機械情報工学科 **流体力学**

第４回

流体の運動（１）

運動の記述法と流線・流跡線・流脈線

亀谷 幸憲

流体デザイン研究室

kametaniy@meiji.ac.jp

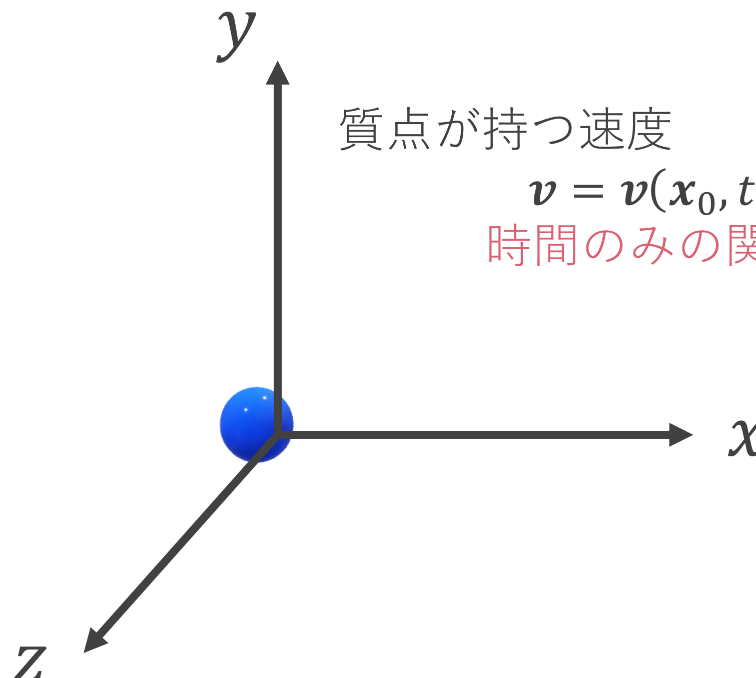
流体運動の記述法

復習：質点の運動

L. A. Dodgers
https://youtu.be/cSsugAnNq2k?si=vwCOgK1IdZb9B0re

ニュートン力学　第２法則

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\dot{\boldsymbol{v}} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$$



質点が持つ速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, t)$$

時間のみの関数

下添字0は初期時刻$t = t_0$を表す

初期位置

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

初速度

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

力

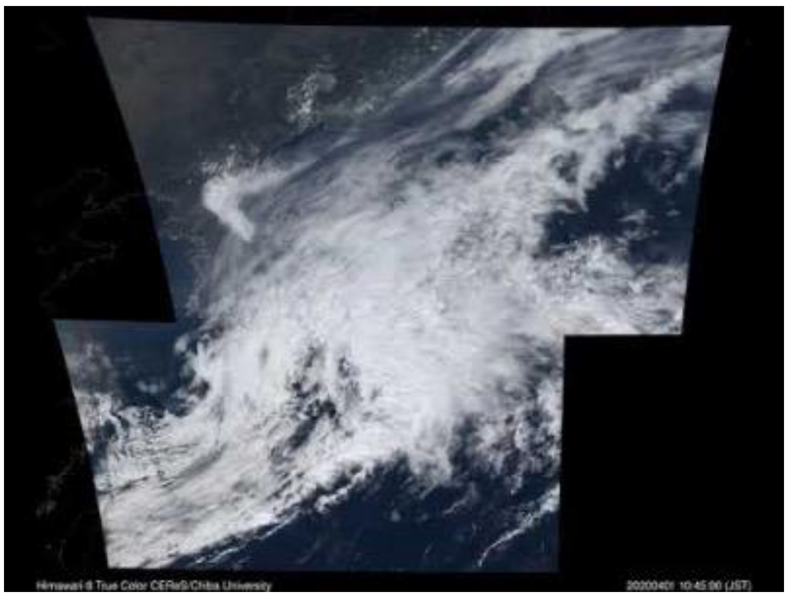
$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix}$$

流体運動の記述法

流体の運動　　　　　　　ニュートン則(単位体積あたりで設定)

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{a} = \rho \dot{\boldsymbol{v}} = \rho \ddot{\boldsymbol{x}}$$

