機械情報工学科 流体力学

第2回

流体の静力学（1）
~ 圧力と液体の深さ・水頭の関係 ~

亀谷 幸憲

流体デザイン研究室

kametaniy@meiji.ac.jp

流体とは

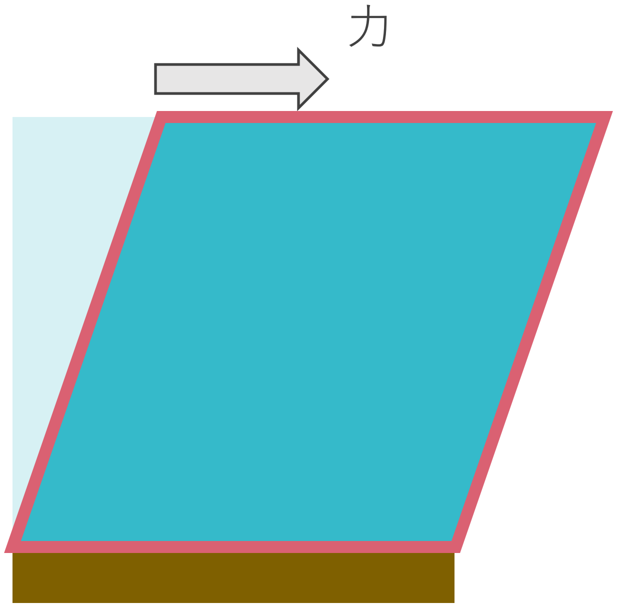
“A substances that deforms continuously when acted on by a shearing stress of any size”

