

*Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс*  
**ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**

**6. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

Оглавление

<b>Глава 15. Векторный потенциал</b>	<b>5</b>
§ 1. Силы, действующие на петлю с током; энергия диполя	5
§ 2. Механическая и электрическая энергии	9
§ 3. Энергия постоянных токов	13
§ 4. <b>В или А?</b>	15
§ 5. Векторный потенциал и квантовая механика	17
§ 6. Что истинно в статике, но ложно в динамике?	27
<b>Глава 16. Индуцированные токи</b>	<b>31</b>
§ 1. Моторы и генераторы	31
§ 2. Трансформаторы и индуктивности	37
§ 3. Силы, действующие на индуцируемые токи	40
§ 4. Электротехника	46
<b>Глава 17. Законы индукции</b>	<b>50</b>
§ 1. Физика индукции	50
§ 2. Исключения из «правила потока»	53
§ 3. Ускорение частицы в индуцированном электрическом поле; бетатрон	55
§ 4. Парадокс	58
§ 5. Генератор переменного тока	60
§ 6. Взаимная индукция	64
§ 7. Самоиндукция	67
§ 8. Индуктивность и магнитная энергия	69
<b>Глава 18. Уравнения Максвелла</b>	<b>75</b>
§ 1. Уравнения Максвелла	75
§ 2. Что дает добавка	78
§ 3. Все о классической физике	81
§ 4. Передвигающееся поле	82
§ 5. Скорость света	88
§ 6. Решение уравнений Максвелла; потенциалы и волновое уравнение	90
<b>Глава 19. Принцип наименьшего действия</b>	<b>94</b>
Добавление, сделанное после лекции	117
<b>Глава 20. Решения уравнений Максвелла в пустом пространстве</b>	<b>119</b>
§ 1. Волны в пустом пространстве; плоские волны	119
§ 2. Трехмерные волны	130
§ 3. Научное воображение	132
§ 4. Сферические волны	136
<b>Глава 21. Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами</b>	<b>142</b>
§ 1. Свет и электромагнитные волны	142
§ 2. Сферические волны от точечного источника	145
§ 3. Общее решение уравнений Максвелла	147
§ 4. Поля колеблющегося диполя	149

§ 5. Потенциалы движущегося заряда; общее решение Льенара и Вихерта	156
§ 6. Потенциалы заряда, движущегося с постоянной скоростью; формула Лоренца	161
<b>Глава 22. Цепи переменного тока</b>	<b>164</b>
§ 1. Импедансы	164
§ 2. Генераторы	171
§ 3. Сети идеальных элементов; правила Кирхгофа	175
§ 4. Эквивалентные контуры	181
§ 5. Энергия	183
§ 6. Лестничная сеть	185
§ 7. Фильтры	188
§ 8. Другие элементы цепи	193
<b>Глава 23. Полые резонаторы</b>	<b>198</b>
§ 1. Реальные элементы цепи	198
§ 2. Конденсатор на больших частотах	201
§ 3. Резонансная полость	207
§ 4. Собственные колебания полости	212
§ 5. Полости и резонансные контуры	216
<b>Глава 24. Волноводы</b>	<b>218</b>
§ 1. Передающая линия	218
§ 2. Прямоугольный волновод	223
§ 3. Граничная частота	227
§ 4. Скорость волн в волноводе	229
§ 5. Как наблюдать волны в волноводе	230
§ 6. Сочленение волноводов	232
§ 7. Типы волн в волноводе	235
§ 8. Другой способ рассмотрения волн в волноводе	236
<b>Глава 25. Электродинамика в релятивистских обозначениях</b>	<b>241</b>
§ 1. Четырехвекторы	241
§ 2. Скалярное произведение	245
§ 3. Четырехмерный градиент	249
§ 4. Электродинамика в четырехмерных обозначениях	253
§ 5. Четырехмерный потенциал движущегося заряда	254
§ 6. Инвариантность уравнений электродинамики	256
<b>Глава 26. Лоренцевы преобразования полей</b>	<b>259</b>
§ 1. Четырехмерный потенциал движущегося заряда	259
§ 2. Поля точечного заряда движущегося с постоянной скоростью	262
§ 3. Релятивистское преобразование полей	267
§ 4. Уравнения движения в релятивистских обозначениях	276
<b>Глава 27. Энергия поля и его импульс</b>	<b>282</b>
§ 1. Локальные законы сохранения	282
§ 2. Сохранение энергии и электромагнитное поле	284
§ 3. Плотность энергии и поток энергии в электромагнитном поле	286
§ 4. Неопределенность энергии поля	290

§ 5. Примеры потоков энергии	291
§ 6. Импульс поля	296
<b>Глава 28. Электромагнитная масса</b>	<b>302</b>
§ 1. Энергия поля точечного заряда	302
§ 2. Импульс поля движущегося заряда	304
§ 3. Электромагнитная масса	306
§ 4. С какой силой электрон действует сам на себя?	308
§ 5. Попытки изменения теории Максвелла	311
§ 6. Поле ядерных сил	321
<b>Глава 29. Движение зарядов в электрическом и магнитном полях</b>	<b>325</b>
§ 1. Движение в однородных электрическом и магнитном полях	325
§ 2. Анализатор импульсов	326
§ 3. Электростатическая линза	329
§ 4. Магнитная линза	330
§ 5. Электронный микроскоп	331
§ 6. Стабилизирующие поля ускорителей	333
§ 7. Фокусировка чередующимся градиентом	336
§ 8. Движение в скрещенных электрическом и магнитном полях	340

## ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

**§ 1. Силы, действующие на петлю с током; энергия диполя**

В предыдущей главе мы изучали магнитное поле, создаваемое маленькой прямоугольной петлей, по которой течет ток. Мы нашли, что это поле диполя с дипольным моментом, равным

$$\mu = IA, \quad (15.1)$$

где  $I$  — сила тока, а  $A$  — площадь петли. Момент направлен по нормали к плоскости петли, так что можно писать и так:

$$\mu = IAn,$$

где  $n$  — единичный вектор нормали к пло-  
щади  $A$ .

Петли с током, или магнитные диполи, не только создают магнитные поля, но и сами подвергаются действию силы, попав в магнитное поле других токов. Рассмотрим сперва силы, действующие на прямоугольную петлю в однородном магнитном поле. Пусть ось  $z$  направлена по полю, а ось  $y$  лежит в плоскости петли, образующей с плоскостью  $xy$  угол  $\theta$  (фиг. 15.1). Тогда магнитный момент петли, будучи нормальным к ее плоскости, образует с магнитным полем тоже угол  $\theta$ .

Раз токи на противоположных сторонах петли текут в противоположные стороны, то и силы, действующие на них, тоже направлены врозь, а суммарная сила равна нулю (в однородном поле). Но благодаря силам, действующим на стороны, обозначенные на фиг. 15.1 цифрами 1 и 2, возникает вращательный момент, стремящийся врацать петлю вокруг оси  $y$ . Величина этих сил  $F_1$  и  $F_2$  такова:

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

**§ 1. Силы, -  
действующие  
на петлю с током;  
энергия диполя**

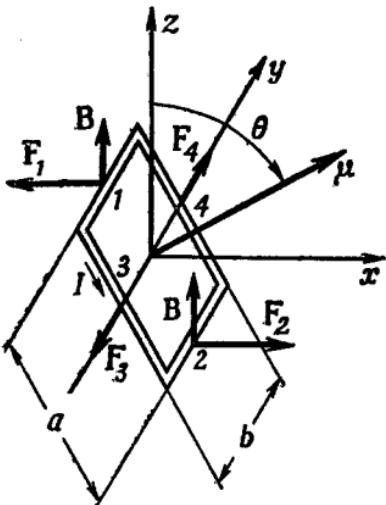
**§ 2. Механическая  
и электрическая  
энергии**

**§ 3. Энергия  
постоянных токов**

**§ 4. В или А?**

**§ 5. Векторный  
потенциал  
и квантовая  
механика**

**§ 6. Что истинно  
в статике, но  
ложно в динами-  
ке?**



Фиг. 15.1. Прямоугольная петля с током  $I$  в однородном поле  $B$ , направленном по оси  $z$ .

Действующий на нее вращательный момент равен  $\tau = \mu \times B$ , где магнитный момент  $\mu = Iab$ .

Их плечо равно

$$a \sin \theta,$$

так что вращательный момент

$$\tau = IabB \sin \theta,$$

или, поскольку  $Iab$  — магнитный момент петли,

$$\tau = \mu B \sin \theta.$$

Вращательный момент может быть записан и векторно:

$$\tau = \mu \times B. \quad (15.2)$$

То, что вращательный момент дается уравнением (15.2), мы показали пока только для довольно частного случая. Но результат, как мы увидим, верен для маленьких петель любой формы. Полезно напомнить, что и для вращательного момента, действующего на электрический диполь, мы получили соотношение подобного же рода:

$$\tau = p \times E.$$

Сейчас нас интересует механическая энергия нашей петли, по которой течет ток. Раз есть момент вращения, то энергия, естественно, зависит от ориентации петли. Принцип виртуальной же работы утверждает, что момент вращения — это скорость изменения энергии с углом, так что можно написать

$$dU = -\tau d\theta.$$

Подставляя  $\tau = +\mu B \sin \theta$  и интегрируя, мы вправе принять за энергию выражение

$$U = -\mu B \cos \theta + \text{Некоторая постоянная.} \quad (15.3)$$

(Знак минус стоит потому, что петля стремится развернуть свой момент по полю; энергия ниже всего тогда, когда  $\mu$  и  $B$  параллельны.)

По причинам, о которых мы поговорим позже, эта энергия не есть полная энергия петли с током. (Мы, к примеру, не учли энергии, идущей на поддержание тока в петле.) Поэтому мы будем называть ее  $U_{\text{мех}}$ , чтобы не забыть, что это лишь часть энергии. И, кроме того, постоянную интегрирования в (15.3) мы вправе принять равной нулю, все равно ведь какие-то другие виды энергии мы не учли. Так что мы перепишем уравнение так:

$$U_{\text{мех}} = -\mu \cdot \mathbf{B}. \quad (15.4)$$

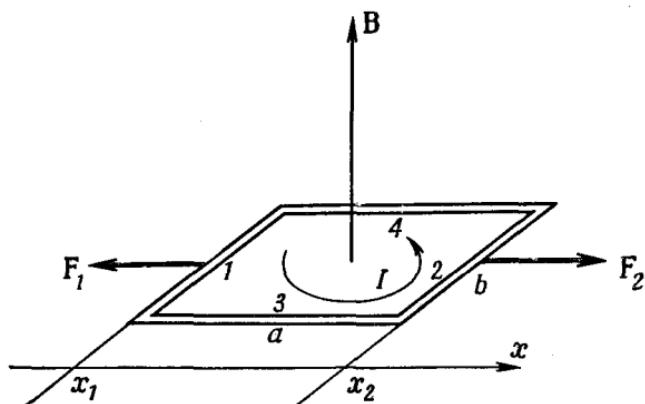
Опять получилось соответствие с электрическим диполем, где было

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.5)$$

Только в (15.5) электрическая энергия — и вправду энергия, а  $U_{\text{мех}}$  в (15.4) — не настоящая энергия. Но все равно ее можно применять для расчета сил по принципу виртуальной работы. Надо только предполагать, что ток в петле (или по крайней мере магнитный момент  $\mu$ ) остается неизменным при повороте.

Для нашей прямоугольной петли можно показать, что  $U_{\text{мех}}$  соответствует также работе, затрачиваемой на то, чтобы внести петлю в поле. Полная сила, действующая на петлю, равна нулю лишь в однородном поле, а в неоднородном все равно останутся какие-то силы, действующие на токовую петлю. Внося петлю в поле, мы вынуждены будем пронести ее через места, где поле неоднородно, и там будет затрачена работа. Будем считать для упрощения, что петлю вносят в поле так, что ее момент направлен вдоль поля. (А в конце, уже в поле, ее можно повернуть как надо.)

Вообразите, что мы хотим двигать петлю в направлении  $x$ , т. е. в ту область, где поле сильнее, и что петля ориентирована так, как показано на фиг. 15.2. Мы отправимся оттуда, где



Фиг. 15.2. Петлю проносят через поле  $\mathbf{B}$  (поперек него) в направлении  $x$ .

поле равно нулю, и будем интегрировать силу по расстоянию по мере того, как петля входит в поле.

Рассчитаем сначала работу переноса каждой стороны по отдельности, а затем все сложим (вместо того, чтобы складывать силы до интегрирования). Силы, действующие на стороны 3 и 4, направлены поперек движения, так что на эти стороны работа не тратится. Сила, действующая на сторону 2, направлена по  $x$  и равна  $IbB(x)$ ; чтобы узнать всю работу против действия магнитных сил, нужно проинтегрировать это выражение по  $x$  от некоторого значения  $x$ , где поле равно нулю, скажем, от  $x = -\infty$  до теперешнего положения  $x_2$ :

$$W_2 = - \int_{-\infty}^{x_2} F_2 dx = - Ib \int_{-\infty}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.6)$$

Подобно этому, и работа против сил, действующих на сторону 1, равна

$$W_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x) dx. \quad (15.7)$$

Чтобы вычислить каждый интеграл, надо знать, как  $B(x)$  зависит от  $x$ . Но ведь сторона 1 при движении рамки расположена все время параллельно стороне 2 на одном и том же расстоянии от нее, так что в ее интеграл входит почти вся работа, затраченная на перемещение стороны 2. Сумма (15.6) и (15.7) на самом деле равна

$$W = - Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.8)$$

Но, попав в область, где  $B$  на обеих сторонах 1 и 2 почти одинаково, мы имеем право записать интеграл в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x) dx = (x_2 - x_1) B = aB,$$

где  $B$  — поле в центре петли. Вся вложенная механическая энергия оказывается равной

$$U_{\text{мех}} = W = - IabB = - \mu B. \quad (15.9)$$

Это согласуется с выражением для энергии (15.4), выбранным нами прежде.

Конечно, тот же вывод получился бы, если бы мы до интегрирования сложили все силы, действующие на петлю. Если бы мы обозначили через  $B_1$  поле у стороны 1, а через  $B_2$  — поле у стороны 2, то вся сила, действующая в направлении  $x$ , оказалась бы равной

$$F_x = Ib(B_2 - B_1).$$

Если петля «узкая», т. е. если  $B_2$  и  $B_1$  не очень различаются между собой, то можно было бы написать

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a.$$

Так что сила была бы равна

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (15.10)$$

Вся работа, произведенная *внешними* силами над петлей, равнялась бы

$$-\int_{-\infty}^x F_x dx = -Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = -IabB,$$

а это опять  $-\mu B$ . Но теперь нам становится понятно, почему получается, что *сила*, действующая на небольшую токовую петлю, пропорциональна производной магнитного поля, как это следовало ожидать из

$$F_x \Delta x = -\Delta U_{\text{мех}} = -\Delta (-\mu \cdot B). \quad (15.11)$$

Другой наш результат состоит в следующем. Хоть и не исключено, что не все виды энергии вошли в формулу  $U_{\text{мех}} = -\mu$  (ведь это просто некоторая имитация энергии), ею все же можно пользоваться, применяя принцип виртуальной работы, чтобы узнать, какие силы действуют на петли с постоянным током.

## § 2. Механическая и электрическая энергии

Теперь мы хотим пояснить, почему энергия  $U_{\text{мех}}$ , о которой говорилось в предыдущем параграфе, не настоящая энергия, связанная с постоянными токами, почему у нее нет прямой связи с полной энергией всей Вселенной. Правда, мы подчеркнули, что ею можно пользоваться как энергией, когда вычисляешь силы из принципа виртуальной работы, *при условии*, что ток в петле (и все *прочие* токи) не меняется. Посмотрим теперь, почему же все так выходит.

Представим, что петля на фиг. 15.2 движется в направлении  $+x$ , а ось  $z$  примем за направление **B**. Электроны проводимости на стороне 2 будут испытывать действие силы, толкающей их вдоль провода, в направлении  $y$ . Но в результате их движения по проводу течет электрический ток и имеется составляющая скорости  $v_y$  в том же направлении, в котором действует сила. Поэтому над каждым электроном каждую секунду будет производиться работа  $F_y v_y$ , где  $v_y$  — компонента скорости электрона, направленная вдоль провода. Эту работу, совершаемую над электронами, мы назовем *электрической*. Оказывается, что

когда петля движется в *однородном* поле, то полная электрическая работа равна нулю, потому что на одной части петли работа положительная, а на другой — равная ей отрицательная. Но при движении контура в неоднородном поле это не так — тогда *остается* какой-то чистый избыток одной работы над другой. Вообще-то эта работа стремится изменить поток электронов, но если он поддерживается неизменным, то энергия поглощается или высвобождается в батарейке или в другом источнике, сохраняющем ток постоянным. Вот именно эта энергия и не учитывалась, когда мы вычисляли  $U_{\text{мех}}$  в (15.9), потому что в наши расчеты входили только механические силы, действующие на провод.

Вы можете подумать: но сила, действующая на электроны, зависит от того, насколько *быстро* движется провод; быть может, если бы провод двигался достаточно медленно, этой электрической энергией можно было бы вообще пренебречь. Действительно, *скорость*, с какой высвобождается электрическая энергия, пропорциональна скорости провода, но все же полная выделенная энергия пропорциональна к тому же еще и *времени*, в течение которого проявлялась эта скорость. В итоге полная выделенная электрическая энергия пропорциональна произведению скорости на время, а это как раз и есть пройденное расстояние. Каждому пройденному в поле расстоянию отвечает заданное, и притом одно и то же, количество электрической работы.

Возьмем кусок провода единичной длины, по которому течет ток  $I$ . Провод движется перпендикулярно самому себе и магнитному полю  $B$  со скоростью  $v_{\text{провод}}$ . Благодаря наличию тока сами электроны обладают скоростью дрейфа  $v_{\text{дрейф}}$  вдоль провода. Компонента магнитной силы, действующей на каждый электрон в направлении дрейфа, равна  $q_e v_{\text{провод}} B$ . Значит, скорость, с которой производится электрическая работа, равна  $Fv_{\text{дрейф}} = (q_e v_{\text{провод}} B) v_{\text{дрейф}}$ . Если на единице длины провода имеется  $N$  проводящих электронов, то вся величина электрической работы, производимой в секунду, такова:

$$\frac{dU_{\text{электр}}}{dt} = Nq_e v_{\text{провод}} B v_{\text{дрейф}}.$$

Но  $Nq_e v_{\text{дрейф}}$  равно току  $I$  в проводе, так что

$$\frac{dU_{\text{электр}}}{dt} = Iv_{\text{провод}} B.$$

И поскольку ток поддерживается неизменным, то силы, действующие на электроны проводимости, не ускоряют их; электрическая энергия переходит не к электронам, а к тому источнику, который сохраняет силу тока постоянной.

Но заметьте, что сила, действующая на провод, равна  $IB$ ; значит,  $IBv_{\text{провод}}$  — это *механическая работа*, выполняемая над проводом в единицу времени,  $dU_{\text{мех}}/dt = IBv_{\text{провод}}$ . Отсюда мы заключаем, что механическая работа перемещения провода в точности равна электрической работе, производимой над источником тока, так что энергия петли *остается постоянной*!

Это не случайность. Это следствие закона, с которым мы уже знакомы. Полная сила, действующая на каждый из зарядов в проводе, равна

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Скорость, с которой производится работа, равна

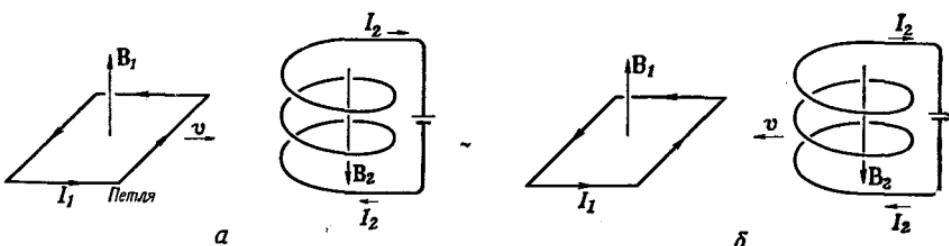
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (15.12)$$

Если электрического поля нет, то остается только второе слагаемое, а оно всегда равно нулю. Позже мы увидим, что *изменение магнитных полей* создает электрические поля, так что наши рассуждения применимы лишь к проводам в постоянных магнитных полях.

Но тогда почему же принцип виртуальной работы дает правильный ответ? Потому, что пока мы не учитывали *полную* энергию Вселенной. Мы не включали в рассмотрение энергию тех токов, которые *создают* магнитное поле, с самого начала присутствующее в наших рассуждениях.

Но представим себе полную систему, наподобие изображенной на фиг. 15.3, *a*, где петля с током  $I_1$  вдвигается в магнитное поле  $\mathbf{B}_1$ , созданное током  $I_2$  в катушке. Ток  $I_1$ , текущий по петле, тоже будет создавать какое-то магнитное поле  $\mathbf{B}_2$  близ катушки. Если петля движется, то поле  $\mathbf{B}_2$  изменяется. В следующей главе мы увидим, что изменяющееся магнитное поле создает поле  $\mathbf{E}$ , и это поле действительно начнет действовать на заряды в катушке. Эту энергию мы обязаны включить в наш сводный баланс энергий.

Мы, конечно, могли бы подождать говорить об этом новом вкладе в энергию до следующей главы, но уже сейчас можно



Фиг. 15.3. Вычисление энергии маленькой петли в магнитном поле.

оценить его, если применить соображения принципа относительности. Приближаем петлю к неподвижной катушке и знаем, что электрическая энергия петли в точности равна и противоположна по знаку произведенной механической работе. Иначе говоря,

$$U_{\text{мех}} + U_{\text{электр}} \text{ (петли)} = 0.$$

Теперь предположим, что мы смотрим на происходящее с другой точки зрения: будем считать, что петля покоится, а катушка приближается к ней. Тогда катушка движется в поле, созданном петлей. Те же рассуждения приведут к выражению

$$U_{\text{мех}} + U_{\text{электр}} \text{ (катушки)} = 0.$$

Механическая энергия в обоих случаях одна и та же — она определяется только силой, действующей между двумя контурами.

Сложение двух уравнений дает

$$2U_{\text{мех}} + U_{\text{электр}} \text{ (петли)} + U_{\text{электр}} \text{ (катушки)} = 0.$$

Полная энергия всей системы равна, конечно, сумме двух электрических энергий и взятой *один раз* механической энергии. В итоге выходит

$$U_{\text{полн}} = U_{\text{электр}} \text{ (петли)} + U_{\text{электр}} \text{ (катушки)} + U_{\text{мех}} = -U_{\text{мех}}. \quad (15.13)$$

Полная энергия всей системы — это на самом деле  $U_{\text{мех}}$  со знаком минус. Если нам нужна, скажем, полная энергия магнитного диполя, то следует писать

$$U_{\text{полн}} = +\mu \cdot \mathbf{B}.$$

И только тогда, когда мы потребуем, чтобы все токи оставались постоянными, можно использовать лишь одну из частей энергии  $U_{\text{мех}}$  (всегда равную истинной энергии со знаком минус) для вычисления механических сил. В более общих задачах надо соблюдать осторожность, чтобы не забыть ни одной из энергий.

Сходное положение наблюдалось и в электростатике. Мы показали там, что энергия конденсатора равна  $Q^2/2C$ . Когда мы применяем принцип виртуальной работы, чтобы найти силу, действующую между обкладками конденсатора, то изменение энергии равно  $Q^2/2$ , умноженному на изменение в  $1/C$ , т. е.

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2} \Delta \left( \frac{1}{C} \right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{\Delta C}{C^2}. \quad (15.14)$$

А теперь предположим, что нам надо было бы подсчитать работу, затрачиваемую на сближение двух проводников, но при другом условии — что напряжение между ними остается постоянным. Тогда правильную величину силы мы могли бы

получить из принципа виртуальной работы, если бы поступили немногим искусственным образом. Равен  $Q = CV$ , то полная энергия равна  $\frac{1}{2}CV^2$ . Но если бы мы ввели условную энергию, равную  $-\frac{1}{2}CV^2$ , то принцип виртуальной работы можно было бы применить для получения сил, полагая изменение этой условной энергии равным механической работе (это при условии, что напряжение  $V$  считается постоянным). Тогда

$$\Delta U_{\text{мех}} = \Delta \left( -\frac{CV^2}{2} \right) = -\frac{V^2}{2} \Delta C, \quad (15.15)$$

а это то же самое, что написано в уравнении (15.14). Мы получаем правильный ответ, хотя пренебрегаем работой, которую электрическая система тратит на постоянное поддержание напряжения. И здесь опять электрическая энергия ровно вдвое больше механической и имеет обратный знак.

Итак, если мы ведем расчет искусственно, пренебрегая тем фактом, что источник потенциала должен тратить работу на то, чтобы напряжение оставалось неизменным, то все равно мы приходим к правильному результату. Это в точности соответствует положению дел в магнитостатике.

### § 3. Энергия постоянных токов

Зная, что  $U_{\text{полн}} = -U_{\text{мех}}$ , используем этот факт, чтобы найти истинную энергию постоянных токов в магнитных полях. Начать можно с истинной энергии небольшой токовой петельки. Обозначая  $U_{\text{полн}}$  просто через  $U$ , напишем

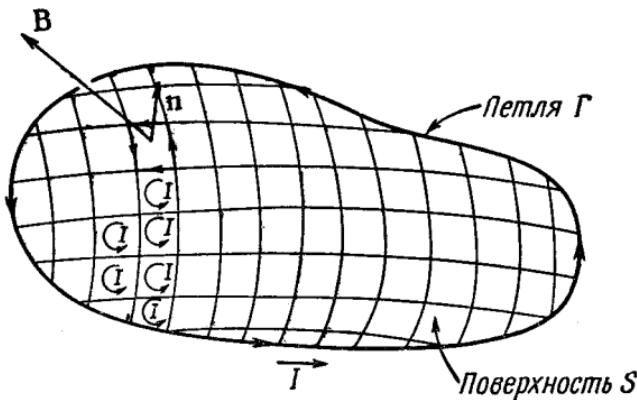
$$U = \mu \cdot B. \quad (15.16)$$

Хотя эту энергию мы подсчитали только для плоской прямоугольной петли, все это верно и для плоской петельки произвольной формы.

Энергию контура произвольной формы можно найти, представив себе, что он состоит из небольших токовых петель. Скажем, имеется провод в форме петли Г (фиг. 15.4). Натянем на эту петлю поверхность  $S$ , а на ней наметим множество петелек, каждую из которых можно считать плоской. Если заставить ток  $I$  циркулировать по каждой петельке, то в итоге выйдет то же самое, как если бы ток шел только по петле Г, ибо токи на всех внутренних линиях взаимно уничтожаются. Система небольших токов физически не будет отличима от исходного контура, и энергия должна быть той же, т. е. должна быть равна сумме энергий всех петелек.

Если площадь каждой петельки  $\Delta a$ , то ее энергия равна  $I\Delta a B_n$ , где  $B_n$  — компонента  $B$ , нормальная к  $\Delta a$ . Полная энергия равна

$$U = \sum I B_n \Delta a.$$



Фиг. 15.4. Энергию большой петли в магнитном поле можно считать суммой энергий маленьких петелек.

В пределе, когда петли становятся бесконечно малыми, сумма превращается в интеграл, и

$$U = I \int B_n da = I \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (15.17)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к  $da$ .

Если мы положим  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , то поверхностный интеграл можно будет связать с контурным (по теореме Стокса):

$$I \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da = I \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.18)$$

где  $d\mathbf{s}$  — линейный элемент вдоль  $\Gamma$ . Итак, мы получили энергию контура произвольной формы:

$$U = I \oint_{\text{Контур}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.19)$$

В этом выражении  $\mathbf{A}$  обозначает, конечно, векторный потенциал, возникающий из-за токов (отличных от тока  $I$  в проводе), которые создают поле  $\mathbf{B}$  близ провода.

Далее, любое распределение постоянных токов можно считать состоящим из нитей, идущих вдоль тех линий, по которым течет ток. Для любой пары таких контуров энергия дается выражением (15.19), где интеграл взят вокруг одного из контуров, а векторный потенциал  $\mathbf{A}$  создан другим контуром. Полная энергия получается сложением всех таких пар. Если вместо того, чтобы следить за парами, мы полностью просуммируем по всем нитям, то каждую энергию мы засчитаем дважды (такой же эффект мы наблюдали в электростатике), и полную эн-

гию можно будет представить в виде

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (15.20)$$

Это соответствует полученному для электростатической энергии выражению

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (15.21)$$

Значит, мы можем считать  $\mathbf{A}$ , если угодно, своего рода потенциальной энергией токов в магнитостатике. К сожалению, это представление не очень полезно, потому что оно годится только для статических полей. В действительности, если поля со временем меняются, ни выражение (15.20), ни выражение (15.21) не дают правильной величины энергии.