気象衛星



https://youtu.be/cgS_kWrECEc

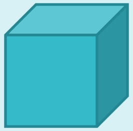
水路、円柱周り流れ

https://youtu.be/30_aADFVL9M

流体運動の記述法：
ラグランジュ法とオイラー法

・時々刻々変わる非定常流れ
・微小要素の集合する連続体

流体の微小要素の動きを追う
ラグランジュ法



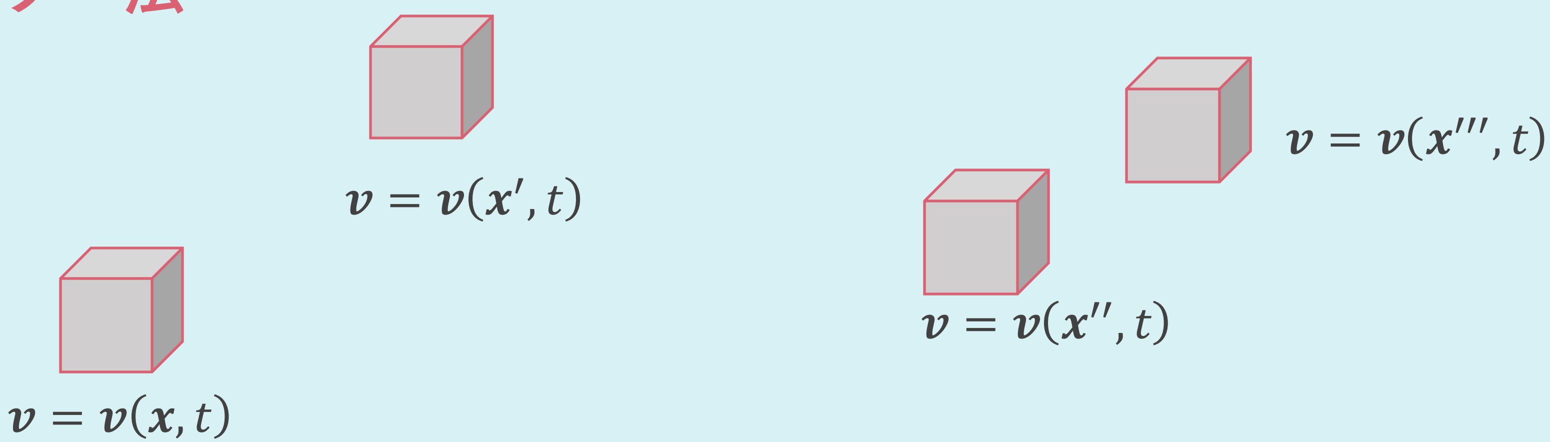
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, t)$$