接線方向の力がかかると変形し続ける

↔変形していないなら**接線方向の力は正味ゼロ**

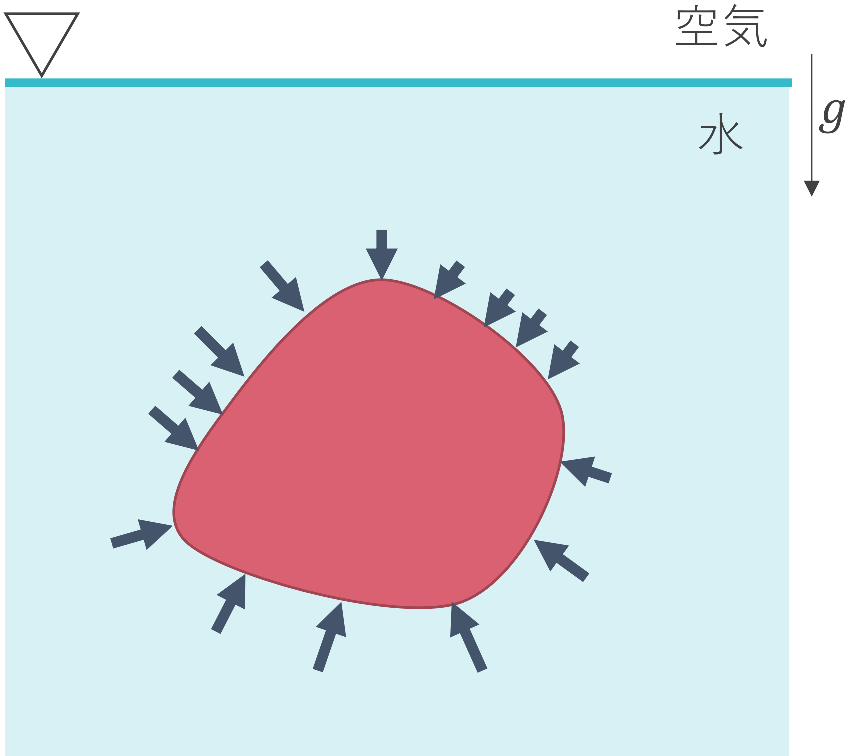
固体
変形に耐えようとする

流体
どこまでも変形し続ける



静水力学

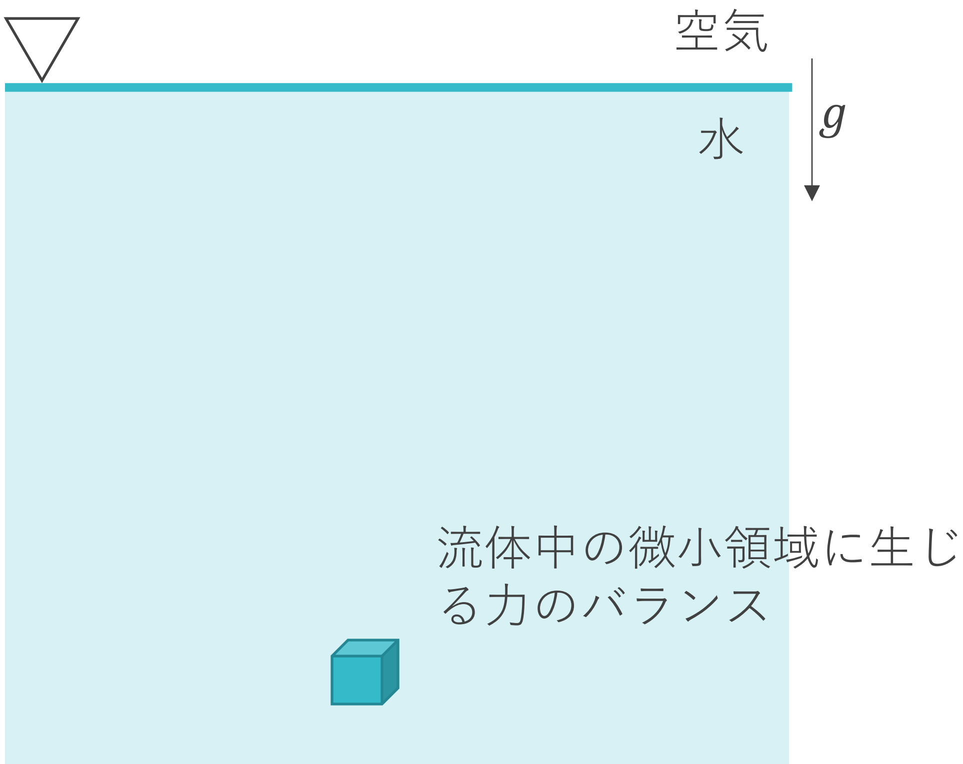
静止状態にある物体が流体から受ける力のバランスを考える。



剪断応力は生じていない

静水力学

静止状態にある物体が流体から受ける力のバランスを考える。

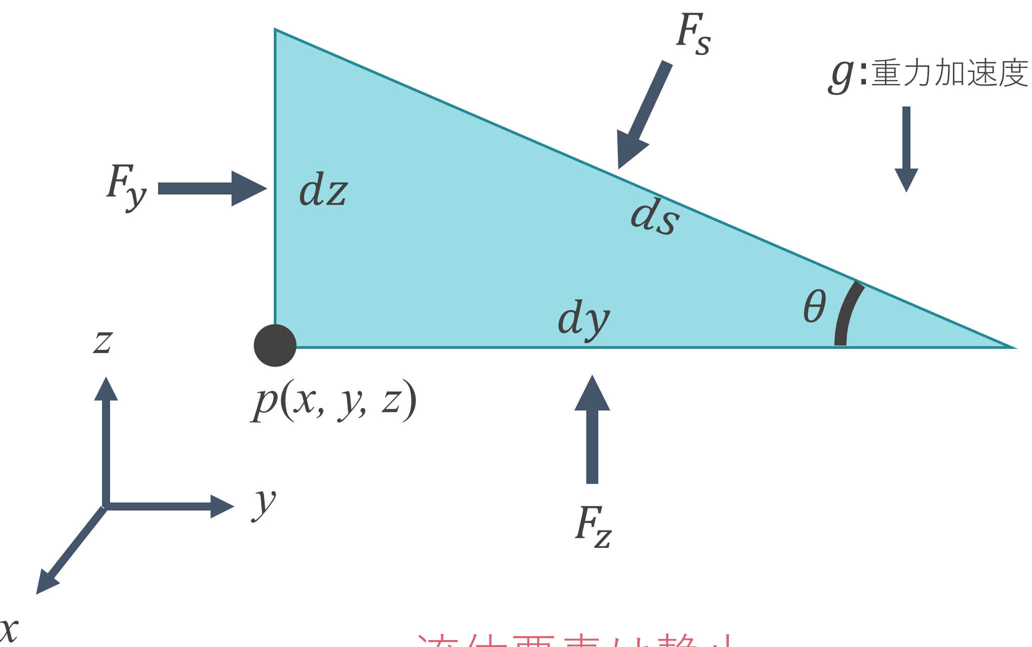


剪断応力は生じていない

圧力はベクトルか？スカラーか？

x方向に微小長さdxの三角柱型要素

$$p = \frac{F}{A}$$



流体要素は静止

力のバランス　$\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

z方向

$$p_z\, dx\, dy - p_s ds\, dx \cos\theta - \rho g\, dV = \rho\, dV\, a_z$$

$$dV = \frac{dz\,dy}{2} dx \text{:微小体積}$$

$$dy = ds \cos\theta$$

$$p_z - p_s - \rho g \frac{dz}{2} = \rho a_z \frac{dz}{2}$$

極限を取ると$(dz \to 0, dy \to 0, dx \to 0)$

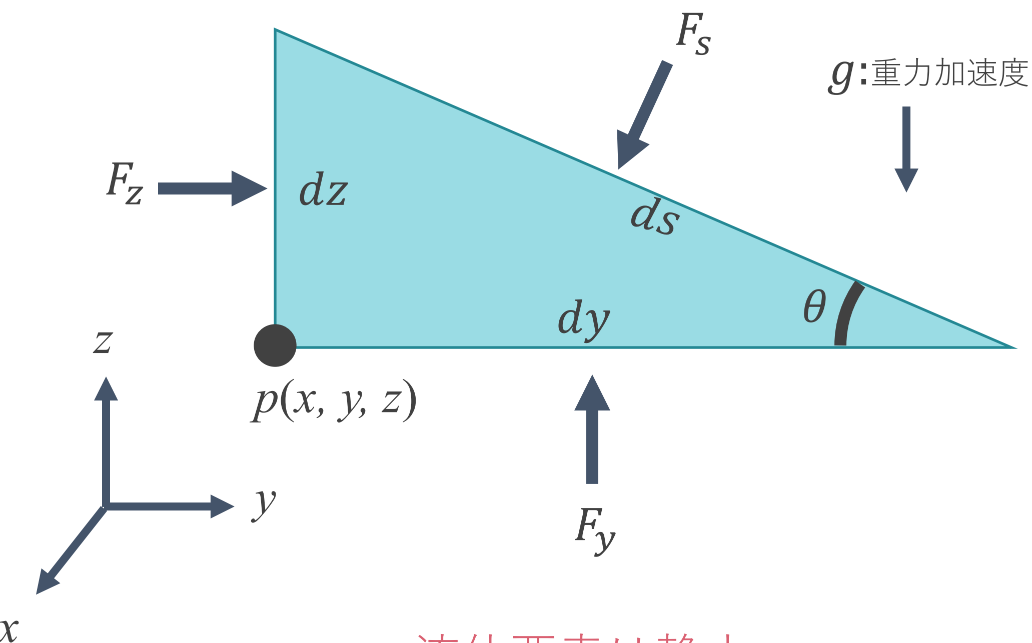
$$\lim_{dz\to 0}\left(p_z - p_s - \rho g \frac{dz}{2}\right) = \lim_{dz\to \mathbf{0}}\left(\rho a_z \frac{dz}{2}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow p_z = p_s}$$

圧力はベクトルか？スカラーか？

$\boxed{x\text{方向に微小長さ}dx\text{の三角柱型要素}}$

$p = \dfrac{F}{A}$

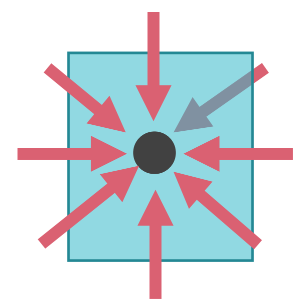


流体要素は静止

力のバランス $\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

y方向も同様
x方向も$z - x$平面で考えて同様

$\boxed{p_z = p_x = p_y = p_s}$



pは方向によらないスカラー
空間の点関数として

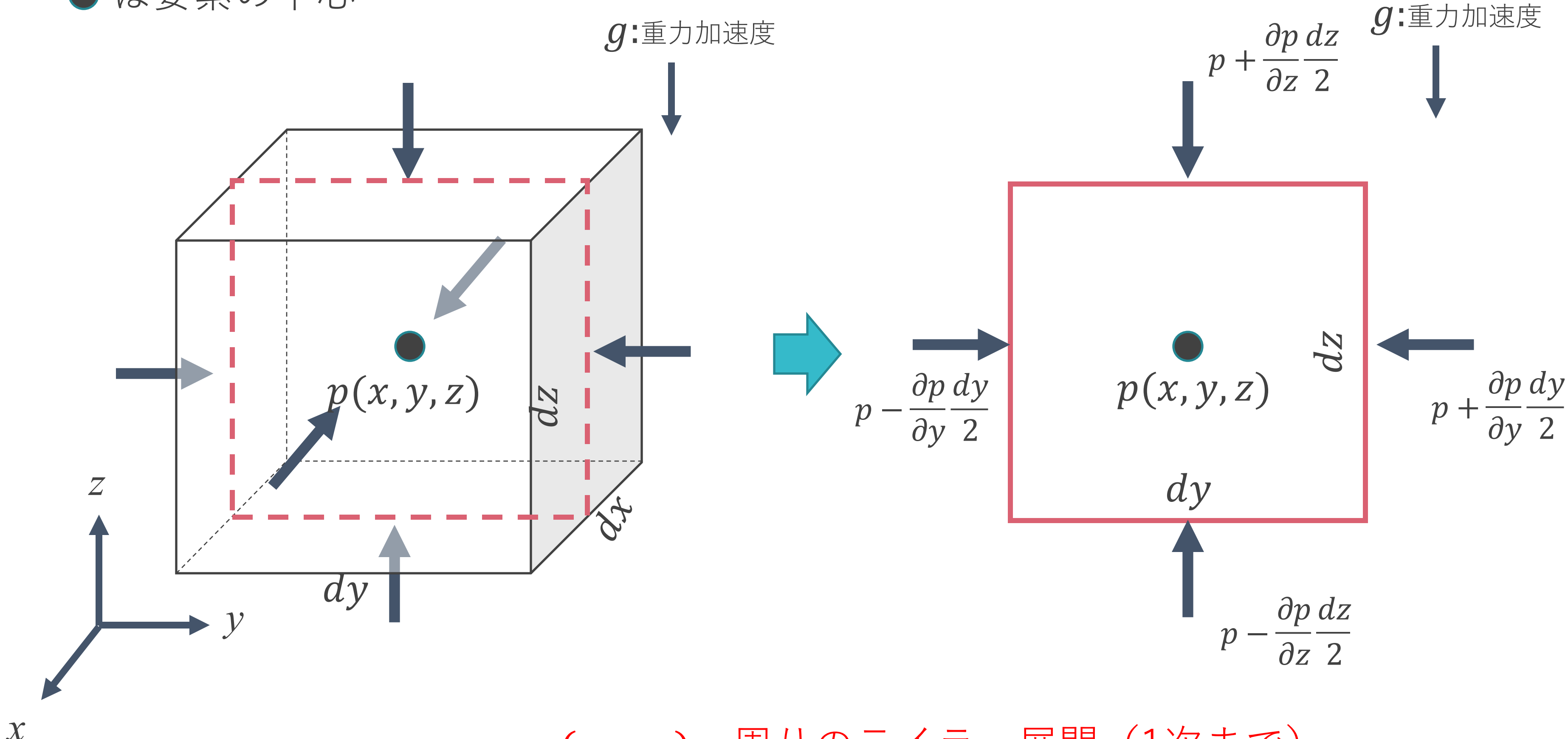
$$p = p(\boldsymbol{x})(= p(x, y, z))$$

とかける。

パスカルの定理

微小要素にかかる力のバランス（静止流体）

● は要素の中心



$p(x,y,z)$　周りのテイラー展開（1次まで）

微小要素にかかる力のバランス（静止流体）

y方向の力

$$\left[p-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dz\,dx-\left[p+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dz\,dx=\rho\,dV\,a_y$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\,a_y$$

