明治大学
MEIJI UNIVERSITY

機械情報工学科 流体力学

第5回

# 流体の運動（2）
# 連続の式と運動方程式

亀谷 幸憲

流体デザイン研究室

kametaniy@meiji.ac.jp

# 非線形項の振る舞い：ロジスティック方程式

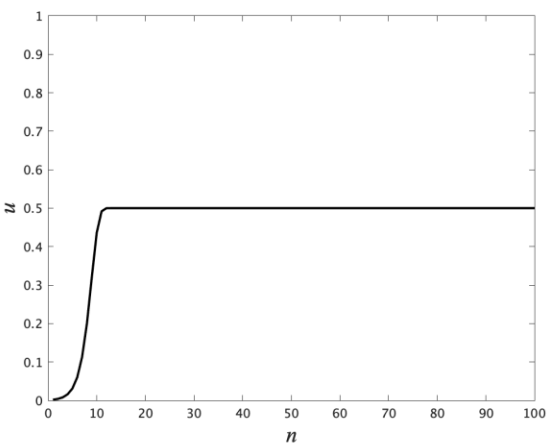
時間発達の漸化式的表現（参考）

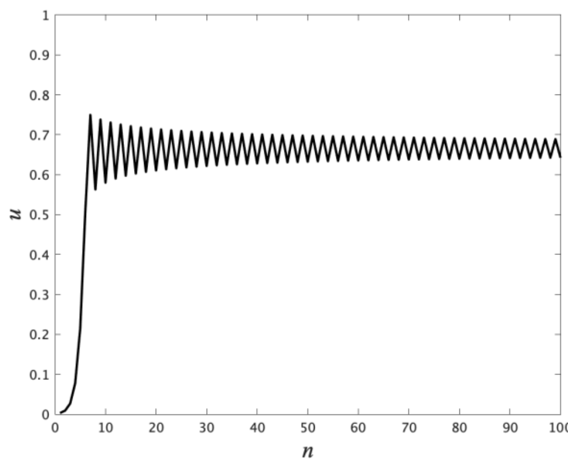
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \quad \Rightarrow \quad u^{n+1} = a\,u^n(1-u^n)$$

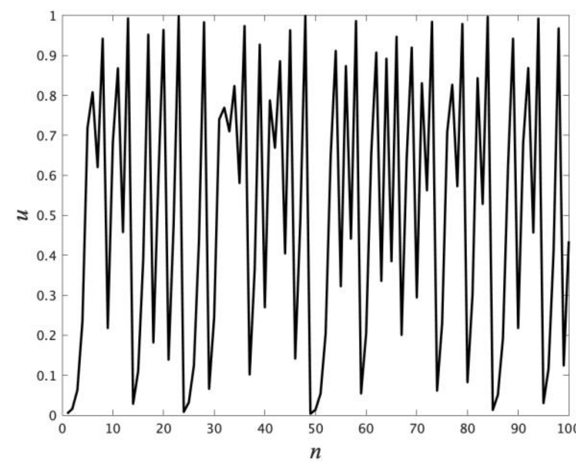
$a$: parameter　　ロジスティック方程式

**厳密には形が違うので注意**

**aの値による振る舞いの違い**







予測が困難

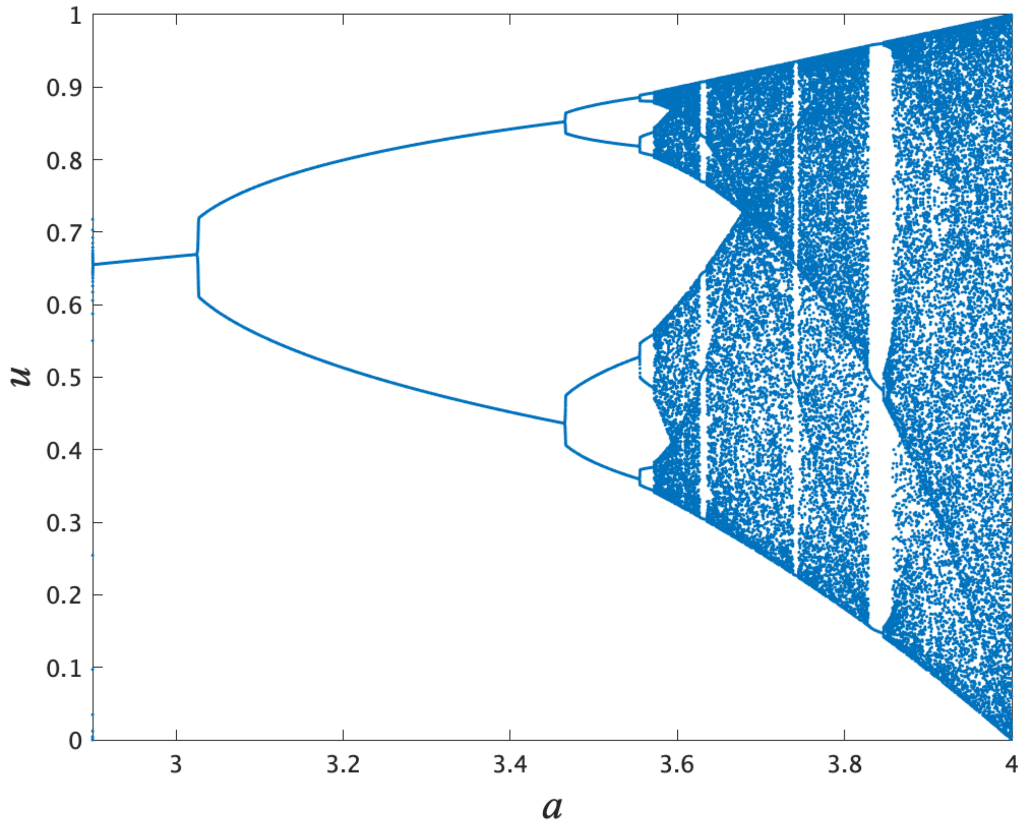
# 非線形項の振る舞い：ロジスティック方程式

時間発達の漸化式的表現（参考）

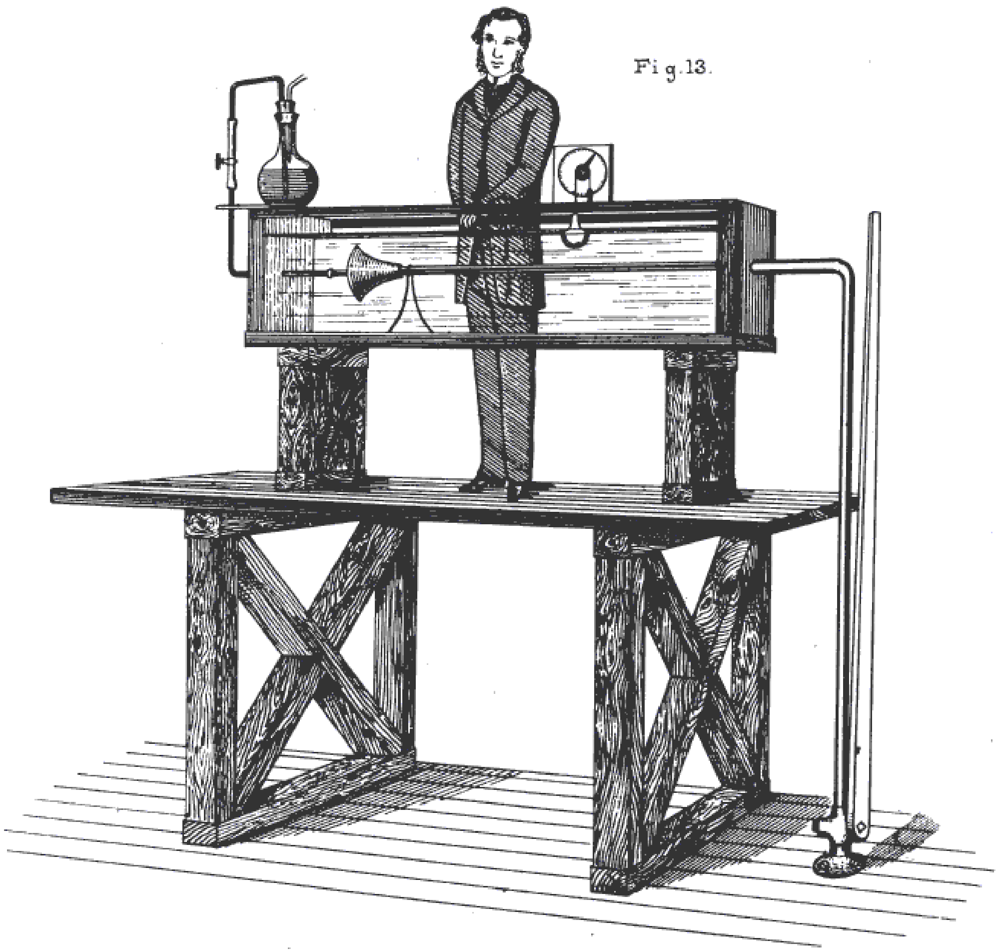
$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots$ ⇒ $u^{n+1} = a\,u^n(1-u^n)$　　$a$: parameter　　ロジスティック方程式

