire bien **attention aux convergences**
- Que ne faut-il pas écrire quand l'intégrale de $f+g$ converge et l'intégrale de f et l'intégrale de g divergent.
- Définir le reste de l'intégrale et les conditions de dérivabilité.
- Définir intégrale généralisée de f sur $[a, b[$
- Dans le cas d'une fonction positive, son intégrale est croissante. Sa convergence équivaut alors à sa majoration. (comme les SATPs) (cas $[a, b[$)
- Une application continue par morceaux sur un **segment** est bornée.
- Condition pour avoir l'intégrale de f convergente sur $[a, b[$ quand f est continue par morceaux.
- Valeur de \arctanh en fonction de \ln
- Quand on fait les calculs, on utilise la notation $F(x) = \int_a^x f$
- Tout pareil sur $]a, b]$
- Notion d'intégrale généralisée sur $]a, b[$
- Généralement, on prolonge par continuité la fonction.
Exemple : $g(t) = \ln(t)\ln(1-t)$.

g est continue sur $]0, 1[$.

On pose $g(0) = g(1) = 0$.

On a alors g est continue sur $[0, 1]$

$g(t) \sim_{0+} -t \ln(t)$ $g(t) \sim_{1-} (t-1) \ln(1-t)$

Alors $\int_0^1 g$ converge.

- Dans le changement de variable MPSI, on pose $t = \varphi(u)$. Il faut alors seulement $\varphi \in \mathcal{C}^1$
- Dans le nouveau changement de variable, cas des intégrales impropres, il faut $\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ une bijection strictement monotone de classe \mathcal{C}^1 de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$.

On a alors si f est continue sur $]a, b[$, $\int_a^b f$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi'$ sont de même nature.

Dans le cas où ça converge, $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$

- Dans l'intégration par partie MPSI, on doit avoir la fonction qu'on primitive qui est \mathcal{C}^0 et la fonction qu'on dérive qui est \mathcal{C}^1 .
- Dans le nouveau théorème d'intégration par partie, cas des intégrales impropres, il faut en plus que, pour $\int_a^b u'v$,
 uv admette une limite en a et en b
- Définition d'une intégrale absolument convergente. D'une intégrale semi-convergente.
- Comparaison de deux fonctions continues par morceaux $0 \leq \varphi \leq \psi$
La convergence de l'intégrale de φ se déduit alors de celle de ψ .
La divergence de l'intégrale de ψ se déduit alors de celle de φ .
- Conditions pour appliquer l'inégalité triangulaire à l'intégrale.

2.1.2 Remarque

2.2 Session Exercice 9 :

2.2.1 Exercice 11

$a_0 = 1, a_{n+1} = \arctan(a_n)$

$f(x) = \arctan(x)$

$g(x) = f(x) - x$

Avec un tableau de signe, f est croissante.

puis $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0$

$g(0) = 0$ et g décroissante donc :

$a_{n+1} - a_n = g(a_n) \leq 0$

(a_n) décroissante et minorée par 0 donc (a_n) converge.

Posons $\ell = \lim a_n, \ell \in \mathbb{R}^+$

$a_{n+1} = f(a_n)$ et $f' \in \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}^+ et PPL : $\ell = f(\ell)$

i.e $g(\ell) = 0$ puis $\ell = 0$

(a_n) converge donc $R_a \geq 1$

$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^3}{3} + o(a_n^3)$ $\lim a_n = 0$

$a_{n+1} = a_n(1 - \frac{a_n^2}{3} + o(a_n^2))$

on calcul alors a_{n+1}^{-2} (l'idée viens du carré dans les parenthèses)

On montre ainsi que $\lim a_{n+1}^{-2} - a_n^{-2} = \frac{2}{3}$

Ainsi, $a_n^{-2} \sim \frac{2n}{3}$

$a_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

On montre alors que $R_a = 1$ en étudiant $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ avec $b_n = \frac{K}{n^{\frac{1}{2}}}$

On en déduit alors E_a en étudiant le comportement aux limites.

2.2.2 Exercice 1

5)

$$a_n = \frac{ch(n)}{n}.$$

On a alors $R_a = R_{(na_n)}$

$$na_n \sim ch(n) \sim \frac{e^n}{2}$$

$$R_a = R_{(e^n)} = \frac{1}{|e|} = \frac{1}{e}$$

2.2.3 Exercice 9

2.3 18 Novembre

- Notion d'intégrabilité.
- Ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$
- Caractérisation de l'intégrabilité
- Exemple de référence d'applications intégrables.
- Quelles sont les conditions pour écrire $\int_I f$
- intégrable \Rightarrow intégrale généralisée converge. La réciproque est fausse.
- Toute intégrale semi-convergente converge mais la fonctions qui lui est associée n'est pas intégrable.
- Conditions pour avoir $\int_I \varphi \Rightarrow \varphi = 0_{\mathbb{R}^I}$ (4 conditions)

2.4 19 Novembre

2.4.1 Questions

- Si c'est intégrable, les bornes sont négligeables.

2.4.2 Remarques

—