流体運動の記述法：
ラグランジュ法とオイラー法

・時々刻々変わる非定常流れ
・微小要素の集合する連続体

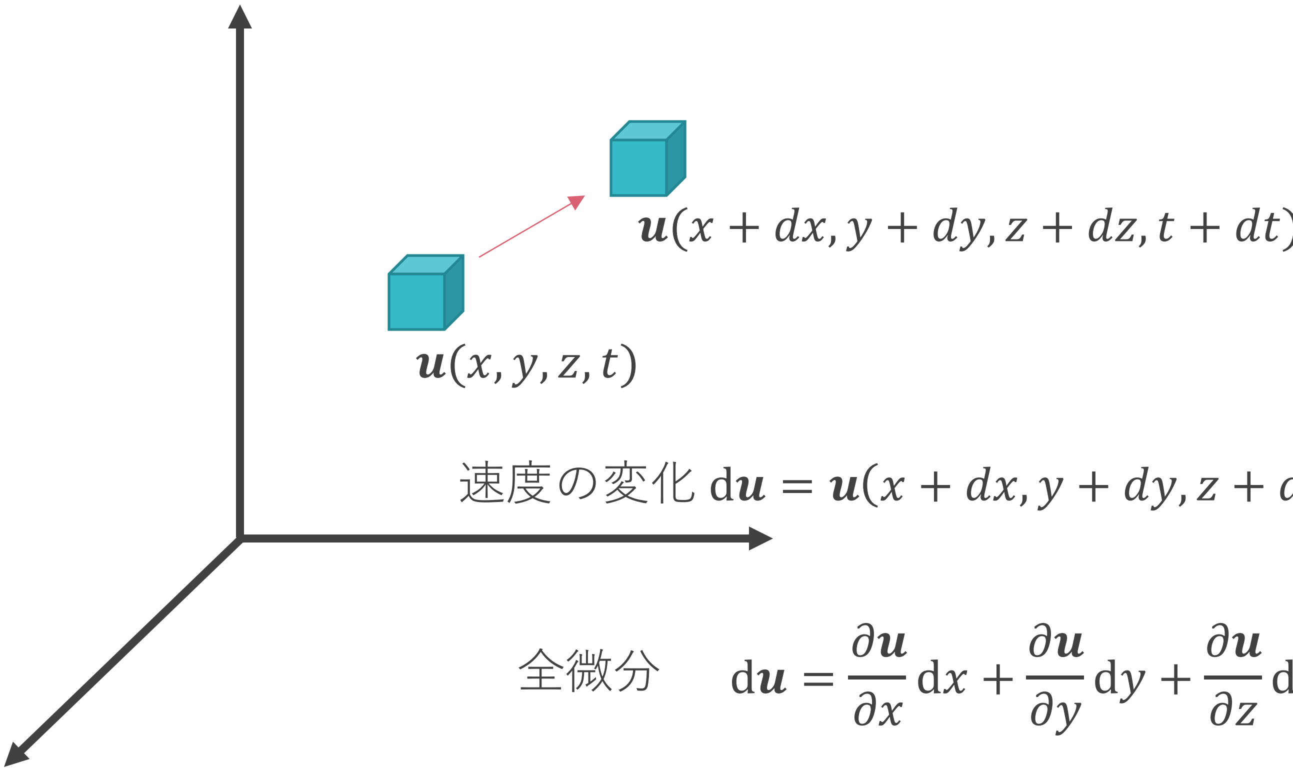
観測窓を固定してそれぞれの位置での速度を観測。（流れていく流体要素は追わない）

オイラー法



流れ場（速度場）の変化の記述

流体要素の変形が大きく，多くの要素を追い続けるのは困難
=> **多くの場合オイラー法を用いる**



速度の変化 $\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \boldsymbol{u}(x, y, z, t)$

全微分 $$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

実質微分・物質微分・ラグランジュ微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\mathrm{t}} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{\mathrm{dx}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{\mathrm{dy}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{\mathrm{dz}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$$

$$= u\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$$

$$= \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \quad = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$$

明示のため表記置き換えて

$$\boxed{\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}}$$

- 物質微分
- 実質微分
- ラグランジュ微分

実質微分の成分

加速度

ラグランジュ法　　　　オイラー法

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}}_{\text{非定常項}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}}_{\text{対流項 or 移流項}}$$

非定常項

速度場の時間変化

対流項 or 移流項

流れによる輸送

加速度があっても，速度場が時間変化しているとは限らない。
定常流でも加速度は生じる。

速度の時間微分の観測法による違い

ラグランジュ法では時間のみの関数なので

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0, t) \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}(t)$$

オイラー法では位置は時間の関数であり，合成関数であるため

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} &= \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) + (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)\end{aligned}$$

見ている運動は同じ！　見方が異なるだけ！

運動方程式への展開

オイラー法では位置は時間の関数である。

$$\text{速度：}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\text{加速度：}\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$$

運動方程式(運動量保存則)に振り返ると,

$$\rho \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f} \quad \Longrightarrow \quad \rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}$$

流体に作用する力$\boldsymbol{f}$

復習：静水力学

$$0 = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} \qquad \boldsymbol{g}\text{:重力ベクトル}$$

