

Maths

Schobert Néo

12 novembre 2021

Table des matières

1	Convergence simple / convergence uniforme	2
1.1	8 Novembre	2
1.2	Questions	2
1.2.1	Remarques	2
1.3	Session exercice 8 :	2
1.3.1	Exercice 21 (KDR)	2
1.3.2	Exercice 13	3
1.3.3	Exercice 7	3
1.3.4	Exercice 16	3
1.4	12 Novembre	3
1.4.1	Questions	3
1.4.2	Remarque	4

1 Convergence simple / convergence uniforme

1.1 8 Novembre

1.2 Questions

- Qu'est-ce que la convergence simple ?
- Que dire de $g, h : A \subset D \rightarrow \mathbb{K}$ quand (f_n) converge simplement (CVS) vers g et h .
- Qu'est-ce que la limite simple (parler d'unicité)
- Propriétés qui se transmettent par convergence simple (2 trucs)
- Citer 2 propriétés qui ne se transmettent pas (citer 2 exemples)
- Quelle variable arrive en premier ? x ou n ?
- Parler de convergence simple / uniforme **sur un ensemble**
- Différence entre CVS et CVU.
- Quelle variable arrive en premier ? x ou n ?
- Propositions liées à la CVU. (restriction / CVU \Rightarrow CVS / $\| \cdot \|_{+\infty}$ / unicité)
- Qu'est-ce que la limite uniforme.
- Transfert de la continuité en CVU. (re-démontrer)
- Notation $\delta_n(x)$ et comment l'utiliser ?
- Méthode pour montrer une non CVU.
- Rappeler notion de convergence uniforme / simple sur série d'application.
- Convergence simple de $\sum f_n$ sur A (A définir)
- Grossière divergence en convergence de série d'application. (redémontrer)
- Caractérisation de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur A .
- Transfert de la continuité en CVU de séries d'applications.
- Quand dispose-t-on de (R_n) et S ?
- Définir convergence absolue et convergence normale d'une série d'application.
- Lien entre les 4 convergences.

1.2.1 Remarques

- Définir racine n -ième de $x \in \mathbb{R}$

1.3 Session exercice 8 :

1.3.1 Exercice 21 (KDR)

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. Mq S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

Pour la définition, montrer que $S(x)$ existe.

Penser au CSSA ($(\frac{1}{x+n})$ est décroissante et tend vers 0)

Ensuite, passer par la convergence uniforme puis par le théorème de transfert de continuité.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \mid x < y$.

Etudier $S(y) - S(x)$, puis repenser au CSSA et au fait que la somme est du signe de son premier

terme dans le CSSA. ($T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x(n+1)}$ est du signe de son premier terme.)

3. Le but ici est de vérifier une équation fonctionnelle pour $S(x)$.

On calcul alors $S(x+1)$, que l'on exprime en fonction de $S(x)$. Par changement de variable, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) = \frac{1}{x} - S(x)$$

S est C^0 en 1. On étudie alors les limites : $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$.

Donc $S(x) \sim_{0+} \frac{1}{x}$

Pour l'équivalent en $+\infty$, il faut avoir l'idée **d'encadrer** $S(x)$. Pour cela, utiliser la relation fonctionnelle et la monotonie de S en x et en $x-1$.

1.3.2 Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n!}$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} puis expliciter sa somme.

Ici, plutôt que de montrer la convergence uniforme en utilisant la convergence simple puis le reste R_n (qui doit tendre vers 0), on préfère utiliser la convergence normale.

$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$.

Donc comme la borne supérieure et le plus petit des majorants, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$

Par comparaison de SATP, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Donc on a convergence normale donc uniforme.

Elle converge donc simplement. On dispose alors de la somme $S(x)$.

On y étudie la limite sachant que la fonction Im est \mathbb{R} linéaire et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 < +\infty$ donc Im est C^0 sur \mathbb{C} .

1.3.3 Exercice 7

Soit (f_n) une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Montrer que f est une fonction polynôme.

Celui-ci est pas évident.

Il faut en fait repartir des définitions.

f_n est une fonction polynôme donc $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = P_n(t)$.

On a alors $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On remarque alors que toute fonction polynôme bornée sur \mathbb{R} est constante.

On s'intéresse alors aux "tranches de Cauchy".

C'est à dire, à $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty$.

On montre que cette expression est bornée.

On a alors $\exists c_{n,p} \in \mathbb{R} \mid \forall t \in \mathbb{R}, f_{n+p}(t) - f_n(t) = c_{n,p}$

$c_{n,p} = f_{n,p}(12) - f_n(12) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(12) - f_n(12)$

On a alors avec c_n la limite quand $p \rightarrow +\infty$ de $c_{n,p}$,

$f(t) - f_n(t) = c_n$

Donc $f(t) = f_n(t) + c_n$ est une fonction polynomiale donc f est une fonction polynomiale.

1.3.4 Exercice 16

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n^x e^{-nx}}_{f_n(x)}$. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f_n(x) = e^{-(n-\ln(x))x} = o(\frac{1}{n^2})$.

Donc $\sum f_n(x)$ converge car $2 > 1$

Donc $S(x)$ existe. Donc S est définie sur \mathbb{R}_+^* .

On ne peut pas utiliser la convergence normale ici car on s'aperçoit en faisant le tableau de signe, que $\|f_n\|_\infty = 1$

On se place alors sur un segment où ça marche et ok par convergence normale...

1.4 12 Novembre

1.4.1 Questions

- Définir le rayon de convergence.
- Lien r / borne.
- Rayon de convergence de la suite nulle.
- Rayon de convergence d'une suite constante non nulle.
- Si la suite (a_n) est bornée, alors $R_a \dots$
- Si la suite est convergente de limite non nulle alors $R_a \dots$
- Si la suite tend vers zéro, alors $R_a \dots$
- Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \dots R_b$.
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \dots R_b$.

- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a \dots R_b$.
- Lien entre R_{a+b} et R_a et R_b .
- Lien entre $R_{\alpha a}$ et R_a .
- Suite $D(a)$ et $I(a)$. (suite dérivée et primitive)
- Lien suite série pour R_a .
- Règle d'Alembert.
- Rayon de convergence de la suite géométrique (a^n)
- Pour montrer $R_a \leq R_b$,
On prend $r \in [0, R_a[$ puis on montre que la suite $(b_n r^n)$ est bornée.
- $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \forall p \in \mathbb{N}, (r+h)^{p+1} \leq (p+1)r^p h$
- Cas de la fraction rationnelle **non nulle**.
- Cas du produit de convolution.
- Qu'est-ce qu'une série entière de la variable complexe.
- Rayon de convergence d'une série entière.
- Définition ensemble de convergence de $\sum a_n z^n$, disque ouvert de $\sum a_n z^n$ et cercle d'incertitude de $\sum a_n z^n$.
- Définition somme de la série entière.
- Que peut-on dire du disque fermé D_r . Et que ne peut-on pas dire sur le disque ouvert de convergence D_a vis-à-vis de la convergence uniforme.
- Série entière produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
- $z \in \mathbb{C}, \in \mathbb{N}^*$, Rayon de convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(p-1))z^{n-p}, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n+p} z^n$
et somme de ces séries. Moyen mnémotechnique pour le 2. (dérivation)
- cas des fonctions trigonométriques / exponentielles et trigonométriques hyperboliques.
- Définition du cos d'un complexe... Revoir l'histoire de la définition des fonctions cos et sin.
- Tout pareil pour les séries entières de la variable réelle.
- Dernier théorème.

1.4.2 Remarque