#### § 4. В или А?

В этом параграфе нам хотелось бы обсудить такой вопрос: что такое векторный потенциал — просто полезное для расчетов приспособление (так в электродинамике полезен скалярный потенциал) или же он как поле вполне «реален»? Или же «реально» лишь магнитное поле, так как только оно ответственно за силу, действующую на движущуюся частицу?

Для начала нужно сказать, что выражение «реальное поле» реального смысла не имеет. Во-первых, вы вряд ли вообще полагаете, что магнитное поле хоть в какой-то степени «реально», потому что и сама идея поля — вещь довольно отвлеченная. Вы не можете протянуть руку и пощупать это магнитное поле. Кроме того, величина магнитного поля тоже не очень определена; выбором подходящей подвижной системы координат можно, к примеру, добиться, чтобы магнитное поле в данной точке вообще пропало.

Под «реальным» полем мы понимаем здесь вот что: реальное поле — это математическая функция, которая используется нами, чтобы избежать представления о дальнодействии. Если в точке  $P$  имеется заряженная частица, то на нее оказывают влияние другие заряды, расположенные на каком-то удалении от  $P$ . Один прием, которым можно описать взаимодействие, — это говорить, что прочие заряды создают какие-то «условия» (какие — не имеет значения) в окрестности  $P$ . Если мы знаем эти условия (мы их описываем, задавая электрическое и магнитное поля), то можем полностью определить поведение частицы, нимало не заботясь после о том, что именно создало эти условия.

Иными словами, если бы эти прочие заряды каким-то образом изменились, а условия в  $P$ , описываемые электрическим и

магнитным полем в точке  $P$ , остались бы прежними, то движение заряда тоже не изменилось бы. «Реальное» поле тогда есть совокупность чисел, заданных так, что то, что происходит в *некоторой точке*, зависит только от чисел в *этой точке* и нам больше не нужно знать, что происходит в других местах. Именно с таких позиций мы и хотим выяснить, является ли векторный потенциал «реальным» полем.

Вас может удивить тот факт, что векторный потенциал определяется не единственным образом, что его можно изменить, добавив к нему градиент любого скаляра, а силы, действующие на частицы, не изменятся. Однако это не имеет ничего общего с вопросом реальности в том смысле, о котором мы говорили. К примеру, магнитное поле как-то меняется при изменении относительного движения (равно как и  $E$  или  $A$ ). Но нас никак не будет заботить, что поле *можно* изменять таким образом. Нам это безразлично; это никак не связано с вопросом о том, действительно ли векторный потенциал—«реальное» поле, пригодное для описания магнитных эффектов, или же это просто удобный математический прием.

Мы должны еще сделать кое-какие замечания о полезности векторного потенциала  $A$ . Мы видели, что им можно пользоваться в формальной процедуре расчета магнитных полей заданных токов, в частности как  $\phi$  может применяться для отыскания электрических полей. В электростатике мы видели, что  $\phi$  давалось скалярным интегралом

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2. \quad (15.22)$$

Из этого  $\phi$  мы получали три составляющих  $E$  при помощи трех дифференцирований. Обычно это было легче, чем вычислять три интеграла в векторной формуле

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) e_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.23)$$

Во-первых, их три, а во-вторых, каждый из них вообще-то немного посложнее, чем (15.22).

В магнитостатике преимущества не так ясны. Интеграл для  $A$  уже сам по себе векторный:

$$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) dV_2}{r_{12}}, \quad (15.24)$$

т. е. здесь написаны три интеграла. Кроме того, вычисляя ротор  $A$  для получения  $B$ , надо взять шесть производных и расположить их попарно. Сразу не ясно, проще ли это, чем прямое вычисление

$$B(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) \times e_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.25)$$

В простых задачах векторным потенциалом часто бывает пользоваться труднее, и вот по какой причине. Предположим, нас интересует магнитное поле  $\mathbf{B}$  в одной только точке, а задача обладает какой-то красивой симметрией. Скажем, нам нужно знать поле в точке на оси кольцевого тока. Вследствие симметрии интеграл в (15.25) легко возьмется и вы сразу получите  $\mathbf{B}$ . Если бы, однако, мы начали с  $\mathbf{A}$ , то пришлось бы вычислять  $\mathbf{B}$  из производных  $\mathbf{A}$ , а для этого надо было бы знать  $\mathbf{A}$  во всех точках *по соседству* с той, которая нас интересует. Большая же часть их не лежит на оси симметрии, интеграл для  $\mathbf{A}$  усложняется. В задаче с кольцом, например, пришлось бы иметь дело с эллиптическими интегралами. В подобных задачах  $\mathbf{A}$ , разумеется, не приносит большой пользы. Во многих сложных задачах, бесспорно, легче работать с  $\mathbf{A}$ , но в общем трудно было бы доказывать, что эти технические облегчения стоят того, чтобы начать изучать еще одно векторное поле.

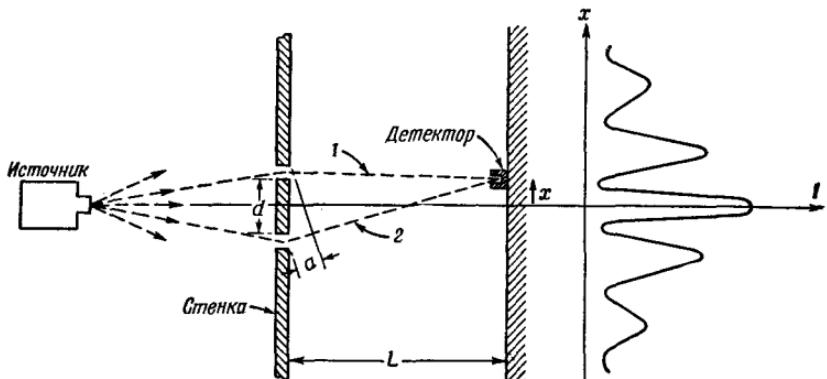
Мы ввели  $\mathbf{A}$  потому, что оно *действительно* имеет большое физическое значение. Оно не просто связано с энергиями токов (в чем мы убедились в последнем параграфе), оно — «реальное» физическое поле в том смысле, о котором мы говорили выше. В классической механике силу, действующую на частицу, очевидно, можно записать в виде

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (15.26)$$

так что, как только заданы силы, движение оказывается полностью определенным. В любой области, где  $\mathbf{B} = 0$ , хотя бы  $\mathbf{A}$  и не было равно нулю (например, вне соленоида), влияние  $\mathbf{A}$  ни в чем не оказывается. Поэтому долгое время считалось, что  $\mathbf{A}$  — не «реальное» поле. Оказывается, однако, что в квантовой механике существуют явления, свидетельствующие о том, что поле  $\mathbf{A}$  на самом деле вполне «реальное» поле, в том смысле, в каком мы определили это слово. В следующем параграфе мы покажем, что все это значит.

## § 5. Векторный потенциал и квантовая механика

Когда мы от классической механики переходим к квантовой, то наши представления о важности тех или иных понятий во многом меняются. (Кое-какие из этих понятий мы уже рассматривали раньше.) В частности, постепенно сходит на нет понятие силы, а понятия энергии и импульса приобретают первостепенную важность. Вместо движения частиц, как вы помните, речь теперь идет уже об амплитудах вероятностей, которые меняются в пространстве и времени. В эти амплитуды входят длины волн, связанные с импульсами, и частоты, связываемые с энергиями. Импульсы и энергии определяют собой фазы



Фиг. 15.5. Интерференционный опыт с электронами.

волновых функций и по этой-то причине они важны для квантовой механики. Вместо силы речь теперь идет о том, каким образом взаимодействие меняет длину волны. Представление о силе становится уже второстепенным, если вообще о нем еще стоит говорить. Даже когда, к примеру, упоминают о ядерных силах, то на самом деле, как правило, работают все же с энергиями взаимодействия двух нуклонов, а не с силой их взаимодействия. Никому не приходит в голову дифференцировать энергию, чтобы посмотреть, какова сила. В этом параграфе мы хотим рассказать, как возникают в квантовой механике векторный и скалярный потенциалы. Оказывается, что именно из-за того, что в квантовой механике главную роль играют импульс и энергия, самый прямой путь введения в квантовое описание электромагнитных эффектов — сделать это с помощью  $\mathbf{A}$  и  $\phi$ .

Надо сперва слегка напомнить, как действует квантовая механика. Мы снова вернемся к описанному в вып. 3, гл. 37, воображаемому опыту, в котором электроны испытывали дифракцию на двух щелях. На фиг. 15.5 показано то же устройство. Электроны (все они обладают примерно одинаковой энергией) покидают источник и движутся к стенке с двумя узкими щелями. За стенкой находится «защитный» вал — поглотитель с подвижным детектором. Этот детектор предназначен для измерения частоты  $I$ , с которой электроны попадают в небольшой участок поглотителя на расстоянии  $x$  от оси симметрии. Частота эта пропорциональна вероятности того, что отдельный электрон, вылетевший из источника, достигнет этого участка «вала». Вероятность обладает распределением сложного вида (оно показано на рисунке), которое объясняется интерференцией двух амплитуд, по одной от каждой щели. Интерференция двух амплитуд зависит от их разности фаз. Иными словами, когда амплитуды равны  $C_1 e^{i\Phi_1}$  и  $C_2 e^{i\Phi_2}$ , разность фаз

$\delta = \Phi_1 - \Phi_2$  определяет интерференционную картину [см. вып. 3, гл. 29, уравнение (29.12)]. Если расстояние от щелей до экрана равно  $L$ , а разность длин путей электронов, проходящих через две щели, равна  $a$  (как показано на фигуре), то разность фаз двух волн дается отношением

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \quad (15.27)$$

Как обычно, мы полагаем  $\lambda = \lambda/2\pi$ , где  $\lambda$  — длина волны, отвечающая пространственному изменению амплитуды вероятности. Для простоты рассмотрим лишь те значения  $x$ , которые много меньше  $L$ ; тогда можно будет принять

$$a = \frac{x}{L} d$$

и

$$\delta = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda}. \quad (15.28)$$

Когда  $x$  равно нулю, то и  $\delta$  равно нулю; волны находятся в фазе, а вероятность имеет максимум. Когда  $\delta$  равно  $\pi$ , волны оказываются в противофазе, интерферируя деструктивно, и вероятность достигает минимума. Так электронная интенсивность получает волнобразный вид.

Теперь мы хотим сформулировать тот закон, которым в квантовой механике заменяется закон силы  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Этот закон будет определять собой поведение квантовомеханических частиц в электромагнитном поле. Раз все происходящее определяется амплитудами, то закон должен будет объяснить, как оказывается на амплитудах влияние магнитного поля; с ускорениями же частиц мы больше никакого дела иметь не будем. Закон этот состоит в следующем: фазу, с какой амплитуда достигает детектора, двигаясь по какой-то траектории, присутствие магнитного поля меняет на величину, равную интегралу от векторного потенциала вдоль этой траектории, умноженному на отношение заряда частицы к постоянной Планка. То есть

$$\text{Изменение фазы под влиянием магнитного поля} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{Траек-}}^{} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.29)$$

Если бы магнитного поля не было, то наблюдалась бы какая-то определенная фаза прибытия. Если же где-то появляется магнитное поле, то фаза прибытия возрастает на величину интеграла в (15.29).

Хотя для наших теперешних рассуждений в этом нет необходимости, заметим все же, что влияние электростатического поля тоже выражается в изменении фазы, равном интегралу

по времени от скалярного потенциала  $\phi$  со знаком минус:

$$\text{Изменение фазы под влиянием электрического поля} = -\frac{q}{\hbar} \int \phi \, dt.$$

Эти два выражения справедливы лишь для статических полей, но, объединив их, мы получим правильный результат для любого, статического или динамического, электромагнитного поля. Именно этот закон и заменяет собой формулу  $F = q(E + v \times B)$ . Мы сейчас, однако, будем говорить только о статическом магнитном поле.

Положим, что опыт с двумя щелями проводится в магнитном поле. Мы хотим узнать, с какой фазой достигают экрана две волны, пути которых пролегают через две разные щели. Их интерференция определяет то место, где окажется максимум вероятности. Фазу волны, бегущей по траектории (1), мы назовем  $\Phi_1$ , а через  $\Phi_1(B=0)$  обозначим фазу, когда магнитного поля нет. Тогда после включения поля фаза достигает величины

$$\Phi_1 = \Phi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} A \cdot ds. \quad (15.30)$$

Аналогично, фаза для траектории (2) равна

$$\Phi_2 = \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} A \cdot ds. \quad (15.31)$$

Интерференция волн в детекторе зависит от разности фаз

$$\delta = \Phi_1(B=0) - \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} A \cdot ds - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} A \cdot ds. \quad (15.32)$$

Разность фаз в отсутствие поля мы обозначим  $\delta(B=0)$ ; это та самая разность, которую мы подсчитали в уравнении (15.28). Кроме того, мы замечаем, что из двух интегралов можно сделать один, идущий вперед по пути (1), а назад — по пути (2); этот замкнутый путь будет обозначаться (1—2). Так что получается

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} A \cdot ds. \quad (15.33)$$

Это уравнение сообщает нам, как под действием магнитного поля изменяется движение электрона; с его помощью мы можем найти новые положения максимумов и минимумов интенсивности.

Прежде чем сделать это, мы хотим, однако, поставить один интересный и важный вопрос. Вы помните, что в вектор-потенциальной функции есть некоторый произвол. Две разные вектор-потенциальные функции  $A$  и  $A'$ , отличающиеся на градиент  $\nabla\psi$  некоторой скалярной функции, представляют одно

и то же магнитное поле (потому что ротор градиента равен нулю). Они поэтому приводят к одной и той же классической силе  $qv \times B$ . Если в квантовой механике все эффекты зависят от векторного потенциала, то какая из многих возможных  $A$ -функций правильна?

Ответ состоит в том, что в квантовой механике продолжает существовать тот же произвол в  $A$ . Если в уравнении (15.33) мы заменим  $A$  на  $A' = A + \nabla\psi$ , то интеграл от  $A$  превратится в

$$\oint_{(1-2)} A' \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(1-2)} A \cdot d\mathbf{s} + \oint_{(1-2)} \nabla\psi \cdot d\mathbf{s}.$$

Интеграл от  $\nabla\psi$  вычисляется по замкнутому пути (1—2); но интеграл от касательной составляющей градиента по замкнутому пути всегда равен нулю (по теореме Стокса). Поэтому как  $A$ , так и  $A'$  приводят к одним и тем же разностям фаз и к одним и тем же квантовомеханическим эффектам интерференции. И в классической, и в квантовой теории важен только ротор  $A$ ; любая функция  $A$ , у которой ротор такой, как надо, приводит к правильной теории.

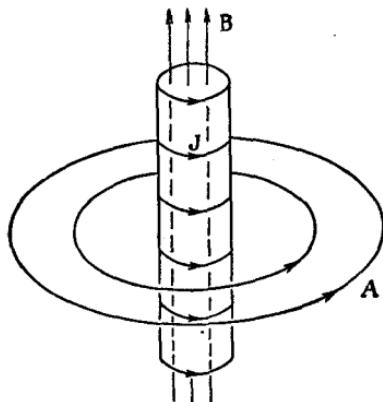
Тот же вывод становится очевидным, если мы используем результаты, приведенные в гл. 14, § 1. Там мы показали, что контурный интеграл от  $A$  по замкнутому пути равен потоку  $B$  через контур, в данном случае потоку между путями (1) и (2). Уравнение (15.33) можно, если мы хотим, записать в виде

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} [\text{поток } B \text{ между (1) и (2)}], \quad (15.34)$$

где под потоком  $B$ , как обычно, подразумевается поверхностный интеграл от нормальной составляющей  $B$ . Результат зависит только от  $B$ , т. е. только от ротора  $A$ .

Но раз результат можно выражать и через  $B$  и через  $A$ , то может создаться впечатление, что  $B$  удерживает свои позиции «реального» поля, а  $A$  все еще выглядит искусственным образованием. Но определение «реального» поля, которое мы вначале предложили, основывалось на идее о том, что «реальное» поле не смогло бы действовать на частицу на расстоянии. Мы же беремся привести пример, в котором  $B$  равно нулю (или по крайней мере сколь угодно малому числу) в любом месте, где частицы могут оказаться, так что невозможно представить себе, что  $B$  непосредственно действует на них.

Вы помните, что если имеется длинный соленоид, по которому течет электрический ток, то поле  $B$  существует внутри него, а снаружи поля нет, тогда как множество векторов  $A$  циркулирует снаружи соленоида (фиг. 15.6). Если мы создадим такие условия, что электроны будут проходить только *вне* соленоида (только там, где есть  $A$ ), то, согласно уравнению (15.33),

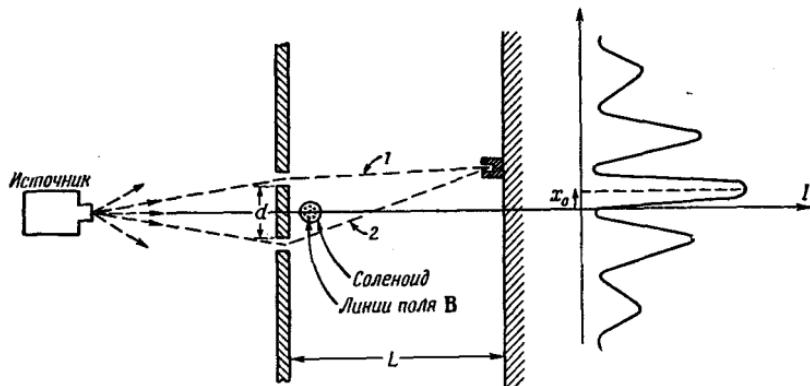


Фиг. 15.6. Магнитное поле и векторный потенциал длинного соленоида.

соленоид будет все же влиять на их движение. По классическим же воззрениям это невозможно. По классическим представлениям сила зависит только от  $\mathbf{B}$ . Чтобы узнать, течет ли по соленоиду ток, частица должна пройти сквозь него. А квантовая механика утверждает, что наличие магнитного поля в соленоиде можно установить, просто обойдя его, даже не приближаясь к нему вплотную!

Представьте, что мы поместили очень длинный соленоид малого диаметра прямо тут же за стенкой между двумя щелями (фиг. 15.7). Диаметр соленоида должен быть намного меньше расстояния  $d$  между щелями. В этих обстоятельствах дифракция электронов на щели не приведет к заметным вероятностям того, что электроны проскользнут где-то близ соленоида. Как же все это влияет на наш интерференционный эксперимент?

Сравним два случая: когда ток по соленоиду идет и когда тока нет. Если тока нет, то нет ни  $\mathbf{B}$  ни  $\mathbf{A}$ , и получается первоначальная картина электронных интенсивностей вдоль погло-



Фиг. 15.7. Магнитное поле способно влиять на движение электронов, даже когда оно существует только в области, где вероятность обнаружить электрон пренебрежимо мала.

тиеля. Если мы включим ток и создадим внутри соленоида магнитное поле **B**, то снаружи появится поле **A**. Возникнет сдвиг в разности фаз, пропорциональный циркуляции **A** вне соленоида, а это означает, что картина максимумов и минимумов сдвинется на другое место. Действительно, раз поток **B** между любыми двумя путями постоянен, то точно так же постоянна и циркуляция **A**. Для любой точки прибытия фаза меняется одинаково; это соответствует тому, что вся картина сдвигается по  $x$  на постоянную величину, скажем, на  $x_0$ . Эту величину  $x_0$  легко подсчитать. Максимальная интенсивность возникает там, где разность фаз двух волн равна нулю. Представляя вместо  $\delta$  выражение (15.32) или (15.33), а вместо  $\delta(B=0)$  выражение (15.28), получаем

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{h} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.35)$$

или

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{h} [\text{поток } \mathbf{B} \text{ между (1) и (2)}]. \quad (15.36)$$

Картина при наличии соленоида будет выглядеть так\*, как показано на фиг. 15.7. По крайней мере так предсказывает квантовая механика.

Недавно был проделан точно такой же опыт. Это чрезвычайно сложный опыт. Длина волны электронов крайне мала, поэтому прибор должен быть миниатюрным, иначе интерференции не заметишь. Щели должны лежать вплотную друг к другу, а это означает, что нужен необычайно тонкий соленоид. Оказывается, что при некоторых обстоятельствах кристаллы железа вырастают в виде очень длинных и микроскопически тонких нитей. Если эти железные нити намагнитить, они образуют маленький соленоид, у которого нет снаружи магнитного поля (оно проявляется только на концах). Так вот, был проделан опыт по интерференции электронов с железной нитью, помещенной между двумя щелями, и предсказанное смещение электронной картины подтвердилось.

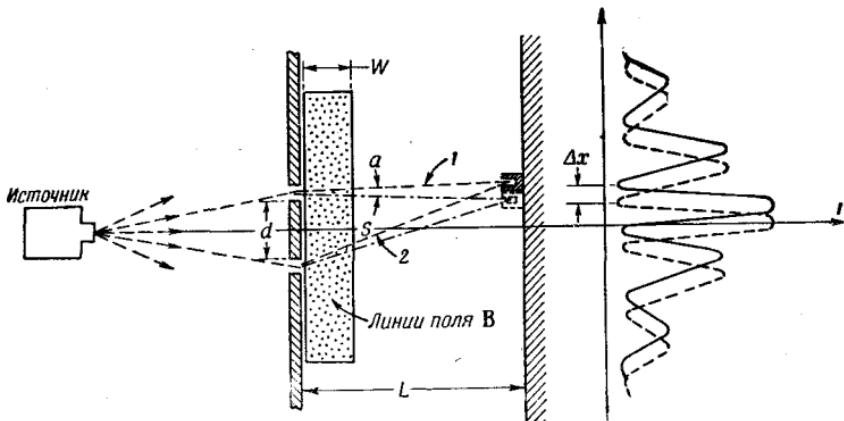
А тогда поле **A** в нашем смысле уже «реально». Вы можете возразить: «Но ведь там есть магнитное поле». Да, есть, но вспомните нашу исходную идею — «реально» только такое поле, которое, чтобы определить собой движение частицы, должно быть задано *в том месте*, где она находится. Поле **B** в нити действует на расстоянии. Если мы не хотим, чтобы его влияние выглядело как действие на расстоянии, мы должны пользоваться векторным потенциалом.

---

\* Если поле **B** выходит из плоскости рисунка, то поток, в соответствии с его определением, будет отрицательным, а  $x_0$  — положительным.

Эта проблема имеет интересную историю. Теория, которую мы изложили, была известна с самого возникновения квантовой механики, с 1926 г. Сам факт, что векторный потенциал появляется в волновом уравнении квантовой механики (так называемом уравнении Шредингера), был очевиден с того момента, как оно было написано. В том, что он не может быть заменен магнитным полем, убеждались все, кто пытался это проделать; друг за другом все убеждались, что простого пути для этого не существует. Это ясно и из нашего примера, когда электрон движется по области, где нет никакого поля, и тем не менее подвергается воздействию. Но, поскольку в классической механике А, по-видимому, не имело непосредственного, важного значения и, далее, из-за того, что его можно было менять добавлением градиента, люди еще и еще раз повторяли, что векторный потенциал не обладает прямым физическим смыслом, что даже в квантовой механике «правами» обладают только электрические и магнитные поля. Когда оглядываешься назад, кажется странным, что никто не подумал обсудить этот опыт вплоть до 1956 г., когда Бом и Аронов впервые предложили его и сделали весь вопрос кристально ясным. Все это ведь всегда подразумевалось, но никто не обращал на это внимания. И многие были просто потрясены, когда всплыл этот вопрос. Вот по этой-то причине кое-кто и счел нужным поставить опыт и убедиться, что все это действительно так, хотя квантовая механика, в которую все мы верим вот уже сколько лет, давала вполне недвусмысленный ответ. Занятно, что подобные вещи могут тридцать лет быть на виду у всех, но из-за определенных предрассудков относительно того, что существенно, а что нет, могут всеми игнорироваться.

Сейчас мы хотим немного продолжить наш анализ. Мы продемонстрируем связь между квантовомеханической и классической формулами, чтобы показать, почему оказывается, что при макроскопическом взгляде на вещи все выглядит так, как будто частицы управляются силой, равной произведению  $qv$  на ротор А. Чтобы получить классическую механику из квантовой, нам нужно рассмотреть случаи, когда все длины волн малы по сравнению с расстояниями, на которых заметно меняются внешние условия (например, поля). Мы не будем гнаться за общностью доказательства, а только покажем все на очень простом примере. Обратимся снова к тому же опыту со щелями. Но теперь вместо того, чтобы втискивать все магнитное поле в узкий промежуток между щелями, представим себе такое магнитное поле, которое раскинулось позади щелей широкой полосой (фиг. 15.8). Возьмем идеализированный случай, когда в узкой полосе шириной  $w$ , много меньшей  $L$ , магнитное поле однородно. (Это легко устроить, надо только по-далее отнести поглотитель.) Чтобы подсчитать сдвиг по фазе,



Фиг. 15.8. Сдвиг интерференционной картины из-за наличия полоски магнитного поля.

мы должны взять два интеграла от  $\mathbf{A}$  вдоль двух траекторий (1) и (2). Как мы видели, они различаются просто на поток  $\mathbf{B}$  между этими путями. В нашем приближении поток равен  $Bwd$ . Разность фаз для двух путей поэтому равна

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} Bwd. \quad (15.37)$$

Мы замечаем, что в принятом приближении сдвиг фаз не зависит от угла. Так что опять-таки эффект сводится к сдвигу всей картины вверх на величину  $\Delta x$ . Из формулы (15.28)

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} \Delta \delta = \frac{L\lambda}{d} [\delta - \delta(B=0)].$$

Подставляя  $\delta - \delta(B=0)$  из (15.37), получаем

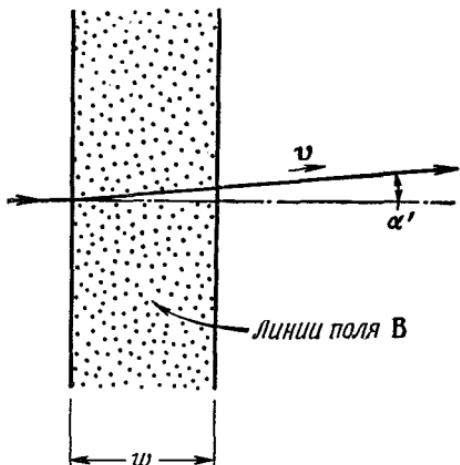
$$\Delta x = L\lambda \frac{q}{\hbar} Bw. \quad (15.38)$$

Такой сдвиг равносечен тому, что все траектории отклоняются на небольшой угол  $\alpha$  (см. фиг. 15.8), равный

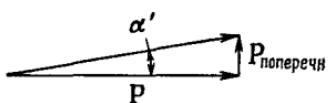
$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{\hbar} qBw. \quad (15.39)$$

По классическим воззрениям мы тоже должны были ожидать, что узкая полоска магнитного поля отклонит все траектории на какой-то маленький угол, скажем  $\alpha'$  (фиг. 15.9, а). Когда электроны проходят через магнитное поле, они подвергаются действию поперечной силы  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  в течение времени  $w/v$ . Изменение их поперечного импульса просто равно ему самому, так что

$$\Delta p_x = qwB. \quad (15.40)$$



*а*



*б*

Фиг. 15.9. Отклонение частицы из-за прохождения ее через магнитное поле.

Угловое отклонение (фиг. 15.9, б) равно отношению этого поперечного импульса к полному импульсу  $p$ . Мы получаем

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{qwB}{p}, \quad (15.41)$$

Этот результат можно сравнить с уравнением (15.39), в котором та же величина вычислялась квантовомеханически. Но связь между классической и квантовой механикой в том и состоит, что частице с импульсом  $p$

ставится в соответствие квантовая амплитуда, изменяющаяся как волна длиной  $\lambda = \hbar/p$ . В соответствии с этим уравнением  $\alpha$  и  $\alpha'$  оказываются идентичными; и классические и квантовые выкладки приводят к одному и тому же.

Из этого анализа мы видим, как получается, что векторный потенциал, который в квантовой механике появляется в явном виде, вызывает классическую силу, зависящую только от его производных. В квантовой механике существенна только интерференция между соседними путями; в ней всегда оказывается, что эффект зависит только от того, как сильно поле  $A$  меняется от точки к точке, а значит, только от производных  $A$ , а не от него самого. Несмотря на это, векторный потенциал  $A$  (наряду с сопровождающим его скалярным потенциалом  $\phi$ ), по-видимому, приводит к более прямому описанию физических процессов. Чем глубже мы проникаем в квантовую теорию, тем яснее и прозрачней нам это становится. В общей теории — квантовой электродинамике — в системе уравнений, заменяющих собой уравнения Максвелла, векторные и скалярные потенциалы уже считаются фундаментальными величинами. Векторы  $E$  и  $B$  постепенно исчезают из современной записи физических законов: их вытесняют  $A$  и  $\phi$ .