x方向の力も同様

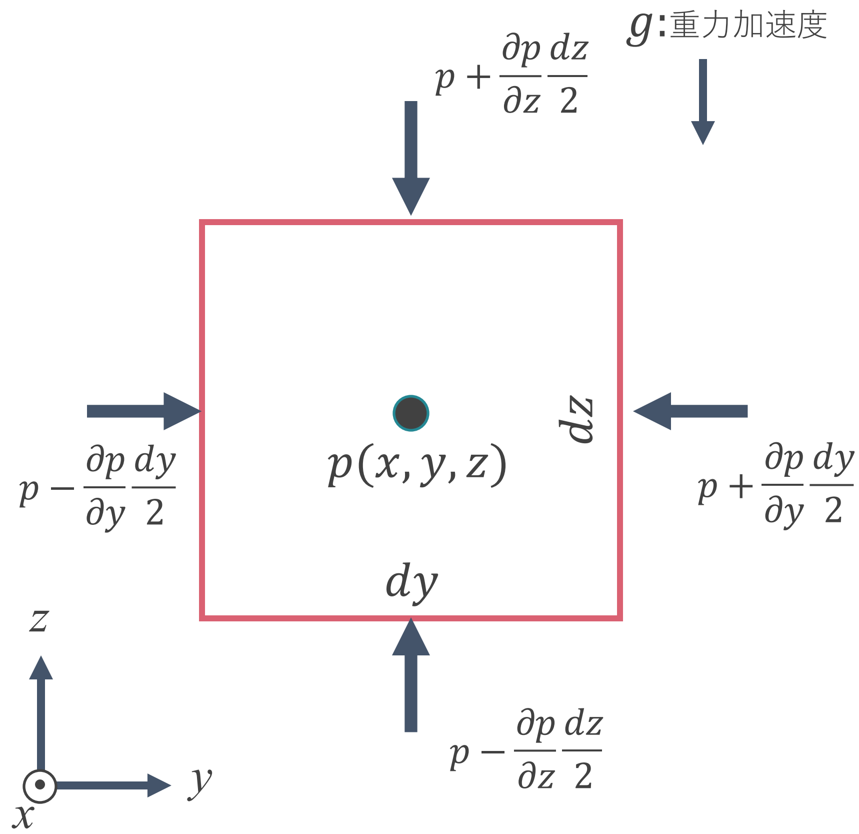
$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\,a_x$$

---

z方向の力（重力方向）

$$\left[p-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dz\,dx-\left[p+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dz\,dx-\rho g\,dV$$
$$=\rho\,dV\,a_z$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g=\rho\,a_z$$



微小要素にかかる力のバランス（静止流体）

y方向の力

$$\left[p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right] dz\,dx - \left[p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right] dz\,dx = \rho\,dV\,a_y$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\,a_y$$

x方向の力も同様

$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\,a_x$$

---

z方向の力（重力方向）

$$\left[p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right] dz\,dx - \left[p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right] dz\,dx - \rho g\,dV = \rho\,dV\,a_z$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = \rho\,a_z$$

圧力による力＝圧力勾配

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k} \equiv -\nabla p$$

重力も入れた力のバランスは

$$-\nabla p - \rho\boldsymbol{g} = \rho\boldsymbol{a} \quad \text{, where } \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

＊剪断応力をここでは無視

静止流体中では

$$-\nabla p - \rho\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

つまり

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}$$

圧力と深さの関係

$$-\nabla p = \rho \boldsymbol{g}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

圧力はzのみの関数

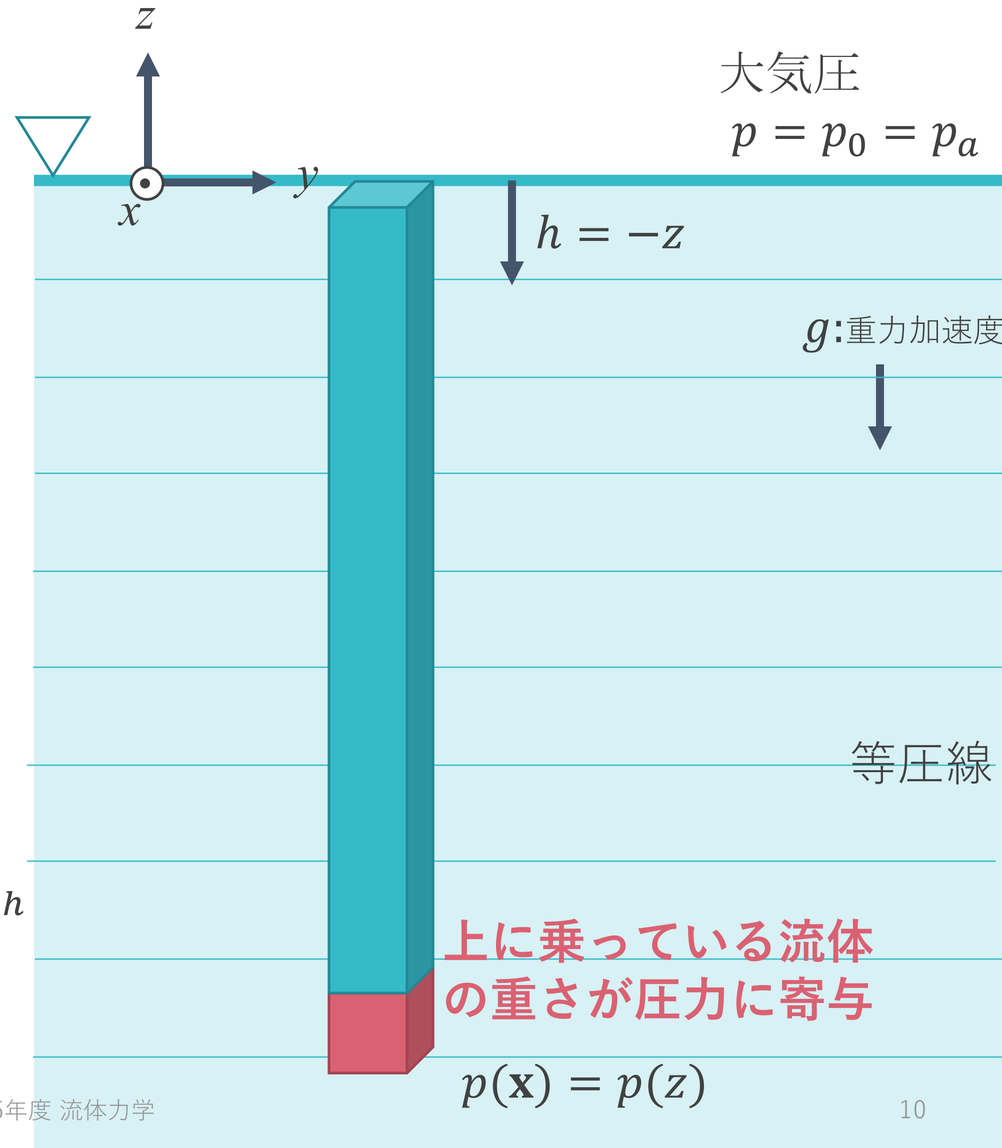
$$p = p(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