流体要素の移動はないので，加速度は生じていない。
圧力勾配と重力が力に含まれる。

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

剪断応力（粘性）を考慮していない非粘性

オイラー方程式, Euler Equations

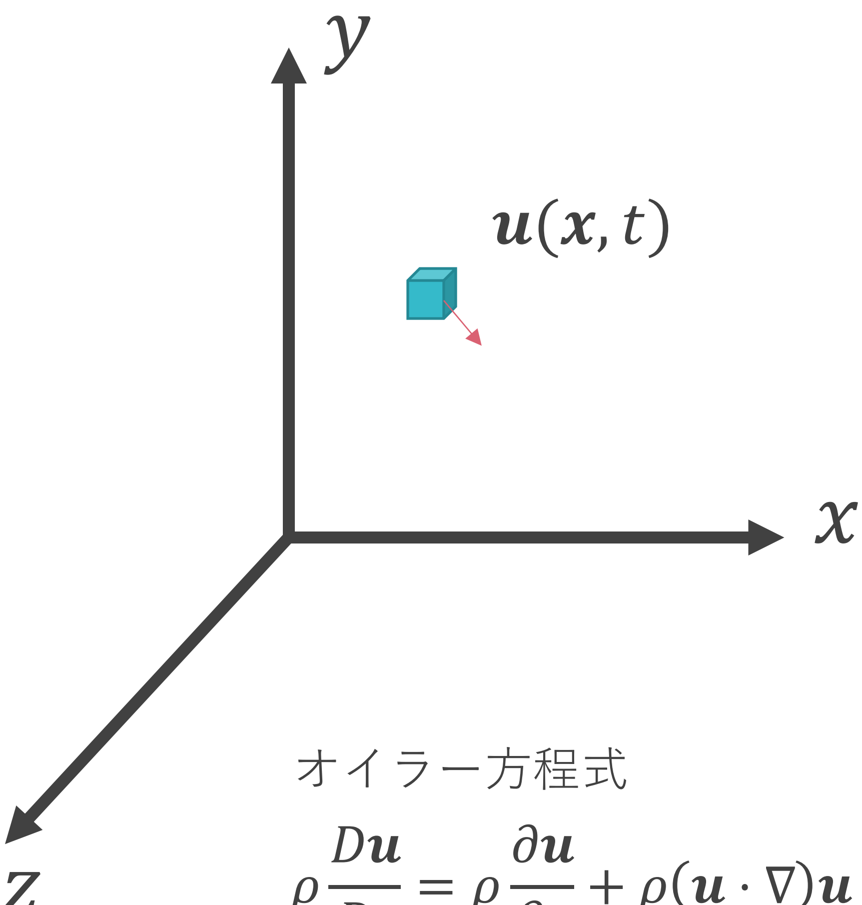
予告

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} + \nabla \boldsymbol{\tau}$$