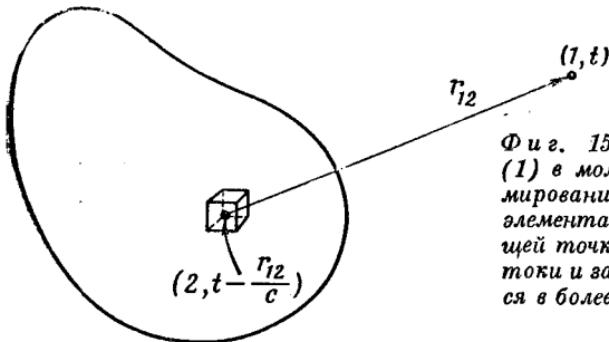
## § 6. Что истинно в статике, но ложно в динамике?

Наше исследование статических полей близится к концу. В этой главе мы опасно близко подошли к такому пункту, когда уже следует подумывать о том, что случится, если поля начнут меняться со временем. Толкуя о магнитной энергии, нам едва удалось избежать этого, да и то потому, что мы прикрылись релятивистскими соображениями. Даже при этом наша трактовка проблемы энергии выглядела несколько искусственно и, пожалуй, даже таинственно, потому что мы игнорировали тот факт, что движущиеся катушки должны на самом деле создавать меняющиеся поля. Теперь самое время перейти к изучению полей, меняющихся во времени, к тому, что составляет предмет электродинамики. Мы проделаем это в следующей главе. Однако прежде следует подчеркнуть некоторые моменты.

Хотя мы и начали этот курс с того, что представили полные и точные уравнения электромагнетизма, мы сразу же принялись изучать какие-то вырезанные куски, потому что так было легче. Большим преимуществом является возможность начать с простой теории статических полей и лишь потом перейти к более сложной теории, включающей динамические поля. При этом приходится с самого начала учить меньше нового материала и остается время потренировать мозги, поразмывать свои умственные мускулы, прежде чем приступить к задачам потруднее.

Но в таком процессе кроется одна опасность — пока мы не услышали весь рассказ целиком, в нас может укорениться и выдать себя за полную та неполная истина, которую мы успели усвоить; в голове все перепутается: то, что верно всегда, и то, что справедливо только временами. Поэтому в табл. 15.1 мы даем сводку важнейших формул, которых мы касались, отделяя в ней те, что верны в общем случае, от тех, которые соблюдаются только в статике, но ложны в динамике. Эта сводка содержит намеки на то, куда мы собственно с вами путь держим; изучая динамику, мы должны будем детально разобрать то, что пока приходилось описывать без доказательства.

Пожалуй, здесь стоит сделать несколько замечаний по поводу самой таблицы. Прежде всего вы должны обратить внимание, что уравнения, с которых мы начали, это *правильные* уравнения, в этом месте мы вас не вводим в заблуждение. Формула для электромагнитной силы (часто именуемой *силой Лоренца*)  $F = q(E + v \times B)$  также *правильна*. Ошибочен только закон Кулона; он годится только для статики. Четыре уравнения Максвелла для  $E$  и  $B$  тоже *правильны*. Уравнения, принятые нами в статике, ошибочны, потому что мы выбросили из них все члены с производными по времени.



Фиг. 15.10. Потенциалы в точке (1) в момент  $t$  получаются суммированием вкладов от каждого элемента источника поля в текущей точке (2) при условии, что токи и заряды в этой точке берутся в более раннее время  $t - r_{12}/c$ .

Закон Гаусса  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  остается, но ротор  $\mathbf{E}$  в общем случае не равен нулю. Значит,  $\mathbf{E}$  нельзя всегда приравнивать к градиенту скаляра — электростатического потенциала. Мы увидим, что скалярный потенциал все же остается, но это уже величина, которая меняется во времени и должна употребляться для полного описания электрического поля только вместе с векторным потенциалом. Конечно, уравнения, управляющие этим новым скалярным потенциалом, также оказываются новыми.

Мы вынуждены также рассторгнуть представлением о том, что  $\mathbf{E}$  в проводниках равно нулю. Когда поля меняются, заряды в проводниках, вообще говоря, не успевают перестраиваться так, чтобы поле все время обращалось в нуль. Они приходят в движение, но никогда не достигают равновесия. Единственное общее утверждение таково: электрические поля создают токи в проводниках. Итак, в переменных полях проводники не являются эквипотенциальными поверхностями. Отсюда также следует, что представление о емкости нельзя сделать универсальным.

Раз магнитных зарядов не бывает, дивергенция  $\mathbf{B}$  всегда равна нулю. Так что  $\mathbf{B}$  можно всегда приравнивать  $\nabla \times \mathbf{A}$ . (Выходит, что меняется не все!) Но  $\mathbf{B}$  генерируется не только токами;  $\nabla \times \mathbf{B}$  пропорционально плотности тока плюс новое слагаемое  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ . Это означает, что  $\mathbf{A}$  связано с токами новым уравнением. Оно связано и с  $\phi$ . Если мы для собственного удобства воспользуемся свободой выбора  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , то уравнения для  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  можно будет записать так, что они приобретут простой и изящный вид. Поэтому мы выдвигаем требование, чтобы  $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A}$  было равно  $-\partial \phi / \partial t$ , и тогда дифференциальные уравнения для  $\mathbf{A}$  или для  $\phi$  оказываются такими, как в таблице.

Потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  все еще можно выразить в виде интегралов от токов и зарядов, но это уже не те же самые интегралы, что были в статике. Удивительнее всего, однако, то, что правильный вид интегралов похож на прежний, статический, но с одним небольшим видоизменением, имеющим ясный физический

Таблица 15.1 • СВОДКА ВАЖНЕЙШИХ ФОРМУЛ

Не всегда верно (а только в статике)	Верно всегда
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (закон Кулона)	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (сила Лоренца) $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (закон Гаусса)
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (закон Фардаля)
$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$	$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
$\mathbf{E} (1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	
Для проводников $\mathbf{E} = 0$ , $\varphi$ постоянно, $Q = CV$	В проводнике $\mathbf{E}$ создает токи
	$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (нет магнитных зарядов)
	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}$ (закон Ампера),	$\rightarrow c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\mathbf{B} (1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	
$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (уравнение Пуассона) и	$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ , и
$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}$ ,	$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}$ ,
при условии	при условии
$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$	$c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
$\varphi (1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2$ , и	$\varphi (1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t')}{r_{12}} dV_2$ , и
$\mathbf{A} (1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2)}{r_{12}} dV_2$	$\mathbf{A} (1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2, t')}{r_{12}} dV_2$ , где $t' = t - \frac{r_{12}}{c}$
$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV$	$U = \frac{1}{2} \int \left( \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV$

Стрелкой ( $\rightarrow$ ) отмечены уравнения Максвелла для пустого пространства.

смысл. Когда мы берем интегралы, чтобы получить потенциалы в некоторой точке, скажем в точке (1) на фиг. 15.10, то мы обязаны использовать значения  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  в точке (2) в более раннее время  $t' = t - r_{12}/c$ . Как и следовало ожидать, влияние точки (2) на точку (1) распространяется со скоростью  $c$ . Это небольшое видоизменение позволяет отыскивать поля изменяющихся токов и зарядов, потому что, как только мы узнаем  $\mathbf{A}$  и  $\phi$ , то  $\mathbf{B}$  получается, как и раньше, как  $\nabla \times \mathbf{A}$ , а  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ .

Наконец, вы видите из таблицы, что некоторые выводы, полученные в статике (например, вывод о том, что плотность энергии в электрическом поле равна  $\epsilon_0 E^2/2$ ), остаются справедливыми и в электродинамике. Не надо обманывать себя и думать, что все это естественно. Правильность любой формулы, выведенной в статическом случае, должна в динамике доказываться съзнова. Например, мы знаем, что объемный интеграл от  $\rho\mathbf{f}$  тоже дает электростатическую энергию. Но это верно *только* в статике.

В свое время мы детально разберем все эти вопросы; пока же полезно держать в уме эту сводку, чтобы знать, что не грех и позабыть, а что следует считать справедливым всегда.

## ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТОКИ

### § 1. Моторы и генераторы

### § 2. Трансформаторы и индуктивности

### § 3. Силы, действующие на индуцируемые токи

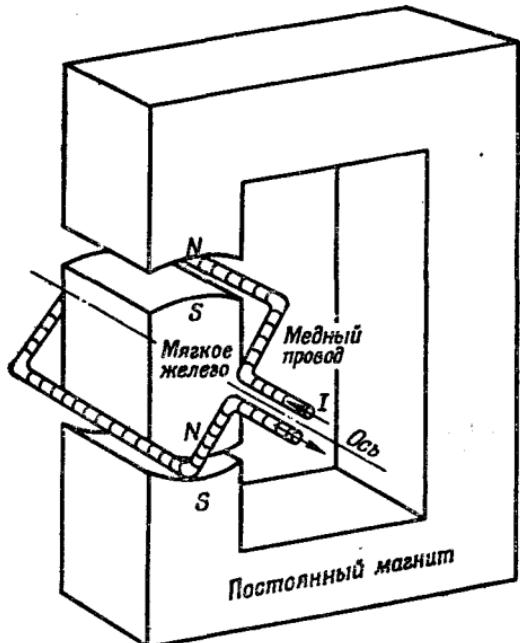
### § 4. Электротехника

Открытие тесной связи между электричеством и магнетизмом, произшедшее в 1820 г., было поистине волнующим событием — ведь до того они считались совершенно независимыми. Сначала открыли, что токи в проводах создают магнитные поля, а затем в том же году обнаружили, что на провода в магнитном поле действуют силы.

Волнение было вызвано тем, что возникающую механическую силу можно использовать в машине для выполнения какой-то работы. Сразу же после этого замечательного открытия люди начали конструировать электромоторы, заставив работать на себя силы, действующие на провода с током. Принцип устройства электромотора схематически показан на фиг. 16.1. Постоянный магнит (обычно в нем имеется несколько частей из мягкого железа) создает магнитное поле внутри двух щелей. Конец каждой щели представляет собой северный или южный полюсы, как показано на схеме. Прямоугольная рамка из медной проволоки помещается так, что одной из своих сторон она попадает в каждую щель. Когда по рамке проходит ток, то в обеих щелях он идет в противоположных направлениях, так что силы оказываются направленными противоположно и создают в рамке вращательный момент вокруг изображенной на схеме оси. Если рамка закреплена на оси так, что она может вращаться, то ее можно подсоединить к шкивам или шестеренкам и заставить производить полезную работу.

Ту же идею можно использовать и при конструировании чувствительных приборов

Фиг. 16.1. Схематическое изображение простого электромагнитного мотора.



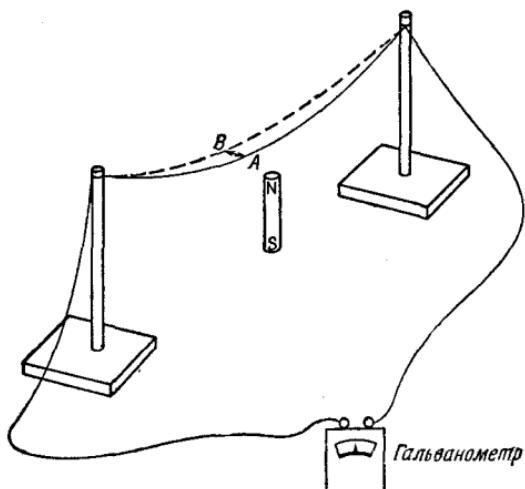
для электрических измерений. Так что немедленно после открытия закона сил точность электрических измерений намного возросла. Прежде всего вращательный момент такого мотора может быть значительно увеличен для данного тока, если заставить его проходить по нескольким виткам, а не по одному. Кроме того, рамку можно установить так, чтобы она вращалась под действием очень малого момента, укрепив ее ось в тщательно сделанных подшипниках, либо подвешивая ее на тончайшей проволоке или кварцевой нити. Тогда даже чрезвычайно слабый ток заставит катушку повернуться, и для малых углов величина поворота будет пропорциональна току. Угол поворота можно измерить, приклев к рамке стрелку или (для очень тонких приборов) прикрепив маленькое зеркальце к рамке и отмечая сдвиг его изображения на шкале. Такие приборы называют гальванометрами. Вольтметры и амперметры работают по тому же принципу.

Те же идеи могут быть применены в большом масштабе для создания мощных моторов, производящих механическую работу. Рамку можно заставить вращаться много, много раз, если с помощью укрепленных на оси контактов каждые пол-оборота менять направление тока в ней на противоположное. Тогда момент силы будет всегда направлен в одну и ту же сторону. Маленькие моторчики постоянного тока именно так и устроены. В моторах больших размеров постоянного или переменного тока постоянные магниты часто заменяют электромагнитами, питаятся они от источника электрической энергии.

Осознав, что электрический ток рождает магнитное поле, многие сразу же предположили, что так или иначе магниты должны тоже создавать электрические поля. Для проверки этого предположения были поставлены различные эксперименты. Например, располагали два провода параллельно друг другу и по одному из них пропускали ток, пытаясь обнаружить ток в другом проводе. Мысль заключалась в том, что магнитное поле сможет как-то протащить электроны вдоль второго провода по закону, который должен формулироваться как-то так: «одинаковое стремится двигаться одинаковым образом». Но, пропуская по одному проводу самый большой ток и используя самый чувствительный гальванометр, обнаружить ток во втором проводе не удалось. Большие магниты тоже не давали никакого эффекта в расположенных поблизости проводах. Наконец, в 1840 г. Фарадей открыл существенную особенность, которую раньше упускали из виду, — электрические эффекты возникают только тогда, когда что-нибудь изменяется. Если в одной из двух проволок ток меняется, то в другой тоже наводится ток, или же если магнит движется вблизи электрического контура, то там возникает ток. Мы говорим теперь, что токи в этих случаях *индуктируются*. В этом и состояло явление индукции, открытое Фарадеем. Оно преобразило довольно скучную область статических полей в увлекательную динамическую область, в которой происходит огромное число удивительных явлений. Эта глава посвящена качественному описанию некоторых из них. Как мы увидим, можно довольно быстро попасть в очень сложные ситуации, трудно поддающиеся подробному количественному анализу. Но это неважно. Наша главная задача в этой главе — сначала познакомить вас с кругом относящихся сюда явлений. Тщательный анализ мы проделаем немного позже.

Из того, что мы уже знаем, нам легко понять кое-что о магнитной индукции, то, что не было известно во времена Фарадея. Мы знаем о существовании действующей на движущийся заряд силы  $v \times B$ , которая пропорциональна его скорости в магнитном поле. Пусть у нас есть проволока, которая движется вблизи магнита (фиг. 16.2), и пусть мы подсоединили концы проволоки к гальванометру. Когда проволока проходит над полюсом магнита, стрелка гальванометра сдвигается.

Магнит создает вертикальное магнитное поле, и, когда мы двигаем проволоку попере<sup>к</sup>к поля, электроны в проволоке чувствуют силу, направленную вбок, т. е. перпендикулярно полю и направлению движения. Сила толкает электроны вдоль проволоки. Но почему же при этом приходит в движение стрелка гальванометра, который расположен так далеко от этой силы? Да потому, что электроны, испытывающие магнитную силу, начинают двигаться и толкают (за счет электрического



Фиг. 16.2. Движение провода в магнитном поле создает ток (это регистрирует гальванометр).

отталкивания) другие электроны, находящиеся чуть дальше по проволоке, а те в свою очередь отталкивают еще более удаленные электроны и так далее на большое расстояние. Любопытная штука.

Это так удивило Гаусса и Вебера, построившего впервые гальванометр, что они попытались определить, как далеко распространяются силы по проволоке. Они протянули проволоку поперек всего города, и один ее конец Гаусс присоединил к батарее (батареи были известны раньше генераторов), а Вебер наблюдал, как сдвигается стрелка гальванометра. И они обнаружили способ передавать сигналы на большое расстояние — это было рождение телеграфа! Разумеется, здесь нет прямого отношения к индукции, здесь речь шла о способе передачи тока по проволоке, о том, действительно ли ток продвигается за счет индукции или нет.

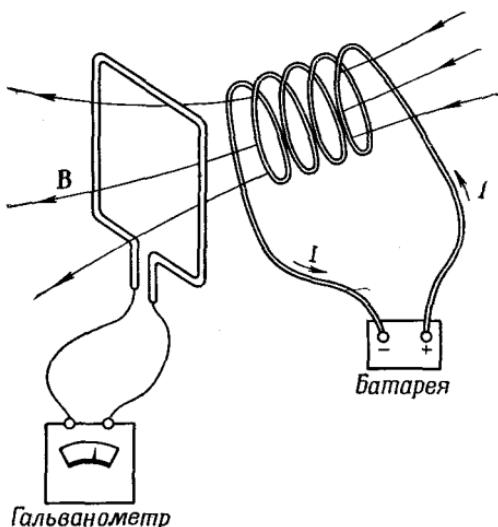
Предположим теперь, что в установке, изображенной на фиг. 16.2, мы проволоку оставляем в покое, а двигаем магнит. И снова наблюдаем эффект на гальванометре. Фарадей еще обнаружил, что движение магнита под проволокой (один способ) вызывает такой же эффект, как и движение проволоки над магнитом (другой способ). Но когда движется магнит, то на электроны проволоки уже больше не действует сила  $v \times B$ . Это и есть то новое явление, которое открыл Фарадей. Сегодня мы можем попытаться понять его с помощью принципа относительности.

Мы уже поняли, что магнитное поле магнита возникает за счет его внутренних токов. Поэтому мы ожидаем появления такого же эффекта, если вместо магнита на фиг. 16.2 взять катушку из проволоки, по которой течет ток. Если двигать провод мимо катушки, то гальванометр обнаружит ток, равно,

как и в том случае, когда катушка движется мимо провода. Но существует и еще более удивительная вещь: если менять магнитное поле катушки *не за счет* ее движения, а за счет *изменения в ней тока*, то гальванометр снова покажет наличие эффекта. Например, если расположить проволочную петлю рядом с катушкой (фиг. 16.3), причем обе они неподвижны, и выключить ток, то через гальванометр пройдет импульс тока. Если же снова включить ток в катушке, то стрелка гальванометра качнется в противоположную сторону.

Всякий раз, когда через гальванометр в установке, показанной на фиг. 16.2 или 16.3, проходит ток, в проводе в каком-то одном направлении возникает результирующее давление на электроны. В разных местах электроны могут толкнуться в разные стороны, но в одном направлении напор оказывается больше, чем в другом. Учитывать нужно только давление электронов, просуммированное вдоль всей цепи. Мы называем этот результирующий напор электронов *электродвигущей силой* (сокращенно э. д. с.) цепи. Более точно э. д. с. определяется как тангенциальная сила, приходящаяся на один заряд, проинтегрированная по длине провода, вдоль всей цепи. Открытие Фарадея целиком состояло в том, что э. д. с. в проводе можно создать тремя способами: двигая провод, двигая магнит вблизи провода или меняя ток в соседнем проводе.

Обратимся снова к простому прибору, изображенном на фиг. 16.1, только теперь не будем пропускать ток через проволоку, чтобы придать ей вращение, а будем крутить рамку с помощью внешней силы, например рукой или с помощью водяного колеса. При вращении рамки ее провода движутся в магнитном



*Фиг. 16.3. Катушка с током возбуждает ток в другой катушке, если первая катушка перемещается или если ток в ней меняется.*

поле, и мы обнаруживаем в цепи рамки э. д. с. Мотор превратился в генератор.

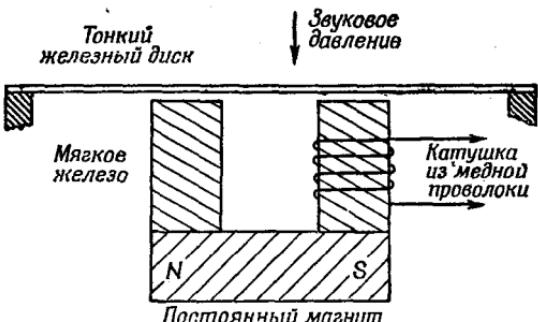
Индукционная э. д. с. возникает в катушке генератора за счет ее движения. Величина э. д. с.дается простым правилом, открытым Фарадеем. (Сейчас мы просто сформулируем это правило, а несколько позднее разберем его подробно.) Правило такое: если магнитный поток, проходящий через петлю (этот поток есть нормальная составляющая **B**, проинтегрированная по площади петли), меняется со временем, то э. д. с. равна скорости изменения потока. Мы будем в дальнейшем называть это «правилом потока». Вы видите, что, когда катушка на фиг. 16.1 вращается, поток через нее изменяется. Вначале, скажем, поток идет в одну сторону, а когда катушка повернется на  $180^\circ$ , тот же поток идет сквозь катушку по-другому. Если непрерывно вращать катушку, поток сначала будет положительным, затем отрицательным, потом опять положительным и т. д. Скорость изменения потока должна тоже меняться. Следовательно, в катушке возникает переменная э. д. с. Если присоединить два конца катушки к внешним проводам через скользящие контакты, которые называются контактными кольцами (просто, чтобы провода не перекручивались), мы получаем генератор переменного тока.

А можно с помощью скользящих контактов устроить и так, чтобы через каждые пол-оборота соединение между концами катушки и внешними проводами становилось противоположным, так что когда э. д. с. изменит свой знак, то и соединение станет противоположным. Тогда импульсы э. д. с. будут всегда толкать ток в одном направлении вдоль внешней цепи. Мы получаем так называемый генератор постоянного тока.

Прибор, изображенный на фиг. 16.1, может быть либо мотором, либо генератором. Связь между моторами и генераторами хорошо демонстрируется с помощью двух одинаковых «моторов» постоянного тока с постоянными магнитами, катушки которых соединены двумя медными проводами. Если ручку одного из «моторов» поворачивать механически, он становится генератором и приводит в движение второй как мотор. Если же поворачивать ручку второго, то генератором уже становится он, а первый работает как мотор. Итак, здесь мы встречаемся с интересным примером нового рода эквивалентности в природе: мотор и генератор эквивалентны. Количественная эквивалентность на самом деле не совсем случайна. Она связана с законом сохранения энергии.

Другой пример устройства, которое может работать либо для создания э. д. с., либо воспринимать действие э. д. с., представляет собой приемная часть обычного телефона, т. е. «слухофон». Первоначальный телефон Белла состоял из двух таких «слухофонов», соединенных двумя длинными проводами.

Фиг. 16.4. Приемное или передающее устройство телефона.



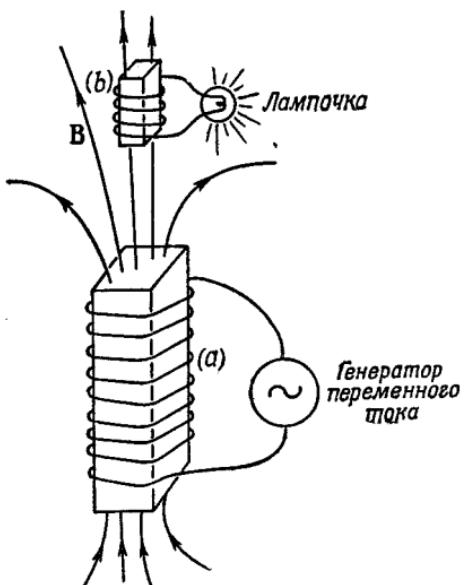
Основной принцип этого устройства показан на фиг. 16.4. Постоянный магнит создает магнитное поле в двух сердечниках из мягкого железа и в тонком железном диске — мембране, которая приводится в движение звуковым давлением. При движении мембраны изменяет величину магнитного поля в сердечниках. Следовательно, поток через катушку проволоки, намотанной вокруг одного из сердечников, изменяется, когда звуковая волна попадает на мембрану. Тогда в катушке возникает э. д. с. Если концы катушки присоединены к цепи, в ней устанавливается ток, который представляет собой электрическое изображение звука.

Если концы катушки на фиг. 16.4 присоединить двумя проводами к другому такому же устройству, то по второй катушке потечет меняющийся ток. Этот ток создаст меняющееся магнитное поле и заставит меняться и силу притяжения железной мембранны. Она начнет дрожать и породит звуковые волны, подобные тем, которые колебали первую мембрану. С помощью маленьких кусочков железа и меди человеческий голос передается по проводам!

(Приемники в современных домашних телефонах похожи на только что описанный, а вот передатчики используются уже улучшенные, чтобы получить большую мощность. Это «микрофоны с угольной мембраной», в которых звуковое давление изменяет электрический ток от батареи.)

## § 2. Трансформаторы и индуктивности

Одна из наиболее интересных сторон открытий Фарадея заключается совсем не в том, что э. д. с. возникает в движущейся катушке, это мы можем понять с помощью магнитной силы  $qV \times B$ . Главное — в том, что изменение тока в одной катушке создает э. д. с. во второй катушке. И уж совсем удивительно, что величина э. д. с., наведенной во второй катушке, дается тем же самым «правилом потока»: э. д. с. равна скорости изменения магнитного потока сквозь катушку. Возьмем, например,



Фиг. 16.5. Две катушки, намотанные на стопки железных пластинок, позволяют включить лампочку, не соединяя ее прямо с генератором.

две катушки (фиг. 16.5), каждая из которых намотана на отдельную стопку железных пластинок (с их помощью можно создать более сильные магнитные поля). Присоединим теперь одну из катушек — катушку *a* — к генератору переменного тока. Непрерывно меняющийся ток создает непрерывно меняющееся магнитное поле. Такое изменяющееся магнитное поле генерирует переменную э. д. с. во второй катушке — катушке *b*. Эта э. д. с., например, способна заставить гореть электрическую лампочку.

В катушке *b* э. д. с. меняется с частотой, конечно, равной частоте первого генератора. Но ток в катушке *b* может быть больше или меньше тока в катушке *a*. Ток в катушке *b* зависит от индуцированной в ней э. д. с. и от сопротивления и индуктивности остальной части ее цепи. Эта э. д. с. может быть меньше э. д. с. генератора, если, скажем, изменение потока мало. Или же э. д. с. в катушке *b* может оказаться много больше э. д. с. генератора, если на катушку *b* навить много витков, ибо в этом случае в данном магнитном поле поток через катушку будет больше. (Можно, если хотите, сказать об этом иначе — в каждом витке э. д. с. одна и та же, и поскольку полная э. д. с. равна сумме э. д. с. отдельных витков, то большое число витков в совокупности создает большую э. д. с.)

Такая комбинация двух катушек (обычно с набором железных пластинок, повышающих магнитное поле) называется *трансформатором*. Он может «трансформировать» одну э. д. с. (называемую еще «напряжением») в другую.

Эффекты индукции возникают и в одной отдельной катушке. Например, в установке, изображенной на фиг. 16.5, меняю-

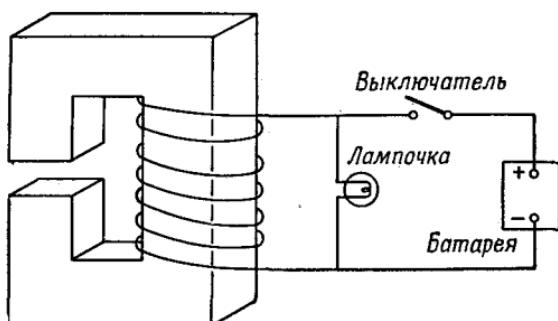
щийся поток проходит не только через катушку *b*, которая зажигает лампочку, но и через катушку *a*. Меняющийся ток в катушке *a* создает меняющееся магнитное поле внутри нее самой, и поток этого поля непрерывно изменяется, так что в катушке *a* получается *самоиндукция* э. д. с.

Э. д. с., действующая на ток, возникает тогда, когда его собственное магнитное поле растет, или в общем случае, если его собственное поле изменяется каким угодно образом. Этот эффект называется *самоиндукцией*.

Когда мы ввели «правило потока», утверждающее, что э. д. с. равна скорости изменения потока, мы не определяли направление э. д. с. Существует простое правило (называемое правилом Ленца) для определения направления э. д. с.: э. д. с. стремится препятствовать всякому изменению потока. Иначе говоря, направление наведенной э. д. с. всегда такое, что, если бы ток пошел в направлении э. д. с., он создал бы поток поля **B**, препятствующий изменению поля **B**, создающего эту э. д. с. Правилом Ленца можно пользоваться, чтобы найти направление э. д. с. в генераторе, показанном на фиг. 16.1, или в обмотке трансформатора (фиг. 16.3).