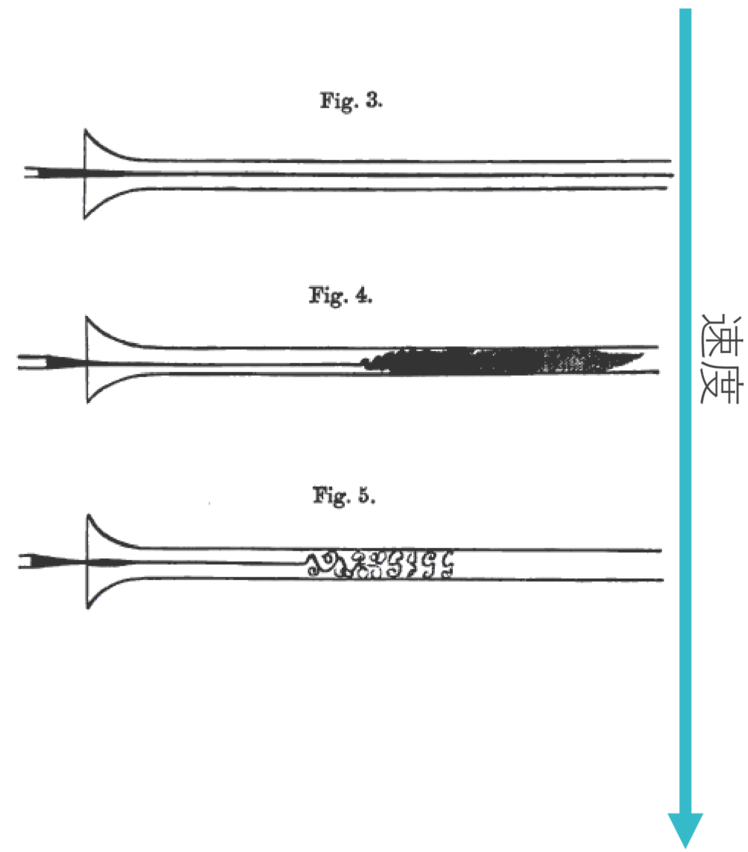
**厳密には形が違うので注意**

aの値による振る舞いの違い



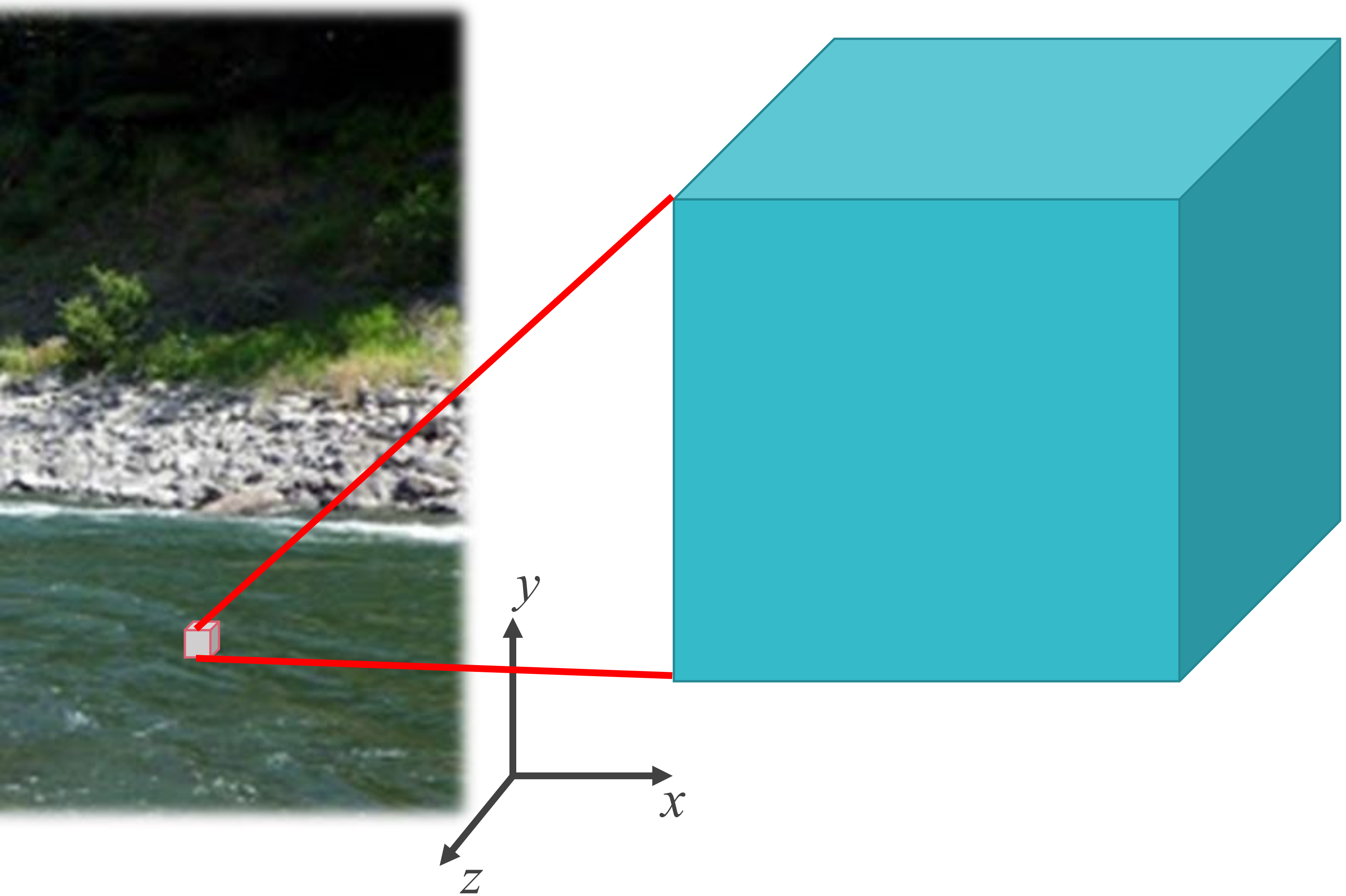
# Osborne Reynoldsの実験（1883）



https://youtu.be/y0WRJtXvpSo

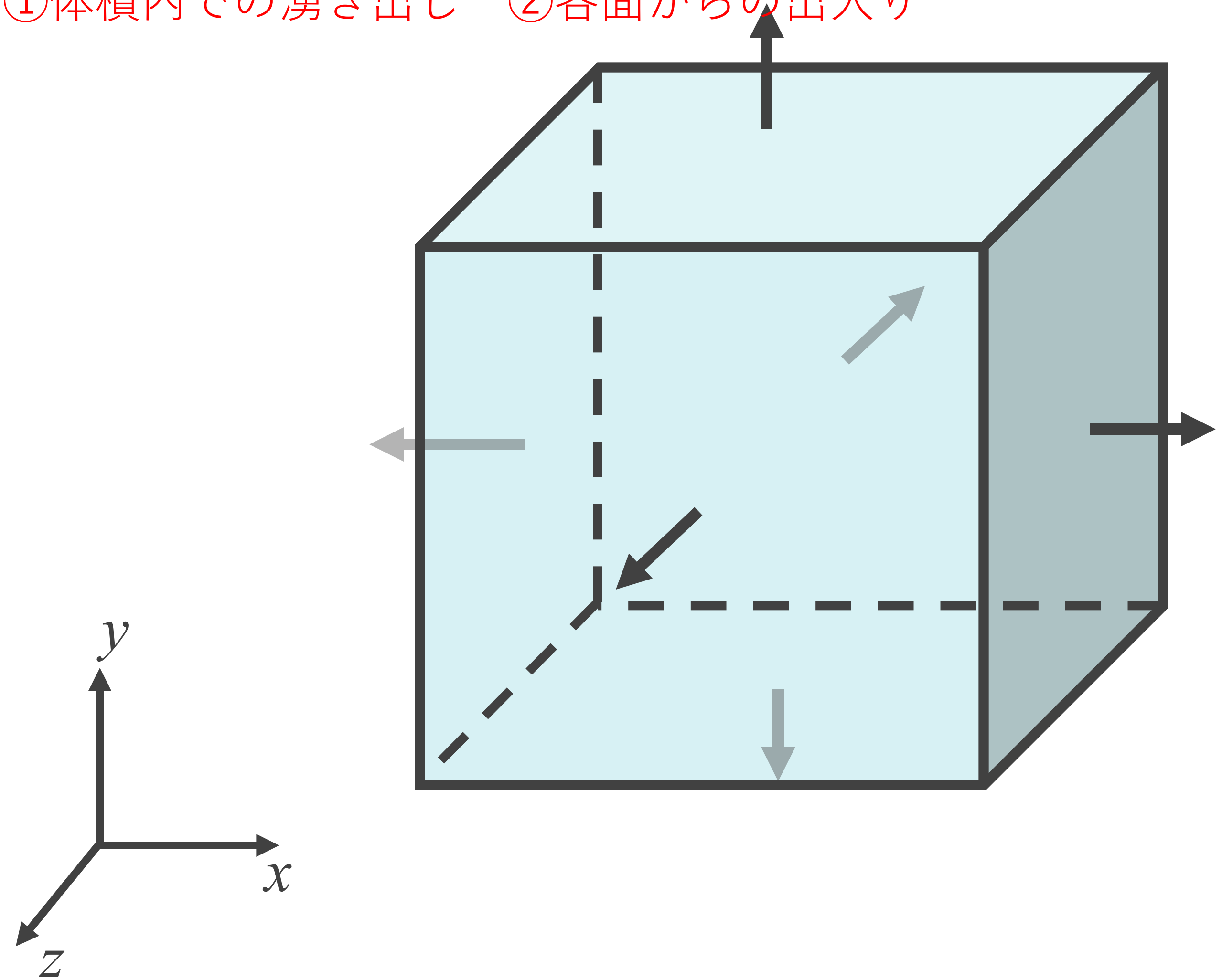
# 微小領域



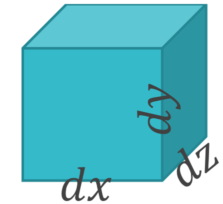
# 質量保存則：連続の式

質量:微小体積に含まれる流体の質量

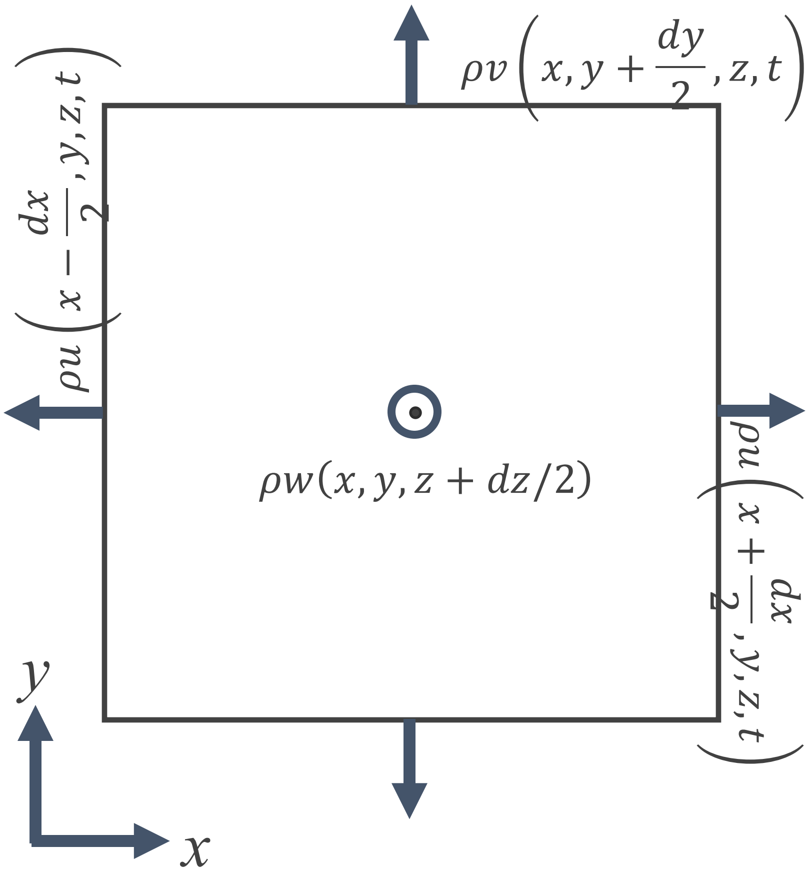
①体積内での湧き出し　②各面からの出入り



# 質量保存則




$(x, y, z)$での微小体積の質量を考える




＊直方体を横から見てる

**微小体積内の質量**

$$\dot{M} = \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} \mathrm{d}V$$

右：$x + dx/2$の面の単位時間通過流量

$$\rho u\left(x+\frac{dx}{2}, y, z, t\right) dy\, dz$$

左：$x - dx/2$の面の単位時間通過流量

$$\rho u\left(x-\frac{dx}{2}, y, z, t\right) dy\, dz$$

左右の出入りによる収支

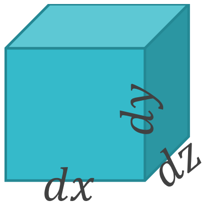
$$\rho u\left(x+\frac{dx}{2}, y, z, t\right) dy\, dz - \rho u(x - dx/2, y, z)\, dy\, dz$$