粘性力

練習問題

デカルト座標系(x, y, z)に対応する速度ベクトルを(u, v, w)とする。
それぞれの方向のオイラー方程式を書き下せ



位置ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

速度ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

重力ベクトル

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

オイラー方程式

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

演習解答

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

流れの可視化・表示法

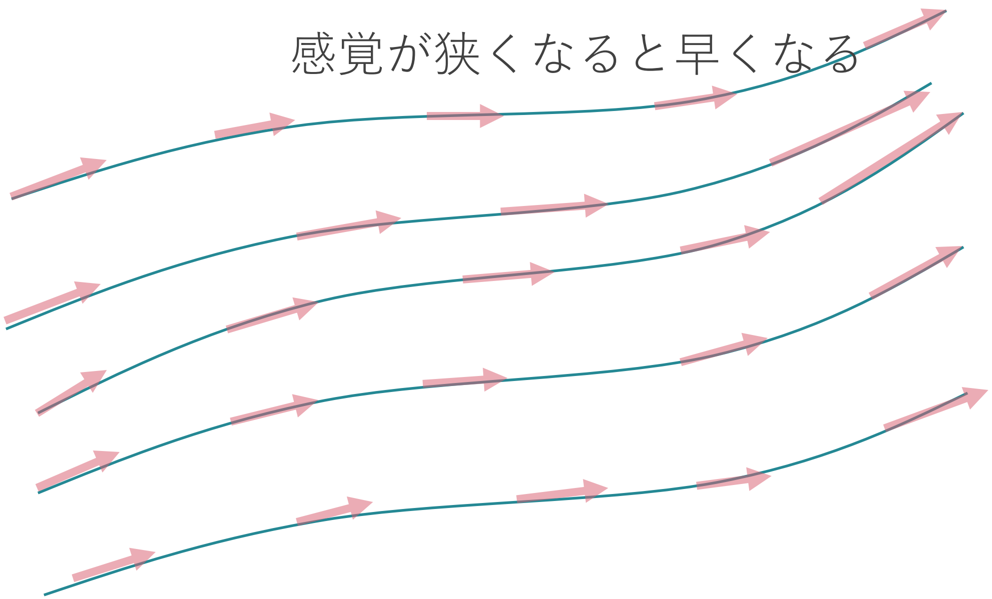
見えない流れ場をどのように可視化（Visualization)するか？

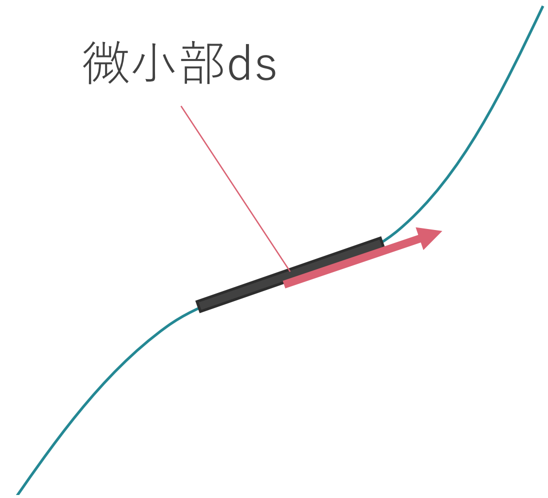
速度場を利用した「線」による可視化

1. 流線，Streamline
2. 流跡線，Pathline
3. 流脈線，Streakline

流線，Streamline（ストリームライン）

ある瞬間の流れ場を考える。
瞬時の速度ベクトルに接する線を流線という。
空間全体を通して互いに交わることはない。





$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$とそこでの速度ベクトル$\boldsymbol{u}$は平行

デカルト座標系では

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

流跡線，Pathline（パスライン）

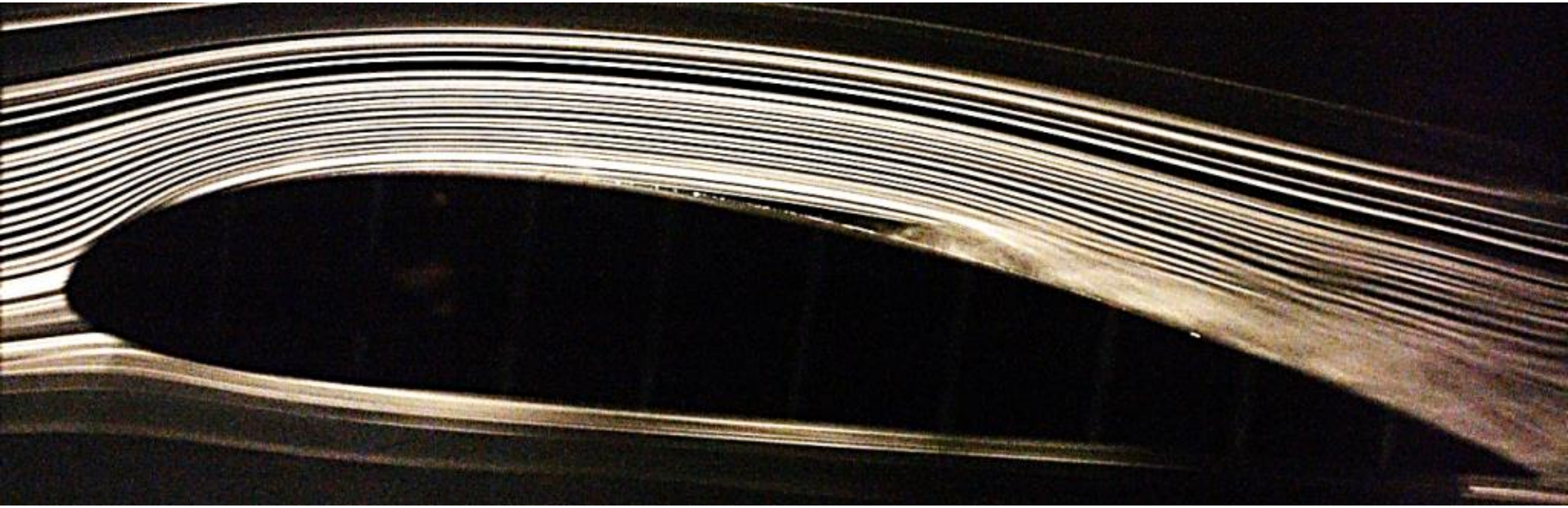
ある粒子が流れに乗って「たどった」位置を結んだ線。
粒子が流れる様子をカメラで長時間露光した写真に相当。