В частности, если ток в отдельной катушке (или в любом проводе) меняется, возникает «обратная» э. д. с. в цепи. Эта э. д. с. действует на заряды, текущие в катушке *a* на фиг. 16.5, препятствуя изменению магнитного поля, и поэтому направлена так, чтобы препятствовать изменению тока. Она стремится сохранить ток постоянным; э. д. с. противоположна току, когда ток увеличивается, и направлена по току, когда он уменьшается. При самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить поток постоянным точно так же, как механическая инерция стремится сохранить скорость тела неизменной.

Любой большой электромагнит обладает большой самоиндукцией. Пусть, например, к катушке большого электромагнита присоединена батарея (фиг. 16.6) и пусть установилось большое магнитное поле. (Ток достигает постоянной величины,



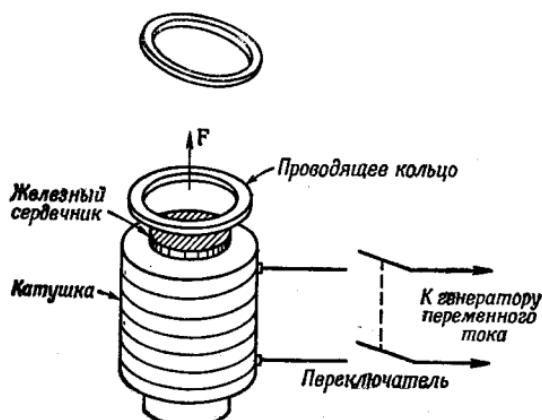
Фиг. 16.6. Включение электромагнита в цепь.

Лампочка открывает проход току в момент отключения, препятствуя возникновению слишком большой э.д.с. на контактах выключателя.

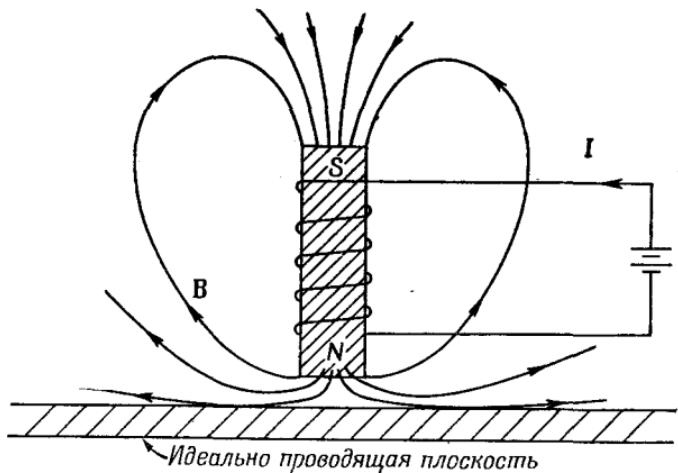
определенной напряжением батареи и сопротивлением провода катушки.) Но теперь предположим, что мы пытаемся отсоединить батарею, разомкнув выключатель. Если бы мы на самом деле разорвали цепь, ток бы быстро уменьшился бы до нуля и в процессе уменьшения создал бы огромную э. д. с. В большинстве случаев такой э. д. с. оказывается вполне достаточно, чтобы образовалась вольтова дуга между разомкнутыми контактами выключателя. Возникающее большое напряжение могло бы нанести вред катушке, да и вам, если бы именно вы размыкали выключатель! По этим причинам электромагниты обычно включают в цепь примерно так, как показано на фиг. 16.6. Когда переключатель разомкнут, ток не меняется быстро, а продолжает течь через лампу, оставаясь постоянным за счет э. д. с. от самоиндукции катушки.

### § 3. Силы, действующие на индуцируемые токи

Вы, вероятно, наблюдали великолепную демонстрацию правила Ленца с помощью приспособления, изображенного на фиг. 16.7. Это электромагнит точно такой же, как катушка *a* на фиг. 16.5. На одном конце электромагнита помещается алюминиевое кольцо. Если с помощью переключателя подсоединить катушку к генератору переменного тока, то кольцо взлетает в воздух. Силу, конечно, порождают токи, индуцируемые в кольце. Тот факт, что кольцо отлетает прочь, показывает, что токи в нем препятствуют изменению поля, проходящего через кольцо. Когда у магнита северный полюс находится сверху, индуцированный ток в кольце создает внизу северный полюс. Кольцо и катушка отталкиваются точно так же, как два магнита, приложенные одинаковыми полюсами. Если в кольце сделать тонкий разрез по радиусу, сила исчезает — убедитель-



Фиг. 16.7. Проводящее кольцо сильно отталкивается электромагнитом, когда в нем меняется ток.



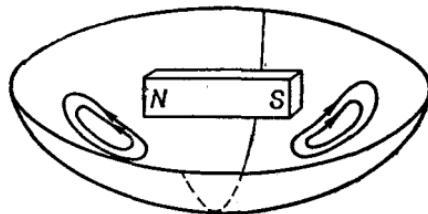
Фиг. 16.8. Электромагнит вблизи идеально проводящей плоскости.

ное доказательство того, что она действительно обусловлена токами в кольце.

Если вместо кольца у края электромагнита поместить алюминиевый или медный диск, то и он отталкивается; индуцированные токи циркулируют в материале диска и снова вызывают отталкивание.

Интересный эффект, в основе похожий на предыдущий, возникает с листом идеального проводника. В «идеальном проводнике» ток совсем не встречает сопротивления. Поэтому возникшие в нем токи могут течь не переставая. Фактически *малейшая* э. д. с. создала бы сколь угодно большой ток, а это на самом деле означает, что в нем вообще не может быть э. д. с. Любая попытка создать магнитный поток, проходящий сквозь такой лист, вызовет токи, образующие противоположно направленные поля  $B$  — все со сколь угодно малыми э. д. с., так что никакого потока не будет.

Если к листу идеального проводника мы поднесем электромагнит, то при включении тока в магните в листе возникают токи (называемые вихревыми токами), и никакой магнитный поток не пройдет. Линии поля будут иметь вид, показанный на фиг. 16.8. То же самое произойдет, если к идеальному проводнику поднести постоянный магнит. Поскольку вихревые токи создают противоположные поля, магниты от проводника отталкиваются. Поэтому оказывается возможным подвесить постоянный магнит в воздухе над листом идеального проводника, изготовленного в форме тарелки (фиг. 16.9). Магнит будет поддерживаться в воздухе за счет отталкивания индуцированных вихревых токов в идеальном проводнике. При обычных температурах идеальных проводников не существует, но чеко-



*Фиг. 16.9. Магнитная палочка отталкивается вихревыми токами и повисает над чашей из сверхпроводника.*

торые материалы при достаточно низких температурах становятся идеальными проводниками. Так, при температуре ниже  $3,8^{\circ}$  К олово становится идеальным проводником; тогда оно называется сверхпроводником.

Если проводник, показанный на фиг. 16.8, не вполне идеальный, то возникнет некоторое сопротивление течению вихревых токов. Токи будут постепенно замирать, и магнит медленно опустится. В неидеальном проводнике, чтобы течь дальше, вихревым токам необходима некоторая э. д. с., а для возникновения э. д. с. поток магнитного поля постепенно проникает в проводник.

В обычном проводнике имеются не только силы отталкивания за счет вихревых токов, но могут быть и боковые силы. Например, если мы передвигаем магнит над проводящей поверхностью, вихревые токи создают тормозящую силу, потому что индуцированные токи препятствуют изменению потока. Такие силы пропорциональны скорости и похожи на силы вязкости.

Эти эффекты хорошо наблюдаются на приборе, изображенном на фиг. 16.10. Квадратная медная пластинка укреплена на конце стержня, образуя маятник. Пластинка качается взад и вперед между полюсами электромагнита. Когда магнит включается, движение маятника неожиданно прекращается. Как только металлическая пластинка попадает в зазор магнита, в ней индуцируется ток, который стремится помешать изменению потока через пластинку. Если бы пластинка была идеальным проводником, токи были бы столь велики, что они снова вытолкнули бы пластинку и она отскочила бы назад. В медной же пластинке имеется некоторое сопротивление, поэтому токи сначала заставляют пластинку почти намертво застыть, когда она начинает входить в поле. Затем, по мере того как токи замирают, пластинка продолжает медленно двигаться в магнитном поле и останавливается совсем.

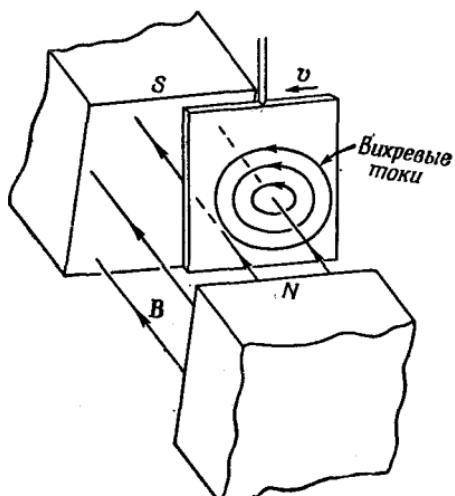
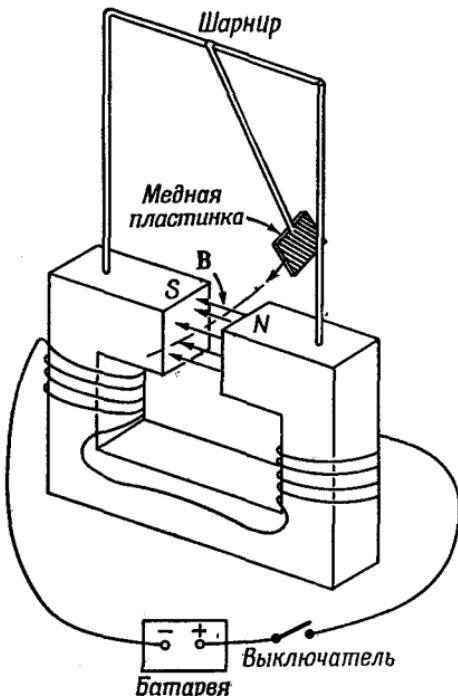
Схема вихревых токов в медном маятнике поясняется фиг. 16.11. Сила и расположение токов весьма чувствительны к форме пластинки. Если, скажем, вместо медной пластинки взять другую, в которой имеется ряд узких щелей (фиг. 16.12), то эффекты вихревых токов сильно уменьшаются. Маятник про-

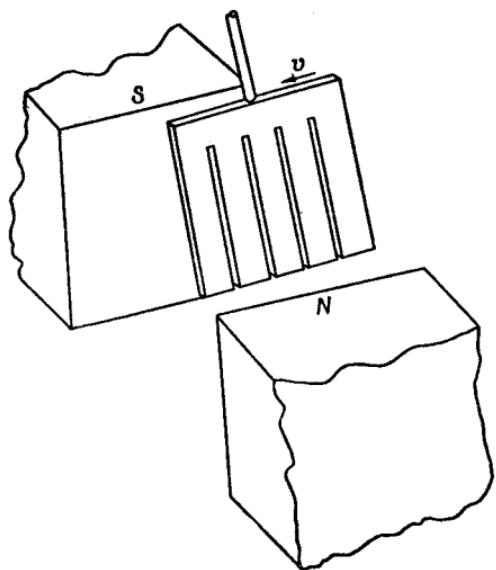
Фиг. 16.10. Торможение маятника указывает на силы, возникающие благодаря вихревым токам.

ходит сквозь магнитное поле лишь с небольшой тормозящей силой. Причина в том, что токи в каждой части пластинки возбуждаются меньшими по величине потоками и, следовательно, эффекты сопротивления каждой петли оказываются большими. Чем меньше токи, тем меньше и торможение. Вязкий характер силы проявится еще более наглядно, если медную пластинку поместить между полюсами магнита и затем отпустить ее. Пластинка не падает, она просто медленно опускается. Вихревые токи оказывают сильное сопротивление движению, точь-в-точь как вязкое сопротивление меди.

Если мы не будем протаскивать проводник мимо магнита, а попробуем вращать его в магнитном поле, то в нем в результате тех же эффектов возникнет тормозящий момент. И наоборот, если вращать магнит, меняя местами его полюса, вблизи проводящей плоскости или кольца, то кольцо повернется за магнитом, токи в кольце создадут момент, стремящийся повернуть кольцо вместе с магнитом.

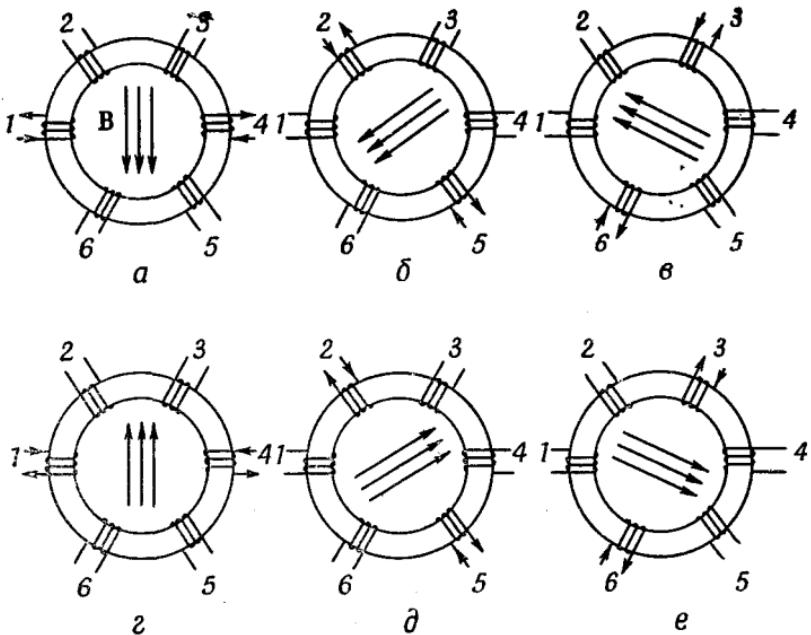
Фиг. 16.11. Вихревые токи в медном маятнике.





Фиг. 16.12. Эффекты от вихревых токов сильно снижаются, если в пластинке прорезать щели.

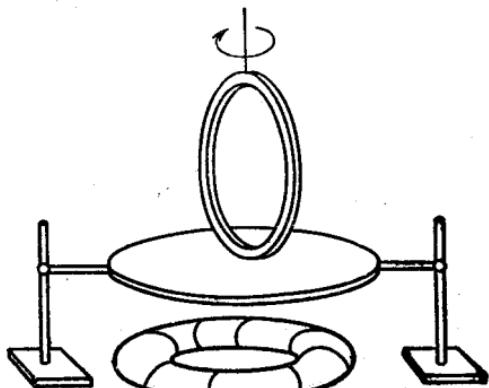
Поле, весьма похожее на поле вращающегося магнита можно создать с помощью устройства из катушек (фиг. 16.13). Мы берем железный тор (т. е. железное кольцо в виде бублика) и наматываем на него шесть катушек. Направив ток так, как показано на фиг. 16.13, а, через обмотки 1 и 4, мы получим магнитное поле в направлении, указанном стрелками. Если мы теперь переключим ток на обмотки 2 и 5, то магнитное поле будет направлено уже по-другому (фиг. 16.13, б). Продолжая так действовать, мы получаем последовательность полей, изображенных на остальных частях нашего рисунка. Если процесс проводить плавно, то получится «вращающееся» магнитное поле. Подсоединив катушки к сети трехфазного тока (а она дает именно такую последовательность токов), мы легко получим требуемую последовательность токов. «Трехфазный ток» создается генератором, использующим принцип фиг. 16.1, за тем исключением, что на оси симметрично укрепляются *три* рамки, т. е. каждая под углом  $120^\circ$  к соседней. Когда рамки вращаются как единое целое, э. д. с. максимальна в одной рамке, затем в другой и т. д. в правильной последовательности. Трехфазный ток имеет много практических преимуществ. Одно из них заключается в возможности получить вращающееся магнитное поле. Момент, действующий на проводник со стороны такого вращающегося поля, легко обнаруживается на металлическом кольце, поставленном на изолирующей подставке прямо над тором (фиг. 16.14). Вращающееся поле вызывает вращение кольца вокруг вертикальной оси. Здесь видны те же основные



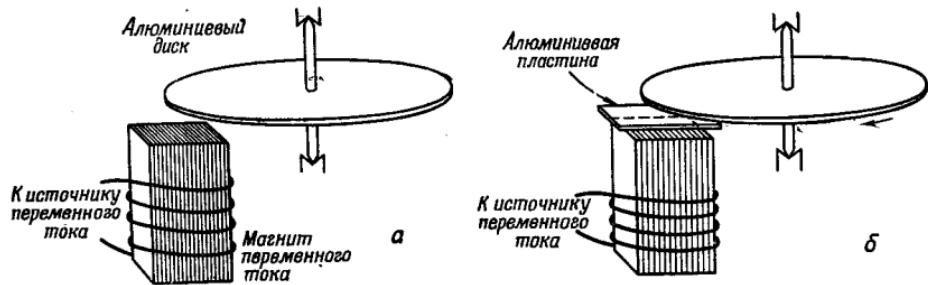
Фиг. 16.13. Создание вращающегося магнитного поля.

элементы, которые имеются в больших промышленных трехфазных индукционных моторах.

Другой тип индукционного мотора показан на фиг. 16.15. Это устройство непригодно для практических высокоеффективных моторов, но иллюстрирует основной принцип. Электромагнит  $M$ , состоящий из пачки прокатанных железных листов, на которую навита спиральная обмотка, питается от генератора переменного тока. Магнит создает переменный поток поля  $B$  сквозь алюминиевый диск. Если имеются только эти две компоненты (см. фиг. 16.15, а), у нас еще нет мотора. В диске имеются вихревые токи, но они симметричны и момента не возникает. (Диск будет немного нагреваться за счет токов индукции.)



Фиг. 16.14. С помощью вращающегося поля (фиг. 16.13) можно придать кольцу из проводника вращающий момент.



Фиг. 16.15. Простой пример индукционного мотора с затененным полюсом.

Если теперь мы закроем только одну половину магнитного полюса алюминиевой пластинкой (фиг. 16.15, б), то диск начнет вращаться и мы получим мотор. Действие его связано с двумя эффектами вихревых токов. Во-первых, вихревые токи в алюминиевой пластинке препятствуют изменению потока сквозь нее, поэтому магнитное поле над пластинкой всегда отстает от поля над непокрытой частью полюса. Этот так называемый эффект «затененного полюса» создает поле, которое в «затененной» области меняется совсем так же, как и в «незатененной», за исключением постоянного запаздывания во времени. Эффект в целом такой, как будто имеется вдвое более узкий магнит, постоянно передвигающийся из незатененной области в затененную. Во-вторых, меняющиеся поля взаимодействуют с вихревыми токами диска, создавая в нем момент силы.

#### § 4. Электротехника

Когда Фарадей впервые опубликовал свое замечательное открытие о том, что изменение магнитного потока создает э. д. с., его спросили (как спрашивают, впрочем, всякого, кто открывает какие-то новые явления): «Какая от этого польза?» Ведь все, что он обнаружил, было очень странным — в проводе возникал крошечный ток, когда он двигал провод возле магнита. Какая же может быть от этого «польза»? Фарадей ответил: «Какая может быть польза от новорожденного?»

А теперь вспомните о тех громадных практических применениях, к которым привело его открытие. Все, что мы описывали, — отнюдь не игрушки; это примеры, выбранные по большей части так, чтобы представить принцип той или иной практической машины. Например, вращающееся кольцо во вращающемся поле — индукционный мотор. Существует, конечно, известная разница между кольцом и практически используемым индукционным мотором. У кольца момент очень мал; протяните руку и вы можете остановить его. В хорошем моторе детали должны быть лучше пригнаны: магнитное поле не должно так

щедро «растрачиваться» в воздухе. Во-первых, с помощью железа поле концентрируется. Мы не говорили о том, как это делает железо, но оно способно увеличить магнитное поле в десятки и тысячи раз по сравнению с полем одной медной катушки. Во-вторых, зазоры между частями железа делаются небольшими; с этой целью железо даже встраивается внутрь вращающегося кольца. Словом, все направлено на то, чтобы получить наибольшие силы и максимальную эффективность, т. е. превратить электрическую мощность в механическую, и такое «кольцо» уже нельзя будет удержать рукой.

Задача уменьшения зазоров и установление самого практического режима работы есть дело инженерной науки. Она требует серьезного изучения проблем конструирования, хотя никаких новых принципов получения силы не существует. Но от основных принципов до практического и экономичного проектирования — долгий путь. И именно тщательная инженерно-конструкторская работа сделала возможным такую грандиозную вещь, как гидростанция Боулдер Дэм и все, что с ней связано.

Что такое Боулдер Дэм? Огромная река, перегороженная бетонной стеной. Но что это за стена! Изогнутая в виде идеально плавной кривой, тщательно рассчитанная так, чтобы как можно меньше бетона сдерживало напор реки. Стена утолщается книзу, образуя чудесную форму, которой любуются художники, но которую способны оценить только инженеры, потому что они понимают, насколько это хорошо. Они знают, что утолщение определяется тем, как растет давление воды на глубине. Но мы отвлеклись от электричества.

Затем вода реки забирается в огромную трубу. Уже само по себе это замечательное инженерное сооружение. По трубе вода передается к «водяному колесу» — огромной турбине — и заставляет колесо вращаться. (Еще одно достижение техники.) Но зачем крутят колеса? Они присоединены к невероятно запутанной мешанине из железа и меди (там все перекручено и переплетено). Все сооружение состоит из двух частей — одна крутится, а другая — стоит. Все это сложное сооружение сделано из немногих материалов, главным образом из железа и меди, а также из бумаги и шеллака, служащих изоляцией. Вращающееся чудовище. Генератор. Откуда-то из этого месива железа и меди вылезает несколько медных концов. Плотина, турбина, железо, медь — все собрано вместе для того, чтобы на этих медных полосках появилось нечто особенное — э. д. с. Затем медные полосы проходят небольшой путь и закручиваются несколько раз вокруг другого куска железа, образуя трансформатор; на этом их работа кончается.

Но вокруг этого же куска железа обвивается еще один медный кабель, который не соединяется непосредственно с полосами, пришедшими от генератора; он проходит поблизости

от полос и забирает их э. д. с. Трансформатор превращает энергию, которая имела сравнительно низкое напряжение, необходимое для эффективной работы генератора, в очень высокое напряжение, которое лучше всего подходит для экономичной передачи электроэнергии по длинным кабелям.

И все должно быть исключительно эффективным — не может быть ничего лишнего, никаких потерь. Почему? Через все эти устройства протекает вся электрическая энергия, которая используется в стране. Если пропадет всего один или два процента энергии — подумайте, как много это составит. Если в трансформаторе остается только один процент энергии, то она должна куда-то деваться. Если бы, например, она выделялась в виде тепла — все устройство расплавилось бы.

Из Боулдер Дэм выходит во всех направлениях несколько дюжин медных стержней — длинных, очень длинных стержней толщиной, пожалуй, с вашу руку и длиной в сотни миль. Узкие медные дороги, несущие энергию гигантской реки. Затем эти дороги разветвляются... трансформаторов становится еще больше... иногда они подходят к большим генераторам, переводящим ток в другие формы... иногда к машинам, выполняющим важные промышленные работы... к новым трансформаторам... Затем все новые и новые разветвления и ответвления... пока, наконец, река не распределится по всему городу; она крутит моторы, создает тепло, свет, изготавливает приборы. Чудо рождения горячего огня из холодной воды на расстоянии более 600 миль — и все это благодаря особым образом собранным кусочкам железа и меди. Большие моторы для проката стали и крошечные моторчики для бормашины. Тысячи маленьких колесиков, крутящихся под действием большого колеса в Боулдер Дэм. Остановите большое колесо, и все остальные колесики замрут; огни потухнут.

Но этого мало. Те же явления, которые помогают взять грандиозную мощь реки и распределить ее по всей округе, пока в конце концов несколько капель реки закрутят бормашину, снова приходят на помощь при создании исключительно тонких приборов... для определения неуловимо слабых токов... для передачи голосов, музыки и изображений... для вычислительных машин... для автоматических машин фантастической точности.

Все это возможно потому, что тщательно продумано устройство из меди и железа — эффективно созданы магнитные поля... железные блоки диаметром в 2 метра, вращающиеся с зазором в 2 миллиметра... рассчитаны правильно пропорции меди, чтобы получить оптимальную эффективность... выдуманы странные формы, которые все служат своим целям, так же как форма плотины.

Если археолог будущего когда-нибудь раскопает Боулдер Дэм, он, вероятно, восхитится красотой ее линий. А исследова-

тель — гражданин какой-то великой цивилизации Будущего, посмотрев на генераторы и трансформаторы, скажет: «Заметьте, как красивы формы каждой железной детали. Подумайте, сколько мысли вложено в каждый кусочек меди».

Здесь проявляется сочетание могущества техники и тщательного расчета. В генераторе осуществляется то, что нигде более в природе не встречается. Правда, силы индукции появляются и в других случаях. Несомненно, где-то вокруг Солнца и звезд действуют эффекты электромагнитной индукции. Возможно (хотя и не наверное), что магнитное поле Земли поддерживается каким-то гигантским аналогом электрического генератора, который работает на токах, циркулирующих в недрах Земли. Но нигде нет такого сочетания движущихся частей, которые могли бы порождать электрическую энергию, как это делается в генераторе, — непрерывно и очень экономично.

Вы, возможно, думаете, что конструирование электрических генераторов уже не представляет интереса, что это уже мертвая наука, ведь все они давно созданы. Почти совершенные генераторы или моторы можно взять просто с полки. Но даже если бы это было и так, нужно восхищаться чудесной законченностью решения проблемы. Однако осталось немало и нерешенных задач. И даже генераторы и моторы становятся снова проблемой. Возможно, что скоро для решения проблемы распределения электрической энергии понадобится использовать всю область низких температур и сверхпроводников. Будут созданы новые оптимальные установки с учетом радикально новых факторов. Возможно, энергетические сети будущего будут мало похожи на сегодняшние.

Итак, вы видите, что при изучении законов индукции можно заняться бесчисленным множеством приложений и проблем. Конструирование электрических машин само по себе может стать задачей всей жизни. Мы не будем слишком углубляться в этот вопрос, но мы должны осознать то, что открытие закона индукции неожиданно связало теорию с огромным числом практических применений. Область эта принадлежит инженерам и тем ученым прикладной науки, которые занимаются детальной разработкой различных приложений. Физика дает им лишь основу — основные законы, не зависящие от того, к чему они применяются. (Создание этой основы еще далеко не закончено, потому что предстоит еще подробно рассмотреть свойства железа и меди. Немного позже мы увидим, что физика может кое-что сказать и о них.)

Современная электротехника берет свое начало с открытий Фарадея. Бесполезный новорожденный превратился в чудо-богатыря и изменил облик Земли так, как его гордый отец не мог себе представить.

## ЗАКОНЫ ИНДУКЦИИ

### § 1. Физика индукции

### § 2. Исключения из «правила потока»

#### § 1. Физика индукции

В предыдущей главе мы описали множество явлений, которые показали, что эффекты индукции весьма сложны и интересны. Сейчас мы хотим обсудить основные законы, управляющие этими эффектами. Мы уже определяли э. д. с. в проводящей цепи как полную силу, действующую на заряды, просуммированную по всей длине цепи. Более точно, это тангенциальная компонента силы на единичный заряд, проинтегрированная по всему проводу вдоль цепи. Следовательно, эта величина равна полной работе, совершающей над единичным зарядом, когда он обходит один раз вокруг цепи.

Мы дали также «правило потока», которое утверждает, что э. д. с. равна скорости изменения магнитного потока сквозь такую цепь проводников. Давайте посмотрим, можем ли мы понять, почему это так. Прежде всего рассмотрим случай, когда поток меняется из-за того, что цепь движется в постоянном поле.

На фиг. 17.1 показана простая проволочная петля, размеры которой могут меняться. Петля состоит из двух частей — неподвижной U-образной части (*a*) и подвижной перемычки (*b*), которая может скользить вдоль двух плеч U. Цепь всегда замкнута, но площадь ее может меняться. Предположим, что мы помещаем эту петлю в однородное магнитное поле так, что плоскость U оказывается перпендикулярной полю. Согласно правилу, при движении перемычки в петле должна возникать э. д. с., пропорциональная скорости изменения потока сквозь петлю. Эта э. д. с. будет порождать в петле ток. Мы предположим, что сопротивление проволоки достаточно велико, так что

§ 3. Ускорение частицы в индуцированном электрическом поле; бетатрон

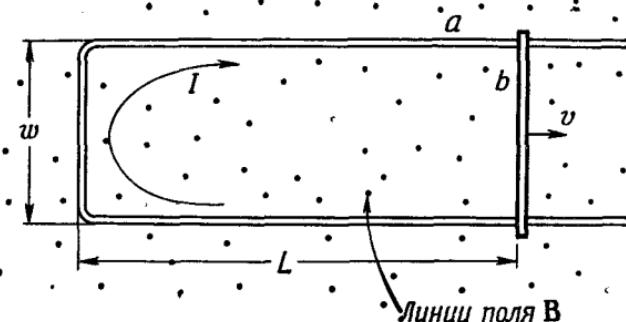
§ 4. Парадокс

§ 5. Генератор переменного тока

§ 6. Взаимная индукция

§ 7. Самоиндукция

§ 8. Индуктивность и магнитная энергия



Фиг. 17.1. В рамке наводится э.д.с., если поток меняется за счет изменения площади рамки при перемещении перемычки  $b$ .