同様に残りの２方向の出入り

$$\rho v\left(x, y+\frac{dy}{2}, z, t\right) dzdx - \rho \mathrm{v}(x, y - dy/2, z)\, dzdx$$

$$\rho w(x, y, z + dz/2, t)\, dxdy - \rho \mathrm{w}(x, y, z - dz/2)\, dxdy$$

# 質量保存則




$(x, y, z)$での微小体積の質量を考える

**微小体積内の質量**

$$\dot{M} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V$$

$$+\rho u(x + dx/2, y, z)\, dy\, dz - \rho u(x - dx/2, y, z)\, dy\, dz$$

$$+\rho v(x, y + dy/2, z)\, dz dx - \rho v(x, y - dy/2, z)\, dz dx$$

$$+\rho w(x, y, z + dz/2)\, dx dy - \rho w(x, y, z - dz/2)\, dx dy$$

**体積で除して単位体積あたりの微小体積内の質量**　$\mathrm{d}V = dx\, dy\, dz$

$$\frac{\dot{M}}{\mathrm{d}V} = \dot{m} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho u(x + dx/2, y, z) - \rho u(x - dx/2, y, z)}{dx} + \frac{\rho v(x, y + dy/2, z) - \rho v(x, y - dy/2, z)}{dy} + \frac{\rho w(x, y, z + dz/2) - \rho w(x, y, z - dz/2)}{dz}$$

$\mathrm{d}V = dx\, dy\, dz \to 0$の極限

$$\dot{m} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

# 質量保存則

$$\dot{m} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$= \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \cancel{\boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho}$$

非圧縮より

$$= \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

$$\dot{m} = \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

非圧縮より　　質量保存

密度で除して

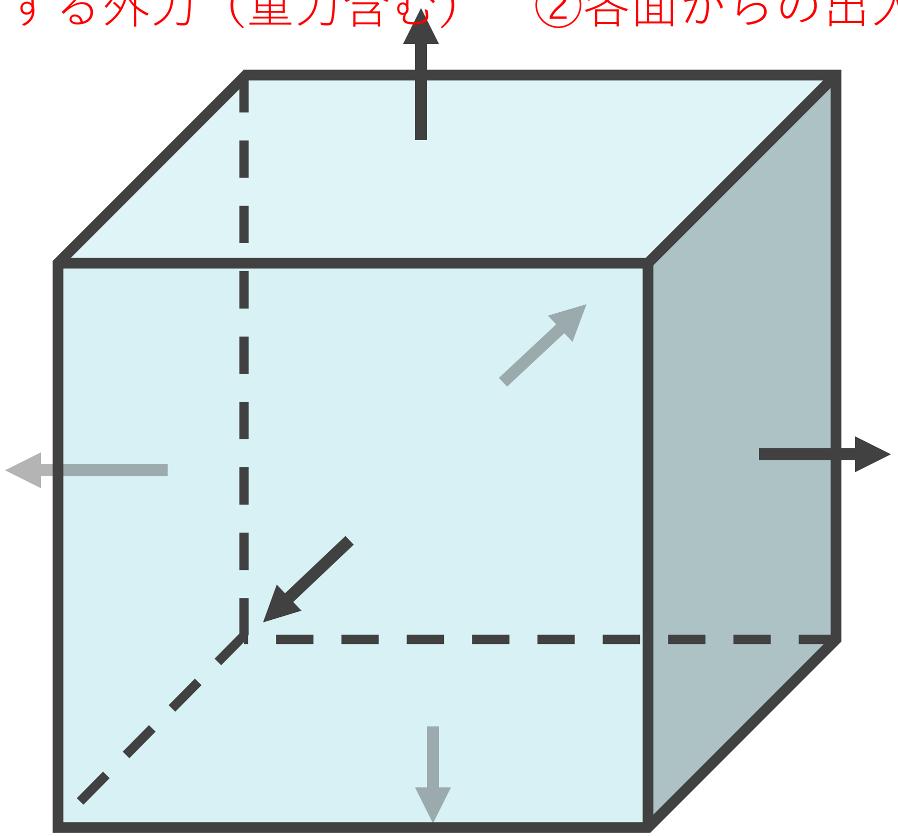
$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0} \quad \boxed{div\,\boldsymbol{u} = 0} \quad \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

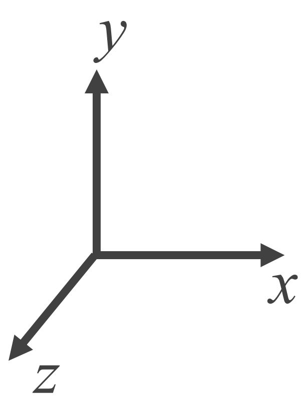
**連続の式, Continuity equation**

# 運動量保存則：Navier-Stokes方程式

運動量:微小体積に含まれる流体の運動量

①微小要素に作用する外力（重力含む）　②各面からの出入り





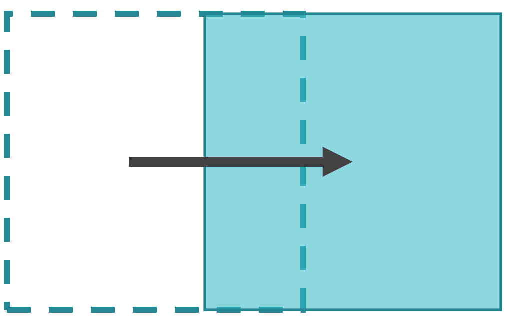

Ref. オイラー方程式

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

# 流体要素の運動について

**移動**＋**回転**＋**変形**に分別できる。
それぞれに呼応して力が生じる（例，変形に応じて粘性応力発生）

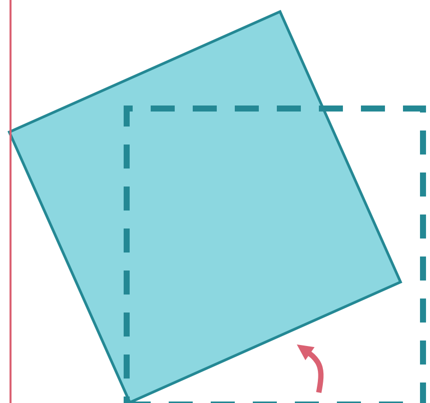
**移動**



運動後に質量は不変

非圧縮流体=> 運動後に体積は不変

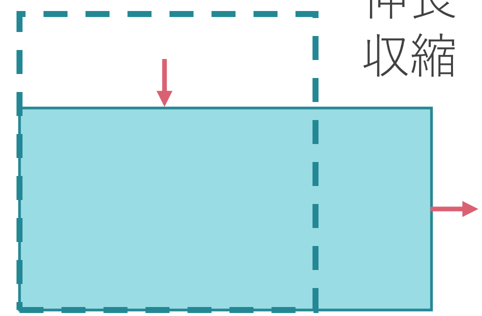
**回転**

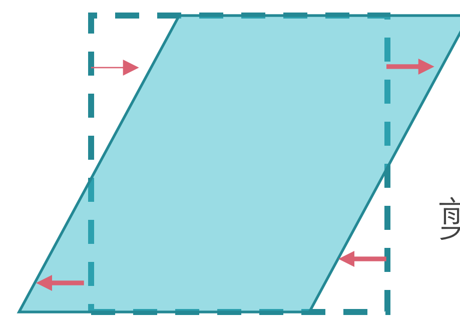


渦運動による
圧力勾配発生

**変形**
粘性応力発生

伸長
収縮





剪断

# 流体要素の運動について

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

微小時間後の微小距離離れた位置での相対速度（微小時間dtで積分）

$$d\boldsymbol{u} = \nabla\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{x}$$

$$\begin{cases} du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz \\[2ex] dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}\,dz \\[2ex] dw = \dfrac{\partial w}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,dz \end{cases}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

