

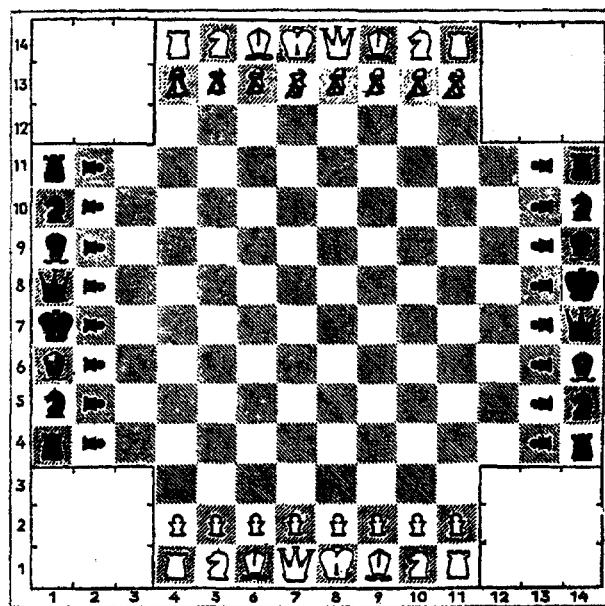
Авант
Мир Энциклопедий

Е. Я. ГИК

МАТЕМАТИКА
БИБЛИОТЕКА АВАНТЫ +
НА ШАХМАТНОЙ
ДОСКЕ

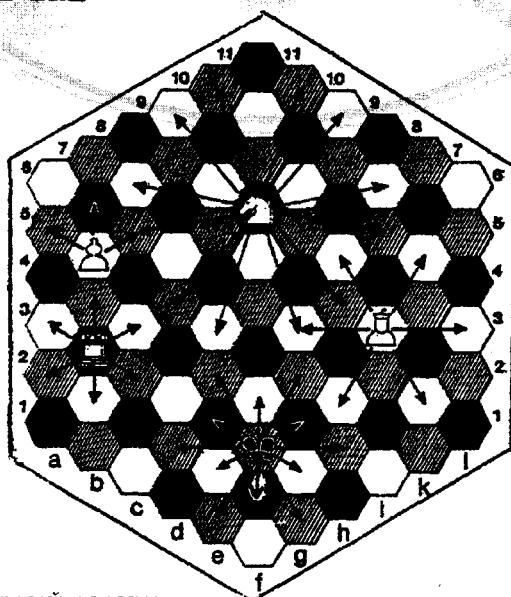


ОТ ЭЙЛЕРА И ГАУССА
ДО ЭРЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ
ЧЕМПИОНОВ



Е.Я. ГИК

МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ



МИР ЭНЦИКЛОПЕДИЙ АВАНТА+

АСТРЕЛЬ

МОСКВА

УДК 510 : 794
ББК 22.12 + 75.581
Г46

БИБЛИОТЕКА АВАНТЫ+

Заведующая редакцией А. Голосовская
Арт-директор Е. Евлахович
Ответственный редактор А. Русакова

Гик, Е. Я.

Г46 Математика на шахматной доске / Е. Я. Гик. — М.: Мир энциклопедий Аванта+, Астрель, 2009. — 317 [3] с.: ил. — (Библиотека Аванты+).

ISBN 978-5-98986-283-2 («Мир энциклопедий Аванта+»)

ISBN 978-5-271-23916-8 («Издательство Астрель»)

В книге математика, шахматиста и писателя Евгения Гика рассказывается о различных связях между шахматами и математикой. Рассматриваются многие типы шахматно-математических задач и головоломок: о разрезании и покрытии доски, о маршрутах, расстановках и перестановках фигур. Приводятся математические рекорды, исследуются геометрические свойства доски. Здесь вы найдете описание логических и занимательных игр на необычных досках, с необычными правилами и фигурами, а также обсуждение таких аспектов, как математика турнирных расписаний, вычисление рейтингов, достижения компьютеров в шахматной игре и анализ окончаний.

УДК 510 : 794
ББК 22.12 + 75.581

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.009937.09.08 от 15.09.2008 г.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953004 — литература научная и производственная.

Издание подготовлено при поддержке
ООО «Издательство Астрель», ООО «Издательство АСТ»

ISBN 978-5-98986-283-2 («Мир энциклопедий Аванта+»)
ISBN 978-5-271-23916-8 («Издательство Астрель»)

© ООО «Мир энциклопедий Аванта+», 2009
© Е. Я. Гик, текст, иллюстрации, 2009

От автора

У математики и шахмат много родственного. Выдающийся математик Г. Харди, проводя параллель между двумя этими видами человеческой деятельности, заметил как-то, что решение проблем шахматной игры есть не что иное, как математическое упражнение, а сами шахматы — насыщивание математических мелодий.

Формы мышления математика и шахматиста довольно близки, и не случайно математические способности нередко сочетаются с шахматными. Склонность к серьезным занятиям математикой в прежние времена проявлялась даже у чемпионов мира. Важные математические результаты принадлежат Эмануилу Ласкеру, математическое образование получил Макс Эйве, он возглавлял вычислительный центр в Голландии. Первый советский чемпион мира Михаил Ботвинник, доктор технических наук, много лет жизни отдал разработке алгоритма игры в шахматы, по существу, переквалифицировался в математика-прикладника. Отчасти это можно сказать и о Гарри Каспарове, способствовавшего развитию компьютерных шахмат иногда даже ценой собственной репутации (он первым из чемпионов мира проиграл матч компьютеру!). Яркими математическими способностями обладал в детстве Михаил Таль, а Анатолий Карпов поступил на механико-математический факультет МГУ, правда потом ради шахмат пожертвовал математикой.

Шахматная доска, фигуры и сама игра часто используются для иллюстрации математических понятий и задач. Шахматные примеры и термины встречаются в литературе по кибернетике, теории игр, теории графов и теории чисел, комбинаторике, теории вероятностей.

Еще одна точка соприкосновения — занимательная математика, ее популярный раздел, который мы называем *шахматной математикой*. Почти в каждом сборнике олимпиадных задач, в многочисленных книгах, посвященных математическим головоломкам и досугам, содержатся красивые и

остроумные задачи с участием доски и фигур. Многие из них имеют богатую историю, вызывали интерес у знаменитых математиков. Например, задачей о ходе коня занимался великий Леонард Эйлер, а задачей о восьми ферзях — другой великий ученый Карл Гаусс.

Имена Эйлера и Гаусса относятся к XVIII и XIX столетиям, а в XX в. к шахматам обращались Норберт Винер, Аллан Тьюринг и Клод Шеннон, основоположники кибернетики и теории информации.

Автор этой книги не один десяток лет собирал и систематизировал шахматно-математический материал. Что входит в тот или иной раздел, легко определить по заголовку. Наибольшее внимание уделено шахматной математике. Рассматриваются разные виды математических задач и головоломок — о маршрутах фигур, их расстановках и перестановках на доске, об ее разрезании и покрытии. Задачи с участием шахматных фигур встречаются у нас всюду, но для каждой из них и специально выделен один или два раздела.

В книге приводятся различные шахматно-математические рекорды, описываются необычные свойства геометрии доски. Несколько разделов посвящено занимательным, логическим и математическим играм на шахматной доске. Обсуждаются задачи из области шахматной фантастики, с участием сказочных фигур. Исследуются игры на необычных досках, с необычными правилами и необычными фигурами. Разделы «Математика турниров» и «Рейтинг гроссмейстеров» касаются систем проведения соревнований и математической оценки силы шахматистов. Хотя компьютерная наука развивается параллельно с математикой, рассматриваются и достижения ЭВМ в шахматной игре и анализе окончаний.

Охватить весь жанр шахматной математики в одной книге невозможно. Если бы мы привели исчерпывающие решения только выбранных задач, ее объем увеличился бы в несколько раз. Поэтому в некоторых случаях даны лишь краткие указания и ответы. Если автор той или иной интересной идеи или задачи известен, то он обычно упоминается. Однако многие

задачи и подходы кочуют из одного сборника в другой и не всегда удается обнаружить первоисточник.

Здесь стоит упомянуть научно-популярный журнал «Наука и жизнь» и физико-математический журнал для школьников «Квант», в которых автор книги в течение многих лет ведет постоянные рубрики. Почти в каждом номере печатается какая-нибудь шахматно-математическая задача. В жанре шахматной математики когда-то активно работал основатель «Задачника “Кванта”» Н. Васильев. И сегодня немало сильных математиков придумывают оригинальные задачи на эту тему. Вот имена некоторых из тех, чьи находки встречаются у нас особенно часто: И. Акулич, Н. Неизвестен, В. Производов, А. Сливак, А. Ханян. Использованы и многочисленные письма читателей, которые в течение многих лет присыпали автору этой книги свои задачи, решения, предложения, опровержения и уточнения.

В список литературы можно было бы включить десятки и сотни шахматных и математических изданий, различные публикации по кибернетике и компьютерной науке, книги по занимательной математике и развлечениям, статьи и в серьезных математических изданиях, и в научно-популярных. Но с целью экономии места автор решил вообще отказаться от библиографии.

* * *

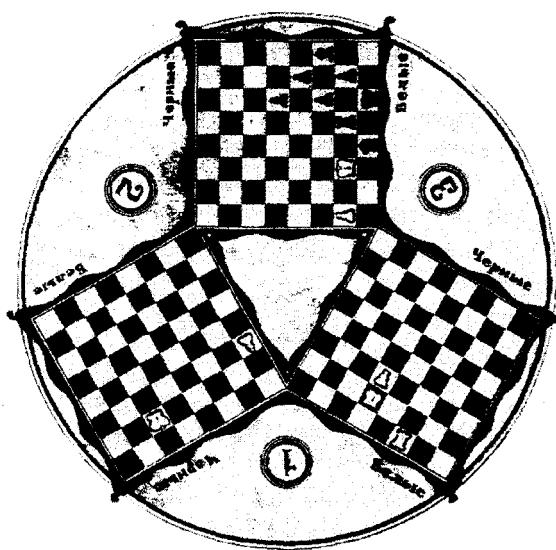
Осталось сказать, что первое издание книги вышло тридцать три года назад («Наука», 1976 г.) – небольшого формата, в мягком переплете. Хотя с тех пор автор выпустил более сотни изданий на самые разные темы, эта первая книга, подобно первой любви, оставила в его биографии неизгладимый след. «Математика на шахматной доске» была переведена на ряд языков, а в 1983 г. появилась в «Библиотечке “Кванта”» под названием «Шахматы и математика». Общий тираж обеих книг превзошел более полумиллиона экземпляров, что, впрочем, неудивительно для советского времени. Во второй половине 1980-х гг. наступили иные времена, отношение к науке изме-

нилось, к сожалению, не в лучшую сторону, что отразилось и на научно-популярной литературе. Автор уже не верил, что когда-нибудь его работа в этом жанре снова появится на свет. Но вот чудо произошло!

Несмотря ни на что, все минувшие годы я продолжал пополнять свой шахматно-математический архив, разросшийся ныне до внушительных размеров. Так что при подготовке нового издания пришлось решать непростую проблему, что включать в книгу, а что отложить на будущее.

Возможно, это звучит несколько пафосно, но, учитывая свое увлечение математикой и шахматами со школьных времен, автор должен признаться, что писал данную книгу практически всю жизнь.

ШАХМАТНАЯ ДОСКА И ЕЕ ПЕРСОНАЖИ



МАТЕМАТИКА НА 64 КЛЕТКАХ

В математических задачах и головоломках на шахматной доске дело редко обходится без участия фигур. Однако доска и сама по себе интересный математический объект. Поэтому рассказ о шахматной математике мы начнем с задач о доске: фигуры пока отсутствуют на ней либо играют второстепенную роль.

Прежде всего напомним одну старинную легенду о происхождении шахмат, связанную с забавным арифметическим подсчетом.

Когда индийский царь впервые познакомился с шахматами, он был восхищен их своеобразием и обилием красивых комбинаций. Узнав, что мудрец, который изобрел игру, является его подданным, царь вознамерился лично наградить его за гениальную выдумку. Властелин пообещал выполнить любую просьбу мудреца и был удивлен его скромностью, когда тот пожелал получить в награду лишь немного пшеничных зерен. На первое поле доски он попросил положить одно зерно, на второе – два, на третье – четыре и так далее, на каждое последующее вдвое больше, чем на предыдущее. Царь приказал побыстрее выдать изобретателю шахмат его ничтожную награду. Однако на следующий день придворные математики сообщили своему повелителю, что не в состоянии исполнить желание хитроумного мудреца. Оказалось, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах царства, но и во всех амбараах мира. Мудрецу причиталось

$$1+2+2^2+\dots+2^{63}=2^{64}-1$$

зерен. Это астрономическое число записывается двадцатью цифрами, амбар для хранения такого количества зерна будет простираться от Земли до Солнца. Конечно, с математикой здесь связь не такая уж тесная, но можно сказать, что неожи-

данная развязка этой истории убедительно иллюстрирует безграничные возможности, скрытые в шахматной игре.

Раз уж речь зашла о происхождении шахмат, уместно привести одну любопытную гипотезу, использующую математические свойства доски. Согласно этой гипотезе, игра произошла из магических квадратов.

Магический квадрат порядка n представляет собой квадратную таблицу $n \times n$, заполненную целыми числами от 1 до n^2 и обладающую следующим свойством: сумма чисел каждой строки, каждого столбца и двух больших диагоналей одна и та же (если речь идет только о строках и столбцах, то квадрат полумагический). Для магических квадратов восьмого порядка ($n=8$) эта сумма равна 260 (на рис. 1 магический квадрат размещён прямо на полях доски).

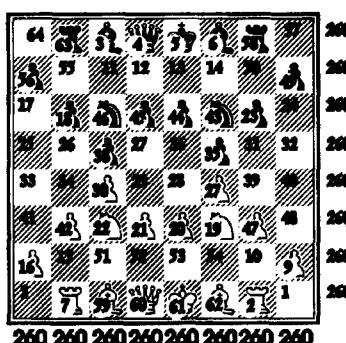


Рис. 1. Альмуджаннах и магический квадрат.

Строгая закономерность расположения чисел в магических квадратах придает им волшебную силу искусства. Недаром немецкий художник А. Дюрер был настолько очарован этими загадочными математическими объектами, что воспроизвел магический квадрат в своей знаменитой гравюре «Меланхolia».

Рассмотрим одну из старинных дебютных табий (начальных расположений фигур) под названием альмуджаннах. Она получается из современной расстановки после таких симметричных ходов: 1. d3 d6 2. e3 e6 3. b3 b6 4. g3 g6 5. c3 c6 6. f3

f6 7. c4 c5 8. f4 f5 9. ♜c3 ♜c6 10. ♜f3 ♜f6 11. ♜b1 ♜b8 12. ♜g1 ♜g8 (рис. 1). Подсчитав сумму чисел, стоящих на восьми полях — d2, d3, e2, e3, d7, d6, e7, e6, участвующих в первых двух ходах, мы опять получаем магическое число 260. Тот же результат дает и каждая последующая пара ходов. Подобные примеры (число их можно увеличить) позволили высказать гипотезу о связи магических квадратов с шахматами. А исчезновение всех следов этой связи объясняется тем, что в далекую эпоху суеверий и мистики древние индузы и арабы приписывали числовым сочетаниям магических квадратов таинственные свойства и эти квадраты тщательно скрывались. Поэтому и была выдумана легенда о мудреце.

Среди математических развлечений на шахматной доске популярны задачи на ее разрезание. Одна из них тоже связана с легендой.

Один восточный властелин был таким искусным игроком, что за всю жизнь потерпел всего четыре поражения. В честь своих победителей он велел вставить в доску четыре алмаза ← на те поля, где был заматован его король (на рис. 2 на месте алмазов стоят кони).

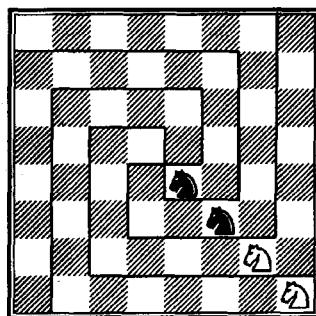


Рис. 2. Легенда о четырех алмазах.

После смерти властелина его сын, слабый игрок и жестокий деспот, решил отомстить игрокам, позволившим себе объявить мат его отцу. Наследник приказал им разрезать доску с

алмазами на четыре одинаковые части, чтобы каждая заключала в себе по одному алмазу.

Хотя они выполнили это требование, новый властелин все равно лишил их жизни, причем для казни каждого использовал его часть доски с алмазом.

Итак, возникает головоломка, которая часто встречается в занимательной литературе и лежит в основе целого класса задач о разрезании.

На доске стоят четыре коня (рис. 2). Разрезать ее на четыре одинаковые части, чтобы на каждой было по коню (разрезы проходят только вдоль границ между вертикалями и горизонталями доски).

В данном примере одно из решений показано прямо на рисунке. Располагая четырех коней на различных полях, получаем множество подобных задач. Интересно не только нахождение конкретного разреза, но и подсчет числа всех способов разрезать доску на четыре одинаковые части, содержащие по одному коню. Установлено, что наибольшее число решений – 800 – задача имеет при конях, расположенныхных в четырех углах доски.

На какое наибольшее число неодинаковых частей можно разрезать доску, если считать разными части, отличающиеся формой или цветом полей при совмещении (переворачивать части не разрешается)?

Наибольшее число частей равно 18. На рис. 3 представлены два разреза. Первый (рис. 3а) принадлежит Лойду; особенность его в том, что одна из частей содержит все восемь полей (максимум) – целая вертикаль доски. Части 3 и 6 одинаковы по форме, но их нельзя совместить, не переворачивая. А части 3 и 7 или 8 и 9, или 17 и 18 совместить можно, но цвета полей при этом будут разные. Решение на рис. 3б примечательно своей внешней симметрией.

На рис. 4а требуется выполнить сразу три задания: одно математическое (на разрезание) и два чисто шахматных:

а) разрезать нестандартную доску на четыре одинаковые части (их можно переворачивать, цвет полей в расчет не

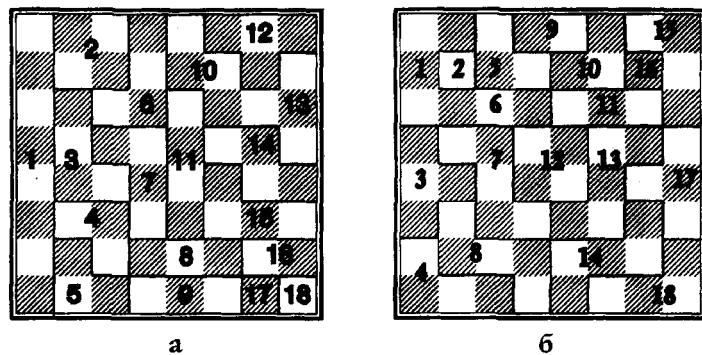


Рис. 3. Задача о разрезании доски.

принимается); б) белые начинают и ставят мат как можно быстрее; в) черные начинают и помогают белым поставить мат как можно быстрее (кооперативная задача).

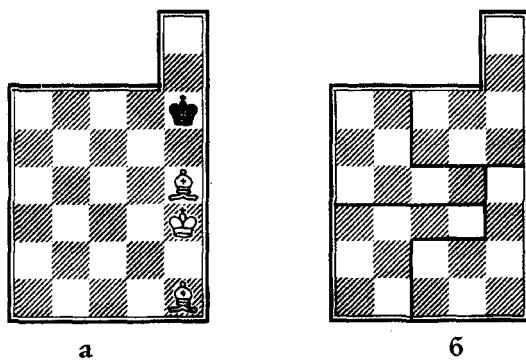


Рис. 4. Три задачи на необычной доске.

а) Необходимый разрез доски показан на рис. 4. б) Белые матуют в 12 ходов: 1. ♕b4 ♔e5 2. ♕d3 ♔e6 3. ♕c4 ♔e5 4. ♕c2 ♔e6 5. ♕b3 ♔e5 6. ♕c3 ♔e4 7. ♕d6 ♔e3 8. ♕d5 ♔e2 9. ♕c2 ♔e1 (e3) 10. ♕c5(+) ♔e2 11. ♕c4+ ♔e1 12. ♕b4X

(все ходы черного короля, кроме одного, вынужденные).

в) При нормальной игре следует 1... $\mathbb{Q}e7$, и мат нет, так как король скрывается в укромном уголке: 2. $\mathbb{Q}b4+$ $\mathbb{Q}e8$ с угрозой пата. в) При кооперативной – цель достигается всего за 3 хода: 1... $\mathbb{Q}d6$ 2. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}e7$ 3. $\mathbb{Q}b4+$ $\mathbb{Q}e6$ 4. $\mathbb{Q}d5X$.

В двух следующих задачах требуется разрезать доску на самые мелкие части, т. е. на отдельные поля.

Пусть при разрезании доски образующиеся части можно прикладывать друг к другу, чтобы следующим разрезом расчесь сразу несколько частей. Какое наименьшее число разрезов необходимо сделать, чтобы получить 64 поля?

Сначала разрежем доску пополам. Затем положим обе половины рядом и проведем второй разрез, образуя четыре одинаковые части, и т. д. Так как каждый разрез увеличивает число частей вдвое, после шестого доска распадется на 64 поля ($64=2^6$).

Пусть теперь каждую часть разрешается разрезать только в отдельности. Сколько разрезов понадобится в этом случае, чтобы получить 64 поля?

Эта задача, особенно если она предлагается сразу после предыдущей, иногда вызывает трудности. Возможно, тут проявляется некоторая инерционность мышления. А ведь сразу видно, что надо сделать 63 разреза. Каждый разрез увеличивает число частей на единицу, в самом начале мы имели одну часть (саму доску), а в конце 64 (все поля доски).

В рассмотренных головоломках доска разрезалась по границам полей, шахматных вертикалей и горизонталей. Но это условие часто нарушается.

Какое наибольшее число полей можно пересечь одним разрезом?

Очевидно, все поля доски образуются в результате пересечения 18 прямых – девяти вертикальных и девяти горизонтальных. С каждой из них прямая-разрез может пересекаться лишь в одной точке, а из четырех граничных линий – с двумя. Значит, всего имеется не больше 16 точек пересечения, разбивающих прямую-разрез на 15 отрезков, заключенных внутри полей.

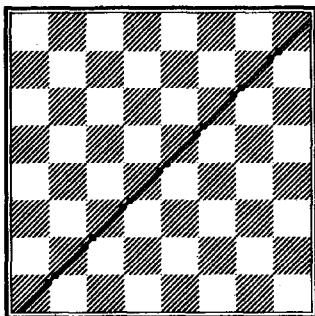


Рис. 5. Пятнадцать полей и одна прямая.

Из рис. 5 следует, что ровно столько полей пересекает разрез, проведенный параллельно диагонали доски и проходящий через середины сторон двух угловых клеток.

Итак, одним разрезом можно пересечь пятнадцать полей, а все поля?

Сколько нужно сделать разрезов, чтобы пересечь все 64 поля доски?

Разумеется, восьми прямых достаточно — по одной вдоль каждой вертикали или горизонтали. Однако оказывается, что и семь прямых могут пересечь все 64 поля. Одну из них следует провести через центр доски почти в диагональном направлении, а шесть других — в направлениях, почти перпендикулярных ей (рис. 6).

В этой книге мы будем часто рассматривать не только обычную шахматную доску 8×8 , но и доски других размеров и другой формы. Многие задачи и головоломки легко обобщаются для прямоугольных досок $m \times n$ (с m вертикалями и n горизонтальами — для удобства считаем, что $m \geq n$) или, как частный случай, для квадратных досок $n \times n$ — при тех или иных значениях m, n . Мы говорим, что доска четная, если число ее полей четно (хотя бы одна сторона четна), и нечетная — в противном случае (нечетны обе стороны). Как правило, если в задаче или головоломке ничего не говорится о размерах доски, то имеется в виду стандартная шахматная доска, $m=n=8$.

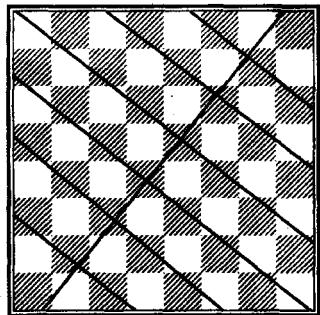


Рис. 6. Семь прямых пересекают все поля доски.

Последние две задачи нетрудно сформулировать для произвольной квадратной доски. При этом нетрудно убедиться, что на доске $n \times n$ существует разрез, пересекающий $2n-1$ поле, и вместе с тем достаточно провести $n-1$ разрез ($n > 2$), чтобы пересечь все ее поля.

На доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на ней 13 прямых (не проходящих через эти точки), чтобы в каждой из частей, на которые прямые разбивают доску, оказалось не более одной отмеченной точки?

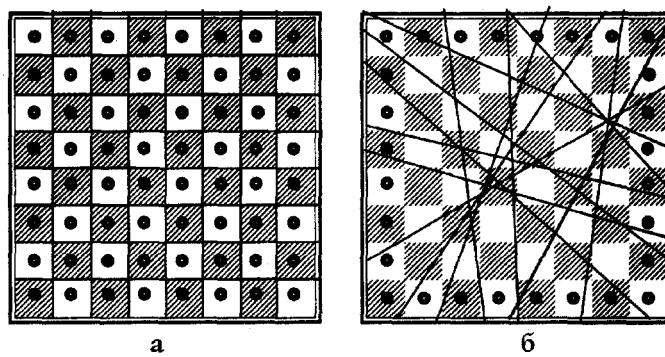


Рис. 7. Четырнадцать прямых разбивают все центры полей.

На рис. 7а 14 прямых (совпадающих с границами вертикалей и горизонталей доски) отделяют друг от друга все центры полей. Покажем, что 13 прямых уже недостаточно. Рассмотрим квадрат, стороны которого проходят через 28 центров граничных полей. На рис. 7б они выделены, а сам квадрат отсутствует. Очевидно, 13 прямых пересекают квадрат не более чем в 26 точках и поэтому разрезают его не более чем на 26 отрезков, т. е. по меньшей мере два граничных центра окажутся в одной части. Значит, для разделения 28 граничных, а следовательно, и всех центров понадобится не менее 14 прямых.

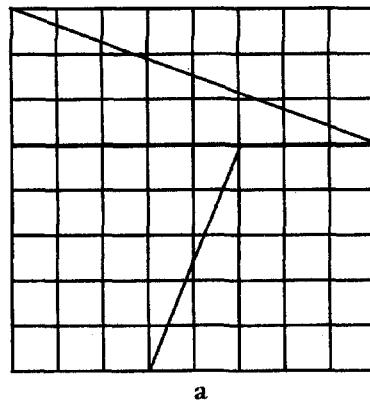
Тему, связанную с разрезанием доски, завершим любопытным парадоксом. Разрежем доску на четыре части, как показано на рис. 8а (поля специально не раскрашены в два цвета, чтобы немного запутать читателя), и составим из них прямоугольник – рис. 8б.

Площадь доски равна $8 \times 8 = 64$, а площадь полученного прямоугольника – $13 \times 5 = 65$. Таким образом, при разрезании доски откуда-то взялось лишнее поле!

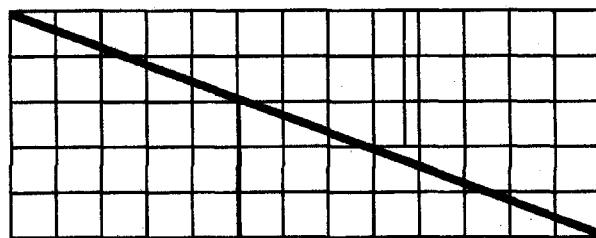
Разгадка парадокса в том, что чертеж на рис. 8б выполнен не совсем точно (мы умышленно провели толстые линии, чтобы скрыть неточности). Если делать его аккуратнее, то вместо диагонали прямоугольника появится еле заметный для глаза параллелограмм. Площадь его как раз и дает то самое лишнее поле. Подобные парадоксы возникают при хитром разрезании разных квадратных досок, причем в одних случаях лишнее поле появляется, а в других исчезает.

На очереди доказательство теоремы Пифагора на шахматной доске. Кстати, Михаил Таль однажды признался, что когда в школе ему показали, что на шахматной доске «пифагоровы штаны во все стороны равны», он был просто потрясен.

Начертим на доске квадрат, в результате чего она разбивается на пять частей – сам квадрат и четыре одинаковых прямоугольных треугольника – рис. 9а. А на рис. 9б перед нами же четыре треугольника, но вместо одного большого квадрата – два, меньших размеров.

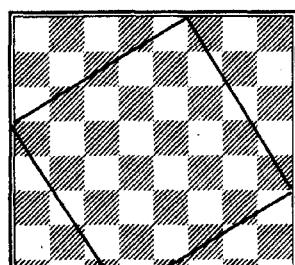


a

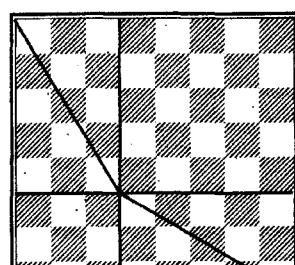


b

Рис. 8. Парадокс с разрезанием.



a



b

Рис. 9. Теорема Пифагора на шахматной доске.

Площадь треугольников в обоих случаях одна и та же, значит, равную площадь имеют и оставшиеся части доски: в первом случае один квадрат, во втором — два. Поскольку большой квадрат построен на гипотенузе прямоугольного треугольника, а маленькие — на его катетах, приходим к выводу, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Теорема Пифагора доказана!

А другую тему, имеющую прямое отношение к доске, начнем со следующей старинной головоломки.

Можно ли покрыть костями домино 2×1 квадрат 8×8 , из которого вырезаны противоположные угловые клетки (рис. 10а)?

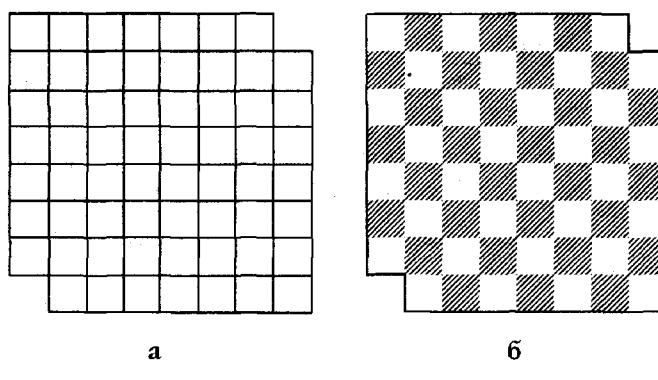


Рис. 10. Задача о домино.

Во всех подобных задачах предполагается, что каждая кость занимает два соседних поля доски. Можно было бы заняться алгебраическим анализом, однако шахматное решение и проще, и изящнее. Окрасим наш урезанный квадрат (рис. 10а) в черно-белый цвет, превратив его в доску без угловых полей a1 и h8 (рис. 10б).

При любом покрытии каждая кость домино, очевидно, занимает одно белое и одно черное поле, и, значит, весь на-

бор костей (в количестве 31 штуки) покрывает одинаковое число белых и черных полей. Но на нашей урезанной доске черных полей на два меньше, чем белых (оба вырезанных поля черные), и, следовательно, необходимого покрытия не существует!

Итак, раскраска доски не только помогает шахматисту ориентироваться во время игры, но и позволяет решать необычные головоломки.

«Красиво, ничего не скажешь!» — воскликнул Гарри Каспаров, когда познакомился с решением этой задачи и узнал, что его любимые черно-белые цвета могут пригодиться и для других целей...

В рассмотренной задаче существенно не то, что удалены угловые поля, а то, что они одного цвета. Из наших рассуждений следует, что какую бы пару одноцветных полей ни вырезать, покрыть домино оставшуюся часть доски невозможно. Возникает естественный вопрос.

Пусть на доске вырезаны поля разного цвета. Всегда ли можно покрыть доску с двумя «дырками» 31 костью домино?

Всегда. Приведем изящное доказательство. Проведем на доске замкнутую линию, как показано на рис. 11.

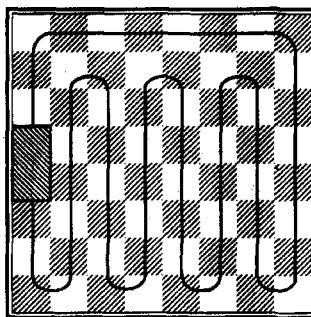


Рис. 11. Домино покрывают доску.

Если вырезаны соседние поля, как на рисунке, то разорванная линия будет состоять из одного куска, проходящего через

62 поля, при этом их цвета чередуются. Размещая кости домино вдоль этой линии, мы покроем всю оставшуюся часть доски. Если вырезанные поля не являются соседними, то линия разорвется на две части, содержащие четное число полей, и каждую из них легко покрыть костями домино.

Какое наименьшее число полей надо вырезать, чтобы полученную «дырявую» доску нельзя было покрыть ни одной костью домино?

Достаточно вырезать 32 поля одного цвета — либо белые, либо черные, и на доске не останется места для домино.

Можно ли доску целиком покрыть костями домино, чтобы любая граничная линия между ее вертикалями и горизонталями пересекала хотя бы одно домино?

Если представить себе, что доска — это стенка, а кости домино — кирпичи, то существование такого покрытия свидетельствует о прочной кладке — шахматная «стенка» не рухнет. Квадрат или прямоугольник, который удается покрыть домино нужным образом, называется прочным, в противном случае он непрочный. На рис. 12а видно, что шахматная доска является прочной.

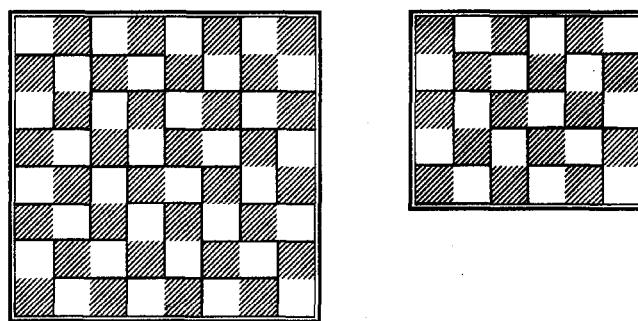


Рис. 12. Прочные доски.

Доска 100×4 полностью покрыта костями домино. Можно ли ее распилить по одной из линий между вертикалями и горизонталями, не повредив ни одной kostи?

Любая из линий делит эту доску на две части, состоящие из четного числа полей. Поля каждой части разобьем на два типа: покрытые домино, целиком лежащими в этой части, и покрытые домино, пересекаемыми границами. Поскольку число полей каждой части четно (может быть, ноль), как и число полей первого типа (каждое домино покрывает два поля), то число полей второго типа тоже четно. Значит, четно и число пересеченных костей. Всего линий 102 (99 вертикальных и 3 горизонтальных), и если предположить, что каждая из них пересекает домино, то в покрытии участвует не менее $2(100+2) = 204$ домино. Но в нашем распоряжении их только 200. Итак, найдется хотя бы одна линия, по которой можно распилить доску, не задевая домино. Значит, доска 100×4 является непрочной.

Является ли доска 6×6 прочной?

И эта доска непрочная. Доказательство аналогично предыдущему. В данном случае линий 10 (поровну вертикальных и горизонтальных). Если предположить, что каждая из них пересечет домино, то в силу тех же соображений четности она пересечет два домино, а всего — 20. Но на доске 6×6 умещается только 18 домино! Непрочная доска 6×6 изображена на рис. 13 (две горизонтальные линии, по которым можно безболезненно распилить «стенку», здесь выделены).

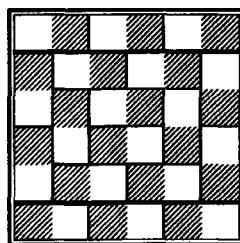


Рис. 13. Непрочная доска 6×6 .

В общем случае доказано, что если обе стороны четной доски $m \times n$ больше четырех, то любая из них — за исключением

$6 \times 6!$ – является прочной. Из этого следует, что прочная доска наименьшей площади имеет размеры 6×5 (рис. 126).

На доске находятся восемь костей домино. Доказать, что на ней можно выделить квадрат 2×2 , ни одно из полей которого не будет покрыто домино.

Раскрасим доску, как показано на рис. 14. На ней девять заштрихованных квадратов 2×2 , и при восьми домино хотя бы один из них не будет затронут ими.

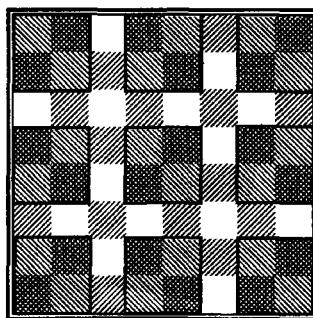


Рис. 14. Один из квадратов не покрыт домино.

Головоломки о доске и домино лежат в основе целого направления занимательной математики под названием полимино. В общем случае вместо домино используются фигурки полимино, состоящие из связанных между собой квадратов. С точки зрения шахматиста, связность означает, что все квадраты можно обойти ходом ладьи. В зависимости от числа квадратов полимино бывают разного типа. Мономино 1×1 состоит из одного квадрата, домино 2×1 – из двух квадратов, тримино из трех квадратов, тетрамино – из четырех и т. д. Полимино, содержащие более двух квадратов, имеют разную форму. Например, тримино 3×1 , прямое и треугольное, прямое тетрамино 4×1 и еще четырех типов. В задачах о полимино покрываются различные доски, не обязательно прямоугольные.

Очевидно, покрыть доску прямыми тримино 3×1 невозможно, так как 64 не делится на 3 .

Можно ли покрыть доску 21 тримино 3×1 и одним мономино? Если да, то какие поля может занимать при этом мономино?

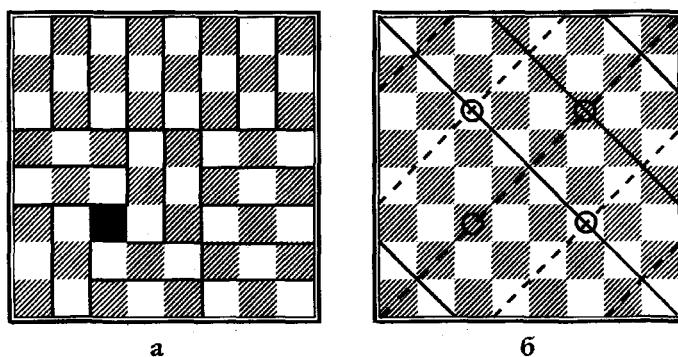


Рис. 15. Задача о тримино.

Одно из покрытий показано на рис. 15а. Для определения возможных полей для мономино проведем на доске два вида параллельных прямых, сплошных и пунктирных – рис. 15б. Очевидно, каждое прямое тримино покрывает ровно одно поле, через которое проходит сплошная линия, и ровно одно поле, через которое проходит пунктирная. Всего полей, пересекаемых и теми, и другими линиями, 22, а тримино – 21. Значит, мономино должно располагаться на поле, через которое проходит одна из сплошных и одна из пунктирных прямых. Но таких полей всего четыре – с3, с6, f3, f6 (они отмечены на рис. 15б), и мономино может находиться только на них! Поворачивая рис. 15а на 90, 180 и 270°, получим покрытие для каждого из этих четырех полей.

До сих пор мы покрывали доску домино и тримино.

Можно ли прямоугольную доску $m \times n$ покрыть целиком прямыми k -mino (домино $k \times 1$)?

Предлагаем вам самостоятельно доказать, что ответ положительный только в том случае, если хотя бы одно из чисел m , n делится на k .

Проиллюстрируем это утверждение на следующей задаче.
Можно ли покрыть доску 10×10 прямыми тетрамино 4×1 ?

Тетрамино состоит из четырех квадратов, и в принципе 25 костей могли бы покрыть всю доску. Однако это невозможно: 10 не делится на 4!

На полях доски расположены числа, сумма любых четырех из которых, расположенных ходом коня, одна и та же. Сколько чисел при этом использовано?



Рис. 16. Числовая задача.

Рассмотрим на доске ее фрагмент 3×3 (рис. 16а) и четыре нарисованных на ней буквы «Г». Имеем: $(a_4+a_5+a_6)+a_3=(a_4+a_5+a_6)+a_1=a_1+(a_4+a_5+a_6)=a_7+(a_4+a_5+a_6)$. Отсюда следует, что $a_1=a_3=a_7=a_9$. Взяв еще две буквы «Г», получаем $a_1+a_4+a_1+a_2=a_9+a_6+a_3+a_2$, и, значит, $a_4=a_6$. Аналогично $a_4=a_6=a_2=a_8$ и $a_5=a_1$.

Итак, в любом квадрате 3×3 на полях одного цвета стоит некое число a , а на полях другого — число b (рис. 16б). Из этого следует, что при заполнении всей доски использовано либо одно число ($a=b$), либо два ($a \neq b$).

Какое наибольшее число диагоналей можно провести на доске, чтобы никакие две из них не имели общих точек?

На рис. 17а проведены 36 диагоналей. Докажем, что больше не бывает. Для этого рассмотрим выделенные на рис. 17б точки. Один из концов любой диагонали упирается в какую-то из этих точек. Но точек 36, значит, диагоналей не больше.

На каждом поле доски лежит несколько монет, причем на двух полях с общей стороной разница в одну копейку. Извест-

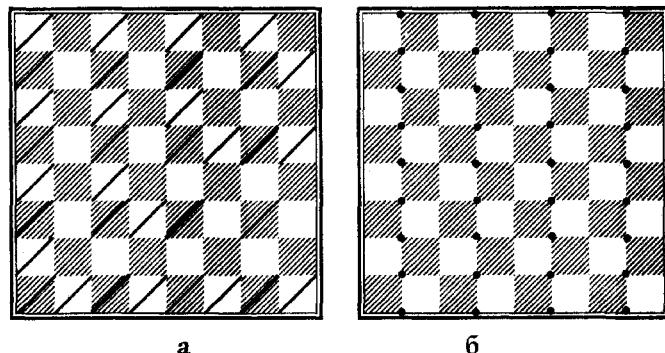


Рис. 17. Задача о диагоналях.

но также; что на одном из полей лежат 3 копейки, а на другом — 17. Какую сумму составляют монеты на двух главных диагоналях?

Нетрудно проверить, что условия выполняются лишь в том случае, если 3 копейки и 17 находятся в противоположных углах доски (рис. 18), при этом ее заполнение производится однозначно, а искомая сумма равна 160 копейкам.

3	5	7	9	11
4	6	7	9	10
5	7	9	11	11
6	7	9	11	13
7	8	9	11	13
8	9	11	13	15
9	11	11	13	15
10	11	12	13	15

Рис. 18. Монеты на шахматной доске.

На каждой горизонтали доски стоит хотя бы одна фигура, причем на разных горизонталях — разное число. Доказать, что всегда можно отметить восемь фигур так, чтобы

на каждой горизонтали и каждой вертикали находилась ровно одна отмеченная.

Из условия следует, что на некоторой горизонтали стоит ровно одна фигура, на другой — две и т. д., наконец, одна горизонталь заполнена восемью фигурами. Пронумеруем горизонтали в соответствии с количеством фигур на них. На первой отметим ее единственную фигуру. Поскольку на второй стоят две фигуры, хотя бы одну можно отметить. Так как на третьей стоят три фигуры, хотя бы одну можно отметить, и т. д. до восьмой отмеченной фигуры.

Одно из самых интересных свойств шахматной доски состоит в том, что она обладает так называемой неевклидовой геометрией. Другими словами, расстояние на ней не совсем обычное, например, кратчайший путь между двумя точками не обязательно измеряется по прямой линии. Эта тема подробнее затронута ниже, в главе, посвященной геометрии доски. Мы убедимся, что сумма катетов прямоугольного треугольника на шахматной доске может равняться гипотенузе!

Осталось сказать, что необычные доски встречаются постоянно на разных страницах нашей книги. В общем, если от каких-то фигур еще можно отказаться, то от доски никогда!

КОНЬ-ХАМЕЛЕОН

Не обязательно быть шахматистом, чтобы знать, какая фигура самая удивительная. Конечно, это конь! Не случайно выражение «ход конем» давно стало крылатым. Символизируя хитрость, ловкость и изобретательность, оно прочно вошло в наш быт. А гроссмейстер-остроумец Савелий Тартаковер вообще считал, что «вся шахматная партия — это один замаскированный ход конем». Поэтому рассказ о головоломках с участием фигур мы начинаем с коня.

От других фигур конь прежде всего отличается тем, что, перемещаясь по доске, на каждом своем ходу меняет цвет поля, на котором стоит. Вот почему в заголовке этой главы мы назвали его хамелеоном. Многие задачи и головоломки про коня эффективно решаются, если воспользоваться этим свойством, характерным только для него.

Может ли конь добраться из угла доски до противоположного, посетив каждое ее поле ровно один раз?

Конечно, нет. Пусть исходное поле — a1. Оно черное, и на каждом нечетном ходу конь попадает на белое поле. Значит, закончить свой путь на 63-м ходу он должен на белом поле. Но противоположный угол доски тоже черный — противоречие. В данном случае все оказалось просто, но любопытно, что за доской шахматист нередко сталкивается с подобными вопросами.

На рис. 19 белые добиваются ничьей единственным способом — 1. ♖c1! Теперь их король переступает с c1 на c2 и обратно, тем самым занимая каждый раз поле того же цвета, что и конь, и не выпуская черного короля из угла. А в случае 1. ♖c2? конь попадает на d3 при неприятельском короле на c2, тот вынужден отступить, и пешка проходит в ферзи. Аналогия между этим шахматным примером и предыдущей головоломкой очевидна.

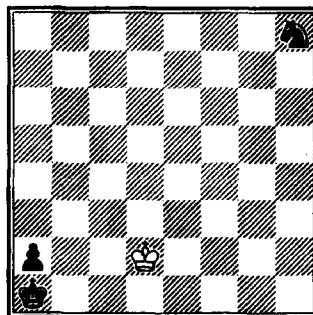


Рис. 19. Ничья.

Рассмотрим этюд В. Чеховера на рис. 20, в котором тоже требуется перехитрить коня-хамелеона.

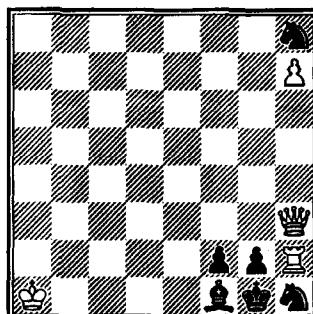


Рис. 20. Выигрыш

В правом нижнем углу столпившиеся фигуры не могут двигаться, т. е. находятся во взаимном цугцванге. Например, если ферзь уйдет с $h3$, то либо будет потеряна ладья, либо отступит черный слон с неизбежным $f2-f1\mathbb{Q}$. С другой стороны, сейчас любой ход слона $f1$ или коня $h1$ ведет к немедленной гибели черных, и, значит, они могут ходить только конем $h8$. Итак, белый король должен подойти к этому коню и забрать его. Двигаться он может только по черным полям, так как на белом получает шах слоном с превращением пешки f .

Однако прямолинейное движение короля не дает результата: 1. ♔ b2 ♕ f7 2. ♔ c3 ♕ h8 3. ♔ d4 ♕ f7 (прикрывая поле e5) 4. ♔ e3 ♕ h8 5. ♔ f4 (на 5. ♜ h4 ♕ d3 6. ♜ h1+ черные играют не 6...gh ♜ 7. ♜ f2X, а 6...gh ♜!) 5... ♕ f7! (охраняя поля e5 и g5) 6. ♔ e3 ♕ h8 7. ♔ d4 ♕ f7 8. ♔ c5 ♕ h8 9. ♔ d6 ♕ g6!

Итак, конь держит все поля вторжения. Чтобы все-таки прорваться к полю h8, белому королю нужно изменить соответствие цветов между ним и конем h8. Этого можно достичь, встав один раз королем на белое поле. Искомым является a8 — единственное недоступное черному слону.

Раскрыв секрет позиции, уже нетрудно найти ее решение: 1-6. ♔ b2-c3-d4-c5-b6-a7 (черный конь перемещается с h8 на g6 и обратно) 7. ♔ a8! ♕ g6 8. ♔ b8 ♕ h8 9. ♔ c7 ♕ f7! Неожиданно конь опять создал барьер для короля, но это лишь временное препятствие.

10-13. ♔ b6-c5-d4-e5 ♕ g6+ 14. ♔ f6 ♕ h8 15. ♔ g7 ♕ g6 16. h8 ♜. После 16. ♜ g6 ♜ d3+ вся работа белых пошла бы насмарку.

16... ♜ h8 17. ♔ h8 ♕ g3 18. ♜ g3 ♜ d3 19. ♜ g2X. Как видите, решение содержит и геометрический мотив: стартовав в одном углу доски, белый король, прежде чем добиться цели, побывал еще в двух!

За какое наименьшее число ходов конь с a1 доберется до h8?

И здесь коню надо пройти из одного угла доски в другой, но посещать все ее поля уже необязательно. Кратчайший путь составляет шесть ходов. Убедимся в этом. Коню нужно сделать в общей сложности 14 смещений по горизонтали и вертикали. За каждый ход он делает их три, значит, всего понадобится не меньше пяти ходов. Однако с черного поля за нечетное число ходов конь попадает только на белое. Шестикодовый путь прост: ♜ a1-c2-d4-f3-g5-f7-h8.

В нашей книге много внимания уделяется задачам о путешествиях фигур по шахматной доске. Перемещение той или иной фигуры между двумя полями мы называем путем этой фигуры. А путь, который проходит через все поля

доски (слона – через все одноцветные поля) мы называем маршрутом. Обычно предполагается, что дальнобойная фигура (ферзь, ладья, слон) в своем маршруте не останавливается на каждом промежуточном поле, а лишь пробегает через какие-то из них (может быть, по нескольку раз). Конечно, понятия пути и маршрута довольно условны, но в конкретных случаях всегда будет понятно, что имеется в виду.

Маршрут фигуры называется замкнутым, если, обойдя всю доску, она следующим ходом возвращается на первоначальное поле, и открытым, если старт и финиш не связаны между собой ходом данной фигуры.

Любому пути или маршруту фигуры по доске соответствует график, который получается в результате последовательного соединения прямолинейными отрезками центров полей фигуры при ее движении. Мы будем постоянно изображать графики разных путей и маршрутов фигур. Иногда такие графики имеют довольно забавный, причудливый вид.

Ниже мы также часто будем использовать математическое понятие – граф. Геометрически график можно определить как множество точек – вершин графа, соединенных линиями – ребрами графа. Если ребра графа имеют направление (ориентацию), то говорят, что это ориентированный граф.

Каждой шахматной фигуре можно поставить в соответствие график, вершины которого отвечают некоторым полям доски (может быть, всем). Вершины соединяются ребром в том и только в том случае, если между полями, которым они соответствуют, возможен ход данной фигуры. (Если в некоторой задаче те или иные поля доски не представляют интереса, то необязательно помещать в них вершины графа.)

Перемещению фигуры по доске соответствует некоторый путь или маршрут между вершинами графа, и наоборот. Таким образом, можно сказать, что график иллюстрирует конкретное перемещение фигуры по доске, а график отражает совокупность всех ее возможных ходов.

В нашей книге рассматриваются задачи о путях и маршрутах для каждой из шахматных фигур. При этом встречается не только стандартная доска, но и различные прямоугольные доски $m \times n$, в том числе квадратная $n \times n$. Из следующей главы мы, например, узнаем, что конь в состоянии обойти доску $n \times n$ при $n \geq 5$, посетив все ее поля по одному разу (задача о ходе коня).

Задача о коне Аттилы. На доске находятся две фигуры — белый конь и черный король. Некоторые поля обозначаются «горячими». Конь должен дойти до неприятельского короля, повергнуть его и вернуться на исходное место. При этом ему запрещено занимать как горячие поля, так и уже пройденные.

«Грава не растет там, где ступил мой конь!» — похвалялся вождь гуннов Аттила, намекая, что предводительствуемые им полчища уничтожают все живое на своем пути.

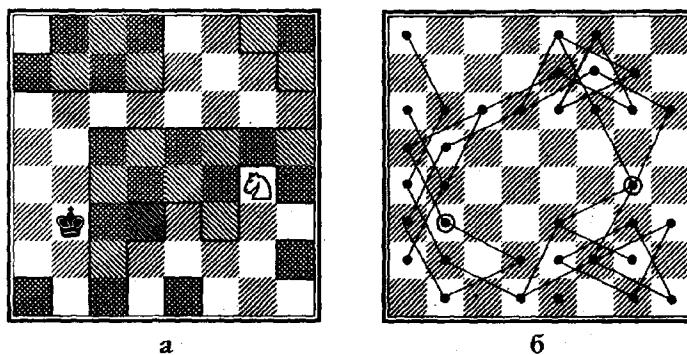


Рис. 21. Конь Аттилы.

На рис. 21а конь Аттилы расположен на g4, а неприятельский король — на b3, горячие поля заштрихованы.

Соединяя центры доступных коню полей, между которыми возможен его ход, получаем граф для данной задачи (рис. 21б). В результате дело сводится к нахождению в этом графе такого пути, который не содержит ни одной вершины более одного раза и, кроме того, проходит через обе выделенные.

Методы решения подобных задач, называемых лабиринтными, хорошо известны. Впрочем, для коня Аттилы искомый путь нетрудно найти и непосредственно, он содержит 18 ходов: ♖g4-f6-e8-g7-e6-f8-g6-e7-c6-a5:b3-d2-b1-a3-b5-d6-f7-h6-g4. Для достижения цели коню пришлось побывать на 18 полях из 35, не сожженных в начале сражения.

Введем еще одно понятие. Путь (маршрут) фигуры на доске называется несамопересекающимся, если его график не имеет самопересечений.

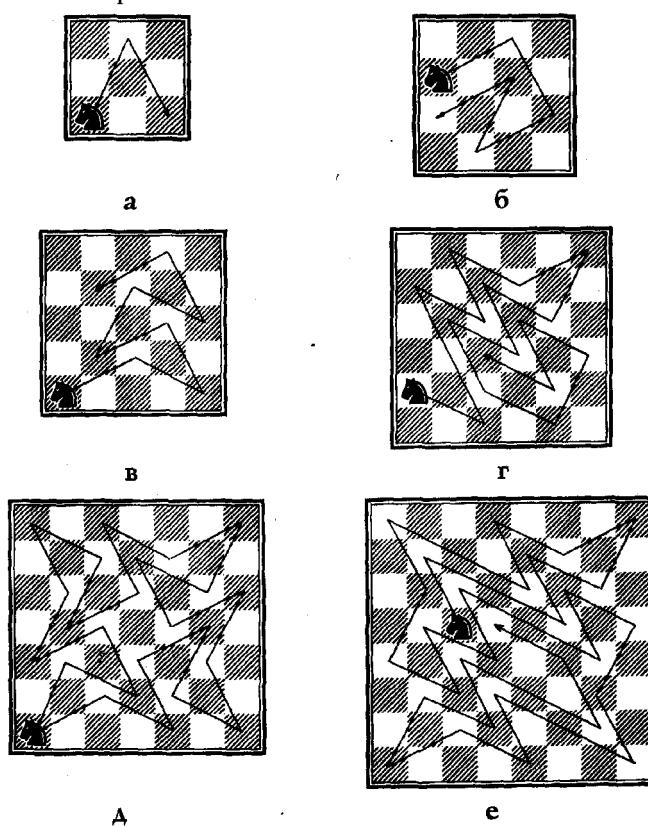


Рис. 22. Несамопересекающиеся пути коня.

Сколько ходов содержит самый длинный несамопересекающийся путь коня на шахматной доске?

Искомый путь состоит из 35 ходов (рис. 22е). Любопытно, что он был обнаружен компьютером. Головоломку исследовали вдоль и поперек для различных прямоугольных досок $m \times n$, и установили соответствующие рекорды. На рис. 22 показаны несамопересекающиеся пути коня наибольшей длины для досок $n \times n$ при n от 3 до 8. На доске 6×6 ни один человек не сумел найти путь коня длиной более 16 ходов. И снова постаралась машина — нарисовала 17-ходовый путь без самопересечений (рис. 22г). Любопытно, что только на доске 7×7 самый длинный путь оказался замкнутым (рис. 22д).

На скольких полях бесконечной доски может оказаться конь за k ходов, начиная свой путь с заданного места?

Обозначим искомое число полей через $N(k)$. Легко проверить, что $N(1) = 8$, $N(2) = 33$. За три хода ($k=3$) конь с исходного черного поля попадает на все белые поля восьмиугольника с центром в этом поле (рис. 23). Методом математической индукции нетрудно доказать, что при любом $k \geq 3$ поля, которые достигает конь, полностью заполняют соответствующий восьмиугольник: все его черные поля при четном k и белые — при нечетном. Подсчитав число одноцветных полей в нем, получаем: $N(k) = 7k^2 + 4k + 1$.

Для других фигур эта задача не представляет интереса. Король за k ходов попадает на любое поле квадрата $(2k+1) \times (2k+1)$ с центром в исходном поле. Дальнобойные фигуры уже за один ход могут оказаться на бесконечном числе полей, при этом ферзь и ладья за два хода достигают любого поля бесконечной доски, а слон — любого поля того же цвета, что исходное.

Конь сделал восемь ходов на шахматной доске и вернулся на исходное поле. Мог ли он при этом побывать на всех вертикалях и горизонталях доски?

Предположим, что конь посетил все линии доски. Так как маршрут замкнут, точкой отсчета можно считать поле нижней горизонтали. Рано или поздно конь оказывается на верхней горизонтали, т. е. смещается по вертикали на семь полей. Пос-

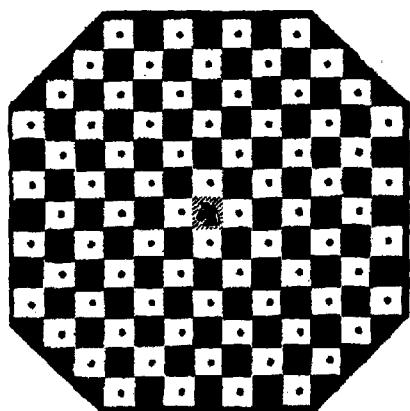


Рис. 23. Куда попадет конь?

кольку он возвращается на место, общее число перемещений по вертикали не менее $7+7=14$ полей. Аналогично общее число перемещений по горизонтали не менее 14 полей. Значит, всего перемещений не менее 28. На каждом ходу смещение составляет $1+2=3$ поля. За восемь ходов число смещений коня не превысит $3 \times 8 = 24$. Противоречие: $24 < 28$.

На бесконечной доске расставлены пешки через три поля на четвертое (рис. 24). Может ли конь последовательно обойти свободные поля такой доски, посещая каждое из них по одному разу?

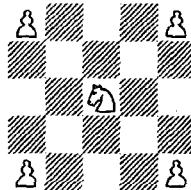


Рис. 24. Конь на бесконечной доске.

Предположим, что искомый путь существует. Рассмотрим два квадрата: 196×196 и концентрически окаймляющий его 200×200 . При указанной расстановке пешек все они стоят

на полях одного цвета, например, белого (рис. 24) – в количестве 2500 на доске 200×200 . С каждого из $196^2 / 2 = 19\ 208$ черных полей внутреннего квадрата конь попадает на одно из $200^2 / 2 - 2500 = 17\ 500$ свободных белых полей окаймляющего квадрата. Так как $17\ 500 < 19\ 208$, то на некоторые белые поля конь встанет более одного раза – противоречие.

Группу коней на бесконечной доске назовем эскадроном, если они в совокупности могут сделать произвольное число ходов, не оставляя ни одного из них без защиты. Эскадрон – активный, если при таком «дружном» перемещении он может занять одним из своих коней любое поле доски. Интересную задачу придумал В. Чванов.

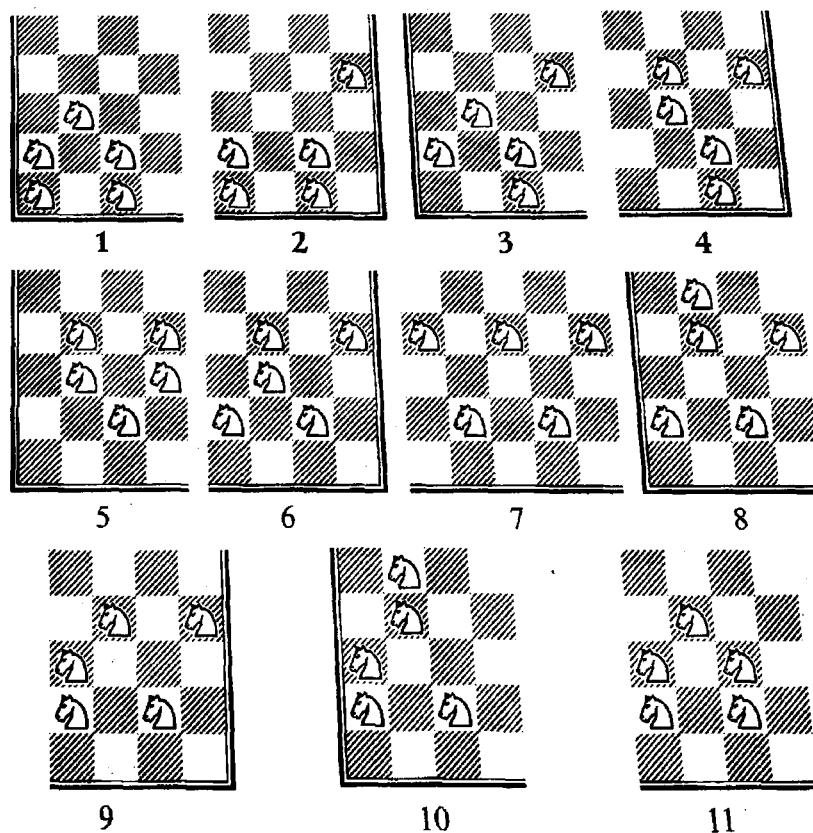


Рис. 25. Эскадрон коней.

Из какого наименьшего числа коней можно создать активный эскадрон?

Один или два коня вообще не образуют эскадрон, из трех или четырех коней сформировать эскадрон можно, но он будет перемещаться лишь на ограниченной территории. На рис. 25 показано, как пятерка коней ход за ходом из положения 1 попадает в положения 5 и 11 (кони постоянно поддерживают друг друга). Положения 1 и 11 отличаются сдвигом по вертикали на одно поле. Отсюда следует, что в вертикальном направлении эта пятерка может сделать бесконечное число перемещений.

Положения 1 и 5 сдвинуты относительно друг друга на одно поле по вертикали, одно по горизонтали и перевернуты на 180° . Таким образом, эскадрон из положения 1 может попасть на любое поле доски и, значит, является активным.

На доске 8×8 расставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Доказать, что можно поставить еще одного коня и снова никакие два не будут бить друг друга.

Рассмотрим 12 полей доски, отмеченных точками на рис. 26. Конь может находиться на одном из них или нападать на одно из них, но не может делать то и другое одновременно. Не может он и бить более одного из коней. Поэтому среди этих 12 полей найдется хотя бы одно, на котором нет коня и которое не бьется ни одним из стоящих одиннадцати. На это поле и можно поставить еще одного коня.

Какое наибольшее число коней можно расположить на доске 5×5 , чтобы каждый из них был ровно двум другим?

На рис. 27а мы видим, что 16 коней удовлетворяют этому условию. Докажем, что больше расположить нельзя. Сначала убедимся, что число коней на черных полях равно числу коней на белых. Действительно, если соединить отрезками бьющих друг друга коней, то каждый отрезок будет соединять белое поле с черным. С другой стороны, с каждого поля выходят два отрезка. Значит, общее число отрезков равно удвоенному числу

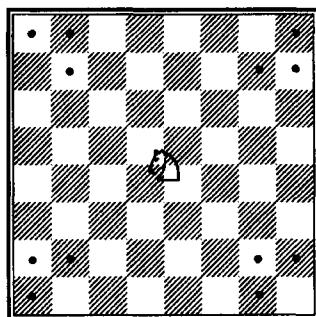


Рис. 26. Сколько можно поставить коней?

коней на белых полях и удвоенному числу коней на черных, т. е. на белых и черных полях коней поровну.

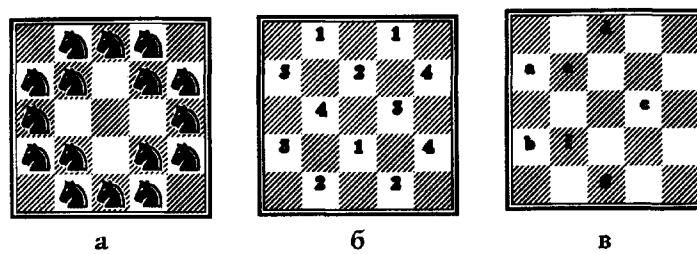


Рис. 27. Каждый конь бьет двух других.

Белых полей у нас 12, а черных – 13. Пусть t – число пустых белых полей, тогда число пустых черных – $t+1$. При любом оптимальном расположении центральное поле пустое. В противном случае, из восьми полей, которые конь бьет с него, ровно шесть пустых белых, $t=6$, и число коней не превосходит $25-6-(6+1)=12$, а на рис. 27а их уже на 4 больше.

Теперь разобьем белые поля на четыре группы, как показано на рис. 27б (у полей одной группы одинаковые цифры). При оптимальном расположении по крайней мере одно поле каждой группы пустое. Предположим противное, например, на всех полях группы 3 стоят кони a , b и c (рис. 27в). С поля a конь нападает на поля f , d и центральное. Но центральное

пусто, значит, на f и d стоят кони. В этом случае конь с поля c бьет четырех коней d, e, f и g , что противоречит условию. Итак, число пустых белых полей $t=4$. Отсюда число коней не больше $25-t-(t+1)=24-2t=16$.

Для какого наибольшего числа k можно расставить коней на доске 8×8 , чтобы каждый из них нападал ровно на k других?

Рассмотрим произвольную расстановку коней, удовлетворяющую условию. Возьмем коня, расположенного на горизонтали, ограничивающей конфигурацию на доске сверху. Тогда он может нападать самое большое на четырех коней. Осталось привести положение, в котором каждый конь бьет ровно четырех других. Оно показано на рис. 28.

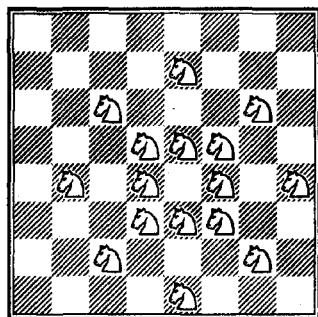


Рис. 28. Каждый конь бьет четырех других.

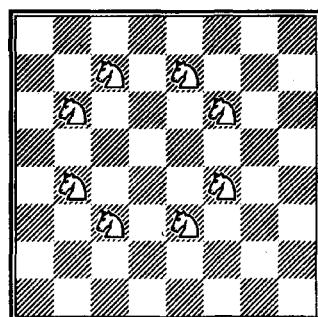


Рис. 29. Между конями два хода.

Какое наибольшее число полей можно отметить на доске 8×8 , чтобы с любого из них конь добирался до любого другого за два хода?

Таких полей 8, например, на рис. 29 на них стоят кони. Самое левое поле отстоит от самого правого на два хода, как и самое верхнее от самого нижнего. Из этого следует, что все поля находятся внутри квадрата 5×5 и их не больше восьми.

Рассказ о коне, самой хитрой фигуре на доске, мы продолжим в следующей главе.

ЗАДАЧА О ХОДЕ КОНИЯ

Эта глава посвящена самой известной во всей шахматной математике, можно сказать, классической задаче о коне.

Задача о ходе коня. Обойти конем все поля шахматной доски, посетив каждое из них по одному разу.

Особая популярность этой головоломки объясняется тем, что в XVIII и XIX вв. ею увлекались многие знаменитые математики, в том числе великий Леонард Эйлер, который в 1749 г. посвятил ей большой трактат «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не поддается никакому исследованию». Хотя задача была известна до Эйлера, именно он впервые обратил внимание на ее математическую сущность, и поэтому ее часто связывают с его именем.

Значительно сложнее проблема, состоящая не в нахождении определенного маршрута коня по доске, а в поиске всех маршрутов и подсчете их числа. Увы, эта задача не решена до сих пор, и, похоже, шансов на успех немного (что, видимо, и имел в виду Эйлер в своем труде). Доказано только, что число искомых маршрутов не больше C_{168}^{63} (число сочетаний из 168 элементов по 63), но превосходит 30 млн.

Математик Ф. Миндинг, подошедший к проблеме с алгебраической точки зрения, предложил метод, позволяющий вывести формулу для числа всех решений, однако вычисления, которые следует при этом произвести, практически неосуществимы.

Литература, посвященная задаче о ходе коня, весьма обширна. Придумано много методов нахождения тех или иных маршрутов его по всей доске, часто они носят имена их первооткрывателей – метод Эйлера и Вандермонда, рамочный метод Мунка и Коллинни, метод деления на четверти Полиньяка и Роже и другие.

Как уже говорилось в предыдущей главе, маршрут коня называется замкнутым, если с конечного поля конь в один ход возвращается на исходное. Графически такой маршрут представляет собой замкнутую линию, причем любое поле доски можно считать началом и концом маршрута. Если же старт и финиш не связаны между собой ходом коня, то маршрут является открытым.

Остановимся теперь на некоторых наиболее популярных методах нахождения маршрутов коня.

Рамочный метод Мунка и Коллини (Коллини – секретарь великого философа Вольтера). Шахматную доску разделим на две части: внутреннюю из 16 полей и внешнюю, имеющую форму рамы и состоящую из 48 полей (рис. 30). На полях внутреннего квадрата запишем заглавные буквы A, B, C, D, чтобы каждая из них, повторенная четыре раза, образовала квадрат или ромб, по всем сторонам которого может пройти конь. Те же буквы, только строчные, запишем в рамочных полях, чтобы ходы коня по каждой из них образовывали замкнутые многоугольники, окаймляющие центральный квадрат. Конь начинает свой маршрут от какого-нибудь рамочного поля, проходит вдоль рамы по выбранной букве, например a, и за 12 ходов исчерпывает ее (последнее поле не должно быть угловым). Затем он переходит во внутренний квадрат, но не на букву A, а на любую другую. Пройдя все поля, помеченные ею, конь снова возвращается на раму – на букву, по которой еще не ходил, и вновь обегает квадрат, исчерпывая вторую букву, и т. д., пока не пройдет по всей доске.

Метод Полиньяка и Роже – деление на четверти. Этот метод проще предыдущего, хотя и похож на него. Разделим доску крестом на четыре квадрата (рис. 31). В каждом из них расставим буквы a, b, c, d точно так же, как во внутреннем квадрате на рис. 30. Конь начинает движение с любой буквы, проходит в выбранном квадрате по всем четырем полям с ней, затем переходит на ту же букву соседнего квадрата и т. д. Исчерпав все 16 полей с одной буквой, он меняет ее и снова зигзагом обегает доску. После четырех таких кругов все поля будут пройдены

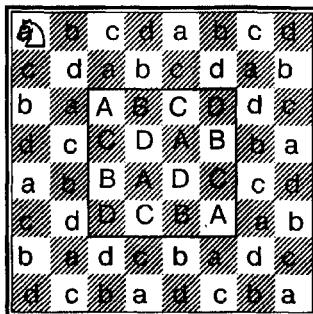


Рис. 30. Метод Мунка и Колдини.

(как и в предыдущем методе, «круговые» маневры не должны заканчиваться на угловом поле).

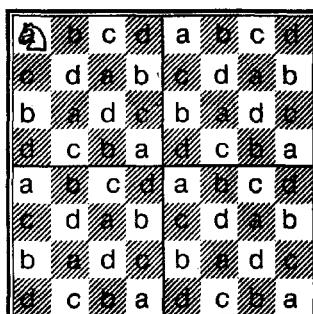


Рис. 31. Метод Полиньяка и Роже.

Поля в маршрутах и путях коня удобно нумеровать числами 1, 2, 3, ... в соответствии с порядком их посещения. В маршруте коня по всей доске начальное поле имеет номер 1, а конечное — 64. Разумеется, изменив направление маршрута на противоположное, всегда можно поменять между собой начальное и конечное поля. Очевидно, если маршрут замкнут, поля 1 и 64 связаны ходом коня. Поскольку цвет полей на каждом ходу меняется, все нечетные поля в маршруте одного цвета, а четные — другого.

Метод Эйлера и Вандермонда. В отличие от предыдущих этот метод позволяет получать самые разнообразные маршруты коня. В его основе лежит возможность замены обратными всех ходов, начиная с поля, связанного с конечным. В качестве примера рассмотрим маршрут на рис. 32а. Используя связь поля 31 с конечным 64, получим еще один маршрут. Оставим все числа 1, 2, ... 31 на своих местах, а числа 32, 33, ... 64 заменим соответственно на 64, 63, ... 32. Иначе говоря, один последовательный путь (от 32 до 64) мы заменяем другим, обратным (от 64 до 32). Теперь поле h4, поменявшее номер 32 на 64, стало конечным. Новый маршрут в старой нумерации полей можно записать так: от 1 до 31, ход 31—64, от 64 до 32.

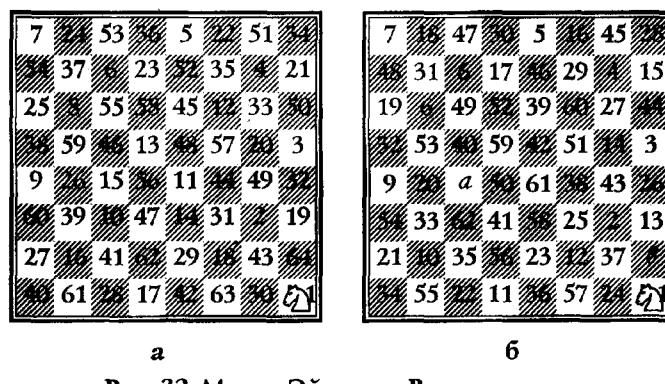


Рис. 32. Метод Эйлера и Вандермонда.

Указанный прием можно повторять многократно, получая все новые и новые маршруты. В исходном маршруте поле 49 также связано с 64, что дает нам другой производный маршрут: от 1 до 49, 49—64, от 64 до 50. В первом из найденных маршрутов поле 32 связано с 43, и мы можем получить второй производный маршрут: от 1 до 31, 31—64, от 64 до 43, 43—32, от 32 до 42 и т. д.

Если дан некоторый маршрут, то, проявив определенную изобретательность, его можно преобразовать так, чтобы любое заданное поле стало конечным (а значит, и начальным). Пусть, например, мы хотим сделать конечным поле d4 с но-

мером 56. Свяжем его с полем 64 такими ходами: 64–31 – 32–57–56. Теперь дважды преобразуем исходный маршрут коня (рис. 32а): 1) от 1 до 31, 31–64, от 64 до 32; 2) от 1 до 31, 31–64, от 64 до 57, 57–32, от 32 до 56. Последний маршрут заканчивается на поле d4, к чему мы и стремились. Описанным методом из открытого маршрута иногда удается получить замкнутый. Так, для превращения открытого маршрута на рис. 3, а в замкнутый достаточно заменить пути: от 11 до 17, от 10 до 1, от 18 до 31, от 64 до 57, от 32 до 45, от 56 до 46 следующими: от 1 до 7, от 8 до 17, от 18 до 31, от 32 до 39, от 40 до 53, от 54 до 64.

Основное достоинство последнего метода заключается в том, что он помогает завершить путь коня в тех случаях, когда мы двигались без всякой системы и попали в тупик — дальше идти некуда, а еще остались непройденные поля. Пусть, например, мы уже побывали на 62 полях доски (от 1 до 62 на рис. 32б), а поля *a* и *b* не посетили. Здесь поле *a* связано с 10, а поле 62 с 9. Это позволяет преобразовать путь от 1 до 62 в такой: от 1 до 9, 9–62, от 62 до 10. После перенумерации поле b2 меняет номер 10 на 62, и под номером 63 к пути присоединяется поле *a*. Осталось присоединить к пути поле *b*. Помогает то обстоятельство, что из двух последовательных полей 57 и 58 первое связано с *b*, а второе — с *a* (сейчас его номер 63). Теперь первоначальный путь превращается в такой: от 1 до 9, 9–62, от 62 до 58, 58–*a*, *a*–10, 10–57. После очередной перенумерации номер 63 получает бывшее поле 57, и, присоединяя к пути *b*, получаем наконец искомый маршрут (рис. 32а; нумерация здесь последовательная — от 1 до 64).

Рассмотренные преобразования далеко не единственны, позволяющие получать из одних маршрутов другие. Упомянем преобразования, связанные с поворотами доски и отражением ее относительно осей или центра симметрии. Заметим, кстати, что из одного замкнутого маршрута можно получить 127 новых: 63 сдвигом нумерации ходов, а из этих 64 — еще столько же изменением направления маршрута.