токи малы. Тогда магнитным полем от этого тока можно пренебречь.

Поток через петлю равен  $wLB$ , поэтому «правило потока» дало бы для э. д. с. (ее обозначим через  $\mathcal{E}$ )

$$\mathcal{E} = -wB \frac{dL}{dt} = -wBv,$$

где  $v$  — скорость смещения перемычки.

Нам следовало бы понимать этот результат и с другой точки зрения, отправляясь от магнитной силы  $v \times B$ , действующей на заряды в движущейся перекладине. Эти заряды будут чувствовать силу, касательную к проволоке и равную  $vB$  для единичного заряда. Она постоянна вдоль длины  $w$  перемычки и равна нулю в остальных местах, поэтому интеграл равен

$$\mathcal{E} = -wvB,$$

что в точности совпадает с результатом, полученным из скорости изменения потока.

Приведенное доказательство можно распространить на любой случай, когда магнитное поле постоянно и провода движутся. Можно в общем виде доказать, что для любой цепи, части которой движутся в постоянном магнитном поле, э. д. с. равна производной потока по времени независимо от формы цепи.

Ну а что произойдет, если петля будет неподвижна, а магнитное поле изменится? На этот вопрос мы не можем ответить с помощью тех же аргументов. Фарадей открыл (поставив опыт), что «правило потока» остается справедливым независимо от того, почему меняется поток.

Сила, действующая на электрические заряды, в общем случае дается формулой  $F = q(E + v \times B)$ ; новых особых «сил за счет изменения магнитного поля» не существует. Любые

силы, действующие на покоящиеся заряды в неподвижной проволоке, возникают за счет Е. Наблюдения Фарадея привели к открытию нового закона о связи электрического и магнитного полей: в области, где магнитное поле меняется со временем, генерируются электрические поля. Именно это электрическое поле игонит электроны по проволоке, и, таким образом, оно-то и ответственно за появление э. д. с. в неподвижной цепи, когда магнитный поток изменяется.

Общий закон для электрического поля, связанного с изменяющимся магнитным полем, такой:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (17.1)$$

Мы назовем его законом Фарадея. Он был открыт Фарадеем, но впервые в дифференциальной форме записан Максвеллом в качестве одного из его уравнений. Давайте посмотрим, как из этого уравнения получается «правило потока» для цепей.

Используя теорему Стокса, этот закон можно записать в интегральной форме

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da, \quad (17.2)$$

где, как обычно,  $\Gamma$  — произвольная замкнутая кривая, а  $S$  — любая поверхность, ограниченная этой кривой. Вспомним, что здесь  $\Gamma$  — это математическая кривая, зафиксированная в пространстве, а  $S$  — фиксированная поверхность. Тогда производную по времени можно вынести за знак интеграла:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{поток через } S). \end{aligned} \quad (17.3)$$

Применяя это соотношение к кривой  $\Gamma$ , которая идет вдоль неподвижной цепи проводников, мы получаем снова «правило потока». Интеграл слева — это э. д. с., а в правой части с обратным знаком стоит скорость изменения потока, проходящего внутри контура. Итак, соотношение (17.1), примененное к неподвижному контуру, эквивалентно «правилу потока».

Таким образом, «правило потока» согласно которому э. д. с. в контуре равна взятой с обратным знаком скорости, с которой меняется магнитный поток через контур, применимо, когда поток меняется за счет изменения поля или когда движется контур (или когда происходит и то, и другое). Две возможности — «контур движется» или «поле меняется» — неразличимы в формулировке правила. Тем не менее для объяснения правила в этих двух случаях мы пользовались двумя совер-

шенно разными законами:  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  для «движущегося контура» и  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  для «меняющегося поля».

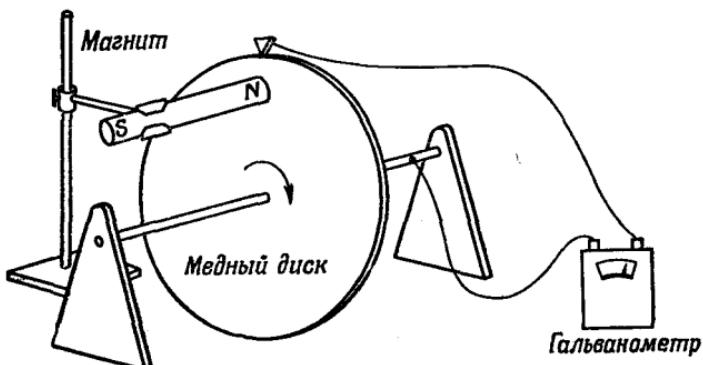
Мы не знаем в физике ни одного другого такого примера, когда бы простой и точный общий закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах *двух разных явлений*. Обычно столь красивое обобщение оказывается исходящим из единого глубокого основополагающего принципа. Но в этом случае какого-либо особо глубокого принципа не видно. Мы должны воспринимать «правило» как совместный эффект двух совершенно различных явлений.

На «правило потока» мы должны посмотреть следующим образом. Вообще говоря, сила на единичный заряд равна  $F/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . В движущихся проводниках сила возникает за счет  $\mathbf{v}$ . Кроме того, возникает поле  $\mathbf{E}$ , если где-либо меняется магнитное поле. Эти эффекты независимы, но э. д. с. вокруг проволочной петли всегда равна скорости изменения магнитного потока сквозь петлю.

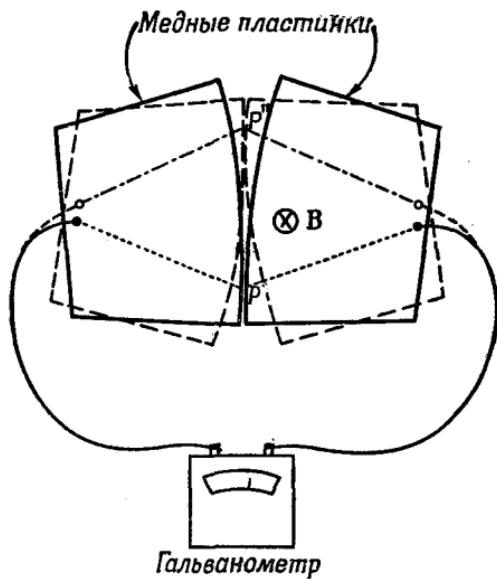
## § 2. Исключения из «правила потока»

Здесь мы приведем несколько примеров, частично известных Фарадею, которые показывают, как важно ясно понимать разницу между двумя эффектами, ответственными за возникновение наведенной э. д. с. Наши примеры включают те случаи, когда «правило потока» неприменимо либо потому, что вообще никаких проводов нет, либо потому, что *путь*, избираемый индуцированными токами, проходит внутри объема проводника.

Вначале сделаем важное замечание: та часть э. д. с., которая возникает за счет поля  $\mathbf{E}$ , не связана с существованием физической проволоки (в отличие от части  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ). Поле  $\mathbf{E}$  может существовать в пустом пространстве, и контурный интеграл от него



Фиг. 17.2. При вращении диска слагаемое  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  порождает э.д.с., но поток сквозь цепь не меняется.



Фиг. 17.3. При повороте пластинок в однородном магнитном поле поток может сильно меняться, но э.д.с. не возникает.

по любой воображаемой линии в пространстве есть скорость изменения потока  $\mathbf{B}$  через эту линию. (Заметьте, что это совсем непохоже на поле  $\mathbf{E}$ , создаваемое статическими зарядами, так как в электростатике контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  по замкнутой петле всегда равен нулю.)

Теперь опишем случай, когда поток через контур не меняется, а э. д. с. тем не менее существует. На фиг. 17.2 показан проводящий диск, помещенный в магнитное поле и который может вращаться на неподвижной оси. Один контакт приделан к оси, а другой трется о внешний край диска. Цепь замыкается через гальванометр. Когда диск вращается, «контур» (в смысле места в пространстве, где текут токи) всегда остается тем же самым. Но часть «контура» проходит в диске, в движущемся материале. Хотя поток по контуру постоянен, э. д. с. все же есть, в этом можно убедиться по отклонению гальванометра. Ясно, что здесь перед нами случай, когда за счет силы  $v \times \mathbf{B}$  в движущемся диске возникает э. д. с., которая не может быть равна изменению потока.

В качестве обратного примера мы сейчас рассмотрим несколько необычный случай, когда поток через «контур» (снова в смысле того места, где текут токи) изменяется, а э. д. с. *отсутствует*. Представим себе две металлические пластины со слегка изогнутыми краями (фиг. 17.3), помещенные в однородное магнитное поле, перпендикулярное их плоскости. Каждая пластина присоединена к одному из полюсов гальванометра, как показано на фигуре. Пластины образуют контакт в одной точке  $P$ , так что цепь замкнута. Если теперь повернуть пластины на небольшой угол, точка контакта сдвинется в  $P'$ .

Если мы вообразим, что «цепь» замкнута внутри пластины по пунктирной линии, то по мере поворота пластины взад и вперед магнитный поток через этот контур изменяется на большую величину. Но поворот может произойти от незначительного движения, тогда  $v \times B$  очень мало и э. д. с. практически отсутствует. В этом случае «правило потока» бессильно. Оно справедливо лишь для контуров, материал которых остается неизменным. Когда материал контура меняется, приходится обращаться снова к основным законам. Правильное физическое содержание всегда дается двумя основными законами:

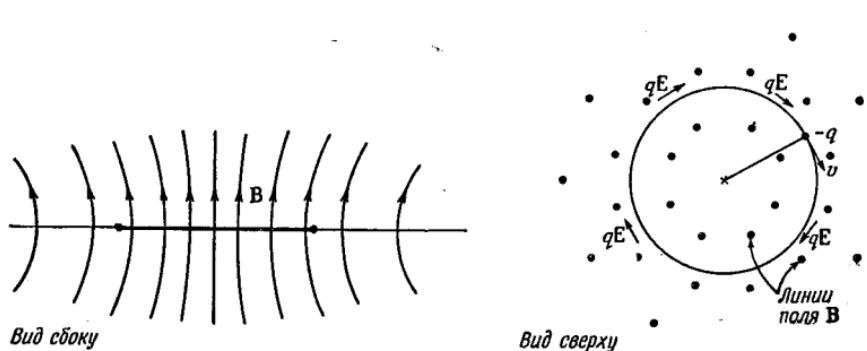
$$F = q(E + v \times B),$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

### § 3. Ускорение частицы в индуцированном электрическом поле; бетатрон

Мы уже говорили, что э. д. с., созданная изменяющимся магнитным полем, может существовать даже в отсутствие проводников; т. е. магнитная индукция возможна без проводов. Мы можем представить себе э. д. с. вдоль произвольной математической кривой в пространстве. Она определяется как тангенциальная компонента  $E$ , проинтегрированная вдоль кривой. Закон Фарадея гласит, что этот контурный интеграл равен скорости изменения магнитного потока через замкнутую кривую [соотношение (17.3)].

В качестве примера действия такого индуцированного электрического поля мы сейчас рассмотрим движение электрона в изменяющемся магнитном поле. Представим себе магнитное поле, которое всюду на плоскости направлено по вертикали (фиг. 17.4). Магнитное поле создается электромагнитом, но детали нас здесь интересовать не будут. В нашем примере мы предположим, что магнитное поле симметрично относительно



Фиг. 17.4. Электрон ускоряется в аксиально-симметричном магнитном поле, зависящем от времени.

некой оси, т. е. напряженность магнитного поля зависит только от расстояния до оси. Магнитное поле меняется также со временем. Представим теперь, что электрон в этом поле движется по круговой траектории постоянного радиуса с центром на оси поля. (Позже мы увидим, как можно создать такое движение.) Меняющееся магнитное поле создает электрическое поле  $E$ , касательное к орбите электрона, которое будет двигать его по окружности. Вследствие симметрии это электрическое поле всюду на окружности принимает одну и ту же величину. Если орбита электрона имеет радиус  $r$ , то контурный интеграл от  $E$  по орбите равен скорости изменения магнитного потока через окружность. Контурный интеграл от  $E$  равен просто величине  $E$ , умноженной на длину окружности  $2\pi r$ . Магнитный поток, вообще говоря, дается интегралом. Обозначим через  $B_{cp}$  — среднее магнитное поле внутри окружности; тогда поток равен этому среднему магнитному полю, умноженному на площадь круга. Мы получим (отвлекаясь от знака)

$$2\pi r E = \frac{d}{dt} (B_{cp} \pi r^2).$$

Поскольку мы предположили, что  $r$  — величина постоянная, то  $E$  пропорционально производной по времени от среднего поля:

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB_{cp}}{dt}. \quad (17.4)$$

Электрон будет чувствовать электрическую силу  $qE$  и будет ею ускоряться. Помня, что на основании точного релятивистского уравнения движения скорость изменения импульса пропорциональна силе, имеем

$$qE = \frac{dp}{dt}. \quad (17.5)$$

Для принятой нами круговой орбиты электрическая сила, действующая на электрон, всегда направлена по движению, поэтому полный импульс будет расти со скоростью, даваемой равенством (17.5). Комбинируя (17.5) и (17.4), можно связать скорость изменения импульса с изменением среднего магнитного поля:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2} \frac{dB_{cp}}{dt}. \quad (17.6)$$

Интегрируя по  $t$ , получаем следующее выражение для импульса электрона:

$$p = p_0 + \frac{qr}{2} \Delta B_{cp}, \quad (17.7)$$

где  $p_0$  — импульс, с которым электрон начинает двигаться, а  $\Delta B_{cp}$  — последующее изменение  $B_{cp}$ . Работа бетатрона —

машины, ускоряющей электроны до больших энергий, основана именно на этой идее.

Чтобы понять, как работает бетатрон, необходимо представить себе принцип движения электрона по окружности. В гл. 11 (вып. 1) мы уже обсуждали этот принцип. Если на орбите электрона создать магнитное поле  $\mathbf{B}$ , возникнет поперечная сила  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , которая при соответствующем выборе  $\mathbf{B}$  может заставить электрон двигаться по предположенной орбите. В бетатроне эта поперечная сила вызывает движение электрона по круговой орбите постоянного радиуса. Мы можем определить, каким должно быть магнитное поле на орбите, опять с помощью релятивистского уравнения движения, но на этот раз для поперечной компоненты силы. В бетатроне (см. фиг. 17.4) поле  $\mathbf{B}$  перпендикулярно  $\mathbf{v}$ , поэтому поперечная сила равна  $qvB$ . Таким образом, сила равна скорости изменения поперечной компоненты импульса  $p_t$ :

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \quad (17.8)$$

Когда частица движется *по окружности*, скорость изменения поперечного импульса равна величине полного импульса, умноженной на  $\omega$  — угловую скорость вращения (согласно аргументам, приведенным в гл. 11, вып. 1):

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \quad (17.9)$$

где, поскольку движение круговое,

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (17.10)$$

Полагая магнитную силу равной поперечному ускорению, имеем

$$qvB_{\text{орб}} = p \frac{v}{r}, \quad (17.11)$$

где  $B_{\text{орб}}$  — поле при радиусе, равном  $r$ .

В приведенном в действие бетатроне импульс электрона, согласно выражению (17.7), растет пропорционально  $B_{\text{ср}}$ , и чтобы электрон продолжал двигаться по собственной окружности, равенство (17.11) должно по-прежнему выполняться вместе с ростом импульса электрона. Величина  $B_{\text{орб}}$  должна расти пропорционально импульсу  $p$ . Сравнивая (17.11) с (17.7), определяющим  $p$ , мы видим, что должно выполняться следующее соотношение между  $B_{\text{ср}}$  — средним магнитным полем *внутри* орбиты радиуса  $r$  и магнитным полем  $B_{\text{орб}}$  на орбите:

$$\Delta B_{\text{ср}} = 2\Delta B_{\text{орб}}. \quad (17.12)$$

Для правильной работы бетатрона нужно, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного

поля на самой орбите. При этих условиях с ростом энергии частицы, увеличивающейся за счет индуцированного электрического поля, магнитное поле на орбите растет как раз со скоростью, нужной для удержания частицы на окружности.

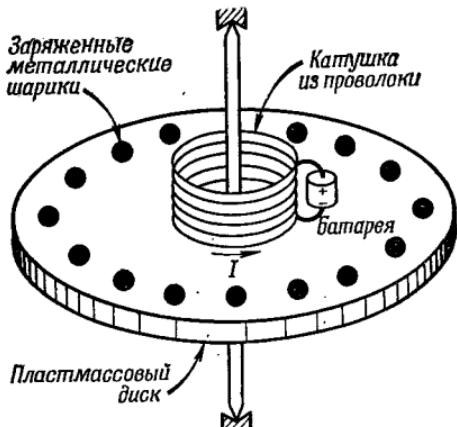
Бетатрон используется для разгона электронов до энергий в десятки или даже в сотни миллионов электронвольт. Однако по ряду причин для ускорения электронов до энергий, много больших нескольких сот миллионов электронвольт, эта машина становится невыгодной. Одна из этих причин — трудность достижения на практике требуемой высокой величины среднего магнитного поля внутри орбиты, а вторая — несправедливость формулы (17.6) для очень больших энергий, так как в ней не учитывается потеря энергии частицей за счет излучения электромагнитной энергии (так называемое синхротронное излучение, см. гл. 34, вып. 3). По этим причинам ускорение электронов до самых больших энергий — до многих миллиардов электронвoltage — совершается посредством машины другого рода, называемой *синхротроном*.

#### § 4. Парадокс

Теперь мы хотели бы предложить вам некий кажущийся парадокс. Парадокс возникает тогда, когда при одном способе рассуждений получается один ответ, а при другом способе — совсем другой, так что мы остаемся в неведении, что же собственно должно быть на самом деле. Разумеется, в физике никогда не бывает настоящих парадоксов, потому что существует только один правильный ответ; по крайней мере мы верим, что природа поступает только единственным способом (и именно этот способ, конечно, *правильный*). Поэтому в физике парадокс — всего лишь путаница в нашем собственном понимании. Итак, вот наш парадокс.

Представим, что мы конструируем прибор (фиг. 17.5), в котором имеется тонкий круглый пластмассовый диск, укрепленный концентрически на оси с хорошими подшипниками, так что он совершенно свободно вращается. На диске имеется катушка из проволоки — короткий соленоид, концентричный по отношению к оси вращения. Через этот соленоид проходит постоянный ток  $I$  от маленькой батареи, также укрепленной на диске. Вблизи края диска по окружности на равном расстоянии размещены маленькие металлические шарики, изолированные друг от друга и от соленоида пластмассовым материалом диска. Каждый из этих проводящих шариков заряжен одинаковым зарядом  $Q$ . Вся картина стационарна, и диск неподвижен. Предположим, что случайно, а может и намеренно, ток в соленоиде прекратился, но, разумеется, без какого-либо вмешательства извне. Пока через соленоид шел ток, более или менее

Фиг. 17.5. Повернется ли диск, если ток  $I$  прекратится?



параллельно оси диска проходил магнитный поток. После того как ток прервался, поток этот должен уменьшиться до нуля. Поэтому должно возникать индуцированное электрическое поле, которое будет циркулировать по окружностям с центром на оси диска. Заряженные шарики на периферии диска будут все испытывать действие электрического поля, касательного к внешней окружности диска. Эта электрическая сила направлена для всех зарядов одинаково и, следовательно, вызовет у диска вращающий момент. Из этих соображений можно ожидать, что, когда ток в соленоиде исчезнет, диск начнет вращаться. Если нам известны момент инерции диска, ток в соленоиде и заряд шариков, то можно вычислить результирующую угловую скорость.

Но можно рассуждать и по-другому. Используя закон сохранения момента количества движения, мы могли бы сказать, что момент диска со всеми его пристройками вначале равен нулю, поэтому момент всей системы должен оставаться нулевым. Никакого вращения при остановке тока быть не должно. Какое из доказательств правильно? Повернется ли диск или нет? Мы предлагаем вам подумать над этим вопросом.

Хотелось бы предостеречь вас, что правильный ответ не зависит от всяких несущественных факторов, таких, как несимметричное положение батареи, например. В самом деле, вы можете представить себе, скажем, такой идеальный случай: соленоид сделан из сверхпроводящей проволоки, через которую проходит ток. После того как диск тщательно установлен неподвижным, температуру соленоида медленно начинают повышать. Когда температура проволоки достигнет переходного значения между сверхпроводимостью и нормальной проводимостью, ток в соленоиде обратится в нуль вследствие сопротивления проволоки. Поток, как и раньше, упадет до нуля и вокруг оси возникнет электрическое поле. Мы хотели бы также

предостеречь вас, что решение не простое, но это и не обман. Когда вы разберетесь в этом, вы обнаружите важный закон электромагнетизма.

## § 5. Генератор переменного тока

В оставшейся части этой главы мы применим принципы, изложенные в § 1 для анализа ряда явлений, обсуждавшихся в гл. 16. Сначала мы рассмотрим подробно генератор переменного тока. Такой генератор в основном состоит из проволочной катушки, вращающейся в однородном магнитном поле. Тот же самый результат может быть достигнут с помощью неподвижной катушки в магнитном поле, направление которого вращается по способу, описанному в предыдущей главе. Мы рассмотрим лишь первый случай. Пусть имеется круглая катушка из проволоки, которая может вращаться вокруг оси, проходящей вдоль одного из ее диаметров. И пусть эта катушка помещена в магнитное поле, перпендикулярное оси вращения (фиг. 17.6). Представим себе, что оба конца катушки выведены на внешнюю цепь с помощью каких-нибудь скользящих контактов.

Благодаря вращению катушки магнитный поток через нее будет меняться. Поэтому в цепи катушки появится э. д. с. Пусть  $S$  — площадь катушки, а  $\theta$  — угол между магнитным полем и нормалью к плоскости катушки\*. Тогда поток через катушку равен

$$BS \cos \theta. \quad (17.13)$$

Если катушка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то  $\theta$  меняется со временем как  $\omega t$ . Тогда э. д. с.  $\mathcal{E}$  в катушке равна

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(\text{поток}) = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t),$$

или

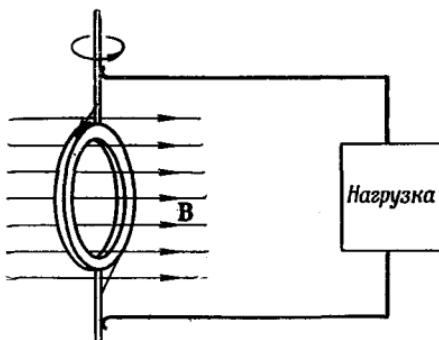
$$\mathcal{E} = BS\omega \sin \omega t. \quad (17.14)$$

Если мы выведем провода из генератора на некоторое расстояние от вращающейся катушки, в место, где магнитное поле равно нулю или хотя бы не меняется со временем, то ротор от  $E$  в этой области будет равен нулю, и мы сможем определить электрический потенциал. В самом деле, если ток не уходит из генератора, то разность потенциалов  $V$  между двумя проводами будет равна э. д. с. вращающейся катушки, т. е.

$$V = BS\omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t.$$

\* Мы пользуемся сейчас буквой  $A$  для обозначения векторного потенциала, поэтому площадь мы предпочитаем обозначать через  $S$ .

*Фиг. 17.6. Катушка из проволоки, вращающаяся в однородном магнитном поле, — основная идея генератора переменного тока.*



Разность потенциалов в проводах меняется как  $\sin \omega t$ . Такая меняющаяся разность потенциалов называется *переменным напряжением*.

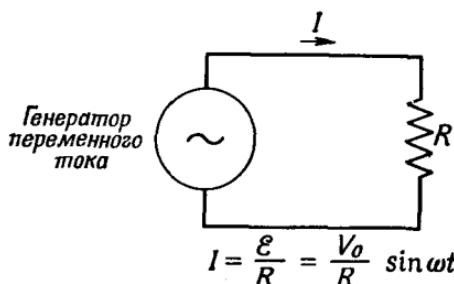
Поскольку между проводами имеется электрическое поле, они должны быть электрически заряжены. Ясно, что э. д. с. генератора выталкивает лишние заряды в провода, пока их электрическое поле не становится достаточно сильным, чтобы в точности уравновесить силу индукции. Если посмотреть на генератор со стороны, то покажется, будто два провода электростатически заряжены до разности потенциалов  $V$ , а заряды как бы меняются со временем, создавая переменную разность потенциалов. Есть и еще одно отличие от того, что наблюдается в случае электростатики. Если присоединить генератор к внешней цепи, по которой может проходить ток, мы обнаружим, что э. д. с. не позволяет проводам разряжаться, а продолжает подпитывать их зарядами, когда из них уходит ток, стремясь сохранить на проводах одну и ту же разность потенциалов. Если генератор подключен к цепи, полное сопротивление которой равно  $R$ , ток в цепи будет пропорционален э. д. с. генератора и обратно пропорционален  $R$ . Поскольку э. д. с. синусоидально изменяется со временем, то и ток делает то же самое. Возникает переменный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t.$$

Схема такой цепи приведена на фиг. 17.7.

Мы можем также заметить, что э. д. с. определяет количество энергии, поставляемое генератором. Каждый заряд в проводе получает в единицу времени энергию, равную  $F \cdot v$ , где  $F$  — сила, действующая на заряд, а  $v$  — его скорость. Пусть теперь количество движущихся зарядов на единице длины провода равно  $n$ ; тогда мощность, выделяющаяся в элементе  $ds$  провода, равна

$$F \cdot v n \, ds.$$



Фиг. 17.7. Цепь с генератором переменного тока и сопротивлением.

В проводе скорость  $v$  всегда направлена вдоль  $ds$ , так что мощность можно переписать в виде  $nvF \cdot ds$ .

Полная мощность, выделяемая во всей цепи, есть интеграл от этого выражения по всей петле:

$$\text{Мощность} = \oint nvF \cdot ds. \quad (17.15)$$

Вспомним теперь, что  $qnv$  — это ток  $I$  и что э. д. с. определяется как интеграл от  $F/q$  по всей цепи. Мы получаем

$$\text{Мощность, даваемая генератором} = \mathcal{E}I. \quad (17.16)$$

Когда в катушке генератора имеется ток, на нее непременно действуют механические силы. В самом деле, мы знаем, что врашающий момент, действующий на катушку, пропорционален ее магнитному моменту, напряженности магнитного поля  $B$  и синусу угла между ними. Магнитный момент есть ток катушки, умноженный на ее площадь. Поэтому врачающий момент равен

$$\tau = ISB \sin \theta. \quad (17.17)$$

Скорость, с которой должна совершаться механическая работа, чтобы поддерживать вращение катушки, есть угловая скорость  $\omega$ , умноженная на врачающий момент силы:

$$\frac{dW}{dt} = \omega \tau = \omega ISB \sin \theta. \quad (17.18)$$

Сравнивая это выражение с (17.14), мы видим, что затраты механической работы в единицу времени, требуемые для вращения катушки против магнитных сил, в точности равны  $\mathcal{E}I$  — электрической энергии, поставляемой э. д. с. генератора в единицу времени. Вся механическая энергия, расходуемая в генераторе, появляется в виде электрической энергии в цепи.

В качестве другого примера токов и сил, обусловленных индуцированной э. д. с., проанализируем, что же происходит в установке, показанной на фиг. 17.1. Имеются U-образная проволока и скользящая перемычка, расположенные в одно-

родном магнитном поле, перпендикулярном плоскости параллельных проволок. Теперь предположим, что «дно»  $U$  (левая часть фиг. 17.1) сделано из проволоки с большим сопротивлением, тогда как две боковые проволоки сделаны из хорошего проводника вроде меди — в этом случае нам не надо беспокоиться об изменении сопротивления цепи при движении перекладины. Как и раньше, э. д. с. цепи равна

$$\mathcal{E} = -vBw. \quad (17.19)$$

Ток в цепи пропорционален этой э. д. с. и обратно пропорционален сопротивлению цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{vBw}{R}. \quad (17.20)$$

Благодаря этому току на перемычку будет действовать магнитная сила, пропорциональная длине перемычки, току в ней и магнитному полю:

$$F = BIw. \quad (17.21)$$

Подставляя  $I$  из (17.20), получаем для силы

$$F = -\frac{B^2w^2}{R}v. \quad (17.22)$$

Мы видим, что сила пропорциональна скорости перемещения перемычки. Направление силы, как легко понять, противоположно скорости. Такая «пропорциональная скорости» сила, похожая на силу вязкости, получается всякий раз, когда движущиеся проводники создают индуцированные токи в магнитном поле. Вихревые токи, о которых мы говорили в предыдущей главе, приводят также к силам, действующим на проводники и пропорциональным скорости проводника, хотя такие случаи в общем дают более сложные распределения токов, которые трудно анализировать.