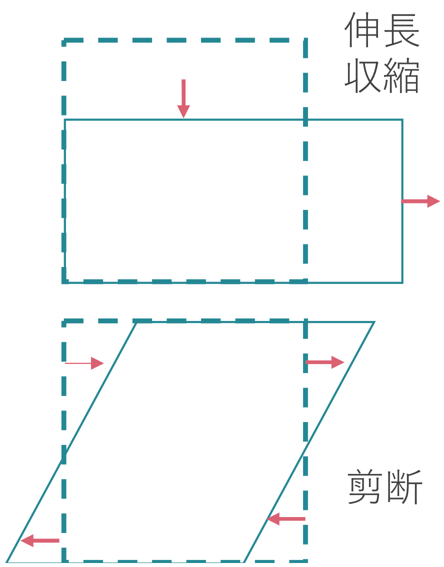
# 流体要素の運動について

ひずみ速度テンソル$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$　　回転テンソル$\boldsymbol{\Omega}$

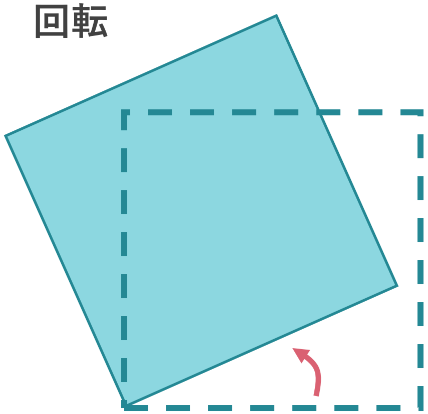
$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\
\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}
=\frac{1}{2}
\begin{bmatrix}
2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}
+\frac{1}{2}
\begin{bmatrix}
0 & \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} & 0
\end{bmatrix}
$$