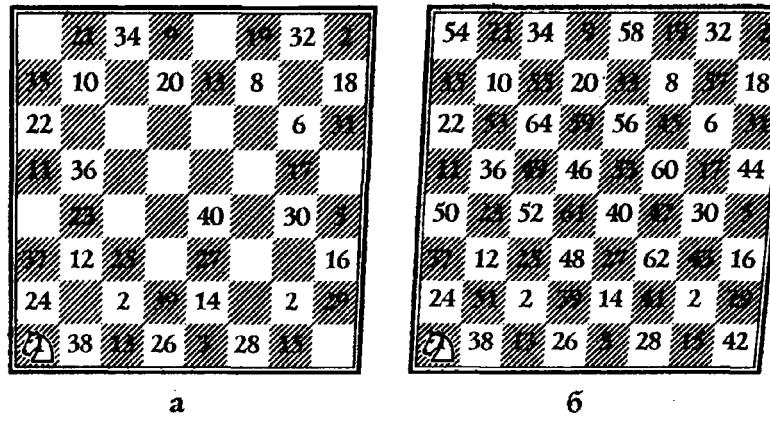


Рис. 33. Правило Варндорфа.

Вот самое простое и эффективное правило нахождения маршрутов коня на шахматной доске.

Правило Варндорфа. 1) При обходе доски коня следует на каждом ходу ставить на поле, с которого он может сделать наименьшее число прыжков на еще не пройденные поля; 2) если таких полей несколько, то выбор произволен.

Это правило было предложено более полутора столетия назад, и долгое время считалось, что оно действует безукоризненно. Но уже в наше время было установлено, что его вторая часть не совсем точна. Как установил при помощи компьютера А. Есаян, если в распоряжении коня имеется несколько возможностей, упомянутых в первой части правила, то не все они равнозначны. Оказывается, вольное применение второй части правила может привести коня в тупик. Впрочем, вероятность заблудиться невелика. Иногда завершить маршрут удается даже в том случае, если начало его произвольно.

На рис. 33а конь, начав путешествие с а1, уже сделал 40 ходов. В этой трудной ситуации, пользуясь правилом Варндорфа, ему удается благополучно завершить маршрут. С поля 40 он мог бы пойти, кроме f2 с номером 41, на поля c5, d6, f6 и g3, каждое из которых связано с тремя свободными. А с поля f2 у коня только два выхода — на h1 и d3. Этим и объясняется выбор — на него ставится число 41 (рис. 33б).

При следующем ходе возникает вопрос относительно полей h1 и d3. Второе связано с четырьмя свободными, а первое – только с одним g3, поэтому h1 и получает номер 42 (рис. 33б). С поля h1 ход определяется однозначно – на g3, номер 43. С него у коня выбор между полями f5 и h5, причем каждое связано с тремя свободными. Согласно правилу, можно выбрать любое из них, в нашем случае h5 (номер 44). Продвигаясь далее тем же способом, конь в конце концов попадет на поле с номером 64.

Строго говоря, по данному правилу обход доски следует начинать с углового поля, так как именно с него в начале меньше всего возможных прыжков – два. Путь коня на рис. 33а до поля 13 согласуется с указанным правилом, но очередной ход на e2 противоречит ему. С поля 13 у коня имелся выбор из пяти возможностей, и, как легко видеть, точнее было пойти на a2, а не на e2.

Правило Варнсдорфа весьма эффективно не только для обхода обычной доски, но и для других досок, если на них вообще имеется решение задачи.

Многие составители маршрутов коня стремились внести в свое занятие, насколько это возможно, эстетический элемент и достигли весьма любопытных результатов.

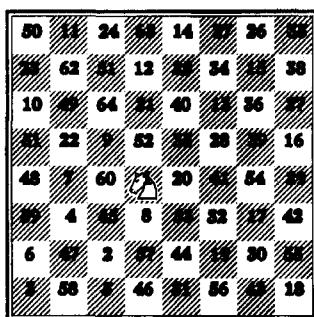


Рис. 34. Маршрут Яниша.

Маршрут, принадлежащий К. Янишу (рис. 34), примечателен в нескольких отношениях. Он замкнут, образует

полумагический квадрат (суммы чисел вдоль всех вертикалей и горизонталей равны 260) и, кроме того, обладает необычной симметрией – при повороте доски на 180° первая половина маршрута (номера от 1 до 32) превращается во вторую (номера от 33 до 64). Кстати, построить маршрут, образующий настоящий магический квадрат (сумма чисел вдоль главных диагоналей тоже равна 260), еще никому не удалось.

Со временем Эйлера известен так называемый раздельный маршрут коня: сначала находится путь по одной половине доски, затем он симметрично дублируется, и два пути соединяются вместе (рис. 35). Очевидно, раздельный маршрут является замкнутым.

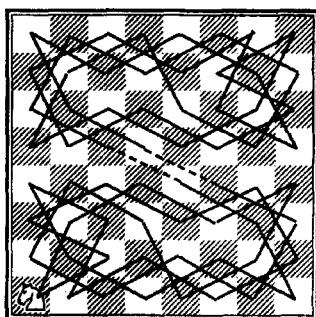


Рис. 35. Раздельный маршрут коня.

Для половины обычной доски – доски 8×4 – М. Крайчик нашел точное число решений. Это позволило ему подсчитать число раздельных маршрутов коня на доске 8×8 , которое и дает нижнюю границу в 30 млн для общего числа решений.

Если говорить о графиках маршрутов коня по доске, то здесь придумано множество необычных путешествий, изображающих различные предметы, знаки и буквы (например, букву N – решение, посвященное Наполеону). На рис. 36 показаны два примечательных примера такого рода.

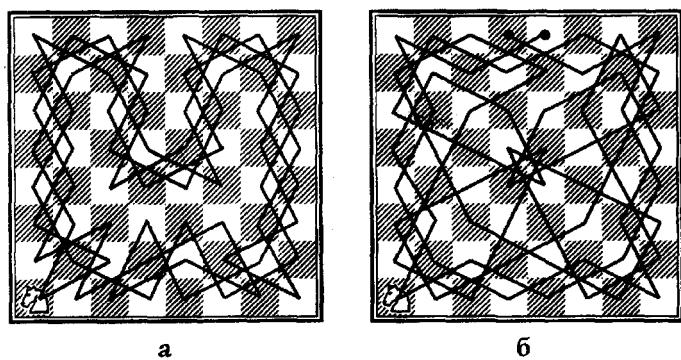


Рис. 36. Ваза и цветок.

График первого маршрута (рис. 36а) напоминает вазу, а график второго (рис. 36б) подобен цветку, части которого расположены в высшей степени симметрично.

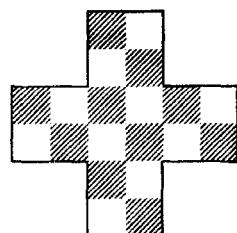


Рис. 37. Доска в виде креста.

Задача о ходе коня может быть поставлена для досок самой разной формы. Например, на рис. 8 конь обходит доску в виде креста, причем маршрут замкнутый. Иногда это остроумная головоломка, иногда серьезная проблема.

Ясно, что обходной маршрут коня, меняющего на каждом ходу цвет поля, может существовать только для досок, у которых число полей противоположного цвета либо одинаковое, либо отличается на 1 (во втором случае возможен только открытый маршрут). Так, доску на рис. 38 конь не в

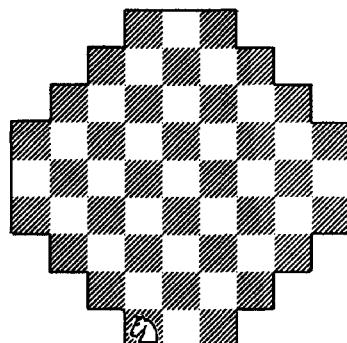


Рис. 38. Существует ли маршрут коня на этой доске?

состоянии обойти, поскольку на ней 32 черных поля и всего 25 белых!

Наиболее интересное обобщение задачи о ходе коня возникает при рассмотрении произвольных прямоугольных досок.

При каких значениях m и n конь может обойти все поля доски $m \times n$, посетив каждое из них по одному разу?

Если хотя бы одна из сторон доски меньше 3, то, очевидно, искомого маршрута нет (вырожденный случай — доска 1×1 , на нее просто достаточно поставить коня). Если одна сторона равна 3, то вторая должна быть либо равна 4, либо не меньше 7. При этом если она четна и не меньше 10, то имеется замкнутый маршрут. Если обе стороны больше 3, маршрут коня всегда существует, за исключением доски 4×4 . При этом на четных досках, если обе стороны больше 4, имеется замкнутый маршрут. Этим ответ на наш глобальный вопрос можно считать исчерпанным.

Исключения, касающиеся досок, одна из сторон которых равна 4, можно сформулировать в виде двух задач.

Доказать, что конь не может обойти доску 4×4 , посетив каждое ее поле один раз.

Подсчитаем общее число возможных ходов коня. Центральных полей четыре, и они дают максимум восемь ходов

(включая движение через углы). Остальные ходы образуют стороны квадратов $a2-b4-d3-c1$ и $a3-c4-d2-b1$. Поскольку квадраты замкнуты, из четырех ходов каждого в маршруте может быть использовано не более трех. Итак, всего имеем $8+3+3=14$ ходов. Однако чтобы обойти все поля доски 4×4 , требуется 15 ходов – противоречие.

Доказать, что при любом n на доске $n \times 4$ не существует замкнутого маршрута коня.

Предположим противное: пусть при некотором n замкнутый маршрут на доске $n \times 4$ существует. Поля крайних горизонталей назовем внешними, а остальные – внутренними. И тех и других имеется поровну – $2n$. Так как с внешних полей конь может попасть только на внутренние, то из $4n$ ходов, образующих замкнутый маршрут, половина именно таких. Тогда оставшиеся $2n$ ходов конь делает с внутренних на внешние. Поскольку на каждом ходу конь меняет цвет поля, то все крайние поля окрашены в один цвет, а все внутренние – в другой. Противоречие.

Из сказанного следует, что наименьшая по площади прямоугольная доска, которую может обойти конь, – 4×3 , любой мар-

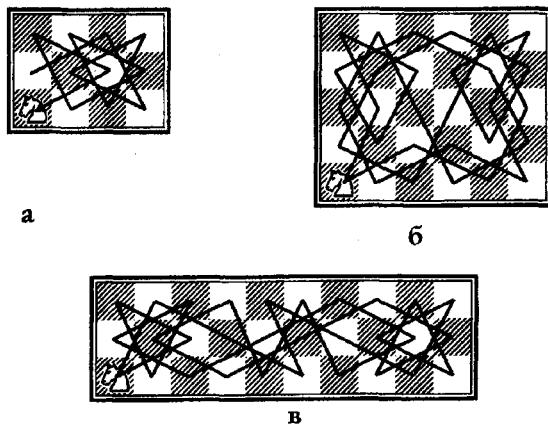
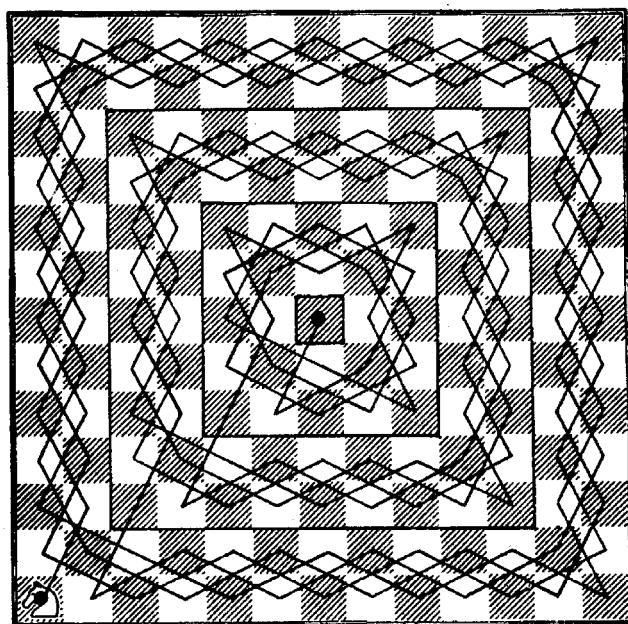
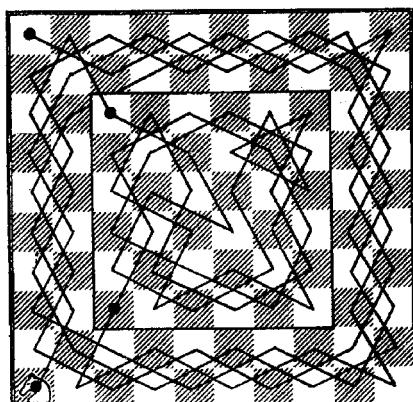


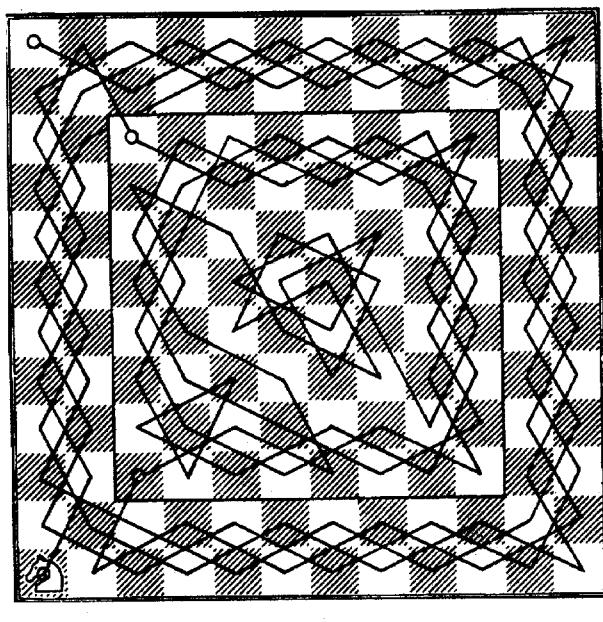
Рис. 39. Маршруты на досках 4×3 , 6×5 и 10×3 .



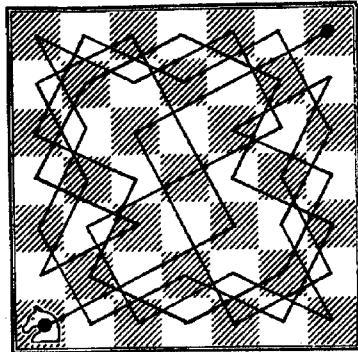
a



b



В



Г

Рис. 40. Маршруты коня на квадратных досках $n \times n$.

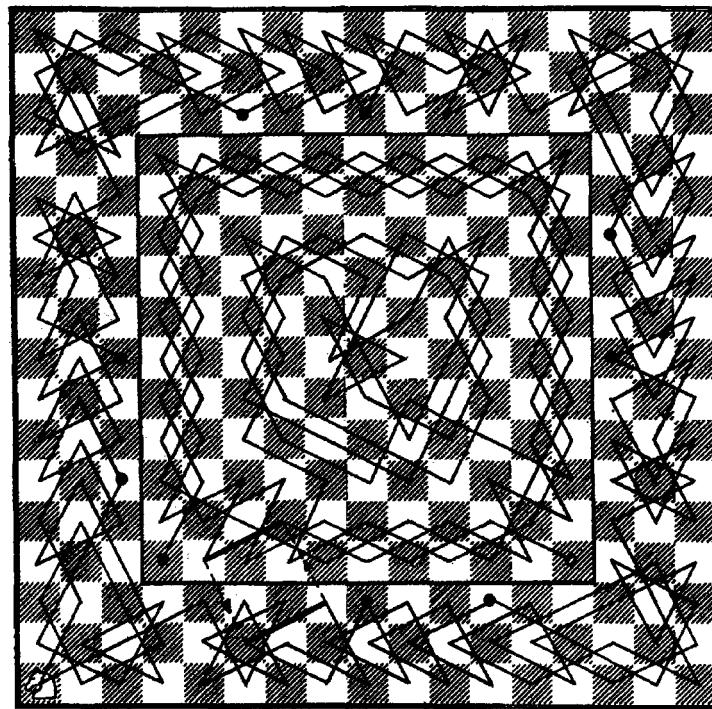


Рис. 40. Маршруты коня на квадратных досках $n \times n$.

шрут на ней открытый (рис. 39а); наименьшие по площади пря-
моугольные доски с замкнутыми маршрутами – 6×5 (рис. 39б)
и 10×3 (рис. 39в). Самая маленькая квадратная доска (квадрат
 1×1 не в счет) – 5×5 (центральный квадрат на рис. 40а). Она
нечетная, и маршрут, разумеется, открытый.

Итак, для любых $m, n \geq 5$ существует маршрут коня на доске
 $m \times n$ (замкнутый на четной доске и открытый на нечетной).
Доказательство этого проводится в несколько этапов. Снача-
ла для ряда основных досок небольших размеров маршруты
строятся непосредственно. Далее показывается, как в общем

виде доска больших размеров разбивается на ряд основных, для которых маршруты уже построены. Эти микромаршруты связываются между собой, и в результате образуется искомый маршрут коня. Известны различные наборы основных досок, например, в одном из решений их 37!

В целях экономии места мы ограничимся идеей и опустим такое громоздкое решение.

Другое дело квадратные доски. Здесь решение несколько проще и компактнее. Приведем оригинальный метод нахождения маршрутов коня на произвольной квадратной доске $n \times n$ ($n \geq 5$). На рис. 40а показано, как обойти доску при $n=4k+1$ ($n=5, 9, 13\dots$), на рис. 40, б – при $n=4k+2$ ($n=6, 10, 14\dots$), а на рис. 11в – при $n=4k$ ($k > 1, n=8, 12, 16\dots$). На рис. 40г и рис. 40д (внутренний квадрат) даны решения для досок 7×7 и 11×11 . Таким образом, мы имеем маршруты коня на всех досках $l \times l$ при $5 \leq n \leq 14$.

Общий метод построения вытекает из рис. 40д. Убедимся, что при любом $n \geq 14$ существует замкнутый обход полосы шириной в три поля, окаймляющей квадрат $(n-6) \times (n-6)$. На рисунке изображен обход такой полосы для доски 17×17 (полоса окаймляет квадрат 11×11). Обход полосы при $n > 17$ получается из данного увеличением числа треугольников между соответствующими парами полей, отмеченных точками. При $n=15, 16$ число треугольников на каждой стороне на два или на один меньше, а при $n=14$ точки сливаются, треугольники исчезают, и образуется маршрут на доске 14×14 , внутренний квадрат при этом имеет размеры 8×8 .

Если найден маршрут коня по внутреннему квадрату $(n-6) \times (n-6)$, то для получения маршрута по всей доске $n \times n$ достаточно исключить два хода, помеченных на рис. 40д жирными линиями, – один во внутреннем квадрате, второй в окаймляющей его полосе, и заменить их на два «пунктирных» хода, показанных стрелками.

Маршрут на произвольной доске $n \times n$ получается так: сначала конь идет по внутреннему квадрату, отвлекается на окаймляющую полосу, обходит ее целиком, возвращается в квадрат и благополучно завершает маршрут.

Решение на доске $n \times n$ ($n > 14$) по существу сводится к решению на доске $(n-6) \times (n-6)$. В конце концов мы приходим к доске $n' \times n'$, $9 \leq n' \leq 14$. Поскольку для всех таких досок маршруты уже найдены, задача полностью решена.

Описанный метод (он принадлежит Н. Неизвестаеву) дает возможность получать замкнутые маршруты коня на любой четной доске $n \times n$ ($n \geq 6$). Заметим, что маршруты на рис. 40а–в сами по себе не дают общего решения, так как не рассмотрен случай $n=4k+3$.

У нас использовались окаймляющие полосы шириной в три поля. А нельзя ли обойтись полосами шириной в два поля, как на рис. 40а–в? Оказывается, нет. Можно доказать, что конь обходит полосу лишь в том случае, если она окаймляет квадрат $(4k+1) \times (4k+1)$.

Маршрут, который проходит через все вершины графа по одному разу, называется Гамильтоновым. Задача его нахождения в общем случае довольно сложна, что ярко иллюстрируется на графах шахматных фигур, особенно коня. Этим в первую очередь и объясняется особая популярность задачи о ходе коня в теории графов.

Будем рассматривать перемещения коня между двумя полями, связанными между собой, например $\square b1-c3$ и $\square c3-b1$, как один ход (в графе коня этим полям соответствует одно ребро).

Можно ли из всех ходов коня составить маршрут по шахматной доске, содержащий каждый из них по одному разу (при этом поля доски можно посещать по нескольку раз)?

Поскольку в маршруте не должно быть повторений, то, попадая на некоторое поле одним способом, конь покидает его другим. Таким образом, каждое поле доски (кроме, быть может, начального и конечного) должно быть связано с четным числом полей. Однако на доске имеется восемь полей ($a2, b1$ и шесть симметричных им), с которых у коня по три хода на другие поля, т. е. указанное условие не выполняется, и ответ в этой задаче отрицательный.

Маршрут, который проходит через все ребра графа по одному разу, называется Эйлеровым. Таким образом, мы вы-

яснили, что в графе коня Гамильтонов маршрут существует, а Эйлеров — нет. Ниже будут построены маршруты по всем полям доски и для других фигур (для слона по одноцветным). Существование их означает, что в графах всех фигур имеются Гамильтоновы маршруты. Что же касается Эйлерова маршрута, то им обладает только граф ладьи.

До сих пор мы рассматривали всевозможные доски, но можно немного изменить и сам ход коня. Обычно конь перемещается на одно поле вдоль одной линии и на два вдоль другой, т. е. это фигура (1, 2). Фигура (a, b) ходит соответственно на a и b полей вдоль двух направлений. Фигуры, которые возникают при различных a и b , в шахматной композиции (в разделе фантастических шахмат) называются волшебными или сказочными, подробно о них речь впереди. Например, фигура (1, 3) — это верблюд. При желании вы можете заняться исследованием маршрутов фигуры (a, b) на доске $m \times n$ при различных значениях a, b, m, n .

Возникает следующий интересный вопрос.

При каких a и b фигура (a, b) с произвольного поля бесконечной доски может попасть на любое другое? Достаточно выяснить, при каких условиях конь может перейти с данного поля доски на соседнее по вертикали и горизонтали. Решение задачи требует использования аппарата теории чисел, и поэтому сразу дадим ответ: a и b должны иметь разную четность и быть взаимно просты.

Для коня (1, 2) условия выполняются, и он попадает куда угодно — и на бесконечной доске, и на конечной (в этом случае одна сторона не меньше трех, а вторая не меньше четырех). А вот верблюд (1, 3) может попасть только на поля того же цвета, что и исходное (оба числа 1 и 3 нечетны). Любопытно, что конь, как мы знаем, не может обойти все поля необычной доски на рис. 9, а вот верблюд может — рис. 12, причем его маршрут является замкнутым.

ФЕРЗЬ-БОГАТЫРЬ

Если конь – самая хитрая шахматная фигура, то ферзь – сильнейшая из них, богатырь на шахматной доске. Возможности ферзя чрезвычайно велики, и в шахматной математике он серьезно конкурирует с конем. Подобно тому, как среди головоломок о коне лидирует задача о ходе коня, среди головоломок о ферзе самая популярная – задача о восьми ферзях. Ей специально посвящена следующая глава.

Оригинальную задачу придумал М. Мамикон.

Может ли один белый ферзь перегнать черного короля из левого нижнего угла маленькой доски 4×3 (рис. 41) в ее правый верхний угол?

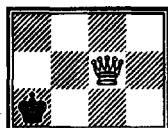


Рис. 41. Как перегнать короля из угла в угол?

Покажем сначала, как загнать короля в соседний угол:
1. $\mathbb{W}d2 \mathbb{Q}b1$ 2. $\mathbb{W}c3 \mathbb{Q}a2$ 3. $\mathbb{W}c1 \mathbb{Q}b3$ 4. $\mathbb{W}d2 \mathbb{Q}a3$, и цель достигнута. Однако перегнать короля в противоположный угол труднее: 1. $\mathbb{W}c3+ \mathbb{K}a2$ 2. $\mathbb{W}c1 \mathbb{Q}b3$ 3. $\mathbb{W}a1 \mathbb{Q}c2$ 4. $\mathbb{W}a2+ \mathbb{Q}c3$ (4... $\mathbb{Q}c1$ «проигрывает» быстрее: 5. $\mathbb{W}b3 \mathbb{Q}d2$ 6. $\mathbb{W}b1 \mathbb{Q}c3$ 7. $\mathbb{W}a2 \mathbb{Q}d3$) 5. $\mathbb{W}b1 \mathbb{Q}d2$ 6. $\mathbb{W}b2+ \mathbb{Q}d1$. Возникла позиция, симметричная исходной, но теперь короля нужно загнать уже в ближайший угол, что мы умеем делать. 7. $\mathbb{W}a2! \mathbb{Q}c1$ 8. $\mathbb{W}b3 \mathbb{Q}d2$ 9. $\mathbb{W}b1 \mathbb{Q}c3$ 10. $\mathbb{W}a2 \mathbb{Q}d3$. Предполагается, конечно, что белые сохраняют своего ферзя, иначе решение на ход короче: 6. $\mathbb{W}d3+! \mathbb{Q}c1$ 7. $\mathbb{W}b3 \mathbb{Q}d2$ 8. $\mathbb{W}b1 \mathbb{Q}c3$ 9. $\mathbb{W}a2 \mathbb{Q}d3$.

Аналогичным образом короля можно загнать в любой угол прямоугольной доски $m \times n$ большего размера. Но, что удивительно, на квадратных досках, в том числе на обычной, завлечь его на угловые поля, ближайшие к исходному, невозможно. Король блуждает между двумя противоположными углами, и ферзь не в состоянии отвлечь его от этой траектории.

В следующей головоломке, которая носит более реалистический характер, белому ферзю, по сути, тоже надо загнать неприятельского короля (без поддержки собственного!) в один из углов доски.

Задача о неприкосновенном короле. Белый король стоит на с6 и не имеет права двигаться. На доске также белый ферзь и черный король (например, положение такое, как на рис. 42). Всегда ли белые могут объявить мат черному королю?

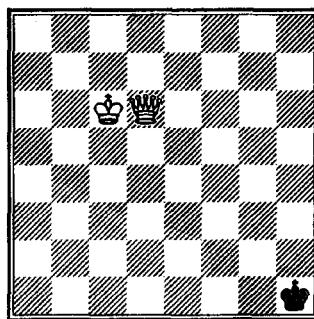


Рис. 42. Неприкосновенный король.

Хотя эта головоломка, известная еще в XIX в., занимательна по форме, она требует серьезного анализа. Удивительно, но даже гроссмейстеры, познакомившись с ней, приходят к выводу, что заматовать короля не удается. Правда, если шахматиста предупредить, что мат есть, он его находит.

В конце 1960-х гг. известные математики А. Брудно и И. Ландау для решения задачи решили привлечь компьютер. Рассматривались различные положения неприкосновенного

короля. И оказалось, что мат неизбежен только тогда, когда он занимает поле сб или одно из симметричных ему – с3, f3, f6. При короле в третьем ряду (3-я и 6-я горизонталь, вертикали «с» и «f») мат возможен лишь в исключительных случаях, в других ситуациях вообще отсутствует матовая позиция.

Машинна доказала, что, где бы ни находились белый ферзь и черный король, при неприкосновенном белом короле на указанных полях мат ставится не позднее 23-го хода. Позиция на рис. 2 как раз является рекордной по длительности игры. Прежде всего короля надо загнать в один из углов, a1 или h8.

1. ♕h6+ ♔g2 2. ♕h4 ♔g1 3. ♕h3 ♔f2 4. ♕g4 ♔f1
5. ♕g3 ♔e2 6. ♕f4 ♔e1 7. ♕f3 ♔d2 8. ♕e4 ♔d1 9. ♕e3
♔c2 10. ♕d4 ♔c1 11. ♕d3 ♔b2 12. ♕c4 ♔a1. Наконец черный король в углу. Теперь белые знакомым нам методом треугольника подталкивают его поближе к своему неподвижному предводителю. 13. ♕b4 ♔a2 14. ♕d4! ♔b1
15. ♕c3! ♔a2 16. ♕c1! ♔b3 17. ♕d2 ♔c4 18. ♕e3 ♔b4
19. ♕d3 ♔a4 20. ♕b5+ ♔a3 21. ♕b1! ♔a4 22. ♕b2 ♔a5
23. ♕a3X. Как видим, белому ферзю пришлось проявить немало изобретательности, чтобы справиться с черным королем.

Интересно, что это первая шахматная задача, которую машина решила раньше человека.

Но как компьютер справился с головоломкой? В распоряжении белого ферзя каждый раз выбор примерно из 20 возможностей, у черного короля – пяти, т. е. вариантов ход-ответ около 100 (белый король, естественно, не в счет).

Однако полный машинный перебор на глубину 20 ходов нереален даже при таком скромном материале: $100^{20}=10^{40}$ – астрономическое число. Но полный перебор в окончаниях никогда не используется, а применяется ретроспективный анализ или, иначе, метод ранжирования, где расчет идет не вперед, а назад.

В данном случае белый король прикован к полю сб, а в распоряжении двух других фигур имеется около 60 полей, т. е. всего положений меньше 4000, с учетом очереди хода – 8000. Все они легко умещаются в памяти машины. Среди них выделим множество позиций с матом черному королю (мат в 0 ходов) – РЧ₀ – нулевого ранга. Алгоритм ранжирования состоит в том, что для каждого $i=0, 1\dots$ осуществляется следующая двухэтапная процедура.

1) Рассмотрим все неранжированные позиции с ходом белых. Если в какой-то из них у ферзя есть хоть один ход, ведущий в РЧ_i, то она относится к рангу $i+1$. Множество всех таких позиций – РБ _{$i+1$} (в РБ_i белые ставят мат в 1 ход).

2) Рассмотрим все неранжированные позиции с ходом черных. Если в какой-то из них любой ход короля ведет к ранжированной (с ходом белых), то она тоже относится к рангу $i+1$ (меньший ранг получить не может, так как тогда была бы ранжирована раньше). В итоге мы имеем РЧ _{$i+1$} .

Работа алгоритма заканчивается, когда при очередном значении i не возникает новых ранжированных позиций. Ранг данной позиции – число ходов, за которое черный король получает мат при наилучших действиях обеих сторон.

Разумеется, данная схема ранжирования применяется гораздо шире – при исследовании тех или иных классов окончаний. Об этом речь пойдет в последней главе книги. Отметим, что профессор Брудно является одним из основоположников описанного метода, который уже 40 лет применяется всеми специалистами шахматного программирования.

Головоломка о неприкосновенном короле довольно занятна, но с точки зрения шахматиста имеет один дефект: в нормальной игре королю не запретишь ходить, и, стало быть, она несколько абстрактна. Однако профессор из Австрии И. Галумбирек придумал одну необычную конструкцию, где идея «неприкасаемости» реализуется при полном соблюдении шахматного кодекса.

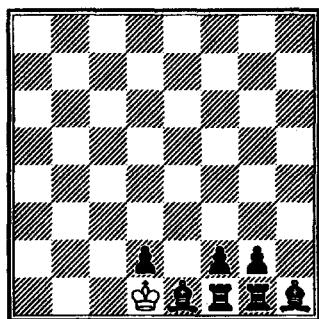


Рис. 43. Клубок фигур завязан.

Клубок фигур на рис. 43 зафиксирован, а вот белому ферзю и черному королю разрешается находиться всюду, где им заблагорассудится. Итак, королю белых не запрещено двигаться (формальных ограничений нет), но он сам не может позволить себе такую роскошь: после $\mathbb{Q} c2(e2) d1\mathbb{W}$ + черные фигуры вырываются на свободу.

В середине прошлого века Галумбирек опубликовал целую серию задач с различным положением белого ферзя и черного короля, одна из них на рис. 44.

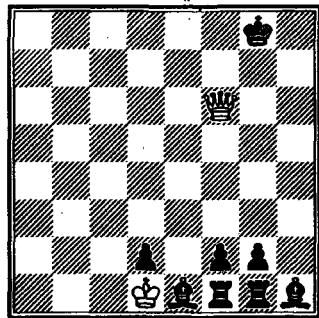


Рис. 44. Мат в 17 ходов.

В данной задаче, как и во всех родственных ей, ферзь загоняет неприятельского короля на поле h2, после чего следует $\mathbb{R} h4X$.

1. ♕e7! ♜h8 2. ♕g5 ♜h7 3. ♕e5! ♜g8 4. ♕f6 ♜h7 5. ♕f8
 ♜g6 6. ♕e7 ♜f5 7. ♕d6 ♜e4 8. ♕c5 ♜d3 9. ♕b4 ♜e3 10.
 ♕c4 ♜f3 11. ♕d4 ♜g3 12. ♕e4 ♜h3 13. ♕e6+! ♜g3 14. ♕f5
 ♜h4 15. ♕g6 ♜h3 16. ♕g5 ♜h2 17. ♕h4x.

В те годы решение задачи — кратчайший путь к мату — искали без помощи машины. Но после того как был открыт ретроанализ, изучением схемы Гадумбирека занялась машина. И в результате она, с одной стороны, убедилась в корректности всех предложенных ранее задач, а с другой, нашла ряд новых интересных позиций, в том числе рекордную по длительности игры — решение в ней оказалось почти вдвое длиннее. (рис. 45).

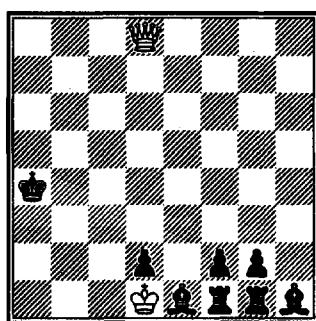


Рис. 45. Мат в 32 хода.

Вот как при наилучшей игре обеих сторон ферзь заманивает черного короля на поле h2: 1. ♕a8+ ♜b3 2. ♕a1 ♜b4 3. ♕a2 ♜b5 4. ♕a3 ♜b6 5. ♕a4 ♜b7 6. ♕a5 ♜b8 7. ♕a6 ♜c7 8. ♕b5 ♜c8 9. ♕b6 ♜d7 10. ♕c5 ♜d8 11. ♕c6 ♜e7 12. ♕d5 ♜e8 13. ♕d6 ♜f7 14. ♕e5 ♜f8 15. ♕e6 ♜g7 16. ♕f5 ♜h8 17. ♕g5 ♜h7, и на доске позиция, возникшая после двух ходов предыдущего решения: 17+15 = 32.

Компьютер доказал, что если черный король находится вне квадрата a1, a2, b1, b2, то ферзь загоняет его на критическое поле h2 и ставит мат не позднее 32-го хода; если же королю удается прорваться в левый нижний угол доски, то из этой крепости его вообще не выманить. Впрочем, неожидан-

но выяснилось, что при черном короле на a1 и белом ферзее на одном из девяти полей, с которых он контролирует поле d1 (d3, d5, d6, d7, d8, e2, f3, g4, h5), король получает мат и в самом «надежном» месте: 1. ♕c2! d1#+ (при 1... ♕a2 следует мат по линии «а») 2. ♕:d1+ ♕a2 3. ♕b1+ ♕a3 4. ♕b3X. Но это решение, как говорят композиторы, не тематическое, а возникло случайно.

Следующая задача также служит иллюстрацией возможностей ферзя-богатыря.

На бесконечной доске находятся два белых ферзя и черный король. За сколько ходов белые могут поставить мат?

Каковы бы ни были размеры доски — даже если она бесконечная! — и где бы вначале ни стояли фигуры, мат дается не позднее четвертого хода. Первым ходом один из ферзей объявляет шах, скажем, по вертикали. В ответ на отступление короля на одну из соседних линий вторым ходом другой ферзь с помощью первого зажимает короля на двух вертикалях (доска на рис. 46 — фрагмент бесконечной).

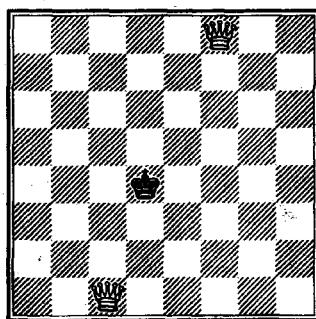


Рис. 46. Мат на бесконечной доске.

Теперь на любое движение короля следует горизонтальный шах и мат следующим ходом, например: 2... ♕e4 3. ♕c4+ ♕e5 (e3) 4. ♕ff4X.

Головоломки о маршрутах по доске интересны для всех фигур, а не только для коня.

За какое наименьшее число ходов ферзь обойдет всю доску (останавливаться на каждом поле необязательно)?

Открытый маршрут на рис. 7а состоит из 15 ходов. Но если разрешить ферзю пробегать мимо некоторых полей дважды, то один ход можно сэкономить – рис. 7б. Этот 14-ходовый маршрут замкнут и, как и все кратчайшие, самопересекается.

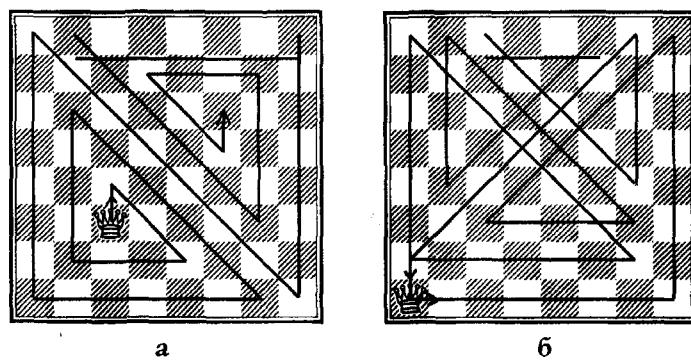


Рис. 47. Маршруты ферзя по доске.

Какой геометрически самый длинный несамопересекающийся путь может сделать ферзь за пять ходов, начиная с d1?

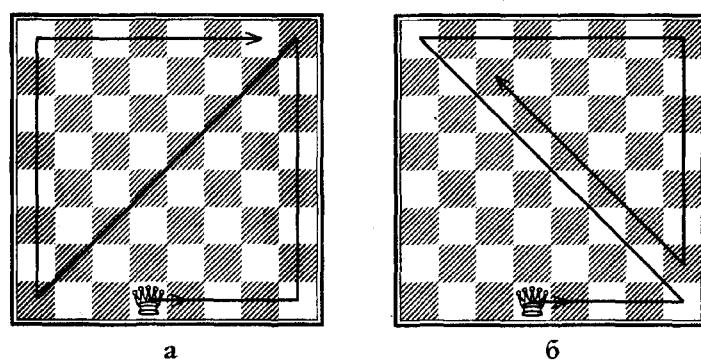


Рис. 48. Путь ферзя за 5 ходов.

Искомый путь ферзя показан на рис. 48а. Но чаще предлагаются путь на рис. 48б. Число полей во втором пути действительно больше ($32 > 30$), однако геометрически он короче. Убедимся в этом. Считая ширину поля за 1, для первого пути имеем:

$$d_1 = 4 + 7\sqrt{2} + 7 + 6 + 5\sqrt{2} = 17 + 12\sqrt{2};$$

$$d_2 = 4 + 7 + 7\sqrt{2} + 7 + 6 = 24 + 7\sqrt{2}.$$

Итак, $d_1 - d_2 = 5\sqrt{2} - 7 \approx 0,07$, т. е. первый путь лишь на сотые доли, но все-таки длиннее второго.

На очереди одна полулучточная головоломка.

Может ли ферзь за четыре хода обойти все поля доски 3×3?

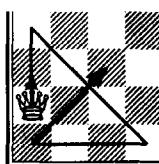


Рис. 49. Обойти доску 3×3 за 4 хода.

На рис. 49 показан путь ферзя по всем полям маленькой доски. А шутка заключается в том, что достичь цели можно лишь дважды покинув доску 3×3.

Задача о ферзях-часовых. Около каждой тюремной камеры можно поставить часового. Находясь у одной из них, часовой видит, что происходит в других, от которых к данной ведут коридоры. Какое наименьшее число часов требуется для наблюдения за всеми камерами?

Если шахматную доску рассматривать как тюрьму (да прости нам шахматисты такую аналогию), причем ее поля считать камерами, а вертикали, горизонтали и диагонали — коридорами, то часовыми естественнее всего назначить ферзей, которые ведут наблюдение во всех направлениях. При этом задача о часовых приобретает следующую шахматную формулировку.

Какое наименьшее число ферзей достаточно расположить на доске, чтобы они контролировали все ее свободные поля?

Оказывается, пять ферзей вполне способны справиться с шахматной тюрьмой, а четырех уже недостаточно — по меньшей мере два поля останутся без присмотра. Например, при ферзях на a6, b2, e7 и g4 не атакованы поля d5 и h1. Доказано, что всего имеется 4860 расстановок пяти ферзей-часовых.

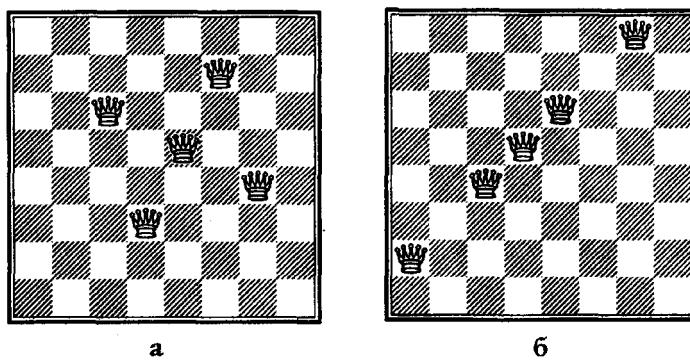


Рис. 50. Пять ферзей-часовых.

В расстановке на рис. 50а ферзи держат под обстрелом все свободные поля доски, но сами друг за другом не следят. А на рис. 50б ферзи стоят на одной диагонали и, значит, охраняют все 64 поля доски, включая занятые ими.

С увеличением размеров доски необходимое число ферзей-часовых, естественно, увеличивается. Любопытно, однако, что пяти ферзей хватает и для контроля над всеми свободными полями досок 9×9, 10×10 и даже 11×11. На рис. 51 расположение ферзей показано сразу для трех этих досок. Внутренний квадрат — доска 9×9; квадрат, который получается при отрезании верхней горизонтали и правой вертикали, — доска 10×10; наконец, внешний квадрат — доска 11×11.

В общем случае для доски $n \times n$ задача очень сложная, и получены лишь оценки для наименьшего числа $p(n)$ ферзей-часовых, охраняющих все ее свободные поля:

$$n/2 - 1/2 \leq p(n) \leq 5n/8 + 16\sqrt{n}.$$

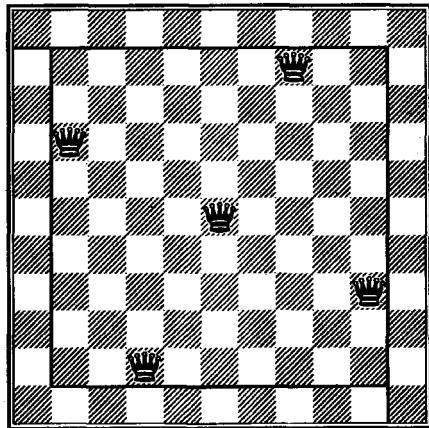


Рис. 51. Ферзи-часовые на трех разных досках.

Рассставить на доске восемь ферзей, чтобы вне их контроля оказалось наибольшее число полей.

В этой старинной задаче, наоборот, ферзей требуется поставить так неуклюже, чтобы побольше полей оказалось вне их контроля. Искомое число равно 11, на рис. 52 свободные поля помечены точками (кстати, всего существует семь принципиально разных видов расстановок, удовлетворяющих условию задачи; и данная позиция – самая симпатичная).

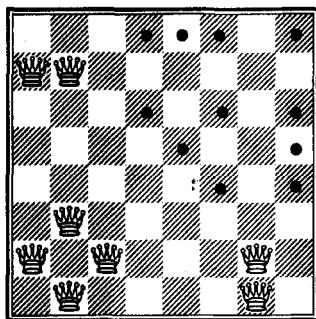


Рис. 52. На доске 11
безопасных полей.

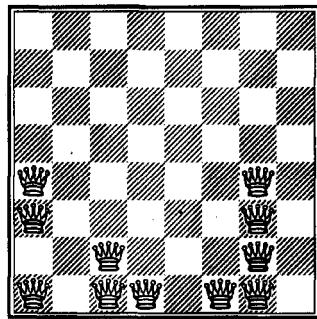


Рис. 53. Рекорд с 11
ферзями.

Рассставить наибольшее число ферзей-часовых, чтобы при снятии любого из них на доске появлялось одно безопасное поле.

Эту головоломку связывает с предыдущей общий ответ – 11 ферзей (рис. 53).

Какое наименьшее число ферзей достаточно рассставить на доске $n \times n$, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стоял хотя бы один из них?

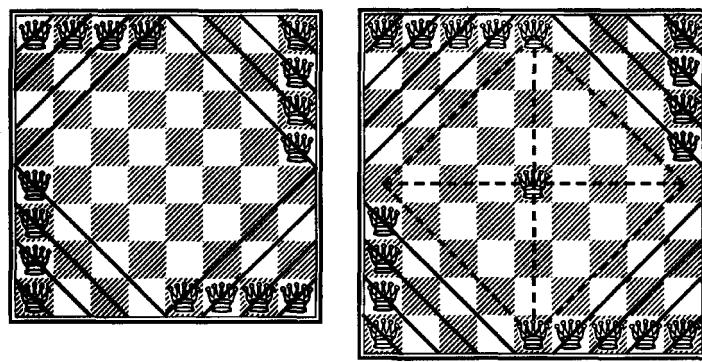


Рис. 54. На каждой линии ферзь.

Убедимся, что при четном n достаточно $2n$ ферзей (в частности, 16 на шахматной доске 8×8 – рис. 54а), а при нечетном – $2n+1$ ферзей (19 на доске 9×9 – рис. 54б). При четном n на каждой из линий, помеченных отрезками (рис. 54а), должен стоять ферзь. Всего отрезков $2n$, столько нужно и ферзей.

Рассмотрим случай нечетного n (рис. 54б). На каждом из сплошных отрезков, расположенных вне пунктирного квадрата, должен стоять ферзь, таких отрезков $2n-2$. На каждом из пунктирных отрезков тоже должен стоять ферзь. Для этого придется добавить еще трех ферзей: если ограничиться двумя, то их надо поставить в противоположные вершины пунктирного квадрата, но тогда останется свободной его диагональ (пятая горизонталь доски 9×9). Итого, нужно $2n+1$ ферзей.

ЗАДАЧА О ВОСЬМИ ФЕРЗЯХ

Итак, данная глава посвящена одной из самых знаменитых, наряду с задачей о ходе коня, головоломок. Она содержится чуть ли не в каждой книге по занимательной математике.

Сколько способами можно расставить на шахматной доске восемь ферзей, чтобы они не угрожали друг другу, т. е. никакие два не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?

Если задачей о ходе коня занимался Леонард Эйлер, то задача о восьми ферзях в середине XIX в. привлекла внимание другого великого математика — Карла Гаусса.

Конечно, в шахматах фигуры одного цвета не угрожают друг другу. И когда мы говорим, пользуясь общепринятой в шахматной математике терминологией, что две фигуры угрожают друг другу (нападают, находятся под ударом, атакуют, бьют и т. д.), то имеем в виду лишь то, что поля, на которых они стоят, связаны между собой ходом этой фигуры. А если несколько фигур не угрожают друг другу, то для удобства мы их называем «мирными».

Очевидно, больше восьми ферзей расставить невозможно (хотя бы на одной вертикали и горизонтали их окажется не меньше двух). А найти то или иное решение несложно, на рис. 55а-г представлены четыре расстановки мирных ферзей.

Гораздо труднее подсчитать общее число решений, в чем, собственно, и состоит задача. Любопытно, что многие авторы приписывают ее самому К. Гауссу. На самом деле задача была поставлена в 1848 г. немецким шахматистом М. Бенделем. Доктор Ф. Найд обнаружил 60 решений и опубликовал их в газете *Illustrierte Zeitung* спустя два года — 1 июня 1850 г. Лишь после этого Гаусс заинтересовался задачей и нашел 72 решения, которые сообщил в письме к своему другу астроному Шу-

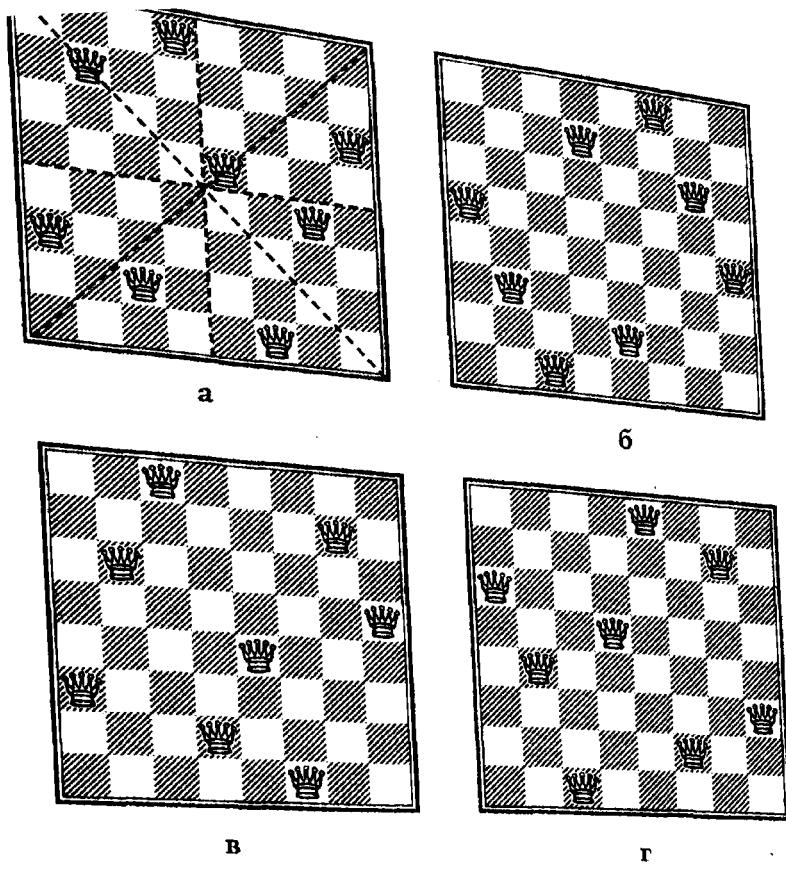


Рис. 55. Задача о восьми ферзях.

макеру от 2 сентября того же года. Полный же набор решений, состоящий из 92 расстановок, получил все тот же Наук. Он привел их в упомянутой газете от 21 сентября 1850 г. Эта хронология установлена исследователем математических развлечений В. Аренсом.

Строгое доказательство того, что 92 расстановки исчерпывают все возможности, было получено лишь в 1874 г. английским математиком Д. Глэшером (при помощи теории определителей). Забегая вперед, отметим, что основных решений имеется только 12. Известно много способов эффективного

поиска расстановок ферзей — Пермантье, Ла-Ное, Гюнтера, Глэшиера, Лакьера и др.

В наш компьютерный век задача не вызвала бы столь живой интерес. Ведь достаточно составить несложную программу, и сразу после введения ее в машину все необходимые позиции будут найдены. Надо сказать, что эта комбинаторная головоломка содержится во многих учебниках по программированию, так как служит хорошим примером для создания алгоритма решения переборной задачи. Она достаточно типична, а алгоритм решения можно записать в удобной и компактной форме.

Общая идея поиска расстановок такова. Первого ферзя ставим на какое-нибудь поле вертикали «*a*»; второго — на вертикаль «*b*», но чтобы он не нападал на первого; третьего — на вертикаль «*c*», но чтобы он не угрожал первым двум и т. д. Так продолжаем до тех пор, пока восьмой, последний ферзь не займет свое законное место на вертикали «*h*». Если в какой-то момент не найдется свободного места на следующей вертикали, делаем шаг назад — переставляем ферзя на другое место предыдущей вертикали и снова идем вперед. Если и эта попытка не увенчается успехом, отступаем еще на одну вертикаль, а потом снова двигаемся вперед. Найдя одну из расстановок ферзей, удаляем последнего, а для седьмого ищем новое место на вертикали «*g*». Дальше в зависимости от обстоятельств продолжаемся вперед или назад по той же схеме. Конечно, иногда придется переставлять и самого первого ферзя на вертикали «*a*». Поменяв его место, вновь идем вперед. В конце концов возникнет ситуация, когда мы не сумеем найти ни одной новой расстановки. Работа алгоритма закончена, все решения получены, попутно найдено их число.

Нашим рассуждениям можно придать более строгий, математический вид. Заметим, что в них были использованы три вида движения: «вперед», когда закреплено положение *i*-го ферзя и мы переходим к (*i*+1)-му; «вбок» — в процессе нахождения места для этого (*i*+1)-го; наконец, «назад» — если поставить (*i*+1)-го ферзя не удалось и надо менять место *i*-го.

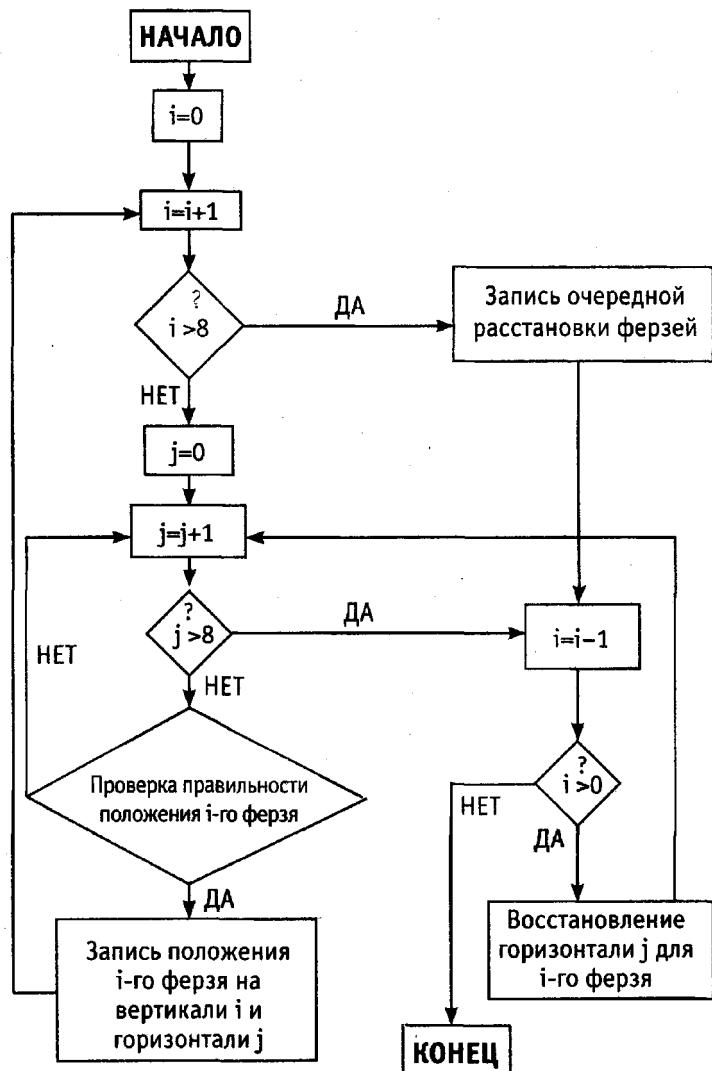


Табл. 1. Блок-схема алгоритма решения задачи о восьми ферзях.

После этого словесного описания легко нарисовать блок-схему одного из реальных алгоритмов решения задачи о восьми ферзях – в виде отдельных шагов его работы (табл. 1). Здесь через i обозначен номер очередной вертикали в алгоритме, а через j – номер горизонтали для ферзя i -й вертикали ($i, j=1, 2, \dots, 8$). Убедитесь сами, что блок-схема в данной таблице действительно отвечает алгоритму решения задачи.

Для ускорения алгоритма существуют разные способы. Например, при фиксировании места для очередного ферзя можно запоминать не только его горизонталь, но и диагональ. Тогда при движении «вперед» ставить ферзя на эти линии нет смысла, и алгоритм работает быстрее.

Среди 92 решений задачи можно выделить 12 основных, которые не переходят друг в друга при помощи поворотов и зеркальных отражений доски, а любая другая расстановка возникает из какой-то основной при помощи этих преобразований. Вот один из наборов основных расстановок: 1) рис. 55а; 2) рис. 55б; 3) a4, b1, c5, d8, e6, f3, g7, h2; 4) a4, b2, c5, d8, e6, f1, g3, h7; 5) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g1, h5; 6) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g5, h1; 7) a3, b5, c2, d8, e6, f4, g7, h1; 8) a4, b1, c5, d8, e2, f7, g3, h6; 9) a4, b7, c3, d8, e2, f5, g1, h6; 10) a6, b4, c2, d8, e5, f7, g1, h3; 11) a4, b8, c1, d5, e7, f2, g6, h3; 12) a4, b2, c7, d5, e1, f8, g6, h3.

Остальные 80 расстановок получаются из этих 12 при помощи поворотов и отражений доски¹. Например, из расстановки на рис. 55а при повороте доски по часовой стрелке на 90° возникает расстановка на рис. 55в, а при зеркальном отражении (относительно вертикальной линии, разделяющей фланги) – на рис. 55г. Новые повороты и отражения (относительно других линий) дают еще пять расстановок, всего с учетом исходной – восемь.

¹ Здесь и всюду мы пользуемся традиционной терминологией. Конечно, система координат фиксирована, т. е. сама доска неподвижна, и точнее было бы говорить о поворотах и отражениях не доски, а тех или иных позиций.

Аналогично другие основные расстановки порождают восемь решений, исключение — расстановка на рис. 55б: она дает только одну новую при повороте доски и две при отражении, итого четыре. Итак, всего имеем $11 \times 8 + 1 \times 4 = 92$ расстановки восьми ферзей, не угрожающих друг другу.

Каждая из расстановок «мирных» ферзей обладает теми или иными свойствами, скажем, в первой из них никакие три ферзы не стоят на одной прямой, проведенной через центры полей (имеются в виду не только параллельные вертикалям, горизонталям и диагоналям доски, но и прямые с любыми углами наклона). Вторая расстановка отличается отсутствием ферзей в центре доски (квадрате 4×4) и на главных диагоналях и т. д.

Всякое решение задачи о восьми ферзях можно записать как набор (t_1, t_2, \dots, t_8) , представляющий собой перестановку чисел 1, 2, ..., 8. Здесь t_i — номер горизонтали, на которой стоит ферзь i -й вертикали. Так как никакие два ферзы не находятся ни на одной горизонтали, ни на одной диагонали, то, с одной стороны, все числа t_i различны, а с другой, для любых i, j ($i < j \leq 8$) имеем: $|t_i - t_j| \neq |j - i|$.

Возьмем две перестановки $(1, 2, \dots, 8)$ и $(8, 7, \dots, 1)$ и сложим числа каждой из них с числами произвольной другой, например $(3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6)$:

$$\begin{array}{r} + 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ + 3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6 \\ \hline 4, 9, 5, 12, 10, 7, 11, 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \\ + 3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6 \\ \hline 11, 14, 8, 13, 9, 4, 6, 7 \end{array}$$

Полученные суммы образуют два набора: $(4, 9, 5, 12, 10, 7, 11, 14)$ и $(11, 14, 8, 13, 9, 4, 6, 7)$. Возникает следующая задача.

Какие перестановки чисел от 1 до 8 дают в результате указанной операции сложения два набора, в каждом из которых все элементы различны?

Задача о восьми ферзях заинтересовала Гаусса именно в связи с этой арифметической проблемой. Оказывается, между решениями шахматно-комбинаторной и числовой задач имеется взаимно однозначное соответствие: каждая расстановка восьми

ферзей, не угрожающих друг другу, дает решение арифметической задачи, и наоборот. Для выбранной перестановки оба набора состоят из восьми разных чисел, и это не случайно — она соответствует первой основной расстановке ферзей (рис. 55а).

В математической литературе — и серьезной, и занимательной — популярной является более общая задача о ферзях.

Задача об n ферзях. Рассставить n ферзей на доске $n \times n$, чтобы они не угрожали друг другу.

На доске 1×1 ферзь ставится на одно-единственное поле, и для $n=1$ задача решена. На доске 2×2 один ферзь держит под обстрелом все поля, на доске 3×3 умещаются только два мирных ферзя. Итак, для $n=2, 3$ задача не имеет решения. Эти два случая представляют собой исключение, а для всех $n > 3$ удается расставить n мирных ферзей на доске $n \times n$. На рис. 56а–б показаны необходимые расстановки на досках 4×4 и 5×5 .

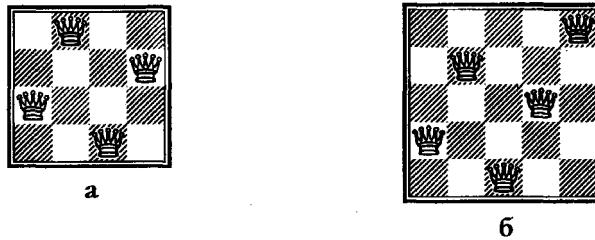


Рис. 56. Мирные ферзи на досках 4×4 и 5×5 .

Опишем одну из возможных схем расположения n ферзей, не угрожающих друг другу, на доске $n \times n$ при $n \geq 6$. Для этого рассмотрим отдельно три случая.

1) Пусть n четно. Тогда его можно представить в одном из трех видов: $n=6k$, $n=6k+2$ и $n=6k+4$, где $k \geq 1$. Для $n=6k, 6k+4$ расположим одну половину ферзей на $n/2$ левых вертикалях доски ходом коня, начиная со второй горизонтали, а вторую половину — тем же способом на $n/2$ правых вертикалях, начиная с первой горизонтали. Расстановки на досках 6×6 и 10×10 , полученные таким способом, показаны на рис. 57а–б.

2) Для досок $n=6k+2$ этот способ не годится, и будем действовать иначе. Расположим ферзей ходом коня со второй вертикали по $(n/2-2)$ -ю, начиная с третьей горизонтали, и далее с $(n/2+3)$ -й вертикали по $(n-1)$ -ю, начиная с шестой горизонтали. Свободными остаются шесть вертикалей и шесть горизонталей доски, и ферзей надо поставить на поля со следующими координатами: $(1, n-3); (n/2-1, 1); (n/2, n-1); (n/2+1, 2); (n/2+2, n); (n, 4)$. При $n=14$ ($k=2$) имеем расстановку на рис. 57в. На доске 8×8 ($k=1$) расстановка восьми ферзей совпадает с рис. 55б, но уловить закономерность трудно.

3) Осталось рассмотреть нечетные n . Обратим внимание, что во всех расстановках при четных n главная диагональ доски (идущая из левого нижнего угла в правый верхний) остается пустой. Учитывая это, для расстановки n ферзей на нечетной доске $n \times n$ поступим так. На первых $n-1$ вертикалях и $n-1$ горизонталях поставим $n-1$ ферзя, как это положено на четной доске (число $n-1$ четно), а затем n -го разместим в правом верхнем углу. На рис. 57г таким приемом наша популярная расстановка восьми ферзей (рис. 57б) превращается в расстановку девяти мирных ферзей на доске 9×9 (аналогично расстановка пяти ферзей на доске 5×5 получилась из расстановки четырех на доске 4×4 – рис. 56).

В табл. 2 указано число решений задачи об n ферзях для n от 1 до 12. Нахождение общей формулы представляет собой весьма сложную проблему. Правда, для конкретных случаев можно обратиться к компьютеру, использовав, например, описанный выше алгоритм. Для этого в счетчиках циклов блок-схемы (табл. 1) достаточно число 8 заменить соответствующим значением n .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число решений	1	0	0	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200

Табл. 2. Число решений для различных досок.

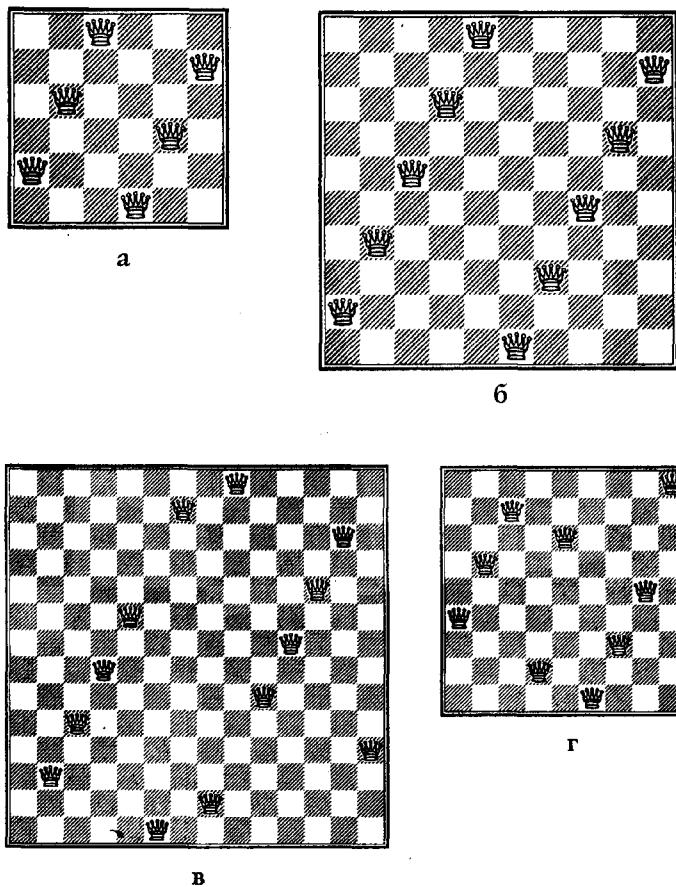


Рис. 57. Задача об n ферзях.

При упомянутых выше преобразованиях доски в общем случае — n мирных ферзей на доске $n \times n$ — возможны три варианта: 1) три поворота на 90° и четыре отражения приводят к семи новым расстановкам (а всего получаем восемь), исходная позиция — простая; 2) при одном повороте возни-

кает новая расстановка, отражения дают еще две, исходная позиция — симметрическая; 3) при одном отражении получается новая расстановка, а повороты и другие отражения новых расстановок не дают, исходная позиция — дважды симметрическая. Для обычной доски каждая расстановка либо простая, либо симметрическая, дважды симметрических нет.

Заметим, что если рассматривать произвольные расстановки ферзей (им разрешается угрожать друг другу), то возможны и трижды симметрические позиции, никакие преобразования их ничего нового не дают. Возьмем, например, симметрическую расстановку восьми ферзей на доске 8×8 (рис. 58). Очевидно, при любых поворотах и отражениях доски она всегда остается на месте (в классической задаче о ферзях такие расстановки отсутствуют).

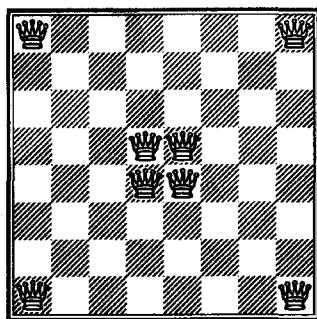


Рис. 58. Расстановка не меняется при любых преобразованиях доски.

Итак, при переходе к доскам $n \times n$ расстановки ферзей могут приобретать новые свойства. Так, на доске 4×4 имеется всего одна основная расстановка, причем дважды симметрическая (рис. 56а), а всего — две. На доске 5×5 основных расстановок две (на рис. 56б показана одна из них), а общее число равно десяти, причем из них можно выбрать пять таких, при

наложении которых друг на друга 25 ферзей заполняют все поля доски.

В общем случае доказано, что n расстановок ферзей при наложении друг на друга могут заполнить всю доску $n \times n$ только при n не кратных двум и трем. Из этого, в частности, следует, что на стандартной доске подобрать восемь расстановок, заполняющих все 64 поля доски, невозможно.

Обобщая арифметическое свойство решений задачи о восьми ферзях, получаем, что расстановка n ферзей (t_1, t_2, \dots, t_n) на доске $n \times n$ является искомой, если для любых i, j ($i < j \leq n$) имеет место: $|t_j - t_i| \neq j - i$. Таким образом, проблема n ферзей сводится к чисто математической задаче о нахождении перестановки чисел 1, 2, ..., n , удовлетворяющей указанному условию. Исследования на эту тему не раз публиковались в серьезных математических журналах.

Рассмотрим еще несколько задач о расстановках ферзей.

На доске $n \times n$ ($n > 1$) расположить $2n$ ферзей, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не более двух из них.

На рис. 59а показана расстановка 16 ферзей на доске 8×8 , а на рис. 59б – 18 ферзей на доске 9×9 , обе они удовлетворяют

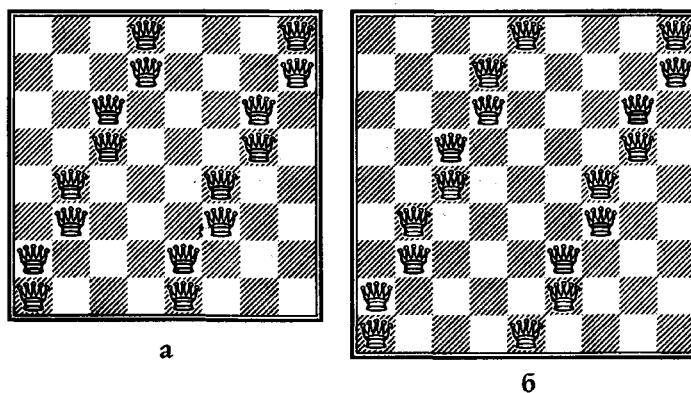


Рис. 59. Задача о $2n$ ферзях.

условиям задачи. Первое решение легко обобщается для всех четных досок (ферзи располагаются парами), а второе — для всех нечетных (одна пара разбивается).

Рассставить на обычной доске 16 ферзей, чтобы ни на одной линии не стояло больше двух.

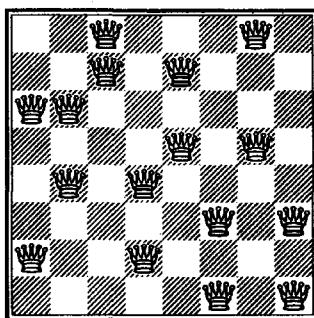
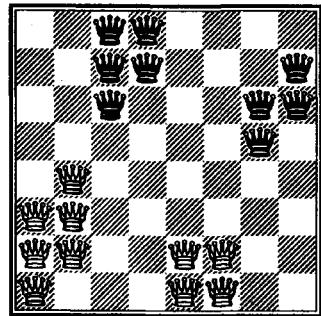


Рис. 60. На каждой прямой не больше двух ферзей.

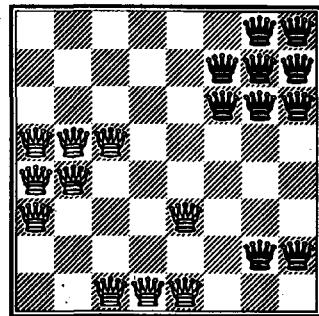
В отличие от задачи о восьми ферзях здесь речь идет не об обычных линиях доски, а о любых прямых, проходящих через центры полей. Восемь мирных ферзей мы уже расставляли таким образом (рис. 55а). Оказывается, можно уместить и вдвое больше ферзей, которые, конечно, уже не являются мирными (рис. 60).

Рассставить 10 белых и 9 черных ферзей, чтобы ни один из них не находился под ударом неприятельского.

Автор позиции на рис. 61а В. Франген позднее нашел еще одну. Чтобы ее получить, надо снять с доски белого ферзя с e2 и добавить черного на h5, после чего поменять цвет всех ферзей. Франген полагал, что существуют только эти два решения (повороты и отражения, как обычно, не в счет), причем в обоих ферзи образуют четыре островка. Однако спустя 10 лет было найдено принципиально иное решение (рис. 61б). Здесь один белый ферзь оторвался от связанный группы, и теперь на доске пять островков, а не четыре. Эта расстановка уже исчерпывает все виды необходимых позиций.



a



б

Рис. 61. Ферзи разного цвета не угрожают друг другу.

Какое наибольшее число ферзей разного цвета можно расставить на доске, чтобы белые и черные не угрожали друг другу?

После предыдущей задачи эта выглядит ловушкой. Искомое число ферзей равно 43! Например, белые ставят одного ферзя на любое крайнее поле доски, а черные размещают 42 ферзя на все поля вне линий действия белого.

Интересное обобщение задачи о восьми ферзях придумал американский математик С. Ким.

Рассставить на шахматной доске наибольшее число ферзей, чтобы каждый из них нападал ровно на p других.

При различных p фактически получаются разные головоломки. Условие $p=0$ означает, что ферзи не угрожают друг другу, т. е. мы приходим к классической задаче, искомое число ферзей равно восьми (рис. 55). Для $p=1$ наибольшее число ферзей равно 10 (рис. 62а). На доске уместилось пять изолированных пар ферзей, каждый из которых нападает только на ферзя своей пары. Для $p=2$ искомое число ферзей равно 14 (рис. 62б). Полное решение задачи обнаружили С. Бельг и Е. Ровенский. Они доказали, что для $p=3$ число ферзей равно 18 (рис. 62в), для $p=4$ – 21 (рис. 62г), а для $p > 4$ необходимых расстановок не существует.

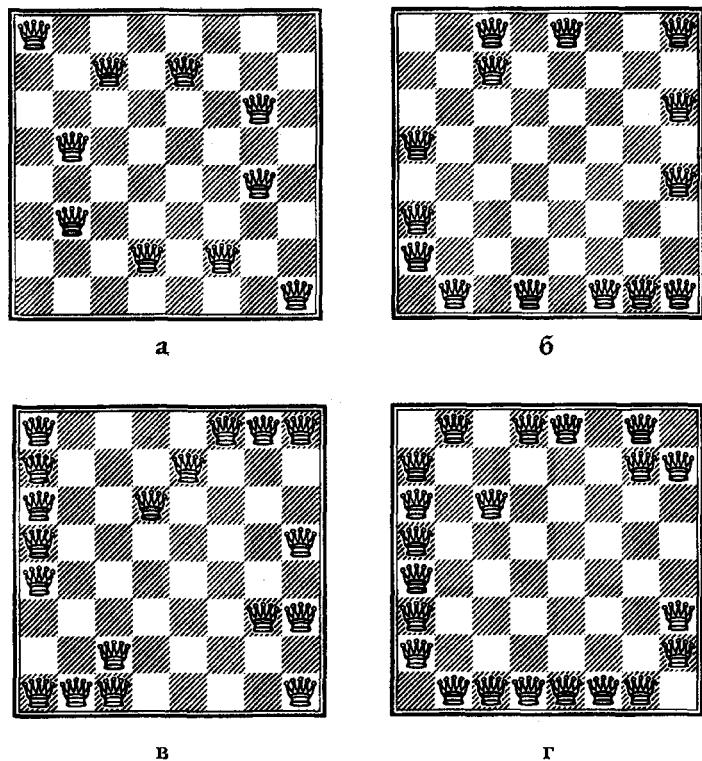


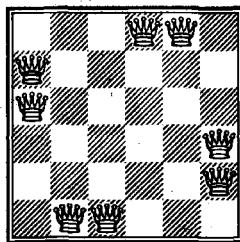
Рис. 62. Задача Кима.

С помощью компьютера Белый и Ровенский исследовали задачу для доски $n \times n$ при разных n и p . В результате они построили табл. 3, где для всех $n \leq 8$ и возможных p указано наибольшее число ферзей, каждый из которых атакует ровно p других.

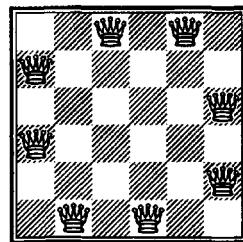
Столбец $p=0$, очевидно, получается из задачи об n ферзях, строка $n=8$ ($1 \leq p \leq 4$) проиллюстрирована на рис. 62а–г. Вот еще один случай: $n=6$, $p=1$; здесь имеются две основные расстановки наибольшего числа ферзей – восьми, обе показаны

n	p				
	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	2	3	4	
3	2	2	4	6	
4	4	4	6	8	8
5	5	4	8	10	11
6	6	8	10	12	15
7	7	8	12	14	18
8	8	10	14	18	21

Табл. 3. Число расстановок для различных n и p .



a



б

Рис. 63. Ферзи разбились на пары.

на рис. 63а, б. Число необходимых расстановок найдено для всех элементов табл. 3.

И в заключение еще одно занятное обобщение.

Можно ли расположить ферзей на бесконечной доске, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стоял ровно один из них?

Как ни странно, ответ положительный. Поставим первого ферзя произвольно. Следующие восемь расположим так, чтобы они держали под обстрелом две соседние с этим ферзем вертикали, две горизонтали и две диагонали обоих направле-

ний и при этом не угрожали друг другу. О выполнении второго условия, конечно, надо позаботиться, ставя ферзей на соответствующие линии достаточно далеко. Например, первого из восьмерки – на расстояние 10 полей от исходного, второго – на расстояние 100 полей, третьего – на расстояние 1000 полей и т. д.