При конструировании механических систем часто бывает удобно располагать тормозящими силами, пропорциональными скорости. Вихревые токи дают один из наиболее удобных способов получения таких зависящих от скорости сил.

Пример применения подобных сил можно найти в обычном домашнем счетчике — ваттметре. Там имеется тонкий алюминиевый диск, вращающийся между полюсами постоянного магнита. Этот диск приводится в движение маленьким электромотором, вращающий момент которого пропорционален мощности, потребляемой в электросети квартиры. Вихревые токи в диске вызывают силу сопротивления, пропорциональную скорости. Следовательно, скорость диска устанавливается пропорциональной скорости потребления электроэнергии. С помощью счетчика, присоединенного к вращающемуся диску,

подсчитывается число оборотов диска. Так определяется полная потребленная энергия, т. е. число использованных ватт-часов.

Согласно формуле (17.22), сила от индуцированных токов, т. е. всякая сила от вихревых токов, обратно пропорциональна сопротивлению. Сила тем больше, чем лучше электропроводность материала. Причина, разумеется, заключается в том, что при малом сопротивлении э. д. с. создает больший ток, а большие токи дают большие механические силы.

Из наших формул мы можем увидеть, как механическая энергия превращается в электрическую энергию. Как и раньше, электрическая энергия, выделяемая в сопротивлении цепи, есть произведение  $\mathcal{E}I$ . Работа в единицу времени, совершаемая при движении перекладины, есть произведение силы, действующей на перекладину, на ее скорость. Используя для силы выражение (17.21), получаем работу в единицу времени:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2 B^2 w^2}{R}.$$

Мы видим, что она действительно равна произведению  $\mathcal{E}I$ , которое мы получаем из (17.19) и (17.20). Снова механическая работа появляется в виде электрической энергии.

## § 6. Взаимная индукция

Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда проволочные катушки неподвижны, а меняются магнитные поля. Описывая образование магнитного поля токами, мы рассматривали только случай постоянных токов. Но если токи меняются медленно, магнитное поле в каждый момент будет примерно такое же, как магнитное поле постоянного тока. Мы будем считать в этом параграфе, что токи всегда меняются достаточно медленно, и можно сказать, что это утверждение справедливо.

На фиг. 17.8 показано устройство из двух катушек, с помощью которого можно продемонстрировать основные эффекты, ответственные за работу трансформатора. Катушка 1 состоит из проводящей проволоки, свитой в виде длинного соленоида. Вокруг этой катушки и изолировано от нее навита катушка 2, состоящая из нескольких витков проволоки. Если теперь по катушке 1 пропустить ток, то, как мы знаем, внутри нее появится магнитное поле. Это магнитное поле проходит также сквозь катушку 2. Когда ток в катушке 1 меняется, магнитный поток тоже будет меняться, и в катушке 2 появится индуцированная э.д.с. Эту индуцированную э.д.с. мы сейчас и вычислим.

В гл. 13, § 5 (вып. 5) мы видели, что магнитное поле внутри длинного соленоида однородно и равно

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (17.23)$$

где  $N_1$  — число витков в катушке 1,  $I_1$  — ток в ней, а  $l$  — ее длина. Пусть поперечное сечение катушки 1 равно  $S$ , тогда поток поля  $B$  равен его величине, умноженной на  $S$ . Если в катушке 2 имеется  $N_2$  витков, то поток проходит по катушке  $N_2$  раз. Поэтому э. д. с. в катушке 2 дается выражением

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}. \quad (17.24)$$

Единственная меняющаяся со временем величина в (17.23) есть  $I_1$ . Поэтому э. д. с. дается выражением

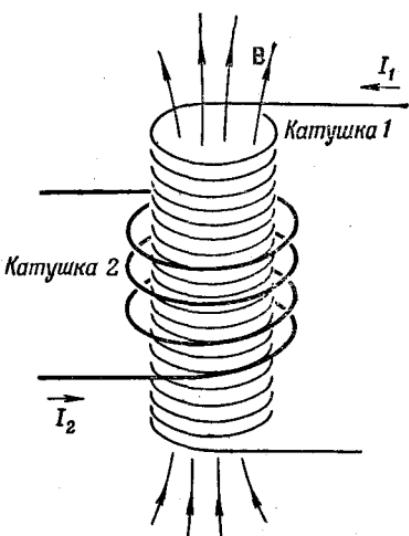
$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.25)$$

Мы видим, что э. д. с. в катушке 2 пропорциональна скорости изменения тока в катушке 1. Константа пропорциональности — по существу геометрический фактор двух катушек, называется коэффициентом *взаимной индукции* и обозначается обычно  $\mathfrak{M}_{21}$ .

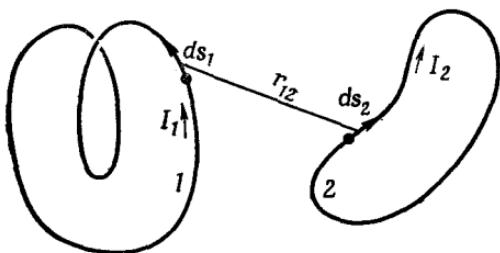
Тогда (17.25) записывается уже в виде

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.26)$$

Предположим теперь, что нам нужно было бы пропустить ток через катушку 2 и нас интересует, чему равна э. д. с. в катушке 1. Мы вычислили бы магнитное поле, которое повсюду пропорционально току  $I_2$ . Поток сквозь катушку 1 зависел бы от геометрии, но был бы пропорционален току  $I_2$ . Поэтому



Фиг. 17.8. Ток в катушке 1 создает магнитное поле, проходящее через катушку 2.



Фиг. 17.9. Любые две катушки обладают взаимной индукцией  $M$ , пропорциональной интегралу от  $ds_1 \cdot ds_2 \cdot (1/r_{12})$ .

э. д. с. в катушке 1 снова была бы пропорциональна  $dI_2/dt$ . Мы можем записать

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.27)$$

Вычисление  $M_{12}$  было бы труднее, чем те вычисления, которые мы проделали для  $M_{21}$ . Мы не будем сейчас им заниматься, потому что дальше в этой главе мы покажем, что  $M_{12}$  обязательно равно  $M_{21}$ .

Поскольку поле любой катушки пропорционально текущему в ней току, такой же результат получился бы и для любых двух катушек из проволоки. Выражения (17.26) и (17.27) приобрели бы одинаковую форму, и только постоянные  $M_{12}$  и  $M_{21}$  были бы другие. Их значения будут зависеть от формы катушек и их относительного положения.

Предположим, нам нужно найти коэффициент взаимной индукции между двумя произвольными катушками, например показанными на фиг. 17.9. Мы знаем, что общее выражение для э. д. с. в катушке 1 можно записать так:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da,$$

где  $\mathbf{B}$  — магнитное поле, а интеграл берется по поверхности, ограниченной контуром 1. В гл. 14, § 1 (вып. 5) мы видели, что поверхностный интеграл от  $\mathbf{B}$  можно свести к контурному интегралу от векторного потенциала. В нашем случае

$$\int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1,$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал, а  $d\mathbf{s}_1$  — элемент цепи 1. Контурный интеграл берется вдоль контура 1, поэтому э. д. с. в этой катушке может быть записана в виде

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1. \quad (17.28)$$

Теперь предположим, что векторный потенциал цепи 1 возникает за счет токов в цепи 2. Тогда его можно записать

как контурный интеграл по контуру цепи 2:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \quad (17.29)$$

где  $I_2$  — ток в цепи 2, а  $r_{12}$  — расстояние от элемента цепи  $d\mathbf{s}_2$  к точке на контуре 1, в которой мы вычисляем векторный потенциал (см. фиг. 17.9). Комбинируя (17.28) и (17.29), можно выразить э. д. с. в цепи 1 как двойной контурный интеграл:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_1 \oint_2 \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \cdot d\mathbf{s}_1.$$

В этом выражении все интегралы берутся по неподвижным контурам. Единственной переменной величиной является ток  $I_2$ , который не зависит от переменных интегрирования. Поэтому его можно вынести за знак интеграла. Тогда э. д. с. можно записать как

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

где коэффициент  $\mathfrak{M}_{12}$  равен

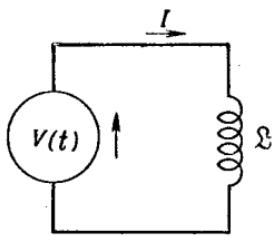
$$\mathfrak{M}_{12} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}. \quad (17.30)$$

Из этого интеграла очевидно, что  $\mathfrak{M}_{12}$  зависит только от геометрии цепей; он зависит от некоторого среднего расстояния между двумя цепями, причем в среднее с наибольшим весом входят параллельные отрезки проводников двух катушек. Нашу формулу можно использовать для вычисления коэффициента взаимной индукции любых двух цепей произвольной формы. Кроме того, она показывает, что интеграл для  $\mathfrak{M}_{12}$  тождествен с интегралом для  $\mathfrak{M}_{21}$ . Таким образом, мы показали, что оба коэффициента одинаковы. Для системы только с двумя катушками коэффициенты  $\mathfrak{M}_{12}$  и  $\mathfrak{M}_{21}$  часто обозначают символом  $\mathfrak{M}$  без значков и называют просто *коэффициентом взаимной индукции*:

$$\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}.$$

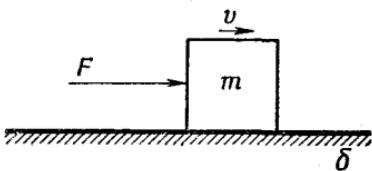
## § 7. Самоиндукция

При обсуждении индуцированных э. д. с. в двух катушках на фиг. 17.8 и 17.9 мы рассмотрели лишь случай, когда ток проходит либо в одной катушке, либо в другой. Если токи имеются одновременно в обеих катушках, то магнитный поток, пронизывающий каждую катушку, будет представлять сумму двух потоков, существующих и по отдельности, поскольку к магнитным полям применим принцип суперпозиции. Поэтому



Фиг. 17.10. Цепь с источником напряжения и индуктивностью (а) и аналогичная ей механическая система (б).

а



э. д. с. в каждой катушке будет пропорциональна не только изменению тока в другой катушке, но и изменению тока в ней самой. Таким образом, полную э. д. с. в катушке 2 следует записать в виде \*

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21} \frac{dI_1}{dt} + \mathfrak{M}_{22} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.31)$$

Аналогично, э. д. с. в катушке 1 будет зависеть не только от изменяющегося тока в катушке 2, но и от изменяющегося тока в ней самой:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12} \frac{dI_2}{dt} + \mathfrak{M}_{11} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.32)$$

Коэффициенты  $\mathfrak{M}_{22}$  и  $\mathfrak{M}_{11}$  всегда отрицательны. Обычно пишут

$$\mathfrak{M}_{11} = -\mathcal{L}_1, \quad \mathfrak{M}_{22} = -\mathcal{L}_2, \quad (17.33)$$

где  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  называют коэффициентами *самоиндукции* двух катушек (или индуктивностями).

Конечно, э. д. с. самоиндукции будет существовать даже для одной катушки. Любая катушка сама по себе обладает коэффициентом самоиндукции  $\mathcal{L}$ , и ее э. д. с. будет пропорциональна скорости изменения тока в катушке. Обычно считают, что э. д. с. и ток одной катушки положительны, если они направлены одинаково. При этом условии для отдельной катушки можно написать

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{dI}{dt}. \quad (17.34)$$

\* Знак  $\mathfrak{M}_{12}$  и  $\mathfrak{M}_{21}$  в (17.31) и (17.32) зависит от произвола в выборе положительного направления токов в обеих катушках.

Знак минус указывает на то, что э. д. с. противодействует изменению тока, ее часто называют «обратной э. д. с.».

Поскольку любая катушка обладает самоиндукцией, противодействующей изменению тока, ток в катушке обладает своего рода инерцией. Действительно, если мы хотим изменить ток в катушке, мы должны преодолеть эту инерцию, присоединяя катушку к какому-то внешнему источнику, например батарее или генератору (фиг. 17.10, а). В такой цепи ток  $I$  связан с напряжением  $\mathcal{V}$  соотношением

$$\mathcal{V} = \mathcal{L} \frac{dI}{dt}. \quad (17.35)$$

Это соотношение имеет форму уравнения движения Ньютона для частицы в одном измерении. Поэтому мы можем исследовать его по принципу «одинаковые уравнения имеют одинаковые решения». Таким образом, если поставить в соответствие напряжение  $\mathcal{V}$  от внешнего источника приложенной внешней силе  $F$ , а ток  $I$  в катушке скорости  $v$  частицы, то коэффициент индукции катушки  $\mathcal{L}$  будет соответствовать массе  $m$  частицы \* (фиг. 17.10, б).

Таблица 17.1 • Сопоставляемые величины

Частица	Катушка
$F$ (сила)	$\mathcal{V}$ (разность потенциалов)
$v$ (скорость)	$I$ (ток)
$x$ (смещение)	$q$ (заряд)
$F = m \frac{dv}{dt}$	$\mathcal{V} = \mathcal{L} \frac{dI}{dt}$
$mv$ (импульс)	$\mathcal{L}I$
$\frac{1}{2}mv^2$ (кинетическая энергия)	$\frac{1}{2} \mathcal{L}I^2$ (магнитная энергия)

## § 8. Индуктивность и магнитная энергия

Продолжая аналогию предыдущего параграфа, мы отметили в таблице, что в соответствии с механическим импульсом  $p=mv$  (скорость изменения которого равна приложенной силе) должна существовать аналогичная величина, равная  $\mathcal{L}I$ , скорость изменения которой  $\mathcal{V}$ . Разумеется, мы не имеем права говорить, что  $\mathcal{L}I$  — это настоящий импульс цепи; на самом деле это вовсе не так. Вся цепь может быть неподвижна и вообще не иметь импульса. Просто  $\mathcal{L}I$  аналогично импульсу  $mv$ .

\* Кстати, это не единственный способ установления соответствия между механическими и электрическими величинами.

в смысле удовлетворения аналогичным уравнениям. Точно так же кинетической энергии  $\frac{1}{2}mv^2$  здесь соответствует аналогичная величина  $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ . Но здесь нас ждет сюрприз. Величина  $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$  — действительно есть энергия и в электрическом случае. Так получается потому, что работа, совершаяя в единицу времени над индуктивностью, равна  $\mathcal{V}I$ , а в механической системе она равна  $Fv$  — соответствующей величине. Поэтому в случае энергии величины не только соответствуют друг другу в математическом смысле, но имеют еще и одинаковое физическое значение.

Мы можем проследить это более подробно. В (17.16) мы нашли, что электрическая работа в единицу времени за счет сил индукции есть произведение э. д. с. и тока:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

Подставляя вместо  $\mathcal{E}$  ее выражение через токи из (17.34), имеем

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{L}I \frac{dI}{dt}. \quad (17.36)$$

Интегрируя это уравнение, находим, что энергия, которая требуется от внешнего источника, чтобы преодолеть э. д. с. самоиндукции и создать ток \* (что должно равняться накопленной энергии  $U$ ), равна

$$-W = U = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2. \quad (17.37)$$

Поэтому энергия, накопленная в индуктивности, равна  $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ .

Применяя те же рассуждения к паре катушек, изображенных на фиг. 17.8 или 17.9, мы можем показать, что полная электрическая энергия системы дается выражением

$$U = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1I_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2I_2^2 - \mathfrak{M}I_1I_2. \quad (17.38)$$

В самом деле, начиная с тока  $I=0$  в обеих катушках, можно вначале включить ток  $I_1$  в катушке 1, оставляя  $I_2=0$ . Совершенная работа как раз равна  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_1I_1^2$ . Но теперь, включая  $I_2$ , мы совершаляем не только работу  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_2I_2^2$  против э. д. с. в цепи 2, но еще и добавочное количество работы  $-\mathfrak{M}I_1I_2$ , которая есть интеграл от э. д. с.  $\mathfrak{M}(dI_2/dt)$  в цепи 1, умноженный на теперь уже постоянный ток  $I_1$  в этой цепи.

\* Мы пренебрегаем всеми тепловыми потерями энергии в сопротивлении катушки. Эти потери требуют дополнительных затрат энергии источника, но не меняют энергии, которая тратится на индуктивность.

Пусть теперь нам нужно найти силу между любыми двумя катушками, по которым идут токи  $I_1$  и  $I_2$ . Прежде всего мы могли бы использовать принцип виртуальной работы, взяв вариацию от энергии (17.38). Мы должны помнить, конечно, что при изменении относительного положения катушек единственной меняющейся величиной является коэффициент взаимной индукции  $\mathfrak{M}$ . Тогда мы могли бы записать уравнение виртуальной работы в виде

$$-F\Delta x = \Delta U = -I_1 I_2 \Delta \mathfrak{M} \quad (\text{неправильно}).$$

Это уравнение ошибочно, потому что, как мы видели раньше, в него включено только изменение энергии двух катушек и не включена энергия источников, которые поддерживают постоянными значения токов  $I_1$  и  $I_2$ . Мы понимаем теперь, что эти источники должны поставлять энергию для компенсации индуцированных э. д. с. в катушках во время их движения. Если мы хотим правильно применить принцип виртуальной работы, то должны включить и эти энергии. Но мы видели, что можно сделать и короче — использовать принцип виртуальной работы, помня, что полная энергия — это взятая с обратным знаком энергия  $U_{\text{мех}}$  (то что мы называем «механической энергией»). Поэтому силу можно записать в виде

$$-F\Delta x = \Delta U_{\text{мех}} = -\Delta U. \quad (17.39)$$

Тогда сила между катушками дается выражением

$$F\Delta x = -I_1 I_2 \Delta \mathfrak{M}.$$

Воспользуемся выражением (17.38) для энергии системы из двух катушек, чтобы показать, какое интересное неравенство существует между взаимной индукцией  $\mathfrak{M}$  и коэффициентами самоиндукции  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  двух катушек. Ясно, что энергия двух катушек должна быть положительной. Если мы начинаем с нулевых токов в обеих катушках и увеличиваем эти токи до некоторых значений, то тем самым мы увеличиваем энергию всей системы. В противном случае токи самопроизвольно возрастут и будут отдавать энергию остальному миру — вещь невероятная! Далее, наше выражение для энергии (17.38) можно с таким же успехом записать в следующей форме:

$$U = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \left( I_1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{L}_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathcal{L}_1} \right) I_2^2. \quad (17.40)$$

Это просто алгебраическое преобразование. Эта величина должна быть всегда положительна при любых значениях  $I_1$  и  $I_2$ . В частности, она должна быть положительна, когда  $I_2$  вдруг примет особое значение:

$$I_2 = \frac{\mathcal{L}_1}{\mathfrak{M}} I_1. \quad (17.41)$$

Но при таком значении  $I_2$  первое слагаемое в (17.40) равно нулю. Если энергия положительна, то последнее слагаемое в (17.40) должно быть больше нуля. Мы получаем требование, что

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 > \mathfrak{M}^2.$$

Таким образом, мы доказали общее соотношение, что величина взаимной индукции  $\mathfrak{M}$  любых двух катушек обязательно меньше или равна геометрическому среднему двух коэффициентов самоиндукции (сам  $\mathfrak{M}$  может быть положителен или отрицателен в зависимости от выбора знаков для токов  $I_1$  и  $I_2$ ):

$$|\mathfrak{M}| < \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}. \quad (17.42)$$

Соотношение между  $\mathfrak{M}$  и коэффициентами самоиндукции обычно записывают в виде

$$\mathfrak{M} = k \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}. \quad (17.43)$$

Постоянную  $k$  называют *коэффициентом связи*. Если большая часть потока от одной катушки проходит через другую катушку, то коэффициент связи близок к единице; мы говорим, что катушки «сильно связаны». Если катушки значительно удалены друг от друга или же все устроено так, что взаимное проникновение их потоков очень мало, коэффициент связи становится близок к нулю, а коэффициент взаимной индукции очень мал.

Для вычисления взаимной индукции двух катушек мы дали формулу (17.30), которая представляет собой двойной контурный интеграл по обеим цепям. Мы могли бы подумать, что та же формула применима и для вывода коэффициента самоиндукции одной катушки, если оба контурных интегрирования проводить по одной и той же катушке. Однако это не так, потому что при интегрировании по двум катушкам знаменатель  $r_{12}$  под знаком интеграла стремится к нулю, когда два элемента длины находятся в одной точке. Коэффициент самоиндукции, получаемый из этой формулы, оказывается бесконечным. Происходит это потому, что формула наша — приближенная, и справедлива она только для поперечных сечений проводов в обеих цепях, малых по сравнению с расстоянием от одной цепи до другой. Ясно, что это приближение для отдельной катушки не годится. На самом деле оказывается, что индуктивность отдельной катушки стремится логарифмически к бесконечности, когда диаметр ее проволоки становится все меньше и меньше.

Значит, мы должны поискать другой способ вычисления коэффициента самоиндукции одной катушки. При этом надо учесть распределение токов внутри проводника, потому что его размеры — важный параметр. Но мы не будем считать полную индуктивность, а сосчитаем лишь ту ее часть, которая связана с расположением проводников, и не будем учитывать часть,

связанную с распределением токов. Пожалуй, самый простой способ найти такую индуктивность — это использовать магнитную энергию. Ранее, в гл. 15, § 3, мы нашли выражение для магнитной энергии распределения стационарных токов:

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.44)$$

Если известно распределение плотности тока  $\mathbf{j}$ , то можно вычислить векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , а затем, оценив интеграл (17.44), получить энергию. Эта энергия равна магнитной энергии самоиндукции,  $\frac{1}{2} \mathcal{L} I^2$ . Приравнивая их, получаем формулу для индуктивности:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{I^2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.45)$$

Мы, конечно, ожидаем, что индуктивность есть число, зависящее только от геометрии цепи, а не от тока  $I$  в цепи. Формула (17.45) действительно приводит к такому результату, потому что интеграл в ней пропорционален квадрату тока — ток входит один раз от  $\mathbf{j}$  и еще раз от векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . Интеграл, деленный на  $I^2$ , зависит от геометрии цепи, но не от тока  $I$ .

Выражению (17.44) для энергии распределения токов можно придать совсем другую форму, иногда более удобную для вычислений. Кроме того, как мы увидим позже, именно эта форма важна, потому что она справедлива в более общем случае. В формуле (17.44) и  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{j}$  можно связать с  $\mathbf{B}$ , поэтому можно надеяться, что энергия выразится через магнитное поле — точно так же, как нам удалось связать электростатическую энергию с электрическим полем. Начнем с подстановки  $\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B}$  вместо  $\mathbf{j}$ . Заменить  $\mathbf{A}$  мы не можем с той же легкостью, потому что нельзя обратить  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , чтобы выразить  $\mathbf{A}$  через  $\mathbf{B}$ . Можно только записать

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.46)$$

Любопытно, что при некоторых ограничениях этот интеграл можно превратить в

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV. \quad (17.47)$$

Чтобы увидеть это, выпишем подробно типичный множитель. Предположим, что мы взяли множитель  $(\nabla \times \mathbf{B})_z A_z$ , входящий в интеграл (17.46). Выписывая полностью компоненты, получаем

$$\int \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz$$

(имеются, конечно, еще два интеграла того же сорта). Проинтегрируем теперь первый множитель по  $x$ , интегрируя по частям,

т. е.

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} dx.$$

Теперь предположим, что наша система (имея в виду источники и поля) — конечная, так что, когда мы уходим на большие расстояния, все поля стремятся к нулю. Тогда при интегрировании по всему пространству подстановка  $B_y A_z$  на пределах интеграла дает нуль. У нас остается только  $B_y (\partial A_z / \partial x)$ ; это, очевидно, есть часть от  $B_y (\nabla \times \mathbf{A})_y$  и, значит, от  $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ . Если вы выпишите остальные пять множителей, то увидите, что (17.47) на самом деле эквивалентно (17.46).

А теперь мы можем заменить  $(\nabla \times \mathbf{A})$  на  $\mathbf{B}$  и получить

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (17.48)$$

Мы выразили энергию в магнитостатическом случае только через магнитное поле. Выражение тесно связано с формулой, которую мы нашли для электростатической энергии:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (17.49)$$

Эти две энергетические формулы выделены потому, что иногда ими удобнее пользоваться. Обычно есть и более важная причина: оказывается, что для динамических полей (когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  меняются со временем) оба выражения (17.48) и (17.49) остаются справедливыми, тогда как другие данные нами формулы для электрической и магнитной энергий перестают быть верными — они годятся лишь для статических полей.

Если нам известно магнитное поле  $\mathbf{B}$  одной катушки, мы можем найти коэффициент самоиндукции, приравнивая выражение для энергии (17.48) и  $1/2 \mathcal{L} I^2$ . Посмотрим, что получится в результате для индуктивности длинного соленоида. Раньше мы видели, что магнитное поле в соленоиде однородно и  $\mathbf{B}$  спаружи равно нулю. Величина поля внутри равна  $B = nI/\epsilon_0 c^2$ , где  $n$  — число витков на единицу длины намотки, а  $I$  — ток. Если радиус катушки  $r$ , а длина ее  $L$  (мы считаем, что  $L$  очень велика, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами, т. е.  $L \gg r$ ), то внутренний объем равен  $\pi r^2 L$ . Следовательно, магнитная энергия равна

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 \cdot (\text{объем}) = \frac{n^2 I^2}{2 \epsilon_0 c^2} \pi r^2 L,$$

что равно  $1/2 \mathcal{L} I^2$ . Или

$$\mathcal{L} = \frac{\pi r^2 n^2}{\epsilon_0 c^2} L. \quad (17.50)$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 1. Уравнения  
Максвелла

§ 2. Что дает  
добавка

§ 3. Все о класси-  
ческой физике

§ 4. Передвигаю-  
щееся поле

§ 5. Скорость света

§ 6. Решение  
уравнений  
Максвелла;  
потенциалы  
и волновое  
уравнение

В этой главе мы вернемся к полной системе из четырех уравнений Максвелла, которые мы приняли как отправной пункт в гл. 1 (вып. 5). До сих пор мы изучали уравнения Максвелла небольшими частями, кусочками; теперь пора уже прибавить последнюю часть и соединить их все воедино. Тогда мы будем иметь полное и точное описание электромагнитных полей, которые могут изменяться со временем произвольным образом. Все сказанное в этой главе, если даже оно и будет противоречить чему-то сказанному ранее, правильно, а то, что говорилось ранее в этих случаях, неверно, потому что все высказанное ранее применялось к таким частным случаям, как, скажем, случаи постоянного тока или фиксированных зарядов. Хотя всякий раз, когда мы записывали уравнение, мы весьма старательно указывали ограничения, легко позабыть все эти оговорки и слишком хорошо заучить ошибочные уравнения. Теперь мы можем изложить всю истину, без всяких ограничений (или почти без них).

Все уравнения Максвелла записаны в табл. 18.1 как словесно, так и в математических символах. Тот факт, что слова эквивалентны уравнениям, должен быть сейчас вам уже знаком — вы должны уметь переводить одну форму в другую и обратно.

Первое уравнение — дивергенция  $\mathbf{E}$  равна плотности заряда, деленной на  $\epsilon_0$ , — правильно всегда. Закон Гаусса справедлив всегда как в динамических, так и в статических полях. Поток  $\mathbf{E}$  через любую замкнутую поверхность пропорционален заключенному внутри заряду. Третье уравнение — соответствующий общий

## Уравнения Максвелла

I.  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

(Поток  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность) = (Заряд внутри нее) /  $\epsilon_0$ 

II.  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

(Интеграл от  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру) =  $-\frac{d}{dt}$  (Поток  $\mathbf{B}$  сквозь контур)

III.  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

(Поток  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность) = 0

IV.  $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ,

 $c^2$  (Интеграл от  $\mathbf{B}$  по контуру) = (Ток в контуре) /  $\epsilon_0$  +  $\frac{\partial}{\partial t}$  (Поток  $\mathbf{E}$  сквозь контур)Сохранение заряда  
(следует из I и IV)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(Поток заряда через замкнутую поверхность) =  $-\frac{\partial}{\partial t}$  (Заряд внутри нее)

## Закон силы

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

## Закон движения

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}) = \mathbf{F}, \text{ где } \mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
 (Закон Ньютона, исправленный Эйнштейном)

## Гравитация

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

закон для магнитных полей. Поскольку магнитных зарядов нет, поток  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Второе уравнение  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  — это закон Фарадея, и обсуждался он в последних двух главах. Он тоже верен в общем случае. Но последнее уравнение содержит нечто новое. Раньше мы встречались только с частью его, которая годится для постоянных токов. В этом случае мы говорили, что ротор  $\mathbf{B}$  равен  $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ , но правильное общее уравнение имеет новый член, который был открыт Максвеллом.