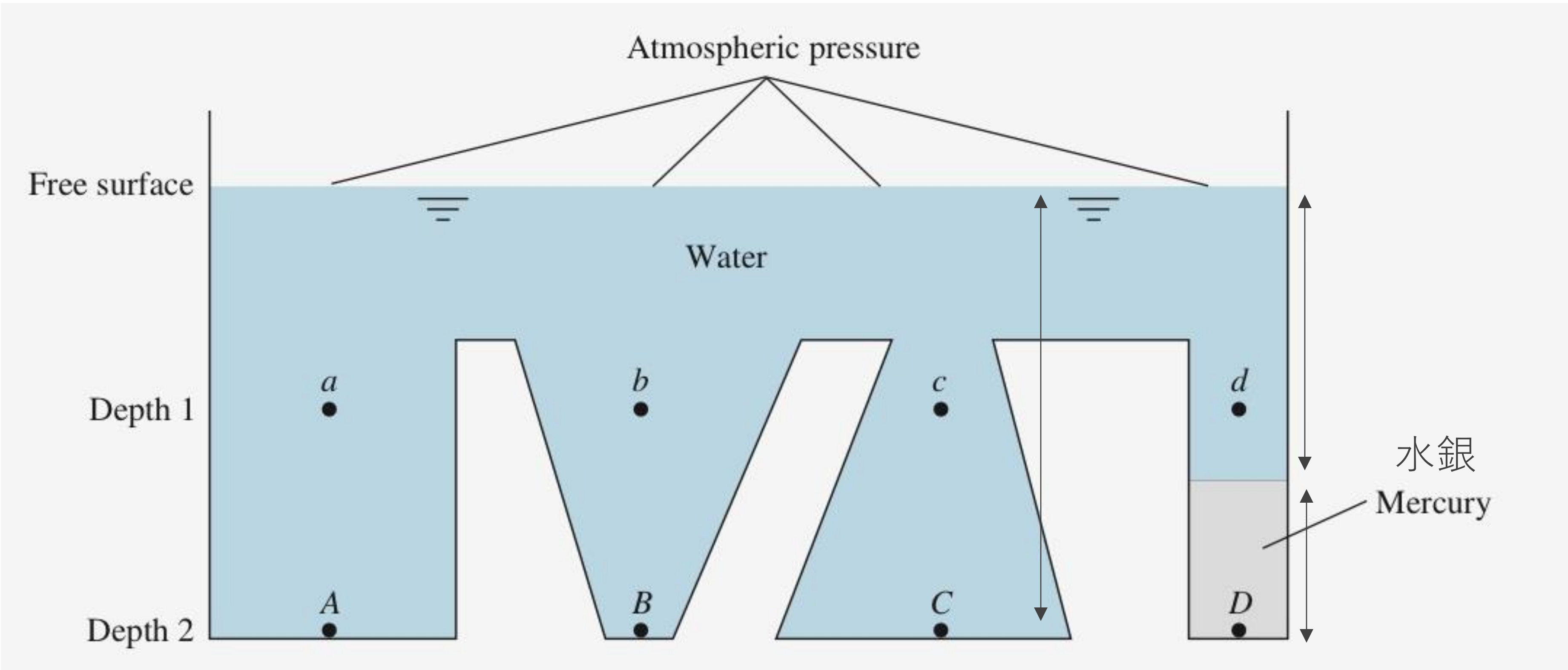
$$p - p_0 = -\int \rho g \, \mathrm{dz}$$

$$p = p_0 - g\int \rho \mathrm{dz} \xrightarrow[\text{非圧縮}]{} p = p_0 - \rho g z \Big|_0^{-h}$$

$$= p_0 + \rho g h$$



同じ深さでの圧力は等しい

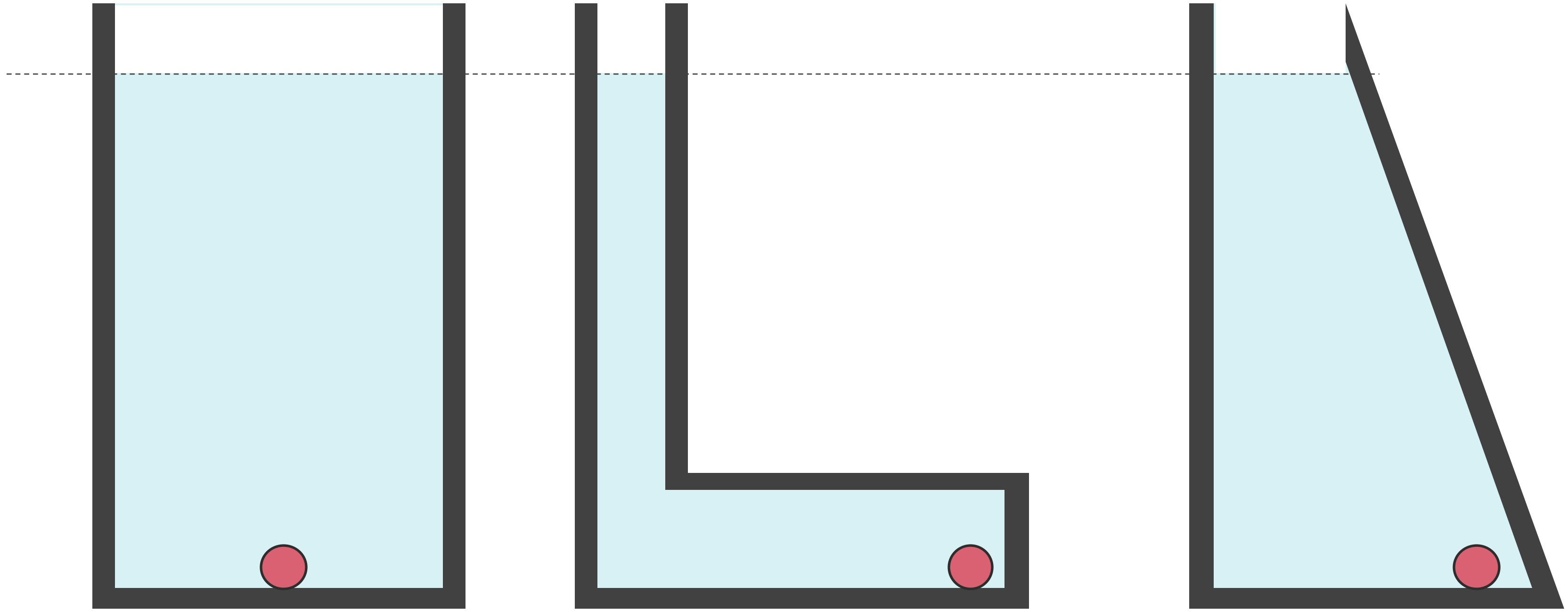


Fluid Mechanics 8th ed, F. M. White.

1) $p_a = p_b = p_c = p_d$

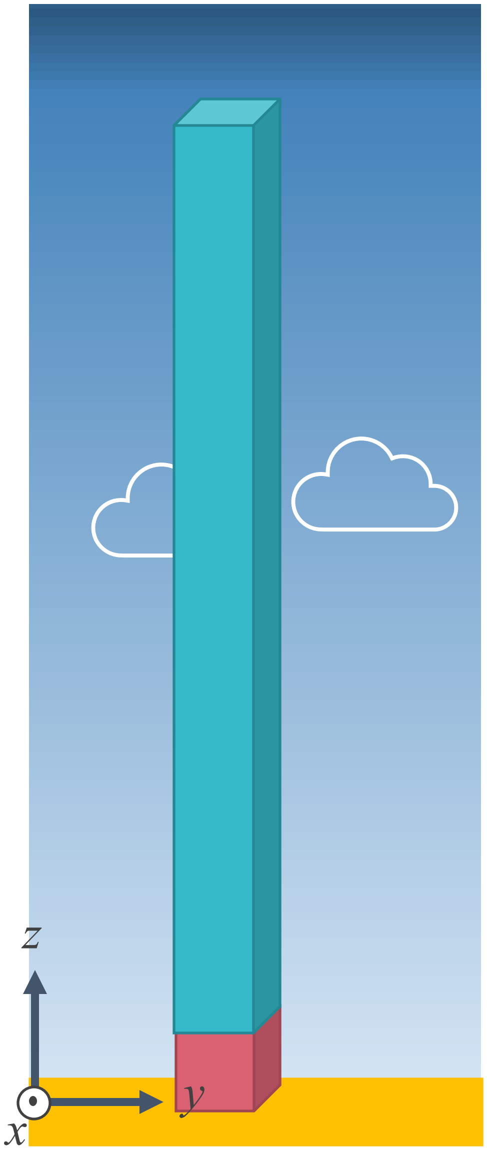
2) $p_A = p_B = p_C < p_D$

同じ深さでの圧力は等しい



底面積が同じなら、底面での圧力はどこも同じ

大気圧，空気の柱



運動方程式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

理想気体　状態方程式

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

R:気体定数
T:温度

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{RT}g$$

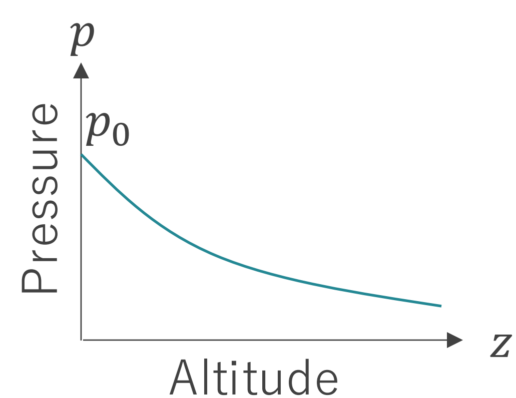
$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}dz$$