Следующую группу восьми ферзей расставим так, чтобы они держали под обстрелом следующие восемь линий (опять две вертикали, две горизонтали и диагонали двух видов) и тоже не били друг друга. (Если какая-то линия контролируется каким-то из ранее поставленных ферзей, то в новой группе их будет не восемь, а меньше.) Продолжая этот процесс, мы получаем необходимую расстановку ферзей на бесконечной доске.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ЛАДЬЯ

Ладья – строгая, прямолинейная фигура и не случайно является самой популярной в шахматной математике, часто встречается и в серьезной математической литературе. Что общего, скажем, между шахматным термином «ладья» и математическим «многочленом»? А между тем в книгах по комбинаторному анализу постоянно используется выражение «ладейный многочлен». Оказывается, большой класс комбинаторных задач сводится к подсчету числа тех или иных расстановок ладей на шахматной доске. При этом существенную роль играет многочлен

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \dots + r_k x^k + \dots + r_n x^n,$$

где r_k – число расстановок k ладей, не угрожающих друг другу на доске $n \times n$ ($k \leq n$). Этот многочлен и называется ладейным, он возникает при решении многих задач по комбинаторике, теории чисел, теории групп.

Вот пример, когда ладья со своими четкими траекториями применяется в качестве модели важной комбинаторной задачи.

Пусть требуется назначить n рабочих на n различных работ, причем каждая работа должна выполняться одним рабочим. Сколькими способами можно произвести такое назначение?

Это известная в прикладной математике задача о назначениях. Поставим в соответствие рабочим горизонтали доски $n \times n$, а работам – ее вертикали. Если i -й рабочий назначен на j -ю работу, то на пересечении горизонтали i и вертикали j расположим ладью. Так как каждая работа выполняется одним рабочим и каждый рабочий назначается на одну работу, все вертикали и горизонтали будут содержать по одной ладье, т. е. ладьи не угрожают друг другу. Итак, математической задаче можно придать шахматную формулировку.

Сколькоими способами можно расположить n не угрожающих друг другу ладей на доске $n \times n$?

Фактически здесь при любом фиксированном n требуется найти коэффициент ладейного многочлена r_n . Прежде чем провести вычисления, заметим, что при любом расположении на доске $n \times n$ больше чем n ладей найдется хотя бы одна вертикаль и одна горизонталь с двумя или более ладьями, т. е. n – наибольшее число мирных ладей на доске. На рис. 64 представлена одна из расстановок восьми ладей на обычной доске.

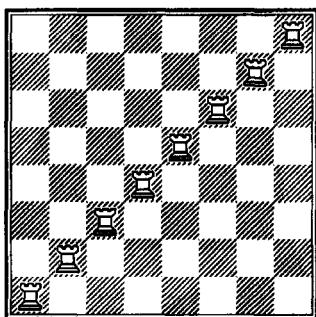


Рис. 64. Восемь мирных ладей.

Выясним теперь, сколько всего существует расстановок. На первую вертикаль можно произвольно поставить одну из n ладей, затем на вторую – одну из $(n-1)$ оставшихся, причем горизонталь, занятая первой, исключается (лады не должны угрожать друг другу), на третью вертикаль – одну из $(n-2)$ оставшихся и т. д., вплоть до $(n-1)$ -й вертикали, на которой имеется выбор из двух возможностей, и последней, n -й, с единственным свободным полем.

Комбинируя n расположений ладьи на первой вертикали с $(n-1)$ – на второй, $(n-2)$ – на третьей и т. д., получаем $n(n-1) \dots 2 \times 1 = n!$ различных вариантов. Это число $n!$ является искомым. В частности, на обычной доске восемь ладей, не угрожающих друг другу, можно расположить $8! = 40\ 320$ способами.

Если ладьи пронумеровать от 1 до n , то существует уже $(n!)^2$ расположений мирных ладей. Это следует из того, что n полей можно выбрать $n!$ способами; столько же имеется для расположения на этих полях n пронумерованных ладей.

Итак, существует $n!$ назначений n рабочих на n работ. Пусть выбрано назначение, соответствующее рис. 64, т. е. i -й рабочий назначен на i -ю работу, и требуется сделать новое назначение с учетом того, что каждый рабочий хочет поменять свою предыдущую работу. Сколько существует таких назначений? И эта задача имеет ладейную формулировку.

Сколькоими способами на доске $n \times n$ можно расставить n не угрожающих друг другу ладей, чтобы ни одна из них не стояла на главной диагонали (для обычной доски — диагонали $a1-h8$)?

Дополнительное условие значительно усложняет дело. Даже Эйлеру не удалось найти общую формулу для числа A_n необходимых расстановок. Правда, он вывел рекуррентное соотношение $A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$, с помощью которого последовательно определяются значения A_n для любого $n \geq 3$ ($A_1=0$, $A_2=1$). Позднее все-таки была найдена формула для A_n , которая имеет следующий вид:

$$A_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Для $n=8$ получаем $A_8=14\ 833$, т. е. число расстановок восьми ладей и, соответственно, назначений рабочих уменьшается почти втрое.

Сколькоими способами можно расставить восемь ладей на черных полях доски, чтобы они не угрожали друг другу?

Перекрасим мысленно черные поля в два цвета — красный и синий. При этом все черные поля нечетных вертикалей сделаем красными, а все черные поля четных вертикалей — синими. В результате из восьми ладей, не угрожающих друг другу и стоящих на черных полях, четыре окажутся на красных полях, а остальные четыре — на синих.

Красные поля образуют как бы отдельную доску 4×4 , поэтому число расстановок четырех ладей на красных полях равно $4! = 24$. То же можно сказать и о синих полях. Значит, число всех необходимых расстановок равно 24^2 .

На доске стоят восемь ладей, не угрожающих друг другу. Доказать, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых (расстояние измеряется между центрами полей, на которых расположены ладьи).

Рассмотрим семь пар ладей, стоящих на соседних вертикалях. Разности координат по вертикали у этих пар равны одному из чисел от 1 до 7, поэтому либо две из них равны (и тогда расстояния в соответствующих парах ладей совпадают), либо среди них содержатся все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали (и на 1 по горизонтали) — пара А. Аналогично на соседних горизонталях либо найдутся две пары ладей с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по горизонтали (и на 1 по вертикали) — пара В. Тогда расстояния между ладьями в парах А и В равны $\sqrt{5}$, т. е. одинаковые, а сами эти пары различны.

Опытные читатели, конечно, поняли, что эта задача на тему принципа Дирихле: если в n клетках сидят $n-1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидят не меньше двух из них.

Сколько способами можно расставить n мирных ладей на доске $n \times n$, если k из них — белые и $n-k$ — черные?

Всякая расстановка, удовлетворяющая условиям задачи, определяется выбором n полей для n «мирных» ладей и затем указанием k полей из этих n , на которых будут поставлены белые ладьи, остальные $n-k$ полей займут черные. Таким образом, искомое число расстановок равно $n! C_n^k (C_n^k - \text{число сочетаний из } n \text{ элементов по } k)$.

Займемся теперь ладьями-часовыми. Очевидно, при любой расстановке восьми мирных ладей (например, как на рис. 64) все свободные поля доски будут находиться под обстрелом. Действительно, если какое-то поле оказалось вне контроля, то на его вертикали отсутствует ладья и, значит, восемь ладей за-

нимают не больше семи вертикалей, и хотя бы на одной из них стоит не меньше двух ладей — противоречие. Понятно, что для охраны всех свободных полей доски $n \times n$ достаточно n ладей, но не меньше — иначе хотя бы одна вертикаль и одна горизонталь окажутся пустыми, и поле, стоящее на их пересечении, не будет атаковано.

*Сколькоими способами на доске $n \times n$ можно расставить n ладей-часовых?*¹

Если n ладей охраняют доску, то либо на каждой вертикали, либо на каждой горизонтали стоит хотя бы одна из них. Действительно, если существует вертикаль и горизонталь без ладей, то поле, находящееся на их пересечении, как мы убедились, не атаковано.

Число расстановок n ладей — по одной на каждой вертикали — равно n^n (первую ладью можно поставить на одно из n полей первой вертикали; вторую, независимо от первой, на одно из n полей второй и т. д.). Столько же имеется и расстановок по одной на каждой горизонтали. На первый взгляд кажется, что их общее число равно $n^n + n^n = 2n^n$. Однако при этом дважды учтены все расстановки, в которых на каждой вертикали и горизонтали стоит по одной ладье. Но это как раз все расстановки n мирных ладей. Отсюда следует, что ответом является число $2n^n - n!$ В частности, число расстановок восьми ладей, обстреливающих все свободные поля доски, равно $2 \times 8^8 - 8! = 33\,514\,112$.

Комбинаторные задачи о фигурах-часовых не менее популярны, чем о расстановках не атакующих друг друга фигур. В нашей книге и те и другие рассматриваются для каждой из шахматных фигур. С математической точки зрения наиболее просто эти вопросы решаются для ладьи, видимо, сказывается ее прямолинейность...

¹ Здесь предполагается, что под контроль берутся свободные поля доски. Но иногда в задачах о «шахматной тюрьме» требуется, чтобы были атакованы все поля доски (и свободные, и занятые фигурами, в данном случае ладьями). Какой именно случай имеется в виду, всегда понятно из контекста.

В задачах о «мирных» ладьях мы могли использовать всю доску. Предположим теперь, что некоторые поля запрещены, на них ладьи ставить нельзя. В этом случае получены интересные результаты. Вот один из них. Если на каждой вертикали и горизонтали доски $n \times n$ есть хотя бы два разрешенных поля, то существует не менее двух расстановок n ладей, не атакующих друг друга.

При этом можно расставить одновременно n белых и n черных ладей. Если каждая вертикаль и горизонталь содержит ровно два свободных поля (а всего на доске их $2n$), то число расположений n «мирных» ладей равно 2^b , где $b \leq [n/2]$ (квадратные скобки означают целую часть числа).

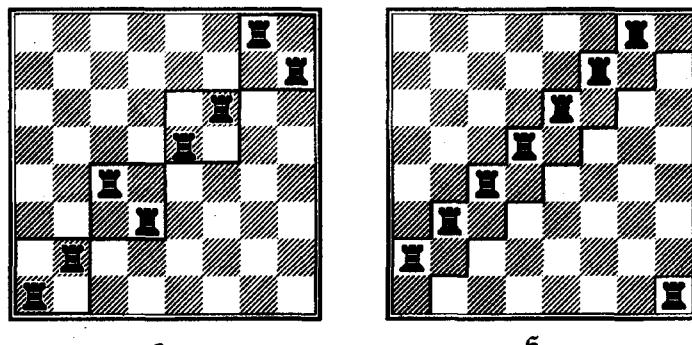


Рис. 65. Доски с запрещенными полями.

Проиллюстрируем сказанное на обычной доске (рис. 65а). Здесь на каждой вертикали и горизонтали по два разрешенных поля, остальные — запрещенные. Множество 16 разрешенных полей разбито на четыре квадрата 2×2 , и в каждом из них можно поставить две ладьи одним из двух способов (a1, b2 или a2, b1 на левом нижнем и т. д.). Таким образом, всего имеется $2^4 = 16$ расположений восьми ладей, а поскольку в данном случае $b = n/2 = 4$, это наибольшее число. При этом, как легко убедиться, каждая расстановка восьми белых ладей однозначно определяет расстановку восьми черных. Наименьший вариант представ-

лен на рис. 65б. Здесь существуют лишь две расстановки — одна диагональная, а в другой ладьи занимают все поля, лежащие вне большой диагонали.

Пусть некоторые поля доски $n \times n$ заминированы так, что король не может пройти между двумя крайними вертикалями. Доказать, что тогда ладья может пройти между двумя крайними горизонталями по одним заминированным полям.

Будем считать, что все «заминированные» поля существенны, т. е. при разминировании хотя бы одного из них король прорывается с края на край (в противном случае часть полей разминируем). Можно убедиться, что тогда всякое заминированное поле, не лежащее на границе, примыкает к двум другим заминированным полям; кроме того, на крайних вертикалях заминированных полей вообще нет, а заминированные поля крайних горизонталей примыкают только к таким же полям соседних горизонталей. Это означает, что на доске имеется мост между крайними горизонталями, состоящий из заминированных полей (ладья сразу переходит с первой горизонтали на вторую, затем проходит несколько полей по ней, быть может 0, переходит на третью и т. д.).

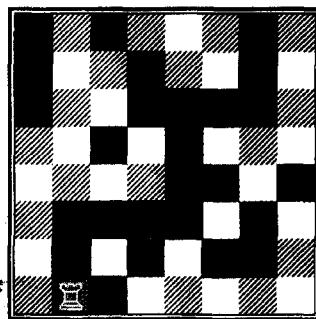


Рис. 66. Ладья на заминированной доске.

На рис. 66 заминированные поля (залиты черной краской) препрятывают королю путь между крайними вертикалями. По мосту, состоящему из одних заминированных полей, ладья мо-

жет пройти с первой горизонтали доски (поля b1) на последнюю (поле g8). Снимем теперь все запреты. Итак, расставить n ладей на доске $n \times n$, чтобы они не угрожали друг другу, можно многими способами. А если допустить одну угрозу?

Какое наибольшее число ладей можно расположить на доске $n \times n$ так, чтобы каждая из них находилась под ударом не более одной из остальных?

Докажем, что это число не превышает $4n/3$. Пусть расположено k ладей, удовлетворяющих условию. На всех занятых ими полях напишем сначала 0, а затем с каждой из n вертикалей последовательно проделаем следующую операцию. Если на ней стоят две ладьи, то к каждому из двух соответствующих чисел прибавим 1, а если стоит одна ладья, то прибавим 2. Теперь эту же операцию проделаем последовательно с каждой из n горизонталей. В результате на k полях с ладьями будет записано число 3 или 4, и сумма s всех чисел не меньше $3k$. С другой стороны, поскольку на каждой вертикали и горизонтали мы добавили не более двух единиц, s не больше $4n$. Отсюда $3k \leq 4n$ и $k \leq 4n/3$. Таким образом, наибольшее число ладей равно $[4n/3]$, причем эта оценка достижима. Так, для $n=8$ имеем $[4n/3]=10$, соответствующее расположение 10 ладей показано на рис. 67а (оно легко обобщается для любого n), причем все ладьи распределились на пять пар, и каждая угрожает только ладье своей пары.

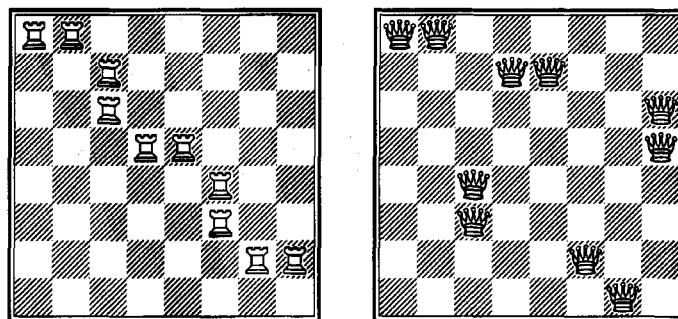


Рис. 67. Пять пар ладей и ферзей.

Аналогичные рассуждения для обычной доски показывают, что и ферзей, обладающих тем же свойством — каждый под ударом не более одного — можно расставить не более 10. Но можно ли ровно 10? Заменить ладей ферзями на рис. 67а не удается, многие попадают под удар сразу нескольких фигур. Но есть другой вариант — рис. 67б (конечно, он гордится и для ладей) — здесь 10 ферзей тоже разбиты на пять пар. В отличие от ладей, для ферзей задача в общем случае не решена.

На каждом поле доски записано произведение номеров ее вертикали и горизонтали. Рассставить восемь ладей, не угрожающих друг другу, чтобы сумма чисел на полях, занимаемых ими, была наибольшей.

Сумма наибольшая в том случае, если ладьи располагаются на главной диагонали (рис. 64). Докажем это от противного. Пусть в некотором решении имеются ладьи, не стоящие на главной диагонали. Обозначим через i номер первой вертикали с такой ладьей, а через p — номер соответствующей горизонтали; очевидно, $p > i$ (рис. 68а).

Пусть j — номер вертикали, на которой стоит ладья i -й горизонтали. Эта ладья также вне главной диагонали и правее

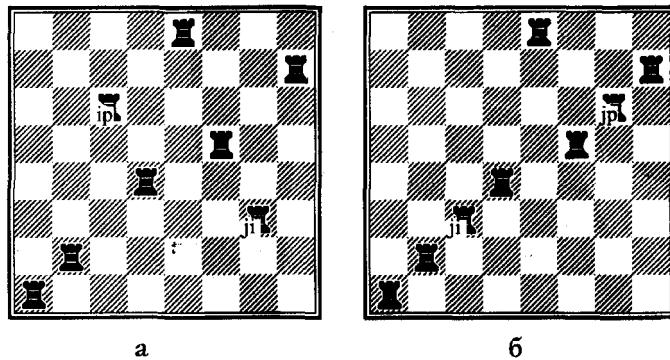


Рис. 68. От перестановки ладей
сумма меняется.

первой, т. е. $j > i$. Переставим две эти ладьи — оставляя на прежних вертикалях, поменяем их горизонтали. В результате первая окажется на i -й горизонтали (диагональное поле), а вторая на p -й (рис. 68б). Ясно, что все ладьи по-прежнему не угрожают друг другу.

Для каждой расстановки подсчитаем суммы чисел для переместившихся ладей (на остальные слагаемые перестановка не влияет). Для исходной расстановки сумма равна $ip+ji$, а для новой — i^2+jp . Так как $j, p > i$, имеем:

$$(i^2+jp)-(ip+ji)=(jp-ip)-(ji-i^2)=p(j-i)-i(j-i)=(p-i)(j-i)>0.$$

Таким образом, во втором случае сумма больше, а это противоречит тому, что в первой расстановке она была максимальной.

На полях доски выписаны подряд числа от 1 до 64: на первой горизонтали слева направо — от 1 до 8, на второй — от 9 до 16 и т. д. Поставим восемь ладей, не угрожающих друг другу. Какие значения может принимать сумма чисел на полях, занятых ладьями?

Число, стоящее на i -й вертикали и j -й горизонтали, можно записать так: $i+8(j-1)$ ($i, j=1, 2, \dots, 8$). Поскольку ладьи не угрожают друг другу, на каждой вертикали и горизонтали стоит ровно одна. Значит, искомая сумма равна $(1+2+\dots+8)+8(0+1+\dots+7)=260$ (магическое число!) и не зависит от конкретного расположения «мирных» ладей. Обе последние задачи без труда переносятся на доску $n \times n$.

На доске $n \times n$ расставлены ладьи, удовлетворяющие следующему условию: если некоторое поле свободно, то общее число ладей на одной горизонтали и одной вертикали с ним не меньше n . Доказать, что на доске находится не меньше $n^2/2$ ладей.

Рассмотрим ту из $2n$ линий, на которой стоит меньше всего ладей (если таких линий несколько, выберем любую). Пусть это — горизонталь (в противном случае можно повернуть доску на 90°) и на ней стоит k ладей. Если $k \geq n/2$, то на каждой из n горизонталей не менее $n/2$ ладей, а всего не меньше $n^2/2$, и все доказано.

Пусть теперь $k < n/2$. На этой горизонтали имеется $n-k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое поле по условию содержит не менее $n-k$ ладей, а все вертикали вместе – не менее $(n-k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей имеют не менее k ладей каждая (ввиду выбора k). Итак, всего на доске не менее $(n-k)^2+k^2$ ладей. Нам осталось доказать неравенство: $(n-k)^2+k^2 \geq n^2/2$. Действительно:

$$(n-k)^2+k^2 - n^2/2 = n^2/2 - 2nk + 2k^2 = 2(n^2/4 - nk + k^2) = 2(n/2 - k)^2 \geq 0.$$

Если n четно, то, поставив ладьи на все одноцветные поля доски, получим расстановку, содержащую ровно $n^2/2$ ладей. Если n нечетно, то можно расставить $(n^2+1)/2$ ладей – на все поля того цвета, которого на доске больше.

Теперь на очереди путешествия ладьи по всем полям шахматной доски. На рис. 69 перед вами два маршрута, открытый и замкнутый. На рис. 69а ладья совершает 14 поворотов, а на рис. 69б – 15. Первый маршрут обобщается для любой доски $n \times n$. Что касается замкнутого маршрута, то для его существования, как и в задаче о ходе коня, необходимо, чтобы доска была четной – белые и черные поля чередуются, и их общее число четно.

Какое наименьшее число поворотов может сделать ладья при обходе всех полей доски $n \times n$?

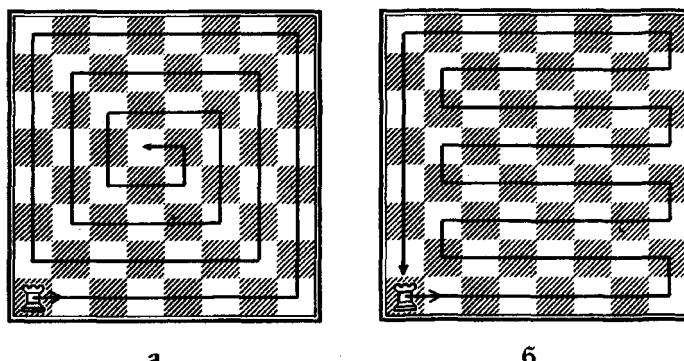


Рис. 69. Маршруты ладьи по доске.

Ладья должна пройти хотя бы один раз вдоль каждой вертикали или каждой горизонтали (если вдоль какой-то вертикали она не передвигалась, то каждое ее поле проходила поперек, т. е. вдоль каждой горизонтали). Пусть ладья двигалась вдоль всех вертикалей. На любую из них, кроме, быть может, тех двух, где начинался и заканчивался маршрут, ладья должна войти и после движения вдоль нее выйти. При этом вход и выход обязательно происходят с поворотами. Таким образом, общее число поворотов не меньше, чем $2(n-2)+1+1=2(n-1)$. Для любого n маршрута, содержащего ровно столько поворотов, можно получить из рис. 6а; при $n=8$ ладья делает $2(8-1)=14$ поворотов. Так как число ходов в обходе доски на один больше числа поворотов, самый быстрый маршрут ладьи содержит 15 ходов. Он является открытым, а замкнутый маршрут содержит уже 16 ходов (рис. 69б).

Какое наибольшее число поворотов может сделать ладья при замкнутом маршруте по всем полям доски?

В замкнутом маршруте на рис. 70а ладья делает 56 поворотов. Докажем, что это и есть наибольшее число. Назовем поле коридором для данного маршрута, если на нем ладья не делает поворота. Заметим, что из каждой пары полей, смежных с угловыми, хотя бы одно является коридором — иначе на поле, соседнее с угловым по диагонали, ладья побывает дважды (рис. 70б).

Разобъем доску на четыре квадрата 4×4 . В каждом из них есть коридор, соседний с угловым полем. Покажем, что кроме него есть еще хотя бы один коридор. Рассмотрим, например, левый нижний квадрат и допустим, что поле a2 — коридор. Предположим, что других в этом квадрате нет. Тогда, очевидно, маршрут последовательно проходит по полям b2, b1, a1, a2, a3, b3, b4 (рис. 70в). Следующим будет поле a4, иначе мы на него никогда не попадем (или маршрут не замкнется). Теперь можно продолжить маршрут в другую сторону: b2, c2, c1, d1, d2, e2. Из рис. 70в видно, что он содержит участок d3, c3, c4, следовательно, одно из полей — d3 или c4 — коридор (доказывается как для угловых полей в начале решения).

Итак, число коридоров не меньше $2\times 4=8$, а число поворотов не больше $64-8=56$.

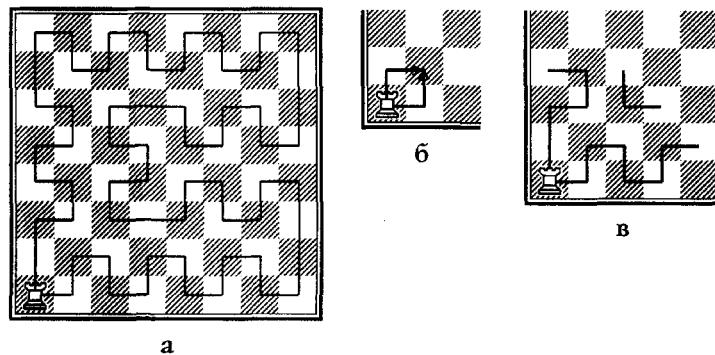


Рис. 70. Поворотливая ладья.

Можно ли расставить на доске 16 белых и 16 черных ладей, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и двух главных диагоналях ладей разного цвета было поровну? Можно ли так расставить 15 белых и 15 черных ладей?

В первом случае необходимая расстановка показана на рис. 71а (на каждой вертикали и горизонтали стоят по две белые и черные ладьи, а на главных диагоналях – по четыре). Второй случай сложнее, но ответ тоже положительный (рис. 71б). Здесь на некоторых линиях стоит по одной ладье, на других по две или три, а на главной диагонали a8–h1 – 0 ладей.

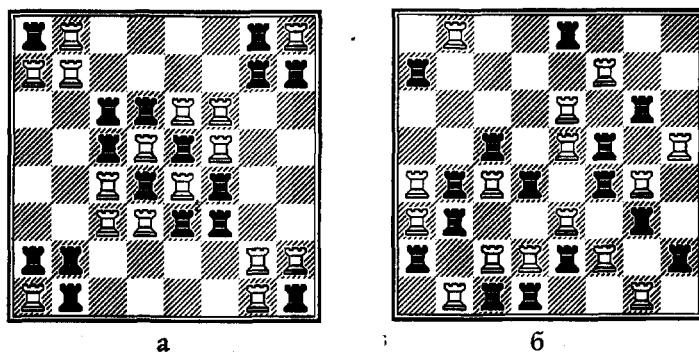


Рис. 71. Белых и чёрных ладей всюду поровну.

На доске стоят несколько ладей. Доказать, что их можно раскрасить в три цвета, например, красный, желтый и зеленый, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

Упорядочим ладьи слева направо и снизу вверх. Первую ладью красим в красный цвет, а первую, которая нападает на какую-то ладью, — в синий. Далее на каждом шагу очередную ладью красим так: если снизу или слева есть бьющие ее ладьи (их не больше двух), красим ее в отличный от них цвет. В конце концов все ладьи будут окрашены в три разных цвета.

Какое наибольшее число ладей трех цветов, поровну каждого, можно расставить, чтобы ладьи разного цвета не угрожали друг другу?

Ни на одной из линий не могут стоять ладьи разного цвета. Поскольку всего вертикалей и горизонталей 16, то на каждый из трех цветов приходится максимум пять линий. Итак, всего можно поставить 18 ладей (рис. 72) — красных (К), синих (С) и желтых (Ж).

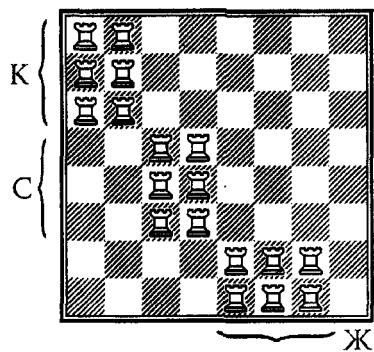


Рис. 72. Разноцветные ладьи.

Какое наибольшее число ладей можно расставить, чтобы каждая из них нападала на нечетное число других?

На рис. 73 стоят 24 ладьи, и каждая нападает на нечетное число других, больше ладей не расставить.

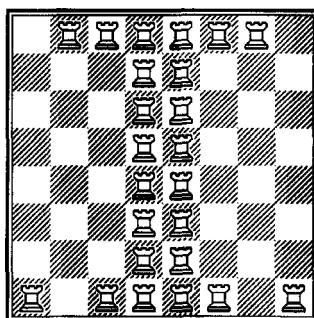


Рис. 73. Каждая ладья нападает на нечетное число других.

Какое наибольшее число ладей можно расположить, чтобы каждая из них находилась под боем не более трех остальных?

Любой ладья на краю доски угрожает не более трех других. Пусть в какой-то расстановке, удовлетворяющей условию, есть ладья, не стоящая на краю. Вертикаль и горизонталь, на которых она находится, разбиваются ею на четыре полосы, причем хотя бы одна из полос пустая (иначе ладьи угрожают со всех четырех сторон). Сдвинем ладью по этой полосе на край доски. Данная расстановка тоже устраивает нас. Таким образом, все ладьи можно переставить на край. Значит, существует расстановка с максимальным числом ладей, когда все они стоят на краю. Но на границе доски можно поставить не более 28 ладей (рис. 74), и это число является искомым.

Какое наименьшее число ладей достаточно расположить на доске $n \times n$, чтобы все ее белые поля оказались под боем?

Рассмотрим сначала обычную доску. Каждая ладья контролирует не более восьми белых полей (четырех по вертикали и четырех по горизонтали), поэтому на все 32 белых поля могут нападать не менее чем четыре ладьи. Пример, когда столько ладей хватает, показан на рис. 75. Аналогично при расстановке $\lceil n/2 \rceil$ ладей по всем черным полям большой диагонали доски $n \times n$ ($n/2$ при четных n или $(n+1)/2$ при нечетных n) все белые поля доски через одно, начиная с а1, попадают под удар.

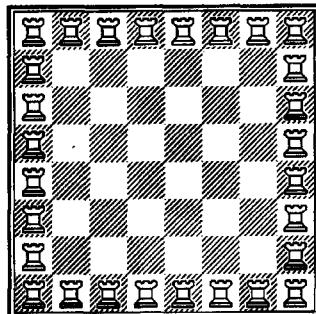


Рис. 74. Каждая ладья под боем не более трех других.

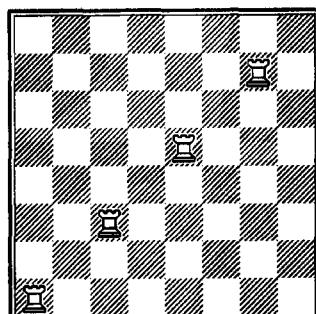


Рис. 75. Все белые поля под контролем.

Оригинальную задачу на неограниченной с двух сторон доске придумал американский математик С. Нортон (рис. 76а).

На первый взгляд выигрыш кажется невозможным, поскольку черный король убегает на север или восток. Если ладья мешает ему, то он приближается к ней, гоняет с места, и одно из двух направлений становится свободным. И все же белые добиваются цели, причем не выпуская короля за пределы прямогоугольника 9×11 ! План матования черного короля и траектории движения всех трех фигур показаны на рис. 76б.

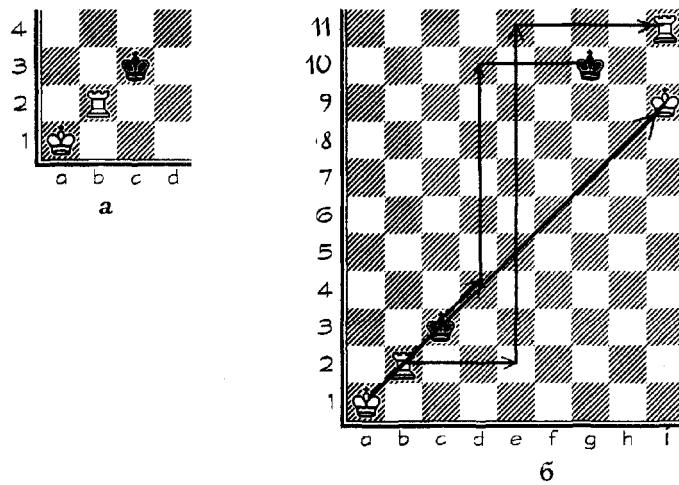


Рис. 76. Выигрыши.

1. $\mathbb{R}e2!$ $\mathbb{Q}d4$. После 1... $\mathbb{Q}d3$ 2. $\mathbb{R}e11!$ черные только теряют темп по сравнению с основным вариантом. 2. $\mathbb{Q}b2$ $\mathbb{Q}d5$ 3. $\mathbb{Q}c3$ $\mathbb{Q}d6$ 4. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}d7$ 5. $\mathbb{R}e11!$ $\mathbb{Q}d8$ 6. $\mathbb{Q}e5$ $\mathbb{Q}d9$ 7. $\mathbb{Q}f6$ $\mathbb{Q}d10$. Как будто усилия не увенчались успехом — ладья должна уйти, уступая дорогу черному королю. Однако белые добились важной цели — перебросили своего короля правее ладьи, и теперь обе их фигуры участвуют в окружении противника. 8. $\mathbb{R}i11!$ $\mathbb{Q}e10$. Королю остается бежать на восток, но далеко ему не уйти. 9. $\mathbb{Q}g7$ $\mathbb{Q}f10$ 10. $\mathbb{Q}h8$ $\mathbb{Q}g10$ 11. $\mathbb{Q}i9!$ Все, черный король отрезан по обоим направлениям. Дело свелось к мату однокому королю на самой обычной доске. Три фигуры разыграли на доске настоящий шахматно-математический спектакль!

Разобрав решение задачи, нетрудно сообразить, что на неограниченной с двух сторон доске король и ладья справляются с одиноким неприятельским королем независимо от начального расположения всех трех фигур.

НЕТОРОПЛИВЫЙ КОРОЛЬ

Эта глава посвящена задачам и головоломкам с участием короля, который выделяется среди всех фигур своей неторопливостью — с любого места он может переступать только на соседние поля доски. Однако это свойство не мешает королю быть интересным действующим лицом в шахматной математике.

В одной из следующих вы узнаете о своеобразной геометрии шахматной доски, отличающейся от обычной, евклидовой геометрии. При этом нестандартное измерение расстояний на доске лучше всего иллюстрирует движущийся король. Суть рассмотренных позиций будет заключаться в том, что для короля имеется много кратчайших расстояний между двумя полями доски, и важно выбрать правильный. Но сколько существует таких путей? Это уже чисто математическая проблема.

Сколько способами король с поля e1 может добраться кратчайшим путем до поля d8?

Очевидно, кратчайшее путешествие короля до цели занимает семь ходов, причем он может перемещаться любыми зигзагообразными путями, лишь бы на каждом ходу переступать с одной горизонтали на другую, оставаясь при этом внутри прямоугольника e1–a5–d8–h4 (рис. 77).

Для подсчета искомого числа путей составим таблицу, которую будем заполнять прямо на полях доски. На каждом поле стоит число кратчайших путей до него с поля e1. На d2, e2 и f2 король попадает в один ход единственным способом, и поэтому на них стоят единицы; стоят единицы и на полях c3, g3. На d3 король попадает в два хода двумя способами, а на e3 — тремя. В общем случае число кратчайших путей до данного поля равно сумме чисел, стоящих на полях предыдущей горизонтали, с которых король попадает на него в один ход. Пользуясь этой

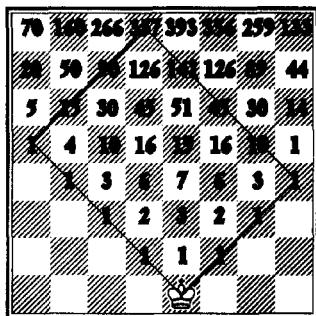
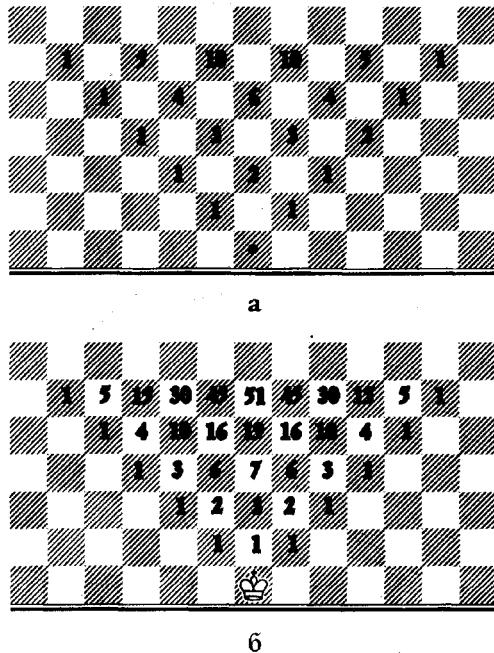


Рис. 77. За сколько ходов?

закономерностью, мы в конце концов заполним всю таблицу и получим, в частности, что до d8 король может добраться кратчайшим образом 357 способами. Из рис. 77 следуют и ответы для других полей доски. Ясно, что заполняя соответствующую таблицу, можно найти число кратчайших путей короля между любой парой полей, при этом доска может иметь любую форму и даже содержать запрещенные поля.

Таблицы такого типа, как на рис. 77, очень важны в комбинаторике, одном из разделов математики. Немного отвлечемся и взглянем на таблицу, изображенную на рис. 78а, — вместо короля стоит шашка, которая, как известно, ходит только вперед на одно поле по диагонали. Здесь мы считаем, что границы доски простираются до бесконечности. Каждое число p -й горизонтали ($p > 1$) равно сумме двух чисел $(p-1)$ -й, стоящих на полях, с которых шашка может пойти на данное. Вместе с тем это есть число способов, которыми шашка может добраться до него с исходного поля. Числовая таблица на рис. 78а называется в комбинаторике треугольником Паскаля или 2-арифметическим треугольником. Элементами таблицы являются биномиальные коэффициенты (надо полагать, что такое бином Ньютона, читатель знает хорошо).

Вернемся к королю. Таблица на рис. 78б обобщает таблицы на рис. 78а и 77. С одной стороны, доска снова бесконечная, а с



6

Рис. 78. Треугольник Паскаля.

другой — каждое число является суммой трех (у шашки было два хода, у короля три), и поэтому соответствующий треугольник называется 3-арифметическим. Его элементы при помощи несложных формул выражаются через биномиальные коэффициенты. Конечно, на реальной доске боковые границы внесли свое изменение, и, можно сказать, на рис. 77 был представлен 3-арифметический треугольник с границами.

Какое наибольшее число королей можно расположить на доске, чтобы они не угрожали друг другу, т. е. не стояли рядом?

Разобьем доску на 16 квадратов 2×2 (рис. 79, здесь доска 9×9 , а доска 8×8 выделена). Поскольку короли не касаются друг друга, в каждом квадрате находится не более одного из них.

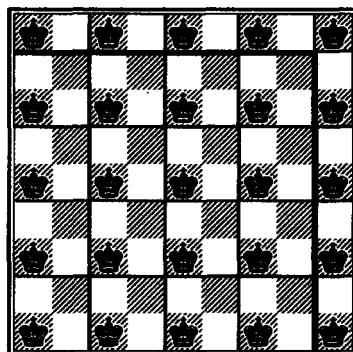


Рис. 79. Задача о мирных королях.

Это означает, что больше 16 королей, не угрожающих друг другу, расставить невозможно — это и есть наибольшее число. Расставить столько королей можно 281 571 способом.

Обобщим задачу для доски $n \times n$. Если n четно, то доска разбивается на $n^2/4$ квадратов, и столько же можно расставить королей. При нечетных n доска разбивается на $(n-1)^2/4$ квадратов 2×2 , на каждый из которых можно поставить по королю; еще n королей умещается на границе доски, и всего получаем $(n+1)^2/4$ мирных королей. Случай $n=9$ представлен на рис. 79, на доске стоит 25 королей. Если n представить в виде $n=2k$ или $n=2k-1$, то максимальное число «мирных» королей, независимо от четности n , можно записать как k^2 . Формула для числа соответствующих расстановок неизвестна.

Какое наименьшее число королей можно расставить на доске, чтобы они держали под боем все свободные поля?

На рис. 80 в каждом из девяти выделенных прямоугольников (пять из них квадраты) есть поле, которое может атаковать только король, находящийся в нем же. Следовательно, искомое число королей равно девяти.

Для доски $n \times n$ задача также решается с помощью разбиения на квадраты 3×3 и граничные прямоугольники. В зависимости от остатка при делении n на 3 число n можно предста-

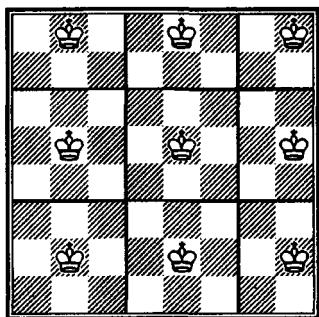


Рис. 80. Девять королей-часовых.

вить одним из трех способов: $n=3k$, $n=3k-1$, $n=3k-2$. Число королей, которые держат под боем все свободные поля доски $n \times n$, записывается очень просто, оно равно k^2 . При $n=8$ имеем $k=3$ и $k^2=9$ (рис. 80), эти девять королей можно расставить 3600 способами. Формула для общего числа расстановок не найдена.

Теперь отправим короля путешествовать по доске. Как обычно, требуется, чтобы он обошел все поля доски, посетив каждое из них по одному разу. Ясно, что неторопливый король может воспользоваться любым маршрутом ферзя или ладьи, двигаясь по нему более медленным темпом. За 63 хода он обойдет всю доску (замкнутый маршрут содержит 64 хода).

Какое наименьшее и наибольшее число диагональных ходов содержит замкнутый несамопересекающийся маршрут короля по доске?

В этой остроумной головоломке А. Ходулева с наименьшим числом все ясно: оно равно 0, если все 64 хода прямые (рис. 81).

А на рис. 82а показан замкнутый несамопересекающийся маршрут, в котором король делает 36 диагональных ходов (и 28 прямых). Докажем, что это и есть наибольшее число. Пронумеруем все 28 граничных полей доски в том порядке, в каком король посещает их в выбранном маршруте (рис. 82а). Разобьем его на 28 участков: от первого крайнего поля до второго, от второго до третьего и т. д., от 28-го до первого.

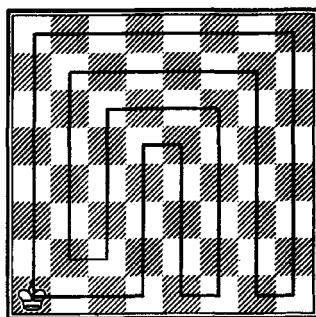


Рис. 81. Прямолинейный маршрут.

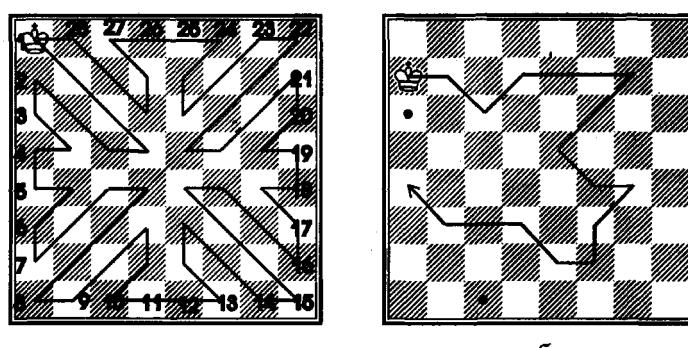


Рис. 82. Задача о замкнутом маршруте короля.

Убедимся, что начальное и конечное поля каждого из этих участков соседние. Пусть это не так и крайние поля какого-то участка не соседние, например a4 и a7 (рис. 82б). Поскольку маршрут замкнут, то начальное поле и направление обхода можно выбрать произвольно. Будем считать, что король начинает с a7 и идет к a4. Раз эти поля не соседние, то участок a7–a4 разбивает доску на две части. Возьмем два поля, принадлежащие разным частям, например ab и c1. Король должен посетить эти поля, но при этом путь ab–c1

пересечет путь a7—a4. Значит, маршрут короля самопересекается — противоречие.

Итак, крайние поля всех 28 участков — соседи на доске, а поскольку у них разные цвета, на каждом из участков король делает хотя бы один прямой ход (при диагональных цвет поля не меняется). Значит, маршрут короля содержит не меньше 28 прямых ходов — по вертикали и горизонтали, т. е. не больше 36 диагональных.

Поскольку король при желании может сделать все 64 хода прямые, то попутно мы выяснили, что наименьшая длина замкнутого маршрута короля по всей доске равна 64, а наибольшая $28+36\sqrt{2}$.

Забавно, что если короля отправить по замкнутому несамопересекающемуся пути, но не требовать, чтобы он посетил все поля доски, то число диагональных ходов может возрасти.

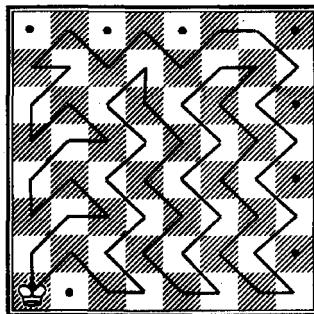


Рис. 83. Восемь полей король обошел стороной.

На рис. 83 восемь полей, отмеченных точками, остались без внимания короля, зато число диагональных ходов увеличилось до 44. Вопрос о том, можно ли побить этот рекорд, остается открытым.

До сих пор предполагалось, что маршрут короля замкнутый и несамопересекающийся. Большой мастер головоломок И. Акулич заинтересовался другими вариантами: а что если отказаться от одного из этих требований или даже обоих?

Какое наибольшее число диагональных ходов содержит несамопересекающийся открытый маршрут короля?

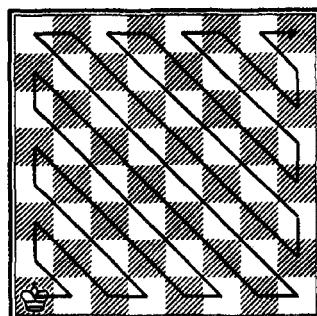


Рис. 84. Рекорд для несамопересекающегося маршрута.

На рис. 84 король сделал 49 диагональных ходов. Доказать, что это максимум, очень легко. Каждый такой ход пересекает узел доски (общую точку четырех соседних полей). Всего узлов 49, и пройти дважды через один и тот же без самопресечений невозможно!

Приведенный маршрут короля открытый, но те же рассуждения годятся и для замкнутого. Однако в самопересекающемся открытом маршруте короля число диагональных ходов увеличивается до 56 (рис. 85).

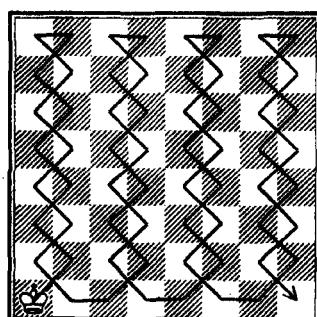


Рис. 85. Рекорд для самопересекающегося маршрута.

Попробуйте доказать это вслед за Акуличем, а попутно выясните, существует ли такой же длинный замкнутый самопересекающийся маршрут короля.

А вот одна необычная игра, тоже связанная с королевской прогулкой.

Двое по очереди передвигают короля, стоящего на доске. Игрок, вынужденный поставить его на поле, которое король уже посетил, проигрывает. На чьей стороне победа?

Верх берет тот, кто начинает, причем при произвольном положении короля. Для этого он мысленно разбивает доску на прямоугольники 2×1 (любым способом). Затем первым ходом ставит короля на поле, парное исходному с королем (в том же прямоугольнике). А далее на любой ход соперника передвигает короля на парное ему поле. Таким образом, после каждой пары ходов один прямоугольник «исключается» из игры. В конце концов второму игроку придется занять поле, которое король уже посещал.

В графике замкнутого маршрута короля никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой. Доказать, что наименьшее число диагональных ходов равно восьми.

Доказательство довольно длинное. Ограничимся тем, что приведем один из возможных маршрутов короля (самопересекающийся), содержащий ровно восемь диагональных ходов (рис. 86).

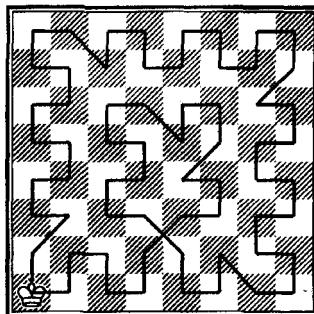


Рис. 86. Всего восемь диагональных ходов.

На доске 16 королей, каждый из которых нападает хотя бы на одного из остальных. Нескольких королей убрали, и никакие два из оставшихся уже не угрожают друг другу. Какое наибольшее число королей может остаться?

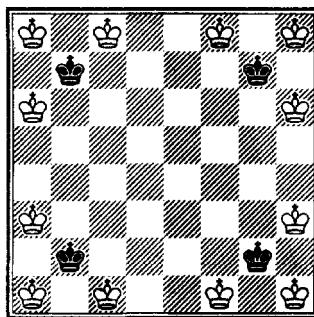


Рис. 87. Четыре короля покидают доску.

Король, снятый с доски, мог нападать не более чем на четырёх оставшихся (иначе и некоторые из них угрожают друг другу). Поэтому число оставшихся не может превосходить число снятых более чем в четыре раза, т. е. их не более 12. Подходящая ситуация показана на рис. 87 — здесь 16 королей, и после удаления четырех черных остаются 12 белых, никакие два из которых не угрожают друг другу.

Король-самоубийца. На доске 1000×1000 находится белый король и 499 черных ладей. Доказать, что при любом расположении этих фигур король за некоторое число ходов всегда может встать под шах.

Отправим короля сначала в левый нижний угол, а затем по большой черной диагонали в правый верхний угол. После первого хода из угла $a1-b2$ и ответа черных три нижние горизонтали и три левые вертикали должны быть свободны от ладей, иначе король уже следующим ходом встанет под шах. Пусть теперь король сделал еще 997 ходов по диагонали, и черные ответили на последний из них. В этот момент три верхние горизонтали и три правые вертикали должны быть свободны

от ладей, иначе король следующим ходом добьется своей цели. За 997 ходов короля по диагонали каждая ладья поменяла вертикаль и горизонталь прежде, чем на них появился король, т. е. сделала не меньше двух ходов. Но ладей 499, и за 997 ходов они не успевают переместиться — не хватает одного хода!

Последние две задачи с участием ладей находятся на грани математики и реальных шахмат.

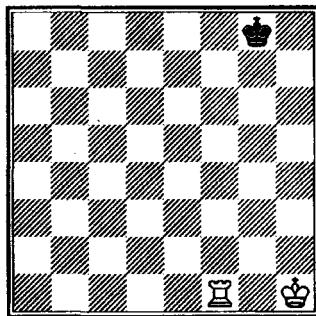


Рис. 88. Выигрыш с неподвижной ладьей.

В позиции на рис. 88 задание кажется смешным, но есть важное дополнительное условие — ладье разрешается ходить только тогда, когда она объявляет мат! Таким образом, главное действующее лицо здесь — король.

1. ♕ g2! Оппозиция завоевана. 1... ♕ g7 2. ♕ g3! Главное теперь ее не потерять. 2... ♕ g6 3. ♕ g4! ♖ h6 4. ♕ f5! До сих пор белый король не мог встать перед ладьей, так как его черный оппонент сразу вырывался на свободу через линию «f». И вот такая возможность появилась, белые осуществляют обходной маневр. 4... ♕ g7 (4... ♖ h5 5. ♖ h1X) 5. ♕ g5! ♖ h7 6. ♕ f6! ♕ g8 7. ♕ g6! ♖ h8 8. ♖ f8X.

Простенькая задачка, а более хитрый ее вариант придумал американский математик Л. Мозер. Вновь на доске всего три фигуры.

На доске, неограниченной с двух сторон (рис. 89 без правого и верхнего краев), белые ставят мат черному королю при

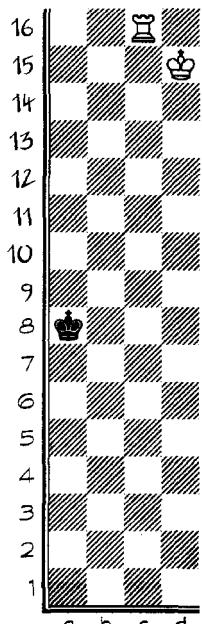


Рис. 89. Выигрыш.

том же условии: ладья вступает в игру лишь в последний момент — для объявления матта.

И здесь ключ к решению — оппозиция. Тонко маневрируя, белый король загоняет своего оппонента в единственный угол доски, после чего ладья вступает в бой — $\mathbb{R}c16-a16X$.

1. $\mathbb{Q}c15!$ Единственный ход. Пусть черный король движется по крайней вертикали. 1... $\mathbb{Q}a9$ 2. $\mathbb{Q}c14 \mathbb{Q}a10$ 3. $\mathbb{Q}c13 \mathbb{Q}a11$ 4. $\mathbb{Q}c12 \mathbb{Q}b10$. Выше идти нельзя — 4... $\mathbb{Q}a12$ 5. $\mathbb{R}a16X$. 5. $\mathbb{Q}b12$. Ближняя оппозиция! 5... $\mathbb{Q}a10$ 6. $\mathbb{Q}c11!$ Короли сдвинулись на вертикаль ниже, дальнейшее понятно.

Если первым ходом король встает на линию «b» — 1.. $\mathbb{Q}b9$, то решает 2. $\mathbb{Q}b15!$, занимая дальнюю оппозицию. 2... $\mathbb{Q}b10$ 3. $\mathbb{Q}b14!$ $\mathbb{Q}b11$ 4. $\mathbb{Q}b13!$ $\mathbb{Q}a11$ 5. $\mathbb{Q}c12!$ и т.

д. На 2.. $\mathbb{Q}a9$ следует 3. $\mathbb{Q}c14!$ — при черном короле на крайней вертикали белый может позволить себе встать на одну линию с ладьей. 3.. $\mathbb{Q}b10$ 4. $\mathbb{Q}b14!$ и т. д. Замечательный пример на тему оппозиции.

Интересно, что после более естественного вступления 1. $\mathbb{Q}c14?$ выигрыш уже упущен — 1... $\mathbb{Q}a9$ 2. $\mathbb{Q}c13$ (2. $\mathbb{Q}b13$ $\mathbb{Q}b9$, и оппозицией овладевают черные) 2... $\mathbb{Q}a10$ 3. $\mathbb{Q}c12$ $\mathbb{Q}a11$ 4. $\mathbb{Q}c11 \mathbb{Q}a12$. Черный король неуязвим.

СТРЕНОЖЕННЫЙ СЛОН

В отличие от других фигур слону разрешается перемещаться только по полям одного цвета, чернопольному — по черным и белопольному — по белым. Таким образом, слону доступна лишь половина доски, поэтому мы и называем его стреноженным.

Впрочем, преобразование доски, которое придумал Л. Уэлч, приводит к такой доске, на которой уже все поля находятся в распоряжении слона. Она имеет ступенчатую форму и получается в результате описывания квадратов около всех одноцветных полей обычной доски (рис. 90а). Доска Уэлча состоит из 32 «больших» полей, каждое из которых доступно слону — в данном случае чернопольному. Это преобразование переводит диагонали стандартной доски в вертикали и горизontали доски Уэлча (и наоборот), и, значит, ходу слона на 64-клеточной соответствует ход ладьи на 32-клеточной. Итак, любую задачу о слонах на шахматной доске легко переформулировать как задачу о ладьях на более наглядной (без ненужных полей) ступенчатой. Остается развернуть ее на 45° и для порядка раскрасить в черно-белый цвет (рис. 90б). Мы, однако, рассмотрим ряд головоломок о слонах на привычной доске 8×8.

Слон может обойти только половину шахматной доски, но если ограничиться полями одного цвета, задача о его путешествии становится вполне корректной. Маршрут из 17 ходов, предложенный Г. Дьюдени (рис. 91а), весьма симметричен, но не является кратчайшим. Самое быстрое путешествие слона с посещением всех одноцветных полей (рис. 91б) в эстетическом отношении уступает ему — на графике появляются «точки возврата», но зато на ход короче. В общем случае Н. Нецеваев поставил следующую задачу.

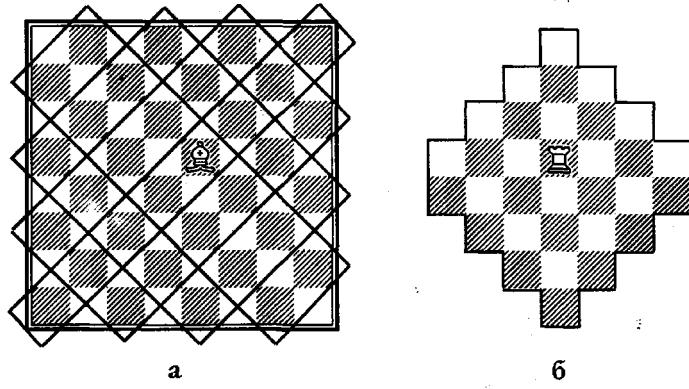


Рис. 90. Преобразование Уэлча.

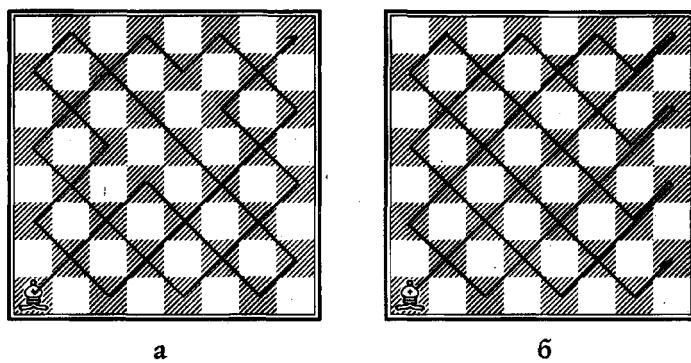


Рис. 91. Маршруты слона по доске.

За какое наименьшее число ходов слон, стартуя на a_1 , может обойти все чёрные поля доски $n \times n$? (Считаем, что при нечетных n чёрных полей на доске больше).

Докажем, что маршрут слона составляет $5n/2 - 4$ ходов при четных n и $(5n+1)/2 - 4$ при нечетных ($n \geq 3$).

Пусть слон стоит на крайнем, но не угловом поле доски. Сделав четыре хода по границам, он вернется на исходное место (рис. 92а). Назовем эту замкнутую ломаную малым

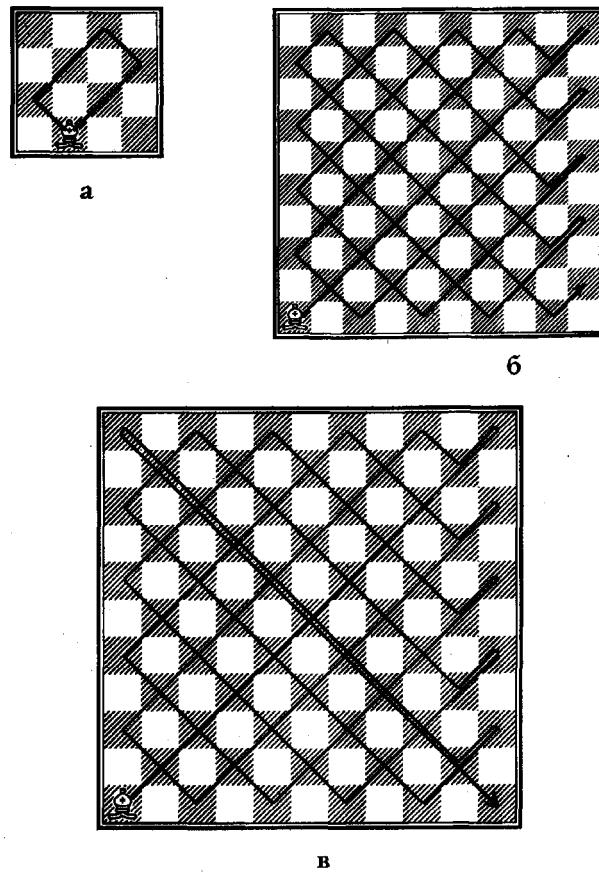


Рис. 92. Путешествие слона по доске $n \times n$.

циклом, а большую черную диагональ или обе (при нечетном n) — большим циклом.

а) Пусть n четно, $n=2k$. Имеем $(k-1)$ малый цикл и один большой. Рассмотрим четыре угловых поля малого цикла, которые не являются конечными полями маршрута. В каждое из них надо войти и из каждого выйти. Значит, минимум четыре хода по циклу.

Но если сделать ровно четыре, слон окажется в угловом поле цикла. Так как оно не конечное, требуется еще один ход по циклу. Если же малый цикл содержит конечное поле, то по нему тоже надо сделать минимум четыре хода. Не менее двух ходов слон сделает по большому циклу. Всего не менее $5(k-2) + 4 + 2 = 5n/2 - 4$ ходов.

б) Пусть n нечетно, $n=2k+1$. Имеются два больших цикла и $(k-1)$ малый. Возможны два случая.

Конечное угловое поле входит в большой цикл, не содержащий начального поля. По каждому малому циклу надо сделать не менее пяти ходов и по каждому большому не менее двух. Всего не менее $5(k-1) + 2 + 2 = 5(n-1)/2 - 1$.

Конечное угловое поле не входит в большой цикл, не содержащий начального поля (если конечное поле не угловое, то число ходов не уменьшается, и наш подсчет тот же самый). По нему надо сделать минимум три хода, по одному из малых не менее четырех, по остальным не менее пяти, по другому большому не менее двух. Всего не менее $5(k-2) + 4 + 3 + 2 = 5(n-1)/2 - 1$. Результат тот же самый.

На рис. 92б, в показан обход слоном всех одноцветных полей доски $n \times n$ при четных и нечетных n ($n=10, 11$). По малым циклам, не содержащим конечное угловое поле, слон делает пять ходов, по содержащим такое поле — четыре, по большим циклам — два.

Из рисунков следует общий метод построения необходимых маршрутов слона. Очевидно, при $n=8$ маршрут содержит 16 ходов и совпадает с изображенным на рис. 91б.

Мы уже знаем, что ферзь, ладья и король могут выбрать такой маршрут по доске (с посещением всех полей по одному разу), график которого не имеет самопересечений (маршрут ферзя при этом на ход длиннее кратчайшего). Легкие фигуры — конь и слон — отличаются тем, что для них аналогичные графики (для слона — по полям одного цвета) самопересекаются. Несамопересекающийся путь коня состоит из 35 ходов (рис. 22 на стр. 34), т. е. конь посещает 36 полей. Несамопересекающийся путь слона состоит из 25 ходов и охватывает 29 полей (рис. 93). Таким образом, на одноцветной части доски без его внимания остаются лишь три поля из 32 — c1, d8 и f8.

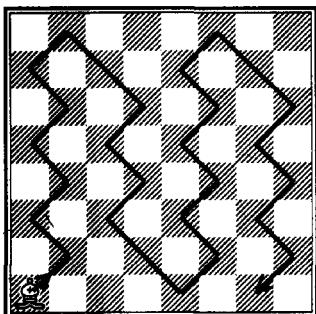


Рис. 93. Несамопересекающийся путь слона.

Какой самый длинный несамопересекающийся путь слона на доске $n \times n$?

Если с конем в общем случае задача не решена, то со слоном имеется полная ясность. На нечетной доске слон может обойти все поля меньшего цвета (белого), число их равно $(n^2 - 1)/2$, а на четной – $(n^2 - n + 2)/2$ полей, и в обоих случаях график не будет самопересекаться (при $n=8$ как раз получаем 29 полей).

Какое наибольшее число слонов можно расположить на доске, чтобы они не угрожали друг другу?

Проведем на доске пятнадцать диагональных линий, как показано на рис. 94. Если слоны не угрожают друг другу, то на каждой из них стоит не более одного слона. Поскольку прямые пересекают все поля доски, общее число слонов не превышает 15. Однако ровно столько поставить не удается, так как две крайние прямые содержат по одному полю, и оба они расположены на одной диагонали a8–h1. Рекордная расстановка 14 слонов дана на том же рис. 94.

На доске $n \times n$ можно аналогично провести $2n - 1$ параллельных диагональных прямых и, соответственно, расположить $2n - 2$ слонов, не угрожающих друг другу. Доказано, что общее число таких расстановок равно 2^n , причем в каждой из них все слоны располагаются на краю доски.

Какое наименьшее число слонов можно расположить на доске, чтобы они держали «под обстрелом» все ее свободные поля?

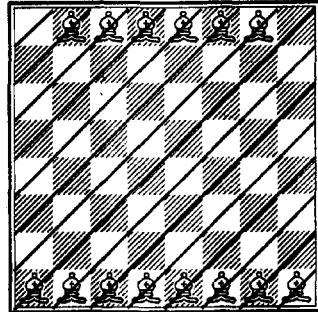


Рис. 94. Четырнадцать «мирных» слонов.

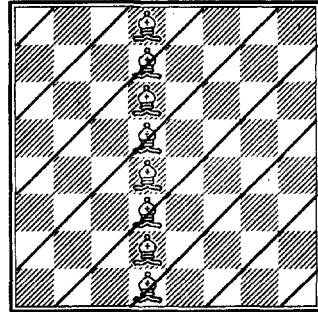


Рис. 95. Восемь слонов-часовых.

Вполне достаточно восьми слонов (рис. 95). Покажем, что меньше четырех белопольных и четырех чернопольных недостаточно. Предположим противное. Пусть белопольных слонов на доске меньше четырех. Тогда не меньше пяти белых диагоналей (из восьми отмеченных на рисунке) свободны от слонов, причем хотя бы одна из них содержит больше трех полей. Так как ни один из слонов не угрожает более чем одному полю этой диагонали (на ней самой слонов нет), на доске найдутся поля, лежащие вне зоны их действия, — противоречие. Аналогично убеждаемся, что на доске стоит не меньше четырех чернопольных слонов, т. е. общее число не меньше восьми.

В общем случае n слонов (но не меньше) могут взять под контроль все свободные поля доски $n \times n$. Их можно расположить вдоль любой центральной вертикали или горизонтали доски.

Итак, каждой из пяти шахматных фигур в книге посвящена глава (а коню и ферзю даже две). Пешке предоставлять особое место необязательно. Она может превратиться в любую фигуру и, значит, стать предметом исследования предыдущих глав. Впрочем, этот скромный персонаж — самостоятельный герой главы о необычной геометрии шахматной доски.

НЕЗАВИСИМОСТЬ И ДОМИНИРОВАНИЕ

Множество интересных и красивых задач в шахматной математике возникает при решении следующих двух комбинаторных проблем. 1. Какое наибольшее число одноименных фигур (коней, ладей, ферзей, королей и слонов) можно расставить на доске, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу? 2. Какое наименьшее число одноименных фигур (коней, ладей, ферзей, королей и слонов) можно расставить на доске, чтобы они держали «под обстрелом» все свободные поля? Первое из этих чисел будем называть числом независимости для соответствующих фигур, а второе — числом доминирования. Мирные фигуры, то есть не угрожающие друг другу, называем также независимыми, а фигуры, обстреливающие все свободные поля доски, то есть доминирующие на ней, — доминирующими.

Введенные термины заимствованы из математической теории графов, в которой задачи на шахматной доске очень часто используются для удобной иллюстрации важных понятий. Вот строгие определения, касающиеся графов.

1. Множество вершин графа называется независимым, если никакие две из них не соединены между собой ребром. Среди независимых множеств существует одно или несколько максимально независимых, содержащих наибольшее число вершин. Само оно называется числом независимости для данного графа (или числом его внутренней устойчивости).

2. Множество вершин графа называется доминирующими, если каждая вершина вне его соединена ребром хотя бы с одной вершиной, принадлежащей этому множеству. Среди доминирующих множеств существует хотя бы одно минимально доминирующее, содержащее наименьшее число вершин. Само оно называется числом доминирования для данного графа (или числом его внешней устойчивости).

Как мы знаем (об этом впервые говорилось в главе 2), каждой шахматной фигуре можно поставить в соответствие граф с вершинами на полях доски. Если возможен ход между двумя данными полями, то расположенные в них вершины соединяются ребром. Очевидно, наша первая шахматная проблема заключается в определении числа независимости для графов фигур, а вторая — в определении числа доминирования.

Такой четкой связью между графиками и головоломками на шахматной доске как раз и объясняется популярность шахматных терминов в литературе по теории графов. Существенно, что многие задачи о графах, весьма сложные в общем случае, удается решить для графов шахматных фигур. Задачами о независимости и доминировании мы сейчас и займемся. Попутно рассмотрим ряд других вопросов и обобщений, в том числе для доски $n \times n$.

Будем обозначать через N число независимости, а через D — число доминирования для данного графа, индекс обозначает размер доски. Так, N_n и D_n — числа независимости и доминирования на доске $n \times n$.

Результаты наших исследований будем заносить в табл. 4, знаки вопроса означают, что соответствующие числа неизвестны. После строк с N и D в таблице следуют строки с числом расстановок независимых и, соответственно, доминирующих фигур. Поскольку в шахматной математике популярнее всего задачи и головоломки на обычной доске, отдельно составим табл. 5 для доски 8×8 .

Конь. С независимостью здесь полная ясность. Очевидно, расставляя 32 коня на полях одного цвета (на рис. 96 — черного), получим два независимых множества. Убедимся, что других расстановок коней, же угрожающих друг другу, не существует. Пусть мирные кони каким-то образом расположены на всех полях доски. Рассмотрим произвольный замкнутый маршрут коня. В нем после каждого поля, занятого фигуру нашей расстановки, должно следовать свободное поле. Значит, кони не могут занимать более половины доски. Если же половина заполнена, то они следуют в маршруте через поле, т.е. расположены на полях одного цвета.

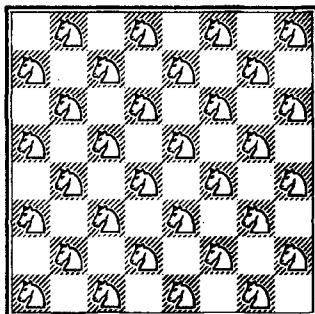


Рис. 96. 32 мирных коня.

Итак, для коней $N_8=32$, и имеются две необходимые расстановки. Другие фигуры, не угрожающие друг другу, в таком количестве расставить невозможно, и поэтому коней по праву можно считать самыми мирными жителями шахматной семьи. Аналогично для коней $N_n=n^2/2$, если n четно, и $N_n=(n^2+1)/2$, если нечетно. В первом случае возможны две расстановки (одноцветные), а во втором – только одна (кони стоят на полях того цвета, которого на доске больше).

На рис. 97 еще одно оригинальное расположение 32 коней, отличающееся тем, что каждый конь бьет ровно двух других (все кони разбиты на четыре связки).

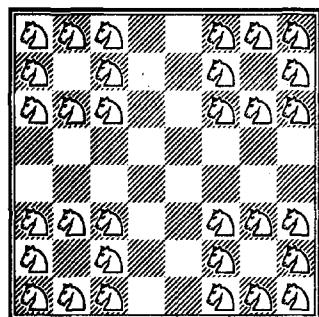


Рис. 97. Связки коней.

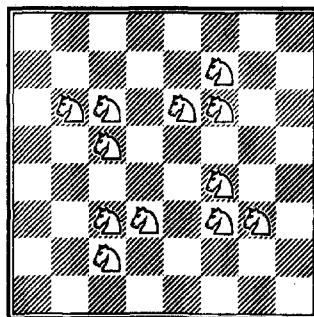


Рис. 98. Двенадцать коней-часовых.

Для доминирования на стандартной доске достаточно 12 коней (рис. 98). Любопытно, что и здесь существуют всего две расстановки — вторая получается из первой при зеркальном отражении. В общем случае задача не решена, поэтому в табл. 4 появились первые вопросительные знаки.

Ладья. Все интересующие нас результаты уже получены, в общем случае $N_n = D_n = n$, а число решений равно, соответственно, $n!$ и $2n^n - n!$. На шахматной доске имеем 8! расстановок восьми независимых и $2 \times 8^8 - 8!$ — восьми доминирующих ладей.

	Конь	Ладья	Ферзь	Король	Слон
Число независимости	32	8	8	16	14
Число расстановок	2	40320	92	281571	256
Число доминирования	12	8	5	9	8
Число расстановок	2	$2 \times 8^8 - 8!$	4860	3600	20736

Табл. 4. Независимость и доминирование.

N; D	Конь	Ладья	Ферзь	Король	Слон
Число независимости для доски $n \times n$ (N_n)	$n^2/2$, при четных n , (n^2+1) , при нечетных n	n	1, при $n=1$ и $n=2$, 2, при $n=3$, n , при $n \geq 4$	k^2 , где $n=2k$ или $n=2k-1$	1, при $n=1$, $2n-2$, при $n \geq 2$
Число расстановок	2, при четных n , 1, при нечетных n	$n!$?	?	1, при $n=1$, 2^n , при $n \geq 2$
Число доминирования для доски $n \times n$ (D_n)	?	n	?	k^2 , где $n=3k$, $n=3k-1$ или $n=3k-2$	n
Число расстановок	?	$2 \cdot n^n - n!$?	?	см. стр. 120

Табл. 5. На доске 8×8.

Ферзь. Как мы знаем, для числа независимости имеет место: $N_2=1$, $N_3=2$, а для всех $n \neq 2, 3$: $N_n=n$. В табл. 2 (на стр. 77) указано число расстановок для $n \leq 12$, в общем случае задача не решена. На стандартной доске можно расставить восемь мирных ферзей 92 различными способами.

Число доминирования ферзей на стандартной доске, как, впрочем, и на досках 9×9 , 10×10 и 11×11 , равно пяти, имеется 4860 расстановок пяти ферзей-часовых на доске 8×8 . В общем случае формула для числа доминирующих ферзей на доске $n \times n$ неизвестна, выше указаны некоторые верхние и нижние оценки для него).

Король. Задачи о независимости и доминировании королей тоже обсуждались нами. Наибольшее число независимых фигур на доске $n \times n$ равно k^2 , где $n=2k$ или $n=2k-1$. На доске 8×8 существует 281 571 расстановка; для доски $n \times n$ решение неизвестно. Наименьшее число доминирующих королей равно девятыи, получена формула и в общем случае. Число расстановок королей на шахматной доске на компьютере подсчитал А. Ханян, оно равно 3600.

Слон. В предыдущей главе доказано, что $N_n=2n-2$ ($n > 1$) и, в частности, на доске 8×8 можно расставить 14 независимых слонов. Число расстановок равно 2^n .

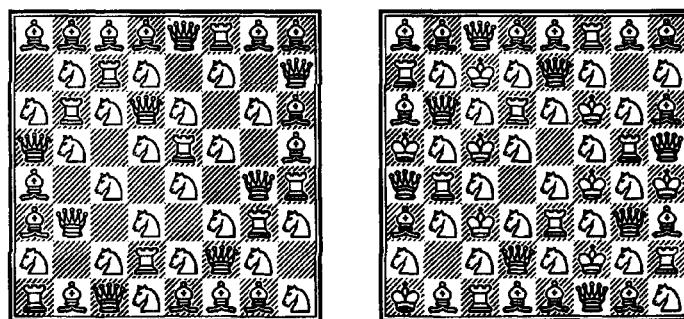
Далее, мы знаем, что $D_n=n$ и на доске 8×8 доминируют восемь слонов. Хотя формула для числа расстановок довольно громоздка, приведем ее. Итак, число расстановок n доминирующих слонов равно:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n+1}{2} \binom{n}{2}! \right]^2 && \text{при } n=4k; \\ & \frac{n^3+3n^2+2n-2}{8} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2 && \text{при } n=4k+1; \\ & \left[\frac{n^2+n+2}{4} \binom{n-1}{2}! \right]^2 && \text{при } n=4k+2; \\ & \frac{n^3+n^2-6n+6}{8} \left(\frac{n-3}{2} \right)! \left(\frac{n+1}{2} \right)! && \text{при } n=4k+3. \end{aligned}$$

Интересно, что при четных n число расстановок $2n-2$ независимых слонов и число расстановок n доминирующих представляет собой полный квадрат. Так, на доске 8×8 соответственно имеем: $2^8=256=16^2$ расстановок 14 независимых слонов и (см. формулу) $108^2=11664$ расстановок восьми доминирующих.

Понятно, в чем здесь дело. Чернопольных и белопольных слонов можно расставлять независимо друг от друга. При этом, если доска четная, то число расстановок чернопольных, обладающих некоторым свойством (независимость или доминирование), равно числу расстановок белопольных, обладающих тем же свойством. Пусть оно равно t . Комбинируя каждую из чернопольных расстановок с каждой из белопольных, всего получаем t^2 расстановок, обладающих данным свойством.

Итак, насколько возможно, мы заполнили табл. 4 и полностью табл. 5. Поскольку числа независимости и доминирования на доске 8×8 найдены для всех фигур, то решены обе проблемы, сформулированные в начале главы.



a :

6

Рис. 99. Рекорды независимости.