**変形**

粘性応力発生

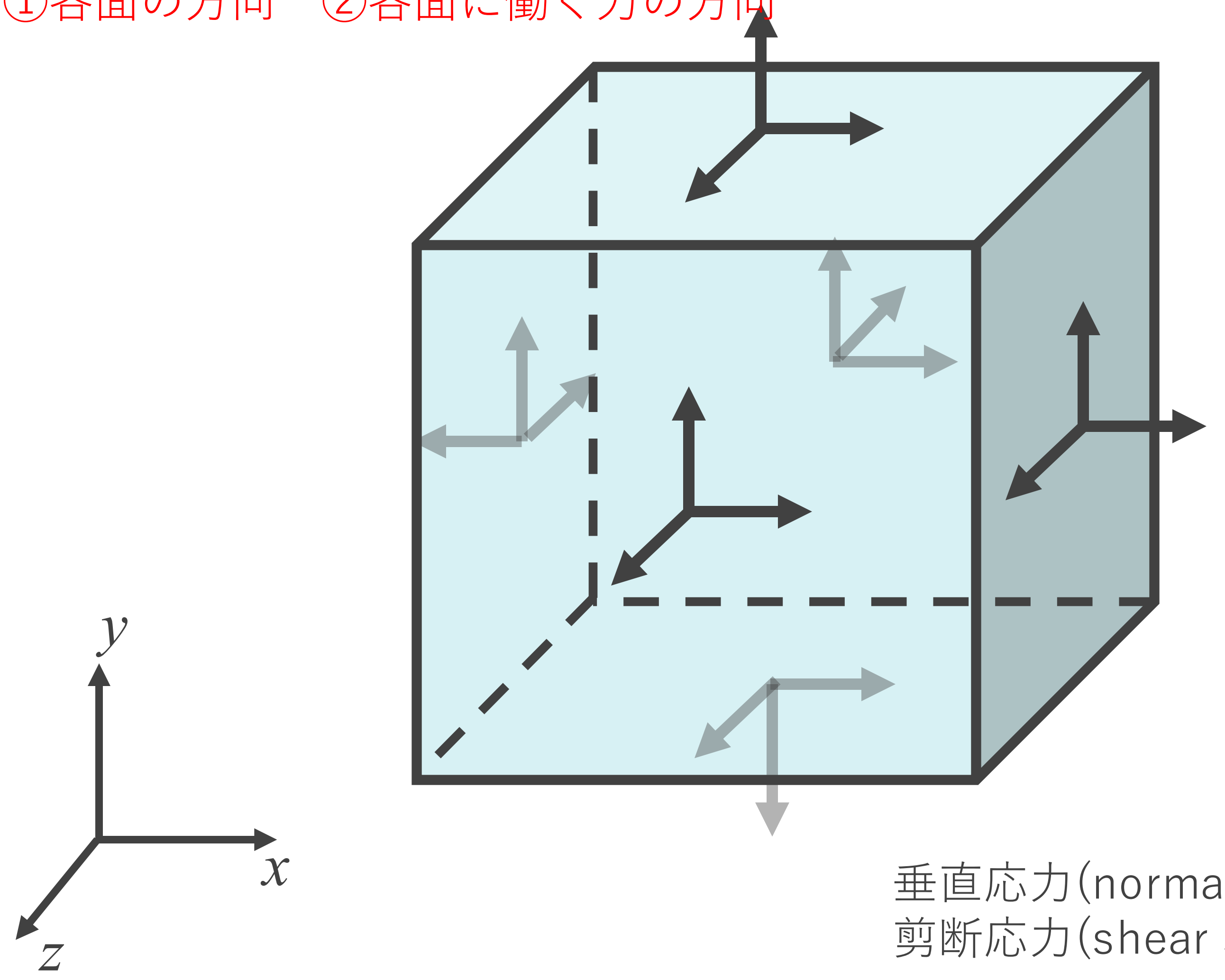



**回転**



# 応力：垂直応力と剪断応力

応力:面当たりに定義される力
①各面の方向　②各面に働く力の方向




垂直応力(normal stress)：面に垂直
剪断応力(shear stress)：面に平行

# 応力：垂直応力と剪断応力

応力:**面当たりに定義される力**
①各面の方向　②各面に働く力の方向

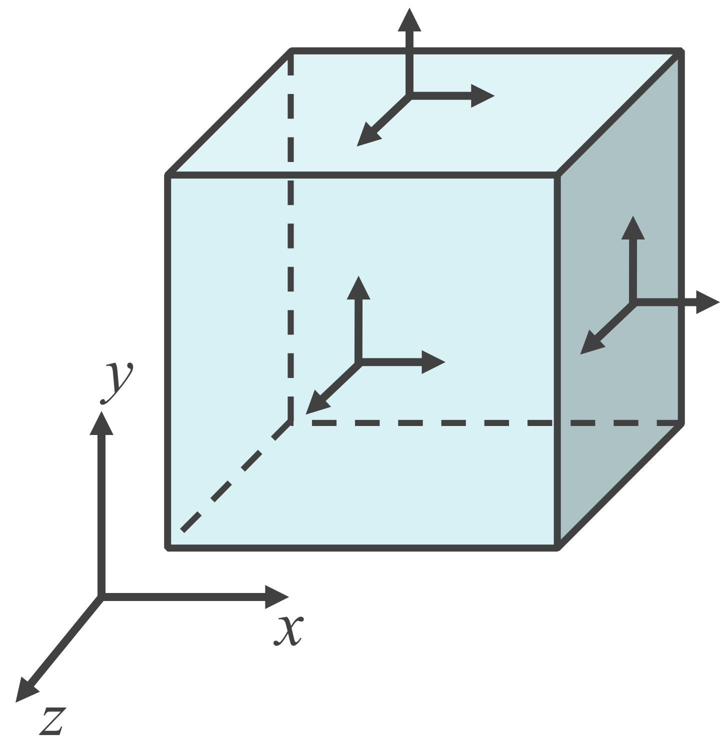
<u>応力テンソル</u>

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}$$

面の向き　　力の方向

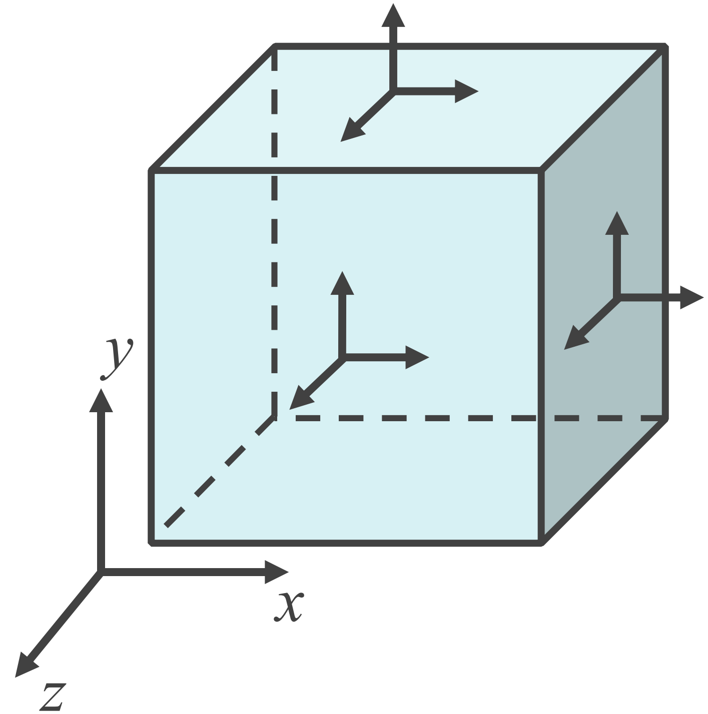
$$\boxed{= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$



# 応力：垂直応力と剪断応力

応力:**面当たりに定義される力**
①各面の方向　②各面に働く力の方向




応力テンソル

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

剪断成分 $\boldsymbol{\tau}$　　垂直成分 $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}\delta_{ij} + \tau_{ij}(1 - \delta_{ij})$$

$\delta_{ij}$:クロネッカーのデルタ

# 応力：垂直応力と剪断応力

応力テンソルは**対称テンソル**である

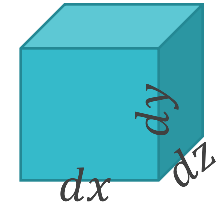
$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\tau_{ij} = \tau_{ji}}$$

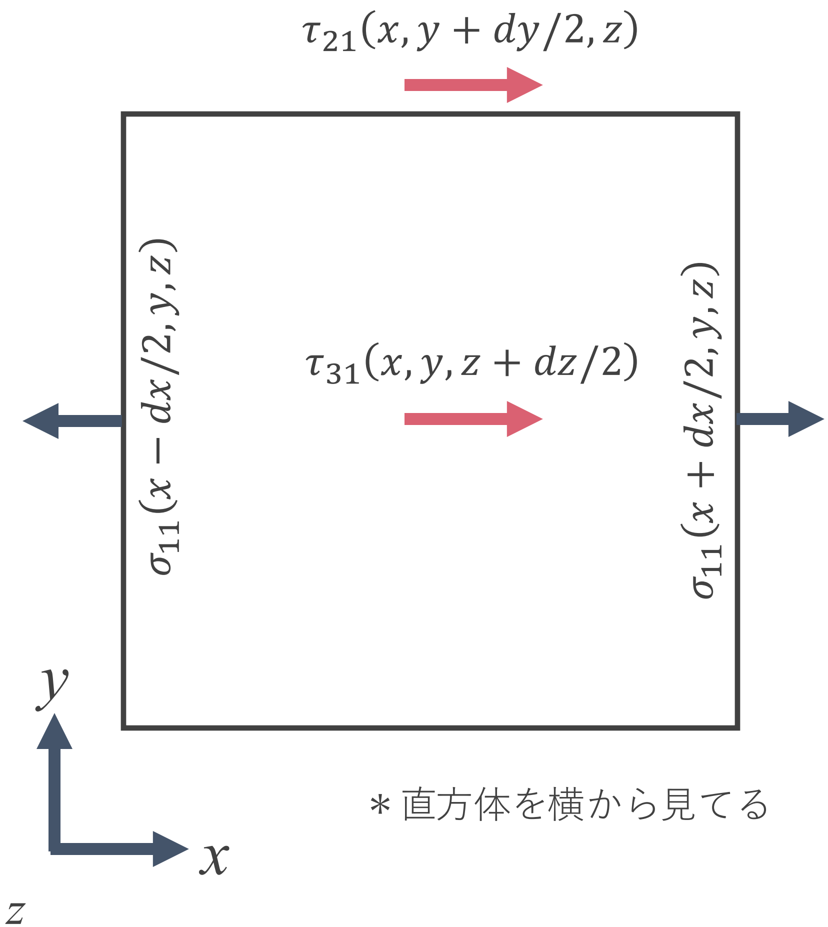
$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

値としては　**垂直３成分＋剪断３成分＝６成分**　で記述可能

# 例）$x$方向運動量への寄与




$(x, y, z)$での微小体積にかかる$x$方向の全応力を考える




＊直方体を横から見てる

右：$x + dx/2$の面

$$\sigma_{11}(x+dx/2, y, z) = \sigma_{11}(x, y, z) + \frac{dx}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{11}(x, y, z) + \mathcal{O}(dx^2)$$