ここで，Tが定数であるとする（高さ方向の変化が無い）

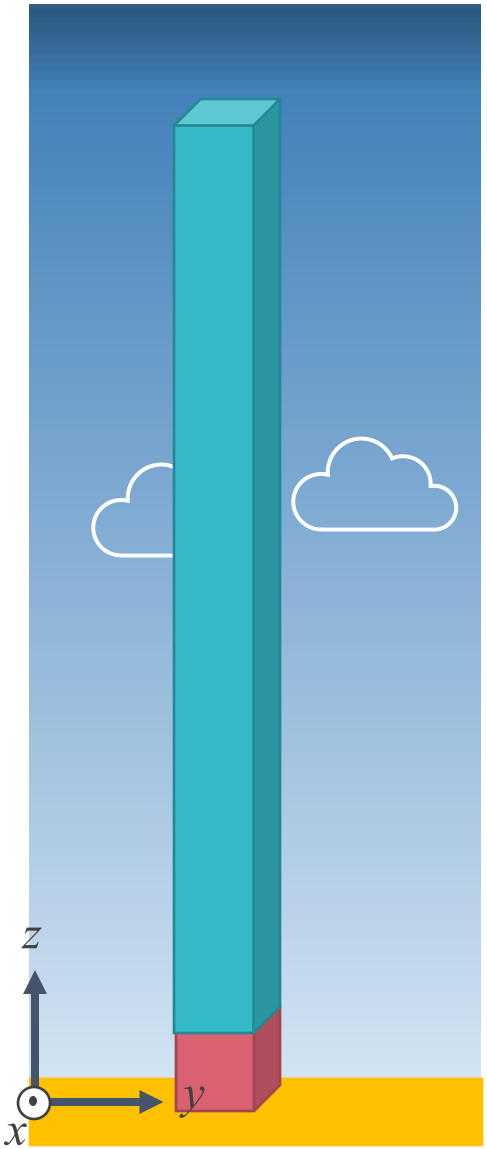
$$\ln p = -\frac{g}{RT}z + \ln C$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-\frac{gz}{RT}}}$$

$* \ C = p_0$とした。



大気圧，空気の柱（演習）

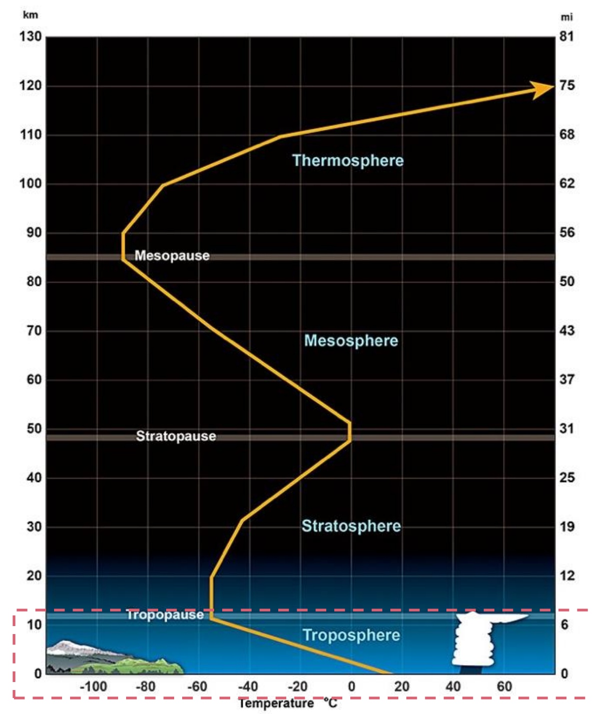


運動方程式

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}dz$$

一般に温度は一定でなく，高さの関数である。
ここで、以下の式で温度が表せるとする。

$$T = T_0 - \beta z \qquad \beta:\text{定数}$$



https://www.weather.gov/jetstream/layers

演習：圧力分布を求めよ。

$$\boxed{p = p_0\left(1 - \frac{\beta z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\beta}}}$$

演習解答

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}dz$$

$$T = T_0 - \beta z \quad \beta:\text{定数}$$

$$dT = -\beta dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}dz$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{g}{\beta RT}dT$$

積分

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{g}{\beta RT}dT$$

$$\ln|p| = \frac{g}{\beta R}\ln|T| + \ln C$$

絶対圧かつ非完全真空： $p > 0$
絶対温度かつ非絶対零度： $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - \beta z > 0$

$$\ln p = \frac{g}{\beta R}\ln T + \ln C$$

$$\ln p = \ln T^{\frac{g}{\beta R}} + \ln C$$

$$p = C(T_0 - \beta z)^{\frac{g}{\beta R}}$$

$z = 0$で$p = p_0$より

$$p_0 = CT_0^{\frac{g}{\beta R}}$$

$$C = p_0 T_0^{-\frac{g}{\beta R}}$$

$$\therefore p = p_0 T_0^{-\frac{g}{\beta R}}(T_0 - \beta z)^{\frac{g}{\beta R}}$$

$$= p_0 T_0^{-\frac{g}{\beta R}} T_0^{\frac{g}{\beta R}}\left(1 - \frac{\beta z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\beta R}}$$

$$\boxed{p = p_0\left(1 - \frac{\beta z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\beta R}}}$$

大気圧の力

大気圧
101 kPa = 101,000 N/m^2

= 10.1 N/cm^2

1 cm^2 あたり 1 キロの
物が乗っている状態

Lecture by MIT Prof. Walter Lewin

https://youtu.be/O_HQklhIlwQ?t=2070

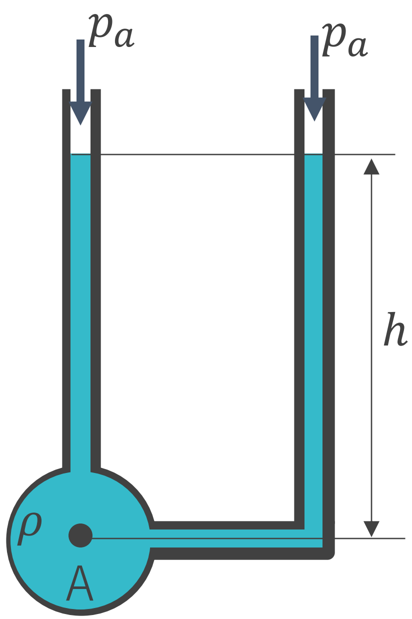
圧力を「高さ」で

圧力は液柱の**高さ**で表せる。この高さを水頭あるいはヘッドと呼ぶ。

$$p - p_0 = \rho g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p - p_0}{\rho g}$$