Позиция на рис. 99а найдена Г. Дьюдени еще в XIX в. На доске одновременно уместилось рекордное число мирных фигур: 8 ферзей, 8 ладей и 14 слонов. На белых полях расположился

21 конь, и еще для одного рекорда не хватило 11 полей. При желании на черные поля, помеченные точками, можно поставить еще 8 королей, и тогда свободными останутся всего 5 полей. Таким образом, в расстановке Дьюдени участвуют 59 персонажей, причем одноименные фигуры не бьют друг друга. Этот рекорд держался около 100 лет, и только в 1986 г., всего на одну фигуру, его побил В. Попов (рис. 99б). Здесь при 8 ферзях, 8 ладьях, 14 слонах и 21 коне разместилось 9 королей, и общее число фигур увеличилось до 60. Четыре свободных поля расположились на одной большой диагонали, что придает позиции своеобразную симметрию.

Прошло два года, и был побит и этот рекорд. На рис. 99в – позиция, которую обнаружил Б. Курбанов. По-прежнему на доске 8 ферзей и 8 ладей, а третий рекорд установлен не для слонов, а для королей – 16. Коней столько же, сколько у Дьюдени и Попова – 21, но есть еще 10 слонов. Итого 63 фигуры, почти полная доска. Но и на этом дело не кончилось. Спустя еще год один из любителей головоломок придумал новую позицию (рис. 99г). Число рекордов увеличилось до четырех: 8 ферзей + 8 ладей + 14 слонов + 16 королей; причем это предел – нетрудно установить, что пяти рекордов одновременно не бывает. На доске еще 12 мирных коней, а вот оставшиеся шесть пустых полей уже никак не использовать. До сих пор мы занимались классическими головоломками о расстановке шахматных фигур. Однако существует множество интересных задач, в которых используются различные наборы фигур (не обязательно одноименных). Если говорить о независимости, то можно расставлять произвольное число фигур, не угрожающих друг другу. Вот общая формулировка целого класса задач.

Сколько способами можно расставить r мирных фигур на доске $n \times n$ ($r \leq N_n$)?

Расставлять фигуры можно одного цвета или обоих, и требовать, чтобы белые и черные не угрожали друг другу. А следующая головоломка имеет более шахматное содержание. *При каком наименьшем n на доске $n \times n$ умещается весь комплект белых и черных фигур (без пешек), причем фигуры разного цвета*

та не угрожают — уже по-шахматному! — друг другу? На доске 4×4 16 персонажей невольно войдут в соприкосновение, а на доске 5×5 искомые расстановки уже существуют (рис. 100), причем одна из них центрально-симметрична (рис. 100а).

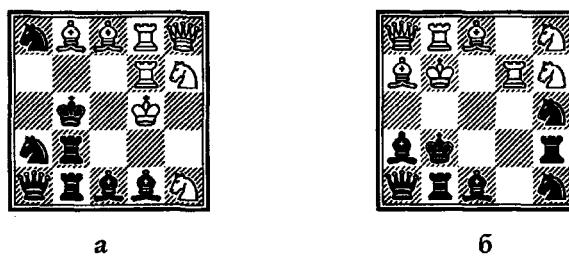


Рис. 100. Белые и черные фигуры не мешают друг другу.

При каком наибольшем p на обычной доске можно расставить p королей, p ферзей и p слонов, чтобы никакие две фигуры не были друг друга? На рис. 101 стоят 12 мирных фигур — 4 короля, 4 ферзя и 4 слона, т. е. $p=4$. Больше быть не может. Предположим, что нам удалось расставить по пять королей, ферзей и слонов. Все ферзи должны стоять на разных линиях, и остаются свободными лишь девять полей на пересечении трех оставшихся горизонталей и вертикалей, а ведь поставить нужно еще 10 фигур.

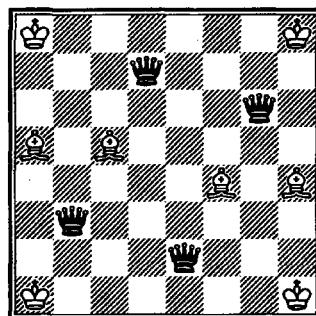


Рис. 101. Двенадцать мирных фигур.

В задачах о доминировании часто требуется, чтобы «под обстрелом» находились не только свободные поля доски, но и занятые фигурами. На рис. 50б у нас было пять ферзей-часовых, восемь ладей, расположенных вдоль любой вертикали или горизонтали, контролируют все поля доски. Что же касается других фигур, то их требуется несколько больше, чем для обычного доминирования. Коней и слонов придется взять на два больше, а королей даже на три (рис. 102). Итак, 14 коней, 10 слонов или 12 королей в состоянии держать все 64 поля доски.

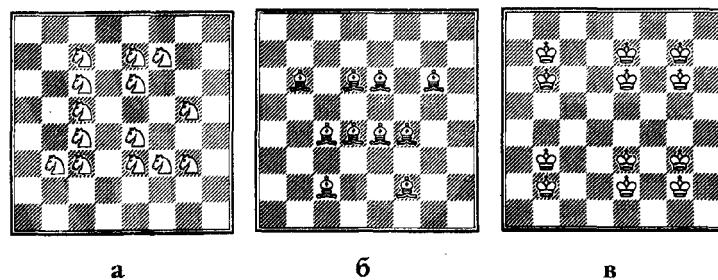


Рис. 102. Под охраной все поля доски.

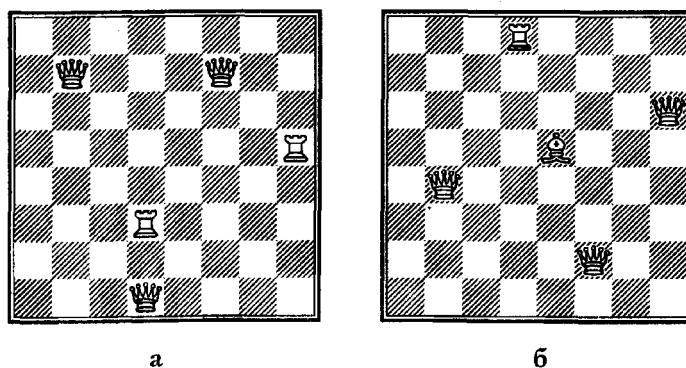


Рис. 103. Пять фигур-часовых.

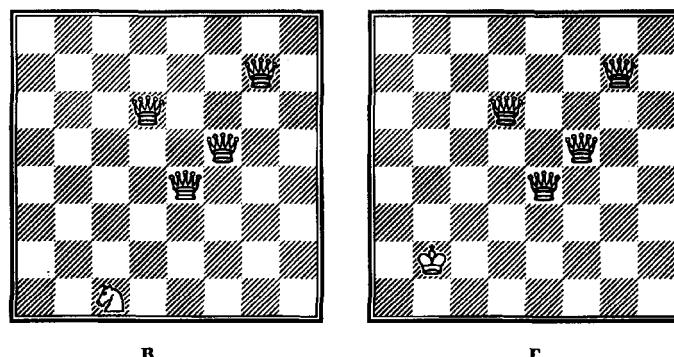


Рис. 103. Пять фигур-часовых.

Исследуем теперь доминирование различных наборов фигур, не обязательно одноименных. Пять ферзей справляются с шахматной «тюрьмой» (держат под контролем либо свободные поля доски, либо все), но меньшим числом фигур не обойтись. Любопытно, однако, что двух из пяти ферзей можно заменить более слабыми фигурами — двумя ладьями или даже ладьей и слоном (рис. 103а, б), причем в первом случае атакованы все 64 поля. Если ферзей сопровождает конь или король, то на доске придется оставить четырех ферзей (рис. 103в, г); их положение здесь одно и то же.

Можно ли расставить на доске полный набор из восьми фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня), чтобы они нападали на все 64 поля доски? Как ни странно, все фигуры доминируют на доске лишь в том случае, если слоны одноцветные (рис. 104а). Если же слоны разного цвета, то одно поле всегда останется без контроля, причем таким полем может быть любое (на рис. 104б — с1).

Если требуется, чтобы под охраной находились только свободные поля доски, то хватает и семи фигур из комплекта, одного из слонов можно просто снять (рис. 105).

Прежде чем рассказать о следующей задаче о расстановке фигур, дадим еще одно определение из теории графов. Пусть

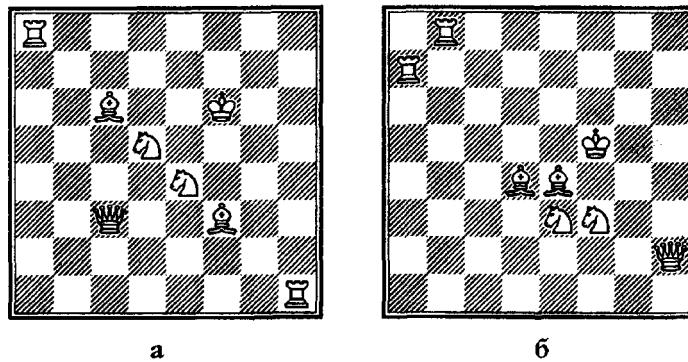


Рис. 104. Доминирование восьми фигур.

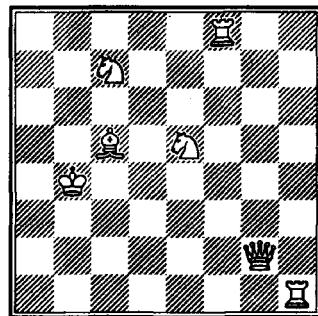


Рис. 105. Семь фигур-часовых.

каждой вершине графа приписан некоторый цвет. Скажем, что граф раскрашен правильно, если любые две вершины, связанные одним ребром, имеют разные цвета. Наименьшее число красок, которое требуется для раскраски данного графа, называется его хроматическим числом.

Нахождение хроматического числа (как и чисел независимости и доминирования) в общем случае представляет собой весьма сложную проблему. Упомянем знаменитую задачу о

четырех красках, которая сводится к определению хроматического числа в графе.

Можно ли произвольную географическую карту раскрасить четырьмя красками, чтобы любые две соседние страны были окрашены в разные цвета? Если в каждой стране поместить вершину графа и соединить ребром пары вершин, расположенных в соседних странах, то получим граф географической карты. Его хроматическое число совпадает с наименьшим числом красок, необходимых для раскраски карты. Гипотеза, согласно которой хроматическое число графа для любой карты не более чем четыре (хватает четырех красок), была высказана еще в середине XIX в. Несмотря на усилия многих математиков, доказать ее удалось только спустя сто с лишним лет, в 1976 г. А теперь шахматный вариант этой старинной задачи. *Какого наименьшего числа красок достаточно для раскраски всех полей доски, чтобы любые два поля, связанные ходом данной фигуры (ферзя, ладьи, коня, слона или короля), были окрашены в разные цвета?* Меньше всего красок – две – требуется для коней, собственно, здесь и раскрашивать нечего, сама черно-белая доска и есть решение головоломки. В случае слонов и ладей достаточно восьми красок, и меньшим числом не обойтись. Каждую вертикаль, заполненную слонами, надо раскрасить в свой цвет. Для ладей все поля первой горизонтали можно окрасить в разные цвета, а далее использовать «циклический сдвиг» красок. Другими словами, если краски пронумеровать от 1 до 8, то окраска первой горизонтали – 1, 2, ..., 8; второй – 2, 3, ..., 8, 1; третьей – 3, 4, ..., 8, 1, 2 и т. д., восьмой – 8, 1, ..., 7. Переходя к королям, заметим, что для них все четыре поля произвольного квадрата 2×2 должны быть окрашены в четыре цвета. Четырех красок хватает и для всей доски. Левый нижний квадрат произвольно раскрасим в четыре цвета, затем так же раскрасим соседние квадраты 2×2 и т. д., пока не будет раскрашена вся доска.

На рис. 106 – для случая ферзей – предложена раскраска доски в девять цветов (числа от 1 до 9 соответствуют девяти краскам). Действительно, здесь никакие два одинаковых числа

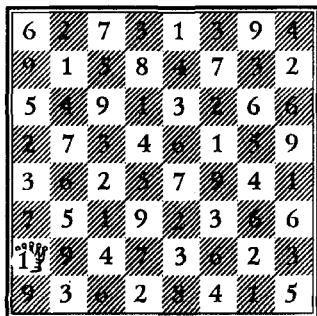


Рис. 106. Задача о красках для ферзей.

не стоят на одной вертикали, горизонтали и диагонали. Восьми красок для доски с ферзями уже не хватает. Вот простое доказательство, предложенное И. Романовским. Все ферзи произвольного цвета должны образовывать одну из расстановок задачи о восьми ферзях. Значит, восемь таких расстановок заполняют всю доску. Так как на обеих больших диагоналях по восемь полей, каждое должно войти в какую-то из расстановок, т. е. нас устраивают только такие, которые содержат по одному элементу из обеих диагоналей. Поэтому из 12 основных наборов не годятся: № 12 (нет диагональных полей), № 8 и 9 (есть представители только одной диагонали). Концы диагоналей содержатся лишь в № 4, 5. В них второй диагональный представитель — элемент диагонали, второй от конца. Использование наборов № 4, 5 для четырех цветов (четыре угловых поля) занимает все элементы диагоналей, вторые от конца. Это исключает использование наборов № 1, 2, 3, 6, 7, 10, 11 — ничего не остается!

Доказано, что любую доску $n \times n$ можно раскрасить в $n+3$ цвета, чтобы ферзи, стоящие на полях одного цвета, не угрожали друг другу. Для некоторых n достаточно и меньшего числа красок: $n+2$, $n+1$ или n . Существует гипотеза, что при любом $n \geq 3$ хроматическое число графа ферзей равно либо n , либо $n+1$.

В наше демократическое время, когда важные решения принимаются большинством голосов, И. Акулич придумал весьма актуальную шахматную головоломку.

Шахматно-демократическая задача. Какое наибольшее число фигур можно расставить на доске так, чтобы каждая из них угрожала не менее чем: а) половине остальных? б) большинству остальных? в) квалифицированному большинству, т. е. $2/3$ остальных? Поскольку ферзь, поставленный на место ладьи, слона, короля и пешки, держит те же поля и еще некоторые, достаточно искать расстановки, в которых используются только ферзи и кони.

Выясним, какое наибольшее число фигур может находиться на доске. Пусть они расставлены нужным образом — выполняется одно из условий — а, б или в. Рассмотрим самую нижнюю горизонталь, на которой имеются фигуры, и самую правую фигуру на ней. Если это ферзь, то он держит не более четырех фигур (слева, слева-сверху, сверху и справа-сверху от себя). Если это конь, то он тоже угрожает не более чем четырем фигурам (ниже него фигур нет). Итак, в нашей расстановке имеется хотя бы одна фигура, которая угрожает не более чем четырем другим. Тогда для случая а число остальных фигур на доске не больше четырех, для случая б — не больше трех, и для случая в — не больше двух. Поэтому общее число фигур не превышает: для а — девяти ($1+4+4=9$), для б — восьми ($1+4+3=8$) и для в — семи ($1+4+2=7$). Это и есть ответы в «демократической» головоломке.

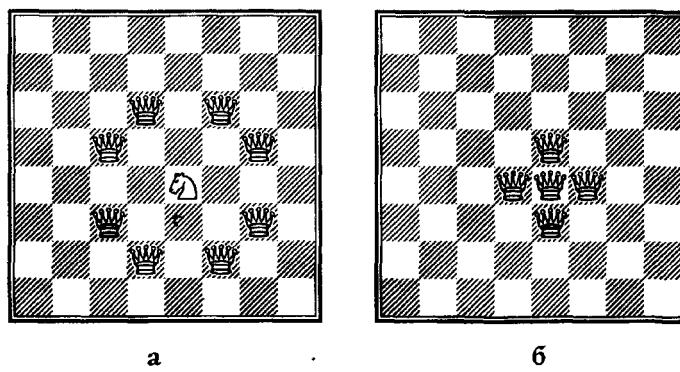


Рис. 107. Демократия на шахматной доске.

На рис. 107а расстановка наибольшего числа фигур для *a* – девять. Каждый ферзь угрожает четырем, т. е. половине остальных фигур (а конь вообще нападает на все фигуры). Рекордная расстановка для *b* получается из данной удалением коня. Теперь каждый ферзь угрожает четырем из остальных семи, то есть большинству. Чуть сложнее обстоит дело для *b*. Можно доказать, что нас устраивают только пять фигур и не больше. На рис. 107б каждый ферзь угрожает трем или четырем другим, то есть не меньше чем $2/3$ ($4 \times 2/3 = 2,66\dots$) остальных ферзей – условие *b*) выполнено. Все приведенные рекорды абсолютные, улучшить их невозможно. *Можно ли расставить на доске весь комплект фигур и пешек одного цвета, чтобы никакая фигура (пешка) не была другую?*

Одна из возможных расстановок показана на рис. 108; белые пешки, правда, достигнув последней вертикали, остались на доске...

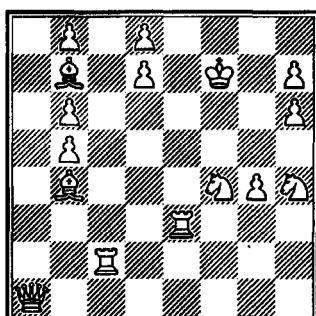


Рис. 108. Ни одна фигура не угрожает другой.

Можно ли расставить на доске: а) пять ладей и пять коней; б) шесть ладей и шесть коней, чтобы ни одна фигура не была другую?

В первом случае расстановка существует (рис. 109), во втором – нет. И правда, если поставить на доске шесть ладей, не угрожающих друг другу, то придется исключить из рассмотрения шесть вертикалей и шесть горизонталей. Всего в запасе останется четыре свободных поля, а коней – шесть!

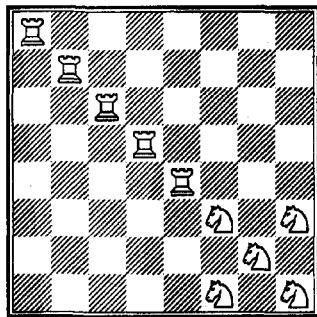


Рис. 109. Мирные ладьи и кони.

В нашей книге содержится немало задач с участием одноименных фигур. Вот еще один весьма оригинальный подход. Напомним, что в русских шашках на 64-клеточной доске три дамки всегда ловят одну неприятельскую, если она не стоит на «большой дороге», т. е. на диагонали a1-h8. Известный математик В. Успенский предложил интересное шахматное обобщение этой шашечной ситуации.

Какое наименьшее число одноименных фигур данного цвета спрятываются с одной такой же фигурой противоположного цвета (другие фигуры на доске отсутствуют)?

Рассмотрим эту задачу для каждой из пяти фигур, предполагая, что сильнейшая сторона – белые и начинают они (исходное положение произвольное).

Ферзи. При пяти ферзях, доминирующих на доске (рис. 50 на стр. 67), черному ферзю некуда деться. Однако, оказывается, достаточно и четырех ферзей (рис. 110). Этую симпатичную позицию обнаружил А. Ханян; ферзи здесь занимают вершины параллелограмма, напоминающего стрелку компаса, вписанную в квадрат. В распоряжении черного ферзя три свободных поля – b4, f1 и g6, не связанных между собой ходом ферзя. Значит, на каком бы из них ферзь ни находился, он не сможет перескочить на безопасное поле и сразу попадает под бой.

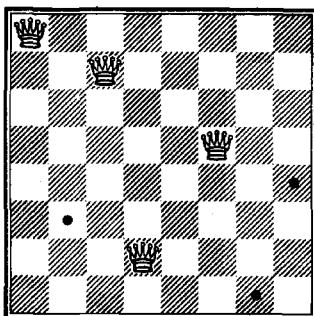


Рис. 110. Четыре белых ферзя ловят одного черного.

Ладьи. Шесть белых ладей (а тем более меньше) не могут справиться с одной черной. Действительно, где бы они ни находились, найдутся две свободные горизонтали и вертикали. Четыре поля на пересечении этих линий образуют прямоугольник и не атакованы. При своем ходе черная ладья всегда может перескочить с одного из этих безопасных полей на другое. А вот семь ладей без труда ловят неприятельскую. Например, снимем на рис. 64 (стр. 87) любую белую ладью, тогда черная может стоять только на этом поле и, делая ход, тут же оказывается под ударом.

Слоны. Достаточно четырех слонов. Пусть фигуры белопольные; тогда белые располагаются на полях d1, d3, d5 и d7. В результате у черного слона не остается полей.

Короли. Два белых короля легко оттесняют черного на край доски, а затем в угол. У того не остается пространства, и он вынужден встать под удар (в данном случае математические правила важнее шахматных).

Кони. Составлена компьютерная программа, позволяющая трем белым коням всегда окружить черного. Конечно, белый конь e5 один «выигрывает» у коня h8 при ходе черных; но это исключение из правила.

Итак, проблема Успенского полностью решена!

ЗАДАЧИ О ПЕРЕСТАНОВКАХ

Одной из самых известных головоломок является игра «Пятнадцать», придуманная С. Лойдом. Она относится к так называемым перестановочным играм и поддается строгому математическому исследованию.

В коробочке 4×4 находятся 15 квадратов, пронумерованных числами от 1 до 15 (одно из возможных расположений показано на рис. 111а). Требуется, не вынимая квадраты из коробочки, переставить их так, чтобы все номера следовали в возрастающем порядке (рис. 111б).

За решение головоломки в начальной «позиции» на рис. 111а Лойд назначил большую денежную премию. Правда, он ничем не рисковал, так как предварительно доказал, что задание невыполнимо. Всего существует $16!$ расположений квадратов, и все они распадаются на два равных по численности класса. Расположения первого приводятся при помощи перестановок к исходному виду на рис. 111б, а расположения второго — нет, их удается привести только к виду на рис. 111а, где у двух квадратов 14 и 15 порядок нарушен.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

а

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

б

Рис. 111. Игра «Пятнадцать».

Чтобы определить, к какому из двух классов принадлежит данное положение, надо подсчитать общее число транспозиций в нем. Говорят, что два квадрата образуют транспозицию, если квадрат с большим номером предшествует квадрату с меньшим. Если число транспозиций четно, то положение относится к первому классу (на рис. 111б оно равно нулю), а если нечетно, то ко второму (на рис. 111а одна транспозиция). Идея доказательства заключается в том, что четность числа транспозиций не меняется при любой перестановке ладей, но правильными ходами четность можно уменьшить, доведя в конце концов, соответственно, до 0 или 1.

Подробный анализ «пятнашек» не входит в наши планы, а вспомнили мы о них в связи с легким переводом игры на шахматный язык.

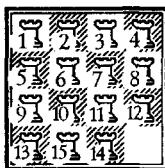


Рис. 112. Переставить ладьи в возрастающем порядке.

На доске 4×4 расположены 15 ладей, пронумерованных числами от 1 до 15 (рис. 112). Переставить эти ладьи, чтобы они расположились в возрастающем порядке номеров, а пустым осталось поле d1.

Так как ходы ладей совпадают с перестановками квадратов в «Пятнадцати», эта задача, как говорят математики, изоморфна игре Лойда. Иначе говоря, существование решения зависит от числа транспозиций ладей в исходной позиции. В данном случае оно равно двум (ладья a1 стоит перед ладьей b1 и c1), и, значит, необходимая перестановка существует. Вот возможное решение, которое содержит 36 ходов (указаны ладьи, которые делают очередной ход): $\overline{c1}, b1, a1, a2, b2, c2, d2, d1, c1, b1, b2, c2, d2, d1, c1, c2, d2, d1, c1, b1, b2, c2, c1, b1, b2, c2, c1, d1, d2, c2, b2, a2, a1, b1, c1, d1$. Все ладьи на своих местах!

Эту задачу о ладьях можно обобщить для любых досок. Так, на обычной доске все позиции с 63 пронумерованными ладьями тоже распадаются на два класса: в одном их можно расположить в возрастающем порядке, в другом – нет. Любопытно, что такая же ситуация имеет место и для коней: в половине случаев 63 пронумерованных коня можно расположить в возрастающем порядке, а в половине – нет (разумеется, кони ходят, как и положено, буквой «Г»). Для ферзей и королей необходимая перестановка возможна всегда, а для слонов задача лишена смысла, так как они не могут поменять свой цвет.

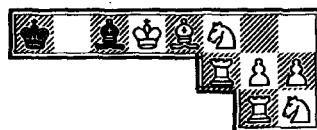


Рис. 113. «Пистолет» Доусона. Мат в 21 ход.

Рассмотрим еще несколько перестановочных задач на шахматной доске. В «пистолете» Т. Доусона на рис. 113, изобретенном известным шахматным фантастом почти 100 лет назад, фигурам довольно тесно, и поэтому в течение 20 ходов механизм лишь приводится в действие (ладья за это время занимает место короля), и только затем раздается выстрел!

Перечислим белые фигуры в том порядке, в каком они натягивают пружину (в распоряжении неприятельского короля всего два поля, на которых он и ждет своей участи): 1–20. ♕, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜, ♜ и, наконец, 21. ♜ X.

Данная задача, хотя фигуры перемещались на необычной доске, вполне шахматная. В следующих трех головоломках, придуманных около 100 лет назад шахматным композитором В. Шинкманом (рис. 114), перестановки уже совсем нешуточные. В каждом из зигзагов играют только белые, и задание нужно выполнить за наименьшее число ходов.

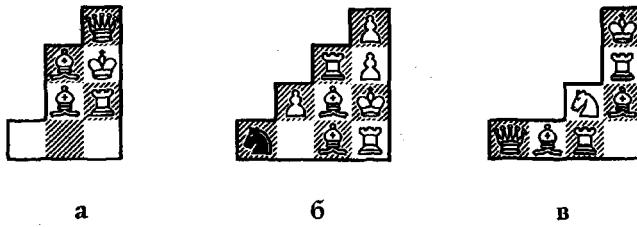


Рис. 114. Зигзаги Шинкмана.

Любопытно, что только в наши дни А. Ханян с помощью компьютера доказал, что все три приведенные решения действительно кратчайшие.

Займемся теперь шахматно-перестановочными задачами, которые носят вполне математический характер. В большинстве из них присутствуют кони, т. е. эта хитрая фигура и в данной главе занимает видное место. Начнем с одной старинной головоломки.

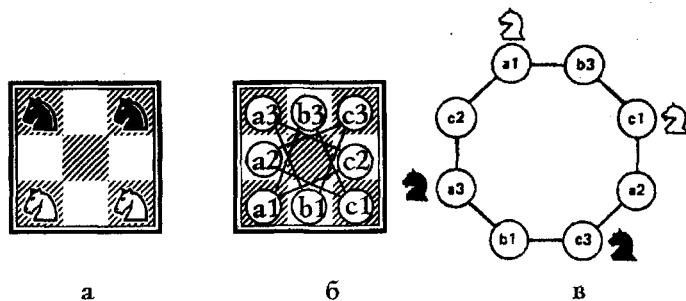


Рис. 115. Метод пуговиц и нитей.

В углах доски 3×3 стоят два белых и два черных коня (рис. 115а). Поменять местами белых и черных коней за наименьшее число ходов.

Эта задача, придуманная итальянцем Гуарини еще в XVI в., изящно решается при помощи метода пуговиц и нитей, открытого знаменитым мастером математических головоломок Г. Дьюдени.

Разместим на каждом поле маленькой доски, кроме центрального (на него кони все равно не могут попасть), по пуговице (на рис. 115б роль пуговиц играют кружки). Если между двумя какими-то полями возможен ход конем, свяжем соответствующие пуговицы нитью (их заменяют отрезки прямой). Полученный клубок пуговиц и нитей распутаем так, чтобы все пуговицы расположились удобно, по кругу (рис. 115в).

Теперь решение головоломки, этих шахматных «пятнашек», находится без труда. Выбрав одно из направлений по кругу, надо переставлять коней до тех пор, пока они не поменяются местами. Необходимое перемещение по доске получается обратной заменой пуговиц полями. Кратчайшее решение состоит из 16 ходов, причем белые и черные кони могут ходить по очереди, не угрожая друг другу. Надо следить лишь за тем, чтобы фигуры разного цвета не оказались в клубке соседями.

Пусть круговое движение (по часовой стрелке) начинает белый конь a1. Вот искомая перестановка, она содержит 16 ходов: a1-b3, c3-b1, c1-a2, a3-c2, b3-c1, b1-a3, a2-c3, c2-a1, c1-a2, a3-c2, c3-b1, a1-b3, a2-c3, c2-a1, b1-a3, b3-c1.

Метод пуговиц и нитей легко интерпретировать в терминах теории графов (хотя Дьюдени обошелся без нее!). Действительно, любой задаче о перестановке коней можно сопоставить граф, вершины которого, как обычно, соответствуют полям доски (пуговицам), а ребра – возможным ходам между ними (нитям). Распутывание клубка есть не что иное, как более наглядное и удобное расположение графа на плоскости. Заметим, что метод Дьюдени (иначе говоря, манипуляция с графом) используется для решения разных головоломок на перестановки, необязательно шахматных. Пуговицы соответствуют возможным ситуациям, а нити – переходам из одной ситуации в другую.

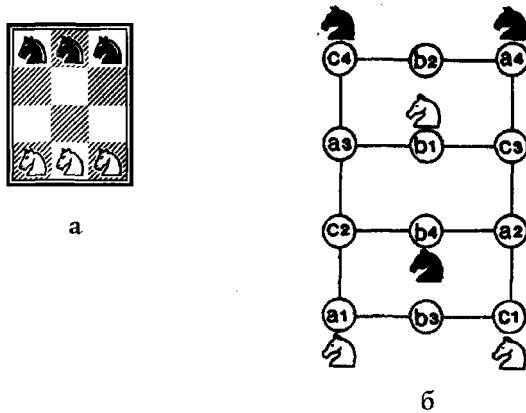


Рис. 116. Белые и черные кони меняются местами.

Поменять местами белых и черных коней на доске 3×4 (рис. 116а).

Хотя доска здесь побольше и у каждой стороны не по два, а по три коня, метод пуговиц и нитей позволяет без труда

добиться цели. Распутанный клубок показан на рис. 116б. Внимательно исследовав его, получаем 22-ходовое решение:
 $\text{d}1\text{-b3, a4-b2, b1-c3, b4-c2, c1-a2, c4-a3, b3-c1, b2-c4, c3-a4, c2-a1, a2-c3, a3-c2, c1-a2, c4-a3, a4-b2, a1-b3, c3-a4, c2-a1, a2-b4, a3-b1, b2-c4, b3-c1}$. Белые и черные кони опять ходили по очереди и ни разу не нападали друг на друга.

Если мы имеем дело с досками 3×3 и 3×4 , то графы на рис. 115в, 116б пригодны для любой начальной расстановки коней.

Поменять местами белых и черных коней (рис. 117).

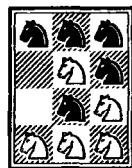


Рис. 117. Долгие маневры коней.

Необходимая перестановка занимает 38 ходов: $\text{c}2\text{-a3, c3-a2, b1-c3, b4-c2, a3-b1, a2-b4, c1-a2, c4-a3, b3-c1, b2-c4, a1-b3, a4-b2, c3-a4, c2-a1, a2-c3, a3-c2, c1-a2, c4-a3, b3-c1, b2-c4, a4-b2, a1-b3, c3-a4, c2-a1, b1-c3, b4-c2, a2-b4, a3-b1, c1-a2, c4-a3, b2-c4, b3-c1, a4-b2, a1-b3, c3-a4, c2-a1, a2-c3, a3-c2}$. Вновь белые и черные кони ходили по очереди, причем даже соблюдали определенную симметрию.

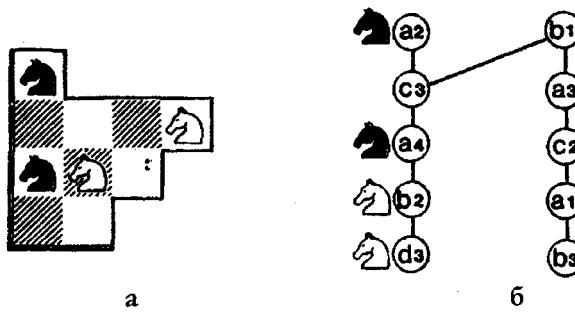


Рис. 118. Перемещение коней через транзит.

Доска на рис. 118а имеет довольно причудливую форму, но для метода пуговиц и нитей это не является препятствием.

Чтобы найти перестановку белых и черных коней (на сей раз им разрешается нападать друг на друга), вновь распутаем клубок пуговиц и нитей (рис. 118б). Анализируя ситуацию, нетрудно обнаружить, что поле с3 является транзитным — связь между двумя ветками полей возможна только через него. Для достижения цели осуществляются следующие маневры.

Сначала три коня левой ветки — а4, б2, д3 — через «транзит» на с3 переправляются на правую — поля б1, а3, с2. Теперь черный конь а2 перебирается на д3, а белые кони возвращаются на левую ветку — а4, б2. Далее второй черный конь, с2, временно располагается на а2 и пропускает белых на правую ветку — б1, а3. Наконец конь а2 проходит на б2, а белые кони занимают поля а4, а2. Все на местах! Приведенный «план» не очень сложен, но для его выполнения требуется 40 ходов.

Кстати, поля а1 и б3 не использовались в решении, и их можно вырезать, что придаст доске еще более странный вид. Подобные необычные доски мы еще встретим впереди (рис. 121).

При решении перестановочных задач на досках большего размера применить метод пуговиц и нитей труднее, но иногда вполне возможно.

Поменять местами белых и черных коней на доске 4×4 (рис. 119а).

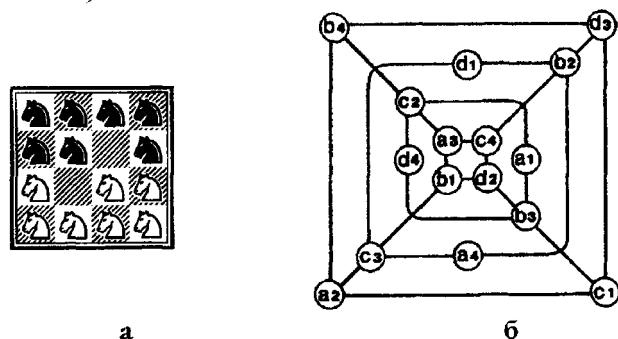


Рис. 119. Маневры по четырем кольцам.

Распутаем доску 4×4 , как показано на рис. 119б. Кони меняются местами следующим образом. Сначала происходит движение по внешнему кольцу: a2-c3, c1-a2, d3-c1, b4-d3, a2-b4, c1-a2, d3-c1, d1-b2, b2-d3. Затем крутится третье по величине кольцо: c4-b2, a3-c4, c2-a3, d4-c2, b3-d4, a1-b3, c2-a1, d4-c2, b3-d4, d2-b3. Далее кони идут по самому маленькому кольцу: c4-d2, a3-c4, b1-a3, c3-d1, a4-c3, c3-b1. Еще три хода: d1-c3, c3-a4, b2-d1, и цель достигнута!

В этом старинном решении перемещение коней заняло 28 ходов. В дальнейшем рекорд был улучшен на шесть ходов: b1-c3, c4-b2, d2-c4, a3-b1, c2-a3, b3-d2, a1-c2, d4-b3, c2-d4, b3-a1, c1-b3, b4-c2, a2-b4, d3-c1, b4-d3, c3-a2 (единственное нарушение очередности ходов), a4-c3, a2-b4, c3-a2, d1-c3, b2-d1, c3-a4.

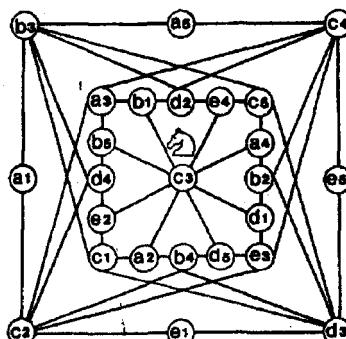


Рис. 120. Клубок для доски 5×5 .

Если распутать доску 5×5 (рис. 120), то на ней нетрудно найти маршрут коня по всем полям доски (классическая задача!). С с3 он прыгает, например, на а4, обходит внутреннее кольцо по часовой стрелке, доходит до с5, перескакивает на д3 и снова идет по часовой стрелке по внешнему кольцу, заканчивая кругосветное путешествие на поле е5. В отличие от предыдущих головоломок графы ходов коня на досках 4×4 и

5×5 являются неплоскими, т. е. при любом изображении их на листе бумаги некоторые ребра всегда будут пересекаться.

Конечно, метод пуговиц и нитей не удается применить в «пятнашках» или в рассмотренных выше зигзагах Шинкмана (во втором случае для разных фигур и связь полей разная). А вот современный мастер головоломок В. Красноухов придумал целую серию зигзагов (опять же с конями), для решения которых метод Дьюдени работает безотказно. Приведем три его наиболее оригинальные зигзаги (рис. 121).

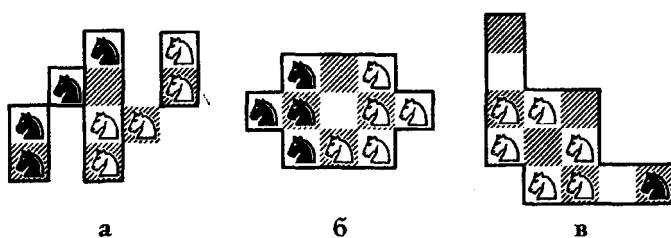


Рис. 121. Зигзаги Красноухова.

- Переставить белого коня $c2$ на соседнее поле $c3$ (все остальные кони — и белые и черные — занимают те же места).
- Конь $c1$ попадает на $c3$ (остальные кони на местах).
- Черный конь $e1$ перебирается на $a5$ (все белые кони возвращаются на места).

Развязанные клубки пуговиц и нитей для трех этих задач показаны на рис. 122 а–в.

а) Если переставлять все фигуры по большому кругу, то в конце концов конь $c2$ окажется на $c3$. Это долго, и не на всех полях окажутся кони нужного цвета. Решение более хитрое, причем цель (показана пунктирной стрелкой) достигается за 37 ходов. Поскольку на доске всего одно свободное поле, достаточно указывать только коня, который делает очередной ход.

1–18. ♜a2, c1, b3, a1, c2, e3, c4, d2, e4, c3, a2, c1, b3, a1, c2, e3, c4, d2. Пока все кони перемещались по часовой стрелке. 19. ♜b3!

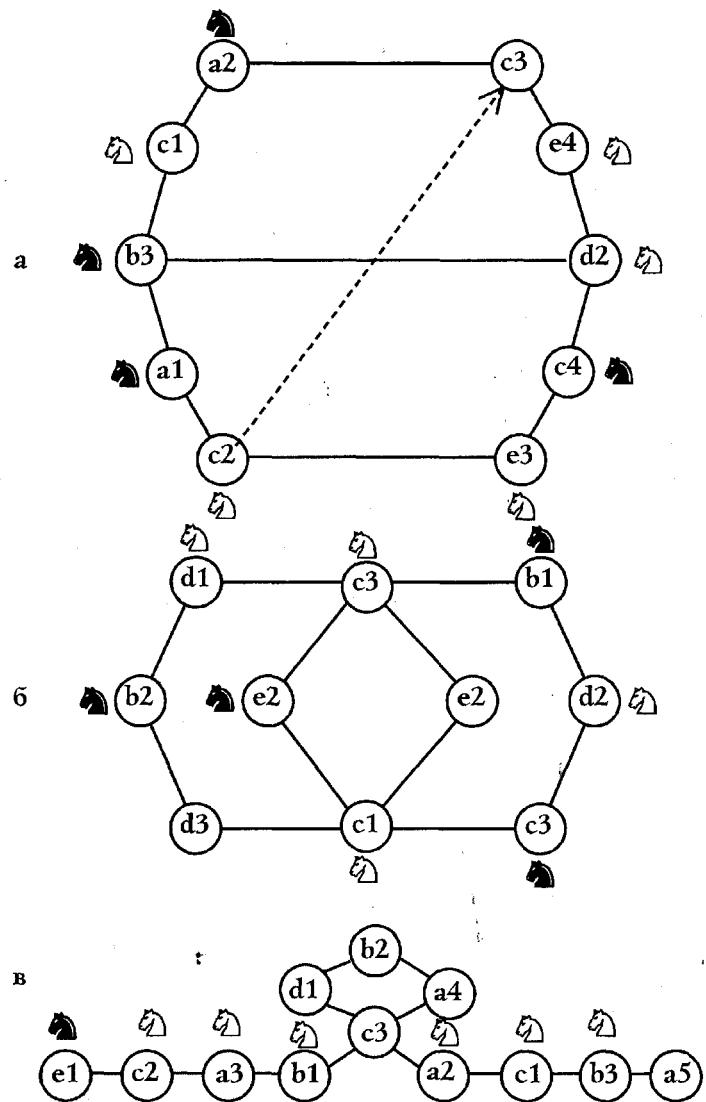


Рис. 122. Развязанные зигзаги.

Но в нужный момент используется внутренняя нить, и кони начинают обратное движение, против часовой стрелки! 20—37. $\square c1, a2, c3, e4, d2, c4, e3, c2, a1, b3, c1, a2, c3, e4, d2, c4, e3, c2$. Задача решена.

б) Опять имеется всего одно поле для маневров ($c2$ не в счет, оно недоступно коням): $\square e2, c1, a2, c3, d1, b2, d3, c1, a2, c3, d1, b2, d3, c1, a2, c3, e2, c1$ — 18 ходов.

в) Подобная головоломка уже была (рис. 118), но из развязанного клубка пуговиц и нитей видно, что в данном случае вместо одного транзитного поля используется целая ветка — поля $a4, b2, c3, d1$. По ней перемещение коней не однозначно, поэтому указываются только начальное и конечное поля каждого участка движения (а в скобках — количество ходов).

Итак, чтобы перевести черного коня с $e1$ на $a5$ и положение всех белых коней не изменилось, необходимо 64 (!) хода: $\square b1-b2$ (3), $\square a3-a4$ (3), $\square c2-d1$ (4), $\square b3-a5$ (1), $\square c1-b3$ (1), $\square a2-c1$ (1), $\square e1-a2$ (5), $\square d1-e1$ (5), $\square a4-c2$ (4), $\square b2-a3$ (4), $\square a2-b1$ (2), $\square c1-d1$ (3), $\square b3-b2$ (5), $\square a5-a4$ (5), $\square b1-a5$ (5), $\square a4-b3$ (4), $\square b2-c1$ (4), $\square d1-a2$ (2), $\square a3-b1$ (1), $\square c2-a3$ (1), $\square e1-c2$ (1).

Следующую головоломку, тоже с участием коней, С. Лойд считал одной из самых трудных. Он гордился тем, что мало кому из его друзей удавалось переправить коней «через Дунай» (вертикаль «е»).

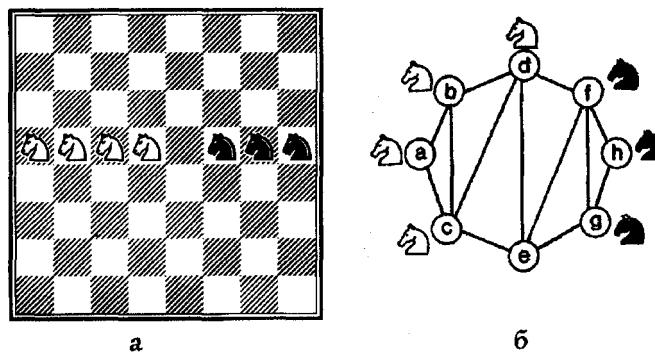


Рис. 123. Переход через Дунай.

Переход через Дунай. Как быстрее всего в положении на рис. 123а переставить белых коней с ферзевого фланга на королевский (вертикали «e», «f», «g», «h»), а черных — с королевского на ферзевый (вертикали «a», «b», «c»)? Очередность ходов соблюдать необязательно, но коням запрещается отступать (белым — влево, черным — вправо), и, кроме того, на каждой вертикали всякий раз может находиться только один конь.

Распутанный клубок пуговиц и нитей показан на рис. 123: кружках (пуговицах) записаны вертикали доски, и кружки связаны нитью в том случае, если между вертикалями возможен ход конем.

Цель достигается за 19 ходов. Чтобы предельно сократить их число, надо умело использовать внутренние нити. Поскольку безразлично, на какую половину доски, верхнюю или нижнюю, попадают кони, достаточно указать сами вертикали: ♖de (на первом же ходу используется внутренняя нить), fd, gf, eg, ce, bc, db, fd, hf, gh, eg, ce, ac, ba, db, fd, ef, ce, dc. Ни один конь ни разу не отступал, и река Дунай покорена!

Коням в этой главе удалено слишком много внимания, и поэтому завершим ее несколькими головоломками с участием других фигур.

На доске 4x5 (рис. 124) поменять местами белых и черных слонов, чтобы они ходили по очереди и никакие два не угрожали друг другу.

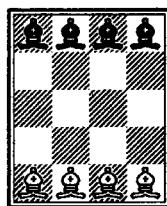


Рис. 124. Задача о перестановке слонов.

Необходимая перестановка состоит из 36 перемещений слонов, поровну белых и черных: ♘c1-b2, ♘b5-c4, ♘b1-c2,

\hat{Q} c5-b4, \hat{Q} b2-d4, \hat{Q} c4-a2, \hat{Q} c2-d3, \hat{Q} b4-a3, \hat{Q} d1-a4, \hat{Q} a5-d2, \hat{Q} a4-b5, \hat{Q} d2-c1, \hat{Q} d4-c3, \hat{Q} a2-b3, \hat{Q} d3-bl, \hat{Q} a3-c5, \hat{Q} c3-a5, \hat{Q} b3-dl, \hat{Q} al-c3, \hat{Q} d5-b3, \hat{Q} b5-d3, \hat{Q} cl-a3, \hat{Q} c3-d2, \hat{Q} b3-a4, \hat{Q} d3-c4, \hat{Q} a3-b2, \hat{Q} bl-a2, \hat{Q} c5-d4, \hat{Q} d2-b4, \hat{Q} a4-c2, \hat{Q} c4-b5, \hat{Q} b2-cl, \hat{Q} a2-d5, \hat{Q} d4-al, \hat{Q} b4-c5, \hat{Q} c2-bl, и все в порядке!

За сколько ходов четыре белых ферзя могут попасть на ферзевый фланг, а три черных — на королевский (рис. 125), если никакие два не должны угрожать друг другу?

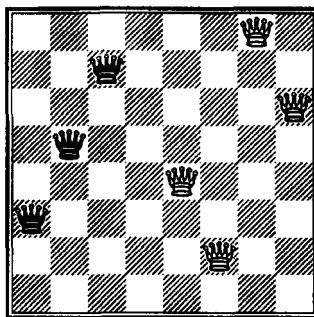


Рис. 125. Задача о перестановке ферзей.

Ферзи перестраиваются за 13 ходов: $\mathbb{W} a3-al$, $\mathbb{W} h6-h3$, $\mathbb{W} f2-d2$, $\mathbb{W} a1-f6$, $\mathbb{W} h3-a3$, $\mathbb{W} b5-h5$, $\mathbb{W} f6-f1$, $\mathbb{W} c7-b6$, $\mathbb{W} d2-d7$, $\mathbb{W} e4-c2$, $\mathbb{W} f1-e1$, $\mathbb{W} b6-f6$, $\mathbb{W} g8-b8$. Очевидно, при восьми ферзях задание невыполнимо, так как первое же перемещение любого из них приведет к взаимному нападению.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕКОРДЫ

Большинство задач и головоломок, о которых шла речь до сих пор, так или иначе были связаны с разными рекордами на шахматной доске. В одних задачах мы искали расстановки наибольшего или наименьшего числа фигур, обладающие теми или иными свойствами, в других находили кратчайшие маршруты фигур по всем полям доски, в третьих — быстрейшие перестановки. Настоящая глава целиком посвящена рекордам, но таким, которые имеют более близкое отношение к самой игре. Какие-то математические рекорды можно считать абсолютными, а какие-то, возможно, будут побиты читателями.

Рассказывая о шахматных рекордах и рекордсменах, прежде всего упомянем имена американца Сэмюэля Лойда и англичанина Генри Дьюдени, с головоломками которых мы уже встречались выше. Многие творения этих классиков занимательного жанра конца XIX — начала XX в. до сих пор остаются непревзойденными.

Головоломки Лойда более популярны, а его игра «Пятнадцать» имеет мировую известность. Лойд был и крупным шахматным композитором, а в творчестве Дьюдени шахматная математика тоже занимала важное место. Достаточно вспомнить его метод пуговиц и нитей, рассмотренный в предыдущей главе. Задача на рис. 126 является как бы совместным произведением двух великих изобретателей головоломок. :

Трехходовка (первое задание) принадлежит Лойду. 1. d4 ♕ h5 2. ♜ d3 и 3. ♜ h3X; 1... ♗ g4 2. e4+ ♗ h4 3. g3X.

Дьюдени поставил другой вопрос: как быстрее всего данная позиция может получиться в реальной партии (второе задание)? Поскольку белым нужно взять пятнадцать фигур и пешек противника, а на первом ходу взятие невозможно, ре-

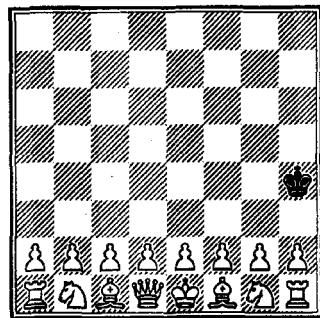


Рис. 126. Мат в 3 хода.

шение содержит не менее 16 ходов. Дьюдени разыграл партию, в которой обе стороны делают именно столько: 1. $\mathbb{Q}c3 d5$ 2. $\mathbb{Q}:d5 \mathbb{Q}c6$ 3. $\mathbb{Q}:e7 g5$ 4. $\mathbb{Q}:e8 \mathbb{Q}f6$ 5. $\mathbb{Q}:a7 \mathbb{Q}e4$ 6. $\mathbb{Q}:c6 \mathbb{Q}c3$ 7. $\mathbb{Q}:d8 \mathbb{Q}g8$ 8. $\mathbb{Q}:f7 \mathbb{Q}g6$ 9. $\mathbb{Q}:g5 \mathbb{Q}e6$ 10. $\mathbb{Q}:h7 \mathbb{Q}b1$ 11. $\mathbb{Q}:f8 \mathbb{Q}a3$ 12. $\mathbb{Q}:e6 b5$ 13. $\mathbb{Q}:c7 + \mathbb{Q}f7$ 14. $\mathbb{Q}:b5 \mathbb{Q}g6$ 15. $\mathbb{Q}:a3 \mathbb{Q}g5$ 16. $\mathbb{Q}:b1 \mathbb{Q}h4$. Ход белых, и тут в игру вступает Лойд...

А абсолютный рекорд уже в наше время установили сразу два шахматных композитора. В этих партиях было сэкономлено полхода! Правда, в финале играют черные и трехходового мата нет.

1. $\mathbb{Q}a3 (c3) b5$ 2. $\mathbb{Q}:b5 \mathbb{Q}f6$ 3. $\mathbb{Q}:a7 \mathbb{Q}e4$ 4. $\mathbb{Q}:c8 \mathbb{Q}c3$ 5. $\mathbb{Q}:e7 c6$ 6. $\mathbb{Q}:c6 \mathbb{Q}b1$ 7. $\mathbb{Q}:b8 \mathbb{Q}a3$ 8. $\mathbb{Q}:d7 g5$ 9. $\mathbb{Q}:f8 \mathbb{Q}d6$ 10. $\mathbb{Q}:h7 \mathbb{Q}e7$ 11. $\mathbb{Q}:g5 \mathbb{Q}h4 (c8)$ 12. $\mathbb{Q}:f7 \mathbb{Q}c4$ 13. $\mathbb{Q}:d6 \mathbb{Q}f6$ 14. $\mathbb{Q}:c4 \mathbb{Q}g5$ 15. $\mathbb{Q}:a3 \mathbb{Q}h4$ 16. $\mathbb{Q}:b1$ (В. Томпсон);

1. $\mathbb{Q}c3 d5$ 2. $\mathbb{Q}:d5 g6$ 3. $\mathbb{Q}:e7 b5$ 4. $\mathbb{Q}:g6 a6$ 5. $\mathbb{Q}:h8 \mathbb{Q}d7$ 6. $\mathbb{Q}:f7 \mathbb{Q}g5$ 7. $\mathbb{Q}:g5 \mathbb{Q}f6$ 8. $\mathbb{Q}:h7 \mathbb{Q}e4$ 9. $\mathbb{Q}:f8 \mathbb{Q}c3$ 10. $\mathbb{Q}:d7 \mathbb{Q}b1$ 11. $\mathbb{Q}:b8 \mathbb{Q}f7$ 12. $\mathbb{Q}:a6 \mathbb{Q}g6$ 13. $\mathbb{Q}:c7 \mathbb{Q}h5$ 14. $\mathbb{Q}:b5 \mathbb{Q}a3$ 15. $\mathbb{Q}:a3 \mathbb{Q}h4$ 16. $\mathbb{Q}:b1$ (К. Фабель).

Любопытно, что $h4$ – единственное поле, на котором одинокий черный король (при белых фигурах на исходных местах) получает мат так быстро. А вот при его симметричном расположении на другом фланге (рис. 127) дело затягивается на два хода.

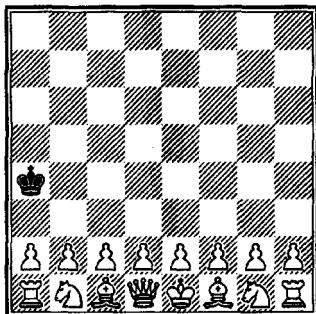


Рис. 127. Мат в 5 ходов.

Эту задачу придумал К. Фабель. 1. $c4+$ \mathbb{Q} $b4!$ (1... $\mathbb{Q}a5$
2. $\mathbb{W}b3$ $\mathbb{Q}a6$ 3. $\mathbb{W}b8$ $\mathbb{Q}a5$ 4. $\mathbb{W}b5X$) 2. $d4$ $\mathbb{Q}a5$ (2... $\mathbb{Q}c4$
3. $e4+$ $\mathbb{Q}b4$ 4. $\mathbb{Q}d2X$) 3. $\mathbb{W}b3$ $\mathbb{Q}a6$ 4. $\mathbb{W}b8$ $\mathbb{Q}a5$ 5. $\mathbb{W}b5X$.

Заметим, что при полном комплекте белых фигур в распоряжении черного короля имеется 40 полей (первые три горизонтали ему недоступны). Во сколько ходов удается заматовать короля на каждом из них?

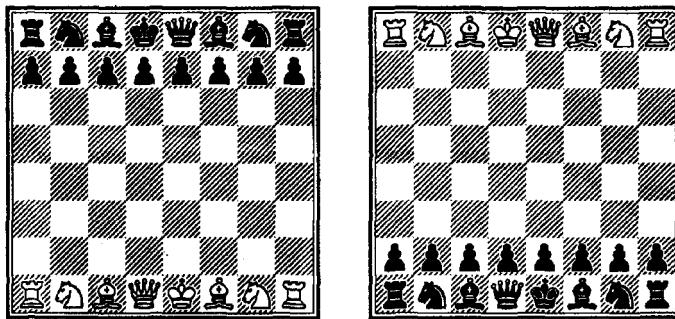
Этим вопросом заинтересовался А. Ханян, установивший, что «надежнее» всего черный король чувствует себя в самом центре доски, на поле e4 – здесь его удается заматовать только на седьмом ходу, например: 1. $d4$ $\mathbb{Q}d5$ 2. $\mathbb{W}d3$ $\mathbb{Q}d6$ 3. $\mathbb{W}h7$ $\mathbb{Q}e6$ 4. $e4$ $\mathbb{Q}d6$ 5. $\mathbb{Q}b5$ $\mathbb{Q}e6$ 6. $\mathbb{Q}g5$ $\mathbb{Q}d6$ 7. $\mathbb{W}e7X$.

А если король стоит на своем законном месте e8, то мат дается на шестом ходу. Но, самое интересное, что на всех остальных полях он тоже получает мат в 6 ходов (конечно, предполагается, что обе стороны играют наилучшим образом). Таким образом, при белых фигурах на исходных местах у неприятельского короля три исключений – поля a4, e4 и h4 (мат, соответственно, дается в 5, 7 и 3 хода), на всех остальных полях следует мат в 6 ходов.

Фабель доказал, что позиция на рис. 127 тоже может возникнуть после 16-го хода белых 1. $\mathbb{Q}a3$ (c3) $b5$ 2. $\mathbb{Q}:b5$ $\mathbb{Q}f6$ 3. $\mathbb{Q}:a7$ $\mathbb{Q}e4$ 4. $\mathbb{Q}:c8$ $\mathbb{Q}c3$ 5. $\mathbb{Q}:e7$ $c6$ 6. $\mathbb{Q}:c6$ $\mathbb{Q}b1$ 7. $\mathbb{Q}:b8$ $\mathbb{Q}a3$ 8. $\mathbb{Q}:d7$ $g5$ 9. $\mathbb{Q}:f8$ $\mathbb{W}d6$ 10. $\mathbb{Q}:h7$ $\mathbb{Q}d7$ 11. $\mathbb{Q}:g5$ $\mathbb{Q}h4$ (c8) 12. $\mathbb{Q}:f7$ $\mathbb{Q}c4$ 13. $\mathbb{Q}:d6$ $\mathbb{Q}c6$ 14. $\mathbb{Q}:c4$ $\mathbb{Q}b5$ 15. $\mathbb{Q}:a3+$ $\mathbb{Q}a4$ 16. $\mathbb{Q}:b1$.

Итак, за 15 с половиной ходов с доски исчезают все черные фигуры. Забавно, что полное истребление фигур обоих цветов занимает всего на ход больше. 1. e4 d5 2. ed ♜:d5 3. ♜ d3 ♜:a2 4. ♜:h7 ♜:b1 5. ♜:g8 ♜:c1 6. ♜:f7+ ♚ f7 7. ♜:a7 ♜:c2 8. ♜:b7 ♜:h2 9. ♜:b8 ♜:g2 10. ♜:c2 ♜:g1+ 11. ♜:g1 ♜:b8 12. ♜:c7 ♜:b2 13. ♜:c8 ♜:d2 14. ♜:f8+ ♚ f8 15. ♜:g7 ♜:f2 16. ♜:e7 ♚ e7 17. ♜:f2. По шахматному кодексу – ничья, так как у белых и черных осталось по королю.

В занимательных шахматах популярны задачи, в которых все фигуры одной из сторон, присутствующие на доске, еще не сделали ни одного хода (все на местах!). И этот жанр всегда открывает головоломка Лойда и Дьюдени на рис. 126. А вот другая остроумная задача на тему «все на местах» (рис. 128).



а

б

Рис. 128. Мат в 4 хода.

На рис. 128а уникальная головоломка лорда Г. Дансени, ирландского писателя и большого выдумщика задач. Ключ к решению состоит в том, что король и ферзь черных занимают не свои законные места. Значит, они уже двигались, а раз так, то перемещались и черные пешки. Но пешки назад не ходят, из чего следует, что произошла путаница и белые фигуры тоже не на своих местах. Таким образом, доску надо развернуть на 180° (рис. 128 б). Порядок восстановлен, и мож-

но приступать к выполнению задания: 1. $\mathbb{Q}d7! \mathbb{Q}f3$. Грозило 2. $\mathbb{Q}e5$ с неизбежным матом на d3 или f3. 2. $\mathbb{Q}c5! \mathbb{Q}e5$ 3. $\mathbb{W}:e5$ и 4. $\mathbb{Q}d3X$.

Перед началом партии высыпаете фигуры на стол и расставляете их на доске. Сколько способами можно получить начальную расстановку?

Каждая сторона может поставить короля и ферзя единственным способом, ладей, слонов и коней — двумя, а для пешек существует $8!$ вариантов. Таким образом, и белые и черные фигуры можно расставить $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 8!$ способами. Учитывая, что саму доску можно расположить на столе двумя способами, окончательно получаем $2 \times (8 \times 8!)^2$ расстановок фигур перед началом партии. Еще в начале прошлого века не раз предлагалось модифицировать игру, изменяя начальное расположение фигур (оставляя их за частоколом пешек). Возникает следующая задача.

Сколько существует начальных расстановок фигур на доске, удовлетворяющих этому условию?

Здесь нас интересует не сам процесс расстановки, а начальное положение для игры, и разные расстановки одноименных фигур на фиксированных полях доски не отличаются одна от другой. Перед нами классическая комбинаторная задача — на подсчет так называемых перестановок с повторениями. Она формулируется следующим образом.

Сколько способами можно расположить на n местах k предметов k типов, если элементы одного типа одинаковы, а число элементов k -го типа равно n_k ($n_1+n_2+\dots+n_k=n$)?

Известно, что число искомых перестановок равно $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$. Для нашей шахматной задачи имеем (для белых): $n=8$ (предметы — фигуры); $k=5$ (пять типов: короли, ферзи, ладьи, слоны, кони), при этом $n_1=n_2=1$, $n_3=n_4=n_5=2$, и число расстановок белых фигур равно $8!/1!1!2!2!2!=7!=5040$. Если же их можно расставлять произвольным образом, независимо от белых, то число расстановок — 5040^2 . В шахматах Фишера (правила этой игры будут упомянуты позднее) есть ряд дополнительных ограничений —

слоны разноцветные, и ладьи должны стоять по разные стороны от короля, поэтому число расстановок уменьшается до 960.

Пусть партия началась. Самый быстрый мат (без учета длины ходов) возможен уже на втором ходу: 1. f4 e5 2. g4 ♕h4X. Очевидно, существует восемь партий такого типа — с быстрым матом белому королю. Черные аналогичный мат получают чуть позже: 1. e4 f6, 2...g5 3. ♕h5X. Таких партий с матом ферзем на h5 существует 305 (а всего имеется 347 способов заматовать черного короля на третьем ходу). А теперь одна шахматно-геометрическая задача.

Как быстрее всего ставится мат в исходном положении при условии, что обе стороны делают самые длинные ходы?

Рекордные партии с обычным матом нас не устраивают. Ход пешки на два поля вперед имеет длину 2, а ход конем, как мы знаем, по теореме Пифагора, равен $\sqrt{5}$, т. е. длиннее. Поэтому надо начинать с коня.

Сначала было предложено такое незамысловатое решение: 1. ♖f3 ♖f6 2. ♖d4 ♖d5 3. ♖e6 ♖f4 4. ♖f8 ♖g6 5. ♖e6 ♖f8 6. ♖g7X. Но А. Ханян усовершенствовал его, побив рекорда на полхода: 1. ♖c3 ♖f6 2. ♖b5 ♖g4 3. ♖d6+! ed 4. ♖f3 ♕h4 5. ♖g5! (рис. 129а) — отрезая черному ферзю путь назад. Его ход на два поля по диагонали равен $2\sqrt{2}$, что длиннее хода коня $\sqrt{5}$. Значит, черные и матуют — 5...♕f2X.

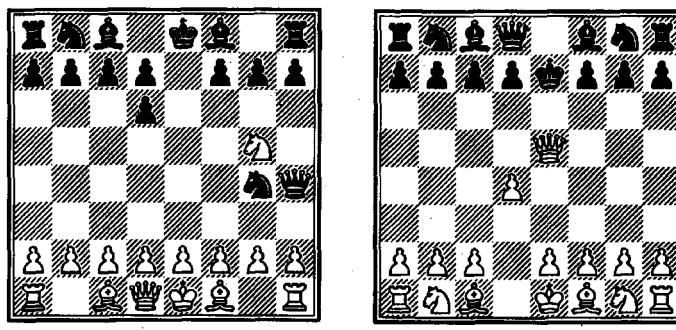


Рис. 129. Мат самыми длинными ходами.

Как быстрее всего ставится мат в исходном положении при условии, что обе стороны делают самые короткие ходы?

Рекорд принадлежит В. Хуторному: 1. d3 e6 2. d4 e5 3. $\mathbb{W}d2$ $\mathbb{Q}e7$ 4. $\mathbb{W}d3$ $\mathbb{Q}e6$ 5. $\mathbb{W}e3$ $\mathbb{Q}e7$ 6. $\mathbb{W}e4$ $\mathbb{Q}e6$ 7. $\mathbb{W}e5X$ (рис. 1296).

Конечная цель игры — мат неприятельскому королю. Как мы знаем, быстрее всего он ставится на втором ходу — белым и на третьем — черным. Однако партия может также закончиться патом. В связи с этим возникает целый ряд вопросов.

Как быстрее всего партия может завершиться патом?

В отличие от мата, при котором только у короля (находящегося под шахом) нет ходов, при пате все фигуры одной из сторон не могут двигаться. Тем не менее он получается уже на 10-м ходу!

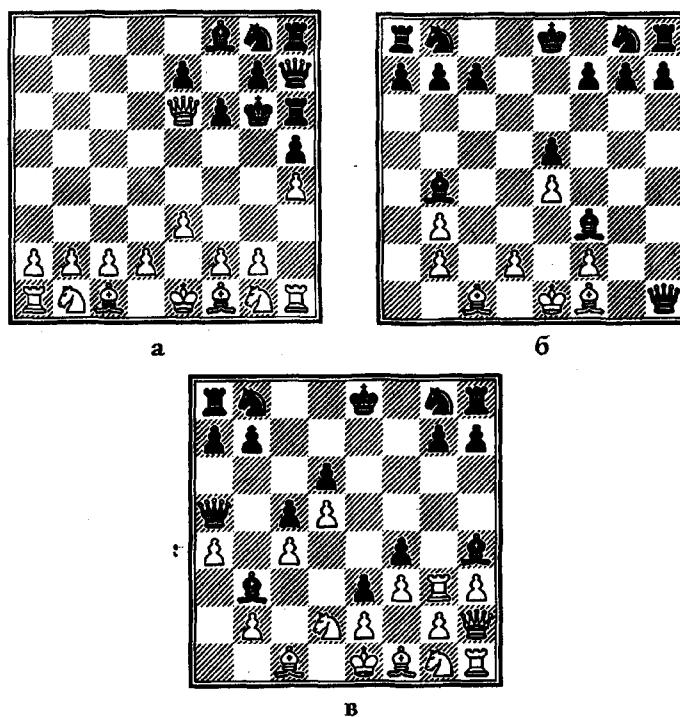


Рис. 130. Рекордные паты.

1. e3 a5 2. ♜h5 ♜a6 3. ♜:a5 h5 4. ♜:c7 ♜ah6 5. h4 f6 6. ♜:d7+ ♜f7 7. ♜:b7 ♜d3 8. ♜:b8 ♜h7 9. ♜:c8 ♜g6 10. ♜e6 пат (рис. 130а).

Эту рекордную партию Лойд придумал более 100 лет назад. Содержащейся в ней идея можно придать и несколько иное оформление: 1. c3 d5 2. ♜b3 h5 3. ♜b7 ♜f5 4. ♜:a7 ♜h7 5. ♜:b8 ♜a6 6. ♜:c7 ♜ah6 7. h4 f6 8. ♜:d8+ ♜f7 9. ♜:d5+ ♜g6 10. ♜e6 пат. Здесь на h7 замурован не ферзь, а слон черных.

Интересно, что и белые могут быть запатованы за 10 ходов: 1. h4 e5 2. c4 d5 3. ♜b3 dc 4. e4 cb 5. ab ♜:h4 6. ♜a4 ♜:h1 7. ♜g4 ♜:g4 9. ♜f3 ♜:f3 9. ♜a3 ♜:a3 10. ♜b4 ♜:b4 пат (рис. 130б).

Потребуем теперь, чтобы ни одна из фигур, ни белых, ни черных, не была взята. За сколько ходов возможен пат в этом случае?

Дополнительное условие не сильно затягивает игру, всего на два хода: 1. d4 d6 2. ♜d2 e5 3. a4 e4 4. ♜f4 f5 5. h3 ♜e7 6. ♜h2 ♜e6 7. ♜a3 c5 8. ♜g3 ♜a5+ 9. ♜d2 ♜h4 10. f3 ♜b3 11. d5 e3 12. c4 f4 пат (рис. 130в).

Рекордная партия со взаимным патом, как будет показано в главе, посвященной симметрии, длится 18 с половиной ходов. Четверть века считалось, что это абсолютный рекорд, и лишь недавно итальянец Э. Минерва побил его на полхода: 1. c4 d5 2. ♜b3 ♜h3 3. gh f5 4. ♜:b7 ♜f7 5. ♜:a7 ♜g6 6. f3 c5 7. ♜:e7 ♜:a2 8. ♜f2 ♜:b2 9. ♜:g7+ ♜h5 10. ♜:g8 ♜:b1 11. ♜:b1 ♜h4 12. ♜:h8 h5 13. ♜h6 ♜:h6 14. ♜:b8 ♜:e3+ 15. de ♜:b8 16. ♜g2 ♜f4 17. ef d4 18. ♜e3 de пат белым и черным (рис. 131).

Еще несколько рекордных патов, связанных с симметричной игрой, вы найдете в рассказе о симметрии, правда, там партии длиннее.

Партия заканчивается вничью при пате, голых королях (примеров приведено немало), а также при троекратном повторении позиции (и очередь хода у одной и той же стороны). Самым распространенным случаем такого повторения является вечный шах. В рекордной партии он возможен уже после

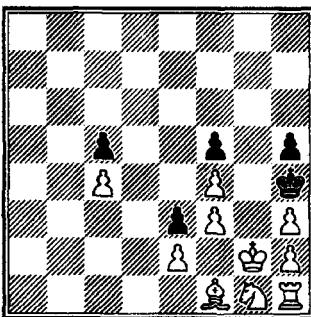


Рис. 131. Рекордный взаимный пат.

третьего хода: 1. f4 e5 2. ♕f2 ♖f6 3. ♕g3 ♖f4+ с вечным шахом ($\#$ f4-h6-f4+).

Итак, мы рассмотрели все варианты рекордно быстрого окончания игры. Теперь возникает противоположный вопрос.

Сколько ходов содержит самая длинная шахматная партия?

То, что она не может длиться бесконечно, следует хотя бы из правила о троекратном повторении позиции. Число всех возможных положений на доске конечно, обозначим его через A (при разной очереди хода считаем позиции разными). Очевидно, что за $2A$ ходов на доске сменится $2A+1$ позиций (включая начальную), и хотя бы одна из общего числа A встретится трижды. В результате — по правилу о троекратном повторении — будет зафиксирован мирный исход (строго говоря, по шахматному кодексу, ничью надо потребовать).

Итак, самая длинная шахматная партия длится не более $2A$ ходов. Найти число A практически невозможно, ведь недостаточно подсчитать все различные расположения фигур на доске, надо еще выяснить, может ли каждое из них возникнуть в реальной игре. Число A легко оценить сверху, а для получения точного количества ходов в самой длинной партии ниже мы воспользуемся другим ничейным правилом — правилом 50 ходов.

Но прежде вспомним, что еще в начале XX в. вместо правила о троекратном повторении позиции действовало правило о троекратном повторении серии ходов. Как будто это несущественно, однако «серийное» правило не мешает партии длиться до бесконечности, причем ходить могут одни короли.

Пусть, например, белый перемещается по полям a1, a2, b1, а черный – по полям h8, g8, h7 (расположение других фигур не имеет значения). Обозначим ход короля по часовой стрелке через 1, а против часовой – через 2. Пусть короли стоят в своих углах, a1 и h8. Всякому их передвижению соответствует последовательность из единиц и двоек. Верно и обратное: любая такая последовательность задает перемещение королей. Например, последовательность 12 21 21 12 21 дает ходы: 1. ♕ a2 (1 – белый идет по часовой стрелке) 1... ♕ g8 (2 – черный идет против часовой) 2. ♕ a1 ♕ h8 3. ♕ b1 ♕ h7 4. ♕ a1 ♕ h8 5. ♕ b1 ♕ h7.

Доказано, что имеется бесконечная последовательность цифр 1 и 2, в которой нет трех одинаковых, рядом стоящих групп цифр. Из этого следует, что существует партия, в которой ни одна серия ходов не повторяется трижды, по старинному правилу – бесконечная!

Теперь обратимся к правилу 50 ходов. Оно заключается в следующем. Если в течение 50 ходов подряд на доске не было произведено ни одного взятия и ни одна пешка не сдвинулась с места, то партия заканчиваетсяничью (и здесь не автоматически – ничью надо потребовать). Проведем необходимые расчеты.

16 пешек могут сделать самое большое $16 \times 6 = 96$ ходов. Пусть все они сделаны – тогда пешки взяли по крайней мере восемь фигур (чтобы пешкам одной вертикали пройти друг сквозь друга, нужно хоть одно взятие). Если было взято ровно восемь фигур, то могут быть взяты еще $2 \times 7 - 8 = 6$ оставшихся и $2 \times 8 = 16$ превращенных, итого $6 + 16 = 22$. Таким образом, общее число взятий и движений пешек не более $96 + 22 = 118$. Очевидно, если число движений пешек меньше 96, то общее

число ходов может только уменьшиться. Поскольку между каждыми двумя продвижениями пешек или взятиями может быть сделано не больше 50 ходов, а при последнем взятии партия прекращается (на доске остались одни короли), ее длительность не более $50 \times 118 = 5900$ ходов. Более тонкий, чисто шахматный анализ показывает, что самая длинная партия продолжается меньше — 5898 с половиной: заключительным ходом одинокий белый король забирает единственную оставшуюся фигуру черных. Бесконечной шахматной партии не существует!

Целая серия рекордных задач связана с конструированием позиций, для которых выполняется одно из следующих условий: 1) число возможных ходов наибольшее; 2) число возможных взятий наибольшее; 3) число возможных шахов наибольшее (включая те, которые ведут к мату); 4) число возможных матов наибольшее. Каждую из рекордных позиций можно конструировать при одном из четырех условий: 1) на доске нет превращенных фигур, и превращение пешек не допускается; 2) превращенных фигур нет, но пешки могут превращаться; 3) могут быть превращенные фигуры, но пешки не превращаются; 4) разрешаются нелегальные позиции. Учитывая, что каждое задание может относиться как к одним белым фигурам, так и к белым и черным вместе, всего получаем $4 \times 4 \times 2 = 32$ задачи на конструирование рекордных позиций.

В табл. 6, составленной Н. Петровичем, приведены все 32 известных рекорда. Некоторые из них держатся более 100 лет, другие установлены сравнительно недавно. Очевидно, слева направо цифры растут, поскольку требования к позициям снижаются, например, при разрешенном превращении каждое может дать сразу четыре хода. Перед самим рекордом указан номер позиции, под которым она приводится ниже (в нескольких случаях на одной и той же позиции достигаются сразу два рекорда). Позиции с превращенными фигурами рассматриваются без превращения. Если это ограничение снять, то рекорды можно еще улучшить. Так, если в позиции на рис. 134, предпоследнюю горизонталь сплошь заполнить

белыми пешками, а последнюю – черными конями, то число белых взятий достигнет 179. А общее число можно увеличить до 338 заменой четырех коней двумя пешками и двумя ферзями (белые: ♕a1, ♘b7; черные: ♕a8, ♘b2). Последний столбец касается нелегальных позиций (здесь шахи могут и матовать), которые не получаются в реальной партии – это уже область сказочных шахмат.

Тема	Цвет фигур	Без превращенных фигур		С превращенными фигурами без превращения пешек	Нелегальные позиции
		Без превращения	С превращением		
Наибольшее число ходов	б б и ч	1) 109 2) 181	3) 144 4) 223	5) 218 6) 324	7) 288 8) 412
Наибольшее число взятий	б б и ч	9) 49 10) 88	11) 68 12) 109	13) 65 14) 116	15) 168 15) 336
Наибольшее число шахов	б б и ч	16) 45 17) 82	18) 52 19) 85	20) 105 21) 142	22) 143 23) 170
Наибольшее число матов	б б и ч	24) 43 25) 68	26) 47 25) 68	20) 105 27) 107	22) 143 22) 143

Табл. 6. 32 рекорда.

- 1) Рис. 132а.
- 2) Белые: ♕c2, ♖e4, ♜a1, h8, ♙d6, f7, ♗e2, f6, ♘b2, b6, g2; черные: ♕g7, ♖g5, ♜a8, h1, ♙d7, f2, ♗c3, d3, ♘c7, e7, f3.
- 3) Белые: ♕g5, ♖b6, ♜a4, c1, ♙e2, e5, ♗d5, f5, ♘b7, d2, d7, f2, f7, h2, h7; черные: ♕g2, ♜c8, e8, ♙g8, ♗a8, ♘e3, g3.
- 4) Белые: ♕h3, ♖f4, ♜e1, g1, ♙f6, h5, ♗a1, c1, ♘a7, c7, d7, f7, h7; черные: ♕b6, ♖d5, ♜a4, e8, ♙d3, d6, ♗b8, g8, ♘b2, d2, f2, h2.
- 5) Белые: ♕f1, ♖a3, b6, c4, d2, d7, e5, f3, g6, h4, ♜a8, h8, ♙b1, g1, ♗c1, d1; черные: ♕a1, ♘a2, b2.