До появления работы Максвелла известные законы электричества и магнетизма были такими же, как те, что мы изу-

чали в гл. 3—14 (вып. 5) и гл. 15—17. В частности, уравнение для магнитного поля постоянных токов было известно только в виде

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.1)$$

Максвелл начал с рассмотрения этих известных законов и выразил их в виде дифференциальных уравнений, так же как мы поступили здесь. (Хотя символ  $\nabla$  еще не был придуман, впервые, в основном благодаря Максвеллу, стала очевидной важность таких комбинаций производных, которые мы сегодня называем ротором и дивергенцией.) Максвелл тогда заметил, что в уравнении (18.1) есть нечто странное. Если взять дивергенцию от этого уравнения, то левая сторона обратится в нуль, потому что дивергенция ротора всегда равна нулю. Таким образом, это уравнение требует, чтобы дивергенция  $\mathbf{j}$  также была равна нулю. Но если дивергенция  $\mathbf{j}$  равна нулю, то полный ток через любую замкнутую поверхность тоже равен нулю.

Полный ток через замкнутую поверхность равен уменьшению заряда внутри этой поверхности. Он наверняка не может быть всегда равен нулю, так как мы знаем, что заряды могут перемещаться из одного места в другое. Уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.2)$$

фактически есть наше определение  $\mathbf{j}$ . Это уравнение выражает самый фундаментальный закон — сохранение электрического заряда: любой поток заряда должен поступать из какого-то запаса. Максвелл заметил эту трудность и, чтобы избежать ее, предложил добавить  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  в правую часть уравнения (18.1); тогда он и получил уравнение IV в табл. 18.1:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Во времена Максвелла еще не привыкли мыслить в терминах абстрактных полей. Максвелл обсуждал свои идеи с помощью модели, в которой вакуум был подобен упругому телу. Он пытался также объяснить смысл своего нового уравнения с помощью механической модели. Теория Максвелла принималась очень неохотно, во-первых, из-за модели, а, во-вторых, потому, что вначале не было экспериментального подтверждения. Сейчас мы лучше понимаем, что дело в самих уравнениях, а не в модели, с помощью которой они были получены. Мы можем только задать вопрос, правильны ли эти уравнения или они ошибочны. Ответ дает эксперимент. И уравнения Максвелла были подтверждены в бесчисленных экспериментах. Если мы отбросим все строительные леса, которыми пользовался Максвелл, чтобы построить уравнения, мы придем к заключению,

что прекрасное здание, созданное Максвеллом, держится само по себе. Он свел воедино все законы электричества и магнетизма и создал законченную и прекрасную теорию.

Давайте покажем, что добавочный член имеет тот самый вид, который требуется, чтобы преодолеть обнаруженную Максвеллом трудность. Взяв дивергенцию его уравнения (IV в табл. 18.1), мы должны получить, что дивергенция правой части равна нулю:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (18.3)$$

Во втором слагаемом можно переставить порядок дифференцирования по координатам и времени, так что уравнение может быть переписано в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (18.4)$$

Но, согласно первому из уравнений Максвелла, дивергенция  $\mathbf{E}$  равна  $\rho/\epsilon_0$ . Подставляя это равенство в (18.4), мы приедем к уравнению (18.2), которое, как мы знаем, правильно. И наоборот, если мы принимаем уравнения Максвелла (а мы принимаем их потому, что никто никогда не обнаружил эксперимента, который опроверг бы их), мы должны прийти к выводу, что заряд всегда сохраняется.

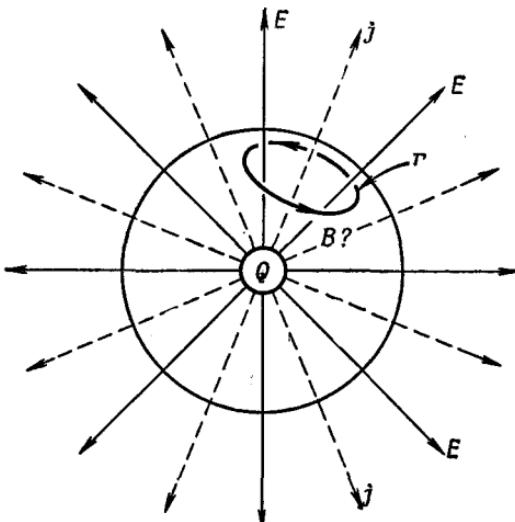
Законы физики не дают ответа на вопрос: «Что случится, если заряд внезапно возникнет в этой точке, какие будут при этом электромагнитные эффекты?». Ответ дать нельзя, потому что наши уравнения утверждают, что такого не происходит. Если бы это случилось, нам понадобились бы новые законы, но мы не можем сказать, какими бы они были. Нам не приходилося наблюдать, как ведет себя мир без сохранения заряда. Согласно нашим уравнениям, если вы внезапно поместите заряд в некоторой точке, вы должны принести его туда откуда-то еще. В таком случае мы можем говорить о том, что произошло.

Когда мы добавили новый член в уравнение для ротора  $\mathbf{E}$ , мы обнаружили, что им описывается целый новый класс явлений. Мы увидим также, что небольшая добавка Максвелла к уравнению для  $\nabla \times \mathbf{B}$  имеет далеко идущие последствия. Мы затронем лишь некоторые из них в этой главе.

## § 2. Чем дает добавка

В качестве нашего первого примера рассмотрим, что происходит со сферически симметричным радиальным распределением тока. Представим себе маленькую сферу с нанесенным на нее радиоактивным веществом. Это радиоактивное вещество испускает наружу заряженные частицы. (Мы можем представить также большой кусок желе с маленьким отверстием в центре,

**Ф и з. 18.1.** Каково магнитное поле сферически симметричного тока?



в которое с помощью шприца впрыскиваются какие-то заряды и из которого заряды медленно просачиваются.) В любом случае мы имели бы ток, который повсюду направлен по радиусу наружу. Будем считать, что величина его одинакова во всех направлениях.

Пусть полный заряд внутри сферы произвольного радиуса  $r$  есть  $Q(r)$ . Если плотность радиального тока при таком же радиусе равна  $j(r)$ , то уравнение (18.2) требует, чтобы  $Q$  уменьшалось со скоростью

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (18.5)$$

Спросим теперь о магнитном поле, создаваемом токами в этом случае. Предположим, мы начертили какую-то петлю  $\Gamma$  на сфере радиуса  $r$  (фиг. 18.1). Сквозь петлю проходит какой-то ток, поэтому можно ожидать, что магнитное поле циркулирует в направлении, указанном на фигуре.

И сразу возникает затруднение. Как может поле  $B$  иметь какое-то особое направление на сфере? При другом выборе петли  $\Gamma$  мы бы заключили, что ее направление прямо противоположно указанному. Поэтому возможна ли какая-либо циркуляция  $B$  вокруг токов?

Нас спасают уравнения Максвелла. Циркуляция  $B$  зависит не только от полного тока, проходящего сквозь петлю  $\Gamma$ , но и от скорости изменения со временем электрического потока через нее. Должно быть так, чтобы эти две части как раз погашались. Посмотрим, получается ли это.

Электрическое поле на расстоянии  $r$  должно быть равно  $Q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$ , пока, как мы предположили, заряд распределен

симметрично. Поле радиально, и скорость его изменения тогда равна

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (18.6)$$

Сравнивая это с (18.5), мы видим, что для любого расстояния

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \quad (18.7)$$

В уравнении IV (табл. 18.1) оба члена от источника погашаются и ротор  $B$  равен всегда нулю. Магнитного поля в нашем примере нет.

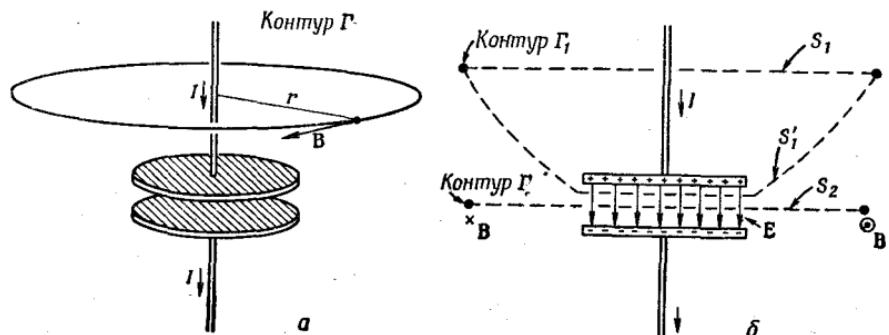
В качестве второго нашего примера рассмотрим магнитное поле провода, используемого для зарядки плоского конденсатора (фиг. 18.2). Если заряд  $Q$  на пластинах со временем изменяется (но не слишком быстро), ток в проводах равен  $dQ/dt$ . Мы ожидаем, что этот ток создаст магнитное поле, которое окружает провод. Конечно, ток вблизи провода должен создавать обычное магнитное поле, оно не может зависеть от того, где идет ток.

Предположим, мы выбрали петлю  $\Gamma_1$  в виде окружности с радиусом  $r$  (фиг. 18.2, а). Контурный интеграл от магнитного поля будет равен току  $I$ , деленному на  $\epsilon_0 c^2$ . Мы имеем

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.8)$$

Все это мы получили бы для постоянного тока, но результат не изменится, если учесть добавку Максвелла, потому что для плоской поверхности  $S$  внутри окружности электрического поля нет (считая, что провод очень хороший проводник). Поверхностный интеграл от  $\partial E / \partial t$  равен нулю.

Предположим, однако, что теперь мы медленно продвигаем кривую  $\Gamma_1$  вниз. Мы будем получать всегда тот же самый результат до тех пор, пока не нарисуем кривую вровень с пластинами



Фиг. 18.2. Магнитное поле вблизи заряжаемого конденсатора.

конденсатора. Тогда ток  $I$  будет стремиться к нулю. Исчезнет ли при этом магнитное поле? Это было бы очень странно. Давайте поглядим, что говорит уравнение Максвелла для кривой  $\Gamma$ , которая представляет собой окружность радиуса  $r$ , плоскость которой проходит между пластинами конденсатора (фиг. 18.2, б). Контурный интеграл от  $\mathbf{B}$  вокруг  $\Gamma$  есть  $2\pi rB$ . Он должен быть равен производной по времени потока  $\mathbf{E}$ , проходящего сквозь плоскую поверхность круга  $S_2$ . Этот поток  $E$ , как мы знаем из закона Гаусса, должен быть равен произведению  $1/\epsilon_0$  на заряд  $Q$  на одной из пластин конденсатора. Мы имеем

$$c^2 2\pi r B = \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (18.9)$$

Это очень хорошо. Результат тот же, что мы нашли в (18.8). Интегрирование по меняющемуся электрическому полю дает то же магнитное поле, что и интегрирование по току в проводке. Конечно, как раз об этом и говорит уравнение Максвелла. Легко видеть, что так должно быть всегда, если применить наши рассуждения к двум поверхностям  $S_1$  и  $S'_1$ , ограниченным одной и той же окружностью  $\Gamma_1$  на фиг. 18.2, б. Сквозь  $S_1$  проходит ток  $I$ , но нет электрического потока. Сквозь  $S'_1$  нет тока, но есть электрический поток, меняющийся со скоростью  $I/\epsilon_0$ . То же поле  $\mathbf{B}$  получится, если мы применим уравнение IV (табл. 18.1) к каждой поверхности.

Из нашего обсуждения добавки, введенной Максвеллом, у вас могло сложиться впечатление, что она добавляет немного — просто подправляет уравнения в согласии с тем, что мы уже ожидали. Это верно, пока мы рассматриваем уравнение IV *само по себе*, ничего особенно нового не появляется. Слова *само по себе*, однако, весьма важны. Небольшое изменение, введенное Максвеллом в уравнение IV *в сочетании с другими уравнениями*, на самом деле дает много нового и важного. Но прежде чем заняться этим вопросом, поговорим подробнее о табл. 18.1.

### **§ 3. Все о классической физике**

В табл. 18.1 сведено все, что знала фундаментальная *классическая физика*, т. е. та физика, которая была известна до 1905 г. В одной этой таблице есть все. С помощью этих уравнений можно понять все достижения классической физики.

Прежде всего мы имеем уравнения Максвелла, записанные как в расширенном виде, так и в короткой математической форме. Затем есть сохранение заряда, которое даже записано в скобках, потому что сохранение заряда можно вывести из имеющихся полных уравнений Максвелла. Так что в таблице имеются даже небольшие излишки. Дальше мы записали закон для силы, поскольку все имеющиеся электрические и магнит-

ные поля ничего не говорят нам до тех пор, пока мы не знаем, как они действуют на заряды. Однако, зная  $E$  и  $B$ , мы можем найти силу, действующую на объект с зарядом  $q$ , который движется со скоростью  $v$ . Наконец, имеющаяся сила ничего не говорит нам, пока мы не знаем, что происходит, когда сила ускоряет что-то; нам необходимо знать закон движения, который говорит, что сила равна скорости изменения импульса. (Помните? Об этом говорилось в начале курса.) Мы даже включили эффекты теории относительности, записав импульс в виде  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Но если мы действительно хотим законченности, нам следует добавить еще один закон — закон тяготения Ньютона, и мы поставили его в конце.

Итак, в одной небольшой таблице мы собрали все фундаментальные законы классической физики, даже хватило места выписать их словами и еще с некоторым излишком. Это великий момент. Мы покорили большую высоту. Мы на вершине К-2\*, мы почти подготовлены покорить теперь Эверест, т. е. квантовую механику.

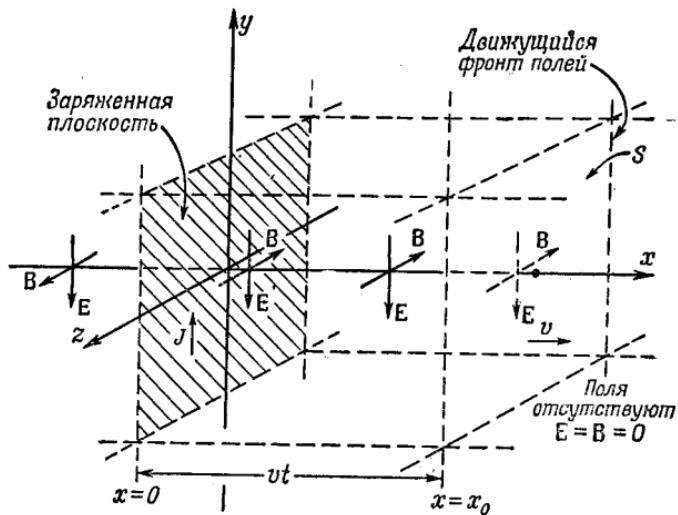
В основном мы пытались научиться понимать эти уравнения. А теперь, когда мы собрали их воедино, мы собираемся разобраться, что означают эти уравнения, чтобы нового скажут они о том, чего мы еще не поняли. Мы много потрудились, чтобы вскарабкаться к этой точке. Это потребовало больших усилий, а теперь мы собираемся начать приятное путешествие — спуск с горы в долину, там мы увидим все, чего мы достигли.

#### § 4. Передвигающееся поле

А теперь о новых следствиях. Они возникают из сопоставления всех уравнений Максвелла. Сначала давайте посмотрим, что произошло бы в особенно простом случае. Предположим, что изменяется только одна координата у всех величин, т. е. рассмотрим задачу одного измерения.

Случай этот показан на фиг. 18.3. Перед нами заряженный лист, помещенный на плоскости  $yz$ . Сначала он неподвижен, а затем мгновенно приобретает скорость  $u$  в направлении  $y$  и движется с этой постоянной скоростью. Вас может беспокоить присутствие такого «бесконечного» ускорения, но фактически это не имеет значения; просто представьте себе, что скорость достигает значения  $u$  очень быстро. Итак, мы внезапно получаем поверхностный ток  $J$  ( $J$  — ток на единицу ширины в  $z$ -направлении). Чтобы упростить проблему, предположим, что имеется еще неподвижный лист, заряженный противоположно и

\* К-2 — вторая по высоте вершина мира в северо-западных отрогах Гималаев, называемых Каракорум.— Прим. ред.

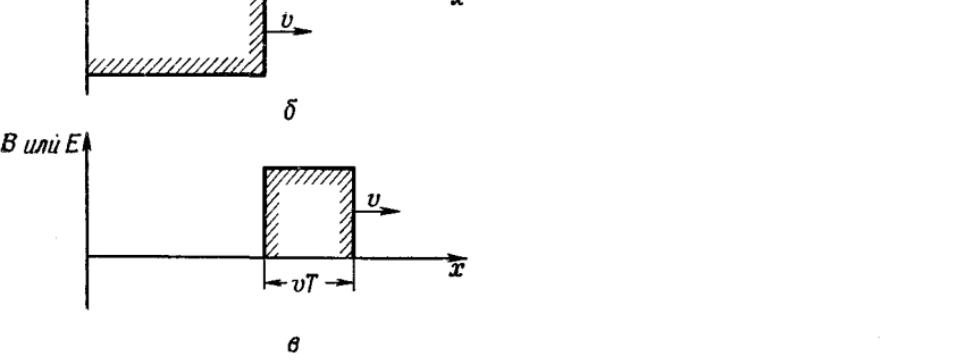
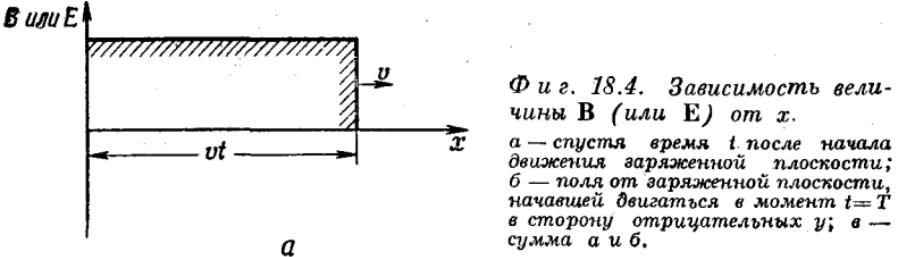


*Фиг. 18.3. Бесконечная заряженная плоскость неожиданно приводится в поступательное движение.*  
*Возникают магнитное и электрическое поля, распространяющиеся от плоскости с постоянной скоростью.*

наложенный на плоскость  $yz$ , так что электростатические эффекты отсутствуют. Представим себе также (хотя на фигуре мы показали лишь то, что происходит в конечной области), что лист простирается до бесконечности в направлениях  $\pm y$  и  $\pm z$ . Другими словами, здесь мы имеем случай, когда тока нет, а затем внезапно появляется однородный лист с током. Что же произойдет?

Мы знаем, что, когда имеется лист с током в положительном  $y$ -направлении, возникнет магнитное поле, направленное в отрицательном  $z$ -направлении при  $x > 0$  и в положительном  $z$ -направлении при  $x < 0$ . Мы могли бы найти величину  $B$ , используя тот факт, что контурный интеграл от магнитного поля будет равен току на  $\epsilon_0 c^2$ . Мы получили бы, что  $B = J/2\epsilon_0 c^2$  (поскольку ток  $I$  в полосе шириной  $w$  равен  $Jw$ , а контурный интеграл от  $B$  есть  $2Bw$ ).

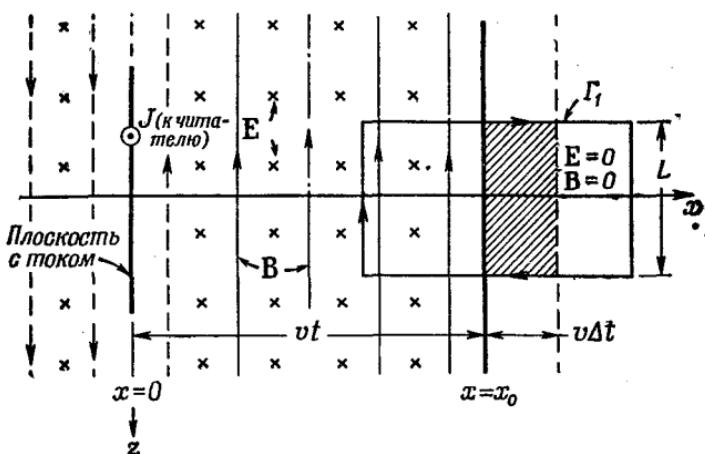
Так мы определяем поле вблизи листа для малых значений  $x$ , но, поскольку мы считаем лист бесконечным, хотелось бы получить с помощью тех же рассуждений магнитное поле подальше (для больших значений  $x$ ). Однако это означало бы, что в момент, когда мы включаем ток, магнитное поле внезапно изменяется повсюду от нуля до конечной величины. Но погодите! При внезапном изменении магнитного поля возникают огромные электрические эффекты. (*Как бы оно ни менялось, электрические эффекты возникнут.*) Так что в результате движения заряженного листа создается меняющееся магнитное поле и,



следовательно, должны возникнуть электрические эффекты. Если электрические поля образовались, они должны начинаться с нуля и меняться к какому-то значению. Возникнет некая производная  $dE/dt$ , которая будет вносить вклад вместе с током  $J$  в создание магнитного поля. Так разные уравнения зацепляются друг за друга, и мы должны попытаться найти решения для всех полей сразу.

Рассматривая уравнения Максвелла порознь, нелегко сразу получить решение. Поэтому сначала мы сообщим вам ответ, а затем уже проверим, действительно ли оно удовлетворяет уравнениям. *Ответ:* Поле  $B$ , которое мы вычислили, на самом деле создается прямо вблизи листа с током (для малых  $x$ ). Так и должно быть, потому что если мы проведем кропечную петлю вокруг листа, то в ней не будет места для прохождения электрического потока. Но поле  $B$  подальше (для больших  $x$ ) сначала равно нулю. Оно в течение некоторого времени остается нулевым, а затем внезапно включается. Короче говоря, мы включаем ток и немедленно вблизи него включается магнитное поле с постоянным значением  $B$ ; затем включенное поле  $B$  распространяется от области источника. Через некоторое время появляется однородное магнитное поле всюду, вплоть до некоторого значения  $x$ , а за ним оно равно нулю. Вследствие симметрии оно распро-

*Вид сверху*



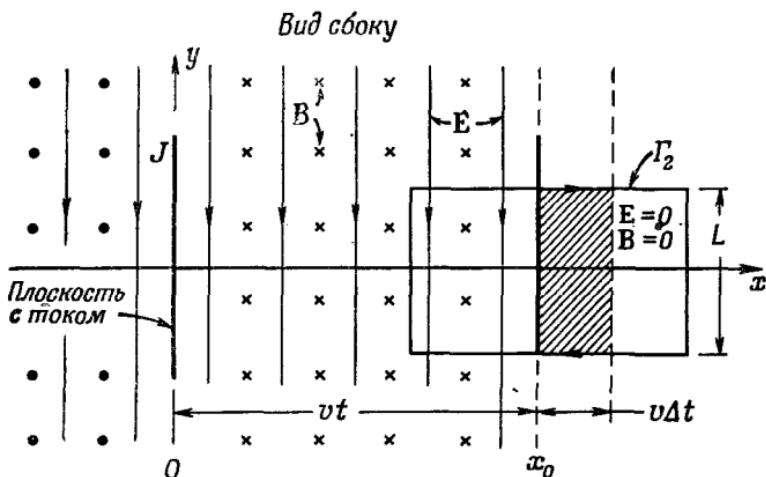
Фиг. 18.5. То же, что на фиг. 18.3 (вид сверху).

стремится как в положительном, так и в отрицательном  $x$ -направлении.

Поле  $\mathbf{E}$  делает то же самое. До момента  $t=0$  (когда мы включаем ток) поле повсюду равно нулю. Затем, спустя время  $t$ , как  $\mathbf{E}$ , так и  $\mathbf{B}$  постоянны вплоть до расстояния  $x = vt$ , а за ним равны нулю. Поля продвигаются вперед, подобно приливной волне, причем фронт их движется с постоянной скоростью, которая оказывается равной  $c$ , но пока мы будем называть ее  $v$ . Изображение зависимости величины  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{B}$  от  $x$  (как они кажутся в момент  $t$ ) показано на фиг. 18.4, *a*. Если снова посмотреть на фиг. 18.3 в момент  $t$ , то мы увидим, что область между  $x = \pm vt$  «занята» полями, но они еще не достигли области за ней. Мы снова подчеркиваем — мы предполагаем, что лист заряжен, а следовательно, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  простираются бесконечно далеко в  $y$ - и  $z$ -направлениях. (Мы не можем изобразить бесконечный лист, поэтому мы показываем лишь то, что происходит в конечной области.)

Теперь мы хотим проанализировать количественно то, что происходит. Чтобы сделать это, рассмотрим два поперечных разреза: вид сверху, если смотреть вниз вдоль оси  $y$  (фиг. 18.5), и вид сбоку, если смотреть назад вдоль оси  $z$  (фиг. 18.6). Начнем с вида сбоку. Мы видим заряженный лист, движущийся вверх; магнитное поле направлено внутрь страницы для  $+x$  и от страницы для  $-x$ , а электрическое поле направлено вниз всюду, вплоть до  $x = \pm vt$ .

Посмотрим, согласуются ли такие поля с уравнениями Максвелла. Сначала нарисуем одну из тех петель, которыми мы пользовались для вычисления контурного интеграла, скажем



Фиг. 18.6. То же, что на фиг. 18.3 (вид сбоку).

прямоугольник  $\Gamma_2$  на фиг. 18.6. Заметьте, что одна сторона прямоугольника проходит в области, где есть поля, а другая — в области, до которой поля еще не дошли. Через эту петлю проходит какой-то магнитный поток. Если он изменяется, должна появиться э. д. с. вдоль петли. Если волновой фронт движется, мы будем иметь меняющийся магнитный поток, поскольку поверхность, внутри которой существует поле  $B$ , непрерывно увеличивается со скоростью  $v$ . Поток внутри  $\Gamma_2$  равен произведению  $B$  на ту часть поверхности внутри  $\Gamma_2$ , где есть магнитное поле. Скорость изменения потока (поскольку величина  $B$  постоянна) равна величине поля, умноженной на скорость изменения поверхности. Скорость изменения поверхности найти легко. Если ширина прямоугольника  $\Gamma_2$  равна  $L$ , то поверхность, в которой  $B$  существует, меняется как  $Lv\Delta t$  за отрезок времени  $\Delta t$  (см. фиг. 18.6). Скорость изменения потока тогда равна  $BLv$ . По закону Фарадея она должна быть равна контурному интегралу от  $E$  вокруг  $\Gamma_2$ , который есть просто  $EL$ . Мы получаем равенство

$$E = vB. \quad (18.10)$$

Таким образом, если отношение  $E$  к  $B$  равно  $v$ , то рассматриваемые нами поля будут удовлетворять уравнению Фарадея.

Но это не единственное уравнение; у нас есть еще одно, связывающее  $E$  и  $B$ :

$$c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (18.11)$$

Чтобы применить это уравнение, посмотрим на вид сверху, изображенный на фиг. 18.5. Мы уже видели, что это уравнение дает нам значение  $B$  вблизи заряженного листа. Кроме того,

для любой петли, нарисованной вне листа, но позади волнового фронта, нет ни ротора  $\mathbf{B}$ , ни  $\mathbf{j}$  или меняющегося поля  $\mathbf{E}$ , так что уравнение там справедливо. А теперь посмотрим, что происходит в петле  $\Gamma_1$ , которая пересекает волновой фронт, как показано на фиг. 18.5. Здесь нет токов, поэтому уравнение (18.11) можно записать в интегральной форме так:

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{Внутри } \Gamma_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (18.12)$$

Контурный интеграл от  $\mathbf{B}$  есть просто произведение  $B$  на  $L$ . Скорость изменения потока  $\mathbf{E}$  возникает только благодаря продвигающемуся волновому фронту. Область внутри  $\Gamma_1$ , где  $\mathbf{E}$  не равно нулю, увеличивается со скоростью  $vL$ . Правая сторона (18.12) тогда равна  $vLE$ . Уравнение это приобретает вид

$$c^2 B = Ev. \quad (18.13)$$

Мы имеем решение, когда поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  постоянны за фронтом, причем оба направлены под прямыми углами к направлению, в котором движется фронт, и под прямыми углами друг к другу. Уравнения Максвелла определяют отношение  $E$  к  $B$ . Из (18.10) и (18.13) получаем

$$E = vB \quad \text{и} \quad E = \frac{c^2}{v} B.$$

Но одну минутку! Мы нашли *два разных* выражения для отношения  $E/B$ . Может ли такое поле, как мы описываем, действительно существовать? Имеется лишь одна скорость  $v$ , для которой оба уравнения могут быть справедливы, а именно  $v = c$ . Волновой фронт должен передвигаться со скоростью  $c$ . Вот пример, когда электрическое возмущение от тока распространяется с определенной конечной скоростью  $c$ .