左：$x - dx/2$の面

$$\sigma_{11}(x-dx/2, y, z) = \sigma_{11}(x, y, z) - \frac{dx}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{11}(x, y, z) + \mathcal{O}(dx^2)$$

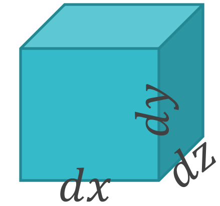
$x$方向の全垂直応力

面積　面の法線方向

$$\sigma_{11}(x+dx/2, y, z) \times (dy \cdot dz) \times (1)$$
$$+\sigma_{11}(x-dx/2, y, z) \times (dy \cdot dz) \times (-1)$$
$$= dx \times \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{11}(x, y, z) \times (dy \cdot dz)$$
$$= \frac{\partial \sigma_{11}(x, y, z, t)}{\partial x} \times (dx \cdot dy \cdot dz) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dV$$

微小体積

# 例）$x$方向運動量への寄与




$(x,y,z)$での微小体積にかかる$x$方向の全応力を考える


＊直方体を横から見てる

上：$y+dy/2$の面

$$\tau_{21}(x, y+dy/2, z)$$
$$= \tau_{21}(x,y,z) + \frac{dy}{2}\frac{\partial}{\partial y}\tau_{21}(x,y,z) + \mathcal{O}(dy^2)$$

下：$y-dy/2$の面

$$\tau_{21}(x, y-dy/2, z)$$
$$= \tau_{21}(x,y,z) - \frac{dy}{2}\frac{\partial}{\partial y}\tau_{21}(x,y,z) + \mathcal{O}(dy^2)$$

$x$方向の$y$面から生じる剪断応力

面積　面の法線方向

$$\tau_{21}(x, y+dy/2, z) \times (dz \cdot dx) \times (1)$$
$$+\tau_{21}(x, y-dy/2, z) \times (dz \cdot dx) \times (-1)$$

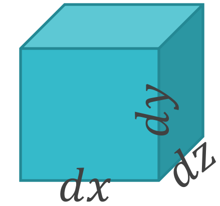
$$= dy \times \frac{\partial}{\partial y}\tau_{21}(x,y,z) \times (dz \cdot dx)$$