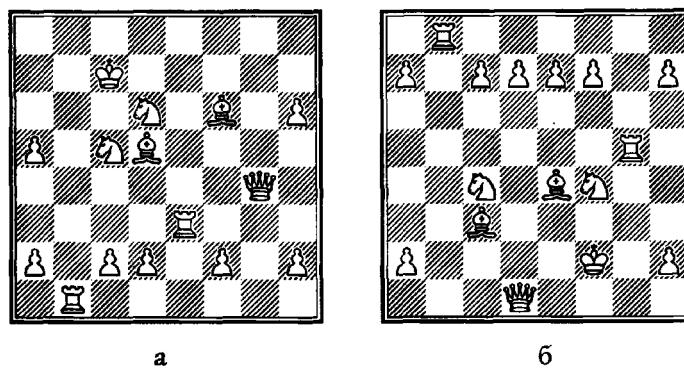


Рис. 132. Наибольшее число ходов.

6) Белые: ♔ h2, ♕ a6, b8, c1, d8, e1, f8, h3, h5, h7, ♜ g1, ♖ a4;
чёрные: ♔ a2, ♕ a3, a5, b1, c8, d4, e8, f1, g8, h6, ♜ a7, ♖ h1.

7) Рис. 133а.

8) Рис. 133б.

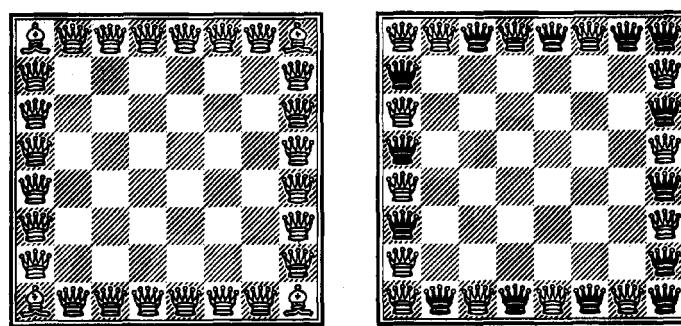


Рис. 133. Рекорды для нелегальных позиций.

9) Белые: ♔ a6, ♕ d5, ♜ c7, e7, ♖ b6, g6, ♘ d6, f6, ♙ a4, b3, c3, d3, e3, f3, g3, h3; чёрные: ♔ d2, ♕ h5, ♜ b7, d7, ♖ a5, f7, ♘ c8, e8, ♙ a7, b5, c4, d4, e4, f4, g4, h7.

10) Белые: ♕e6, ♖d6, ♜a1, c3, ♜e4, f6, ♔e1, e3, ♘a4, b4, c4, d4, e2, f4, g4, h4; черные: ♔d2, ♖d3, ♜a3, d1, ♜e5, f3, ♘c2, g2, ♘a5, b5, c5, d5, e7, f5, g5, h5.

11) Белые: ♜g5, ♖h7, ♜d4, e5, ♜e2, ♘d6, f6, ♘b7, c7, d7, e7, f7, g7; черные: ♔b2, ♖d8, ♜e8, h8, ♜c8, f8, ♘b8, g8, ♘c4, d5, e4, f5, h5.

12) Белые: ♜e3, ♖e1, ♜c1, ♜d1, ♘b1, f1, ♘b7, c7, d7, e7, f7, g7; черные: ♔e6, ♖f8, ♜b8, g8, ♜c8, h8, ♘d8, e8, ♘c2, d2, e2, f2, h2.

13) Белые: ♔d8, ♖b3, c5, d3, d7, e1, e5, f3, f7, g5, ♜b7, h8, ♜a5, h3, ♘g3, g7; черные: ♔a8, ♖b5, e3, f1, f5, ♜c7, d1, ♜c3, d5, e8, ♘e7, h5.

14) Белые: ♔a8, ♖b5, c3, d1, d5, e3, e7, f5, g3, ♜c7, g7, ♜a3, f1; черные: ♔h8, ♖b3, c5, d3, d7, e1, e5, f3, g5, ♜b7, f7, ♜c1, h3.

15) Рис. 134.

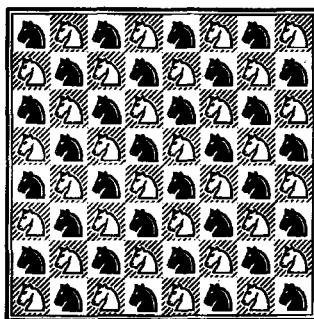


Рис. 134. Каждый ход — взятие.

16) Белые: ♜g5, ♖d3, ♜f7, h5, ♜d4, g8, ♘a2, g2, ♘c2, e2; черные: ♔d5, ♘d8 (благодаря черному коню на d8 ни один шах здесь не матует).

17) Белые: ♜f3, ♖e6, ♜b7, c1, ♜a8, d6, ♘a6, c3; черные: ♔c6, ♖d3, ♜f8, g2, ♜e3, h1, ♘f6, h3.

18) Белые: ♜a8, ♖f7, ♜b5, d3, ♜a4, d4, ♘c4, e4, ♘c7, e7; черные: ♔d7, ♜d8, ♘b8, f8.

19) Белые: ♜f2, ♖c7, ♜g5, h7, ♜f1, h4, ♘d1, h1, ♘d7, f7; черные: ♔e7, ♖d2, ♜b6, h2, ♜a7, c8, ♘e8, g8, ♘c2, e2, e4, g2.

20) Белые: ♕a2, ♜b4, b6, d2, d8, f3, f8, g1, g6, h4, ♖a5, c7, ♘b5, b8, ♗a3, h6; черные: ♔e5, ♘a6.

21) Белые: ♕c4, ♜d8, e2, e3, e8, g2, g7, g8, h4, h6, ♖a4, ♗c8; черные: ♔f5, ♜a3, a5, b1, b2, b7, d1, d6, d7, e1, ♖h5, ♗f1.

22) Рис. 135.

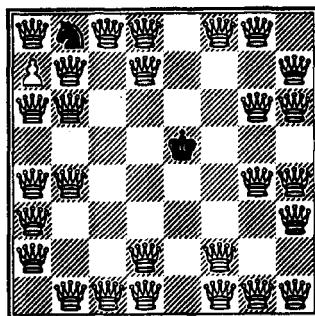


Рис. 135. 143 мату королю.

23) Белые: ♕c4, ♜a1, a2, a4, a6, c1; d8, e2, e3, e7, e8, g1, g2, g8, h2, h4, h6, ♗c8, h1; черные: ♔f5, ♜a3, a5, a7, b1, b7, b8, d1, d2, d6, d7, e1, f8, h3, h5, h7, h8, ♗a8, f1.

24) Белые: ♕f7, ♜d4, ♖f8, g5, ♗e4, h6, ♗c3, h4, ♘d2, f2, h2, h3; черные: ♔f4, ♘e3, g3.

25) Белые: ♕f3, ♜d8, ♖b7, f6, ♖a8, d6, ♗a6, g8, ♘a5, c4, e4; черные: ♔c6, ♜e1, ♖c3, g2, ♗e3, h1, ♗b1, h3, ♘d5, f5, h4.

26) Белые: ♔e7, ♜f5, ♖c4, d1, ♖a2, e5, ♗d3, e8, a7, b5, d7, e2, h7; черные: ♔d5, ♖g8.

27) Белые: ♕c1, ♜b4, b6, d2, d8, f3, f8, g1, h4, h6, ♖a5, c7, ♘b5, b8, ♗b1, b2; черные: ♔e5, ♜a1, a2, ♘a3, b3, c2.

Предъявляя к расстановкам фигур иные требования, можно установить еще множество рекордов. Интересно, например, условие, при котором каждый ход одной стороны или обеих является взятием, шахом или матом. На рис. 136а показана рекордная позиция — легальная, с превращенными фигурами, но без превращения пешек, — в которой у белых 50 вынужденных матов, т. е. матует любой их ход. А вот забавная разновидность этой темы.

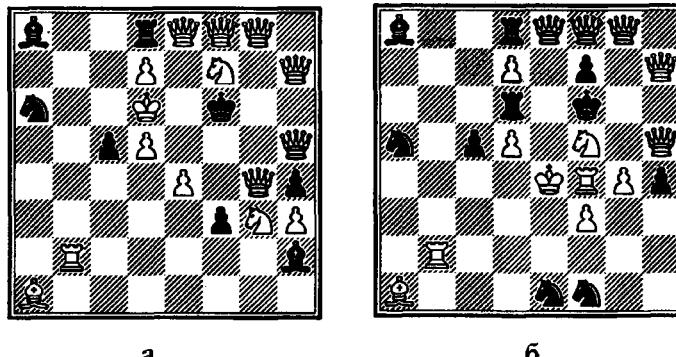


Рис. 136. Рекордное число вынужденных матов.

При каком наибольшем p существует позиция, где ($p-1$) ход белых ведет к мату, а после одного-единственного мат ставят черные?

Иными словами, ровно один из прямых матов заменен на обратный. Любопытный рекорд установил А. Ханян: на рис. 136б у белых 48 ходов ($p=48$), из которых 47 матуют, а после одного хода мат вынуждены объявить черные: 1. $\mathbb{W}e6+$ $\mathbb{Q}:e6X$.

Приведем еще одну забавную конструкцию неутомимого рекордсмена А. Ханяна. В легальной позиции на рис. 137 (превращенные фигуры допускаются) обе стороны по очереди дают 15 вскрытых шахов, 8 – белые и 7 – черные: 1. $\mathbb{Q}e5+$ $\mathbb{Q}:b7+$ 2. $\mathbb{Q}:a7+$ $\mathbb{W}e6+$ 3. $\mathbb{Q}5d6+$ $\mathbb{Q}:e3+$ 4. $ba+$ $\mathbb{Q}c4+$ 5. $\mathbb{L}f2+$ $\mathbb{Q}:g4+$ +6. $\mathbb{Q}:h8+$ $\mathbb{Q}g6+$ 7. $\mathbb{Q}:d1+$ $\mathbb{Q}ge3+$ 8. $\mathbb{Q}:h4+$. Задание – найти наибольшее число вскрытых шахов подряд – было придумано еще в начале XX в. Более 70 лет держался рекорд – 13 шахов, потом был побит на один ход, а теперь составляет 15 вскрытых шахов. Попробуйте продвинуться дальше.

Иногда в задачах на конструирование требуется, чтобы на доске присутствовал полный комплект 32 фигур. Но чаще достаточно участия восьми фигур одного цвета (король, ферзь, две ладьи, два слона, два коня, пешек нет). Вот две родственные рекордные задачи.

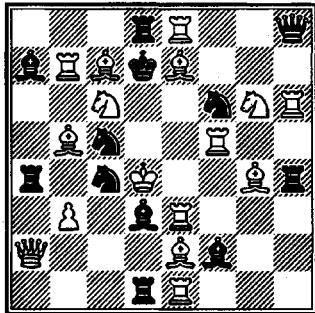


Рис. 137. Один вскрытый шах за другим.

Рассставить восемь фигур, чтобы в их распоряжении было наибольшее число ходов.

Ответ круглый — ровно 100 ходов (рис. 138а), всего на девять меньше, чем при пешках (рис. 132а). Хотя у белых здесь сотня ходов, 14 полей не атакованы ими (включая семь занятых фигурами). Интересно, что в позиции на рис. 104а те же восемь фигур (слоны одноцветные) держали под обстрелом всю доску, но сделать могли только 74 хода.

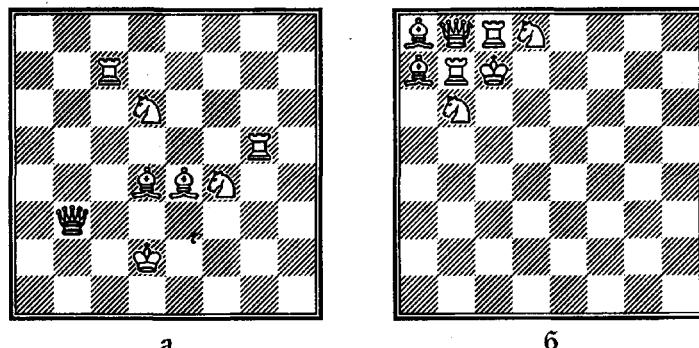


Рис. 138. Наибольшее и наименьшее число ходов восемью фигурами.

При восьми фигурах и восьми пешках, которым разрешено превращаться, рекорда увеличивается до 122 ходов (рис. 1326).

Рассставить восемь фигур, чтобы в их распоряжении было наименьшее число ходов.

При самом неуклюжем расположении восемь фигур могут сделать всего 10 ходов: семь — кони и три — король (рис. 1386). Данная расстановка (ферзя и белопольного слона можно поменять местами) рекордная еще в двух отношениях: под ударом наименьшее число полей (включая занятые фигурами) — 16, и в состоянии двигаться наименьшее число фигур — три.

При полном шахматном комплекте (16 фигур и 16 пешек) можно добиться того, что у фигур будет всего два хода. В позиции на рис. 139 это ходы $\mathbb{A}c2-d1$ и $\mathbb{Q}c1-e2$. А в позиции на рис. 140 ходить может только одна фигура — белый ферзь, в распоряжении которого семь ходов. Легальной позиции с полным комплектом, в которой вообще нет ходов, придумать пока не удалось.

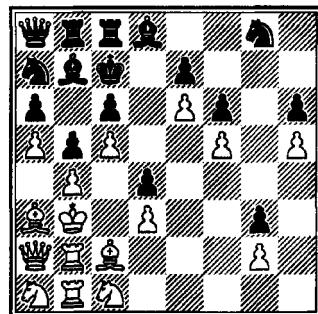


Рис. 139. Как мало у черных ходов!

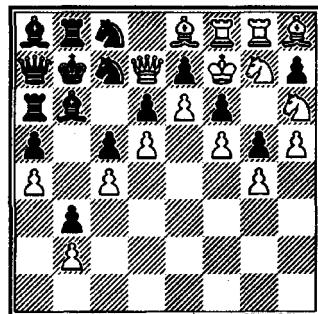


Рис. 140. Ходить может только белый ферзь!

Сколько различных ходов существует на шахматной доске?

Ход характеризуется фигурой, которая его совершает, цветом фигуры, начальным и конечным полями, взятой фигурой

(при взятии) и превращенной фигурой (при превращении). Надо учесть также рокировки. Точный анализ показывает, что всего на доске существуют 43 732 разных хода. Последнему вопросу можно придать шуточный характер.

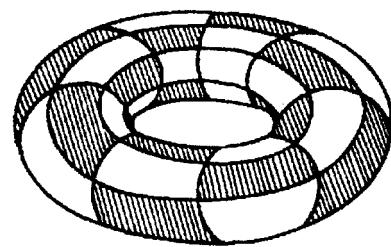
Сколько ходов могут победно завершить партию?

Не надо ничего считать, таких ходов – 43 732. Ведь после любого из них партнер может... немедленно сдаться!

Ну, а если говорить серьезно – не о сдаче партии, а о мате, – то ходов немного меньше. Дело в том, что некоторые из них не могут привести к мату: маневр слона из угла в угол, ход короля из угла или с края доски на край. Несложный расчет показывает, что всего не матующих ходов 696, на столько и уменьшится приведенное выше число.

Множество разнообразных рекордов, установленных компьютерами в шахматных окончаниях, нас еще ждет в последней главе книги.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ИГРЫ



ИГРЫ НА НЕОБЫЧНЫХ ДОСКАХ

Шахматная игра создавалась на протяжении многих веков, и ее правила неоднократно изменялись, пока не приняли современный вид. Конечно, с математической стороны, различия в ходах или форме доски не имеют принципиального значения. При любых правилах возникают те или иные нюансы, свои интересные задачи и головоломки.

Шахматы родились в Индии под названием чатуранга (см. стр. 2). Это была военная игра «четырех царей» — по двое с каждой стороны (обычно «красные и желтые» сражались против «черных и зеленых»). В углах 64-клеточной доски располагались четыре армии, состоящие из четырех фигур разного достоинства и пешек. Ходы королем, ладьями (колесницами), конями и пешками были те же, что и сейчас, ферзей еще не придумали, а слоны ходили иначе — на третье поле по диагонали, перепрыгивая (как и конь) через другие фигуры. Понятие мата отсутствовало, а выигрыш достигался уничтожением всех сил противника. Главное отличие чатуранги от современных шахмат состояло в том, что движение фигур определялось бросанием игральных костей. Постепенно игра модифицировалась, на смену азартной чатуранге в Центральной Азии (Афганистан, Иран, Индия, Пакистан) пришла интеллектуальная двусторонняя игра шатрандж — у арабов и шатранг — у персов. Хотя кости уже не бросали, но это еще не были современные шахматы: появившийся ферзь передвигался только на одно поле по диагонали, отсутствовала рокировка, игру начинали с определенных позиций (табий). И только в XV—XVI вв. возникли правила, практически не отличающиеся от нынешних (лишь пешка могла стартовать иначе). Окончательно шахматы сформировались в первой половине XVIII в. и с тех пор никаких изменений не претерпели.

Известно множество одних только национальных разновидностей шахмат. До сих пор играют в японские шахматы (шоги), китайские (цюнь ки), корейские (тьян-кеуи), армянские (тама), монгольские (шатар).

Популярны и русские шахматы (таврели), по ним проводятся даже чемпионаты страны. От классической игры таврели отличаются названием фигур (король – волхв, ферзь – князь, ладья – ратоборец, слон – лучник, конь – всадник, пешка – ратник) и, главное, тем, что фигуры никогда не покидают доску, а попадают в плен к противнику и могут быть освобождены. Фигуры нарисованы на плоских шашках и встают друг на друга, образуя башни. Игра напоминает шашечные башни, но гораздо богаче.

Наш список может быть продолжен и дальше, но все перечисленные игры больше относятся к истории шахмат, чем к математике, и мы не станем подробно останавливаться на них.

Прежде чем перейти к различным шахматно-математическим играм, стоит упомянуть шашечные игры, которых тоже существуют десятки. В России распространены 64-клеточные шашки – на доске 8×8 , есть шашки американские, турецкие, итальянские, немецкие, испанские, особой популярностью в мире пользуются стоклеточные, или международные, шашки, в которые играют на доске 10×10 . Несколько в стороне стоят шашечные игры го, рэндзу, реверси (Отелло), особенно распространенные в Японии, а также нарды. К занимательным относятся такие игры, как поддавки, уголки, волки и овцы, шашки Ласкера, башни и т. д.

Вообще под шашками обычно подразумеваются игры, в которых все действующие персонажи (шашки, фишki, камни) внешне одинаковы и отличаются только цветом. Шахматы в каком-то смысле можно считать обобщением шашек, но они, безусловно, богаче их. Игра идет по всем полям доски, набор фигур значительно шире, и каждая из них имеет свои особенности.

В ближайших главах речь пойдет о необычных играх, которые содержат те или иные математические элементы или но-

сят занимательный характер. В шахматной композиции такие игры относятся к сказочным, или фантастическим, шахматам. В этом жанре существуют разные направления, придумано огромное множество оригинальных задач, пользующихся популярностью и среди шахматистов, и среди любителей математических головоломок.

Нетрадиционные игры могут отличаться от классических шахмат, во-первых, необычной доской, во-вторых, необычными правилами и, в-третьих, необычными фигурами. Разумеется, встречаются две «необычности» или даже все три одновременно. Прежде всего мы займемся играми, которые получаются при изменении формы шахматной доски.

Мини- и максишахматы. Самый простой способ получить новую игру — уменьшить или увеличить размеры доски.

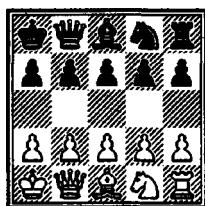


Рис. 141. Минишахматы.

Квадратная доска 5×5 является наименьшей, на которой помещается весь комплект шахматных фигур, правда, в укороченном составе. Начальная расстановка показана на рис. 141. Ходы обычные, лишь пешкам запрещено переступать на два поля вперед. В чью пользу игра на такой маленькой доске, тоже неизвестно, но если привлечь компьютер, то он наверняка быстро разберется в этом.

Различные минидоски появляются в разных местах книги. При увеличении размеров доски никаких ограничений не существует. В книге встречаются различные игры на квадратных досках $n \times n$, прямоугольных $m \times n$ (у такой доски m вертикалей и n горизонталей) и даже на бесконечной доске. Правда, желающих сыграть партию на этих досках найдется немного,

в основном они используются для придумывания оригинальных математических задач и головоломок.

Максишиахматы на прямоугольной доске 16×12 в начале XX в. предложил чемпион мира Х. Р. Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат. Игра на такой доске ведется удвоенным комплектом фигур, причем начальный ход пешки возможен сразу на четыре поля вперед (со второй горизонтали на шестую для белых и с одиннадцатой на седьмую для черных). Для победы достаточно заматовать любого из двух королей противника.

Матч в максишиахматы между Капабланкой и гроссмейстером Мароци, состоявшийся в 1929 г., закончился победой автора игры со счетом 3:1. Партии продолжались около 100 ходов и тянулись часов по 10. Как показала жизнь, опасности «ничейной смерти» не существует, и изобретение Капабланки распространения не получило.

Среди старинных досок большого размера упомянем доску 12×12 для игры в «великие шахматы», колыбелью которых была Индия. Каждый игрок имел по 12 фигур и 12 пешек, причем фигурами были весьма экзотические животные: крокодилы, жирафы, львы, единороги.

Восточный завоеватель Тамерлан, страстный любитель шахмат, считал недостаточными обыкновенные размеры доски. И для шахмат его личной системы, которые именовались образцовыми, была изготовлена специальная доска 11×10. Одиннадцать видов фигур (генералы, верблюды, рыцари и др.) располагались в три ряда.

Плоские доски больших размеров часто попадаются в нашей книге, вот еще один занятный пример современной задачи на доске 12×12 (рис. 142). Сложный зигзагообразный маршрут ферзя изображен прямо на рисунке: 1. ♕ h7+ ♜ c1 2. ♕ c7+ ♜ d1 3. ♕ i1+ ♜ c2 4. ♕ i8+ ♜ c1 5. ♕ c8+ ♜ d1 6. ♕ j1+ ♜ c2 10. ♕ k10+ ♜ c1 11. ♕ c10+ ♜ d1 12. ♕ l1+ ♜ c2 13. ♕ g6+ ♜ c1 14. ♕ c6+ ♜ d1 15. ♕ h1+ ♜ c2 16. ♕ e4+ ♜ c1 17. ♕ c4+ ♜ d1 18. ♕ f1+ ♜ c2 19. ♕ d3+ ♜ c1 20. ♕ :d2+ ♜ b1 21. ♕ d1x.

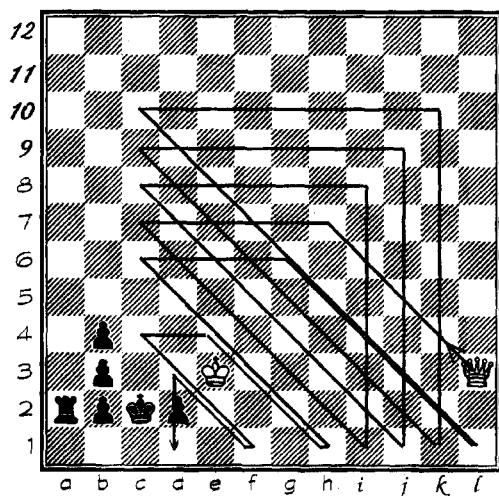
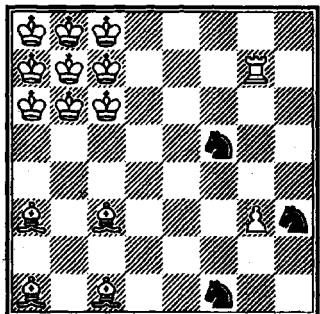


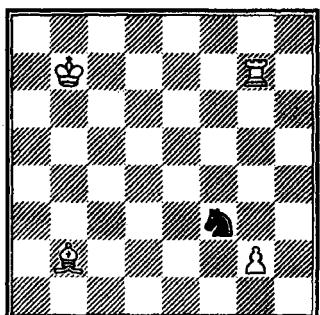
Рис. 142. Мат в 21 ход.

Шахматы на параллельных досках. Идея параллельных миров, к которой часто обращаются писатели-фантасты, не ускользнула и от внимания шахматных композиторов-фантастов. Игра ведется одновременно на двух досках, расположенных одна над другой — на рис. 143 доска (2) над доской (1). На каждой из них ходы обычные, но фигуры могут перемещаться и в пространстве — переходить с одной доски на другую. На рисунке показано, на какие поля верхней доски (2) попадают фигуры с нижней (1). Аналогично со второй доской можно попасть на первую. Ферзь в пространстве ходит так же, как король, пешке разрешается перейти на другую плоскость только при взятии.

Для игры в такие шахматы можно ограничиться одной доской, а фигуры, отправляющиеся на верхнюю плоскость, ставить на прозрачные подставки, лежащие на исходной доске. Впрочем, геометрическое воображение позволит вам разобраться в предлагаемых задачах без изготовления специальных приспособлений.



2

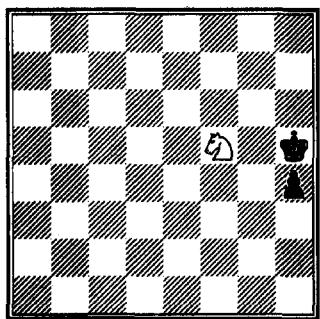


1

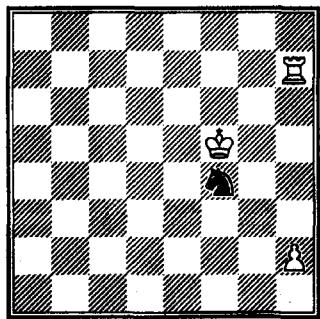
Рис. 143. Параллельные доски.

В задаче на рис. 144 решает ход 1. $\mathbb{R}h7(1)-h8$ (1). Это единственный способ переждать события. Король черных неподвижен, и они могут ходить только конем или пешкой. Если отступает конь (на любую плоскость), то снимается удар с поля h5 и матует 2. $\mathbb{R}h8(1)-h5(1)X!$ – ладью поддерживает белый конь. На ход 1... $h4(2)-h3(2)$ следует 2. $h2(1)-h4(1)X!$, что не годилось сразу из-за взятия на проходе: 1... $h4(2):h3(1)$.

Прежде чем привести решение задачи на рис. 145, внимательно осмотрим пространство. Вот основной вариант:



2

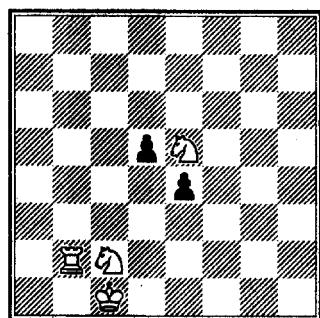


1

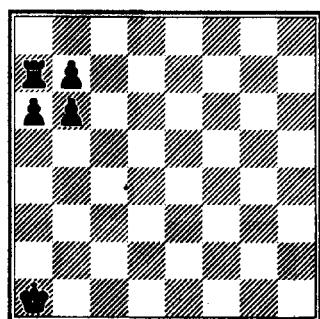
Рис. 144. Мат в 2 хода.

1. ♔e5(2)-c5(1)! с угрозой 2. ♔c5(1)-b3(1)X. 1..b6(1):c5(1)
2. ♔c1(2)-c2(1) ♕a7(1)-a7(2). Черная ладья выходит из засады, но тут же на другую плоскость перескакивает и белая ладья. 3. ♕b2(2)-b2(1)! ♕a7(2)-a2(2) 4. ♕b2(1)-b1(1)X или 3..♔a1(1)-a2(2) 4. ♕b2(1)-a2(1)X.

Убедимся, например, что в заключительном положении во втором варианте на доске действительно мат. Черного короля на a2(2) атакует с нижней плоскости ладья a2(1). Сама она находится под присмотром коня с2(2); поля b1, b2, b3 (обеих



2



1

Рис. 145. Мат в 4 хода.

плоскостей) контролирует белый король, поля a1, a3 нижней плоскости держит ладья, а верхней — конь. Мат!

Проективные шахматы. В такие шахматы играют на проективной доске. Правила основаны на свойствах прямых линий, известных из проективной геометрии. Мы воспользуемся лишь одним из этих свойств, согласно которому все параллельные прямые пересекаются в так называемой бесконечно удаленной точке. Соответственно, доска для проективных шахмат получается из бесконечной доски (которая прости-

рается по всей плоскости) добавлением четырех бесконечно удаленных полей: P_r – пересечение всех горизонталей, P_v – пересечение всех вертикалей, P_{d1} – пересечение всех диагоналей, параллельных a1-h8, P_{d2} – пересечение всех диагоналей, параллельных a8-h1.

На проективной доске сохраняются многие правила обычных шахмат, а основное изменение состоит в том, что дальнобойная фигура может переместиться на бесконечно удаленное поле доски по любому из двух возможных направлений (с учетом ее способа передвижения) и вернуться обратно на «конечное», не забывая своего цвета. На каждом бесконечно удаленном поле не могут находиться одновременно две фигуры.

В проективных шахматах открываются неожиданные возможности фигур. Задачи в начальной позиции обычно располагаются внутри обычной доски 8×8. Разберем пример Н. Петровича на рис. 146.

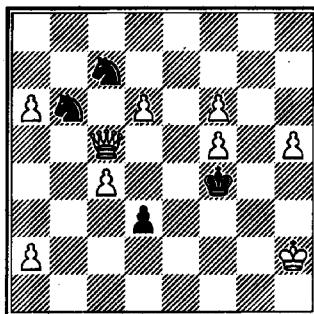


Рис. 146. Мат в 2 хода на проективной доске.

Первый ход: 1. ♔ h2-g1! Теперь у черного короля несколько ответов. Если он идет на e4, то мат дает белый ферзь, удаляясь в бесконечность через поле a5: 1... ♕ f4-e4 2. ♔ c5-P_r X. Действительно, с поля P_r ферзь нападает на черного короля и держит все поля вокруг него: e3, f3 – через h3; d4, e4, f4 – через h4; d5, e5, f5 – через a5. Ход 2. ♔ c5-P_r матует и при 1... ♕ f4-

f3. Поля e4, f4, g4 в этом случае ферзь держит через h4; e3, f3, g3 – через h3; e2, f2, g2 – через h2 (белый король предусмотрино покинул это поле).

При отступлении черного короля на линию «g», а также ходе 1...d3-d2 матует 2. ♕c5-P_{a1}X (ферзь уходит в бесконечность по диагонали c5-a3). Например, при 1...♔f4-g5 ферзь держит поля f4, g5, h6 через с1; f6 – через a1; f5 – через h7; g4, h5 – через d1, наконец, поле h4 – через e1.

Осталось рассмотреть ходы черных коней. На любой прыжок коня b6 следует 2. ♕c5-P_{a2}X, а на прыжок коня c7 – 2. ♕c5-P_bX (в первом случае ферзь уходит в бесконечность через a7, во втором – через с8).

Для всякой задачи важно не только наличие решения, но и его единственность. Нетрудно убедиться, что при других вступлениях белым уже не удается поставить мат на втором ходу. Так, после 1. ♕c5-P_r+ черный король скрывается на g5, а после 1. ♕c5-P_{a1}+ – на e4. С поля P_{a2} ферзь не объявляет даже шах, а хода ♕c5-P_b и вовсе нет (вертикаль «с» загорожена с обеих сторон). Любопытно, что в задаче использовались все четыре бесконечно удаленных поля проективной доски.

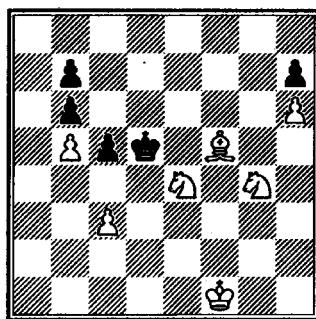


Рис. 147. Мат в 3 хода на проективной доске.

В другой задаче Н. Петровича (рис. 147) решает ход 1. ♔f5-c8-P_{a2}! У черных два ответа: пойти на с4 пешкой или королем.

1...c5-c4 2. ♖f1-g2! ♖d5:e4. До этого конь через h1 был защищен слоном с P_{A2}. 3. ♖f3-g3X. Вскрытый мат объявил слон из бесконечности.

1...d5-c4 2. ♗g4-e3+ ♖c4-d3. Поля b3 и b5 под контролем держит слон с P_{A2}. 3. ♖f1-f2X. И снова заматовал слон с бесконечно удаленного поля.

Объемные шахматы. На досках, рассмотренных до сих пор, поля определялись двумя координатами, т. е. мы обходились стандартной нотацией (лишь в игре на параллельных досках обозначения были чуть сложнее). Иначе обстоит дело в объемных (пространственных) шахматах. В них играют на трехмерной доске, представляющей собой куб $n \times n \times n$ или, в общем случае, параллелепипед $m \times n \times k$. А единичные кубики образуют «поля» доски, которые определяются уже тремя координатами. Возьмем, к примеру, объемную доску $4 \times 4 \times 4$, содержащую, как и обычная, 64 поля (кубика). Если горизонтальные слои доски пронумеровать числами 1, 2, 3, 4, то ее левый ближний столбец содержит поля a11, a12, a13, a14 и т. д. Перемещению вдоль каждого слоя куба соответствует ход на обычной доске, но фигуры могут перескакивать и с одного слоя на другой. Так, ферзь с поля a11 в состоянии перейти на другие слои доски, например, на поле a14 верхнего или пойти по большой диагонали куба a11-h44. Конь, как всегда, ходит буквой «Г»: на одно поле вдоль одного слоя и на два в перпендикулярном.

Выше мы подробно обсуждали знаменитую задачу Эйлера о ходе коня. Ее можно сформулировать и на объемной доске — как по внутренним полям, так и по поверхности.

Обойти конем все поля объемной доски $4 \times 4 \times 4$, посетив каждое из них по одному разу.

Очевидно, нахождение искомого маршрута равносильно нумерации всех полей-кубиков числами от 1 до 64, при которой каждые два поля с соседними номерами связаны ходом коня. На рис. 148 изображены проекции четырех горизонталь-

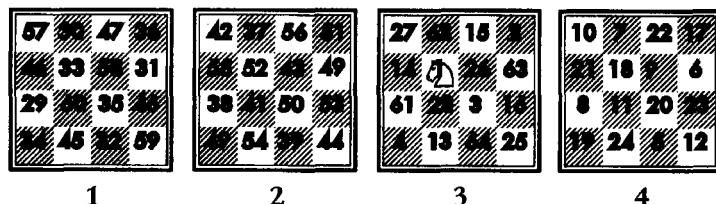


Рис. 148. Обход конем объемной доски $4 \times 4 \times 4$.

ных слоев объемной доски на плоскую 4×4 (номера слоев 1, 2, 3, 4). Нетрудно убедиться, что, отправляясь от поля b33 (с номером 1) и двигаясь в указанном порядке, конь обойдет все поля объемной доски.

Многие задачи о расстановке фигур, рассмотренные нами для плоских досок $n \times n$, становятся более сложными при переходе к объемным $n \times n \times n$.

Какое наименьшее число ладей можно расставить на объемной доске $n \times n \times n$, чтобы они держали под угрозой все свободные поля?

Фактически здесь требуется найти число ладей-часовых, доминирующих на объемной доске. Можно доказать, что оно равно $n^2/2$ при четных n и $(n^2+1)/2$ при нечетных. В частности, для охраны доски $8 \times 8 \times 8$ достаточно иметь 32 ладьи.

Какое наибольшее число ладей можно расставить на объемной доске $8 \times 8 \times 8$, чтобы они не были друг друга?

Очевидно, в каждом столбике из восьми кубиков-полей может стоять только одна ладья, поэтому больше 64 поставить нельзя. Покажем, как поставить 64 ладьи, не угрожающие друг другу. Введем систему координат с осями, направленными вдоль ребер куба, чтобы каждое поле имело координаты (x, y, z) чисел от 0 до 7, и расположим ладьи на полях, сумма координат которых делится на 8. Данная расстановка является искомой.

Докажем, что в каждом вертикальном столбике находится по ладье, т. е. их поставлено 64. Каждый такой столбик опре-

деляется парой координат x, y . Координата z для ладьи однозначно задается условием $x+y+z = 0 \pmod{8}$. А именно, если $x+y$ делится на 8, то $z=0$, в противном случае z равно 8 минус остаток от деления на 8 суммы $x+y$.

Осталось показать, что ладьи не бьют друг друга. Предположим противное — пусть какие-то две ладьи находятся на одной «линии». Значит, две их координаты, например x и y , совпадают, а третьи отличаются, скажем, z_1 и z_2 . Поскольку суммы $x+y+z_1$ и $x+y+z_2$ делятся на 8, на 8 делится и их разность $z_1 - z_2$. Однако это невозможно, так как z_1 и z_2 — различные неотрицательные числа, меньшие 8.

Задача легко обобщается для доски $n \times n \times n$, искомое число ладей равно n^2 (по n в каждом слое).

Задачи о доминировании и независимости ладей можно сформулировать в терминах векторной алгебры. Рассмотрим множество всех трехмерных векторов (t_1, t_2, t_3) , компоненты которых принимают одно из значений 1, 2, … n (всего таких векторов n^3).

Какое наименьшее число векторов необходимо выбрать из этого множества, чтобы каждый из остальных векторов имел не менее одной общей компоненты хотя бы с одним из выбранных? Какое наибольшее число векторов можно выбрать, чтобы никакие два из них не имели ни одной общей компоненты?

Первый вопрос эквивалентен определению числа доминирования ладей на доске $n \times n \times n$, а второй — числа независимости. Таким образом, в первом случае ответ $n^2/2$ или $(n^2+1)/2$.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

Почти все рассматриваемые в книге доски — и в этой главе, и в других — плоские. Однако с помощью тех или иных геометрических преобразований из обычной доски нетрудно соорудить доски самой удивительной формы. Конечно, при составлении и решении задач на разных досках необязательно применять ножницы и клей, необходимые преобразования нетрудно провести мысленно. Особой популярностью у композиторов-фантастов пользуются цилиндрические шахматы. Из обычной доски можно соорудить две цилиндрические — вертикальную (рис. 149а) и горизонтальную (рис. 149б).

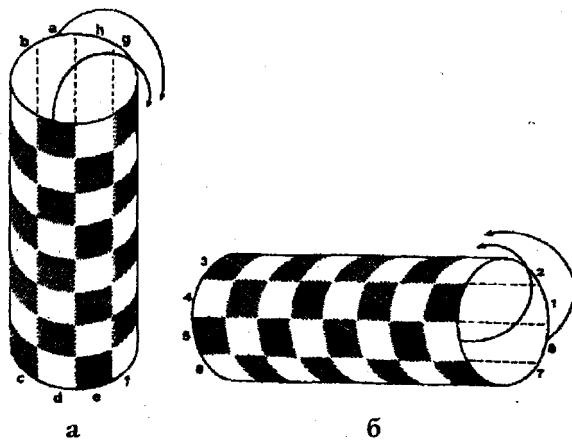


Рис. 149. Цилиндрические доски.

Первая получается при склеивании вертикальных краев, вторая — при склеивании горизонтальных. Интересно, что цилиндрические доски обладают несколько иными шахматными

свойствами. Например, король и ладья не всегда матуют здесь одинокого короля противника (у доски нет одного края, и он ускользает). С другой стороны, открываются новые возможности.

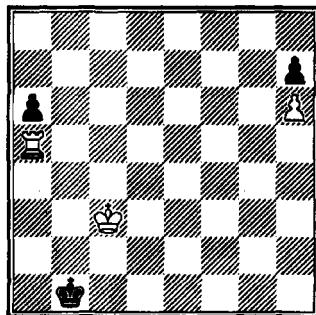


Рис. 150. Мат в 2 хода на двух досках:
обычной и вертикальной цилиндрической.

В задании А. Кузнецова и Н. Плаксина (рис. 150) на плоской доске все просто – 1. $\mathbb{Q}a6 \mathbb{Q}c1$ 2. $\mathbb{Q}a1\#$. А на цилиндрической после 1. $\mathbb{Q}a5:a6$ ладья теряется – 1... $h7:a6$! (вертикали «a» и «h» склеены!). Если же она уйдет с поля а5, то черные продвинут вперед пешку, и матта нет. Решает парадоксальное 1. $\mathbb{Q}a5-a5!!$ – ладья совершает «круг почета» по пятой горизонтали и возвращается на исходное место! Теперь на 1... $\mathbb{Q}c1$ следует 2. $\mathbb{Q}a1\#$.

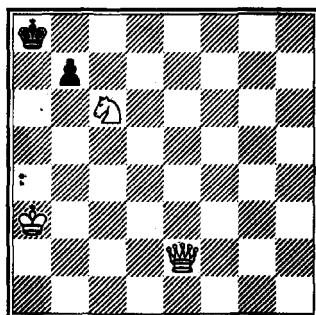


Рис. 151. Мат в 1 ход на трех досках: обычной, вертикальной
цилиндрической и горизонтальной цилиндрической.

На рис. 151 уже три задания. На плоской доске следует 1. $\mathbb{W}e2-e8X$. На вертикальном цилиндре этот ход не матует из-за ответа 1... $\mathbb{Q}a8-h7$, а к цели ведет только 1. $\mathbb{W}e2-g8X!$ (белый ферзь прошел по маршруту e2-a6-h7-g8). На горизонтальном цилиндре появление ферзя на e8 тоже не опасно для черных ввиду 1... $\mathbb{Q}a8-a1(b1)$, а матует 1. $\mathbb{W}e2-a2X!$

В этой задаче у черного короля не было никакой свободы, и ферзю лишь оставалось нанести смертельный укол. Поиск более тонкого исходного построения привел к еще одной занятной позиции (рис. 152) с теми же заданиями.

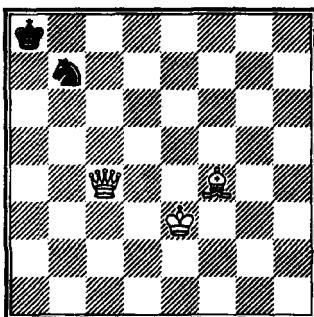


Рис. 152. Мат в 1 ход на трех досках.

По сравнению с предыдущей позицией король черных чувствует себя вольготнее, а пешку b7 заменил более динамичный конь. Тем не менее на каждой из трех досок мат ставится мгновенно. На обычной – 1. $\mathbb{W}a6X$. Два других маневра ферзем нам уже знакомы: 1. $\mathbb{W}g8X$ на вертикальном цилиндре и 1. $\mathbb{W}a2X$ на горизонтальном. Особенность матов состоит в том, что они двойные: ферзь нападает на короля с двух сторон, и перекрытия – в первом случае 1... $\mathbb{Q}d8(h8)$, а во втором 1... $\mathbb{Q}a5(a1)$ – не спасают.

Несколько меняя расположение белых, можно получить различные задачи-близнецы. Так, при перестановке короля на e4, а ферзя на f1 два финала те же, а на горизонтальном цилиндре ферзь объявляет мат из центра доски – 1. $\mathbb{W}d3X!$ На

короля он нападает по диагонали d3-b1-a8, а поле a7 на сей раз контролирует слон по диагонали f4-c1-b8-a7 (король смещен с e3, чтобы не загораживать дорогу слону).

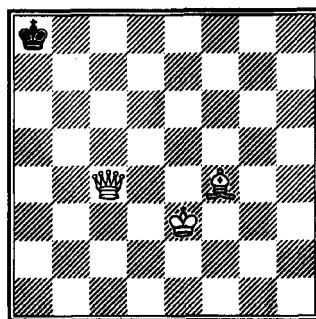


Рис. 153. Мат в 1 ход: а) на обычной доске,
б) на вертикальной цилиндрической,
в) на горизонтальной цилиндрической.

Дальнейшие «цилиндрические размышления» показывают, что черный конь здесь вообще лишний. Позиция В. Попова на рис. 5 представляет собой идеальное воплощение темы трех задач на разных досках. Действительно, присутствуют всего четыре фигуры, построение легкое, изящное: белые фигуры удалены от черного короля, и, кажется, о мате в 1 ход не может быть и речи. Чтобы глубже проникнуть в суть цилиндрических шахмат, внимательно изучим все три решения.

- а) На обычной доске по-прежнему к цели ведет 1. ♕a6X. На 1. ♕a2 (c8, e4) следует возражение 1... ♜b7 (a7, a7)!
- б) На вертикальном цилиндре линии “а” и “h” склеены, и 1. ♕a6 (e4)+ опровергается путем 1... ♜h8! На 1. ♕c8 (g8, h7)+ есть ответ 1... ♜h7 (b7, h7). Матует неожиданный маневр 1. ♜c4-a2-h1X! Ферзь взял под контроль сразу четыре поля в районе черного короля (включая занятое им) — a8, b7 по диагонали h1-a8 и h7, h8 по вертикали «h». Любопытно, что с более близкого расстояния отнять у короля столько полей, не становясь ферзем под бой, невозможно ни на какой

доске. Еще два поля для отступления короля — a7 и b8 — держит слон по диагонали c1-h6-a7-b8. Итак, на доске натуральный мат!

Заметим, что на цилиндрических досках все линии — не только прямые, но и диагональные — содержат по восемь полей, при этом каждая диагональ сворачивается в виток спирали. На вертикальном цилиндре на концах одного из таких витков оказываются поля a8 и h1, на концах другого — b8 и a1, третьего — c8 и b1 и т. д. В перпендикулярном направлении получаем витки-диагонали с концами a8 и b1, b8 и c1, c8 и d1 и т. д.

в) На горизонтальном цилиндре склесены первая и восьмая горизонтали, и на 1. ♕a6+ у короля есть ответ 1... ♕a8-b1! Матует 1. ♕c4-f1-g8-h7X! Вновь ферзь отнял у короля четыре поля: a8, b1 по диагонали h7-b1-a8 и a7, b7 по седьмой линии (на самом деле теперь у нее нет номера!). Поля b8, a1 держит слон по диагонали h2-b8-a1. И здесь другие шахи ферзем не матуют — король уходит на a7, b1 или b7. Если белого короля увести с дороги слона, то шахи 1. ♕c8 (e4, h1)+ становятся матами, поскольку поле a7 оказывается недоступным для черного короля. В отличие от вертикального цилиндра здесь витки, образуемые диагоналями, иные: на концах одного — поля a1 и h8, на концах другого — a2 и h1, третьего — a3 и h2 и т. д.

Странно, но белый король в этой задаче, будучи в тылу у своих фигур, своеобразно участвует в решении: мешает белым матовать! В этом тоже специфика цилиндра: то, что белый король бесполезен, было ясно сразу, но то, что он вреден, открылось неожиданно...

Примечательно, что задачи на рис 152, 153 можно объединить в одну: во втором случае надо добавить еще три задания — те же, но с черным конем на поле b7! При этом решения задач-близнецов, как мы видели, заметно отличаются.

Вот еще одна задача с тем же соотношением сил и весьма необычным... числом ходов (рис. 154). Пока что перед нами обычная доска.

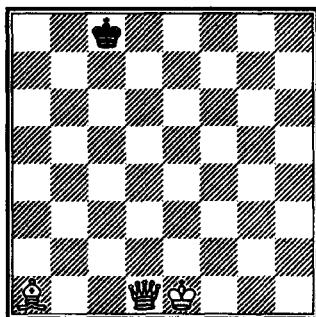


Рис. 154. Мат в 0 ходов.

В этой задаче-шутке В. Хуторного черный король и вправду получает мат в 0 ходов, причем сразу двумя способами. Белые, как и требуется в задании, не прикасаются к своим фигурам, но... сворачивают доску в цилиндр. И на любой из двух досок король оказывается заматованным. Пусть, например, склеены друг с другом крайние горизонтали. Тогда поле a1 присоединяется слева к диагонали b8-h2, и поля b8, c7 попадают под наблюдение слона. Кроме того, в одну сливаются диагонали a6-c8 и d1-h5 (аb и h5 крайние поля новой диагонали), и в результате ферзь нападает на черного короля, одновременно отнимая у него поле b7. Поля же d7, d8 недоступны королю на любой доске. Мат!

На вертикальном цилиндре поле a1 вновь присоединяется к диагонали b8-h2, но снизу, а сливаются диагонали d1-h5 и a6-c8 (края новой диагонали – d1 и c8). Черный король в матовой сети!

Вот еще одна веселая задача (В. Рябинин, рис. 155). Шансы на ничью у белых, прямо скажем, невелики. Черная пешка беспрепятственно идет вперед, пока не станет ферзем. Но стает ли?

В отчаянии белые придумывают спасительный трюк. Они склеивают крайние горизонтали доски и превращают ее в горизонтальный цилиндр! В результате пешка неожиданно лишается всяческих перспектив. Перпетуум-мобиле...

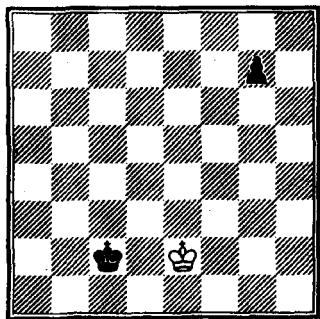


Рис. 155. Ничья.

До сих пор задания предлагались одновременно на плоской доске и цилиндрах. Одну цилиндрическую доску обычно изображают с отрезанными границами (рис. 156).

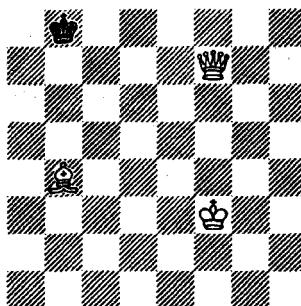


Рис. 156. Мат в 3 хода на вертикальном цилиндре.

Перед нами квартет фигур со знакомым соотношением сил (задача А. Мандлера): 1. ♔f2 ♔c8 2. ♕h2 ♔d8 3. ♖d1X, 1...♔a8 2. ♕d2 ♔h8 3. ♖h1X.

При переходе к новым доскам возникают не только оригинальные шахматные сюжеты, но и интересные математические головоломки. Многие из тех, что рассматривались нами на стандартной доске, можно перенести на цилиндрическую.

Можно ли расставить на цилиндрической доске восемь ферзей, не угрожающих друг другу?

Если на обычной доске, как мы знаем, имеются 92 расстановки, то на цилиндрической нет ни одной! Докажем это для вертикального цилиндра. Возьмем доску 8×8, помня, что ее края склеены. Это означает, в частности, что поля с d1 до a4 и с h5 до e8 образуют одну диагональ. Запишем на каждом поле доски три цифры, совпадающие соответственно с номером вертикали, горизонтали и диагонали (параллельной a8-h1), проходящих через это поле (рис. 157).

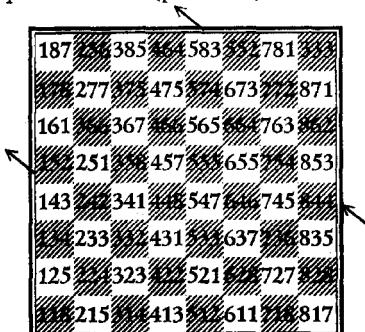


Рис. 157. На цилиндре восемь мирных ферзей не умещаются.

Предположим, что восемь ферзей расставлены на восьми полях так, что не угрожают друг другу. Тогда на восьми полях, занимаемых ими, все первые цифры различны и образуют полный набор 1, 2, ... 8. То же самое касается вторых и третьих цифр. Таким образом, сумма всех 24 цифр на полях с ферзями равна $(1+2+\dots+8) \times 3 = 108$. Так как сумма цифр каждого поля делится на 8, то общая сумма должна делиться на 8, однако 108 на 8 не делится — противоречие!

Если произвести двойное склеивание краев обычной доски (см. стрелки на рис. 149), то получим тороидальную доску (рис. 158). На ней одинокого короля не в состоянии заматовать даже ферзь с королем, просто нет ни одной матовой позиции.

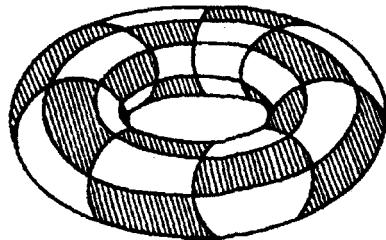


Рис. 158. Шахматный тор.

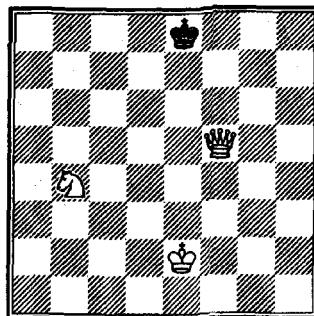


Рис. 159. Мат в 4 хода на тороидальной доске.

На рис. 159 после 1. $\mathbb{R}f5-h7!$ в распоряжении черных два ответа: а) 1... $\mathbb{Q}e8-f8$ (поля d1, e1 и f1 контролирует белый король с e2 – на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) 2. $\mathbb{R}h7-g6 \mathbb{Q}f8-e7$ 3. $\mathbb{N}e2-e1 \mathbb{Q}e7-d7$ (поля d8 и f8 держит белый король с e1) 4. $\mathbb{W}g6-e8X$; б) 1... $\mathbb{Q}e8-d8$ 2. $\mathbb{R}h7-c7+\mathbb{Q}d8-e8$ 3. $\mathbb{K}b5-h6!$ (конь идет по тору, как по вертикальному цилинду!) 3... $\mathbb{Q}e8-f8$ 4. $\mathbb{W}c7-e1X$ (поля f7 и g8 около короля держит белый конь, остальные – ферзь).

А в следующей позиции М. Рейли (рис. 160) мат надо поставить на обычной доске, цилиндре и торе.

На обычной доске после 1. $a4$ нет защиты от 2. $\mathbb{B}b5X$. Но на вертикальном цилиндре этот ход ничего не дает, ввиду 1... $ha!$ – черная пешка h4 бьет белую на проходе. А решает

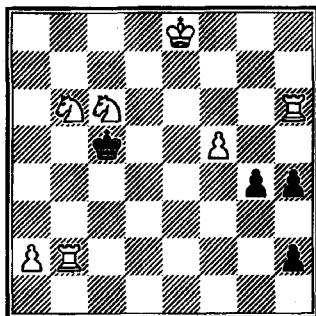


Рис. 160. Мат в 2 хода на обычной доске, вертикальной цилиндрической и тороидальной.

1. ♔d7!, и черным не избежать 2. ♕h5X (ладья нападает на короля слева через поля a5-b5).

На торе марш короля на d7 опровергается при помощи 1...h1♕(♕), и в случае 2. ♕h5+ эта ладья просто берется превращенной фигурой сверху, через поля h8-h6. Что же делать? К цели ведет удивительный ход 1. ♕g2!! с неизбежным 2. ♕g5X! Убедимся в этом.

Ладья покинула поле b2, но коня b6 защищает другая ладья — h6. Она держит шестую горизонталь, и поэтому черному королю не скрыться на ней (и после 1...♔b5 тоже). А четвертая горизонталь недоступна ему из-за белых коней. На поле g5 белая ладья g1 попадает на втором ходу по вертикали «g» сверху (через поля g8-g6), и воспрепятствовать ее появлению здесь черные не в состоянии.

Королю, стоящему на c5 (или b5), ладья будет угрожать слева по пятой горизонтали (через поля a5-b5). Получается забавная картина: если воспринимать доску как обычную, забыв на секунду, что это тор, то ладья g2 как бы перескакивает обе пешки — черную g4 и белую f5.

Строго говоря, превращений на горизонтальном цилиндре и на торе не бывает, и наши рассуждения не совсем корректны. Однако если вспомнить, что при достижении восьмой

(первой) горизонтали пешка по кодексу превращается в фигуру, то противоречий нет. Ведь нумерация линий при переходе к цилиндуру сохраняется (по той же причине можно говорить и о взятии на проходе).

Классические задачи и головоломки о расстановках фигур нетрудно перенести на тороидальную доску. Вот один пример.

Какое наибольшее число королей можно расставить на торе, образованном из доски $n \times n$, чтобы они не угрожали друг другу?

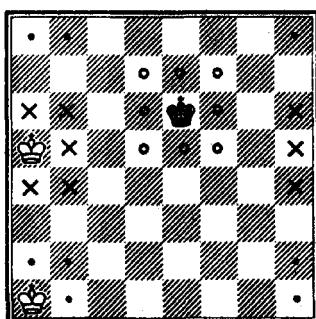


Рис. 161. Короли на торе.

В отличие от плоской доски, на тороидальной король с любого поля может сделать восемь ходов, что показано рис. 13 для трех положений (точками для короля a1, крестиками — a5, кружочками — e6). Конечно, это обстоятельство отражается на решении.

При четных n на торе, как и на плоской доске, можно расставить $n^2/4$ королей, находящихся в безопасности, — расстановка 16 королей на рис. 79 на стр. 106 (выделенный квадрат) подходит и для тора — при склеивании краев обычной доски все короли по-прежнему стоят в отдалении друг от друга. А вот при нечетных n число королей уменьшается. Можно доказать, что оно составляет не $(n+1)^2/4$, как на плоской доске, а $[(n^2-n)/4]$. Конечно, имеется в виду, что $n > 1$ (на доске 1×1 ее единственное поле не с чем склеивать!).

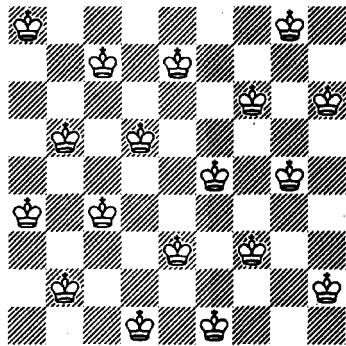


Рис. 162. На торе 18 мирных королей.

Так, расстановка 25 королей на плоской доске 9×9 (рис. 79) не годится для тора: многие короли, стоящие в безопасности на краю доски, при ее двойном склеивании становятся соседями и бьют друг друга: a1 и i1; a1 и a9; a1 и i9; a3 и i3; a5 и i5; c1 и c9 и т. д. Из приведенной формулы следует, что при $n=9$ на торе умещается 18 мирных королей. На рис. 162 доска пока обычна, а при склеивании никакие два короля не становятся соседями.

Помимо цилиндра и тора можно играть и на конусоидальной доске (первая вертикаль приклеена к восьмой горизонтали) и на листе Мебиуса (стандартная доска перекручивается на пол-оборота, и ее края склеиваются), и на шаре.

СКАЗОЧНЫЕ ШАХМАТЫ

В предыдущих главах книги речь шла о разных играх, связанных с теми или иными преобразованиями доски. Однако для получения новой игры совсем необязательно сооружать специальные доски, достаточно на обычной доске изменить правила или придумать новые фигуры. Именно таким играм посвящена данная глава, продолжающая рассказ о фантастических шахматах.

Шахматы с шахами и без шахов. В игре *до первого шаха* все как в настоящих шахматах, только выигрывает не тот, кто первым ставит мат, а тот, кто первым объявляет шах! При обычной начальной позиции белые форсированно берут верх, причем не позднее пятого хода.

1. $\mathbb{Q}c3$. Грозит выпад конем на e4, d5 или b5 с неизбежным шахом, у черных единственный ответ 1...e6 (1...e5 2. $\mathbb{Q}d5$ и 3. $\mathbb{Q}f6+$), и после 2. $\mathbb{Q}e4 \mathbb{Q}e7$ 3. $\mathbb{Q}f3$ второй конь с решающим эффектом вступает в игру: 3... $\mathbb{Q}e8$ (3...d6 4. $\mathbb{Q}d4$) 4. $\mathbb{Q}e5$, и шах следующим ходом (рис. 163).

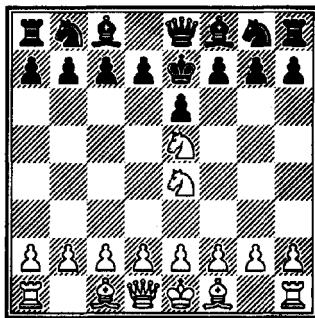


Рис. 163. До первого шаха.

Чтобы оживить игру, следует каким-то образом изменить начальную позицию, например, сдвинуть белую пешку с c2 на c3, а черную с c7 на c6. Теперь нет вступительного хода 1. $\mathbb{Q}c3$, и форсированного выигрыша не видно: после 1. $\mathbb{W}b3$ d5 2. $\mathbb{W}b4$ $\mathbb{W}d6!$ 3. $\mathbb{W}a4$ $\mathbb{Q}d7$ 4. $\mathbb{W}h4$ $\mathbb{Q}f6$ черный король пока надежно защищен от шахов.

В *шахматах без шахов* фигуры тоже ходят обычным образом, но объявлять шах запрещено, вернее, первый же шах должен быть и матом. В *шахматах с шахами*, наоборот, если шах есть, то его надо объявлять (любым способом). А когда-то давным-давно была игра, в которой верх брал тот, кто первым объявлял три шаха.

Шахматы с костями. Расстановка фигур и основные правила не меняются, но перед каждым ходом игрок бросает кость и ходит той или иной фигурой в зависимости от числа выпавших очков (1 – пешка, 2 – король, 3 – конь, 4 – слон, 5 – ладья, 6 – ферзь). Если фигура пойти не может или вообще отсутствует на доске, очередь бросать кость передается противнику. Между прочим, в древнейшей игре чатранга фигура, которая делала ход, тоже определялась числом очков на брошенной кости, т. е. данная разновидность шахмат близка к их первоначальной форме с применением костей.

Двухходовые шахматы. В этой игре каждый ход состоит из двух обычных (после первого хода «цикла» король может находиться под шахом). Небольшое изменение правил, и имеет место следующий неожиданный факт.

При правильной игре в двухходовые шахматы белым, по меньшей мере, гарантирована ничья.

Предположим противное. Пусть белые, как бы они ни играли, всегда проигрывают. Тогда сделаем ход 1. $\mathbb{Q}b1-c3-b1$. Белые передают очередь хода партнеру и фактически сами становятся черными, т. е., по предположению, выигрывают – противоречие.

Это доказательство, как говорят математики, неконструктивно. Мы доказали, что белые могут не проиграть в двухходовые шахматы, но не установили, как это сделать. Более того,

если удастся доказать, что белые форсированно выигрывают (как, например, в игре до первого шаха), то тогда, очевидно, первый ход 1. \mathbb{Q} b1-c3-b1 проигрывает. В этом случае получится, что доказательство беспроигрышности белых проведено с помощью проигрывающего хода!

Вот одна из распространенных модификаций двухходовых шахмат. У одного игрока полный комплект фигур, которые ходят обычным образом, а у другого лишь король и несколько пешек, но он делает по два хода сразу. Цель обеих сторон — побить неприятельского короля. Эта игра довольно хитрая: кто впервые знакомится с ней, обычно выбирает фигуры с нормальными ходами и... быстро проигрывает.

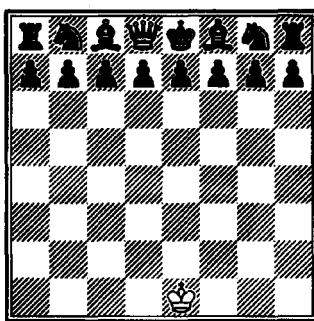


Рис. 164. Король белых делает два хода подряд.

Действительно, делая по два перемещения за один раз, один голый король уже на четвертом ходу может торжествовать победу. На рис. 164 первый двойной ход белых 1. \mathbb{Q} e1-e2-e3. На одинарный ход 1...e7-e5 следует 2. \mathbb{Q} e3-e4:e5, на шах 2... \mathbb{Q} d8-e7+ – энергичное 3. \mathbb{Q} e5-d6:c7!, и следующим ходом белый король бьет черного.

В двухходовом этюде Н. Петровича на рис. 165 после 1. \mathbb{Q} f8, \mathbb{Q} e7+! король черных в опасности, но, кажется, они легко отражают угрозу – 1... \mathbb{Q} h6, \mathbb{Q} :f8 с победой, так как при взятии королем на f8 у белых нет подходящего второго хода пары. Грозит \mathbb{Q} h7-g7:f8, и белому никуда не деться. Од-

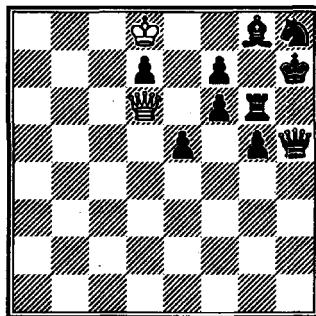


Рис. 165. Выигрыши в двухходовых шахматах.

нако неожиданно следует 2. ♕ e7-e6-f5!, и следующим двойным ходом белый король забирает черного — 2. ♔ f5:g6:h7. А тому мешает это сделать собственная ладья g6. Не годится, например, 1. ♕ b8, ♕ e7 из-за 1... ♕ g7, ♕ h6!, и черный король неуязвим.

Шахматы без цугцванга. Если в позиции любой ход белых проигрывает, то мы говорим, что они в цугцванте (а если проигрывает и любой ход черных, то цугцванг взаимный). Шахматы без цугцванга отличаются от обычных добавлением всего одного хода — хода на месте. Теперь цугцванга не бывает: если нет хорошего хода, его очередь можно передать партнеру. Здесь, как и в двухходовых шахматах, доказывается, что белым гарантирована ничья.

Поддавки. Более популярны шашечные поддавки, но и шахматные весьма интересны. Понятие мата здесь отсутствует, и победителем становится тот, кто первым отдаст все свои фигуры или запатует их. Взятие обязательно, а если есть выбор, то брать можно любую фигуру, включая короля.

Конечно, и в этой игре возможна ничья, например, у соперников остались разнопольные слоны, или по королю, которые никогда не сблизятся, а будут вечно блуждать по доске.

Любопытно, что в шахматных поддавках имеется своя необычная теория. Как это ни парадоксально, но уже первый ход пешки **e** или **d** на два поля вперед является решающей ошибкой.

кой. Черные форсированно одну за другой отдают все свои фигуры.

1. e4? b5 2. ♜:b5 ♖f6 (тихий ход) 3. ♜:d7 ♗:e4 4. ♜:c8 (возможность 4. ♜:e8 рассмотрена ниже) 4... ♗:d2 5. ♜:d2 ♗:d2 6. ♗:d2 ♗:a6 7. ♜:a6 ♖c8 8. ♜:c8 f5 9. ♜:f5 ♖g8 10. ♜:h7 c5 11. ♜:g8 e6 12. ♜:e6 c4 13. ♜:c4 a6 14. ♜:a6 g5 15. ♖:g5 ♗:d8 16. ♖:d8 ♜:e7 17. ♖:e7, и на доске остались одни белые фигуры. На 4. ♜:e8 решает 4... ♗:d2 5. ♗:d2 (5. ♜:f7 ♖:c1 6. ♗:c1 ♗:f2 7. ♗:f2 ♖g8 и т.д.) 5... ♗:d2 6. ♗:d2 ♖g8 7. ♜:f7 c5 8. ♜:g8 g6 9. ♜:h7 e5 10. ♜:g6 e4 11. ♜:e4 ♗:c6 12. ♜:c6 ♜:b7 13. ♜:b7 ♖c8 14. ♜:c8 a6 15. ♜:a6 c4 16. ♜:c4 ♜:a3 17. ♗:a3, и черные взяли верх в поддавки (рис. 166).

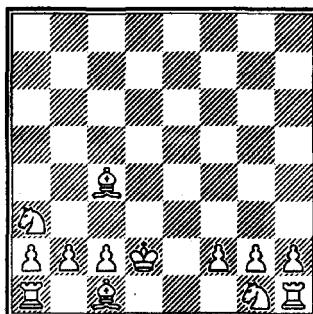


Рис. 166. Партия в поддавки закончилась победой черных.

Еще проще опровергается первый ход ферзевой пешки:
1. d4 e5! 2. de ♖g5! 3. ♖:d7 ♜:d7 (этот размен на d7 может произойти и позднее) 4. ♜:g5 ♗:d8 5. ♜:d8 a6 6. ♜:c7 ♖a7 7. ♜:b8 b6 8. ♜:a7 a5 9. ♜:b6 g6 10. ♜:a5 ♜:b4 11. ♜:b4 ♗:e7 12. ♜:e7 ♖f8 13. ♜:f8 h6 14. ♜:h6 g5 15. ♜:g5 f6 16. ♜:f6 ♜:h3 17. ♗:h3. Победа за черными!

Кстати, осторожное движение пешки d на одно поле вперед ничего не меняет, после 1. d3? g5! 2. ♜:g5 ♜:g7 3. ♜:e7 ♜:b2 4. ♜:d8 ♜:a1 5. ♜:c7 ♜:c3 6. ♜:b8 ♖:b8 7. ♗:c3 d5 8. ♗:d5 ♗:f6 9. ♗:f6 ♖:g8 10. ♗:e8 ♖:g2 11. ♜:g2 f6 12. ♜:b7 ♖:b7 13. ♗:f6

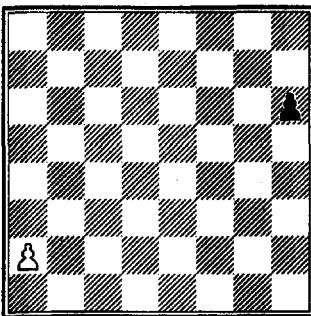


Рис. 167. Выигрыш в поддавки.

$\mathbb{Q}b8$ 14. $\mathbb{Q}:h7$ $\mathbb{Q}b1$ 15. $\mathbb{W}:b1$ $\mathbb{Q}b7$ 16. $\mathbb{W}b7$ $a6$ 17. $\mathbb{W}:a6$ на доске остались одни белые фигуры.

Оригинальные и неожиданные идеи содержатся и в окончаниях поддавков. Очевидно, проще, чем на рис. 167, положение не придумаешь. Но посмотрите, сколько тонкостей в нем содержится!

1. **a3!** Белые, как говорят в таких случаях, уступают темп противнику – обычный прием в нормальных шахматах. 1... $h5$ 2. $a4$ $h4$ 3. $a5$ $h3$ 4. $a6$ $h2$ 5. $a7$ $h1\mathbb{Q}$! Если черные ставят ферзя или слона, то после любого превращения белой пешки они вынуждены будут сразу взять новую фигуру. На 5... $h1\mathbb{Q}$ следует 6. $a8\mathbb{W}$ и 7. $\mathbb{W}h1$! Если на доске появится черный король (в поддавках возможно и такое) – 5... $h1\mathbb{Q}$, то не годится 6. $a8\mathbb{W}$ или 6. $a8\mathbb{Q}$ из-за 6... $g2$. К ничьей ведет и 6. $a8\mathbb{Q}$ или 6. $a8\mathbb{D}$, а решает 6. $a8\mathbb{D}$! $g2$ 7. $\mathbb{Q}a4$ $\mathbb{Q}f2$ 8. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}g2$ 9. $\mathbb{Q}e4$ $\mathbb{Q}h2$ 10. $\mathbb{Q}f4$ $\mathbb{Q}h1$ 11. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}g2$ 12. $\mathbb{Q}f2$ $\mathbb{Q}f2$, и белые избавились от своей фигуры.

6. **a8 \mathbb{Q} !!** Белая пешка превращается в еще более слабую фигуру, иначе черные легко отдадут свою ладью. Теперь же на любое ее движение следует 7. $\mathbb{Q}h1$! $\mathbb{Q}h1$, и игра в шахматные поддавки закончилась в пользу белых.

В позиции Т. Доусона на рис. 168 белые от одних фигур избавляются, а другие патуют: 1. $\mathbb{Q}b6$! $\mathbb{Q}:a2$ 2. $\mathbb{Q}g6$ $\mathbb{Q}:b1$ 3. $g5$

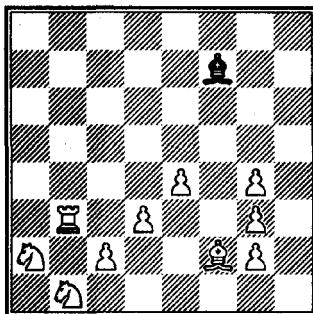


Рис. 168. Выигрыши в поддавки.

$\mathbb{Q} :c2$ 4. $g4$ $\mathbb{Q}:d3$ 5. $\mathbb{Q} :h4!$ $\mathbb{Q} :e4$ 6. $g3$ $\mathbb{Q} :g6$, и белые выиграли в поддавки, потому что им нечем ходить.

Изменение начальной позиции. Получить новую игру можно без введения особых правил, достаточно в исходной позиции поменять местами некоторые фигуры. В результате классическая теория дебютов полностью потеряет свое значение. При изменении позиции пешки обычно остаются на своих местах, а фигуры переставляются тем или иным образом за пешечным частоколом. Всего начальных позиций такого рода имеется $(7!)^2 = (7 \times 6 \times 5 \dots \times 1)^2$ – число, превышающее 25 млн. Значит, из обычных шахмат без всякого труда можно получить много миллионов новых игр.

Некоторые новаторы предлагают ограничиться перестановкой короля и ферзя. Наивные люди! Хотя новая игра непривычна, но она не отличается от стандартных шахмат. Поставьте рядом с доской зеркало и играйте, глядя в него (цвет полей поменялся, но можно не обращать на это внимание). Зеркальное отражение исходной позиции совпадает с обычной, и Ферзевый гамбит может неожиданно закончиться детским матом: 1. $d4$ $d5$ 2. $\mathbb{Q} :f4$ $\mathbb{Q} :f6$ 3. $\mathbb{Q} :a5$ $\mathbb{Q} :c6$ 4. $\mathbb{Q} :c7X$.

Имеется немало забавных способов получить начальную расстановку фигур. Например, белые ставят одну из своих фи-

тур на поле первой линии, черные ту же фигуру — на последнюю и, в свою очередь, выбирают поле для следующей. Теперь белые ставят ту же фигуру напротив и т. д. После завершения процедуры ни у одного из партнеров не будет оснований считать себя обиженным.

А вот другой увлекательный способ расположения фигур. В середине доски ставится экран, и соперники по секрету друг от друга располагают на своей территории фигуры и пешки, как им заблагорассудится. Затем экран снимается, и начинается игра по обычным правилам, но под названием шахматы втемную.

С последней игрой связано одно интересное обобщение. Фигуры расставлены обычным образом, но зато втемную протекает сама партия! Каждый делает ходы на своей доске, причем белые не знают, как ходят черные, а черные — как ходят белые. За игрой следит посредник. Если один из игроков нарушает правила, то посредник сообщает ему об этом. Тот меняет ход, делая соответствующие выводы о дислокации неприятельских фигур. Партия заканчивается, когда после очередного хода посредник сообщает, что на доске мат.

Любопытный турнир состоялся в Амстердаме. Он протекал по особым правилам: перед стартом соперники снимали с доски ферзевых коней, и этот кавалерийский резерв вводился в бой в подходящий момент. Для такой игры вполне подходит название «конь за пазухой».

Самая популярная игра, в которой фигуры нестандартно стоят на крайних линиях, — фишеровские шахматы, о которых речь пойдет ниже.

Кингчесс. Так назвал свою игру ее изобретатель В. Синельников. Перед началом партии доска пустая, и каждым ходом игрок либо ставит на своей половине какие-нибудь фигуры (одну или больше, короля в первую очередь), либо перемещает по обычным правилам одну из тех, что уже есть. Так в процессе партии на доске появляются все новые и новые действующие лица. Взятые фигуры, конечно, покидают доску навсегда. Если у обоих партнеров уже вошли в строй все фигуры, то дальше

идет обычная игра. Понятно, что если на первом ходу обе стороны выставят все свои фигуры, причем на привычные места, то сразу начинается нормальная партия. Однако не стоит торопиться и вводить сразу весь запас фигур, лучше часть из них придержать, чтобы подключить в нужный момент для атаки или защиты.

Буря над шахматной доской. Эта игра забавным образом сочетает в себе элементы шахмат и карт. «Бурю над шахматной доской» затеял француз П. Клекон. Двое партнеров разыгрывают шахматную партию, но при этом пользуются специальными картами, каждой из которых дает некоторое предписание, изменяющее нормальное течение поединка. Тот, чья очередь ходить, выбирает и раскрывает любую карту. Вот, к примеру, два указания, которые она может содержать: «Сделайте ход, после чего поменяйте местами слона и коня противника», «Если три угла доски заняты, то поставьте любую свою фигуру в четвертый угол доски» и т. д. Среди карт есть нейтрализующие, которые отменяют действия соперника, указанные в его карте.

Цель игры, как обычно, заматовать неприятельского короля, но это может произойти самым неожиданным образом. Вдруг игроку повезет и в выбранной им карте будет такое указание, что неприятельский король сразу окажется в плену.

До сих пор речь шла об играх на необычных досках и с необычными правилами, но фигуры передвигались как в настоящих шахматах. Безграничное море игр, задач и головоломок возникает при появлении на доске сказочных, волшебных фигур, наделенных разными фантастическими свойствами.

Магараджа. Эта фигура (ее называют также амазонкой) объединяет в себе ходы ферзя и коня. Она является главным действующим лицом в следующей интересной игре.