圧力の次元 → 長さの次元

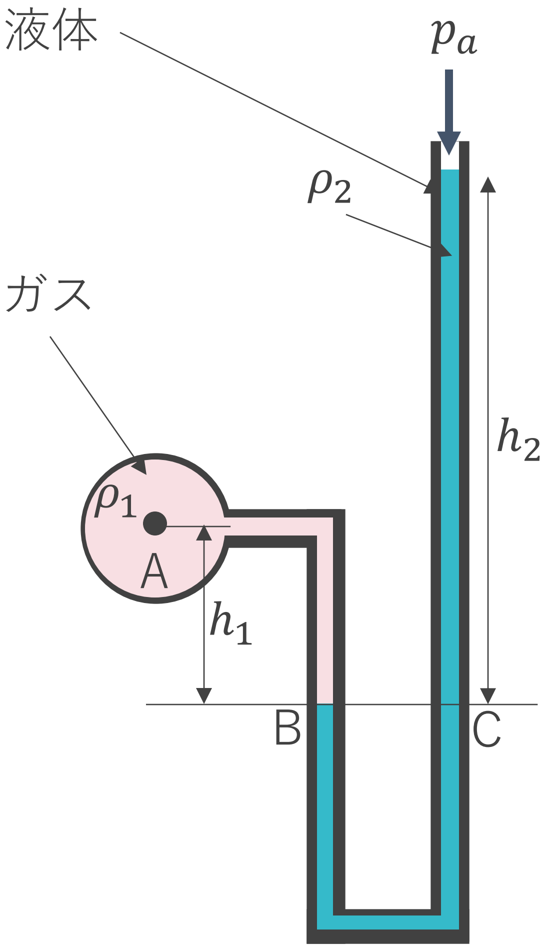
液柱の高さを計ることで流体の圧力を測定する計器を**マノメータ**という。



Aでの絶対圧力は

$$p = p_a + \rho g h$$
$$= p_a + \gamma h$$

U字管マノメータ



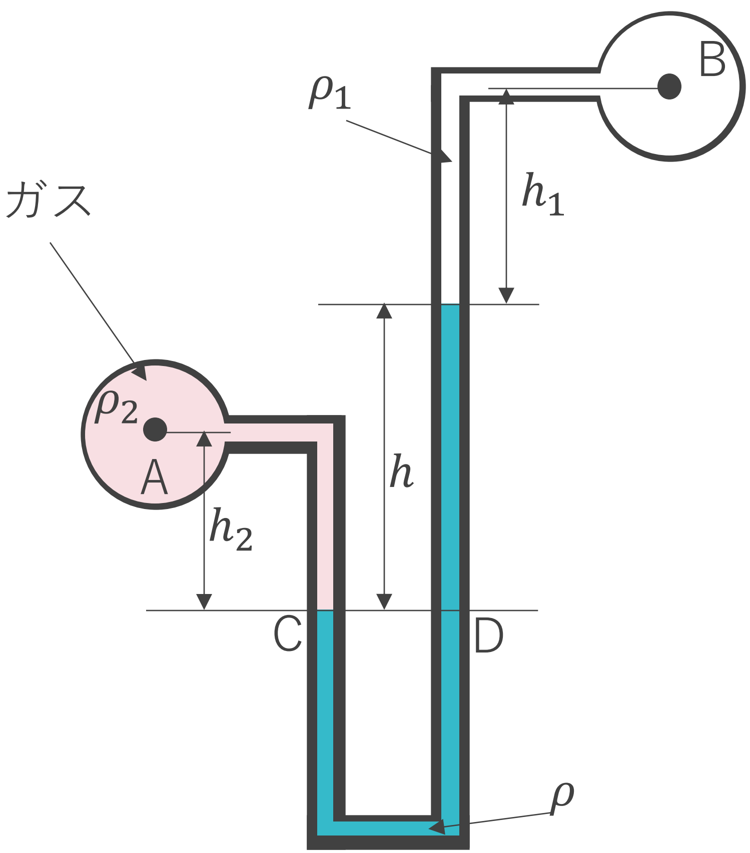
Aでのガスの圧力を計測する

液体中のB, Cでの圧力は等しい

$$p_A + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2$$

$$\therefore p_A = p_a + g(\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1)$$