火花が周囲に拡散する様子を撮影したもの

https://en.wikipedia.org/wiki/Streamlines,_streaklines,_and_pathlines#/media/File:Kaberneeme_campfire_site.jpg

流脈線，Streakline（ストリークライン）

上流のある点から連続してされるマーカーが描く線。
インクや煙により可視化される。

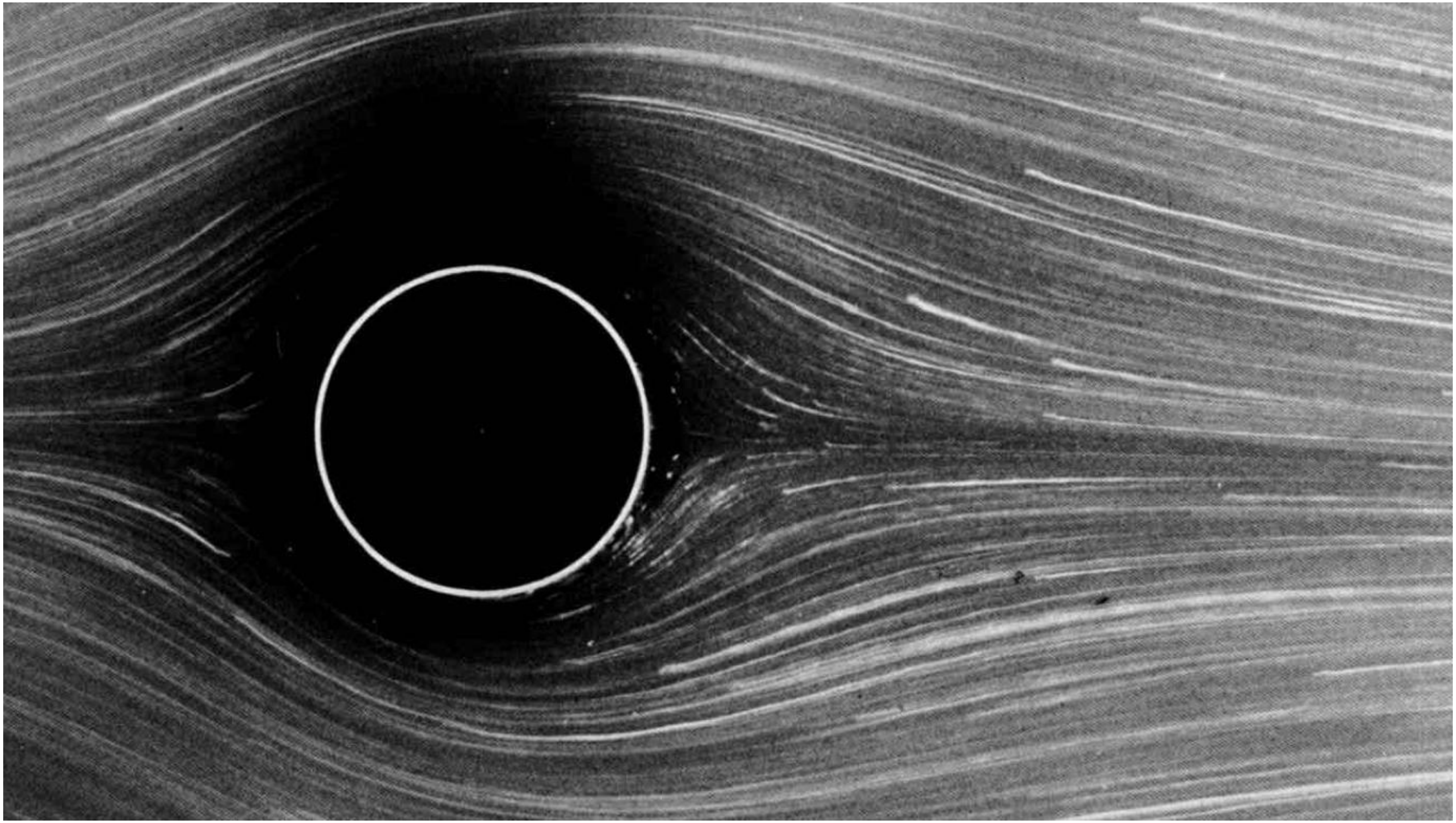


https://www.nal.res.in/en/techniques/smoke-flow-visualization