У одного игрока полный комплект фигур, стоящих на исходных местах, а у другого — лишь один магараджа, стоящий на произвольном поле. Магараджа проигрывает, если его уда-

ется побить, и выигрывает, если ставит мат неприятельскому королю.

Пешкам запрещено превращаться, иначе выигрыш слишком прост. Но при этой оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а неопытный игрок быстро получает мат, даже владея всей армией фигур. И все же имеется форсированный способ расправиться с этой фигурой, причем цель достигается всего за 15 ходов.

Не обращая внимания на перемещения магараджи, белые делают подряд следующие ходы: 1-14. $a4$, $h4$, $\mathbb{Q}c3$, $\mathbb{Q}f3$, $\mathbb{Q}a3$, $\mathbb{Q}h3$, $\mathbb{Q}b3$, $\mathbb{Q}g3$, $d4$, $\mathbb{W}d3$, $\mathbb{W}e4$, $\mathbb{Q}b7$, $\mathbb{W}d5$, $\mathbb{Q}g8$. При этом магараджа не побьет ни одну из белых фигур (они надежно защищают друг друга), и теперь у него имеются лишь два свободных поля — ab и $f6$. На поле ab он гибнет после 15. $\mathbb{Q}g5$ (рис. 169), а на поле $f6$ — после 15. $e4$.

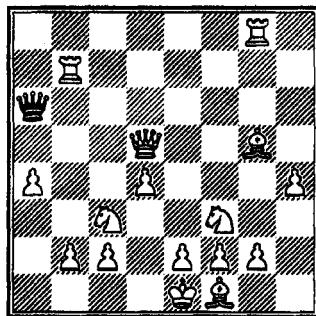


Рис. 169. Гибель магараджи.

Как мы знаем, на доске можно расставить восемь мирных ферзей. А как обстоят дела с магараджами? Проанализировав все 12 основных расстановок ферзей (см. стр. 74), убеждаемся, что в каждой из них по меньшей мере три пары ферзей связаны между собой ходом коня, т. е. восемь магараджей не уживаются. На доске 9×9 девять ферзей-коней также не могут находиться в безопасности. И лишь на доске 10×10 удается расставить 10 магараджей, не угрожа-

ющих друг другу, причем имеется всего одно основное решение (рис. 170, здесь ферзи играют роль магараджей), из которого другие получаются при поворотах и зеркальных отражениях доски.

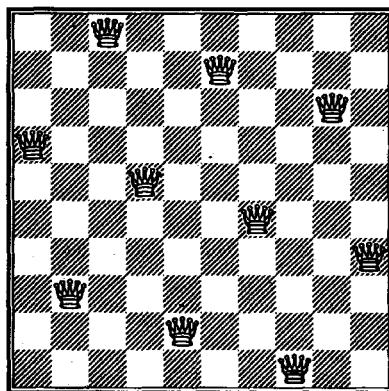


Рис. 170. Десять мирных фигур.

Оригинальную игру-головоломку с магараджами (обобщающую игру с ферзями — см. стр. 230) придумал американский математик Л. Сильверман. Белые ставят свою фигуру, а черные — свою, но чтобы она не оказалась под боем. Далее игроки по очереди переставляют магараджей — не обязательно по правилам, лишь бы фигура не попала под удар. При этом освободившееся поле больше использовать нельзя, например, на него ставится какая-нибудь фигура. Постепенно доска заполняется фигурами, и, если одному из партнеров некуда поставить своего магараджу, — он проиграл.

На доске 5×5 белые сразу выигрывают, ставя фигуру в центр доски, — все поля атакованы, и противник даже не может выставить своего оппонента. А вот на обычной доске, как ни странно, верх берут черные. Чтобы это доказать, разделим доску на четыре прямоугольника 8×2 и пронумеруем все поля, как показано на рис. 171.

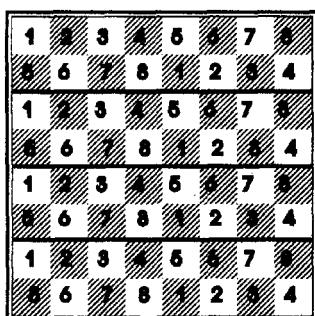


Рис. 171. Игра-головоломка.

После каждого хода белых черным нужно занять поле того же прямоугольника и с тем же номером. Очевидно, поля доски пары за парой исключаются из игры, и эта «парная стратегия» обеспечивает черным победу.

Сказочные фигуры. Магараджа лишь одна из десятков сказочных фигур, придуманных любителями нетрадиционных игр. Со многими из них связано множество интересных игр, задач и головоломок. Из комбинированных фигур отметим *царицу* (императрицу), объединяющую ладью и коня, *принцессу* (кентавр); слон + конь, *дракона*: конь + пешка (обозначается Δ , превращаться в другие фигуры дракону запрещено).

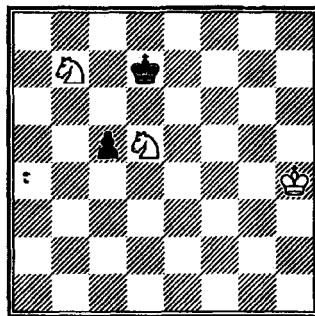


Рис. 172. Мат в 4 хода, на b7 и d5 — драконы.

В задаче Я. Владимириова на рис. 172 у черных два хода — королем на e8 (остальные поля ему недоступны) и пешкой.

1. ♕g5! c4 2. Dc5+ ♕c8 3. Dcb! (черный король запатован)
3...c3 4. Db6X, 2...♕d8 3. Dd6! c3 4. Dc6X, 2...♔e8 3. Dc6 c3 4.
Df6X. В случае 1...♔e8 решает 2. Df6+ ♕f8 3. Dd8! c4 4. Dc6X
(2...♕f7 3. Dd8+ ♕f8 4. Dc6X).

Напомним, что обычный конь (1, 2) — это частный случай фигуры (a, b). Различные сказочные персонажи получаются из этого обобщенного коня при выборе тех или иных значений a и b . Конь (1, 3) называется *верблюдом* (В), он перемещается на одно поле вдоль одной линии и на три вдоль другой. Очевидно, верблюд — одноцветная фигура, как и слон. Ниже мы рассмотрим задачи про него, а также приведем маршрут этого необычного шахматного животного по всем одноцветным полям доски.

Конь (1, 4) — *жираф*, (2, 3) — *зебра*, (3, 4) — *антилопа*. Если одно из чисел a, b равно 0, получаем ладью, которая перемещается на фиксированное число полей, а при $a=b$ — слона, обладающего тем же свойством. Коня, совершающего несколько ходов подряд в определенном направлении, например ♖b1-d2-f3-h4 или ♖b1-c3-f5-e7, именуют *всадником* (Вд, изображается как перевернутый конь, рис. 173).

В задаче Т. Доусона на рис. 173 при обычном коне на b4 это была бы старинная задача с длинным заданием — мат в 6

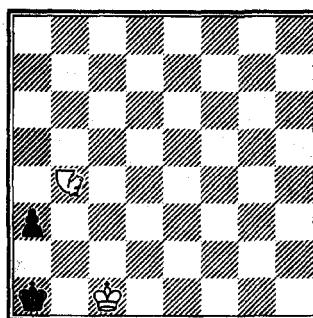


Рис. 173. Мат в 2 хода.

ходов: 1. $\mathbb{Q}c2+$ $\mathbb{Q}a2$ 2. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}a1$ 3. $\mathbb{Q}c2$ $\mathbb{Q}a2$ 4. $\mathbb{Q}e2$ $\mathbb{Q}a1$ 5. $\mathbb{Q}c1$ $a2$ 6. $\mathbb{Q}b3X$.

Но на b4 – всадник, который ставит мат, далеко удаляясь от черного короля: 1. $\mathbb{B}dc6!$ $a2$ (всадник продолжает контролировать поле a2, поэтому оно недоступно королю) 2. $\mathbb{B}dg4X!$ (с поля g4 всадник нападает на неприятельского короля по линии g4-e3-c2-a1).

Фигуры-животные присутствуют во многих сказочных играх. Так, в игре *джунгли* (древняя форма китайских и индийских шахмат) есть *собаки, волки, коты, пантеры, крысы...*

В старинных играх встречаются *мудрецы, шуты, епископы* и другие экзотические личности. Некоторые шахматные фигуры имеют «военные должности»: *гренадеры, саперы, солдаты, офицеры, генералы*. После Первой мировой войны на доске появились грозные фигуры *танков и самолетов*, а после Второй была изобретена *атомная бомба*, в которую превращается пешка, достигнув крайней линии. Эта страшная фигура ставится на любое поле доски и «взрывается», уничтожая все вокруг себя в заданном радиусе.

Вот еще несколько фигур, которые можно встретить в мире шахматной фантастики. *Сверчок* ходит как ферзь, но прерывает через любую фигуру, останавливаясь сразу за ней ($\mathcal{C}b$, изображается как перевернутый ферзь, рис. 174, задача Онициу).

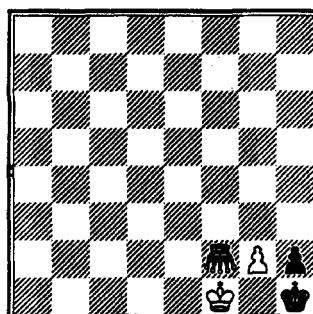


Рис. 174. Мат в 6 ходов.

1. g3! Сверчку предоставляется свобода движения. 1...Свh4
2. g4! Сbf4! 3. g5! Свh6 4. g6! Сbf6 5. g7! Свh8. Черного сверчка удалось загнать в угол. 6. ghСвX! Король прячется за пешкой, но попадает под удар превращенного белого сверчка.

Лев в отличие от сверчка приземляется на любом поле за перепрыгнутой фигурой. *Сверхслон* ходит как обычный слон, но может также отталкиваться от краев доски, подобно билльярдному шару. *Нейтральными фигурами* могут играть и белые, и черные, а *бьющим фигурам* разрешается делать ход только со взятием. Бьющий конь — *гиппопотам*, а бьющий ферзь — *динозавр*. *Рентгеновские фигуры* оказывают воздействие на поля доски сквозь другие фигуры. *Дипломат* сам не ходит, но его братья нельзя, а около дипломата фигура того же цвета неприкосновенна. Фигура *камикадзе* (самоубийца) убирается с доски вместе со взятой фигурой.

Немало разновидностей и у сказочных пешек. *Пешка-хамелеон* при взятии превращается во взятую фигуру, но своего цвета. *Сверхпешка* ходит на любое число полей по вертикали и бьет на любое число полей по диагонали. *Пешка-такси* движется вперед и назад. *Берлинская пешка* ходит по диагонали, а бьет по вертикали. *Неподвижная пешка* сама не ходит и не бьет, а ее братья можно. *Пешка замедленного действия* превращается только во взятые фигуры, а если их пока нет, ждет своего часа.

Цирце. В этой оригинальной игре после взятия неприятельской фигуры ее не снимают с доски, а возвращают на место, которое она занимала вначале. Ладьи и кони возвращаются на поля того же цвета, где были побиты, а пешка — на исходное поле той вертикали, где произошло ее взятие. Впрочем, если поле, куда должна вернуться фигура, занято, то она покидает доску.

Кажется, что в задаче Н. Маклеода на рис. 175 мат дается в 1 ход, причем даже двумя способами — 1. ♕:b3X или 1. ♖ g4X. Но не все так просто...

1. ♕:b3+ (конь b3 покидает доску, поскольку поле g8 занято черной ладьей) — шах и мат? Ответ 1...♕:d2 невозможен:

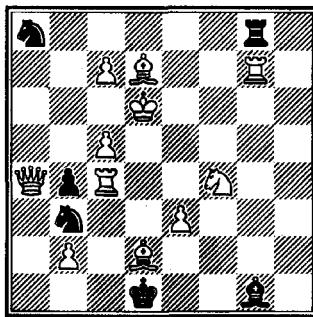


Рис. 175. Мат в 2 хода в цирце.

взятый слон возвращается на с1, и черный король оказывается под шахом при ходе белых. Однако у черных есть другая острумная защита — 1... \mathbb{Q} :c7!, и появившаяся на с2 белая пешка закрывает диагональ а4-д1. Как будто белые все-таки добиваются цели — 2. c3X, но после 2...bc! на с2 снова появляется белая пешка.

Ход 1. \mathbb{Q} g4+ опровергается посредством 1... \mathbb{Q} :e3!. На e2 восстанавливается белая пешка, и мата нет ни на первом ходу, ни на втором, так как эта пешка не может сдвинуться с места.

К цели ведет тихий ход 1. c8 \mathbb{Q} !. Пешка с покинула доску, и ответа \mathbb{Q} :c7 нет, а уже грозит 2. \mathbb{Q} :b3X. Черные играют 1... \mathbb{Q} :c8, и на поле h1 появляется белая ладья. Теперь взятие 2. \mathbb{Q} :b3+ парируется с помощью 2... \mathbb{Q} :c5!, и на с2 вновь появляется белая пешка. Но на сей раз матует 2. \mathbb{Q} g4X — неожиданно в игру вступает ладья h1: черный слон связан, и нет ответа 2... \mathbb{Q} :e3.

Но не спасаются ли черные путем 1... \mathbb{Q} :e3, и на 2. \mathbb{Q} :b3+ есть ответ 2... \mathbb{Q} :c5? В этом случае следует эффективное 2. \mathbb{Q} g1X, и черные не могут взять ладью g1 ни слоном, ни ладьей — на a1 появляется белая ладья, и черный король под шахом, опять же при ходе белых. Кстати, сразу 1. \mathbb{Q} :g1+ не проходит из-за возвращения слона на f8, и уже белый король под шахом. Ос-

талось отметить, что ничего не дают превращения 1. $c8\mathbb{W}(\mathcal{Q})$ из-за ответа 1. $\mathbb{B}c8$ и 1. $c8\mathbb{Q}$ из-за 1. $\mathbb{Q}e3!$

Решетчатая доска. В этом виде сказочных шахмат доска разбивается на 16 квадратов, и внутри каждого из них фигура теряет привычные свойства: не может ходить и не угрожает неприятельским фигурам. Однако покидая квадрат, она действует обычным образом.

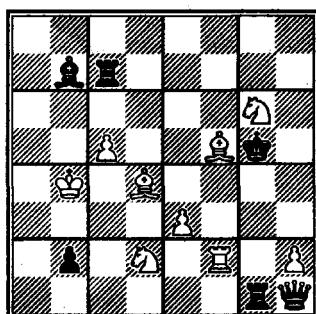


Рис. 176. Мат в 2 хода на решетчатой доске.

В задаче Э. Вассермана на рис. 176 черный король не может пойти на h5 или h6 (оба поля находятся в том же квадрате), а пешка b2 превращается лишь при взятии на c1 (соседний квадрат).

1. $\mathbb{Q}d7!$ Конь g6 неуязвим, так как находится в одном квадрате с королем. Грозит 2. $\mathbb{Q}f6X$, и от этого нет защиты. На 1... $\mathbb{Q}f3$ (перекрывая действие ладьи) следует 2. $\mathbb{Q}e4X!$ – слон оказался в одном квадрате с конем и не может забрать его. На 1... $\mathbb{W}e4$, связывая слона d4, следует 2. $\mathbb{Q}f3X!$ (сам ферзь брать коня не может, к тому же он перекрыл дорогу слону b7). Другие варианты: 1. $\mathbb{B}c6$ 2. $\mathbb{B}g2X$; 1. $\mathbb{W}f3(c6)$ 2. $h4X$; 1. $\mathbb{B}g4$ 2. $\mathbb{B}f5X$.

Франкфуртские шахматы. В этой игре фигура, которая бьет, трансформируется в фигуру, которую бьют (без изменения цвета). На рис. 177 пример такого странного взятия.

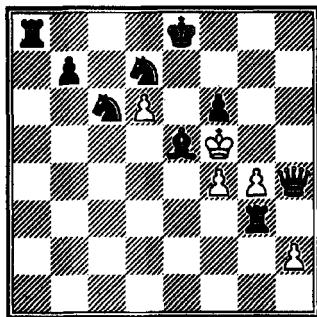


Рис. 177. Кооперативный мат в 2 хода во «Франкфурте».

В задачах на кооперативный мат начинают черные, которые помогают противнику поставить мат в заданное число ходов. 1. 0-0-0! fe. На e5 объявился белый слон. 2. ♜e7+ deX! Эффектный мат конем, появившимся на поле e7.

У этой задачи Н. Бакке есть симпатичный близнец, он получается при перестановке ладьи с a8 на h8. Теперь к цели ведет короткая рокировка: 1. 0-0! hg. На g3 – белая ладья. 2. ♛h5+! ghX. На h5 белый ферзь, и черный король заматован. Не правда ли, забавно превращение белых пешек во всевозможные фигуры, причем на довольно большом расстоянии от края доски.

Максимуммер. В этом жанре сказочных задач черные обязаны делать геометрически самые длинные ходы. Так, любой ход конем имеет длину $\sqrt{1^2 + 2^2} \approx 2,23$, а ход ферзем с a1 на f6 длиннее, чем на a8: $\sqrt{2 \times 5^2} \approx 7,05 > 7$. Максимуммеры чаще всего встречаются в задачах на обратный мат – белые начинают и заставляют черных объявить мат в заданное число ходов.

На рис. 178 черные обязаны делать самые длинные ходы ферзем. 1. ♜a2! ♛a6+ 2. ♜b1 ♛h6 3. ♜a2! ♛c1X (ход ферзем на c1 длиннее, чем на a6).

Магические шахматы. В них происходят удивительные метаморфозы фигур. В одном варианте выбирается магичес-

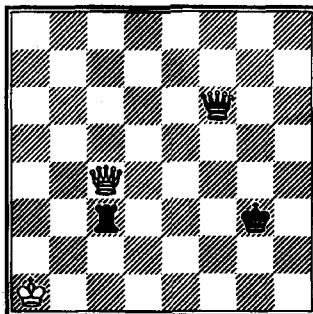


Рис. 178. Обратный мат в 3 хода максимуммер.

кое поле (на рис. 179 оно выделено квадратом), при появлении на котором любая фигура меняет цвет; в другом — магическим свойством наделяется фигура (на рис. 180 в кружке магический король).

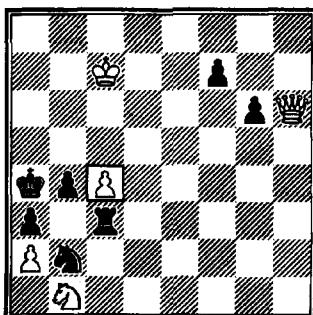


Рис. 179. Мат в 2 хода, поле с4 — магическое.

В задаче Я. Ван Альтена (рис. 179) ход 1. $\mathbb{W}g5$ с угрозой 2. $\mathbb{W}b5X$ представляет собой ложный след. Ответы черных, связанные со взятием, не помогают: в случае 1... $\mathbb{Q}:c4$ ладья становится белой и следует 2. $\mathbb{Q}c3X$; при 1... $\mathbb{Q}:c4$ — 2. $\mathbb{Q}b6X$. Однако спасает 1...f5!

1. $\mathbb{W}f8!$ На сей раз угроза белых серьезнее: 2. $\mathbb{W}a8X$. А пешка с4, которая отнимает у короля поле b5, неприкована.

1... $\mathbb{Q}:c4$ – на с4 белая ладья, и 2. $\mathbb{W}:b4X$; 1... $\mathbb{D}:c4$ – на с4 белый конь, и 2. $\mathbb{W}e8X!$

В задаче К. Ауста (рис. 180) все фигуры, оказавшиеся после данного хода соседями магического короля (и свои, и чужие), меняют цвет.

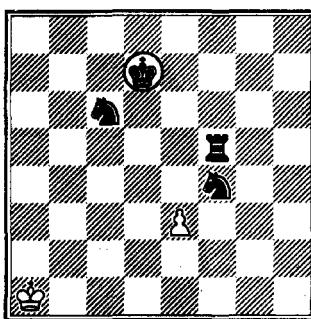


Рис. 180. Кооперативный мат в 3 хода,
король d7 магический.

1. $\mathbb{W}e6!$ Ладья f5 становится белой, она и ходит: 1... $\mathbb{Q}f8$ 2. $\mathbb{W}d5!$ На с6 появляется белый конь, который сохраняет цвет после двойного изменения – 2... $\mathbb{D}d4$ (конь черный) 3. $\mathbb{W}e4$. Теперь меняется цвет всех трех фигур – оба коня становятся белыми. 3... $\mathbb{Q}e8X$. Пешка e3 черная, но она косвенно защищает обоих коней. Действительно, взятие любого из них вызывает изменение цвета пешки e3, и при ходе белых неприятельский король оказывается под боем.

Шашматы. Итак, мы познакомились с различными шахматными играми на нестандартных досках, с необычными правилами и сказочными фигурами. В игре шашматы, которую придумал американский математик С. Голомб, одновременно используются все три необычных элемента.

Как видно из названия, игра представляет собой смесь шахмат и шашек: фигуры в ней шахматные, но перемещаются они только по черным полям доски – как в шашках (на рис. 181 дана начальная расстановка).

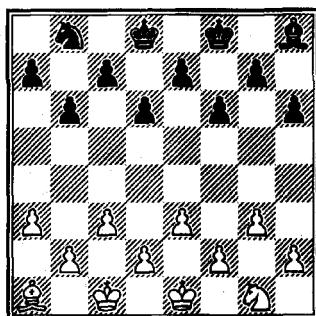


Рис. 181. Шашматы.

Набор фигур в шашматах несколько иной, чем в шахматах. Короли ходят только на соседние черные поля. Слон не отличается от шахматного, а пешки ходят как шашки. Поскольку обычный конь (1, 2) не в состоянии сделать на шашматной доске ни одного хода (он тут же попадает на запретное белое поле), его заменяют верблюдом В (1,3), который перемещается по полям одного цвета. Короли и пешки бьют как в шашках (перепрыгивая через фигуры, пешки — только вперед), а слон и верблюд — как в шахматах (занимая поле взятой фигуры). Взятие королем и пешкой обязательно (как в шашках), а слоном и верблюдом — нет (как в шахматах).

Если есть выбор между шахматным и шашечным взятием, то он произволен (но что-то брать надо). Достигнув крайней горизонтали, пешка превращается в любую из трех фигур. Превращая пешку в слона или верблюда, игрок увеличивает свой атакующий потенциал, а превращая в короля — укрепляет защиту. Действовать, конечно, надо по обстоятельствам.

Цель игры — уничтожить королей противника или лишить всех его фигур подвижности (в данном случае это не пат, а победа).

Рассмотрим теперь две математические задачи про верблюда в шашматах. Напомним, что на обычной доске, с одной стороны, конь может обойти всю доску, а с другой — можно расположить 32 мирных коня. Те же вопросы возникают для верблюда.

Существует ли замкнутый маршрут верблюда по всем полям шашматной доски? Какое наибольшее число верблюдов можно расположить на шашматной доске, чтобы они не угрожали друг другу?

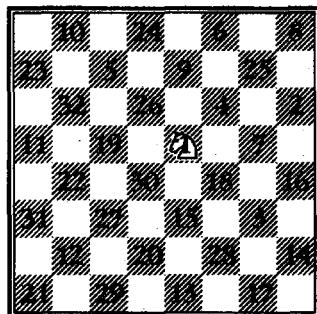


Рис. 182. Верблюд на шашматной доске.

Решение обеих задач показано на рис. 182. Поля, по которым проходит верблюд, последовательно занумерованы числами от 1 до 32. Поскольку поля 1 и 32 связаны между собой ходом верблюда, маршрут является замкнутым.

16 мирных верблюдов, как и 32 мирных коня на обычной доске, занимают половину доступных им полей. На рис. 182 их можно поставить на все поля с нечетными номерами.

Гексагональные шахматы. В них играют на гексагональной или, иначе, шестиугольной доске, поля ее также имеют вид шестиугольника. Изобретены два варианта: один — российским геологом И. Шафраном, другой — польским инженером В. Глинским. Польские шахматы в середине прошлого века имели довольно широкое распространение, состоялись даже два чемпионата Европы.

Доска состоит из 91 поля трех цветов — белого, черного и серого (рис. 183). На ней 11 вертикалей от «a» до «l» (кроме «j»), поля каждой нумеруются снизу вверх. На крайних вертикалях по 6 полей, на центральной — 11. Роль горизонталей выполняют диагонали, слева от линии «f» — параллельные a1-f1,

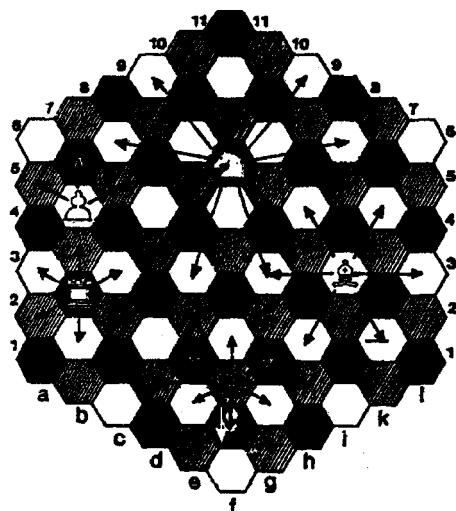


Рис. 183. Доска — правильный шестигольник.

а справа — параллельные f1-11. В дополнение к стандартному набору фигур каждая сторона получает по одному серопольному слону и одной пешке.

Ходы фигур показаны на рис. 183. Король, как и полагается, ходит на все соседние поля — не только на непосредственно примыкающие к данному, но и на ближайшие к нему того же цвета. Таким образом, с f3 он может пойти на 12 полей, указанных стрелками. Столько же полей и в распоряжении коня, стоящего на f8. Ладья и слон перемещаются на любое число полей в одном из шести направлений. Ферзь, объединяющий их ходы, движется в 12 направлениях (тех же, что и король). Пешки ходят на одно поле по вертикали (в начале игры на два), бьют наискосок, например с b5 на a5 и с6. Сохраняется и взятие на проходе — так, в ответ на c2-c4 черная пешка d4 может побить белую d4:c3. Рокировок нет — короли и так находятся в достаточной безопасности. Остальные правила, в том числе цель игры — заматовать неприятельского короля, не меняются.

Геометрия шестигранной доски весьма своеобразна. Так, вертикаль «f» является осью симметрии доски, а поле f6 – центральным (на стандартной доске центр состоит из четырех полей). Хотя доска больше обычной, путь коня между любыми двумя полями на ней занимает не более четырех ходов. Другое забавное свойство коня – после своего хода по-прежнему контролировать старые поля. Например, с g9 он нападает на e7, но, перескочив на d9 или h6, продолжает держать это поле под контролем.

Один король патует неприятельского, если тот находится в углу. Так, с f3 он сковывает действия черного короля на f1. Значит, король и фигура (в том числе конь или слон) могут поставить мат. А вот ферзь делает это без всякой поддержки, скажем, ставит мат королю f1 с того же поля f3.

На гексагональной доске возникают те же математические задачи и головоломки, что и на обычной, в том числе о маршрутах, доминировании и независимости фигур. Любопытно, что и здесь достаточно пяти ферзей – c5, d8, g5, h1, i6, чтобы охранять все свободные поля доски.

Шахматы Фишера. Большинство шахматно-математических игр, рассмотренных в книге, относятся либо к занимательному жанру, либо к жанру шахматной фантастики, одному из разделов композиции, в них никто не играет. Но есть одно исключение – фишеровские шахматы, которые сейчас завоевали большую популярность, состоялись даже несколько чемпионатов мира с участием известных гроссмейстеров. Главная их особенность – нестандартная начальная позиция. Пешки стоят на обычных местах, а положение фигур за ними определяется жребием. При этом должны выполняться три условия: 1) у каждой стороны слоны разноцветные; 2) ладьи находятся по разные стороны от короля; 3) белые и черные фигуры расположены симметрично.

Как показывает расчет, всего расстановок, удовлетворяющих этим условиям, существует 960. Поэтому шахматы Фишера называются также рэндом-960 (random можно перевести с английского как «выбранный наугад»).

Смысл игры в том, что при сохранении основных принципов отпадает изнурительная дебютная подготовка, связанная прежде всего с использованием компьютера. Чтобы шахматы снова стали состязанием интеллектов, а не голой памяти, Фишер и придумал свою игру. Кстати, обычная начальная позиция является частным случаем рэндома.

Необходимо четко сформулировать правило рокировки в фишеровских шахматах. При короткой рокировке (в ней участвует ладья справа) белый король попадает на g1, ладья на f1; соответственно, черный король на g8, ладья на f8. При длинной рокировке (участвует ладья слева) белый король попадает на c1, ладья на d1; соответственно, черный король на c8, ладья на d8. Очевидно, необходимые поля должны быть свободны, а после рокировки король не должен попасть под шах.

Практика показывает, что в рэндоме многое зависит от исходной позиции. В некоторых расстановках у черных сразу нелегкая ситуация; с другой стороны, имеются положения, в которых естественное для обычной игры вступление неожиданно ведет к большим неприятностям для белых.

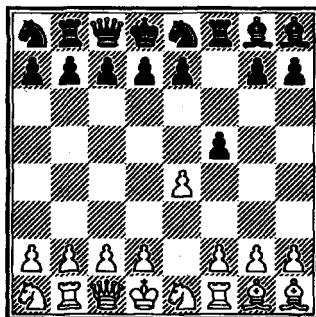


Рис. 184. Черные берут верх на первом ходу!

Например, в одной из исходных позиций стандартное 1. e2-e4 сразу опровергается путем 1...f7-f5!! (рис. 184). Классический двойной удар! Грозит 2... \mathbb{Q} :a2 с выигрышем качества, и черные уже на втором ходу забирают на e4, оставаясь с лишней пешкой...

ЛОГИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ЗАДАЧИ

Необычные игры и задачи на шахматной доске придумывают не только композиторы-фантасты, но и мастера занимательной математики и интеллектуальных развлечений. Такие игры ближе к логическим, они чаще всего допускают исчерпывающий математический анализ. Интерес представляет не сам процесс игры, а нахождение четкого алгоритма, гарантирующего победу или ничью. Понятно, что если алгоритм найден, то игра уже теряет творческий характер.

Шахматы для нескольких игроков. Мы уже упомянули много разных нестандартных игр, в том числе старинных. Вот еще несколько с математическим уклоном. В четверные шахматы играют двое на двое – черные и белые против красных и голубых – на 160-клеточной доске, которая получается из обычной добавлением к каждому краю трех горизонталей. Существуют разные правила четверных шахмат, в одном варианте заматованный король снимается с доски, в другом остается на ней и может быть разматован союзником.

Четверо шахматистов сражались когда-то в королевскую игру на доске, имеющей форму креста. Сейчас игра забыта, а название сохранилось в виде синонима обычных шахмат. Для четырех игроков придумано немало игр. Если у вас собралась такая веселая компания и ничего, кроме привычной доски, под рукой нет, не отчаивайтесь. Играйте двое на двое в нормальные шахматы, но ходы делайте по очереди, через одного. Это забавная игра, и не беда, если один член команды задумает интересную комбинацию, а другой ее тут же погубит..

В шахматах на троих доска представляет собой шестиугольник с 96 полями, а фигуры трех цветов – белые, черные и красные. Выигрывает тот, кто берет королей обоих сопер-

ников. Впрочем, двое партнеров могут объединяться против одного, более сильного.

Еще в эпоху Возрождения была популярна шахматно-математическая игра для нескольких участников арифметические шахматы, иначе рифмомахия. На доске 16×8 передвигались фигуры в форме круга, треугольника и прямоугольника. На них были написаны числа, комбинации которых определяли ход. Игра требовала слишком сложных расчетов и давно забыта.

Рекорд числа действующих лиц принадлежит астрономическим шахматам, также распространенным в древности. В них играли семь человек на круглой доске, а фигуры представляли собой планеты и звезды (Луна, Солнце, Венера, Марс и др.).

Конь и верблюд. В углу квадратной доски произвольных размеров стоит конь, которым партнеры ходят по очереди. Первый игрок перемещает его как верблюда ($3,1$), а второй — как обычного коня, но с двойным ходом (как в двухходовых шахматах). Задача второго — загнать фигуру в противоположный угол доски, первый старается помешать ему. Чем закончится схватка?

В этом несколько странном соперничестве коня и верблюда (точнее было бы говорить о хамелеоне, превращающемся то в одну фигуру, то в другую) победителем становится тот, у кого обычный конь. Действительно, если фигура стоит на большой диагонали, проходящей через угол, где она вначале располагалась, то после любого отступления с нее верблюда конь своим двойным ходом возвращается на эту диагональ, причем по крайней мере на одно поле ближе к цели (в этом и заключается алгоритм игры). В конце концов конь попадает в необходимый угол.

Кошки-мышки. У одного игрока единственная фигура — мышка, у другого несколько фигур — кошек. Мышка и кошки ходят одинаково — на любые соседние поля по вертикали и горизонтали. Если мышка попадает на край доски, то очередным ходом спрыгивает с нее — убегает от кошек; если кошка и мышка очутились на одном поле, то кошка съедает мышку.

Борьба кошек с мышкой протекает на обычной доске, соперники ходят по очереди, но второй игрок передвигает своим ходом сразу всех кошек (в любых направлениях). Начинает мышка, которая старается спрыгнуть с доски, кошки же хотят ее догнать. Есть два варианта игры:

а) Кошек две, мышка находится на внутреннем поле доски. Могут ли кошки так разместиться на краях доски, чтобы в конце концов поймать мышку?

б) Кошек три, расположены они произвольно на доске; мышка вначале делает два хода подряд. Всегда ли она убежит от кошек?

Покажем, что в первом случае мышке не уйти от погони, а во втором, наоборот, она благополучно скрывается от кошек.

а) Через поле с мышкой проведем диагональ и посадим кошек на ее концах. На каждый ход мышки кошки ходят так, чтобы все три фигуры снова оказались на одной диагонали, а расстояние между кошками сократилось на одно поле. Такая стратегия позволяет кошкам быстро съесть мышку.

б) Рассмотрим две диагонали, проходящие через поле, на котором сидит мышка. Если оно не крайнее (иначе мышка сразу спрыгнет с доски), то эти диагонали разбивают доску на четыре части. Поскольку кошек три, внутри одной части их нет, и мышке нужно отправиться внутри нее в перпендикулярном направлении к краю доски. В конце концов она убегает от кошек.

Игра с конем. Первый игрок ставит коня на любое поле прямоугольной доски (обе стороны не меньше трех). Затем игроки по очереди ходят конем, причем запрещено ходить им на уже пройденные поля. Проигрывает тот, кто не в состоянии сделать очередной ход. Кто побеждает: а) на обычной доске? б) на доске $m \times n$, где $m \geq n \geq 3$?

Если число полей четно, побеждает второй игрок, если нечетно — первый. Значит, на доске 8×8 верх берет второй игрок.

Рассмотрим сразу общий случай. Если $m \cdot n$ четно, то поля доски можно разбить на пары так, что с одного поля конь может

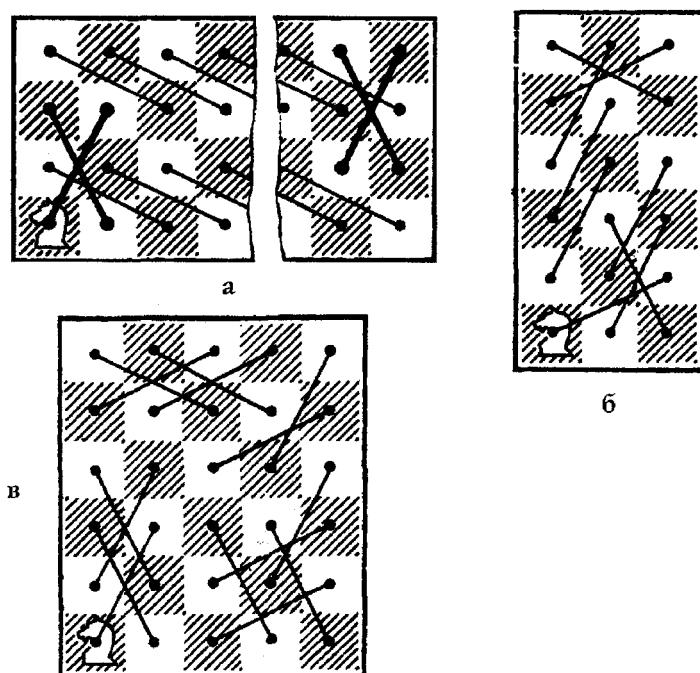


Рис. 185. Игра с конем на четной доске.

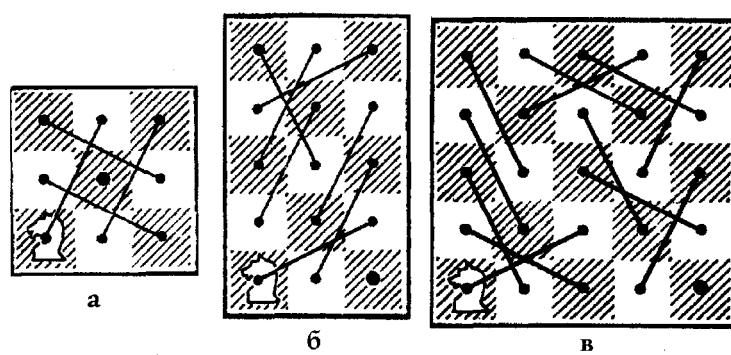


Рис. 186. Игра с конем на нечетной доске.

пойти на другое (рис. 185), а если нечетно, то на такие пары можно разбить все поля, кроме одного (рис. 186). В первом случае победная стратегия второго игрока заключается в том, что каждым своим ходом он переставляет коня на поле, парное тому, на которое перед этим пошел первый. При нечетном *ти* начинающий первым ходом ставит коня на поле, не имеющее пары, а дальше действует указанным способом.

На рис. 185а показано, как разбить доску $4 \times n$ (или $n \times 4$) при любом $n \geq 3$. Из рис. 187 следует, что если существует разбиение доски $m \times n$, то существует и разбиение доски $(m+4k) \times (n+4l)$ ($k, l = 1, 2, \dots$). Остается разбить доску $m \times n$, где числа m и n при делении на 4 дают различные (не нулевые) остатки, и $6 \geq m \geq n \geq 3$, т. е. $m, n=3, 5, 6$. Разбиение досок $3 \times 3, 5 \times 3, 5 \times 5, 6 \times 3$ и 6×5 показано на рис. 186а–в и рис. 185в; доска 6×6 — «удвоенная» 6×3 .

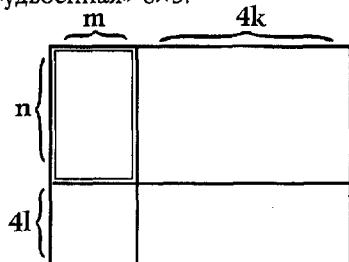


Рис. 187. Разбиение доски.

Игра с королем. На доске стоит король, и двое по очереди ходят им, причем запрещено возвращаться на поле, где он только что был. Выигрывает игрок, который ставит короля на поле, где тот уже побывал (но не на предыдущем ходу). Кто побеждает?

При любом начальном расположении короля верх берет первый игрок. Чтобы привести его победную стратегию, определим, за сколько ходов король может дойти с исходного поля до первой горизонтали и до последней. Поскольку сумма этих чисел равна 7, одно из них нечетно. Пусть требуется

нечетное число ходов, чтобы дойти до первой горизонтали. Значит, сам король стоит на четной горизонтали, например, на с6 (рис. 188). Тогда первый игрок сразу идет вниз — ♔ с5. Номер горизонтали уменьшается на единицу и становится нечетным. Если второй игрок отвечает горизонтальным ходом — ♔ b5 (d5) или диагональным возвращается на предыдущую горизонталь — ♔ b6 (d6), то первый выигрывает ходом ♔ с6 (занимает поле, на котором король уже был). Поэтому второй вынужден спуститься еще на горизонталь ниже — ♔ b4 (c4, d4). В ответ первый опять делает ход вниз и т. д. (рис. 188). В конце концов он очередным ходом ставит короля на нижнюю горизонталь и на любой ответ (по горизонтали или диагонали) ходит им на пройденное поле второй горизонтали — победа!

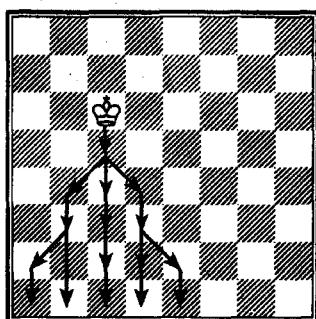


Рис. 188. Игра с королем.

Эта игра допускает интересные обобщения. Например, первый игрок аналогично выигрывает на доске $n \times n$ при любых четных n . А вот при нечетных n все зависит от положения короля. Всегда существуют поля с королем, на которых выигрывает второй игрок. Так, на доске 5×5 , если король стоит на поле с плюсом, то побеждает первый, а если на поле с минусом, то — второй (рис. 189). Скажем, при короле в центре доски, на с3, на любой ход первого игрока второй ставит его на край доски и следующим ходом завершает игру. Также если

первый начинает игру из угла a1, то второй двигает короля к вертикали «h» или к пятой горизонтали и быстро берет верх. Подобным образом можно расставить плюсы и минусы на любой нечетной доске.

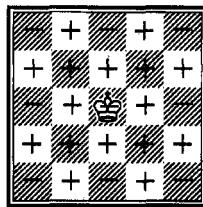


Рис. 189. На чьей стороне победа?

Ферзя в угол. На доске стоит ферзь, который дважды игрока по очереди ходят на любое число полей вверх, вправо или по диагонали (отступать запрещено). Выигрывает тот, кто своим ходом загонит ферзя в правый верхний угол доски, поле h8.

Результат игры можно определить, взглянув на рис. 190. Если ферзь стоит на поле с плюсом, то выигрывают белые, если на поле с минусом – черные, ничьих не бывает. Но как расположить знаки?

Пусть ферзь находится на восьмой горизонтали, вертикали «h» или диагонали a1-h8 (кроме поля h8). Тогда белые первым

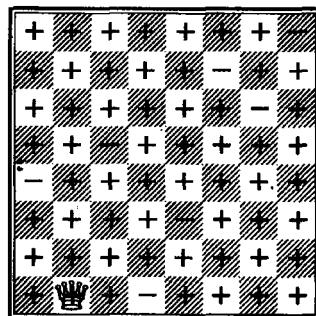


Рис. 190. Ферзя в угол.

же ходом ставят ферзя в угол. Далее рассуждаем так. Если с данного поля ферзь вынужден пойти на поле с плюсом, то оно, естественно, получает минус. Если же у ферзя есть в запасе ход на минус, то поле получает плюс, и т. д. Продолжая эту процедуру, мы в конце концов на всех полях доски расставим необходимые знаки. В результате оказывается, что семь полей являются проигрышными для белых, а остальные — выигрышными причем ферзь попадает в угол не позднее третьего хода.

Если в начале игры ферзь стоит на b1, то партия может протекать так: 1. ♕d1 (быстрее к цели ведет ♕g6!) 1... ♕d2 2. ♕e3! (единственный ход) 2... ♕e7 3. ♕f7! ♕h7 4. ♕h8 с победой.

Возьмем теперь вместо ферзя ладью и рассмотрим игру «ладья в угол». Партнеры по очереди перемещают ладью по горизонтальным (вправо) и вертикальным (вверх), и побеждает тот, кто первым займет угол. Эта игра мало отличается от предыдущей, а алгоритм напоминает игру «конь и верблюд». Здесь все наоборот: белые выигрывают, если ладья стоит вне диагонали a1-h8 (каждым ходом они ставят ее на эту диагональ), и проигрывают в противном случае. Самая длинная партия (при ладье на a2 или b1) длится семь ходов: 1. ♜b1-b2! ♜c2 2. ♜c3 ♜c4 3. ♜d4 ♜e4 4. ♜e5 ♜e6 5. ♜f6 ♜g6 6. ♜g7 ♜g8 7. ♜h8. Аналогично исследуются игры «коня в угол» или «короля в угол», причем на произвольных досках. Для того чтобы оценить положение, достаточно умело расставить плюсы и минусы.

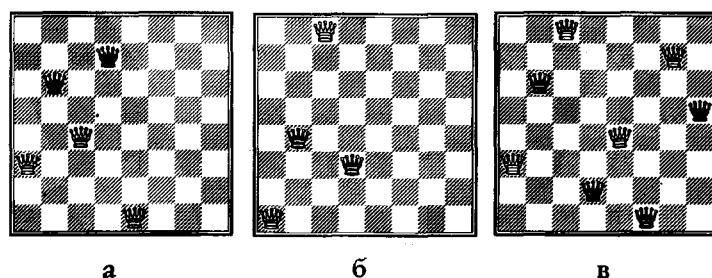


Рис. 191. Белые ферзи против черных.

Следующая игра имеет прямое отношение к задаче о восьми ферзях, о которой подробно рассказывалось выше.

Игра в ферзей. Двое по очереди ставят ферзей — один на вертикаль «а», второй — «б», третий — «с» и т. д., при этом никакие два не должны нападать друг на друга. Проигрывает тот, кто не в состоянии сделать очередной ход.

На рис. 191а–б приведены две короткие партии. На рис. 191а белые (первый игрок) выиграли в 5 ходов — все поля вертикали «f» под контролем ферзей, и у черных нет хода. На рис. 191б в 4 хода выиграли черные (второй игрок) — на вертикали «e» не осталось ни одного поля, доступного белому ферзю. Кстати, это самая короткая партия. При любой расстановке трех мирных ферзей на вертикалях «а», «б» и «с» на вертикали «d» найдется еще хотя бы одно поле для четвертого.

Есть другой вариант: сделавший последний ход выигрывает столько очков, сколько осталось свободных вертикалей. И тогда в первом случае белые выиграли 3 очка, а во втором черные — 4.

Каков результат этих игр при наилучших действиях обеих сторон? Для ответа на вопрос можно перебрать все возможные партии (их около 7 тысяч), но это занятие довольно скучное. Работа была поручена компьютеру, который пришел к следующим выводам. В первом варианте побеждают черные, во втором партия заканчивается вничью: черные делают последний ход, но их выигрыш составляет ноль очков! Одна из ничейных партий представлена на рис. 191в.

Аналогичные игры возникают и для разных фигур.

Двое по очереди ставят на доску 9×9 коней (королей), чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

В данном случае выигрывают белые. Они ставят коня (короля) в центр доски и далее избирают центральную симметрию.

В начале книги было рассмотрено несколько головоломок с участием шахмат и домино. А эту главу закончим одной логической игрой, в которой тоже присутствуют и шахматы, и домино.

Домино на шахматной доске. Двое по очереди кладут на доску (произвольной прямоугольной формы) кости домино,

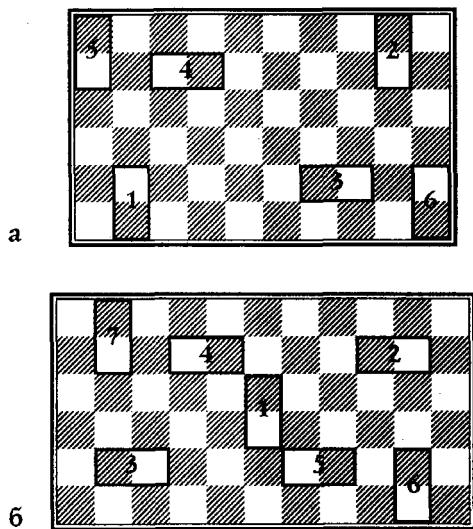


Рис. 192. Побеждает симметрия.

покрывая каждой из них два поля. Проигрывает тот, кто не в состоянии сделать очередной ход. На чьей стороне победа?

Для выбора правильной стратегии следует воспользоваться симметрией. Если обе стороны четные, например, стандартная доска 8×8 или доска 10×6 (рис. 192а), то победа обеспечена второму игроку. Ему не надо ни о чем заботиться — достаточно копировать (центрально-симметрично) ходы партнера. Так, на ход 1 он положит кость 2, на ход 3 — кость 4, на ход 5 — кость 6, и так до тех пор, пока первый игрок не лишится возможности сделать ответный ход.

Если одна из сторон доски четная, а другая нечетная, то выигрывает первый игрок. Например, на доске 11×6 (рис. 192б) на первом ходу он кладет кость 1 в центр доски и далее действует симметрично. Несколько начальных ходов показаны на рисунке. Любопытно, что если обе стороны доски нечетные, то симметричные действия уже не гарантируют успех. Выигрышная стратегия для такого варианта неизвестна.

ГЕОМЕТРИЯ ДОСКИ

Наша книга посвящена шахматной математике — математическим задачам и головоломкам, различным математическим идеям и подходам, связанным со старинной игрой. Однако любопытно, что и в самих шахматах, а также в шахматной композиции встречается немало чисто математических элементов. Например, шахматная доска, как мы убедимся в этой главе, обладает своеобразной геометрией, свойства ее довольно необычны. Особенно это проявляется в эндшпиле. В пешечных окончаниях существуют строгие, почти математические закономерности. Рассмотрим несколько примеров.

Начнем с простейшего приема, знакомого каждому игроку. В позиции на рис. 193 белый король не участвует в игре, и все зависит от того, успеет ли его черный оппонент догнать пешку h3.

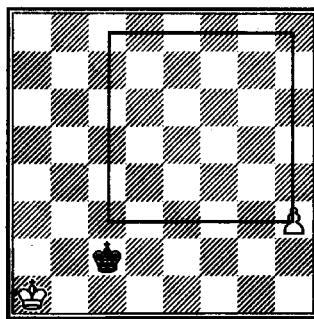


Рис. 193. Правило квадрата.

Позицию легко оценить при помощи правила квадрата. Достаточно выяснить, может ли король попасть в квадрат пешки, показанный на рисунке. При своем ходе черные дела-

ют ничью (король попадает в квадрат), а при ходе противника проигрывают.

Итак, с одной пешкой ситуация ясна. А могут ли две пешки без поддержки своего короля проскочить в ферзи? Речь идет о позициях, в которых король борется с двумя изолированными проходными противника, расположенными на одной горизонтали (рис. 194).

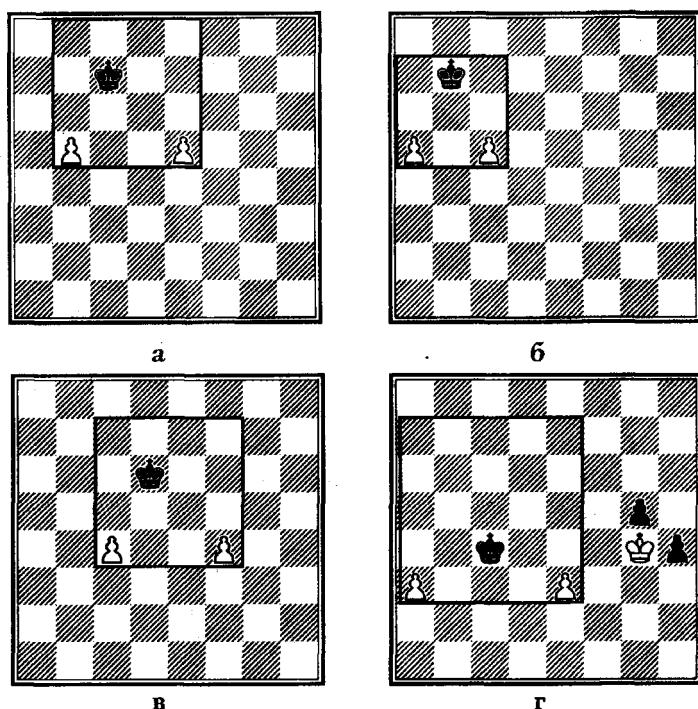


Рис. 194. Блуждающий квадрат.

Построим квадрат, в углах которого стоят пешки. Так, на рис. 194г пешки a3 и e3 образуют квадрат a3-e3-e7-a7 со стороной пять. При движении пешек вперед квадрат меняет положение и поэтому называется блуждающим.

Правило блуждающего квадрата заключается в следующем. Если он касается края доски или выходит за его пределы, то король не в состоянии помешать самостоятельному маршруту пешек в ферзи. На рис. 194а квадрат 4×4 касается края доски, и белые берут верх независимо от очереди хода и расположения своего собственного короля: 1... \mathbb{Q} b6 2. e6 \mathbb{Q} c7 3. e7 \mathbb{Q} d7 4. b6 и т. д.

А если блуждающий квадрат не достиг края доски? В этом случае пешки сами пройти не могут, и все зависит от стороны квадрата. Если она равна трем (рис. 194б), то пешки поддерживают друг друга, но для короля безопасны (1... \mathbb{Q} c6 2. a6 \mathbb{Q} c7, и король перемещается с с7 на с6 и обратно). Если же сторона равна четырем, то пешки гибнут. Скажем, на рис. 194, в черный король спасается с ними при любой очереди хода: 1. \mathbb{Q} c5 2. f5 \mathbb{Q} d6! 3. f6 \mathbb{Q} e6 4. c5 \mathbb{Q} :f6 5. c6 \mathbb{Q} e6 и король попадет в квадрат оставшейся пешки.

При стороне квадрата, равной пяти, ситуация та же, что и при стороне три, — пешки держат сами себя, но прорваться в ферзи не могут. На рис. 194г черный король стоит на линии «с» (на полях с3, с4, с5), и отступление от нее ведет к гибели. Эндшпиль ничейный, поскольку белый король прикован к черным пешкам и не может прийти на помощь.

Два примера из практики. Позиция на рис. 195 возникла в партии Бахл — Соломон (Австралия, 1986).

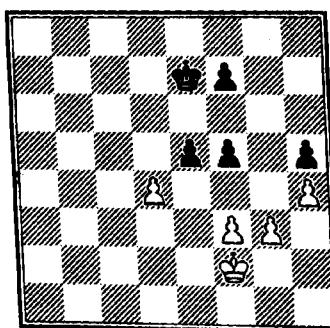


Рис. 195. Выигрыш.

Напрашивается 1. de, но после 1... $\mathbb{Q}e6$ 2. f4 $\mathbb{Q}d5$ 3. $\mathbb{Q}e3$ $\mathbb{Q}c4$ белым не реализовать лишнюю пешку. Решает жертва: 1. d5! e4 2. g4!, и черные сдались: после 2...fg 3. fg hg 4. h5 белые строят необходимый квадрат 5x5 (выступающий за край доски). Занятен и другой вариант: 1... $\mathbb{Q}d6$ 2. g4 fg 3. fg $\mathbb{Q}:d5$ 4. gh $\mathbb{Q}e6$ 5. h6 $\mathbb{Q}f6$ 6. h5, и черные в цугцванге.

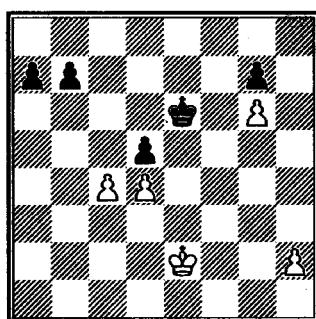


Рис. 196. Штальберг — Тартаковер.

На рис. 196 в позиции из одной давней партии белые, только что сыграв в отчаянии 1. c3-c4, после 1... $\mathbb{Q}f6$ 2. cd $\mathbb{Q}:g6$ могли спокойно сдаться. Однако Тартаковер решил прихватить пешку, обнаружив пробелы в знании шахматной геометрии.

1...dc? 2. h4!, и у белых блуждающий квадрат 5x5, касающийся края доски. Наличие пешек g не имеет значения, а три связанные проходные не помогают: 2...a5 3. h5 a4 4. h6 gh 5. d5+ $\mathbb{Q}f6$ 6. d6 a3 7. d7 $\mathbb{Q}e7$ 8. g7 с победой.

После двух правил квадрата, очевидно, должен следовать метод треугольника...

В положении на рис. 197 после 1. $\mathbb{Q}d5$ $\mathbb{Q}c8$ 2. $\mathbb{Q}d6$ $\mathbb{Q}d8$ 3. c7+ $\mathbb{Q}c8$ 4. $\mathbb{Q}c6$ на доске пат, а 2. $\mathbb{Q}c5$ $\mathbb{Q}c7$ приводит к исходной позиции. Однако при своем ходе черные сразу проигрывают, так как вынуждены пропустить белого короля на b6, теряя единственную пешку.

Итак, задача белых — передать очередь хода противнику. Цель достигается методом треугольника — маневром короля

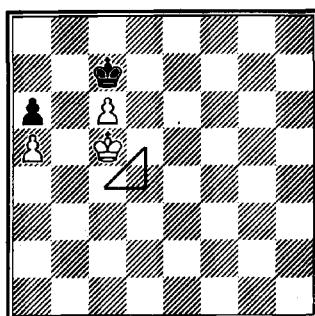


Рис. 197. Метод треугольника.

по треугольнику с4-д4-д5 (он изображен на рисунке). 1. ♔d5 ♕c8 2. ♔d4! ♕b8 3. ♔c4! ♕c8 4. ♔d5. На 4...♔d8 теперь решает 5. ♔d6 ♕c8 6. c7, а на 4...♔c7 – 5. ♔c5, получая позицию на диаграмме, но уже при ходе черных.

Окончание можно считать классическим, но вот какой случай произошел как-то в партии двух известных шахматистов (рис. 198).

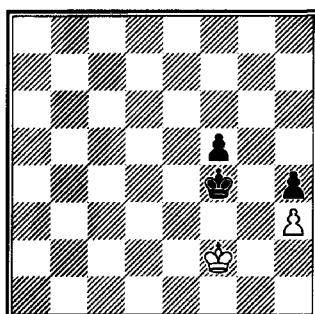


Рис. 198. Юдасин — Оснос.

Переставив последним ходом короля с e2 на f2, Юдасин предложил ничью, сообщив своему партнеру, что позиция теоретически ничейная. «Уличенный» в эндшпильных победах, опытный Оснос не рискнул спорить с гроссмейстером и

позволил себя уговорить. А между тем после 1... $\mathbb{Q}e4$ 2. $\mathbb{Q}e2$ $f4$ 3. $\mathbb{Q}f2$ $f3$ 4. $\mathbb{Q}f1$ $\mathbb{Q}e5!$ на доске возникала позиция, симметричная рассмотренной (после второго хода белых на рис. 198), но с переменой цветов. Черные выигрывали с помощью треугольника. Оба титулованных игрока оказались не в ладах с законами шахматной геометрии.

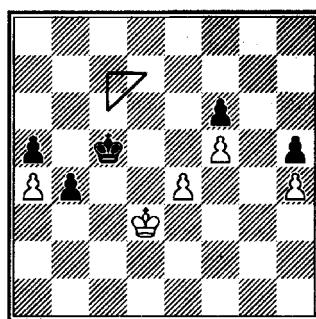


Рис. 199. Сейран — Каспаров.

В позиции на рис. 199 сильнейшей стороне надо передать очередь хода противнику, что достигается методом треугольника. Каспаров показывает, что его школьная пятерка по геометрии вполне заслуженна...

1... $\mathbb{Q}c6$. Первая вершина треугольника образована. 2. $\mathbb{Q}c4$ $\mathbb{Q}c7!$ Вторая вершина. 3. $\mathbb{Q}d3$ $\mathbb{Q}d7!$ И третья вершина. 4. $\mathbb{Q}e3$ $\mathbb{Q}c6!$ Треугольник готов. 5. $\mathbb{Q}d3$ (5. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}d6$ и т. д.) 5... $\mathbb{Q}c5$. Итак, перед нами позиция на диаграмме, но при ходе белых. Дальнейшее просто: 6. $\mathbb{Q}e3$ $b3!$ 7. $\mathbb{Q}d3$ $\mathbb{Q}b4$ 8. $e5$ $\mathbb{Q}a3!$ Пешка b превращается с шахом, и поэтому белые сдались.

В теории пешечных окончаний часто встречаются математические термины и приемы — ключевые и критические поля, оппозиция (дальняя и ближняя), пространство и время, система полей соответствия и т. д. Метод треугольника, по сути, является фрагментом теории соответственных полей (рис. 200).

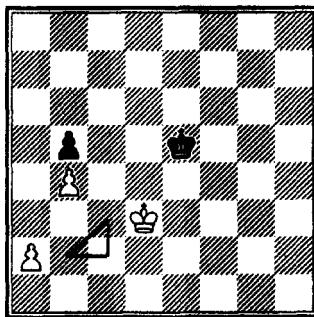


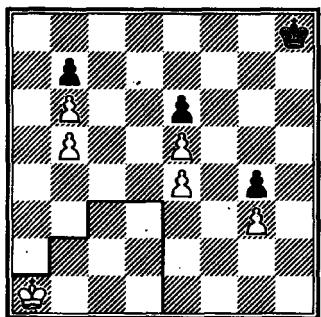
Рис. 200. Выигрыши.

1. ♔ c3 ♔ d5 2. ♔ b3 ♔ c6. Черным нельзя допускать ни противостояния ♔ d4 – ♔ d6 из-за наличия темпа a2-a3, ни ♔ b3 – ♔ d6 ввиду a2-a4 с простым выигрышем. Отсюда следует, что если белый король стоит на d3, c3 или b3, черный соответственно должен находиться на e5, d5 или c6. Пользуясь шахматноматематическим языком, можно сказать, что полям d3, c3 и b3 соответствуют поля e5, d5 и c6. В получившейся позиции белым надо передать очередь хода противнику, для чего их король идет по треугольнику, изображеному на рисунке (маневрирует на тыловых полях b2 и c2). Надежды черных на спасение в том, чтобы построить аналогичный треугольник для своего короля.

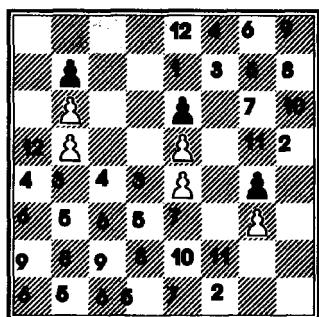
При белом короле на c2 (b2) черный не может стоять на c7 (d7) из-за ♔ c3 и ♔ d4 с выигрышем, т. е. треугольник c7-d7-d6 черных не устраивает. Поскольку треугольником c5-c6-d6 они вообще не располагают (поле c5 под контролем), остается лишь треугольник d6-d5-c6. Но при короле на d5 (c6) белые ставят своего короля соответственно на c3 (b3) и берут верх.

3. ♔ c2. Можно начать и с другой вершины треугольника – b2. 3... ♔ d6. Или 3... ♔ d5 4. ♔ c3 ♔ e5 5. ♔ b3 и 6. a4. 4. ♔ b2! ♔ c6 5. ♔ b3 ♔ b6. На 5... ♔ d6 решает 6. a4. 6. ♔ c3 ♔ c6 7. ♔ d4 ♔ d6 8. a3 ♔ c6 9. ♔ e5 ♔ b6 10. ♔ d5, и все кончено.

Разобравшись в позиции, можно укоротить решение, сразу используя метод треугольника: 1. ♔ c2! ♔ d6 (1... ♔ d4 2. ♔ b3, 1... ♔ d5 2. ♔ c3) 2. ♔ b2! ♔ d5 3. ♔ c3 ♔ c6 4. ♔ d4 и т. д.



a



6

Рис. 201. Теория соответственных полей.

Обратимся к более сложной позиции на рис. 201а. Хотя у белых две лишние пешки, выигрыши совсем не прост. Для анализа подобных положений с блокированной пешечной структурой применяются различные методы с математическими названиями: критические расстояния Бианкетти, координатная система Эберса и др. Общая теория таких окончаний называется теорией соответственных полей. Исследование каждой конкретной позиции можно рассматривать как решение тонкой математической задачи.

Займемся анализом позиции Р. Бианкетти на рис. 201а, отмечая его результаты на рис. 201б. Белые намерены прорваться королем либо через d6, либо через f4, и черный оппонент должен воспрепятствовать обоим планам. Если белый король попал на c5, черному надо встретить его с e7 (при короле на d7 быстро теряется пешка g4), т. е. полю с5 соответствует e7. При белом короле на f4 черный должен успеть на h5 – полю f4 соответствует h5.

Если белый король попал на d4, черному надо занять f7, чтобы на ♕c5 ответить ♕e7, а на ♕e3 – ♕g6. С поля с4 белый король может пойти на c5 или d4, и черный в этом случае должен располагаться на f8, чтобы встать на e7 (при ♕c5) или на f7 (при ♕d4). С d3 возможны ходы ♕c4, ♕d4, ♕e3, и этому полю соответствует g7.

Рассматривая все наиболее важные поля для белого короля и подыскивая поля соответствия для черного, получаем рис. 2016, где соответственные поля обозначены одним и тем же числом. Данное соответствие не является взаимно однозначным, например, четырем полям b1, b3, d1, d3 для белого короля соответствует всего одно g7 – для черного.

Теперь решение находится автоматически: белым надо ставить своего короля на такие поля, соответственные которым черному недоступны за один ход. Так как полю b1 соответствует g7, b2 – h7, a2 – h8, то решает 1. ♔ a2!, и черные не могут занять соответственное. После 1. ♔ b1? ♕ g7! или 1. ♔ b2? ♕ h7! они добиваются ничьей.

Дальнейшая игра проще, вот основной вариант: 1. ♔ a2!! ♕ h7 2. ♔ b2! ♕ g7 3. ♔ b3! ♕ g8 4. ♔ c3! ♕ f8 5. ♔ c4! ♕ f7 6. ♔ d4! По лестнице, изображенной на рис. 201a, белый король совершил восхождение на самую верхнюю ступеньку и теперь прорывается на одном из флангов. Очевидно, с помощью числовой таблицы рис. 2016 при данной пешечной структуре легко оценить позицию при любом положении королей.

До сих пор речь шла о пешечных окончаниях, однако те или иные математические элементы содержатся и в других эндшпиллях, например в ладейных.

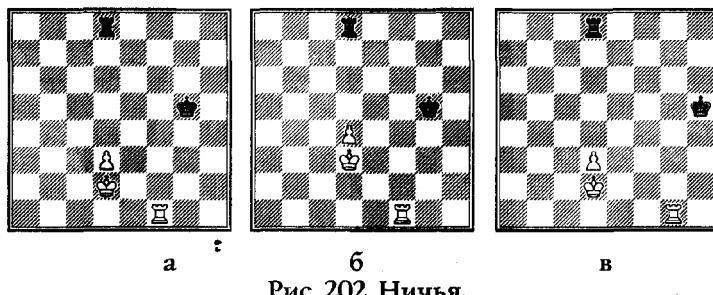


Рис. 202. Ничья.

В чью пользу позиция на рис. 202a? Для оценки таких положений, в которых король слабейшей стороны отрезан от пешки, а ладья атакует ее с фронта, существует простое арифмети-

ческое «правило пяти», состоящее в следующем. Если номер горизонтали, которую занимает пешка, и число вертикалей, отделяющих ее от короля слабейшей стороны, в сумме меньше или равно пяти, то позиция ничейна; если больше пяти — сильнейшая сторона берет верх.

Итак, на рис. 202а ничья, $3+2=5$. Игра протекает так: 1. ♜c3 ♜c8+ 2. ♜b4 ♜d8 3. ♜c4 ♜c8+ 4. ♜b5 ♜d8 5. ♜d1 ♜f6 6. d4 ♜e7 7. ♜c6 ♜c8+, черный король успел подойти к пешке.

Позиция на рис. 202б отличается сдвигом белого короля и пешки на одну вертикаль вверх. Поскольку $4+2=6 > 5$, белые выигрывают: 1. ♜c4 ♜c8+ 2. ♜b5 ♜d8 3. ♜c5 ♜c8+ 4. ♜b6 ♜d8 5. ♜d1 ♜f6 6. ♜c7! ♜d5 7. ♜c6 ♜d8 8. d5, и пешка движется вперед.

Наконец, позиция на рис. 202в отличается от первоначальной сдвигом черного короля на одну вертикаль вправо. Снова $3+3=6 > 5$, и белые выигрывают: 1. ♜c3 ♜c8+ 2. ♜d4 ♜d8+ 3. ♜e4 ♜e8+ 4. ♜f5 ♜f8+ 5. ♜e6 ♜d8 6. ♜d1 ♜d4 7. ♜e5 ♜d8 8. d4 и т. д.

Конечно, в окончаниях «ладья с пешкой против ладьи» правило пяти применимо и для позиций со слоновой или коневой пешкой.

Рассмотрим еще один, более хитрый ладейный эндишиль, возникший в шестой партии полуфинального матча претендентов (Лондон, 1983) — рис. 203.

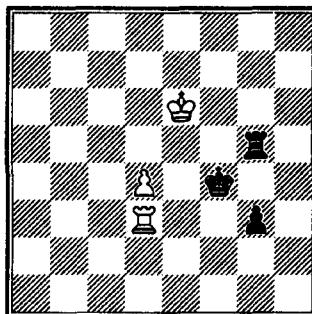


Рис. 203. Корчной — Каспаров.

В трудном положении белые сделали естественный ход 1. $d5$ – в принципе, пешка должна идти вперед. Если теперь 1... $g2?$, то 2. $\mathbb{Q}d4+! \mathbb{Q}f3$ 3. $\mathbb{Q}d1 g1\mathbb{Q}$ 4. $\mathbb{Q}:g1 \mathbb{Q}:g1$ 5. $d6$ с ничьей.

Однако промежуточный шах 1... $\mathbb{Q}g6+!$ разрушил все надежды Корчного. Только после 2. $\mathbb{Q}e7$ (2. $\mathbb{Q}f7 g2$ 3. $\mathbb{Q}d1 \mathbb{Q}d6$ с неотвратимой угрозой 4. $\mathbb{Q}:d5$) пешка тронулась с места – 2... $g2$ 3. $\mathbb{Q}d1 \mathbb{Q}e5$ 4. $d6 \mathbb{Q}e6+$ 5. $\mathbb{Q}d7 \mathbb{Q}:d6+$ 6. $\mathbb{Q}:d6 g1\mathbb{Q}$. Ферзь легко справляется с ладьей, и белые вскоре сдались.

Значит, позиция выиграна для черных? Нет, оказывается, Корчной мог этюдно спастись посредством 1. $\mathbb{Q}d1$! Изюминка этого маневра состоит в том, что черному королю пока недоступно поле $e5$ – пешка d проявила сдержанность и сохранила контроль над ним. Чтобы попасть на желанное поле, король вынужден двигаться по треугольнику $f4-e4-e5$, теряя драгоценное время: 1... $\mathbb{Q}e4$ 2. $d5 \mathbb{Q}g6+$ 3. $\mathbb{Q}e7 \mathbb{Q}e5$. Итак, белые выиграли важный темп, которого им так не хватило в партии – в ней черная пешка уже попала на $g2$. Теперь же 4. $d6$ ведет к простой ничьей.

В пешечных окончаниях король, перемещаясь по определенному треугольнику, добивается победы; в данном же случае, наоборот, вынужденный двигаться по треугольнику, он упускает ее.

Ничья позволяла Корчному сохранить лидерство, а поражение надломило его. Будущий чемпион мира Каспаров сравнял счет и, воодушевленный успехом, преобразился, вслед за этой победой одержал еще три. Матч был убедительно выигран. И не исключено, что судьбу его решил тот самый «бермудский треугольник», скрытый в самом центре доски.

Различные геометрические мотивы используются также в шахматных комбинациях, этюдах и задачах: завлечение, отвлечение, перекрытие, перегрузка, связка, рентген и др. Маршруты фигур могут быть самые разнообразные: лестницы, виражи, змейки, винты, звездочки, маятники, ромбы, квадраты, треугольники, окружности и др. Задачные темы Новотно-

го, Гrimpoу, Плахутты и др., знакомые опытным решателям, основаны на геометрических соображениях.

Ограничимся одним практическим примером, но зато из матча на первенство мира (1954 г., финал 12-й партии) — рис. 204.

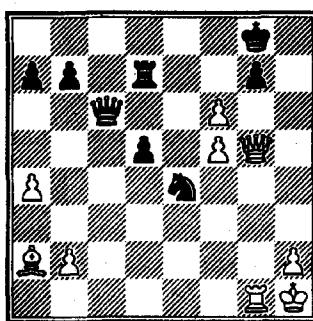


Рис. 204. Ботвинник — Смыслов.

Конь только что стоял на с5. После взятия белыми пешки — e5:f6 и промежуточного ♜c5-e4 Смыслов был настроен весьма оптимистично. Действительно, при отступлении ферзя конь берет на f6, и все пешки белых безнадежно слабы. Но черных ждет неприятный сюрприз.

1. f7+! Белые выигрывают благодаря красивым геометрическим мотивам. Королем бить пешку нельзя из-за 2. ♛g7+ (пересечение седьмой горизонтали и линии «g»!), а на 1...♜:f7, случившееся в партии, решило 2. ♛d8+ ♜h7 3. ♜d5 (пересечение вертикали «d» и диагонали a2-g8!) 3...♜f2+ 4. ♛g2 ♛:f6 5. ♛:f2 ♜:f5+ 7. ♜f3 ♜f4 8. ♜g4. Черные сдались.

Геометрические нюансы встречаются и в других главах книги. А сейчас мы снова вернемся к пешечным окончаниям и еще раз убедимся в необычной геометрии шахматной доски.

Этюд Р. Рети на рис. 205 (1921 г.) поражает каждого, кто знакомится с ним впервые.

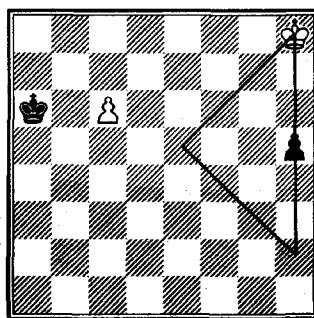


Рис. 205. Ничья.

Черный король в двух шагах от неприятельской пешки, а его собственная как будто неудержимо мчится вперед. И все же белые догоняют ее! Разумеется, при прямолинейном маршруте – 1. ♔ h7 h4 2. ♔ h6 h3 и т. д. – толку мало. Но король совершает весьма неожиданный и парадоксальный маневр.

1. ♔ g7! h4 2. ♔ f6! ♔ b6. После 2...h3 3. ♔ e7 h2 4. c7 ♔ b7 5. ♔ d7 пешки становятся ферзями одновременно. 3. ♔ e5! ♔ :c6. Вновь 3...h3 4. ♔ d6 h2 5. c7 ♔ b7 6. ♔ d7 ведет к появлению на доске двух ферзей. 4. ♔ f4 h3 5. ♔ g3 h2 6. ♔ :h2, и пешку удалось настигнуть на пороге ее превращения. Невероятное стало очевидным.

Как же белым удалось спастись? Все дело в необычной геометрии шахматной доски. Мы привыкли к тому, что кратчайший путь между двумя пунктами, двумя точками измеряется по прямой. Да, в реальной жизни действуют законы евклидовой геометрии! Однако в шахматах кратчайшее расстояние между двумя полями необязательно прямая. Так, в нашем примере король может преодолеть путь между полями h8 и h2 за шесть ходов как при прямолинейном, так и при зигзагообразном движении. Выбирая «кривой» путь, белые выигрывают время, вынуждая короля черных сделать два лишних хода, в результате чего их пешка теряет скорость.

Любопытно, что из 51 шестиходового пути короля с h8 до h2 спасает лишь один! Можно сказать, что с точки зрения ко-

роля сумма катетов прямоугольного треугольника h8-e5-h2 равна его гипотенузе (рис. 205). Такую математическую теорему можно доказать только на шахматной доске... (Напомним, что выше мы уже обсуждали некоторые математические вопросы, связанные с кратчайшим путешествием короля на шахматной доске).

Пешечный квартет Рети в свое время произвел настоящую сенсацию в шахматном мире. Необычная геометрическая идея, которая так и называется «маневр Рети», неоднократно совершенствовалась, углублялась, но по чистоте формы и лаконичности материала оригинал превзойти невозможно.

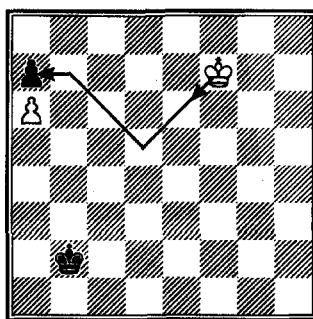


Рис. 206. Выигрыши.

В позиции на рис. 206 цель белых не ничья, а победа. Пешка a7 беззащитна, и единственный шанс черных заключается в том, чтобы на неизбежное ♜a7 прижать неприятельского короля к краю доски посредством ♜c7. Кратчайшая дорога белого короля к a7 занимает пять ходов, причем существуют 30 способов преодолеть этот путь так быстро. Но цели достигает единственный – показанный на рисунке.

1. ♜e6! ♜c3 2. ♜d5!! Этот маневр называется «отталкивание плечом». Черного короля слегка оттолкнули, он вынужден сделать шаг на месте и уже не успевает прибыть к месту событий. 2...♜b4 3. ♜c6 ♜a5 4. ♜b7 ♜b5 5. ♜a7 ♜c6 6. ♜b8, и пешка становится ферзем.