U字管示差マノメータ



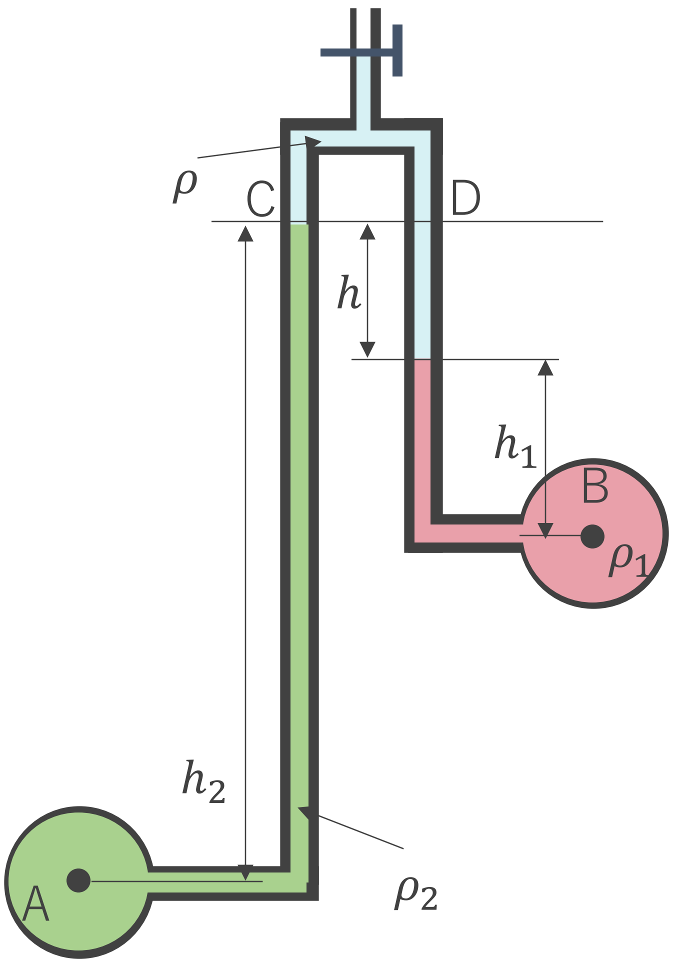
AとBの**圧力差**を計測する

液体中のC, Dでの圧力は等しい

$$p_A + \rho_2 g h_2 = p_B + \rho_1 g h_1 + \rho g h$$

$$\therefore p_A - p_B = g(\rho_1 h_1 + \rho h - \rho_2 h_2)$$

逆U字管示差マノメータ

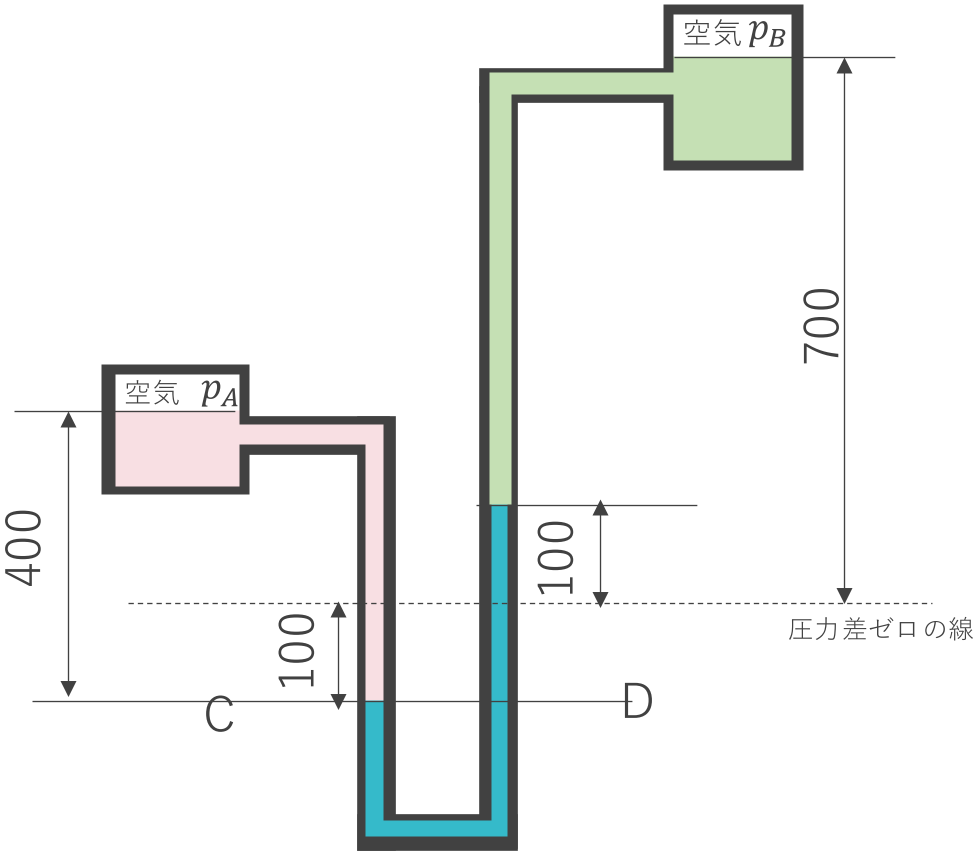


AとBの**圧力差**を計測する
*上部に液体より小さい密度の流体（気体）

$$p_A - \rho_2 g h_2 = p_B - \rho_1 g h_1 - \rho g h$$

$$\therefore p_A - p_B = g(\rho_1 h_1 + \rho h - \rho_2 h_2)$$

計算してみよう



課題2
圧力差 $\Delta p = p_A - p_B$ を求めよ。

物質	**密度[kg/m³]**
ベンジン	0.868 x 10^3
グリセリン	1.255 x 10^3
水銀	13.520 x 10^3

重力加速度 $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

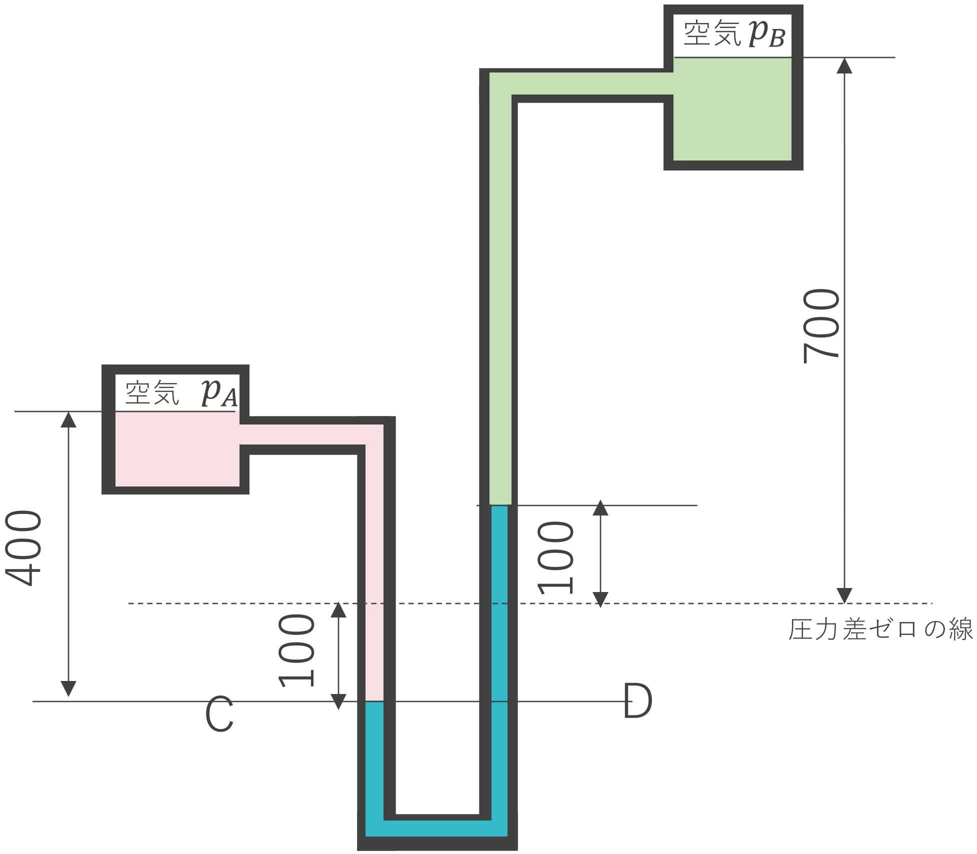
長さの単位はmm

演習解答

課題2
圧力差 $\Delta p = p_A - p_B$ を求めよ。

物質	密度[kg/m³]
ベンジン	0.868×10^3
グリセリン	1.255×10^3
水銀	13.520×10^3

重力加速度 $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$



長さの単位はmm

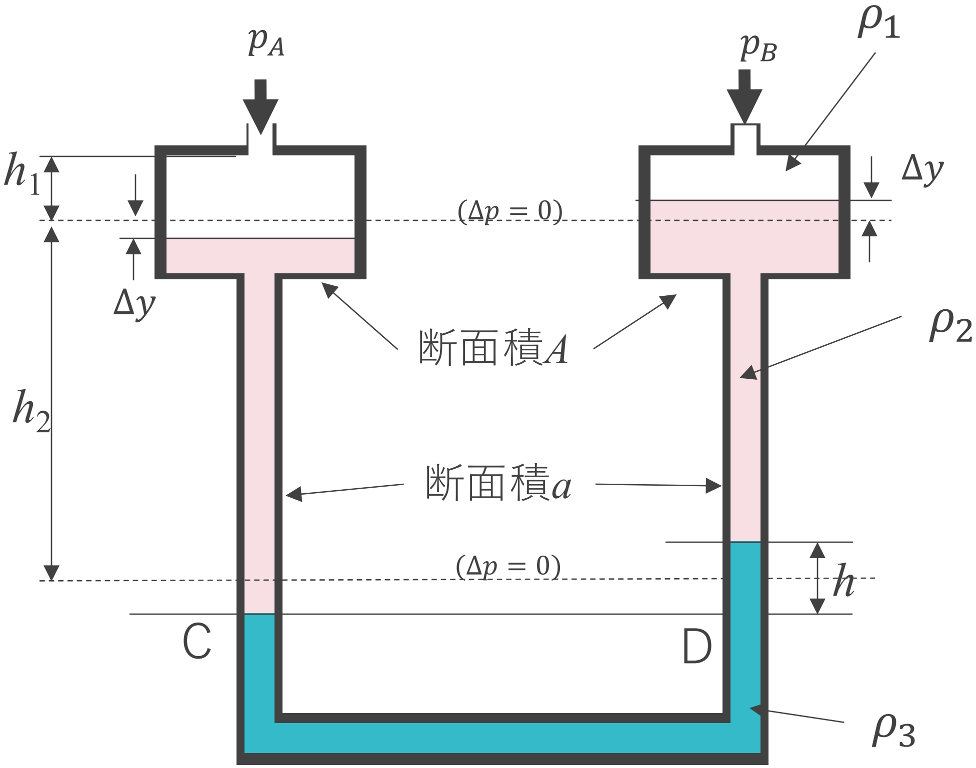
Cでの圧力
$p_C = p_A + 0.4 \times 1255 \times 9.81$

Dでの圧力
$p_D = p_B + (0.7 - 0.1) \times 868 \times 9.81 + (0.1 + 0.1) \times 13520\ \times 9.8$

$p_C = p_D$ より
$p_A - p_B \approx 26.7 \times 10^3$ Pa $= 26.7$ kPa

微圧計

2 液微圧マノメータ



二つの液体は混合しにくいとする

$$\boxed{\text{圧力差 } \Delta p = p_A - p_B \text{ を求める。}}$$

点Cにおける圧力は

$$p_A + \rho_1 g(h_1 + \Delta y) + \rho_2 g\left(h_2 + \frac{h}{2} - \Delta y\right)$$

点Dにおける圧力は

$$p_B + \rho_1 g(h_1 - \Delta y) + \rho_2 g\left(h_2 - \frac{h}{2} + \Delta y\right) + \rho_3 g h$$