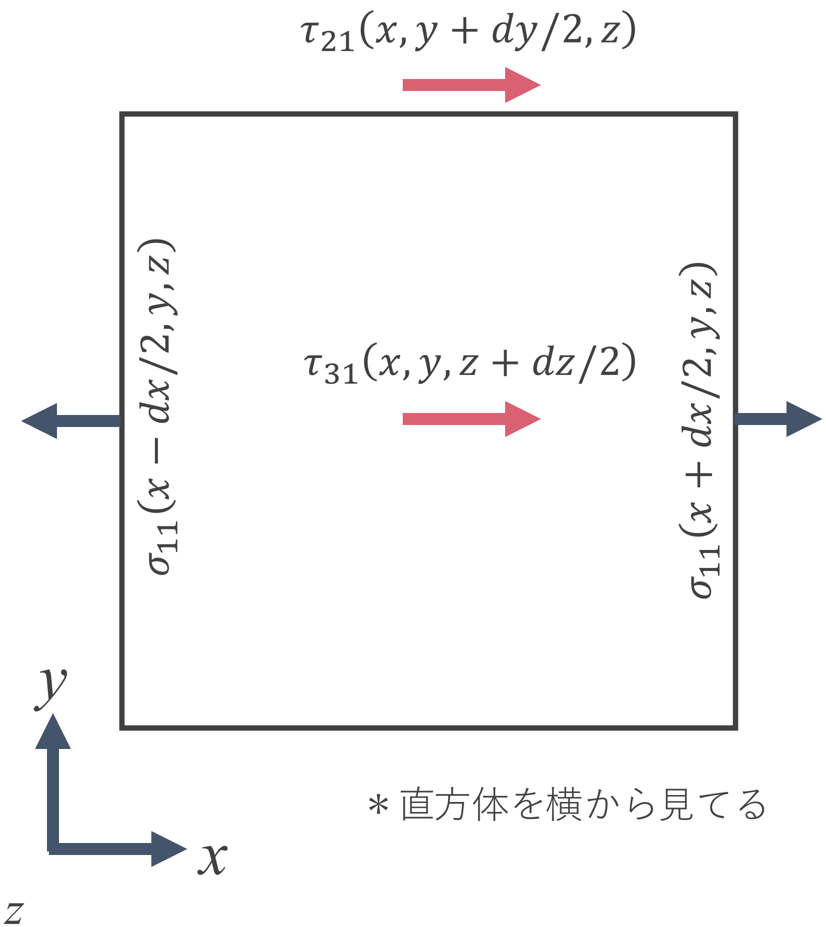
$$= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \times (dx \cdot dy \cdot dz) = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} dV$$

微小体積

# 例）$x$方向運動量への寄与

$(x, y, z)$<u>での微小体積にかかる$x$方向の全応力を考える</u>




手前：$z + dz/2$の面

$$\tau_{31}(x, y, z + dz/2)$$
$$= \tau_{31}(x, y, z) + \frac{dz}{2}\frac{\partial}{\partial z}\tau_{21}(x, y, z) + \mathcal{O}(dz^2)$$

奥：$z - dz/2$の面

$$\tau_{31}(x, y, z - dz/2)$$
$$= \tau_{31}(x, y, z) - \frac{dz}{2}\frac{\partial}{\partial z}\tau_{31}(x, y, z) + \mathcal{O}(dz^2)$$

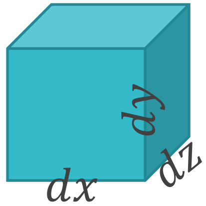
$x$方向の$y$面から生じる剪断応力

面積　面の法線方向

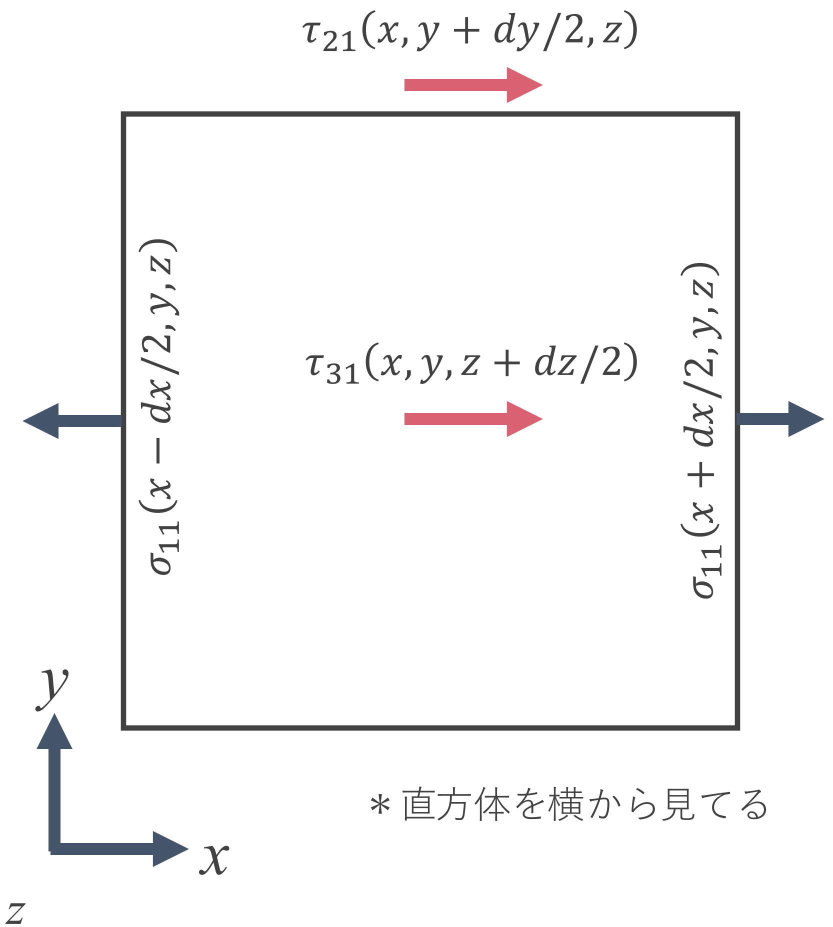
$$\tau_{31}(x, y, z + dz/2) \times (dx \cdot dy) \times (1)$$
$$+\tau_{31}(x, y, z + dz/2) \times (dx \cdot dy) \times (-1)$$
$$= dz \times \frac{\partial}{\partial z}\tau_{31}(x, y, z) \times (dx \cdot dy)$$
$$= \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} \times (dx \cdot dy \cdot dz) = \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} dV$$

**微小体積**

# 例）$x$方向運動量への寄与




$(x, y, z)$での微小体積にかかる$x$方向の全応力を考える




**微小体積にかかるx方向の応力**

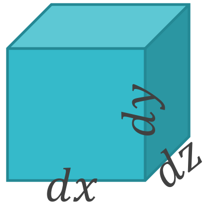
$$\sigma_{11} \cdot (dy\,dz) + \tau_{21} \cdot (dz\,dx) + \tau_{31} \cdot (dx\,dy)$$

$$= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \mathrm{d}V + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \mathrm{d}V + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} \mathrm{d}V$$