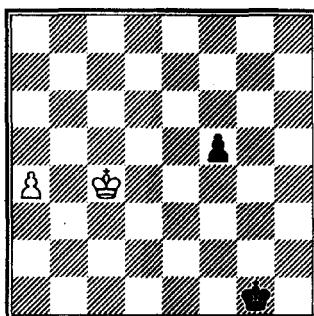


Рис. 207. Корчной — Карпов.

Позиция на рис. 207 могла возникнуть при доигрывании 19-й партии финального матча претендентов 1974 г., закончившейся победой белых. Все корреспонденты, ссылаясь на данное положение, передали в свои газеты сообщение, будто черные упустили этюдную возможность спастись. При этом предлагался такой вариант в духе этюда Рети: 1. ♕d4 ♕f2 2. ♕e5 (иначе пешка f идет вперед) 2... ♕e3! 3. ♕f5 (снова грозило f5-f4) 3... ♕d4, и король в квадрате.

Черные действительно могли добиться ничьей, но как раз до перехода в пешечный эндшпиль. А в партии белые эффективно побеждали рассмотренным выше способом.

1. ♕d3! ♕h2! Упорнее, чем 1... ♕f2 (при 1... ♕g2 король сразу попадал под будущий шах) 2. a5 f4 3. a6 f3 4. a7 ♕g1 5. a8♕ f2 6. ♕g8+ ♕h1 7. ♕e2.

2. a5 f4 3. a6 f3 4. ♕e3! Черного короля весьма своевременно удается увлечь на поле g2: 4... ♕g2 5. a7 f2 6. a8♕+ и т. д.

Спустя семь лет после своего открытия Рети придумал еще более парадоксальное оформление сюжета (рис. 208).

На сей раз единственная белая пешка противостоит трем связанным проходным соперника!

1. ♕g6 ♕b6. Или 1... h5 2. ♕g7 h4 3. ♕f6, 1... f5 2. ♕g7 f4 3. ♕f6 f3 4. ♕e7 с ничьей.

1... ♕g7 h5. Не меняет дела 2. f5 3. ♕f6 f4 4. ♕e5 f3 5. ♕d6. 3. ♕f6 h4 4. ♕e5 с известным финалом.

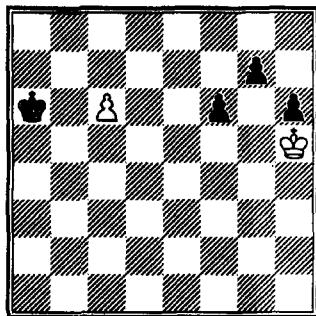


Рис. 208. Ничья.

Этюд М. Зинара на рис. 209 поднял геометрическую идею Рети на новый уровень...

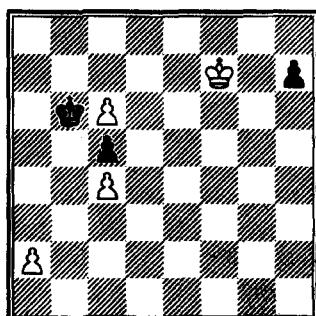


Рис. 209. Ничья.

И здесь кажется, что пешку **h** легко задержать, но после 1. ♕f6? ♜:c6 2. ♕g5 ♜b6 3. ♕h6 ♜a5 4. ♕:h7 ♜b4 5. ♕g6 ♜:c4 6. ♕f5 ♜c3 7. ♕e5 c4 8. a4 ♜b4 черные берут верх.

1. ♕g7!! Удивительно, но белые подгоняют проходную пешку противника: 1...h5 2. ♕f6! h4 3. ♕e5! ♜:c6 4. ♕f4 ♜b6 5. ♕g4 ♜a5 6. ♕:h4 ♜b4. Белый король находится не на h7 (как случилось бы при неудачном вступлении 1. ♕f6), а на h4, что весьма существенно.

7. $\mathbb{Q}g3!!$ Проигрывает 7. $\mathbb{Q}g4 - 7... \mathbb{Q}c4 8. \mathbb{Q}f3 \mathbb{Q}d3! 9. a4 c4$
10. a5 c3 11. a6 c2 12. a7 c1 \blacksquare 13. a8 \blacksquare $\mathbb{Q}h1+$.

7... $\mathbb{Q}c4$ 8. $\mathbb{Q}f2!$ Но не 8. $\mathbb{Q}f3? \mathbb{Q}d3$ 9. a4 c4 10. a5 c3 11. a6 c2
12. a7 c1 \blacksquare 13. a8 \blacksquare $\mathbb{Q}h1+$ – решает диагональный пристрел.

8... $\mathbb{Q}c3$ 9. $\mathbb{Q}e2!$ Заключительная тонкость: после 9. $\mathbb{Q}e1$ (e3) черная пешка превращается с шахом. 9... c4 10. a4. Ничья.

Интересный этюд, но Э. Погосянц удлинил решение на несколько ходов (рис. 210).

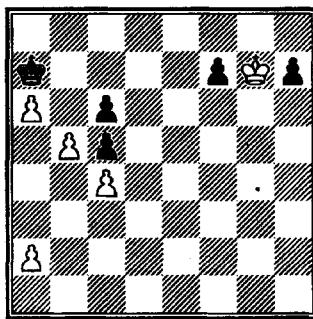


Рис. 210. Ничья.

1. bc! Пешки неожиданно разъединяются, после 1. a4 черные легко берут верх. 1... $\mathbb{Q}b6!!$ В случае 1... $\mathbb{Q}:a6$ белых спасает маневр Рети: 2. $\mathbb{Q}:h7 \mathbb{Q}b6$ 3. $\mathbb{Q}g7 f5$ 4. $\mathbb{Q}f6 f4$ 5. $\mathbb{Q}e5 f3$ 6. $\mathbb{Q}d6 f2$ 7. c7 с ничьей.

2. a7!! Отвлечение: грозило 2... $\mathbb{Q}:c6$.

2... $\mathbb{Q}:a7$ 3. $\mathbb{Q}:f7!!$ Красив и ложный след: 3. $\mathbb{Q}:h7? f5$ 4. $\mathbb{Q}g6 f4$ 5. $\mathbb{Q}f5$ (5. $\mathbb{Q}f6 \mathbb{Q}b8!$ – еще один нюанс) 5... f3 6. $\mathbb{Q}e6 f2$ 7. c7 f1 \blacksquare 8. c8 \blacksquare $\mathbb{Q}h3+$.

3... $\mathbb{Q}b6$. Наконец перед нами позиция на рис. 17. 4. $\mathbb{Q}g7!!$, и белый король начинает творить чудеса.

В заключение остановимся еще на одном примере из матча на первенство мира (1951 г.), в котором тоже проявилась своеобразная геометрия шахматной доски (рис. 211).

В шестой партии давнего матча легко делало ничью 1. $\mathbb{Q}e6+$ и 2. $\mathbb{Q}d4$. Но Бронштейн решил сначала подойти королем к

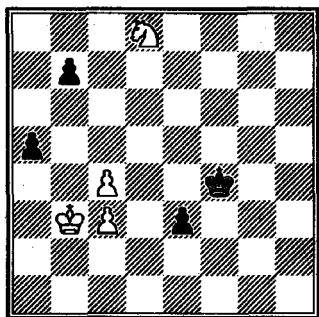


Рис. 211. Бронштейн — Ботвинник.

пешке и сыграл 1. ♕c2. Конечно, гроссмейстер понимал, что черный король в состоянии появиться на поле f2, но, наверное, рассматривал лишь прямолинейный маршрут ♕f4-f3-f2, полагая, что и тогда успеет подтянуть коня. Каково же было его изумление, когда неприятельский король действительно направился к полю f2, но не по прямому пути, а по зигзагу!

После 1... ♕g3!! белые сразу сдались, так как пешка неудержима: 2. ♔e6 e2, и белый конь попадает на d4 без шаха (3. ♔d2 ♕f2!).

Примечательно, что победу черным обеспечил именно хитрый маневр короля ♕f4-g3-f2, а прямолинейное движение вело к ничьей! После 1... ♕f3? 2. ♔f7! (недостаточно 2. ♔e6 e2 3. ♔d4+ ♕f2 4. ♔e2 ♕e2 5. ♕b3 — 5. c5 a4! — 5..b6! 6. ♕a4 ♕d3 7. ♕b5 a4! 8. ♕a4 ♕c4 и т. д.) 2...e2 3. ♔e5+ ♕f2 4. ♔d3+ ♕f1 5. ♔b3 e1♕ 6. ♔e1 ♕e1 7. ♕a4 пешечное окончание оказывалось ничейным.

Итак, законы шахматной геометрии утверждены на самой высокой инстанции — в матче за корону.

СИММЕТРИЯ И АСИММЕТРИЯ

Симметрия как общий принцип гармонии в молекулах, кристаллах, живой природе имеет глубокий смысл. Изучение ее проявлений и закономерностей играет важную роль в физике, химии, биологии, математике. С помощью симметрии человек веками пытался объяснить или создать порядок, красоту и совершенство. В повседневной жизни мы тоже постоянно сталкиваемся с мотивами симметрии. Орнаменты, мозаика, декоративные узоры восхищают наш взор четкой геометрией, симметричным расположением рисунка. Господствует симметрия и в гравюрах знаменитого голландского художника Эшера, в том числе шахматных.

Разнообразные мотивы симметрии (и асимметрии!) встречаются и на шахматной доске. С одной стороны, речь идет о симметрии естественной, возникающей в процессе самой партии, а с другой — используемой в задачах и этюдах, необычных позициях. Симметрией прежде всего обладает исходное расположение фигур. Симметричны и все старинные дебютные табии, например, уже упомянутая альмуджанна (рис. 1 в самой первой главе). Но пусть партия началась, и черные в точности копируют ходы белых, желая подольше сохранить симметрию на доске...

Известен такой забавный случай. Некто явился в шахматный клуб и заявил, что нашел верный способ никогда не проигрывать черными. «Каким образом?» — спросили его. «Очень просто, — ответил гость, — повторяя ходы противника!» Сыграть с наивным изобретателем вызвался Сэм Лойд, и через четыре хода на доске стоял мат. Правда, каким из трех способов — 1. $c4 c5$ 2. $\mathbb{Q}a4 \mathbb{Q}a5$ 3. $\mathbb{Q}c6 \mathbb{Q}c3$ 4. $\mathbb{Q}:c8X; 1. d4 d5 2. \mathbb{Q}d3 \mathbb{Q}d6 3. \mathbb{Q}h3 \mathbb{Q}h6 4. \mathbb{Q}:c8X$ или 1. $d4 d5 \mathbb{Q}d3 \mathbb{Q}d6$

3. $\mathbb{W}f5 \mathbb{W}f4$ 4. $\mathbb{W}:c8X$ — был заматован черный король, история умалчивает.

Партии, в которых черные повторяют ходы белых, называются обезьяными. Копирование ходов к добру не ведет, но интересно, как быстро белые могут поставить мат той или иной фигурой, зная о такой принципиальности партнера. Про ферзя мы уже знаем. Для остальных фигур обезьяны партии с матовым финалом впервые предложил Тракслер еще в начале XX в. В дальнейшем были установлены абсолютные рекорды.

Ладья: 1. $\mathbb{Q}f3 \mathbb{Q}f6$ 2. $\mathbb{Q}g5 \mathbb{Q}g4$ 3. $\mathbb{Q}:h7 \mathbb{Q}:h2$ 4. $\mathbb{Q}:f8 \mathbb{Q}:f1$ 5. $\mathbb{Q}g6 \mathbb{Q}g3$. Танец коней закончился (рис. 212).

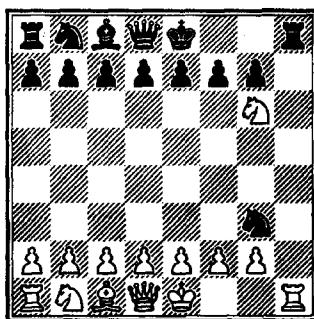


Рис. 212. Симметричная позиция.

6. $\mathbb{Q}:h8X$.

Белопольный слон: 1. $e4 e5$ 2. $f4 f5$ 3. $ef ef$ 4. $f6 f3$ 5. $fg fg$ 6. $\mathbb{Q}e2 \mathbb{Q}e7$ 7. $\mathbb{Q}h5X$.

Чернопольный слон: 1. $d4 d5$ 2. $\mathbb{Q}d2 \mathbb{Q}d7$ 3. $\mathbb{Q}d3 \mathbb{Q}d6$ 4. $\mathbb{Q}e3 \mathbb{Q}e6$ 5. $c3 c6$ 6. $\mathbb{Q}d2 \mathbb{Q}d7$ 7. $\mathbb{Q}f4X$.

Конь: 1. $\mathbb{Q}c3 \mathbb{Q}c6$ 2. $\mathbb{Q}e4 \mathbb{Q}e5$ 3. $e3 e6$ 4. $\mathbb{Q}e2 \mathbb{Q}e7$ 5. $g3 g6$ 6. $\mathbb{Q}f6X$.

Пешка: 1. $g4 g5$ 2. $h4 h5$ 3. $\mathbb{Q}f3 \mathbb{Q}f6$ 4. $\mathbb{Q}e5 \mathbb{Q}e4$ 5. $hg hg$ 6. $g6 g3$ 7. gfX .

Наконец, на девятом ходу матует и сам король: 1. $d3 d6$ 2. $\mathbb{Q}d2 \mathbb{Q}d7$ 3. $\mathbb{Q}c3 \mathbb{Q}c6$ 4. $\mathbb{Q}b3 \mathbb{Q}b6$ 5. $\mathbb{Q}a3 \mathbb{Q}a6$ 6. $\mathbb{Q}e3 \mathbb{Q}e6$ 7. $\mathbb{Q}b6 \mathbb{Q}b3$ 8. $ab ab$ (рис. 213) 9. $\mathbb{Q}b4X$.

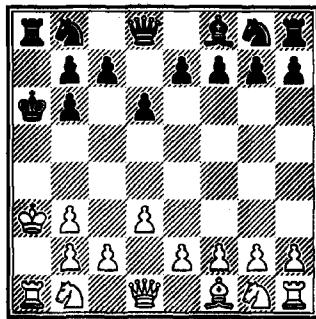


Рис. 213. За ход до мата.

Две необычные диаграммы придумал гроссмейстер по композиции Г. Каспарян (рис. 214, 215). Обе симметричные картинки требуется получить из начальной расстановки фигур, причем как можно быстрее.

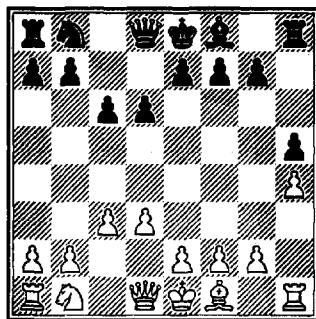


Рис. 214. За сколько ходов?

Первая позиция (рис. 214) возникает через семь ходов, причем при симметричной игре: 1. d3 d6 2. c3 c6 3. h4 h5 4. ♜h3 ♜h6 5. ♜:h6 ♜:h3 6. ♜:h3 ♜:h6 7. ♜h1 ♜h8.

Глядя на вторую позицию (рис. 215), можно решить, что это просто копия первой, но с опечатками: ладьи перепутали свои места. Однако ошибок нет, правда, эта симметричная расстановка возникает гораздо позже – на 24-м ходу (и не все

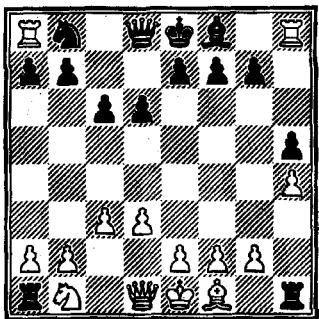


Рис. 215. Путаница на доске.

ходы обезьяны): 1. $h4$ $h5$ 2. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}f6$ 3. $\mathbb{Q}e5$ $\mathbb{Q}e4$ 4. $\mathbb{Q}c6$ $\mathbb{Q}c3$ 5. $d\text{c}$ $d\text{c}$ 6. $\mathbb{W}d4$ $\mathbb{W}d5$ 7. $\mathbb{W}a4$ $\mathbb{W}a5$ 8. $\mathbb{Q}f4$ $\mathbb{Q}f5$ 9. $\mathbb{Q}a3$ $\mathbb{Q}a6$ 10. $\mathbb{Q}d1$ $\mathbb{Q}d8$ 11. $\mathbb{Q}d6$ $\mathbb{Q}h6$ 12. $\mathbb{Q}e6$ $\mathbb{Q}d2$ 13. $\mathbb{Q}h3$ $\mathbb{Q}g6$ 14. $\mathbb{Q}d3$ $\mathbb{Q}g3$ 15. $\mathbb{Q}h6$ $\mathbb{Q}h3$ 16. $\mathbb{Q}h8$ $\mathbb{Q}h1$ 17. $\mathbb{Q}d7$ $\mathbb{Q}d3$ 18. $\mathbb{Q}d6$ cd 19. cd $\mathbb{W}d8$ 20. $\mathbb{W}d1$ $\mathbb{Q}c2$ 21. $\mathbb{Q}c7$ $\mathbb{Q}c1$ 22. $\mathbb{Q}c8$ $\mathbb{Q}a1$ 23. $\mathbb{Q}a8$ $\mathbb{Q}b8$ 24. $\mathbb{Q}b1$.

А встречаются ли обезьяны партии в реальной жизни? Вот один из достопримечательных примеров такого рода (сражение происходило в начале XX в.).

Г. Ротлеви – М. Эльянов

Дебют четырех коней

1. $e4$ $e5$ 2. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}f6$ 3. $\mathbb{Q}c3$ $\mathbb{Q}c6$ 4. $\mathbb{Q}b5$ $\mathbb{Q}b4$ 5. $0-0$ $0-0$ 6. $d3$ $d6$ 7. $\mathbb{Q}:c6$ $\mathbb{Q}:c3$ 8. $\mathbb{Q}:b7$ $\mathbb{Q}:b2$ 9. $\mathbb{Q}:a8$ $\mathbb{Q}:a1$ 10. $\mathbb{Q}g5$ $\mathbb{Q}g4$ 11. $\mathbb{W}:a1$ $\mathbb{W}:a8$ 12. $\mathbb{Q}:f6$ $\mathbb{Q}:f3$ 13. $\mathbb{Q}:g7$ $\mathbb{Q}:g2$ 14. $\mathbb{Q}:f8$ $\mathbb{Q}:f1$ 15. $\mathbb{W}:f1$ $\mathbb{W}:f8$ 16. $\mathbb{W}g2+$ $\mathbb{W}g7$ (рис. 216).

В этой позиции противники, видимо, опасаясь нарушить симметрию, согласились на ничью. Удачный для черных финал! А спустя несколько лет в партии Тракслер – Шаманек после полного повторения 12 ходов белые почувствовали, что партнер будет действовать симметрично до самого конца, и нашли способ обмануть его: 13. $\mathbb{Q}:e5$ $\mathbb{Q}:e4$ 14. $\mathbb{Q}:g7$ $\mathbb{Q}:g2$ 15. $\mathbb{Q}:f8$ $\mathbb{Q}:f1$. И тут последовало «неожиданное» 16. $\mathbb{W}g7X$.

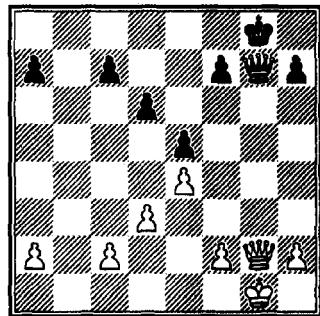


Рис. 216. Сколько можно обезьянничать?

В следующей партии, которая игралась уже в наши дни, симметрия поддерживалась 19 ходов (не считая одного сбоя на седьмом ходу).

Столяр – Шукшта

Английское начало

1. c4 c5 2. g3 g6 3. ♜g2 ♜g7 4. ♜c3 ♜c6 5. a3 a6 6. ♜b1
 ♜b8 7. b4 cb 8. ab b5 9. cb ab 10. ♜h3 ♜h6 11. 0-0 0-0 12. d4
 d5 13. ♜:h6 ♜:h3 14. ♜:g7 ♜:g2 15. ♜:f8 ♜:f1 16. ♜:e7 ♜:e2
 17. ♜:d8 ♜:d1 18. ♜c7 ♜c2 19. ♜b2 ♜b7 (рис. 217).

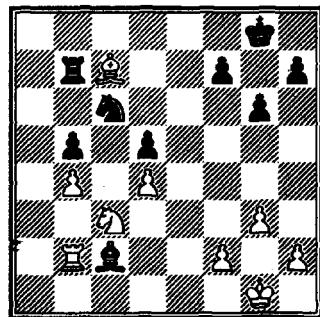


Рис. 217. Симметрия до самого эндшпилля.

20. ♜e5 ♜:e5. Опасно симметричное 20. ♜e4 21. ♜:e4 ♜:e5 из-за 22. ♜f6+ и 23. de. После 21. de d4 22. ♜c2 ♜c7 23. ♜f1

$g5$ 24. $\mathbb{Q}e2$ dc 25. $\mathbb{Q}d3$ $\mathbb{Q}c4$ 26. $\mathbb{Q}:c3$ $\mathbb{Q}:b4$ 27. $\mathbb{Q}c7$ партнеры заключили мир.

Впечатление такое, будто при дублировании ходов черные в лучшем случае добиваются ничьей. Но, как ни странно, повторяя ходы партнера, они имеют шансы уже на восьмом ходу— объявить мат белому королю.

1. $e4$ $e5$ 2. $\mathbb{Q}e2$ $\mathbb{Q}e7$ 3. $\mathbb{Q}e3$ $\mathbb{Q}e6$ 4. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}f6$ 5. $\mathbb{Q}e2$ $\mathbb{Q}e7$ 6. $b3$ $b6$ 7. $\mathbb{Q}a3$ $\mathbb{Q}a6$ (рис. 218) 8. $\mathbb{Q}d4+$, и у черных нет выбора: 8... $edX!$

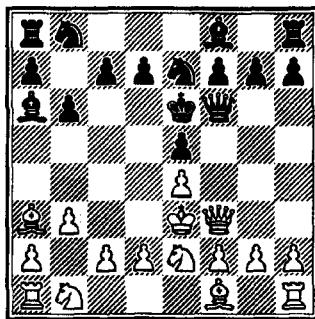


Рис. 218. Кто выигрывает?

Занятно, но белый король матуется и при центрально-симметричных действиях черных, причем всего за семь ходов (А. Ханян).

1. $c3$ $f6$ 2. $e3$ $d6$ 3. $\mathbb{Q}e2$ $\mathbb{Q}d7$ 4. $\mathbb{Q}a3$ $\mathbb{Q}h6$ 5. $\mathbb{Q}b5$ $\mathbb{Q}g4$ 6. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}e5$ 7. $\mathbb{Q}e6$ $\mathbb{Q}d3X!$ (рис. 219).

Итак, при обезьяньей игре черные могут и сами получить мат, и поставить мат сопернику. В любом случае заматованной оказывается только одна сторона. А вот пат может быть взаимным. Самые быстрые патовые партии мы уже рассматривали, а сейчас приведем симметричные рекорды. В следующем примере ходы повторяют то черные, то белые, но, главное, в эпилоге двигаться не в состоянии ни одна из сторон.

1. $e4$ $d5$ 2. $e5$ $d4$ 3. $c3$ $f6$ 4. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}f7$ 5. $\mathbb{Q}b7$ $\mathbb{Q}d5$ 6. $\mathbb{Q}d1$ $\mathbb{Q}:g2$ 7. $\mathbb{Q}c2$ $\mathbb{Q}:f1$ 8. $\mathbb{Q}:c8$ $\mathbb{Q}:g1$ 9. $\mathbb{Q}:b8$ $\mathbb{Q}:b8$ 10. $\mathbb{Q}:g1$ $\mathbb{Q}b3$ 11.

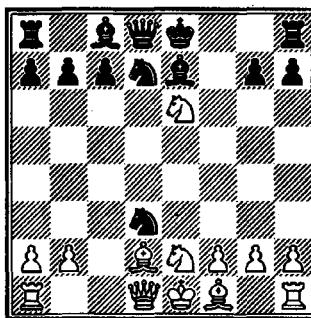


Рис. 219. Опасная симметрия.

$\mathbb{Q}g6 \mathbb{Q}a3$ 12. $\mathbb{Q}h6 gh$ 13. $ba \mathbb{Q}g7$ 14. $\mathbb{Q}b2 d3$ 15. $e6 a5$ 16. $h4 a4$ 17. $h5 c5$ 18. $f4 c4$ 19. $f5$, и на доске взаимный пат (рис. 220).

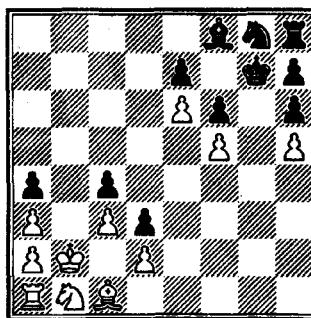


Рис. 220. Взаимный пат.

А если черные копируют ходы белых, то пат, как недавно установил С. Лахтонен, наступает на два с половиной хода позднее: 1. $a4 a5$ 2. $b4 b5$ 3. $ab ab$ 4. $\mathbb{Q}c3 \mathbb{Q}c6$ 5. $bc bc$ 6. $\mathbb{Q}a4 \mathbb{Q}a5$ 7. $\mathbb{Q}e4 \mathbb{Q}e5$ 8. $d4 d5$ 9. $de de$ 10. $\mathbb{Q}f3 \mathbb{Q}f6$ 11. $ef ef3$ 12. $h4 h5$ 13. $\mathbb{Q}h3 \mathbb{Q}h6$ 14. $\mathbb{Q}:h6 \mathbb{Q}:h3$ 15. $gh gh$ 16. $e4 e5$ 17. $\mathbb{Q}d4 \mathbb{Q}d5$ 18. $ed ed$ 19. $d6 d3$ 20. $\mathbb{Q}e2 \mathbb{Q}e7$ 21. $de de$. Снова пат белым и черным (рис. 221).

Предыдущая патовая позиция отличалась центральной симметрией, а здесь симметрия осевая. Но кому больше нравится «центральный пат» предлагаем еще одну интересную

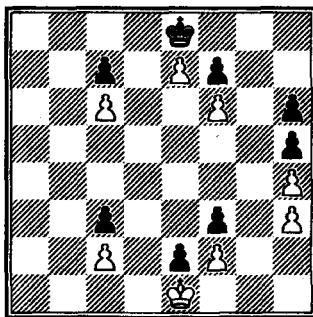


Рис. 221. Странный пат.

партию — она на четыре хода длиннее; черные отвечают центрально-симметрично, к тому же с доски исчезает всего по одному коню.

1. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}c6$ 2. $\mathbb{Q}c3$ $\mathbb{Q}f6$ 3. $\mathbb{Q}b5$ $\mathbb{Q}g4$ 4. $h3$ $a6$ 5. $\mathbb{Q}a7$ $\mathbb{Q}h2$ 6. $\mathbb{Q}:h2$ $\mathbb{Q}:a7$ (первый и последний размены) 7. $g4$ $b5$ 8. $\mathbb{Q}g2$ $\mathbb{Q}b7$ 9. $e4$ $d5$ 10. $\mathbb{Q}e2$ $\mathbb{Q}d7!$ 11. $\mathbb{Q}g1$ $\mathbb{Q}b8!$ Расположение королей и ферзей до начала игры, очевидно, обладает осевой симметрией, но не центральной, и только теперь на доске установлен полный порядок. 12. $b4$ $g5$ 13. $\mathbb{Q}b2$ $\mathbb{Q}g7$ 14. $\mathbb{Q}f1$ $\mathbb{Q}c8$ 15. $\mathbb{Q}d4$ $\mathbb{Q}e5$ 16. $f3$ $c6$ 17. $\mathbb{Q}f2$ $\mathbb{Q}c7$ 18. $\mathbb{Q}e1$ $\mathbb{Q}d8$ 19. $\mathbb{Q}f2$ $\mathbb{Q}c7$ 20. $a4$ $h5$ 21. $a5$ $h4$ 22. $c4$ $f5$ 23. $c5$ $f4$ 24. $e5$ $d4$ 25. $e6$ $d3$. Пат двум королям! (рис. 222).

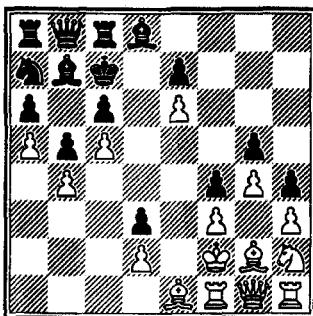


Рис. 222. Обоюдный пат.

Игра заканчивается вничью и при голых королях, причем, как мы знаем, через 16 с половиной ходов. Чуть дольше длится абсолютно симметричная партия с тем же финалом: 1. d4 d5 2. ♜d3 ♜d6 3. ♜:h7 ♜:h2 4. ♜:h8 ♜:h1 5. ♜:g7 ♜:g2 6. ♜:g8 ♜:g1 7. f4 f5 8. ♜:d5 ♜:d4 9. ♜:f5 ♜:f4 10. ♜:f4 ♜:f5 11. ♜:c7 ♜:c2 12. ♜:b8 ♜:b1 13. ♜:a7 ♜:a2 14. b3 b6 15. ♜:b6 ♜:b3 16. ♜:d1 ♜:d8 17. ♜:d8 ♜:d1 18. ♜:e7 ♜:e2 19. ♜:f8 ♜:f1 20. ♜:f1 ♜:f8 (А. Ханян).

Благодаря мотивам симметрии (и асимметрии!) шахматные задачи и этюды приобретают дополнительное изящество.

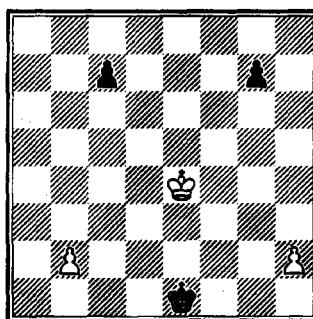
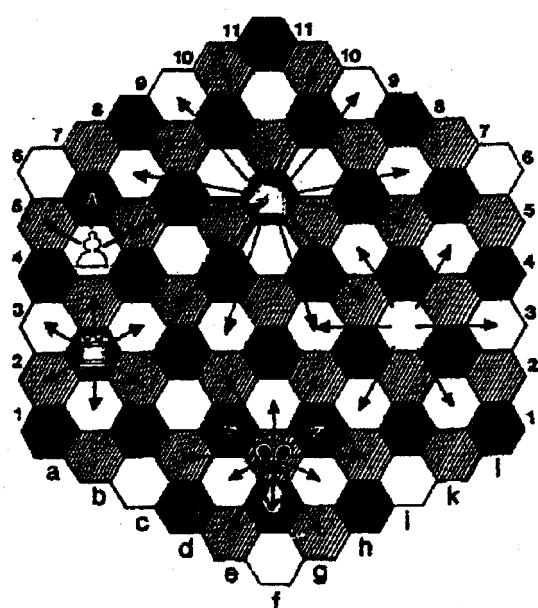


Рис. 223. Выигрыш.

В этюде Г. Адамсона на рис. 223 одна из белых пешек должна двинуться вперед, но какая? 1. h4! ♜d2 2. ♜d5 ♜c2 3. b4 ♜b3 4. ♜c5 ♜c3 5. b5 ♜b3 6. ♜c6 ♜c4 7. ♜:c7, и белый король отправляется в победный марш на королевский фланг.

А симметричное вступление — ложный след. 1. b4? ♜d2 2. ♜d5 ♜c3 3. ♜c5 g5! 4. h3 ♜b3 5. b5 ♜c3 6. ♜c6 ♜b4 7. ♜:c7 ♜:b5 8. ♜d6 ♜b6 9. ♜e6 ♜c6 10. ♜f6 ♜d7 11. ♜:g5 ♜e8 12. ♜g6 ♜f8, и черные спасаются.

ЛЮДИ И МАШИНЫ



МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

Существует немало систем для проведения шахматных турниров: олимпийская (ее также называют кубковой или нокаут-системой); швейцарская; круговая; матчевая и др. Каждая из них имеет свои математические особенности. Соответственно, придумано немало интересных задач и головоломок, связанных с турнирами.

В Кубке число участников n для удобства обычно представляется степенью двойки $n=2^k$, и он разыгрывается в k этапов — после каждого числа соискателей сокращается вдвое. Так, в чемпионатах мира ФИДЕ, которые около десяти лет проводились по кубковой системе, участвовало 128 сильнейших гроссмейстеров планеты, и за семь этапов ($n=128=2^7$, $k=7$) определялся чемпион. Хотя в кубковой системе есть случайный элемент, победителем, как правило, становится достойный кандидат. Вспомним, что нынешний король Вишн Асанд в 2000 г. был первым на чемпионате мира ФИДЕ по нокаут-системе.

Кстати, автору этой книги еще в 1970-х гг. удалось завоевать первый Кубок Москвы. В нем участвовало 64 шахматиста, и для победы мне пришлось выиграть шесть матчей ($n=64=2^6$, $k=6$), в финале — у международного мастера Анатолия Быховского со счетом 3:1.

В разыгрыши Кубка города участвуют n игроков. Предварительно проводятся Кубки районов (в городе r районов с числом участников n_1, n_2, \dots, n_r), и уже их победители борются за главный приз. На обоих этапах играется одна партия, и проигравший выбывает (при ничьей вперед проходят черные). Сколько всего партий будет сыграно в Кубке города?

Решение этой задачи, как ни странно, короче формулировки. После любой партии из Кубка выбывает ровно один участник, а поскольку в конце концов его покидают $n-1$ участ-

тник — все, кроме победителя, — в общей сложности будет сыграна $n-1$ партия. Ответ не зависит ни от числа районов в городе, ни от распределения игроков в них.

Пусть теперь количество участников n не является степенью двойки, и $2^k < n < 2^{k+1}$. Тогда число этапов равно $k+1$, причем победитель сыграет либо $k+1$ матч, либо k (во втором случае ему повезло с жеребьевкой, он без игры прошел во второй круг). В общем случае, если в Кубке играют n шахматистов, число туров равно $\lceil \log_2 n \rceil$ (квадратные скобки означают наименьшее целое число, большее или равное данному).

Нокаут-систему можно считать объективной, если отношение между силами игроков, как говорят математики, обладает свойством транзитивности: если А сильнее Б, а Б, в свою очередь, сильнее В, то и А сильнее В. При таком предположении система вполне удобна — гроссмейстер (команда), одержавший победы на всех этапах, включая финал, действительно превосходит всех соперников. Другое дело, если в турнире нужно определить не одного, а нескольких лауреатов.

В Кубке участвуют n игроков. Какое наименьшее число партий достаточно сыграть, чтобы определить первого и второго призеров (соперники играют по одной партии, условие транзитивности по-прежнему соблюдается)?

Как мы знаем из предыдущей задачи, для определения победителя Кубка всегда хватает $n-1$ партии. Серебряным призером обычно объявляется тот, кто уступил в финале. На самом деле, его следует выбирать из всех, кого поверг первый призер. Таковых не больше $\lceil \log_2 n \rceil$, и микротурнир между ними позволит установить второго призера. Значит, понадобится еще $\lceil \log_2 n \rceil - 1$ партия. Таким образом, для определения двух призеров Кубка достаточно сыграть $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ партии.

На практике транзитивность соблюдается редко, поэтому применяются другие турнирные системы. Преимущество кубковой заключается в большом числе участников, которые одновременно играют в турнире (точнее, стартуют в нем). Тем же достоинством обладает и швейцарская система, но здесь проигравшие не выбывают, а играют до конца. После каждого

тура участники разбиваются на группы с одинаковым числом очков (после первого тура образуются три группы: 1 очко, 0,5 и 0 и т. д.), и в следующем туре по жеребьевке встречаются партнеры из одной группы (или из соседних).

По швейцарской системе обычно проводятся отборочные турниры, и 9–11 туров вполне хватает, чтобы определить самых достойных. Например, высшая лига чемпионата России в последние годы проходит по швейцарской системе в 11 туров, и шестеро победителей выходят в суперфинал. В открытий турнирах по «швейцарке» иногда играют даже несколько сот шахматистов, и, конечно, идеальной ее тоже нельзя признать.

Самая распространенная и объективная турнирная система – круговая, когда все играют друг с другом. Порядок встреч по турнам и цвет фигур зависит от номеров, которые участники получают по жеребьевке, и указывается в специальных таблицах, составленных Й. Бергером. Клеточки турнирной таблицы заполняются в строгой последовательности, и закономерность видна невооруженным глазом. Обычно число игроков n четно, в первом туре первый играет с n -м, второй с $(n-1)$ -м и т. д. Результаты тура заносятся на большую диагональ. Затем каждый участник, кроме n -го, тур за туром движется по своей строке слева направо. Дойдя до самого себя, он «отвлекается» на одну партию, играет с последним номером, а затем продолжает движение. «Упершись» в крайнюю клетку, перескакивает на первый номер и снова идет вперед.

Несложный математический анализ позволяет вывести простые правила. Если номера двух участников отличны от n , то сложим их. Номер тура, в котором они играют, получается при вычитании 1 из суммы, если она не превосходит n , и вычитании n в противном случае. Если сумма нечетна, то белыми играет меньший номер, если четна, то больший. Например, при 10 участниках второй номер играет с пятым белыми в 6-м туре ($2+5=7$ – нечетное число, меньшее 10; $7-1=6$), а шестой с восьмым – черными в 4-м туре ($6+8=14$ – четное число, большее 10; $14-10=4$).

Расписание последнего номера иное. Чтобы узнать, в каком туре он играет с данным участником, удвоим его номер и из полученного числа вычтем 1, если оно не больше n , и вычтем n в противном случае. С первой половиной номеров n -й играет черными, со второй — белыми. Так, 10-й номер встречается с третьим черными в 5-м туре ($2 \times 3 - 1 = 5$) и белыми с седьмым в 4-м ($2 \times 7 - 10 = 4$).

Если n нечетно, то вводится «фиктивный» участник; встреча с ним означает, что в соответствующем туре шахматист свободен от игры. При четном n игроки первой половины таблицы играют на одну партию белыми больше (за счет «белой» партии с n -м номером), и поэтому при жеребьевке шахматисты предпочитают номера с первого по $n/2$.

Чтобы элемент случайности свести к минимуму, турнир часто проводится в два круга, при этом партнеры играют одну партию белыми и одну черными. Например, в 2005 г. чемпионат мира по классическим шахматам в Сан-Луисе был двухкруговым: в нем участвовало восемь супергроссмейстеров, и победу одержал болгарский гроссмейстер В. Топалов. А в 2007 г. в Мехико восемь сильнейших гроссмейстеров опять разыграли корону по круговой системе, и на сей раз чемпионом мира стал В. Ананд.

По круговой системе проводятся соревнования по многим видам спорта, но такое математически четкое расписание применяется только в шахматах. Ряд участников играют здесь дважды подряд одним цветом. При помощи теории графов доказано, что можно составить расписание, при котором у всех игроков происходит чередование цвета. Однако оно несколько сумбурно и поэтому на практике никогда не применяется.

Кстати, любой круговой турнир можно изобразить в виде графа, вершины которого соответствуют участникам, а ребра — встречам между ними. Если партия результативна, то соответствующее ребро снабжается стрелкой, направленной от победителя к побежденному. Графам турниров посвящено немало математических статей.

Про круговые турниры придумано много интересных задач, и ниже мы рассмотрим некоторые из них. Заметим, что в разных видах спорта очки начисляются по-разному. Так, в футболе уже много лет за выигрыши матча дается 3 очка, за ничью — 1, за проигрыши — 0. Но в шахматах соблюдается давняя традиция: за победу в партии — 1 очко, за ничью — 0,5 и за поражение — 0.

Три шахматиста целый день провели за доской, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое число партий, — получился многокруговой турнир. Стали думать, кто выступил лучше всех. Первый сказал: «У меня больше побед, чем у каждого из вас». Второй уточнил: «А у меня меньше поражений, чем у каждого из вас». Когда же подсчитали очки, оказалось, что третий набрал больше всех очков. Возможно ли такое?

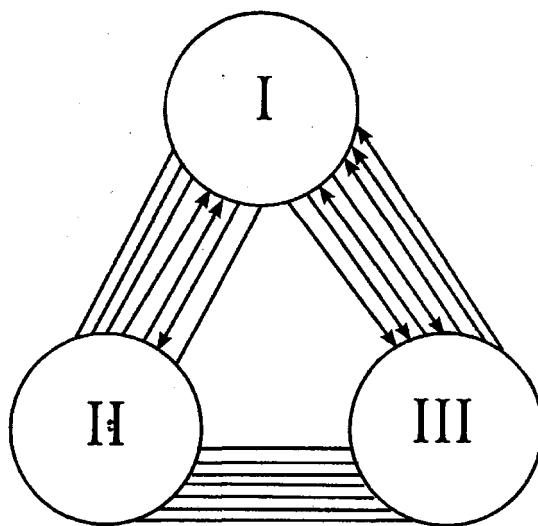


Рис. 224. Турнир трех.

Хотя ситуация кажется нереальной, ответ положительный. Таблицу составить несложно, но еще проще нарисовать граф — рис. 224. Здесь каждые два игрока провели по семь партий. Первый у второго две выиграл и столько же проиграл. С третьим он три выиграл и четыре проиграл. Все остальные встречи закончились вничью. Итак, у первого больше всех побед — пять и при этом 6,5 очков. У второго меньше всех поражений — два и 7 очков, у третьего четыре победы и три поражения, но больше всех очков — 7,5, он и вышел победителем.

Доказать, что после окончания турнира всех его участников можно перенумеровать так, чтобы ни один из них не имел поражения от следующего.

Проведем доказательство методом математической индукции. Для турнира с двумя участниками утверждение очевидно. Пусть теперь оно верно для любого турнира с k игроками. Покажем, что в этом случае в необходимом порядке можно расположить и $(k+1)$ -го. Расположим, как требуется, любых k из них (по предположению, это можно сделать) и посмотрим, как $(k+1)$ -й сыграл с первым. Если он выиграл или сыграл вничью, то поставим его на первое место, а если проиграл, то посмотрим, как он сыграл со вторым, и т. д. Если в конце концов среди упорядоченных k участников найдется такой, у которого $(k+1)$ -й выиграл (а предыдущему проиграл), то поставим его перед ним, в противном случае он займет последнее место. В результате все $k+1$ участников расположатся в необходимом порядке.

В турнире участвуют 10 человек. Могут ли какие-либо трое из них набрать на четыре очка больше, чем остальные семеро?

Трое шахматистов могут набрать самое большое 24 очка (три между собой и 21 очко в других партиях), остальные семеро, проведя между собой $7 \times 6 / 2 = 21$ партию, наберут вместе не меньше 21 очка. Итак, разрыв в 4 очка невозможен.

Какой наибольший разрыв может быть между двумя игроками, занявшими соседние места в турнире с n участниками?

Пусть наибольший разрыв имеют занявшие места s и $s+1$. Первые s сыграли между собой $s(s-1)/2$ партий и набрали

столько же очков. Кроме того, они сыграли $s(n-s)$ партий с занявшими места $s+1, s+2, \dots, n$ и набрали с ними не больше, чем $s(n-s)$ очков. Итак, число очков у первых s игроков не превосходит $s(s-1)/2+s(n-s)=s(2n-s-1)/2$. Поскольку участник с номером s среди первых s игроков занял последнее место, то он набрал не более $s(2n-s-1)/2=s(2n-s-1)/2$ очков.

Участники $s+1, \dots, n$ сыграли между собой $(n-s)(n-s-1)/2$ партий и набрали столько же очков. Занявший $(s+1)$ -е место стал первым среди последних $n-s$ игроков и набрал не менее $(n-s)(n-s-1)/2=(n-s-1)/2$ очков.

Итак, разрыв между игроками s и $s+1$ не превосходит $(2n-s-1)/2-(n-s-1)/2=n/2$. Например, он достигается, если победитель обыграл всех соперников и набрал $n-1$ очко, а остальные закончили между собой все партии вничью и набрали по $(n-2)/2=(n/2-1)$ очков. При этом первый оторвался от остальных на $(n-1)-(n/2-1)=n/2$ очков.

В крупных соревнованиях такой разрыв практически не встречается. Правда, известны случаи (например, в практике Каспарова), когда победитель набирает большой «плюс», а все остальные участники турнира оказываются в «минусе».

В турнире с участием восемь гроссмейстеров все набрали разное число очков. У занявшего второе место столько же, сколько у четырех последних вместе. Как сыграли между собой бронзовый призер и гроссмейстер, занявший седьмое место?

Серебряный призер набрал не больше 6 очков, ведь у него меньше, чем у победителя. У занявших четыре последние места не меньше 6 очков (столько они набрали, встречаясь друг с другом). Таким образом, у второго призера ровно 6 очков, а четыре аутсайдера ничего не отобрали у занявших более высокие места. Отсюда следует вывод, что бронзовый призер обыграл занявшего седьмое место! А восстанавливать турнирную таблицу вовсе не требуется.

В турнире с участием n гроссмейстеров и мастеров каждый набрал половину очков, играя с мастерами. Доказать, что n – квадрат целого числа.

Пусть a – число мастеров, а b – число гроссмейстеров. Мастера разыграли между собой $a(a-1)/2$ очков, а так как это половина их очков, столько же они набрали и против гроссмейстеров. Аналогично, гроссмейстеры, как между собой, так и мастерами, набрали $b(b-1)/2$ очков. Значит, мастера и гроссмейстеры друг с другом набрали $a(a-1)/2+b(b-1)/2$ очков. С другой стороны, число партий между старшими и младшими по званию равно ab , столько очков между ними и разыгрывается. Итак, $a(a-1)/2+b(b-1)/2=ab$, или, после упрощений, $a+b=(a-b)^2$. Так как $n=a+b$, то n – квадрат целого числа.

В турнире было сыграно 55 партий. Два участника выбыли из него, причем один успел сыграть 10 партий, а другой только одну. Встречались ли они между собой?

Пусть n – число участников, и тогда $n-2$ из них, которые довели турнир до конца, сыграли между собой $(n-2)(n-3)/2$ партий. А два интересующих нас соперника провели либо 10, либо 11 встреч – в зависимости от того, состоялась ли их собственная партия. Таким образом, надо рассмотреть два квадратных уравнения:

$$(n-2)(n-3)/2+10=55 \text{ и } (n-2)(n-3)/2+11=55.$$

Решение в натуральных числах имеет лишь первое уравнение ($n=12$), и партия состоялась.

По окончании супертурнира пять его участников расположились по местам следующим образом: 1. Каспаров, 2. Крамник, 3. Ананд, 4. Кориной, 5. Карпов (обошлось без дежа мест). Во время банкета они делались впечатлениями:

– Не думал, что я один обойдусь без поражений, – удивился Крамник.

– Лишь мне не удалось выиграть ни разу, – сокрушился Карпов.

Можно ли по этой информации восстановить турнирную таблицу?

Типичная логическая задача, в которой по неполным данным надо разобраться в ситуации. Всего в турнире разыгрывалось 10 очков. Каспаров набрал не более 3 (у него есть поражение), но и не менее 3, иначе порядок мест был бы таким:

Каспаров – 2,5, Крамник – 2, Ананд – 1,5, Корчной – 1, Карпов – 0,5. Сумма равна 7,5 вместо 10. Значит, правильный вариант другой: Каспаров – 3, Крамник – 2,5, Ананд – 2, Корчной – 1,5, Карпов – 1, в сумме 10 очков.

Так как Каспаров сыграл четыре партии и одну проиграл, значит, три остальные выиграл. Крамник не проиграл ни разу, а выиграл одну (по условию), т. е. одолел как раз Каспарова. В остальных партиях он набрал 1,5 очка (всего 2,5) – сделал три ничьи.

№	Участники	1	2	3	4	5	О	М
1	Каспаров		0	1	1	1	3	I
2	Крамник	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2,5	II
3	Ананд	0	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$	2	III
4	Корчной	0	$\frac{1}{2}$	0		1	1,5	IV
5	Карпов	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		1	V

Рис. 225. Супертурнир пяти корифеев.

Ананд против Корчного и Карпова набрал 1,5 очка. Возможны два варианта: 1) Ананд выиграл у Карпова и сыграл вничью с Корчным. Тогда у Корчного с Карповым мирный исход, и у Корчного все ничьи. Но это противоречит признанию Карпова. Вариант отпадает. 2) Ананд выиграл у Корчного и сыграл вничью с Карповым. Тогда Корчной выиграл у Карпова, набрал 1,5 очка, и все сошлось (рис. 225).

В турнире «ундеркинд» разных лет участвовали гроссмейстеры Калякин, Раджабов, Камский, Пономарев, Бакро и Карлсен. Калякин сыграл все партии вничью, Раджабов не проиграл ни одной, Камский обыграл победителя турнира и сыграл вничью с Бакро, отставшим от Пономарева, а тот, в свою очередь, отстал от Карлсена. Кто сколько очков набрал и какое место занял?

Определим прежде всего победителя турнира. Это не Калякин (все ничьи), не Раджабов (ни разу не проиграл), не Камский

(он обыграл победителя), не Пономарев (он отстал от Карлсена), не Бакро (его обогнал Пономарев). Значит, турнир выиграл норвежский вундеркинд Карлсен, хотя и проиграл Камскому.

Как сыграли между собой Раджабов и Карлсен? Раджабов не выиграл (иначе у Карлсена было бы 2,5 очка и он не стал бы первым), но и не проиграл (по условию, у него нет поражений) — ничья.

Чтобы стать победителем, Карлсен должен был набрать не менее трех очков — больше, чем Калякин, но тогда он выиграл у Пономарева и Бакро. Раджабов обошелся без поражений, и у него не меньше 2,5 очков. Но и не больше, иначе он догнал бы победителя. Значит, у Раджабова ровно 2,5 — все ничьи.

№	Участники	1	2	3	4	5	6	О	М
1	Калякин		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2,5	II-V
2	Раджабов	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2,5	II-V
3	Камский	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	II-V
4	Пономарев	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	0	1,5	II-V
5	Бакро	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0	2	VI
6	Карлсен	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1		3	I

Рис. 226. Турнир вундеркиндлов.

Камский проиграл Пономареву, иначе у него было бы больше 2,5 очков. Так как Пономарев обогнал Бакро, то француз не выиграл у него (иначе у него было бы 2,5 очка, а у Пономарева — 2). Но и Пономарев не взял верх над Бакро (тогда бы он догнал победителя). Значит, они сыграли вничью. Таблица готова (рис. 226). Хотя играла одна молодежь, турнир получился довольно миролюбивым.

В данный момент не менее $\frac{1}{4}$ всех партий кругового турнира закончились вничью. Доказать, что какие-то два участника набрали одинаковое число очков.

Для удобства будем пользоваться такой системой подсчета: 1 — за победу, 0 — за ничью, 1 — за поражение (эта

система эквивалентна обычной). Пусть n – число участников турнира, положим $k = n/2$ при четном n , $k = (n-1)/2$ при нечетном n .

Предположим, что к данному моменту все участники набрали разное число очков. Тогда среди них найдутся либо k с положительным результатом, либо k с отрицательным. Достаточно рассмотреть один случай, например первый. Поскольку эти k шахматистов набрали разное число очков, а число очков каждого не меньше числа выигранных им партий, общее число побед не меньше $1+2+\dots+k = k(k+1)/2$. Число всех партий в турнире равно $(n-1)n/2$, поэтому доля результативных партий к данному моменту не меньше

$$\frac{k(k+1)}{(n-1)n} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

т. е. доля ничьих меньше $3/4$, что противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно.

Нам осталось упомянуть матчевую систему проведения соревнований.

В шахматном матче между двумя городами с каждой стороны участвовало 1996 игроков. Организаторы (среди них были математики) решили, что система, при которой первый номер играет с первым, второй со вторым и т. д., немного приелась, и предложили разбить игроков на пары несколько иначе: сумма номеров в каждой паре должна быть квадратом какого-нибудь числа. Интересно, удалось ли им добиться такого разбиения?

Вот какое хитрое расписание придумали организаторы турнира. Для $1 \leq k \leq 15$ игрок номер k играет с игроком номер $16-k$; для $16 \leq k \leq 20$ номер k играет с номером $36-k$; для $21 \leq k \leq 28$ номер k играет с номером $49-k$; наконец, для $29 \leq k \leq 1996$ номер k играет с номером $45^2-k=2025-k$. Таким образом, сумма номеров каждой пары равна квадрату одного из чисел – 4, 6, 7 или 45.

Матчевая система популярнее всего в розыгрышах шахматной короны. Все 15 великих чемпионов от Стейница, Ласкера и Капабланки до Каспарова, Крамника и Ананда стали

королями, одержав победу в поединке над своими предшественниками.

Среди матчевых систем с математической точки зрения наиболее интересна швейцарская. Встречаются две команды, и каждый участник одной из них играет с каждым участником другой. Таким образом, вместе с матчем удается провести и личный турнир.

Пусть команды состоят из n игроков. В этом случае швейцарский матч-турнир продолжается ровно n туров. Для $n=6$ возможное расписание представлено на рис. 227. Строки таблицы соответствуют участникам первой команды, а столбцы – второй. Номер тура, в котором играют партнеры, стоит на пересечении строки и столбца, а цвет фигур (для игрока первой команды) определяется цветом этой клетки.

В каждом столбце и в каждой строке выделенного на рис. 227 квадрата присутствуют все числа от 1 до 6. В общем случае строки и столбцы квадрата содержат числа от 1 до n . Он называется латинским квадратом порядка n . (Эйлер, исследовавший эти квадраты, вместо чисел использовал латинские буквы, чем и объясняется название.) Очевидно, что всякий латинский квадрат порядка n , клетки которого окрашены в черный и белый цвета, дает расписание швейцарского матча-турнира для двух команд с n игроками.

Π	1	2	3	4	5	6
1	■	■	3	4	■	6
2	2	3	6	■	■	■
3	■	■	■	1	4	5
4	4	1	■	■	6	■
5	5	■	1	■	■	2
6	■	5	■	3	2	■

Рис. 227. Расписание для швейцарского турнира.

В расписании на рис. 227 все участники играют одинаковое число партий белыми и черными, что само по себе справедливо. Однако обе команды в каждом туре играют все партии одним цветом, что нельзя признать удачным — команда, играющая белыми, имеет явное преимущество.

Интересно, что организаторы одного из шахматных матчей Россия — Югославия попытались найти расписание (для мужских команд из шести гроссмейстеров), удовлетворяющее одновременно трем требованиям:

- 1) все участники турнира играют поровну белыми и черными;
- 2) в каждом туре обе команды играют поровну белыми и черными;

3) в очередном туре игроки меняют цвет фигур.

Задача состоит в нахождении значений n , при которых существует расписание «шевенингена», удовлетворяющее этим трем условиям.

Рассматривать надо только четные n , так как в противном случае нарушаются два первых условия.

Если все участники команды в каждом туре играют одним цветом (рис. 227), то условие 3 выполняется, а 2 — нет. Но условия 2 и 3 одновременно выполняться не могут. Действительно, из 2-го следует, что уже в первом туре найдутся два представителя разных команд, играющие одним цветом. А из 3-го — что они в каждом туре меняют цвет, т. е. не встречаются между собой!

Будем считать условие 2 более важным и ради него откажемся от 3-го (в упомянутом матче так и поступили). Теперь надо выяснить, существует ли расписание турнира, удовлетворяющее двум первым условиям. Организаторы матча попытались найти такое расписание, но у них ничего не вышло...

Предположим, что клетки латинского квадрата порядка n раскрашены в черный и белый цвета так, что одновременно выполняются следующие два условия:

- a) в каждом столбце и в каждой строке одинаковое число белых и черных клеток;

б) половина всех клеток, в которых записано одно и то же число, раскрашена в белый цвет, а половина — в черный.

Раскрашенный таким способом латинский квадрат дает расписание «шевенингена», удовлетворяющее условиям 1 и 2, — для двух команд из n игроков. Действительно, из а) следует выполнение условия 1, а из б) — условия 2.

Возникает следующая математическая проблема, эквивалентная задаче о турнирном расписании.

При каких n существует латинский квадрат порядка n , клетки которого можно раскрасить в черный и белый цвета, чтобы одновременно выполнялись условия а) и б)?

Здесь нам понадобится еще одно понятие, связанное с латинскими квадратами. При наложении одного из таких квадратов на другой (оба порядка n) получаются n^2 пар чисел, стоящих на одинаковых местах, — первое число из первого квадрата, второе — из второго (при разном порядке чисел пары считаются разными). Два латинских квадрата порядка n называются ортогональными, если все n^2 пар чисел, возникающих при наложении, отличаются друг от друга. Например, два латинских квадрата четвертого порядка на рис. 228 ортогональны, так как при наложении квадрата б на квадрат а все $n^2=16$ пар чисел будут различны (рис. 229а).

Покажем, что если существуют два ортогональных латинских квадрата порядка n (n четно), то каждый из них можно раскрасить так, чтобы выполнялись условия а) и б).

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

а

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

б

Рис. 228. Ортогональные латинские квадраты.

Возьмем один из квадратов в качестве исходного и закрасим в черный цвет все клетки, на которые при наложении второго квадрата попадают клетки с четными числами (остальные клетки будут белые). Убедимся, что раскрашенный квадрат удовлетворяет условиям а) и б). Так как в каждой строке и в каждом столбце латинского квадрата половина чисел четна, а половина нечетна (при четном n), условие а) выполняется. Ввиду ортогональности квадратов каждым n одинаковым числам исходного соответствует половина четных и половина нечетных чисел второго, т. е. условие б) также выполняется.

В качестве примера рассмотрим два уже знакомых латинских квадрата четвертого порядка (рис. 228). При наложении б на а получаем таблицу (рис. 229а), раскраска которой дает расписание шевенингенского турнира для двух команд из четырех игроков (рис. 229б).

Итак, задача о расписании турнира неожиданно привела нас к увлекательному разделу комбинаторики – теории латинских квадратов! Проблема существования ортогональных латинских квадратов в общем случае не поддавалась решению около 200 лет, и лишь в середине XX в. было наконец доказано, что ортогональные квадраты существуют для всех n , отличных от двух и шести.

Значит, для любой пары команд с четным числом игроков (но не двух и шести!) имеется расписание турнира, удовлетво-

1,1	2,2	3,3	4,4
4,2	3,1	2,4	1,3
2,3	1,4	4,1	3,2
3,4	4,3	1,2	2,1

а

II. I.	1	2	3	4
1	1		3	
2		3		1
3	2		4	
4		4		2

б

Рис. 229. Латинские квадраты и турнирная таблица.

ряющее условиям 1 и 2. Однако в упомянутом матче каждую страну представляло как раз шесть гроссмейстеров, и поэтому наша проблема оставалась открытой. При $n=2$ или $n=6$ нельзя утверждать, что расписание имеется, хотя и нет оснований говорить обратное.

Простой перебор показывает, что для $n=2$ нужное расписание отсутствует. А для интересующего нас случая $n=6$ пришлось обратиться к компьютеру, который раскрасил все латинские квадраты шестого порядка и неожиданно обнаружил раскраски, удовлетворяющие условиям а) и б), а стало быть, и искомое расписание турнира. Одно из них показано на рис. 230. Это расписание примечательно еще и тем, что никто из игроков не играет более двух партий подряд одним цветом. Поскольку полного чередования цветов, как мы знаем, добиться невозможно, данное расписание турнира можно считать идеальным.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	1	3	5	6	2	4
2	3	5	1	6	4	2
3	5	1	6	2	4	3
4	6	2	4	1	3	5
5	4	6	1	3	5	2
6	2	4	3	5	1	6

Рис. 230. Идеальное расписание шевенингенского турнира.

После окончания турнира, по какой бы системе он ни проходил, происходит изменение рейтингов участников. Это вполне математический вопрос, и ему посвящена следующая глава.

РЕЙТИНГИ ГРОССМЕЙСТЕРОВ

Легко определить, кто быстрее бегает, выше прыгает или дальше метает диск — достаточно просто узнать результаты спортсменов, им даже необязательно соревноваться на одном стадионе. То же самое касается всех видов спорта, где имеются четкие цифровые показатели. Иначе обстоят дела в фигурном катании или гимнастике, здесь сложнее сравнивать достижения участников, тем более если они выступают не вместе.

Шахматы — один из немногих видов спорта, где применяется строгая система определения силы игроков. Разработан специальный математический метод, позволяющий упорядочить всех игроков, участвующих в турнирах, по их рейтингу (от англ. *rating* — «оценка»), или иначе индивидуальному коэффициенту.

В те далекие времена, когда в мире было всего несколько десятков маэстро (звание гроссмейстера еще не присваивалось), сраживать их силу было нетрудно. Они часто встречались в одних и тех же турнирах, и если один регулярно опережал другого, он и был сильнее. В случае необходимости между ними устраивался матч.

Теперь в международных состязаниях участвуют тысячи шахматистов, многие из которых знают о своих коллегах лишь понаслышке. Нередко крупные турниры проходят одновременно в разных странах и нескольких городах одной страны. В такой ситуации сопоставлять силу игроков стало гораздо труднее, и, естественно, возникла идея математического подхода к этой проблеме.

Первые попытки построить систему оценок силы шахматистов относятся к началу XX в. А в конце 1950-х гг. прошли практические испытания ряда систем, основанных на

том, что каждому шахматисту присваивается коэффициент, или рейтинг, который меняется от турнира к турниру в зависимости от показанных результатов. После многолетнего обсуждения в начале 1970-х гг. ФИДЕ официально приняла систему коэффициентов, которую разработал американский профессор Арпад Эло (используя теорию вероятностей).

Покажем, как ведется расчет рейтингов по системе Эло в турнире или матче. Перед стартом определяется ожидаемое число очков $N_{\text{ож}}$ для каждого участника (как это делается, описано ниже).

Пусть K_u – рейтинг игрока перед началом соревнования (если он впервые попадает в рейтинговый турнир, то получает коэффициент 2200). Итоговый рейтинг K_u после окончания соревнования вычисляется по формуле:

$$K_u = K_u + 10 (N - N_{\text{ож}}),$$

где N – набранное число очков. Если результат совпадает с ожидаемым, $N = N_{\text{ож}}$, то игрок, очевидно, остается «при своих». Если же он набирает больше (меньше) очков, чем планировалось, то его рейтинг растет (падает). Из формулы видно, что одно очко в турнире равноению 10 единицам рейтинга. Отметим, что его победитель не теряет рейтинг, даже если не добирает нужного по прогнозу числа очков.

Осталось определить $N_{\text{ож}}$. Начнем с расчета для матча. Пусть рейтинг игрока K_u совпадает с рейтингом его соперника K' . Тогда следует ожидать, что матч закончится вничью, т. е. $N_{\text{ож}}$ составляет 50 % возможных очков. Если рейтинг K_u выше (ниже), чем у соперника, то он должен набрать больше (меньше) 50 %. Необходимый процент (математическое ожидание) находится по табл. 7, построенной Эло с учетом того, что ожидаемые результаты игроков подчиняются вероятностным законам (нормальное распределение).

ΔK	h_b	h_m									
0–3	50	50	92–98	63	37	198–206	76	24	345–357	89	11
4–10	51	49	99–106	64	36	207–215	77	23	358–374	90	10
11–17	52	48	107–113	65	35	216–225	78	22	375–391	91	9
18–25	53	47	114–121	66	34	226–235	79	21	392–411	92	8
26–32	54	46	122–129	67	33	236–245	80	20	412–432	93	7
33–39	55	45	130–137	68	32	246–256	81	19	433–456	94	6
40–46	56	44	138–145	69	31	257–267	82	18	457–484	95	5
47–53	57	43	146–153	70	30	268–278	83	17	485–517	96	4
54–61	58	42	154–162	71	29	279–290	84	16	518–559	97	3
62–68	59	41	163–170	72	28	291–302	85	15	560–619	98	2
69–76	60	40	171–179	73	27	303–315	86	14	620–735	99	1
77–83	61	39	180–188	74	26	316–328	87	13	свыше 735	100	0
84–91	62	38	189–197	75	25	329–344	88	12			

Табл. 7. Расчет рейтингов шахматистов.

В табл. 7 $\Delta K = |K_n - K'_n|$ – абсолютное значение разности рейтингов игроков. При этом h_b – ожидаемый процент в случае $K_n \geq K'_n$, и h_m – в случае $K_n < K'_n$ ($h_b + h_m = 100\%$). Процент h меняется от строки к строке на единицу, пока не попадет в зону насыщения, а $N_{ок}$ округляется до десятых долей.

В турнире по круговой системе вместо K'_n надо взять среднее арифметическое $K_{ср}$ рейтингов всех партнеров данного игрока и округлить его до целого числа. Теперь $\Delta K = |K_n - K_{ср}|$ и для определения $N_{ок}$ следует снова воспользоваться табл. 7.

Конечно, в турнире по швейцарской или кубковой системе, а также в командных соревнованиях, где противники заранее неизвестны, $N_{ок}$ и $K_{ср}$ для каждого игрока можно вычислить только после окончания состязания.

В наши дни суперпрестижным рейтингом считается 2700 и выше. По аналогии с альпинистами-восьмитысячниками (преодолевшими высоту 8000 м) обладателей таких рейтингов называют семисотниками (2000 единиц не в счет).

В качестве примера рассмотрим чемпионат мира 2007 г. в Мехико (табл. 8), который представлял собой двухкруговой турнир.

Участники	K_n	$N_{ож}$	N	K_u
В. Ананд	2792	7,9	9,0	2803
В. Крамник	2769	7,4	8,0	2775
А. Морозевич	2758	7,1	6,0	2747
П. Леко	2751	7,0	7,0	2751
Л. Аронян	2750	7,0	6,0	2740
П. Свидлер	2735	6,6	6,5	2734
Б. Гельфанд	2733	6,6	8,0	2747
А. Гришук	2726	6,4	5,5	2717

Табл. 8. Чемпионат мира в Мехико-2007.

Для каждого из восьми участников, расположенных в порядке убывания их рейтинга, здесь указаны K_n , $N_{ож}$, N и K_u . Троє набрали больше очков, чем прогнозировалось, и увеличили свой рейтинг, четверо уменьшили его, а у Леко коэффициент не изменился. У завоевавшего корону индийского гроссмейсера Виши Ананда 9 очков из 14 вместо планируемых 7,9, и он прибавил 11 единиц – единственный, кто превысил 2800.

Хотя у Крамника и Гельфанда одинаковое число очков, второй из них прибавил на восемь единиц больше, поскольку его соперники были сильнее (среди них Крамник!), $K_{ср}$ выше и $N_{ож}$ Гельфанда ниже – вот он и отличился.

Итак, в основе расчета лежит табл. 67 остановимся на ней подробнее. Построим график зависимости b от $\Delta K=K_n-K_{ср}$ – разности между рейтингом данного игрока и $K_{ср}$ его соперников, которая в данном случае может иметь любой знак. Если цифры совпадают, $\Delta K=0$, то надо ожидать, что игрок наберет 50 %. Поэтому график проходит через точку с координатами $\Delta K=0$, $b=50$. Естественно считать его симметричным относительно этой точки. Если рейтинг игрока выше среднего, то мы попадаем в зону b_b , а если ниже, то – в зону b_u . Поскольку b меняется от 0 до 100, график асимптотически стре-

мится к прямой $h = 100$ при $\Delta K \rightarrow +\infty$ и к оси абсцисс при $\Delta K \rightarrow -\infty$.

Принято считать, что если один игрок сильнее другого на разряд, то он в среднем набирает против него 75 % очков. Это обстоятельство Эло учел следующим образом: положив, что разница между двумя ступенями в шахматной иерархии составляет 200 единиц рейтинга, он провел график через точки с координатами $\Delta K = 200$, $h = 75$ и, соответственно, $\Delta K = -200$, $h = 25$. Итак, искомым графиком является кривая, общий вид которой показан на рис. 231.

Теперь по ней можно определить h_b и h_m для любого ΔK , но не пользоваться же для этого линейкой, поэтому ось абсцисс следует разбить на отрезки с фиксированными значениями h , которые меняются на единицу при переходе к соседнему отрезку. В результате вместо гладкой кривой получаем ступенчатый график, еле видный на рис. 231. Высота всех ступенек равна 1, а ширина по мере удаления от центра увеличивается. Понятно, что табл. 7 по существу представляет собой табулирование графика-лестницы на рис. 231.

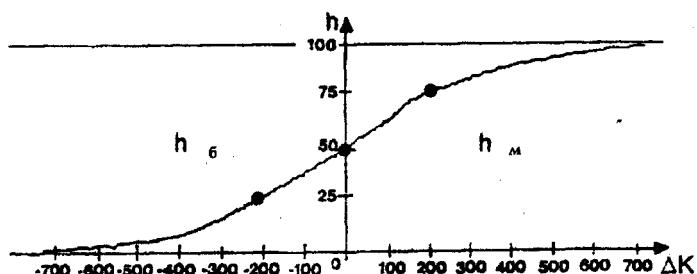


Рис. 231. Лестница коэффициентов.

Важной характеристикой соревнования, прежде всего кругового турнира, является величина K_t – среднее арифметическое рейтингов всех его участников (коэффициент турнира). В зависимости от K_t турниры делятся по категориям (табл. 9) – после каждой 25 единиц рейтинга катего-

рия увеличивается на 1. Турниры с K_f меньшим, чем 2250, обычно проводятся по швейцарской системе (опен-турниры), а круговых выше 21-й категории пока не было (поединки на первенство мира не в счет). Сила «швейцарки» иногда оценивается по ее «верхушке», например, участие в турнире шести семисотников свидетельствует о его высоком уровне. В чемпионате мира в Мехико участвовали только семисотники, K_f составлял 2752, т. е. турнир был 21-й категории.

Категория турнира	Коэффициент турнира
1	2251–2275
2	2276–2300
3	2301–2325
4	2326–2350
5	2351–2375
6	2376–2400
7	2401–2425
8	2426–2450
9	2451–2475
10	2476–2500
11	2501–2525
12	2526–2550
13	2551–2775
14	2576–2600
15	2601–2625
16	2626–2650
17	2651–2675
18	2676–2700
19	2701–2725
20	2726–2750
21	2751–2775
22	2776–2800

Табл. 9. Категории турниров.

Рейтинги важны при квалификации шахматистов. С их учетом в соревнованиях устанавливаются нормы для получения того или иного звания. Чтобы стать международным мастером, требуется достичь рейтинга 2400, гроссмейстера – 2500. При этом норму надо выполнить в двух или трех турнирах в зависимости от общего числа партий (не меньше 25 за год).

В 1960-е гг. Эло провел интересный эксперимент: вычислил рейтинги всех великих игроков на наилучшем пятилетнем отрезке их шахматной карьеры. В число лидеров (рейтинг выше 2600) попали 23 гроссмейстера (табл. 10). Тогда коэффициенты Эло округлялись до 10.

Эм. Ласкер, Х.-Р. Капабланка, М. Ботвинник	2720
М. Таль	2700
П. Морфи (за три года выступлений)	2690
А. Алехин, В. Смыслов	2680
Д. Бронштейн, П. Керес	2670
С. Решевский, Р. Файн	2660
В. Стейниц, И. Болеславский, М. Найдорф	2650
А. Рубинштейн, М. Эйве, С. Глигорич	2640
С. Флор, А. Котов	2620
З. Тарраш, Г. Мароци, А. Нимцович, Е. Боголюбов	2610

Табл. 10. Шахматные корифеи прошлого.

За последующие почти полвека произошла заметная инфляция коэффициентов (сейчас уже более сотни игроков имеют рейтинг выше 2600), и для сравнения силы прошлых и нынешних лидеров к числам табл. 10 следует прибавить примерно 100 единиц. Кстати, сам список надо пополнить еще несколькими десятками супергроссмейстеров. В первую очередь в него войдут чемпионы мира Т. Петросян, Б. Спасский, Р. Фишер, А. Карпов, Г. Карапетян, В. Крамник, В. Топалов, В. Ананд, а также претенденты на шахматную корону разных лет.

Раз в квартал, а с 2009 г. каждые два месяца ФИДЕ публикует официальный рейтинг-лист всех шахматистов, учиты-

вающий все турниры за данный период (ныне этот список включает уже около 100 тыс. игроков). В табл. 11 приведены все семисотники на 1 января 2009 г.

Веселин Топалов (Болгария)	2796
Виши Ананд (Индия)	2791
Василий Иванчук (Украина)	2779
Магнус Карлсен (Норвегия)	2776
Александр Морозевич (Россия)	2771
Теймур Раджабов (Азербайджан)	2761
Дмитрий Яковенко (Россия)	2760
Владимир Крамник (Россия)	2759
Петер Леко (Венгрия)	2751
Сергей Мовсесян (Словакия)	2751
Левон Аронян (Армения)	2750
Алексей Широв (Испания)	2745
Ванг Юэ (Китай)	2739
Борис Гельфанд (Израиль)	2733
Александр Грищук (Россия)	2733
Руслан Пономарев (Украина)	2726
Гата Камский (США)	2725
Шахрияр Мамедъяров (Азербайджан)	2724
Вугар Гашимов (Азербайджан)	2723
Петр Свидлер (Россия)	2723
Этьен Бакро (Франция)	2722
Евгений Алексеев (Россия)	2718
Перес Доменигес (Куба)	2717
Майл Адамс (Англия)	2712
Кришнан Сашикиран (Индия)	2711
Ни Хуа (Китай)	2709
Сергей Карякин (Украина)	2706
Ханжи Бу (Китай)	2702
Франциско Вальехо (Испания)	2702
Сергей Рублевский (Россия)	2702
Владимир Акопян (Армения)	2700

Табл. 11. Лидеры современных шахмат.

В списке лидеров впервые за много лет отсутствует Юдит Полгар (Венгрия), единственная представительница женского пола, имевшая рейтинг выше 2700. Она не раз входила в десятку сильнейших, а в 2005 г. даже занимала шестое место, но после рождения сына, а затем дочери немного сдала.

Хотя Роберт Фишер, завоевав корону в 1972 г., оставил шахматы, он еще четверть века находился на недосягаемой тогда рейтинговой высоте 2780, и только в 1990-е гг. его обошел Гарри Каспаров, рейтинг которого взлетел до 2800. А в конце прошлого века, продолжая свое победное шествие, Каспаров достиг заоблачного рейтинга 2851! – высшего за всю историю шахмат. В 2000 г., выиграв матч у Каспарова, прыжок за 2800 осуществил и Владимир Крамник. В 2005 г. чемпион мира ФИДЕ Веселин Топалов стал третьим восьмисотником. Наконец нынешний чемпион мира – классик Виши Ананд – четвертый гроссмейстер, преодолевший рубеж 2800. Впрочем, в данный момент, как видно из таблицы, никто из гроссмейстеров на отметке 2800 не удержался.

Если в течение трех лет шахматист не участвует в турнирах, то он исключается из рейтинг-листа (переходит в «запас») независимо от реальной силы. В 1975 г. его покинул Фишер, а в 2008 г. – Каспаров.

Лучшее подтверждение эффективности системы Эло – достоверность прогнозов. Поскольку результат партии в какой-то степени случаен, все предсказания носят вероятностный характер. Но статистика показывает, что расхождения между предсказанными и реальными результатами не выходят за рамки так называемой стандартной ошибки.

Система коэффициентов долгое время вызывала бурные дискуссии, скептики полагали, что в вопросах шахматного творчества, как и вообще в искусстве, цифровой подход неуместен. Однако в том-то и состоит преимущество шахмат по сравнению с другими видами искусства, где оценки сплошь и рядом субъективны, что они обладают объективным критерием. Можно спорить, убедительна победа или нет, но влияние ее на спортивный результат обсуждению не подлежит. Кстати,

гроссмейстеры очень дорожат своими рейтингами, поскольку от них многое зависит: приглашения на турниры, включение в отбор к первенству мира и т. д.

После каждого турнира можно определить так называемый перфоманс его участников – аналог мгновенной силы. Это понятие ближе к физике, чем к математике (вспомните «мгновенную скорость»). Для примера снова обратимся к табл. 8. Ананд набрал 9 очков из 14, то есть $\approx 64\%$ очков. Решим обратную задачу: каким рейтингом должен обладать игрок, чтобы показать такой результат?

Согласно табл. 7 данному проценту соответствует $\Delta K \approx 104$, а поскольку средний коэффициент соперников Ананда $K_{ср} = 2746$, он выступил как игрок с рейтингом $K_i = 2746 + 104 = 2850$! Это и есть перфоманс чемпиона мира, его мгновенная сила в Мехико. А реально, как мы знаем, он прибавил 11 единиц (набрал на 1,1 очка больше, чем ожидалось) – это, можно сказать, его долговременная прибавка. Аналогично определяется перфоманс всех участников чемпионата мира.