流線・流跡線・流脈線は定常流の場合はすべて一致する。

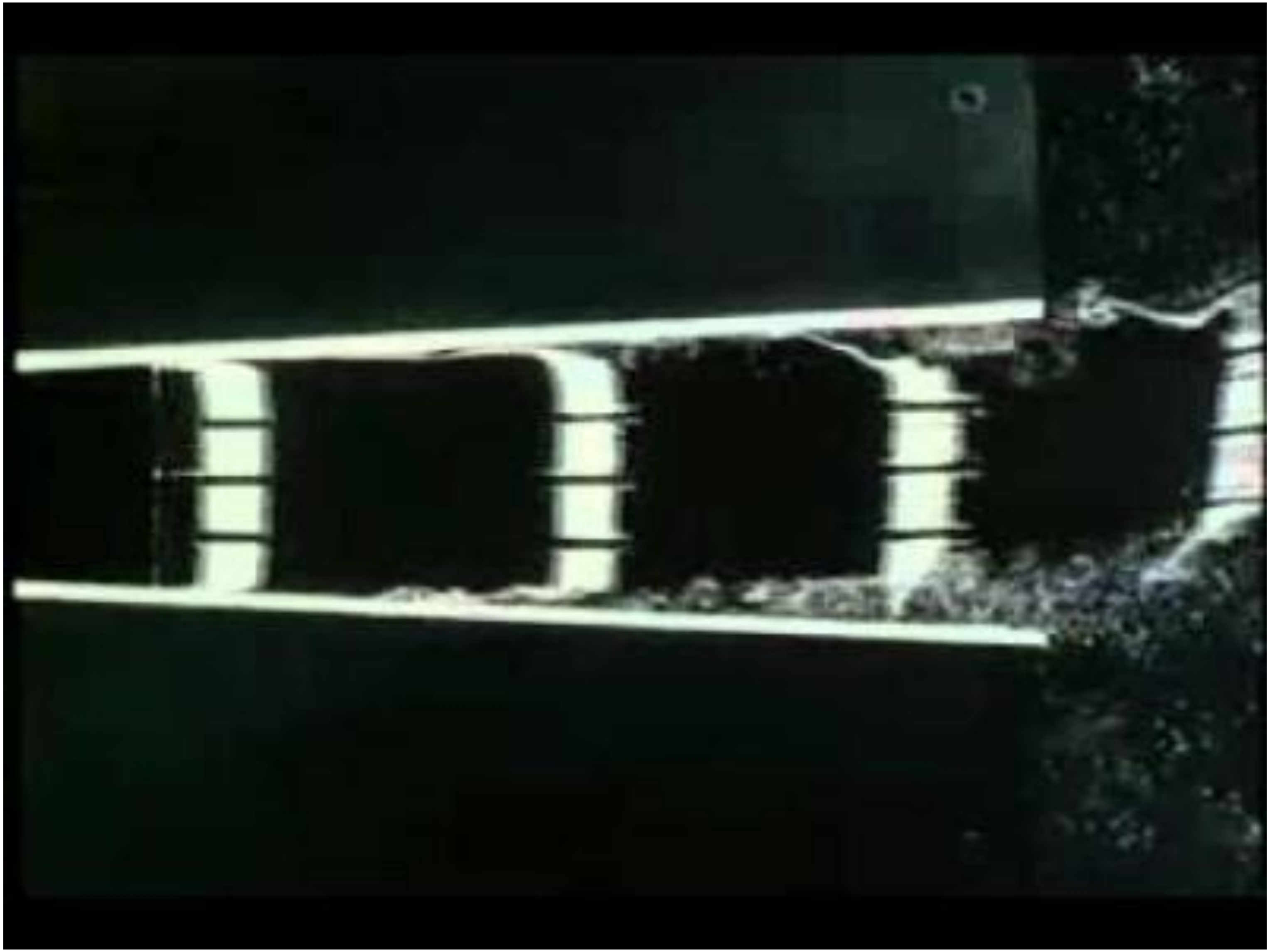
円柱周りの遅い流れ

Dyke M. V., “An album of fluid motion”



非定常の場合を実際に見てみよう

13:20まで



https://youtu.be/nuQyKGuXJOs

次回予告

粘性力を含む運動量保存（非圧縮Navier-Stokes方程式）導出

質量保存の導出（非圧縮連続の式）

エネルギー保存