**単位体積あたりでは(dVで除する)**

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z}}$$

# 3次元デカルト座標系ではまとめると




***x*方向**

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z}$$

***y*方向**

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z}$$

***z*方向**

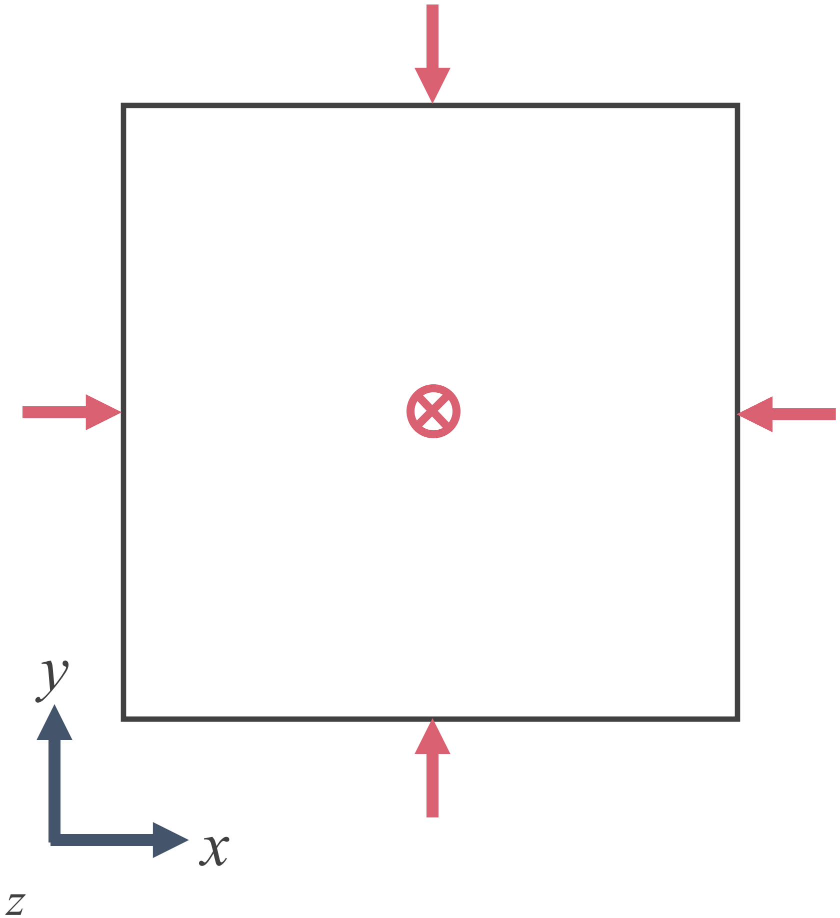
$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z}$$

発散 オペレータ

応力テンソル

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}$$

# 垂直応力の詳細




**垂直応力: 圧力と粘性垂直応力**

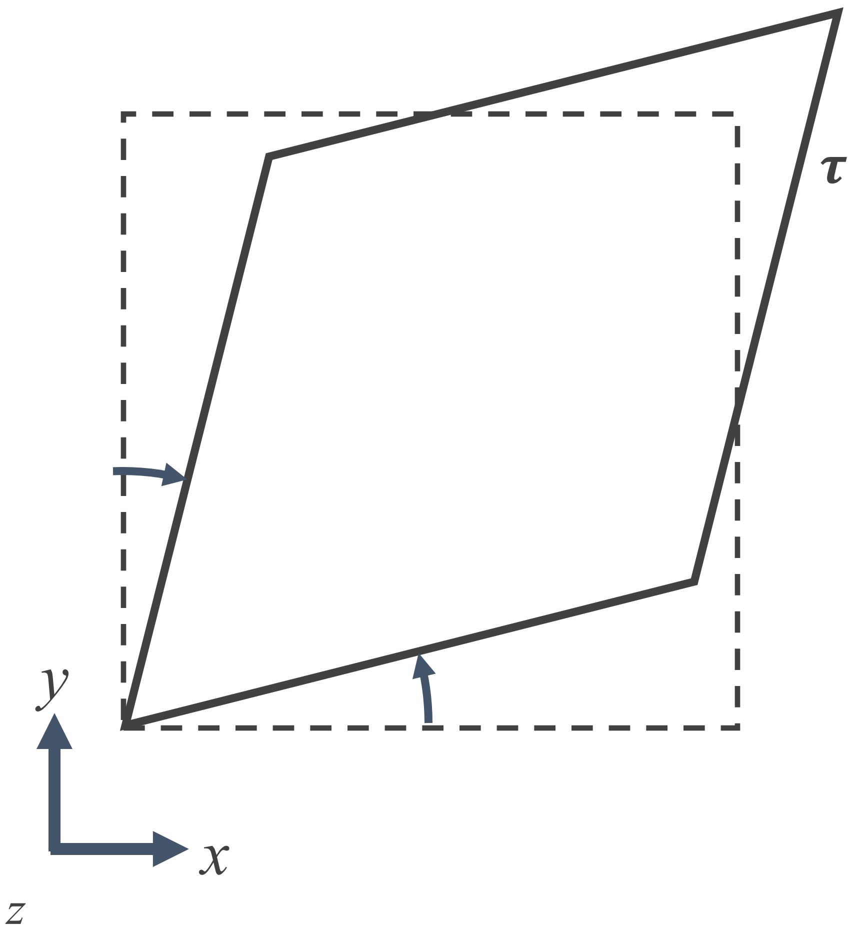
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{ニュートン流体}}$

$$= \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

# 剪断応力の詳細

**剪断応力: 粘性剪断応力**




$$\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix}0 & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & 0 & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0\end{bmatrix}$$

**ニュートン流体**

$$=\begin{bmatrix}0 & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0\end{bmatrix}$$

# 粘性力を含んだ運動量保存則

$$\frac{D\rho\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{g}$$

$$\frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{g}$$

$$= \nabla\cdot(-p\boldsymbol{I} + 2\mu\nabla\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{I}) + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{g}$$

$$= \nabla\cdot(-p\boldsymbol{I}) + \nabla\cdot(2\mu\nabla\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{I} + (\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{I})) + \rho\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\nabla\cdot(p\boldsymbol{I}) + \nabla\cdot\left(\mu(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)\right) + \rho\boldsymbol{g}$$

$$= -\nabla\cdot(p\boldsymbol{I}) + \nabla\cdot(\mu\nabla\boldsymbol{u}) + \nabla\cdot(\mu\nabla\boldsymbol{u}^T) + \rho\boldsymbol{g}$$

$$= -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \mu\left(\nabla(\cancel{\nabla\cdot\boldsymbol{u}})\right)^T + \rho\boldsymbol{g}$$

連続の式

$$= -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{g}$$

# 粘性力を含んだ運動量保存則

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\rho \boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{g}$$

**非圧縮ナビエ-ストークス方程式**
Incompressible Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho g \delta_{i2}$$

**x方向**

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + u\frac{\partial \rho u}{\partial x} + v\frac{\partial \rho u}{\partial y} + w\frac{\partial \rho u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z}\right)$$

**y方向**

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + u\frac{\partial \rho v}{\partial x} + v\frac{\partial \rho v}{\partial y} + w\frac{\partial \rho v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial z}\right) - \rho g$$

**z方向**

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + u\frac{\partial \rho w}{\partial x} + v\frac{\partial \rho w}{\partial y} + w\frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial z}\right)$$

# 非圧縮流体の運動量保存方程式

非粘性流体：オイラー方程式

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\rho \boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

粘性流体：ナビエーストークス方程式

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\rho \boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{g}$$

# 非圧縮性粘性流体の支配方程式

デカルト座標系

連続の式，Continuity equation

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ナビエ-ストークス方程式，Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\rho \boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho g \delta_{i2}$$

# 非圧縮ナビエ-ストークス方程式の性質

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho g \delta_{i2}$$

密度で除算 + 移行

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g\delta_{i2}$$

$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$ 動粘性係数 Kinematic viscosity

**移流** **圧力勾配** **粘性拡散** **重力** (無視されがち)

速度分布をなだらかにする

流れによって運ぶ

# 次回予告

- エネルギー保存
- 支配方程式考察・解析例
- 積分系への展開