両者を等しいとし，式を整理すると

$$p_A - p_B = \rho_3 g h - \rho_2(h - 2\Delta y) - 2\rho_1 \Delta y$$

非圧縮流体で体積一定を考慮すると

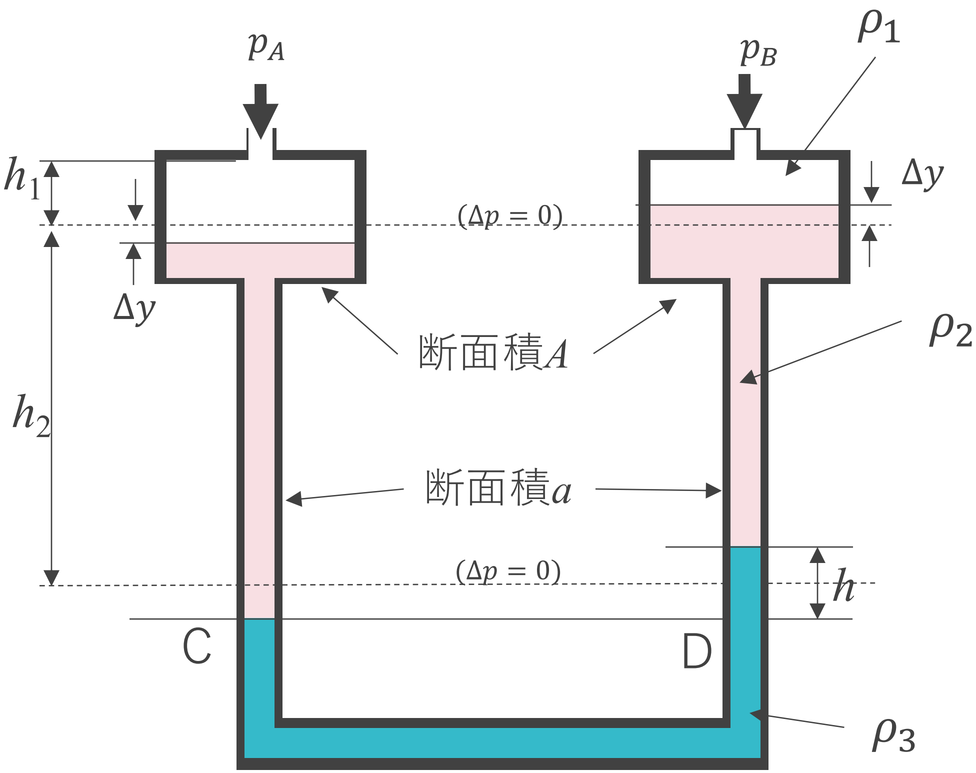
$2\Delta y A = ha$ より

$$\boxed{p_A - p_B = hg\left\{\rho_3 - \rho_2\left(1 - \frac{a}{A}\right) - \rho_1 \frac{a}{A}\right\}}$$

微圧計

2 液微圧マノメータ

$$p_A - p_B = hg\left\{\rho_3 - \rho_2\left(1 - \frac{a}{A}\right) - \rho_1 \frac{a}{A}\right\}$$



二つの液体は混合しにくいとする

$\frac{a}{A} \ll 1$ とすると

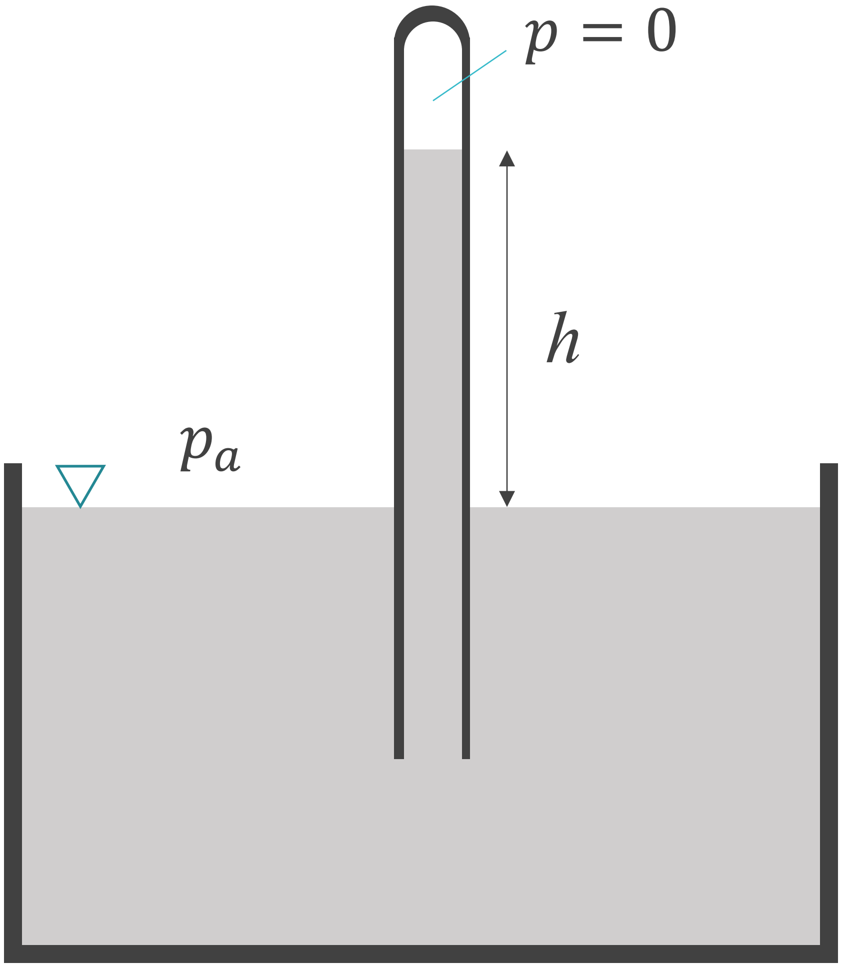
$$p_A - p_B \approx (\rho_3 - \rho_2)gh$$

$(\rho_3 - \rho_2)$が小さいほど，hの読みが拡大

=> **圧力計の高感度化**

水銀柱のヘッドによる圧力表示　mmHg

トリチェリの実験



$$p_a = \rho_{Hg} g h$$

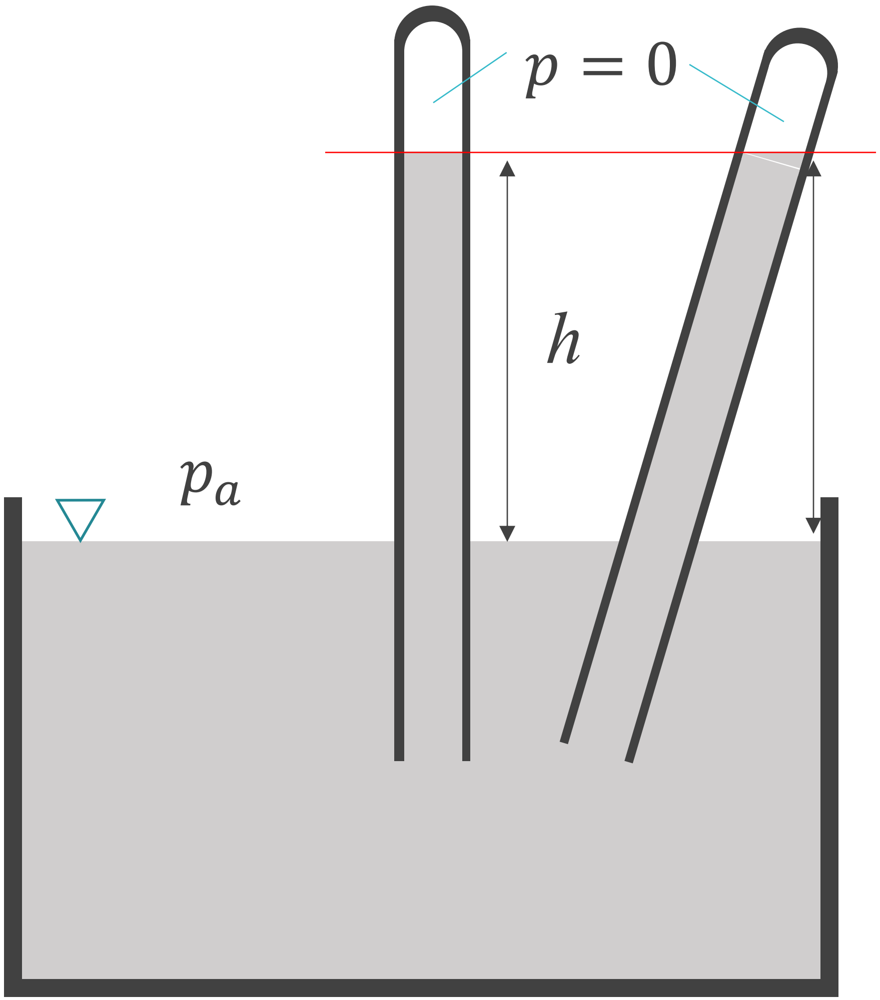
$p_a = 101\mathrm{kPa}$ なら
$h \approx 760\mathrm{mm}$

水で同様のことをしたら高さは何倍？

物質	密度[kg/m³]
水	1.00×10^3
水銀	13.5×10^3

水銀柱のヘッドによる圧力表示　mmHg

トリチェリの実験



$$p_a = \rho_{Hg} g h$$

$p_a = 101\mathrm{kPa}$ なら
$h \approx 760\mathrm{mm}$

水で同様のことをしたら高さは何倍？

物質	密度[kg/m³]
水	1.00×10^3
水銀	13.5×10^3

次回予告：静水力学(2)

水面下に沈んだ物体にかかる力を考える。

・**断面２次モーメントの復習を推奨**