Высокий перфоманс показывали не многие корифеи шахмат: помимо Ананда, это Каспаров, Топалов, Иванчук, Морозевич – игроки, которые независимо от турнирной ситуации всегда стремятся к максимальному результату и показывают его, если находятся в блестящей спортивной форме.

Завершая разговор о рейтингах, отметим, что они характеризуют силу шахматистов, но не отражают их творческий потенциал. Когда гроссмейстера Сергея Рублевского, завоевавшего в 2005 г. звание чемпиона России и вышедшего в турнир претендентов, поздравили со значительным повышением рейтинга (он приблизился к отметке 2700), он оструумно заметил: «Спасибо, но сами по себе рейтинги в шахматы не играют...».

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ШАХМАТЫ

«Может ли машина мыслить?» — этот вопрос был впервые поставлен в середине XX в. почти одновременно с появлением быстродействующих электронно-вычислительных машин. Конечно, в решении задач, требующих сложных расчетов, обработка больших объемов информации, человек не в состоянии состязаться с компьютером. Но есть ли у машины шансы превзойти своего создателя в творческой сфере? Еще на заре компьютерной техники в качестве модели для проверки «разума» машины были выбраны именно шахматы (недаром великий Гете называл их «пробным камнем интеллекта»). Это объяснялось и популярностью игры, и наличием в ней объективного критерия.

Уже на рубеже 1940 – 1950-х гг., когда возникла новая наука *кибернетика* и ее раздел *искусственный интеллект*, шахматы заняли в них важное место. Пионеры кибернетики — К. Шенон, А. Тьюринг и Д. Маккарти — сравнивали игру с мухой-дрозофилой, ставшей идеальным инструментом для генетиков. Муху легко прокормить, она дает простой генетический материал, быстро размножается. Точно так же и шахматы: в них простые и точные правила, понятные цели и задачи. При этом игра достаточно сложна, требует высокого умственного напряжения. Современные достижения в области компьютерных шахмат показывают, что вопрос, поставленный в самом начале, получил положительный ответ.

Примечательно, что если на первых порах специалисты по ЭВМ и кибернетике обращались к шахматам в основном в научных целях, рассматривая их как модель сложной системы, то теперь шахматисты взяли реванш — стали извлекать из общения с машинами много пользы для себя, особенно в связи с

бурным развитием персональных компьютеров и Интернета. Машины способны досконально исследовать любую позицию, находят неожиданные комбинации, решают задачи и этюды. Шахматные композиторы не могут быть уверены в своих произведениях, пока не проверят их на компьютере. Как они любят шутить, нет правильных этюдов, есть еще не опровергнутые машиной.

Комментируя партии, даже сильные гроссмейстеры уже давно не могут обойтись без компьютеров, которые все видят своим электронным оком, анализируют и глубже, и быстрее их. Более того, обнаруживают неточности во многих знаменитых партиях, порой заново переписывают классику.

Для многих шахматистов игра с машиной не только доставляет удовольствие, но и повышает квалификацию. Мастера и гроссмейстеры загружают в свои компьютеры дебютные картотеки и банки партий, а тренеры с помощью ЭВМ подбирают материалы для учебных занятий. Шахматы значительно помолодели, уровень их повысился, все большие юных шахматистов становятся гроссмейстерами, еще не закончив школу. И все это заслуга компьютеров.

Трудно представить ныне шахматы и без Интернета. Используя его в режиме on-line, тысячи поклонников игры следят за игрой гроссмейстеров в крупнейших соревнованиях, которые проходят по всему миру, а многие и сами становятся участниками интернетовских турниров.

Современные компьютеры не уступают за доской супергроссмейстерам, обыгрывают чемпионов мира. Хотя это в какой-то степени подрывает авторитет сильных шахматного мира сего, не надо забывать, что в данном случае побеждает не электронный игрок, а белковый, но в смежной интеллектуальной области.

Тема компьютерных шахмат весьма широкая, в ней есть и научные, и спортивные, и философские аспекты. Для подробного рассказа не хватило бы и всей нашей книги. Поэтому мы ограничимся краткой историей, а также приведем ряд партий из матчей чемпионов мира с электронными соперниками.

(Компьютеры сражаются не только с людьми, но и между собой – более 30 лет проходят чемпионаты мира среди машин, но это направление мы оставляем в стороне.)

Первую шахматную машину два с половиной столетия назад придумал венгерский барон Вольфганг Кемпелен, механик и изобретатель. В 1769 г. в Вене он продемонстрировал механического игрока, одетого в экзотический турецкий наряд. Автомат вызвал всеобщий восторг, так как побеждал видных игроков того времени. Но это было лишь мистификацией. Внутри ящика с шахматной доской прятался человек, управлявший замысловатым механизмом. Сам он не был виден даже при открытых дверцах, а иллюзию реальности создавала система зеркал, расположенных под определенными углами, и маскирующие перегородки. В течение 70 лет публичных выступлений «мозг» автомата поочередно заменяли австрийские мастера. В 1836 г. автомат Кемпелена был помещен в филадельфийский музей, где спустя два десятилетия сгорел. Так закончилась его карьера.

Принципы шахматной игры компьютеров в 1950-х гг. первым сформулировал один из основоположников кибернетики и теории информации К. Шеннон. Вот общая идея алгоритма игры, предложенного американским ученым. В анализируемой позиции, которая может быть произвольной (в том числе исходное положение), на заданную глубину перебираются все возможные варианты (ветви перебора), и заключительным позициям с помощью «оценочной функции» приписываются определенные числа (оценки). На их основе при возвращении к рассматриваемой позиции происходит оценка и ее самой, одновременно указывается лучший ход с точки зрения машины.

Оценочная функция состоит из двух частей – материальной и позиционной. Материальная определяется по одной из стандартных шкал ценности шахматных фигур (например, пешка – 1, конь и слон – 3, ладья – 5, ферзь – 8). Позиционная учитывает важные признаки позиции: открытые линии, владение центром, безопасность короля, сдвоенные и проходные пешки и т. д.

Совокупность всех возможных вариантов, связанных с конкретной позицией, называют деревом игры, сама позиция — его корень. Теоретически шахматы конечны — в том смысле, что имеется ограниченное количество ходов, разветвлений и партий. Это значит, что полностью перебрав варианты, пройдясь вдоль всего дерева, можно однозначно оценить любую позицию на доске. Однако практически перебор всегда ограничен, и глубина его зависит как от технических возможностей машины, так и от сложности позиции.

Эффективность шахматной программы оценивается числом позиций или вариантов, которые она в состоянии просмотреть за одну секунду. Когда-то это были тысячи, а теперь миллионы. Все современные программы снабжены дебютными картотеками, и внешне их игру невозможно отличить от человеческой. Кроме быстродействия и объема памяти компьютера, очень важен и алгоритм игры. Разработано много методов, позволяющих отсекать ненужные ветви деревьев, т. е. сделать расчет вариантов более разумным. Хотя идея Шеннона до сих пор не устарела, у каждого разработчика алгоритма есть свои приемы, усиливающие игру машины, свои хитрости.

Можно сказать, что за последние четверть века компьютеры прошли путь от перворазрядника до супергрессмейтера. Неизвестно изменился и внешний вид электронных шахматистов. В первых поколениях машин роль логических элементов выполняли электронные лампы, затем им на смену пришли транзисторы, а теперь все строится на микросхемах, вмещающих огромное количество информации. Старые компьютеры занимали целые этажи научно-исследовательских институтов, ныне мощнейшие ноутбуки представляют собой небольшой чемоданчик. В 1960 — 1970-х гг. машины считали варианты на два-три хода вперед, сейчас благодаря увеличению быстродействия перебор идет на 10 ходов, а в позициях с форсированной игрой практически неограничен.

В настоящей главе упоминаются то шахматные программы, то компьютеры. Можно считать это почти синонимами. Конечно, если нет компьютера, игра не состоится. Но сам по себе он как технический механизм становится шахматистом только после введения в него необходимой программы.

В 1996 г. состоялось историческое событие: впервые чемпион мира, Г. Каспаров, сыграл матч из шести партий с американским суперкомпьютером «Дип Блю», причем не в блиц, не в быстрые шахматы, а с классическим контролем времени. В поединке в Филадельфии было все, что полагается: дебютные сюрпризы, позиционная и комбинационная борьба и даже зевки. И уже на старте произошла сенсация: Каспаров отказался от повторения ходов в дебюте, получил трудную позицию и проиграл. Во второй партии он мобилизовал все свои силы и сравнял счет, затем последовали две боевые ничьи. В четвертой очко тоже было разделено пополам, мирно могла завершиться и пятая. Каспаров предложил ничью, и если бы машина была не так амбициозна, интрига сохранилась бы до самого конца. Но произошло удивительное: Гарри получил отказ, после чего «Дипблюшник» умудрился проиграть в несколько ходов. Окончательные итоги подвела шестая партия: Каспаров взял верх и в итоге победил со счетом 4:2.

Итак, первый серьезный матч между шахматным королем и компьютером закончился хеппи-эндом. Но не за горами был матч-реванш, который состоялся через год в Нью-Йорке: опять шесть партий с полноценным контролем. Поединок завершился поистине сенсационно — электронный чемпион «Дип Блю» обыграл белкового со счетом 3,5:2,5. Впервые в истории сильнейший на планете шахматист был повержен машиной в настоящем сражении. В те дни во всех информационных агентствах мира это сообщение стояло на первом месте.

Возможно, главная причина неудачи Каспарова заключалась в том, что он играл не столько в обычные, «античеловеческие» шахматы, сколько в антикомпьютерные,ставил научный эксперимент. В результате Гарри изменил самому

себе, своему стилю. Другой важный момент, повлиявший на исход матча, заключается в том, что разработчики «Дип Блю» лишили Каспарова возможности изучить особенности машины — не дали возможности сыграть хотя бы несколько тренировочных партий, не предоставляли распечаток. «Даже Пентагон так тщательно не оберегает свои компьютерные файлы, — шутил чемпион мира, — как создатели “Дип Блю”».

Первая партия после бурных осложнений принесла победу Каспарову. Но во второй он получил пассивную игру и не сумел вырваться из тисков машины, к тому же упустил счастливую возможность спастись в самом конце.

«Дип Блю» — Каспаров
Испанская партия

1. e4 e5 2. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}c6$ 3. $\mathbb{Q}b5$ a6 4. $\mathbb{Q}a4$ $\mathbb{Q}f6$ 5. 0-0 $\mathbb{Q}e7$ 6. $\mathbb{Q}e1$ b5 7. $\mathbb{Q}b3$ d6 8. c3 0-0 9. h3 h6 10. d4 $\mathbb{Q}e8$ 11. $\mathbb{Q}bd2$ $\mathbb{Q}f8$ 12. $\mathbb{Q}f1$ $\mathbb{Q}d7$ 13. $\mathbb{Q}g3$ $\mathbb{Q}a5$ 14. $\mathbb{Q}c2$ c5 15. b3 $\mathbb{Q}c6$ 16. d5 $\mathbb{Q}e7$ 17. $\mathbb{Q}e3$ $\mathbb{Q}g6$ 18. $\mathbb{Q}d2$. У черных прочная, но пассивная позиция не в духе Каспарова. 18... $\mathbb{Q}h7$ 19. a4 $\mathbb{Q}h4$ 20. $\mathbb{Q}h4$ $\mathbb{Q}:h4$ 21. $\mathbb{Q}e2$ $\mathbb{Q}d8$ 22. b4 $\mathbb{Q}c7$ 23. $\mathbb{Q}ec1$ c4 24. $\mathbb{Q}a3$ $\mathbb{Q}ec8$ 25. $\mathbb{Q}ca1$ $\mathbb{Q}d8$ 26. f4 $\mathbb{Q}f6$? Размен на f4 вел к уравнению. 27. fe de 28. $\mathbb{Q}f1$ $\mathbb{Q}e8$ 29. $\mathbb{Q}f2$ $\mathbb{Q}d6$ 30. $\mathbb{Q}b6$ $\mathbb{Q}e8$ 31. $\mathbb{Q}3a2$ $\mathbb{Q}e7$ 32. $\mathbb{Q}c5$ $\mathbb{Q}f8$ 33. $\mathbb{Q}f5$? Антипозиционный ход, черным выгоден размен своего слона на этого коня. 33... $\mathbb{Q}f5$ 34. ef $\mathbb{Q}f6$? В подобных позициях черным следует немедленно затеять контригру в центре — e5-e4!, освобождая пункт e5 для собственных фигур. Теперь же им не хватает пространства.

35. $\mathbb{Q}:d6$ $\mathbb{Q}:d6$ 36. ab ab 37. $\mathbb{Q}e4$! На доске полная доминация белых фигур. 37.. $\mathbb{Q}:a2$ 38. $\mathbb{Q}:a2$ $\mathbb{Q}d7$ 39. $\mathbb{Q}a7$ $\mathbb{Q}c7$ 40. $\mathbb{Q}b6$ $\mathbb{Q}b7$ 41. $\mathbb{Q}a8+$ $\mathbb{Q}f7$ 42. $\mathbb{Q}a6$ $\mathbb{Q}c7$ 43. $\mathbb{Q}c6$ $\mathbb{Q}b6+$ 44. $\mathbb{Q}f1$? Проще 44. $\mathbb{Q}h1$, достаточен для победы и размен ферзей. Централизация короля могла привести к нежелательным последствиям для машины. 44.. $\mathbb{Q}b8$. Черным нечем «дышать», но тут следует неожиданный финал. 45. $\mathbb{Q}ab??$ (рис. 232). Чертые сдались??

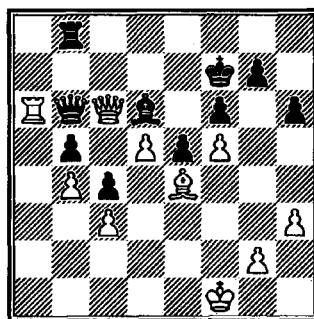


Рис. 232. Чемпион мира сдался компьютеру
в ничейной позиции.

Поразительно! Каспаров сдался, упустив шанс добиться ничьей. Конечно, после 45... $\mathbb{W}c6$ 46. dc положение черных безнадежно. Но при броске ферзя на e3 белому королю не удалось бы избежать преследования: 45... $\mathbb{W}e3!$ 46. $\mathbb{W}d6$ $\mathbb{B}e8!$ 47. h4! (в надежде скрыться на h3) 47...h5!! (лишая белых этой надежды), и королю не уйти от вечного шаха ферзем по диагонали c1-h6. Видимо, компьютер, играя $\mathbb{B}a1-ab$, не досчитал до конца все последствия этого хода и по-прежнему оценивал позицию как выигранную для себя. Каспаров же поверил ему «на слово». Объективности ради заметим, что после размена ферзей 45. $\mathbb{W}:b6$ $\mathbb{B}:b6$ 46. $\mathbb{B}a7+$ с последующим маршрутом короля на h5 положение черных оставалось критическим. Так что нельзя считать, что компьютеру повезло, скорее не повезло человеку.

В трех следующих встречах Каспаров владел инициативой, но робот стоял насмерть, выдержал все испытания и добился ничьей. Перед последней партией счет сохранялся равным, и можно представить себе, какое настроение было у чемпиона мира, когда он отправился на игру. Сломленный непредвиденным течением борьбы, Каспаров в шестой, решающей схватке был неузнаваем...

«Дип Блю» — Каспаров

Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ♜c3 de 4. ♜e4 ♜d7 5. ♜g5 ♜gf6 6. ♜d3 e6 7. ♜f3 h6? (рис. 233). Здесь черные автоматически выводят слона — 7...d6 и только после 8. ♜e2 отбрасывают коня — 8...h6, получая прочную позицию.

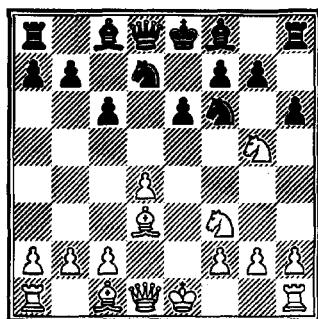


Рис. 233. «Дипблюшник»
проводит комбинацию.

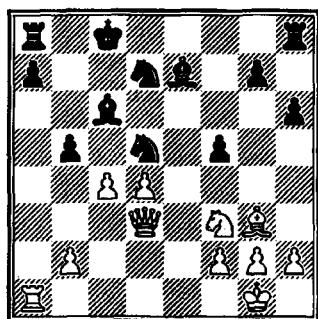


Рис. 234. Компьютер
победил!

8. ♜:e6! При черном слоне на d6 эта жертва была некорректна: во-первых, у белых нет поля f4 для слона, а во-вторых, король уютно располагается на f8. После партии Каспаров утверждал, что машина еще не созрела для таких решений, ведь белые получают за фигуру всего одну пешку! Но удар на e6 мог быть заложен в компьютер заранее, во всяком случае, позиция предлагалась разным программам, и многие били на e6.

Согласно другой версии, Каспаров испытывал в этот день психологический дискомфорт и просто допустил перестановку ходов, полагая, что слон уже вышел на d6. Еще одно объяснение заключается в том, что позиция, возникающая после жертвы коня, в дебютных справочниках оценивалась как спорная, и Каспаров мог умышленно пойти на нее.

8...♛e7 9. 0-0 fe 10. ♜g6+ ♛d8 11. ♜f4 b5. Понятно желание черных обеспечить коню удобную стоянку на d5, препятст-

вую с2-с4. Но теперь у них возникают новые проблемы – не только в центре доски, но и на ферзевом фланге. 12. а4! ♜b7
13. ♜e1 ♜d5 14. ♜g3 ♜c8 15. ab cb 16. ♜d3! ♜c6 17. ♜f5 ef
18. ♜:e7 ♜:e7 19. с4. Чёрные сдались (рис. 234).

Фантастика! В решающей партии чемпион мира не продержался и 20 ходов, причем эта миниатюра длилась всего час с небольшим. Формально на доске примерное равенство, но Каспаров прекрасно понимал, что для машины это позиция элементарная. После 19... ♜b4 20. ♜:f5 bc 21. ♜e5 или 19...bc 20. ♜:c4 ♜b4 (20... ♜b7 21. ♜a6X!) 21. ♜e1 ♜e8 22. ♜h4 ♜b6 23. ♜f7 ♜d5 24. ♜:f5 ♜d8 25. ♜:g7 она разваливалась, как карточный домик.

Да, второй поединок между электронным и белковым чемпионами завершился победой «Дип Блю», Каспаров «попал под машину»! Любопытно, что в очередном издании «Книги рекордов Гиннесса» информация об этом событии торжественно обведена в рамочку. Наступила эра новых чемпионов!

Конечно, всех интересовало дальнейшее развитие интриги, но, увы, продолжения не последовало. Фирма IBM благодаря этой победе добилась большого коммерческого успеха и «бросила» шахматы (Каспаров последовал этому примеру спустя восемь лет!). Машина была разобрана по кусочкам, от нее не осталось и следа. Резон тут был: еще одна победа не принесла бы IBM особых лавров, а поражение могло разочаровать публику. Жаль, что матч-реванш не состоялся, ведь в новом сражении Каспаров готов был поставить на кон свой чемпионский титул.

Спустя пять лет отомстить за человечество попытался В. Крамник, преемник Каспарова. В 2002 г. в Бахрейне состоялся еще один серьезный матч с классическим контролем времени – между новым чемпионом мира и сильнейшей немецкой программой «Фриц». Если «Дип Блю» представляла собой ящик метра два высотой и почти полторы тонны весом, то «Фриц», как и многие современные программы, играла на «персоналке», правда, многопроцессорной.

Реванш не состоялся — матч закончился вничью 4:4. В первой половине Крамник сумел подобрать ключи к электронному сопернику, во второй тот был неуязвим. В первой партии машина имела дебютный перевес, но потом неожиданно перешла в ничейное пешечное окончание. Во второй Крамник взял верх в ладейном эндшпиле. В третьей он снова диктовал условия и легко завоевал очко. И в четвертой Владимир добился заметного перевеса, но черные устояли.

Казалось, Крамник нашел у «Фрица» уязвимое место: в эндшпиле тот чувствовал себя неуютно, терял нить игры. При счете 3:1 все были уверены, что исход матча предрешен. Но тут создатели программы сделали внушение своему детищу, исключили нежелательные варианты, и все повернулось на 180° градусов. (По условиям нельзя было что-либо менять в программе, но не запрещалось выбирать разные дебюты.)

В пятой партии Крамник избрал систему, связанную с рядом разменов, но зато ферзи остались на доске! Компьютер держал выгодное напряжение, и тут произошел печальный случай: человек зевнул смертельный шах, потерял коня и немедленно сдался. Счет сократился, а прокол чемпиона вошел в сборники шахматных курьезов. В шестой встрече рассерженный гроссмейстер вступил с соперником в бурную тактическую схватку, но машина была дальновиднее и перехитрила его. Счет неожиданно сравнялся — 3:3. В двух заключительных партиях фигуры соперников не вступали в конфликт — ничья. Окончательный счет 4:4 для компьютера весьма почетный, вновь подтверждилось, что электронные шахматисты достигли уровня чемпиона мира.

В начале 2003 г. дискуссия «кто кого» продолжилась. В Нью-Йорке Каспаров сразился с израильской программой «Джуниор» — в матче из шести партий, тоже с нормальным контролем. На сей раз он играл в «нормальные» шахматы, выбирал свои любимые дебюты, и мирный исход, можно сказать, был достигнут с позиции силы. В первой партии Гарри уверен но взял верх.

Увлекательно протекала вторая.

«Джуниор» — Каспаров

Сицилианская партия

1. e4 c5 2. $\mathbb{Q}f3$ e6 3. d4 cd 4. $\mathbb{Q}:d4$ a6 5. $\mathbb{Q}d3$ $\mathbb{Q}c5$ 6. $\mathbb{Q}b3$ $\mathbb{Q}a7$ 7. c4 $\mathbb{Q}c6$ 8. $\mathbb{Q}c3$ d6 9. 0-0 $\mathbb{Q}ge7$ 10. $\mathbb{Q}e1$ 0-0 11. $\mathbb{Q}e3$ e5 12. $\mathbb{Q}d5$ a5 13. $\mathbb{Q}c1$. В духе машины было острое 13. c5!? 13...a4 14. $\mathbb{Q}:a7$ $\mathbb{Q}:a7$ 15. $\mathbb{Q}d2$ $\mathbb{Q}d4$ 16. $\mathbb{Q}h5$ $\mathbb{Q}e6$ 17. $\mathbb{Q}c3$ $\mathbb{Q}c5$ 18. $\mathbb{Q}c2$. Грозит 19. $\mathbb{Q}g3$, 20. $\mathbb{Q}f6+$ и 21. $\mathbb{Q}:h7X$, но в шахматах ходят по очереди. 18... $\mathbb{Q}:d5$ 19. ed g6 20. $\mathbb{Q}h6$ f5 21. $\mathbb{Q}a3$ $\mathbb{Q}f6$. Допуская острый маневр пешкой b. 22. b4!? ab! 23. $\mathbb{Q}:a7$ bc 24. $\mathbb{Q}c1$ e4 25. $\mathbb{Q}:c2$. У черных за качество опасная атака — 25... f4 и т. д. Однако Гарри дает импульсивный шах, и «Джуниор» спасается, жертвуя ферзя. 25... $\mathbb{Q}a1+?$ 26. $\mathbb{Q}f1$ f4 27. $\mathbb{Q}a8$ e3 28. fe fe (рис. 235).

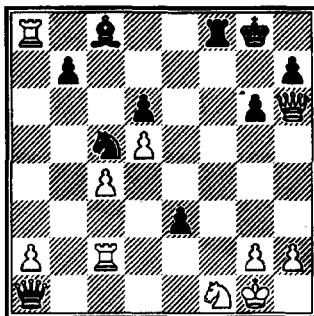


Рис. 235. Машина спасается жертвой ферзя.

29. $\mathbb{Q}:f8+!!$ $\mathbb{Q}:f8$ 30. $\mathbb{Q}:c8+$ $\mathbb{Q}f7$. Ничья. После 31. $\mathbb{Q}e2$ белые съедают опасную пешку, а две их ладьи, соединившись, не уступают ферзю. На первый взгляд при 31... $\mathbb{Q}e4$ 32. $\mathbb{Q}:e3$ $\mathbb{Q}d2$ машине совсем плохо, но издалека Каспаров не заметил, что в случае 33. $\mathbb{Q}c7+$ $\mathbb{Q}f6$ 34. $\mathbb{Q}e6+!$ $\mathbb{Q}g5$ 35. $\mathbb{Q}f7$ неприятельский конь защищен.

В третьей партии электронный мозг сравнял счет. Компьютер остроумно защищался и отбил угрозы соперника. Ничья была неизбежна, но Гарри опять сделал резкий ход, теперь уже проигрывающий. В четвертой машина захватила инициативу,

но все закончилось мирно. Тот же результат и в острой пятой партии. В заключительной схватке Каспаров переиграл соперника по всем статьям, но когда пришла пора собирать плоды, неожиданно последовало соглашение на ничью — 3:3. Возможно, Гарри вспомнил ситуацию шестилетней давности, когда он при равном счете проиграл шестую партию «Дип Блю», и теперь не стал испытывать судьбу.

В конце 2003 г. прошел еще один матч Каспарова с машиной. Опять с классическим контролем, но совсем короткий — из четырех партий. Его провела американская фирма «Х3Д», специализирующаяся в преобразовании предметов на экране в трехмерное изображение. Для человека, надевающего особые черные очки, виртуальная доска представляется как абсолютно реальная — он видит ее в пространстве, парящей перед глазами. Программа играла на компьютере с четырьмя процессорами, работающими параллельно, что позволяло ей просчитывать около 4 млн вариантов в секунду.

Матч с новой модификацией «Фрица» тоже завершился мирно — 2:2. В одной партии человек зевнул тактический удар, в другой беспомощность проявила машина, еще две закончились вничью без приключений. Партии демонстрировались в прямом эфире по одному из крупнейших спортивных каналов США и в Интернете на весь мир. В течение недели многие информационные программы начинались с сообщения об этом матче. Даже поединки за шахматную корону редко удостаиваются такой чести. Вот вторая встреча, которая закончилась довольно неожиданно.

«Фриц» — Каспаров

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♜f3 ♜c6 3. ♜b5 ♜f6 4. d3. В закрытой системе белым трудно рассчитывать на перевес, но зато ферзи остаются на доске. 4...d6 5. c3 g6 6. 0-0 ♜g7 7. ♜bd2 0-0 8. ♜e1 ♜e8 9. d4 ♜d7 10. d5. Теперь игра напоминает староиндийскую защиту — когда-то любимый дебют Каспарова. 10...♜e7 11. ♜d7 ♜:d7 12. a4. Ясно, что черные будут давить на королевском флан-

re, и белые развиваются инициативу на ферзевом. 12...h6. Сразу играть f7-f5 не стоит ввиду ♜f3-g5-e6. 13. a5 a6 14. b4 f5 15. c4 ♜f6 16. ♜b2 ♜d7 17. ♜b1 g5 18. ef ♜:f5. Положение черных предпочтительнее, но лучше сразу 18...g4, и после 19. ♜h4 ♜f5 20. ♜f5 ♜:f5 21. ♜f1 h5 возникала примерно та же позиция, что и в партии, но с лишними темпами у черных. 19. ♜f1 ♜h7 20. ♜3d2 ♜f5. Препятствуя ♜f1-g3-e4. 21. ♜e4 ♜:e4 22. ♜:e4 h5 23. ♜d3 ♜f8 24. ♜be1 ♜f7 25. ♜1e2 g4 26. ♜b3 ♜af8. При ферзе на d3 пешка ab после с4-с5-с6 оказывалась в опасности, поэтому черные не торопятся уводить ладью из угла. Теперь же они подтягивают ее к месту событий. 27. c5 ♜g6 28. cd cd 29. b5 ab 30. ♜:b5 ♜h6 31. ♜b6 ♜h7 32. ♜b4 ♜g7?? Удивительный зевок для белкового супергрессмейстера (рис. 236).

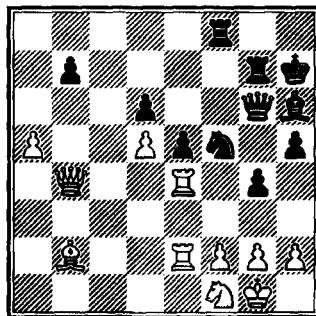


Рис. 236. Каспаров зевает удар в центре.

Классический пример инерционности мышления. Разумеется, Каспаров видел, что ладья f8 находится под рентгеном ферзя b4, но ведь она только что была защищена трижды — королем, другой ладьей и слоном. Гарри не учел, что король отступил на предыдущем ходу, а теперь ушла и ладья, к тому же прервав контроль слона над полем f8. При 32...♜g8 черные сохранили все плюсы, хотя 33. ♜g3, скорее всего, вело к ничьей — момент для решающей атаки упущен.

33. ♜:e5! В этом все дело — теряется коренная пешка. 33... de 34. ♜:f8 ♜d4 35. ♜d4 ed 36. ♜e8 ♜g8 37. ♜e7+ ♜g7 38.

\mathbb{Q} d8! Угрожая матом, белый ферзь приближается к пешке b7.
38.. $\mathbb{E}g8$ 39. $\mathbb{W}d7+$. Черные сдались. Нет смысла дожидаться
39. $\mathbb{E}g7$ 40. $\mathbb{W}c8$ $\mathbb{E}g8$ 41. $\mathbb{W}:b7+$.

Таким образом, после пяти матчей паритет сохранялся. Каспаров один матч проиграл «Дип Блю», во втором взял реванш. Мирно завершились три остальных матча между шахматным и электронным королями. Однако вскоре равновесие было нарушено. В конце 2006 г. в Бонне состоялся очередной матч из шести партий между чемпионом мира Крамником и новейшей версией «Фрица». Его организаторы все обставили так, словно это был поединок за шахматную корону. Внимание прессы было не меньше, чем к недавней встрече за корону Крамник – Топалов.

Программа использовала четырехпроцессорный компьютер и анализировала до 10 млн ходов в секунду. Существенно, что, пока он пользовался дебютной базой, Крамнику разрешалось следить за его выбором. Оператор отворачивал монитор только тогда, когда машина начинала действовать самостоятельно. И, главное, для тренировки Крамнику была заранее предоставлена последняя, 10-я версия «Фрица». Увы, никакие поблажки не помогли. Во второй партии Крамник умудрился зевнуть мат, и шестая закончилась его полным фиаско. Остальные четыре проходили с некоторой инициативой «Фрица», но не дали результата. Приведем обе победы «Фрица» над шахматным королем (выигранные партии гроссмейстеров можно найти в любой шахматной книге, а в данной предпочтение отдается творческим достижениям машин).

«Фриц» – Крамник

Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. e4 b5!? Редкий ход, но вскоре игра сводится к обычным вариантам славянской защиты. 4. a4 c6 5. $\mathbb{Q}c3$ b4 6. $\mathbb{Q}a2$ $\mathbb{Q}f6$ 7. e5 $\mathbb{Q}d5$ 8. $\mathbb{Q}:c4$ e6 9. $\mathbb{Q}f3$ a5 10. $\mathbb{Q}g5$ $\mathbb{W}b6$ 11. $\mathbb{Q}c1$ $\mathbb{Q}a6$ 12. $\mathbb{W}e2$ h6 13. $\mathbb{Q}e3?$ $\mathbb{Q}:c4$ 14. $\mathbb{W}c4$ $\mathbb{Q}d7$ 15. $\mathbb{Q}b3$ $\mathbb{Q}e7$ 16. $\mathbb{E}c10-0$ 17. 0-0 $\mathbb{E}fc8$ 18. $\mathbb{W}e2$ c5! 19. $\mathbb{Q}fd2$ $\mathbb{W}c6!$ Черные собираются забрать пешку a4, после чего у них образуется

опасная проходная. 20. $\mathbb{W}h5 \mathbb{W}:a4$ 21. $\mathbb{Q}:c5 \mathbb{Q}:c5$ 22. $dc \mathbb{Q}:e3$. Неудачно маневрировавший слон подвел машину, сдвоение пешек малоприятно. 23. $fe \mathbb{Q}:c5$ 24. $\mathbb{W}:f7+\mathbb{Q}h8$ 25. $\mathbb{W}f3 \mathbb{Q}f8$ 26. $\mathbb{W}e4 \mathbb{W}d7$ 27. $\mathbb{Q}b3 \mathbb{Q}b6$ 28. $\mathbb{Q}fd1 \mathbb{W}f7$ 29. $\mathbb{Q}f1 \mathbb{W}a7!$ У Крамника серьезные намерения, и он отказывается от повторения ходов. 30. $\mathbb{Q}f8+ \mathbb{Q}:f8$ 31. $\mathbb{Q}d4 a4?$ Выпускает перевес, между тем простое 31... $\mathbb{Q}:d4$ 32. $ed a4$ позволяло без риска играть на победу. 32. $\mathbb{Q}:e6 \mathbb{Q}:e3+$ 33. $\mathbb{Q}h1 \mathbb{Q}:c1$ 34. $\mathbb{Q}f8 \mathbb{W}e3??$

Трагический случай, подобного которому не знает шахматная история — чемпион мира в серьезной партии зевает мат в один ход! Логичным финалом было 34... $\mathbb{W}g8$ 35. $\mathbb{Q}g6 \mathbb{W}e3$ 36. $\mathbb{W}d5+ \mathbb{Q}h7$ 37. $\mathbb{Q}f8+ \mathbb{Q}h8$ 38. $\mathbb{Q}g6+$ с вечным шахом. Но Владимиру очень хотелось выиграть... Забавно, что во второй партии матча с Топаловым Крамник тоже мог получить мат, но Веселин этого не заметил. А вот электронный гроссмейстер своего не упустил.

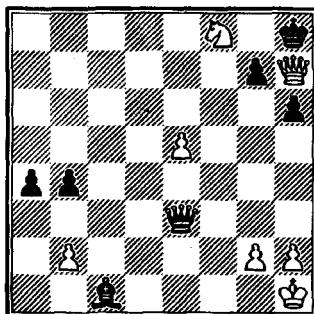


Рис. 237. Компьютер объявляет мат чемпиону мира.

35. $\mathbb{W}h7X!$ (рис. 237). Никакого цейтнота не было, и Крамник с нескрываемым удивлением обнаружил, что его король заматован. Как объяснить этот ужасный зевок? Возможно, дело в том, что конь, поддерживающий белого ферзя, забрался слишком глубоко в тыл противника, на поле f8, и черные выпустили его из вида. Действительно, на доске весьма необычная матовая конструкция.

«Фриц» — Крамник

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. $\mathbb{Q}f3$ d6 3. d4 cd 4. $\mathbb{Q}:d4$ $\mathbb{Q}f6$ 5. $\mathbb{Q}c3$ a6 6. $\mathbb{Q}c4$ e6 7. 0-0 $\mathbb{Q}e7$ 8. $\mathbb{Q}b3$ $\mathbb{Q}c7$ 9. $\mathbb{Q}e1!?$ $\mathbb{Q}c6$ 10. $\mathbb{Q}e3!?$ В заключительный день «Фриц» демонстрирует фантастические, немыслимые шахматы. Поле e3 предназначено в «сицилианке» для слона. Начинающим в таких случаях объясняют, что в дебюте надо развиваться, не стоит ходить одной и той же фигурой и т. д. Но компьютер не опирается на общие соображения, а исходит только из сухого расчета. 10..0-0 11. $\mathbb{Q}g3!$ Отвергая все позиционные принципы. Видно, «Фриц» установил, что ради появления ладьи на вертикали «g» стоит пожертвовать несколькими темпами. И действительно, эта ладья принесет черным массу неприятностей (рис. 238).

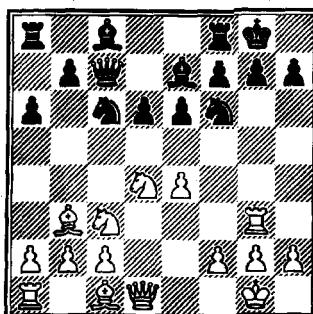


Рис. 238. Все готово к опасной атаке.

11... $\mathbb{Q}h8$ 12. $\mathbb{Q}:c6!?$ Еще один странный ход, робот по-прежнему отказывается от логичного 12. $\mathbb{Q}e3$. 12...bc 13. $\mathbb{Q}e2$ a5 14. $\mathbb{Q}g5$ $\mathbb{Q}a6$ 15. $\mathbb{Q}f3$ $\mathbb{Q}ab8$ 16. $\mathbb{Q}e1$. Вот и другая ладья вышла на e1, развитие фигур завершено. 16..c5 17. $\mathbb{Q}f4$ $\mathbb{Q}b7$ 18. $\mathbb{Q}c1$ $\mathbb{Q}g8$. Черные переходят в глухую защиту. 19. $\mathbb{Q}b1!$ А машина пользуется временем, чтобы перегруппировать фигуры. 19... $\mathbb{Q}f6$ 20. c3 g6 21. $\mathbb{Q}a3$ $\mathbb{Q}c6$ 22. $\mathbb{Q}h3$ $\mathbb{Q}g7$ 23. $\mathbb{Q}g3$ a4 24. $\mathbb{Q}c2$ $\mathbb{Q}b6!?$ Крамник не выдерживает напряжения и допускает решающий промах. После 24..e5 все было впереди (рис. 239).

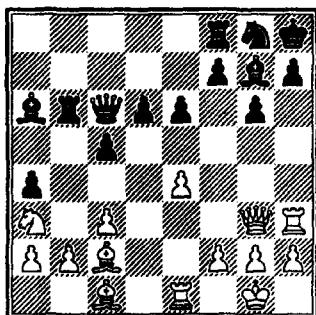


Рис. 239. «Фриц» начинает решающую комбинацию.

25. $\text{e}5!$ Эффектное решение, которое черные явно недооценили. 25... $\text{d}e$ 26. $\text{f}:e5!$ $\text{f}6$ 27. $\text{h}4$. Атака на королевском фланге завершается выигрышем пешки на ферзевом. Настоящая учебная партия! 27... $\text{b}7$ 28. $\text{e}1 \text{h}5$ 29. $\text{f}3 \text{h}7$ 30. $\text{a}:a4$ $\text{c}6$ 31. $\text{f}:c6$. Ферзи наконец покинули доску, но перевес белых слишком велик. 32. $\text{a}4 \text{b}6$ 33. $\text{b}3 \text{g}8$ 34. $\text{c}4 \text{d}8$ 35. $\text{b}5 \text{b}7$ 36. $\text{f}e3 \text{h}6$ 37. $\text{e}5 \text{c}1$ 38. $\text{c}1 \text{c}6$ 39. $\text{c}3 \text{c}7$ 40. $\text{b}5 \text{f}8$ 41. $\text{a}4 \text{dc}8$ 42. $\text{d}1 \text{g}7$ 43. $\text{d}6 \text{f}6$ 44. $\text{e}2 \text{e}5$ 45. $\text{ed}2 \text{g}5$ 46. $\text{b}6 \text{b}8$ 47. $a4$. Черные сдались. Проходная пешка беспрепятственно идет в ферзи.

Итак, машина разгромила чемпиона мира со счетом 4:2, причем впервые в подобных матчах она не проиграла ни одной партии. Без преувеличения можно сказать, что это был черный день в истории человечества.

Помимо программ «Фриц» и «Джуниор», которые не раз становились чемпионками мира, в последние годы появились и новые, обладающие неимоверной силой, например, «Гидра» из Арабских Эмиратов и «Рыбка» (США). Они буквально наносят гроссмейстерам сокрушительные поражения. Райлих мечтает усовершенствовать «Рыбку», рейтинг которой уже сейчас превосходит 3000, до такой степени, чтобы ни один человек, в том числе чемпион мира, не смог сделать с ней ничью, даже играя белыми!

Да, похоже, эра новых шахматных чемпионов наступила окончательно и бесповоротно!

МАШИНА АНАЛИЗИРУЕТ

Почти в каждой главе нашей книги сообщалось об успехах машин в решении тех или иных математических задач и головоломок. Что говорить, если даже знаменитая проблема четырех красок (она упоминалась выше) была решена после вмешательства компьютера. Можно сказать, что и последняя глава посвящена головоломкам, но с более шахматным уклоном — речь в ней пойдет об окончаниях с малым числом фигур.

Если в практической игре гроссмейстеры еще способны противостоять компьютеру, то в анализе окончаний, особенно ма-лофигурных, человек значительно уступает. С точки зрения ма-шины, это в самом деле головоломки, которые она щелкает, как орехи. Однако при исследовании тех или иных видов эндшпиля используются не игровые программы, а специальные. При этом машины продвигают вперед теорию шахматных окончаний и порой удивляют своими уникальными находками.

Описанный ниже алгоритм ранжирования, основанный на ретроспективном анализе позиций, позволяет дать всем окончаниям того или иного вида однозначные оценки — выигрыш одной из сторон или ничья, т. е. анализ является исчерпывающим и похож на математическую теорему. Но чтобы доказать эту «шахматную теорему», программистам приходится преодолевать массу технических трудностей, связанных с переработкой огромного объема информации.

В дальнейшем для удобства мы всюду рассматриваем окончания, в которых белые стремятся к победе, а черные борются за ничью. Предполагается, что уже известны оценки всех «младших эндшпилей», возникающих при изменении материала.

Перед тем как описать необходимый алгоритм, введем следующее определение. Рангом выигранной для белых позиции называется наименьшее число ходов, за которое при любых

действиях черных они объявляют мат или переводят игру в выигранный младший эндшпиль. Выигрыш белых в n ходов в данном случае означает, что перед нами позиция n -го ранга.

На первом шаге алгоритма проделаем следующие операции. Разобъем все окончания исследуемого вида на два множества: Б – очередь хода белых и Ч – очередь хода черных. Все позиции из Ч, в которых король заматован или черные вынуждены перейти в проигранный младший эндшпиль, отнесем к нулевому рангу. Множество их обозначим РЧ₀. Удалим РЧ₀ из Ч, оставшиеся позиции – неранжированные черные, НЧ.

Выделим в Б все позиции, в которых у белых есть хоть один ход, ведущий в РЧ₀. Это позиции ранга 1 (выигрыш в один ход), РБ₁. Удалим РБ₁ из Б, оставшиеся позиции – неранжированные белые, НБ. Множества НЧ и НБ после каждого шага алгоритма сокращаются. Выделим теперь в НЧ все позиции, в которых любой ход черных ведет в РБ₁. Это тоже позиции ранга 1 (при любом ходе белые сразу выигрывают), РЧ₁. Удалим РЧ₁ из НЧ. Первый шаг алгоритма закончен, все готово для следующего.

Опишем сразу ($n+1$)-й шаг, предполагая, что n шагов уже выполнено и получены множества ранжированных позиций РБ₁, ..., РБ _{n} , а также РЧ₁, ..., РЧ _{n} . Текущие неранжированные позиции по-прежнему обозначаются через НБ и НЧ.

В НБ выделим позиции, в которых у белых есть хоть один ход, ведущий в РЧ _{n} . Это позиции ранга $n+1$, они составляют множество РБ _{$n+1$} . В НЧ выделим позиции, в которых любой ход черных ведет в РБ _{$n+1$} или в позицию меньшего ранга. Это тоже позиции ранга $n+1$, множество РЧ _{$n+1$} .

Процесс ранжирования заканчивается, когда очередное множество РБ или РЧ оказывается пустым. Позиции, оставшиеся в НБ и НЧ, не имеют ранга, в них у белых нет выигрыша.

На основе описанного алгоритма составляется программа для данного вида окончаний, и процесс ранжирования, очевидно, проводит компьютер. В результате он находит все выигранные позиции и определяет их ранг. В выигранных позициях с ходом белых указывается ход, быстрее всего ведущий к цели, с ходом черных – максимально оттягивающий неизбежное.

Перебор в ретроанализе действительно идет не вперед, как обычно, а назад — от матовых позиций или позиций, не вызывающих сомнений в оценке, к исходной. Полный перебор при этом не проводится, но рассматриваются все важнейшие ветви дерева (после каждого шага ранг позиций понижается на единицу).

Напомним, что метод ранжирования был уже рассмотрен нами в главе 6 применительно к более простому случаю — задаче о неприкосновенном короле. Для реализации алгоритма на практике необходимо выполнение двух условий: 1) компьютер должен уметь оценивать все позиции младшего эндшпилля; 2) число различных окончаний данного типа должно быть не слишком велико. На данный момент досконально изучены все окончания с шестью фигурами и меньше.

Вспомним теперь один исторический случай, который произошел 40 лет назад. В 1968 г. состоялся традиционный матч Москва — Ленинград. При счете 39,5:39,5 (игра проходила на 40 досках в два круга) оставалась одна незаконченная партия, которая и решала судьбу матча. Ленинградец, игравший черными, имел лишнюю пешку, и в случае успеха его команда побеждала. Доигрывание длилось долго, гости из Ленинграда уже опаздывали на поезд, и партия была отдана на присуждение в позиции на рис. 240.

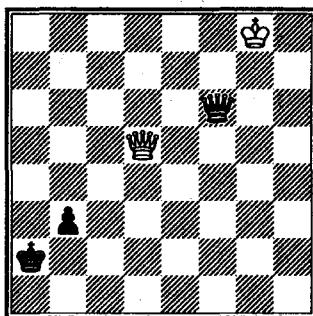


Рис. 240. Как поссорились Москва и Ленинград.

Анализом занималась авторитетная гроссмейстерская комиссия, но вся беда заключалась в том, что, хотя окончания «ферзь и коневая пешка против ферзя» исследовались много лет, к тому времени теорией точно не было установлено, какие из них выиграны, а какие ничейны. Что касается данной позиции, то жюри в растерянности присудило ничью, вызвав возражение со стороны ленинградцев. Забавный эпизод, из-за которого, между прочим, давнишняя традиция матчей Москва — Ленинград была прервана на много лет. А если бы компьютер тогда разбирался в таких позициях, недоразумения не произошло бы. Вскоре программисты занялись данным эндшпилем, и это был первый опыт использования метода ранжирования для практических целей. В итоге была обнаружена поистине уникальная выигранная позиция с ходом черных, в которой при наилучшей игре обеих сторон переход в младший эндшпиль происходил только на 59-м ходу (рис. 241).

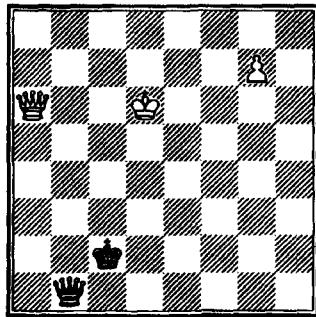


Рис. 241. Выигрыш в 59 ходов.

Приведем основной вариант. 1... ♕b4+ 2. ♔e6 ♕g4+ 3. ♔f6. Как ни странно, 3. ♔f7? уже ведет к ничьей после 3... ♕f5+. 3... ♕f4+ 4. ♔g6 ♕e4+ 5. ♔g5 ♕e3+ 6. ♔h5 ♕f3+ 7. ♔h6 ♕h1+ 8. ♔g5 ♕d5+ 9. ♔f6 ♕d4+ 10. ♔f7 ♕d7+ 11. ♔g6 ♕g4+ 12. ♔h7 ♕h3+ 13. ♔g8! Естественное выглядит 13. ♕h6, но при 13... ♕d7! победа была бы упущена. 13... ♕f5 14. ♕a2+ ♔c1 15. ♕h2! ♕d5+ 16. ♔h8 ♕d4 17.

$\mathbb{W}c7+$ $\mathbb{Q}b1$. Белый ферзь улучшил свое положение и одновременно защитил пешку. Теперь король может выбраться из угла. 18. $\mathbb{Q}h7 \mathbb{W}e4+$ 19. $\mathbb{Q}h6 \mathbb{W}e3+$ 20. $\mathbb{Q}g6 \mathbb{W}e6+$ 21. $\mathbb{Q}g5 \mathbb{W}d5+$ 22. $\mathbb{Q}f6 \mathbb{W}f3+$ 23. $\mathbb{Q}e7 \mathbb{W}e4+$ 24. $\mathbb{Q}d8 \mathbb{W}a8+$ 25. $\mathbb{Q}d7 \mathbb{W}d5+$ 26. $\mathbb{Q}c8 \mathbb{W}e6+$. Ближайшими ходами белый король маневрирует на вертикалях «а», «б» и «с». 27. $\mathbb{Q}b8 \mathbb{W}e8+$ 28. $\mathbb{Q}a7 \mathbb{W}a4+$ 29. $\mathbb{Q}b6 \mathbb{W}b3+$ 30. $\mathbb{Q}a6 \mathbb{W}a2+$ 31. $\mathbb{Q}a5 \mathbb{W}g8$. Шахи кончились, и черный ферзь вынужден отступить. Белые же, наоборот, централизуют своего ферзя, занимая ключевое поле d4. 32. $\mathbb{W}b4+$ $\mathbb{Q}a2$ 33. $\mathbb{W}d4!$ $\mathbb{W}e6+$ 34. $\mathbb{Q}b5 \mathbb{W}e8+$ 35. $\mathbb{Q}b4 \mathbb{W}b8+$ 36. $\mathbb{Q}c3 \mathbb{W}g3+$ 37. $\mathbb{Q}d2 \mathbb{W}g2+$ 38. $\mathbb{Q}e1 \mathbb{W}h1+$ 39. $\mathbb{Q}f2 \mathbb{W}h2+$ 40. $\mathbb{Q}f3 \mathbb{W}h3+$ 41. $\mathbb{Q}f4 \mathbb{W}h2+$ 42. $\mathbb{Q}g5 \mathbb{W}g3+$. Если раньше белый король делал единственно возможные ходы, то при ферзее на d4 у него больше свободы. Однако впереди еще немало подводных камней, например, сейчас 43. $\mathbb{W}g4$ вело к ничьей. 43. $\mathbb{Q}f6 \mathbb{W}f3+$ 44. $\mathbb{Q}e6 \mathbb{W}c6+$ 45. $\mathbb{Q}e5 \mathbb{W}e8+$ 46. $\mathbb{Q}f4 \mathbb{W}f7+$ 47. $\mathbb{Q}g3 \mathbb{W}g6+$ 48. $\mathbb{Q}h3 \mathbb{W}h7+$ 49. $\mathbb{Q}g2 \mathbb{W}g6+$ 50. $\mathbb{Q}f1 \mathbb{W}b1+$ 51. $\mathbb{Q}e2 \mathbb{W}b5+$ 52. $\mathbb{Q}d2 \mathbb{W}b3$ 53. $\mathbb{Q}a7+\mathbb{Q}b2$ 54. $\mathbb{W}f2$. Ферзь встал в засаду. 54... $\mathbb{W}g8$ 55. $\mathbb{W}b6+$ $\mathbb{Q}a3$ 56. $\mathbb{W}b7 \mathbb{Q}a4$ 57. $\mathbb{Q}c3 \mathbb{Q}a5$ 58. $\mathbb{W}b4+\mathbb{Q}a6$ 59. $\mathbb{W}c4+$. Наконец-то белые разменивают ферзей и проводят свою пешку.

Напомним, что в шахматном кодексе имеется пункт, согласно которому партия заканчивается вничью, если обеими сторонами сделано 50 ходов, в течение которых ни одна из фигур не была взята и ни одна из пешек не сдвинулась с места. Как мы видим, в окончаниях «ферзь и пешка против ферзя» компьютер нашел выигрышные позиции, требующие более 50 ходов, т. е. это правило надо уточнять. Впервые машина вмешалась в шахматный кодекс!

В дальнейшем эндшпиль был исследован вдоль и поперек, с пешкой на любом поле, и, в частности, ЭВМ доказала, что позиция на рис. 241 ничейна, т. е. присуждение ничьей в матче двух городов было верным!

Перейдем к ладейным окончаниям, которые встречаются гораздо чаще ферзовьих. Одним из наиболее распро-

странных и вместе с тем довольно сложных эндшпилей является «ладья и пешка против ладьи». На рис. 242 еще одна рекордная позиция. Ход черных, и соотношение сил меняется только на 61-м ходу: белая пешка превращается в ферзя.

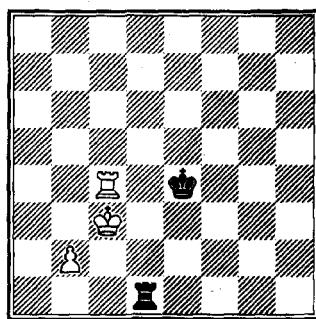


Рис. 242. Выигрыш в 61 ход.

А на рис. 243 настоящая головоломка. Представьте себе, что вы играете белыми, сейчас ход противника и вам разрешено поставить своего короля на любое свободное поле доски. Какое из них следует выбрать, чтобы добиться победы? Удивительно, но такое поле, как установил компьютер, всего одно: белые берут верх только при короле на e8!

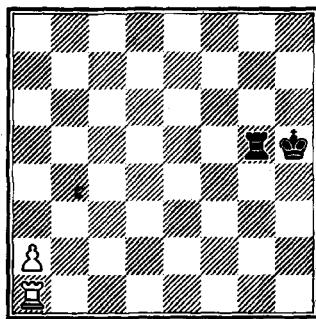


Рис. 243. Куда поставить короля?

Среди пятифигурных окончаний одно из самых интересных – «ладья и слон против ладьи». Оно считается ничейным, но исключений предостаточно, и на практике сильнейшая сторона часто берет верх. На рис. 244 рекордная по продолжительности игры позиция, в ней мат дается на 65-м ходу, опять с нарушением правила 50 ходов (в данном положении, как и во всех последующих рекордах, ход белых).

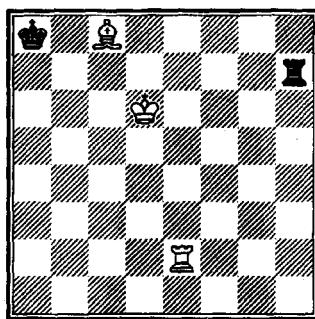


Рис. 244. Мат в 65 ходов.

Нхождение компьютерами позиций, в которых для победы требуется более 50 ходов, привело к тому, что в 1980-х гг. в кодекс были внесены дополнения, а именно число 50 было увеличено до 100 для трех видов окончаний:

- 1) ладья и слон против ладьи;
- 2) два коня против блокированной пешки;
- 3) белые ладья и пешка a2 против чернопольного слона и пешки a3 (а также симметричные позиции).

Рассмотрим второй вид. Два коня, как известно, сами по себе не матуют одинокого короля. Другое дело, если его сопровождает пешка. Тогда во многих случаях, если один из коней (или король) блокирует ее, выигрыш возможен. На рис. 245, а позиция с крайней пешкой h, которая сдвигается с места только на 70-м ходу.

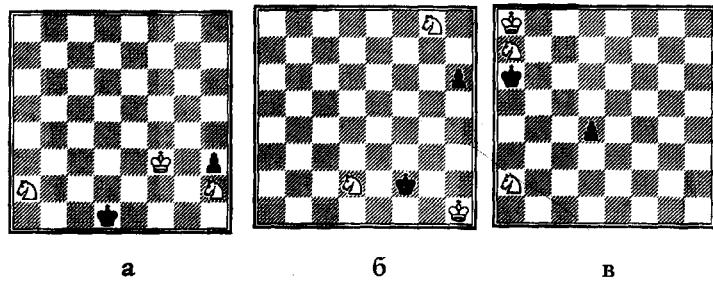


Рис. 245. Рекорды в редком окончании.

На рис. 245б рекордная по длительности игры позиция. На 114-м ходу пешка становится ферзем, и на 115-м черные получают мат. Правило 50 ходов здесь не нарушается: пешка делает шаг вперед на 16-м, 24-м, 69-м, 113-м и 114-м ходах. А вот на рис. 245в находка компьютера с пешкой в центре доски, здесь пешка вынуждена простоять на месте 82 хода.

Компьютерный анализ эндшпилля «ладья и слон против ладьи» весьма ценен для теории, но интересно и окончание «ладья и конь против ладьи». До вмешательства машины оно было мало исследовано и считалось абсолютно ничейным. Но выяснилось, что и здесь категорические оценки рискованы — процент выигранных позиций довольно высок! В рекордной позиции (рис. 246) белые матуют в 37 ходов.

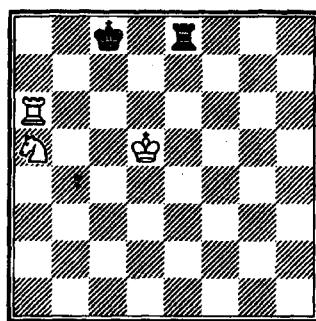


Рис. 246. Мат в 37 ходов.

В свое время много споров у шахматных этюдистов вызвало окончание «два разноцветных слона против коня». В своих произведениях они исходили из того, что выигрыша нет, но компьютер разбил этот вывод в пух и прах, доказав, что сильнейшая сторона при своем ходе почти всегда побеждает. А в рекордной позиции (рис. 247) конь теряется на 67-м ходу. Еще один серьезный удар по правилу 50 ходов!

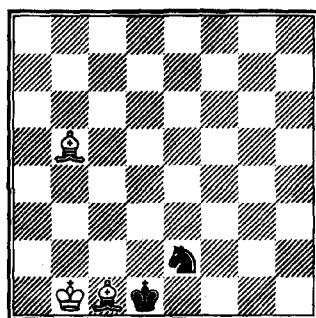


Рис. 247. Выигрыш
в 67 ходов.

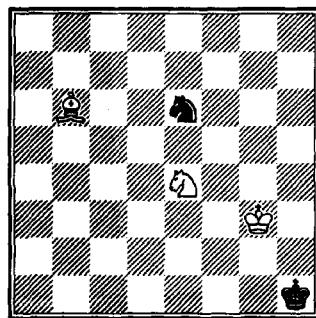


Рис. 248. Выигрыш
в 77 ходов.

Итак, два слона справляются с конем, а слон с конем? И здесь в общем случае позиция выигранна, конь погибает не позднее 77-го хода (рис. 248).

Все приведенные в этой главе позиции вполне годятся для шахматной книги рекордов Гиннесса, но соответствующие варианты для экономии места мы вынуждены опустить.

На очереди окончания «ферзь против двух легких фигур». В принципе, компьютер легко ориентируется в них, но иногда для победы требуется целая партия.

На рис. 249 показаны все три рекордные позиции. Со слоном и конем белые справляются за 42 хода (рис. 249а), с двумя конями — за 63 (рис. 249б) и с двумя слонами — за 71 (рис. 249в).

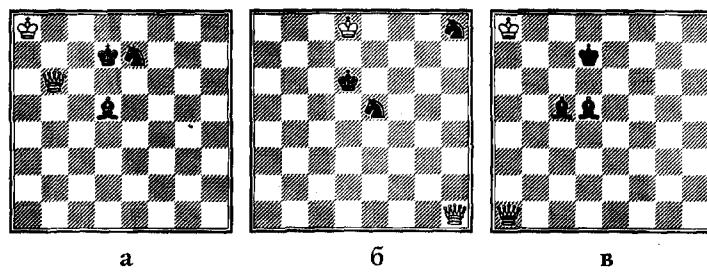


Рис. 249. Ферзь против двух легких фигур.

Упомянем и другие пятифигурные окончания, которые еще в 1990-х гг. попали под компьютерный микроскоп: «ферзь против ладьи и легкой фигуры, против ладьи и пешки, против двух ладей», «ладья с пешкой против легкой фигуры» и т. д. Интересен для теории эндшпиль «ферзь с легкой фигурой против ферзя». Посмотрим на одном практическом примере, как преуспел компьютер в этой области (рис. 250).

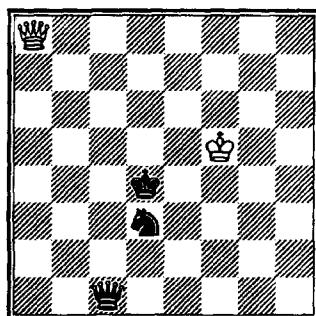


Рис. 250. Выигрыш или ничья?

В этой позиции при ходе черных была отложена партия Лендъел – Леви, сыгранная более 30 лет назад (Куба, 1972), – тогда машины были еще не так сильны, и существовало откладывание! Хотя Леви удалось взять верх, осталось много вопросов: закономерен ли результат, лучшим ли образом действовали соперники и т. д. Только два десятилетия спустя разработанная

программа расставила точки над i, причем выяснилось, что оба партнера играли окончание из рук вон плохо.

Вот как закончилась партия: 66... $\mathbb{f}4+$ 67. $\mathbb{g}e6$ $\mathbb{h}6+$ 68. $\mathbb{d}7$ $\mathbb{g}7+$ 69. $\mathbb{c}8$ $\mathbb{f}8+$ 70. $\mathbb{b}7$ $\mathbb{c}5+$ 71. $\mathbb{a}7$ $\mathbb{e}7+$ 72. $\mathbb{b}6$ $\mathbb{d}7+$ 73. $\mathbb{c}7$ $\mathbb{e}5+$ 74. $\mathbb{b}8$ $\mathbb{d}8+$ 75. $\mathbb{b}7$ $\mathbb{d}7+$ 76. $\mathbb{b}6$ $\mathbb{c}4+$ 77. $\mathbb{a}6$ $\mathbb{d}6+$ 78. $\mathbb{b}7$ $\mathbb{d}7+$ 79. $\mathbb{b}8$ $\mathbb{d}8+$ 80. $\mathbb{b}7$ $\mathbb{d}6+$ 81. $\mathbb{a}7$ $\mathbb{a}5+$ 82. $\mathbb{b}8$ $\mathbb{b}6+$ 83. $\mathbb{b}7$ $\mathbb{b}7X$.

Компьютер установил, что игра была далека от идеальной, более того, Леви два раза выпустил из рук победу, а Лендель, в свою очередь, дважды упустил ничью. При этом машина сообщила, что в позиции на рис. 250 при оптимальной игре черные выигрывают в 14 ходов — ставят мат или забирают ферзя. Приведем снова это окончание, но уже как бы прокомментированное компьютером.

66... $\mathbb{f}4+$ (13). В скобках всякий раз указывается, сколько ходов осталось черным до победы после данного хода той или иной стороны — по существу, ранг выигранной позиции. Первый шах правильный, поэтому до выигрыша осталось не 14 ходов, а 13. 67. $\mathbb{e}6$ (12) $\mathbb{h}6+??$ Упускает победу, к цели вело 67... $\mathbb{c}5+$ (12). 68. $\mathbb{d}7??$ (8). А сейчас белые упускают ничью, которая достигалась при помощи 68. $\mathbb{e}7$. 68... $\mathbb{g}7+??$ Опять упускает победу, решало 68... $\mathbb{c}5+$ (8). 69. $\mathbb{c}8??$ (5). Белые упускают ничью — 69. $\mathbb{e}6$. 69... $\mathbb{f}8+?$ (11). На конечный результат это не влияет, но черные теряют много времени, быстрее вело к цели 69... $\mathbb{g}8+$ (5). 70. $\mathbb{b}7$ (10) $\mathbb{c}5+$ (10) 71. $\mathbb{a}7$ (9) $\mathbb{e}7+?$ (16). Этот шах отбрасывает черных на семь ходов назад, следовало продолжать 71... $\mathbb{f}7+$ (9). 72. $\mathbb{b}6$ (15) $\mathbb{d}7+?$ (15) 73. $\mathbb{c}7?$ (13). На ход упорнее 73. $\mathbb{b}7$. 73... $\mathbb{e}5+$ (13) 74. $\mathbb{b}8$ (12) $\mathbb{d}8+?$ (13). Еще одна неточность, чуть быстрее решало 74... $\mathbb{e}8+$ (12). 75. $\mathbb{b}7$ (12) $\mathbb{d}7+?$ (12) 76. $\mathbb{b}6?$ (8). Белые возвращают сопернику три хода, упорнее 76. $\mathbb{a}6$ (11). 76... $\mathbb{c}4+$ (8) 77. $\mathbb{a}6$ (7) $\mathbb{d}6+?$ (7) 78. $\mathbb{b}7$ (6) $\mathbb{d}7+?$ (8). Двумя ходами быстрее решал шах с b4 или b6. 79. $\mathbb{b}8?$ (4). А здесь на три хода оттягивало поражение 76. $\mathbb{a}6$ (7). 79... $\mathbb{d}8+?$ (4) 80. $\mathbb{b}7$

(3) ♗d6+ (3) 81. ♕a7 (2) ♜a5+ (2) 82. ♔b8 (1) ♜b6+ (1) 83. ♜b7 (0) ♜:b7X (0). Выигрыш действительно в ноль ходов, поскольку белый король заматован. Несмотря на множество ошибок, черные все-таки взяли верх.

Итак, из 18 ходов Леви и 17 Лентьела только 12 были верными, при этом дважды черные упускали победу, а белые не воспользовались ничейным шансом. Да, разница между человеком и машиной в разыгрывании данного эндшпилля впечатляет. Кстати, компьютер обнаружил такие выигранные позиции, где мат дается в 35 ходов (рекорд).

А как развивались бы события, если бы обе стороны играли наилучшим образом? Вот оптимальная цепочка, указанная программой: 66... ♜f4+ 67. ♔e6 ♗c5+ 68. ♔e7 ♜h4+ 69. ♔f7 ♜h7+ 70. ♔f6 ♗e4+ 71. ♔e6 ♜g6+ 72. ♔e7 ♜f6+ 73. ♔d7 ♜f7+ 74. ♔c8 ♜g8+ 75. ♔b7 ♗c5+ 76. ♔a7 ♜a2+ 77. ♔b8 ♜h2+ 78. ♔a7 ♜c7 79. ♜b7 ♜:b7X.

До сих пор речь шла об окончаниях с пятью персонажами на доске. Разумеется, четырех- и трехфигурные представляют собой «младший эндшпиль» для соответствующих пятифигурных и, очевидно, досконально исследованы компьютером. Наибольший интерес вызывают позиции «ладья против коня». Они теоретически ничейны, но коню далеко не всегда удается улизнуть от ладьи. В рекордной позиции он теряется за 27 ходов (рис. 251).

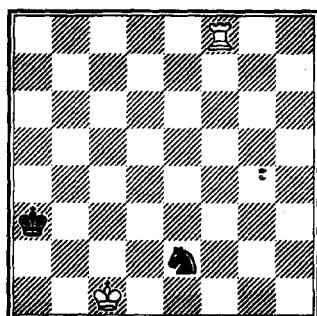


Рис. 251. Ладья против коня.

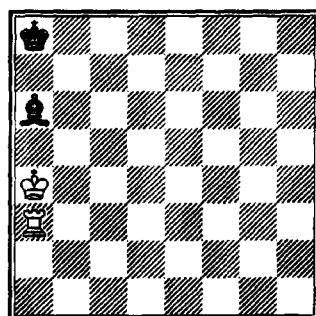


Рис. 252. Ладья против слона.

1. ♕d2! Ход на соседнее поле с2 уже упускает выигрыш. 1... ♜d4 2. ♕c3. Ошибочно 2. ♕d3, впрочем, белым предстоит сделать еще немало единственных ходов, прежде чем они окружат коня. 2... ♜b5+ 3. ♕c4 ♜d6+ 4. ♕c5 ♜b7+ 5. ♕b6 ♜d6 6. ♜f4! ♕b3 7. ♕c5 ♜b7+ 8. ♕c6 ♜d8+ 9. ♕b5 ♜e6 10. ♜f3+ ♕c2 11. ♕c4 ♕d2 12. ♜f5 ♕c2 13. ♜f2+ ♕d1 14. ♕d3 ♜c5+ 15. ♕d4 ♜b3+ 16. ♕c3 ♕e1 17. ♜b2! ♜c5 18. ♕d4 ♜e6+ 19. ♕e3 ♕d1 20. ♜b6 ♜g5 21. ♜c6! ♜f7 22. ♜c7 ♜e5 23. ♕e4! ♜g4 24. ♜g7! ♜f6+ 25. ♕e5 ♜h5 26. ♜g5, и конь пойман.

И в эндшпиле «ладья против слона» интересны позиции с наибольшей продолжительностью игры. Рекорд компьютера — мат в 29 ходов — в позиции на рис. 252.

В эндшпиле «ферзь против ладьи» в рекордной позиции ферзю-богатырю удается справиться с прямолинейной ладьей только за 31 ход. Заматовать слоном и конем одинокого короля соперника тоже требует определенного опыта. А машина установила, что на это может уйти самое большое 33 хода — рекорда для четырехфигурных окончаний. Мат двумя слонами быстрее — хватает 19 ходов. При трех фигурах на доске все слишком просто, и соответствующие позиции можно опустить.

Мы привели ряд позиций, представляющих собой исключение из правила 50 ходов. Благодаря анализам ЭВМ, в конце 1980-х гг. в очередном издании кодекса оно претерпело новые изменения. Число 50 было заменено на 75 для шести видов окончаний:

- 1) ладья и слон против ладьи;
- 2) два коня против пешки;
- 3) ферзь и пешка на предпоследней горизонтали против ферзя;
- 4) ферзь против двух коней;
- 5) ферзь против двух слонов;
- 6) два слона против коня.

Все они попали в наш перечень, т. е. исключения из правила вполне обоснованы. Поскольку в рекордных позициях выигрыш, как мы знаем, достигается между 50-м и 75-м ходами, число 100 теперь немного снизили. Эндшпиль «ладья и пеш-

ка против слона и пешки» был удален из списка, поскольку на практике почти не встречается.

Однако не успело выйти очередное издание кодекса, как компьютер обнаружил новое исключение — «слон и конь против коня», также упомянутое выше. Но и это еще не все. В 1990-х гг., когда машины принялись за шестифигурные окончания, произошли поистине сенсационные открытия...

Весьма редким является соотношение сил «ферзь и конь против двух ладей». Хотя оценка не вызывает сомнений, если ладьи удачно взаимодействуют, то для победы необходимы весьма тонкие маневры. Удивительно, но в рекордной позиции (рис. 253) белые выигрывают (забирают одну из ладей) только на 153-м ходу! Разумеется, о «положенных» 50 ходах здесь и говорить не приходится.

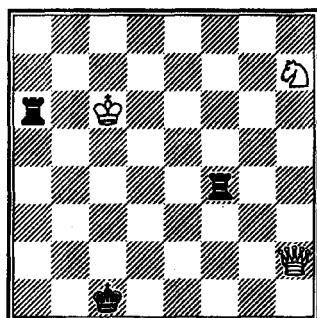


Рис. 253. Выигрыш в 153 хода!

А теперь взглянем на следующую позицию (рис. 254). Примечательный случай: если обе стороны играют наилучшим образом, то белые переходят в младший выигранный эндшпиль на... 223-м ходу!

Однако и это далеко не предел, вот другой фантастический рекорд (рис. 255а). Окончание «ладья и конь против двух коней» в общем случае выиграно за белых, а в данном примере им удается забрать одного из коней лишь на... 243-м ходу! Соответствующее решение, как обычно, мы опускаем, поскольку у читателя вряд ли хватит терпения разыгрывать его на доске.

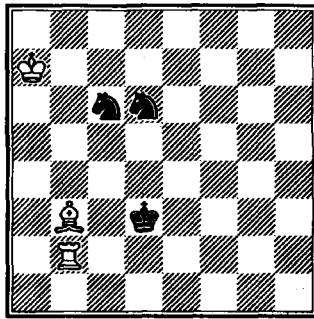


Рис. 254. Выигрыши в... 223 хода!

Интересно, однако, что через полсотни ходов возникает довольно элегантная позиция (рис. 255б), где все шесть фигур выстроились в один ряд. Впрочем, до цели белым еще очень далеко.

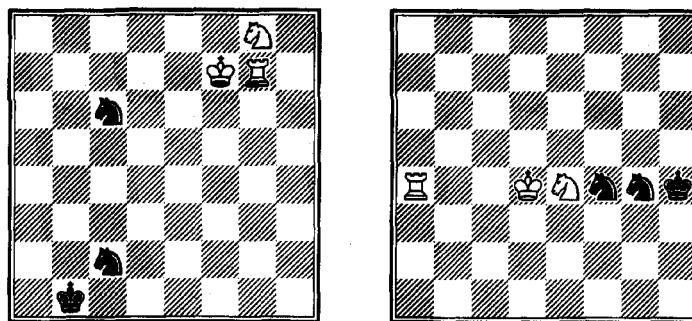


Рис. 255. Выигрыши в... 243 хода!

Итак, в очередном выпуске шахматного кодекса следовало ожидать дополнительных исключений из правила 50 ходов. В 1996 г. в Ереване состоялся конгресс ФИДЕ, на котором бурно обсуждался этот вопрос. И тут произошло совершенно неожиданное: собравшиеся эксперты долго совещались и в конце концов решили... вообще отменить все исключения из правила! Теперь в любом эндишиле предоставляется всего 50

ходов, за которые надо взять одну из фигур противника либо продвинуть вперед пешку, либо объявить мат. В самом деле, ведь для некоторых окончаний число необходимых ходов пре-восходит 200. Но не увеличивать же число 50 в правилах в пять раз! Да, похоже, машина здесь явно перестаралась...

Наш краткий рассказ о машинных достижениях в исследовании эндшпилля подошел к концу. Следует сказать, что все компьютерные находки в этой области, а точнее окончания с шестью фигурами и меньше, собраны вместе в одной компактной базе данных, разработанной Евгением Налимовым, бывшим новосибирцем, ныне сотрудником корпорации Микрософт. Эта база называется «эндшпильные таблицы Налимова».

При увеличении числа фигур возникают серьезные технические проблемы, связанные с объемом памяти и быстродействием машины. И наверняка нас ждут здесь новые сюрпризы. Вот, например, один фантастический результат для семифигурного окончания «ферзь и конь против ладьи, слона и коня». Программисты Марк Буржуцкий и Яков Коновал с помощью компьютера обнаружили настоящий монстр, позицию (рис. 256, ход черных), в которой ферзь берет коня лишь через... 517 ходов!

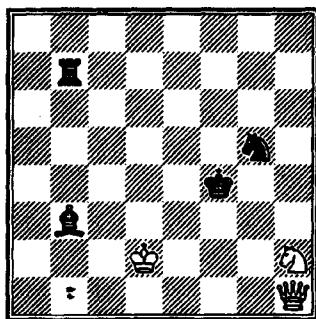


Рис. 256. Выигрыш в 517 ходов!!!

Да, остается только удивляться. Но, кто знает, может быть, в XXII в. дело дойдет и до 32 фигур на доске, и загадка шахмат будет окончательно разгадана?!

СОДЕРЖАНИЕ

От автора	5
---------------------	---

ШАХМАТНАЯ ДОСКА И ЕЕ ПЕРСОНАЖИ

Математика на 64 клетках	10
Конь-хамелеон	29
Задача о ходе коня	41
Ферзь-богатырь	58
Задача о восьми ферзях	70
Прямоугольная ладья	86
Неторопливый король	103
Стреноженный слон	115
Независимость и доминирование	121
Задачи о перестановках	138
Математические рекорды	152

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

На необычных досках	172
Цилиндрические шахматы	185
Сказочные шахматы	197
Логические игры и задачи	222
Геометрия доски	232
Симметрия и асимметрия	250

ЛЮДИ И МАШИНЫ

Математика турниров	260
Рейтинги гроссмейстеров	276
Компьютерные шахматы	286
Машина анализирует	303

Научно-популярное издание

Е. Я. Гик

МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Ответственный редактор
A. Русакова

Корректор
H. Ипатъко

Изготовление оригинал-макета
A. Дунаев
E. Гвоздева
A. Ельков

ООО «Мир энциклопедий Аванта+»
109004, Москва, Б. Факельный переулок, д. 3, стр. 2

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, проезд Ольминского, д. 3а.

Подписано в печать 27.03.09. Формат 60x90/16. Гарнитура «Лазурская».
Усл. печ. л. 20,0. Тираж 4 000 экз. Заказ № 9987.

Адрес фирменного магазина: Москва, ул. 19005 г., д. 8
Магазин работает с 10.00 до 20.00 без выходных
Адрес в Интернете: www.avanta.ru

ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству
• предоставленных диапозитивов

Б И Б Л И О Т Е К А А В А Н Т Ы +



Евгений Гик – математик, кандидат наук, мастер спорта по шахматам, член Союза писателей, автор более 150 научно-популярных, занимательных, спортивных и шахматных книг, переведенных на многие языки. В его новой книге рассказывается о различных связях между шахматами и математикой. Рассматриваются многие типы шахматно-математических задач и головоломок. Приводятся математические рекорды, исследуются геометрические свойства доски. Здесь вы найдете описания логических и занимательных игр на необычных досках, с необычными правилами и фигурами, а также обсуждение таких аспектов, как математика турнирных расписаний, вычисление рейтингов, достижения компьютеров в шахматной игре и анализ окончаний.

ISBN 978-5-98986-283-2

9 78598 862832

www.elkniga.ru