А теперь спросим, что произойдет, если мы внезапно остановим заряженный лист, после того как он двигался в течение короткого времени  $T$ ? Увидеть, что случится, можно с помощью принципа суперпозиции. У нас был ток, равный нулю, а затем его внезапно включали. Мы знаем решение для этого случая. Теперь мы собираемся добавить другой ряд полей. Мы берем другой заряженный лист и внезапно начинаем его двигать в противоположном направлении с той же скоростью, только спустя время  $T$  после начала движения первого листа. Полный ток от двух листов вместе сначала равен нулю, потом он включается в течение времени  $T$ , затем выключается снова, потому что оба тока погашаются. Так мы получаем прямоугольный «импульс» тока.

Новый отрицательный ток создает такие же поля, как и положительный, но с обратными знаками и, разумеется, с запаз-

дыванием во времени  $T$ . Волновой фронт по-прежнему движется со скоростью  $c$ . В момент времени  $t$  он достигает расстояния  $x = \pm c(t - T)$  (см. фиг. 18.4, б). Итак, мы имеем два «куска» поля, перемещающихся со скоростью  $c$  (см. фиг. 18.4, а и б). Соединенные поля будут такими, как показано на фиг. 18.4, в. Для  $x > ct$  поля равны нулю, между  $x = c(t - T)$  и  $x = ct$  они постоянны (со значениями, которые мы нашли выше), и для  $x < c(t - T)$  они снова равны нулю.

Короче говоря, мы получаем маленький кусочек поля толщиной  $cT$ , который покинул заряженный лист и передвигается через все пространство сам по себе. Поля «оторвались»; они распространяются свободно в пространстве и больше не связаны каким-то образом с источником. Куколка превратилась в бабочку!

Как же эти совокупности электрического и магнитного полей могут сохранять сами себя? Ответ: За счет сочетания эффектов из закона Фарадея  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  и нового члена, добавленного Максвеллом  $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$ . Они не могут не сохранять себя. Предположим, что магнитное поле исчезло бы. Тогда появилось бы меняющееся магнитное поле, которое создавало бы электрическое поле. Если бы это электрическое поле попыталось исчезнуть, то изменяющееся электрическое поле создало бы магнитное поле снова. Следовательно, за счет непрерывного взаимодействия — перекачивания туда и обратно от одного поля к другому — они должны сохраняться вечно. Они не могут исчезнуть \*. Они сохраняются, вовлеченные в общий танец — одно поле создает другое, а второе создает первое, — распространяясь все дальше и дальше в пространстве.

## § 5. Скорость света

У нас есть волна, которая уходит от материального источника и движется со скоростью  $c$  (это скорость света). Вернемся немного назад. Исторически не было известно, что коэффициент  $c$  в уравнениях Максвелла тот же, что и скорость распространения света. Это была просто константа в уравнениях. Мы назвали ее  $c$  с самого начала, так как знали, что в конце концов должно получиться. Мы не думаем, что было бы разумнее сначала заставить вас выучить формулы с разными константами, а затем вернуться обратно и подставить  $c$  повсюду, где оно должно стоять. С точки зрения электричества и магнетизма,

\* Это не совсем так. Поля могут быть «поглощены», если попадут в область, в которой есть заряды. Это значит, что где-то могут быть созданы другие поля, которые наложатся на эти поля и «погасят» их в результате деструктивной интерференции (см. гл. 31, вып. 3).

однако, мы прямо начинаем с двух констант  $\epsilon_0$  и  $c^2$ , которые появляются в уравнениях электростатики и магнитостатики:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.14)$$

и

$$\nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.15)$$

Если взять любое *произвольное* определение единицы заряда, можно экспериментально определить постоянную  $\epsilon_0$ , входящую в уравнение (18.14), скажем, измеря силу между двумя неподвижными единичными зарядами по закону Кулона. Мы должны также определить экспериментально постоянную  $\epsilon_0 c^2$ , которая появляется в уравнении (18.15), что можно сделать, скажем, измерив силу между двумя единичными токами. (Единичный ток означает единичный заряд в секунду.) Отношение этих двух экспериментальных постоянных есть  $c^2$  — как раз другая «электромагнитная постоянная».

Заметим теперь, что постоянная  $c^2$  получается одна и та же независимо от того, какова выбранная наша единица заряда. Если мы выберем «заряд» в два раза больше (скажем, удвоенный заряд протона), то в нашей «единице» заряда  $\epsilon_0$  должна уменьшиться в четыре раза. Когда мы пропускаем два таких «единичных» тока по двум проводам, в каждом проводе будет в два раза больше «зарядов» в секунду, так что силы между двумя проводами будут в четыре раза больше. Постоянная  $\epsilon_0 c^2$  должна уменьшиться в четыре раза. Но отношение  $\epsilon_0 c^2 / \epsilon_0$  не меняется.

Следовательно, непосредственно из экспериментов с зарядами и токами мы находим число  $c^2$ , которое оказывается равным квадрату скорости распространения электромагнитных возбуждений. Из статических измерений (измеря силы между двумя единичными зарядами и между двумя единичными токами) мы находим, что  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/сек. Когда Максвелл впервые проделал это вычисление со своими уравнениями, он сказал, что совокупность электрического и магнитного полей будет распространяться с этой скоростью. Он отметил также единственное совпадение — эта скорость была равна скорости света. «Мы едва ли можем избежать заключения,— сказал Максвелл,— что свет — это поперечное волнобразное движение той же самой среды, которая вызывает электрические и магнитные явления».

Так Максвелл совершил одно из великих обобщений физики! До него был свет, было электричество и был магнетизм. Причем два последних явления были объединены экспериментальными работами Фарадея, Эрстеда и Ампера. Потом внезапно свет не стал уже больше «чем-то еще», а был электричеством

и магнетизмом в новой форме, небольшими кусками электрического и магнитного полей, которые распространяются в пространстве самостоятельно.

Мы обращали ваше внимание на некоторые черты этого особого решения, которые, однако, справедливы для любой электромагнитной волны: магнитное поле перпендикулярно направлению движения фронта волны; электрическое поле также перпендикулярно направлению движения фронта волны; и два вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны друг другу. Далее, величина электрического поля  $E$  равна произведению  $c$  на величину магнитного поля  $B$ . Эти три факта — что оба поля поперечны направлению распространения, что  $\mathbf{B}$  перпендикулярно  $\mathbf{E}$  и что  $E=cB$  — верны вообще для любой электромагнитной волны. Наш частный случай — хороший пример, он показывает все основные свойства электромагнитных волн.

## § 6. Решение уравнений Максвелла; потенциалы и волновое уравнение

Теперь стоило бы заняться немного математикой; мы запишем уравнения Максвелла в более простой форме. Вы, пожалуй, сочтете, что мы усложняем их, но если вы наберетесь терпения, то внезапно обнаружите их большую простоту. Хотя вы уже вполне привыкли к каждому из уравнений Максвелла, имеется все же много частей, которые стоит соединить воедино. Вот как раз этим мы и займемся.

Начнем с  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  — простейшего из уравнений. Мы знаем, что оно подразумевает, что  $\mathbf{B}$  — есть ротор чего-то. Поэтому, если вы записали

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (18.16)$$

то считайте, что уже решили одно из уравнений Максвелла. (Междуд прочим, заметьте, что оно остается верно для другого вектора  $\mathbf{A}'$ , если  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ , где  $\psi$  — любое скалярное поле, потому что ротор  $\nabla\psi$  — нуль и  $\mathbf{B}$  — по-прежнему то же самое. Мы говорили об этом раньше.)

Теперь разберем закон Фарадея  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , потому что он не содержит никаких токов или зарядов. Если мы запишем  $\mathbf{B}$  как  $\nabla \times \mathbf{A}$  и продифференцируем по  $t$ , то сможем переписать закон Фарадея в форме

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Поскольку мы можем дифференцировать сначала либо по времени, либо по координатам, то можно написать это уравнение также в виде

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.17)$$

Мы видим, что  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$  — это вектор, ротор которого равен нулю. Поэтому такой вектор есть градиент чего-то. Когда мы занимались электростатикой, у нас было  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , и мы тогда решили, что  $\mathbf{E}$  — само градиент чего-то. Пусть это градиент от  $-\varphi$  (минус для технических удобств). То же самое сделаем и для  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ ; мы полагаем

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (18.18)$$

Мы используем то же обозначение  $\varphi$ , так что в электростатическом случае, когда ничто не меняется со временем и  $\partial \mathbf{A} / \partial t$  исчезает,  $\mathbf{E}$  будет нашим старым  $-\nabla \varphi$ . Итак, закон Фарадея можно представить в форме

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (18.19)$$

Мы уже решили два из уравнений Максвелла и нашли, что для описания электромагнитных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  нужны четыре потенциальные функции: скалярный потенциал  $\varphi$  и векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , который, разумеется, представляет три функции.

Итак,  $\mathbf{A}$  определяет часть  $\mathbf{E}$ , так же как и  $\mathbf{B}$ . Что же произойдет, когда мы заменим  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ ? В общем,  $\mathbf{E}$  должно было бы измениться, если не принять особых мер. Мы можем, однако, допустить, что  $\mathbf{A}$  изменяется так, чтобы не влиять на поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  (т. е. не меняя физики), если будем всегда изменять  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  вместе по правилам

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (18.20)$$

Тогда ни  $\mathbf{B}$ , ни  $\mathbf{E}$ , полученные из уравнения (18.19), не меняются.

Раньше мы выбирали  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , чтобы как-то упростить уравнения статики. Теперь мы не собираемся так поступать; мы хотим сделать другой выбор. Но подождите немного, прежде чем мы скажем, какой это выбор, потому что позднее станет ясно, почему вообще делается выбор.

Сейчас мы вернемся к двум оставшимся уравнениям Максвелла, которые свяжут потенциалы и источники  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ . Раз мы можем определить  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  из токов и зарядов, то можно всегда получить  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  из уравнений (18.16) и (18.19) и мы будем иметь другую форму уравнений Максвелла.

Начнем с подстановки уравнения (18.19) в  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ ; получаем

$$\nabla \cdot \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

это можно записать еще в виде

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.21)$$

Таково первое уравнение, связывающее  $\phi$  и  $\mathbf{A}$  с источниками.

Наше последнее уравнение будет самым трудным. Мы начнем с того, что перепишем четвертое уравнение Максвелла:

$$c\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

а затем выразим  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  через потенциалы, используя уравнения (18.16) и (18.19):

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

Первый член можно переписать, используя алгебраическое тождество  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ; мы получаем

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (18.22)$$

Не очень-то оно простое!

К счастью, теперь мы можем использовать нашу свободу в произвольном выборе дивергенции  $\mathbf{A}$ . Сейчас мы собираемся сделать такой выбор, чтобы уравнения для  $\mathbf{A}$  и для  $\phi$  разделились, но имели одну и ту же форму. Мы можем сделать это, выбирая \*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (18.23)$$

Когда мы поступаем так, то второе и третье слагаемые в уравнении (18.22) погашаются, и оно становится много проще:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.24)$$

И наше уравнение (18.21) для  $\phi$  принимает такую же форму:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.25)$$

Какие красивые уравнения! Они великолепны прежде всего потому, что хорошо разделились — с плотностью заряда стоит  $\phi$ , а с током стоит  $\mathbf{A}$ . Далее, хотя левая сторона выглядит немного нелепо — лапласиан вместе с  $(\partial/\partial t)^2$ , когда мы раскроем ее, то обнаружим

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.26)$$

---

\* Выбор значения  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  называется «выбором калибровки». Изменение  $\mathbf{A}$  за счет добавления  $\nabla \psi$  называется «калибровочным преобразованием». Выбор (18.23) называют «калибровкой Лоренца».

Это уравнение имеет приятную симметрию по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ; здесь  $(-1/c^2)$  нужно, конечно, потому, что время и координаты различаются; у них разные единицы.

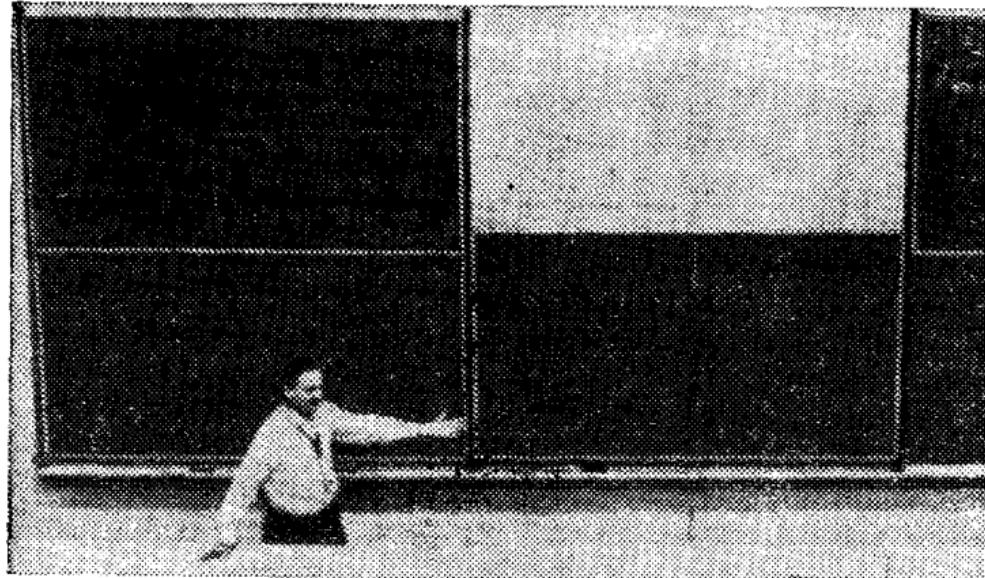
Уравнения Максвелла привели нас к нового типа уравнению для потенциалов  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ , но с одной и той же математической формой для всех четырех функций  $\phi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$ . Раз мы научились решать эти уравнения, то можем получить  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  из  $\nabla \times \mathbf{E}$  и  $-\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ . Мы приходим к другой форме электромагнитных законов, в точности эквивалентной уравнениям Максвелла; с ними во многих случаях обращаться гораздо проще.

Фактически мы уже решали уравнение, весьма похожее на (18.26). Когда мы изучали звук в гл. 47 (вып. 4), мы имели уравнение в форме

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

и видели, что оно описывает распространение волн в  $x$ -направлении со скоростью  $c$ . Уравнение (18.26) это соответствующее волновое уравнение для трех измерений. Поэтому в области, где больше нет зарядов и токов, решение этих уравнений не означает, что  $\phi$  и  $\mathbf{A}$  — нули. (Хотя на самом деле нулевое решение есть одно из возможных решений.) Имеются решения, представляющие некоторую совокупность  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ , которые меняются со временем, но всегда движутся со скоростью  $c$ . Поля передвигаются вперед через свободное пространство, как в нашем примере в начале главы.

С новым членом, добавленным Максвеллом в уравнение IV, мы смогли записать полевые уравнения в терминах  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  форме, которая проста и сразу же позволяет выявить существование электромагнитных волн. Для многих практических целей еще будет удобно использовать первоначальные уравнения в терминах  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Но они — по ту сторону горы, на которую мы уже вскарабкались. Теперь мы можем посмотреть вокруг. Все будет выглядеть иначе — нас ожидают новые, прекрасные пейзажи.



## Глава 19

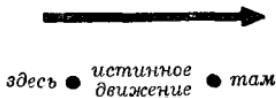
### ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ\*

Когда я учился в школе, наш учитель физики, по фамилии Бадер, однажды зазвал меня к себе после урока и сказал: «У тебя вид такой, как будто тебе все страшно надоело; послушай-ка об одной интересной вещи». И он рассказал мне нечто, что мне показалось поистине захватывающим. Даже сейчас, хотя с тех пор прошла уже уйма времени, это продолжает меня увлекать. И всякий раз, когда я вспоминаю о сказанном, я вновь принимаюсь за работу. И на этот раз, готовясь к лекции, я поймал себя на том, что вновь анализирую все то же самое. И, вместо того чтобы готовиться к лекции, я взялся за решение новой задачи. Предмет, о котором я говорю,— это *принцип наименьшего действия*.

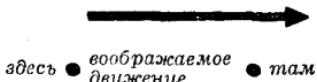
---

\* Эта лекция никак не связана со всем остальным. Она прочитана лишь для того, чтобы отвлечься от основной темы и немного передохнуть. (Перевод надписей, сделанных на доске, приведен около рисунков, под стрелками.— Прим. ред.)

Вот что сказал мне тогда мой учитель Бадер: «Пусть, к примеру, у тебя имеется частица в поле тяжести; эта частица, выйдя откуда-то, свободно движется куда-то в другую точку. Ты подбросил ее, скажем, кверху, а она взлетела, а потом упала.



От исходного места к конечному она прошла за какое-то время. Попробуй теперь какое-то другое движение. Пусть для того, чтобы перейти «отсюда сюда», она двигалась уже не так, как раньше, а вот так:



но все равно очутилась на нужном месте в тот же самый момент времени, что и раньше».

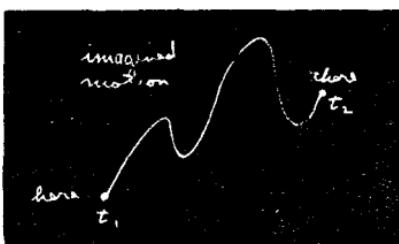
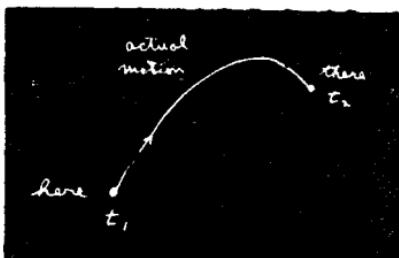
«И вот,— продолжал учитель,— если ты подсчитаешь кинетическую энергию в каждый момент времени на пути частицы, вычтешь из нее потенциальную энергию и проинтегрируешь разность по всему тому времени, когда происходило движение, то увидишь, что число, которое получится, будет *больше*, чем при истинном движении частицы.

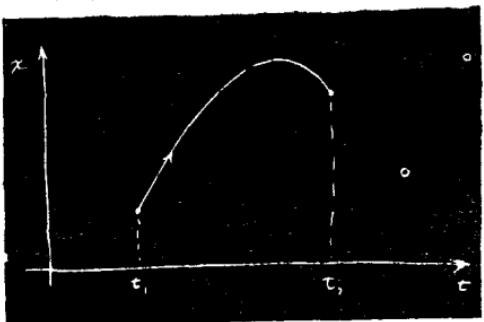
Иными словами, законы Ньютона можно сформулировать не в виде  $F=ma$ , а вот как: средняя кинетическая энергия минус средняя потенциальная энергия достигает своего самого наименьшего значения на той траектории, по которой предмет движется в действительности от одного места к другому.

Попробую пояснить тебе это чуть понятнее.

Если взять поле тяготения и обозначить траекторию частицы  $x(t)$ , где  $x$  — высота над землей (обойдемся пока одним измерением; пусть траектория пролегает только вверх и вниз, а не в стороны), то кинетическая энергия будет  $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ , а потенциальная энергия в произвольный момент времени будет равна  $mgx$ .

Теперь я для какого-то момента движения по траектории беру разность кинетической и потенциальной энергий и интегрирую по всему времени от начала до конца. Пусть в начальный момент времени  $t_1$  движение началось на какой-то высоте, а кон-



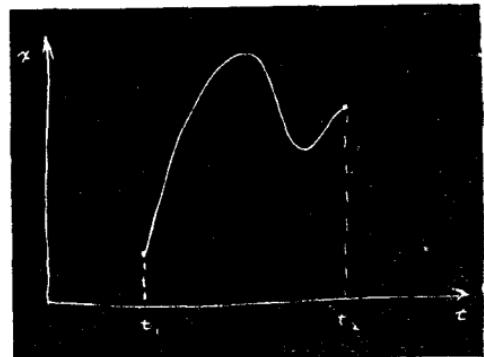


чились в момент  $t_2$  на другой определенной высоте.

Тогда интеграл равен

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

Истинное движение совершается по некоторой кривой (как функция времени она является параболой) и приводит к какому-то определенному значению интеграла. Но можно представить себе какое-то другое движение: сперва резкий подъем, а потом какие-то причудливые колебания.



кинетической энергии на таком пути... или на любом другом. И самое поразительное — что настоящий путь это тот, по которому этот интеграл наименьший.

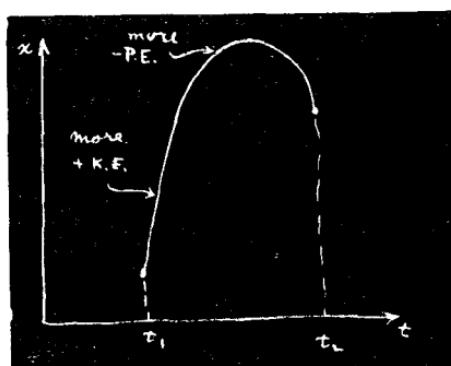
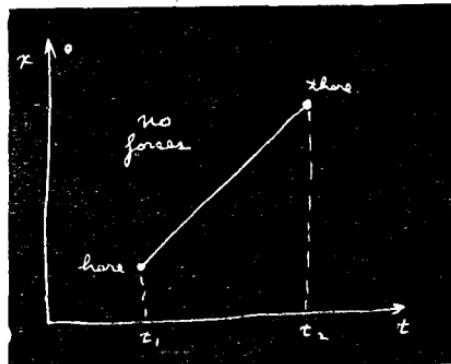
Давай проверим это. Для начала разберем такой случай: у свободной частицы вовсе нет потенциальной энергии. Тогда правило говорит, что при переходе от одной точки к другой за заданное время интеграл от кинетической энергии должен оказаться наименьшим. А это значит, что частица обязана двигаться равномерно. (И это правильно, мы же с тобой знаем, что скорость в таком движении постоянна.) А почему равномерно? Разберемся в этом. Если бы было иначе, то временами скорость частицы превысила бы среднюю, а временами была бы ниже ее, а средняя скорость была бы одинаковой, потому что частице надо было бы дойти «отсюда сюда» за установленное время. Например, если тебе нужно попасть из дома в школу на своей машине за определенное время, то сделать это можно по-разному: ты можешь сперва гнать, как сумасшедший, а в конце притормозить, или ехать с одинаковой скоростью, или сначала можешь даже отправиться в обратную сторону, а уж потом повернуть к школе, и т. д. Во всех случаях средняя скорость, конечно, должна быть одной и той же — частное от деления расстояния от дома до школы на время. Но и при данной средней скорости ты иногда двигался слишком быстро, а иногда

чесчур медленно. А средний квадрат чего-то, что отклоняется от среднего, как известно, всегда больше квадрата среднего; значит, интеграл от кинетической энергии при колебаниях скорости движения всегда будет больше, нежели при движении с постоянной скоростью. Ты видишь, что интеграл достигнет минимума, когда скорость будет постоянной (при отсутствии сил). Правильный путь таков.



Предмет же, подброшенный в поле тяжести вверх, сперва поднимается быстро, а потом все медленнее. Происходит это потому, что он обладает и потенциальной энергией, а наименьшего значения должна достигать разность между кинетической и потенциальной энергиями.

Раз потенциальная энергия то меньшая разность получится, если как можно быстрее достичь тех высот, где потенциальная энергия велика. Тогда, вычтя из кинетической энергии этот высокий потенциал, мы добьемся уменьшения среднего. Так что выгоднее такой путь, который идет вверх и поставляет добрый отрицательный кусок за счет потенциальной энергии.



Но, с другой стороны, нельзя ни двигаться слишком быстро, ни подняться слишком высоко, потому что на это потребуется чесчур много кинетической энергии. Надо двигаться достаточно быстро, чтобы подняться и спуститься за определенное время, имеющееся в твоем распоряжении. Так что не следует стараться взлететь слишком высоко, а просто надо достичь какого-то разумного уровня. В итоге оказывается, что решение есть своего рода равновесие между желанием раздобыть как можно больше потенциальной энергии и желанием как можно сильней уменьшить количество кинетической энергии — это стремление добиться максимального уменьшения разности кинетической и потенциальной энергий».

Вот и все, что сказал мне мой учитель, потому что он был очень хороший учитель и знал, когда пора остановиться. Сам я, увы, не таков. Мне трудно остановиться вовремя. И поэтому вместо того, чтобы просто разжечь в вас интерес своим рассказом, я хочу запугать вас, хочу, чтобы вам стало тошно от сложности жизни,— попробую доказать то, о чем я рассказал. Математическая задача, которую мы будем решать, очень трудна и своеобразна. Имеется некоторая величина  $S$ , называемая *действием*. Она равна кинетической энергии минус потенциальная, проинтегрированная по времени:

$$\text{Действие} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{к. э.} - \text{п. э.}) dt.$$

Не забудьте, что и п. э. и к. э.— обе функции времени. Для любого нового мыслимого пути это действие принимает свое определенное значение. Математическая задача состоит в том, чтобы определить, для какой кривой это число меньше, чем для других.

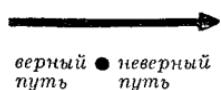
Вы скажете: «О, это просто обычный пример на максимум и минимум. Надо подсчитать действие, продифференцировать его и найти минимум».

Но погодите. Обычно у нас бывает функция какой-то переменной и нужно найти значение *переменной*, при котором функция становится наименьшей или наибольшей. Скажем, имеется стержень, нагретый посередине. По нему растекается тепло и в каждой точке стержня устанавливается своя температура. Нужно найти точку, где она выше всего. Но у нас речь идет совсем об ином — *каждому пути в пространстве* отвечает свое число, и предполагается найти тот *путь*, для которого это число минимально. Это совсем другая область математики. Это не обычное исчисление, а *вариационное* (так его называют).

В этой области математики имеется много своих задач. Скажем, окружность обычно определяют как геометрическое место точек, расстояния которых от данной точки одинаковы, но окружность можно определить и иначе: это та из кривых *данной длины*, которая ограничивает собою наибольшую площадь. Любая другая кривая такого же периметра ограничивает площадь меньшую, чем окружность. Так что если поставить задачу: найти кривую *данного* периметра, ограничивающую наибольшую площадь, то перед нами будет задача из вариационного исчисления, а не из того исчисления, к которому вы привыкли.

Итак, мы хотим взять интеграл по пути, пройденному телом. Сделаем это так. Все дело в том, чтобы вообразить себе, что существует истинный путь и что любая другая кривая, которую

мы проведем,— не настоящий путь, так что если подсчитать для него действие, то получится число, превышающее то, которое мы получим для действия, соответствующего настоящему пути.



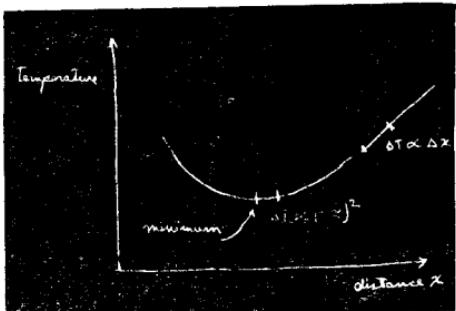
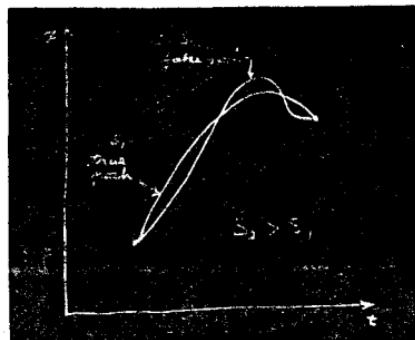
Итак, задача: найти истинный путь. Где он пролегает? Один из способов, конечно, мог бы состоять в том, чтобы подсчитать действие для миллионов и миллионов путей и потом посмотреть, при каком пути это действие наименьшее. Вот тот путь, при котором действие минимально, и будет настоящим.

Такой способ вполне возможен. Однако можно сделать проще. Если имеется величина, обладающая минимумом (из обычных функций, скажем, температура), то одно из свойств минимума состоит в том, что при удалении от него на расстояние *первого* порядка малости функция отклоняется от минимального своего значения только на величину *второго* порядка. А в любом другом месте кривой сдвиг на малое расстояние изменяет значение функции тоже на величину первого порядка малости. Но в минимуме легкие уходы в сторону в первом приближении не приводят к изменению функции.



Это-то свойство мы и собираемся использовать для расчета настоящего пути. Если путь правильный, то кривая, чуть-чуть отличная от него, не приведет в первом приближении к изменению в величине действия. Все изменения, если это был действительно минимум, возникнут только во втором приближении.

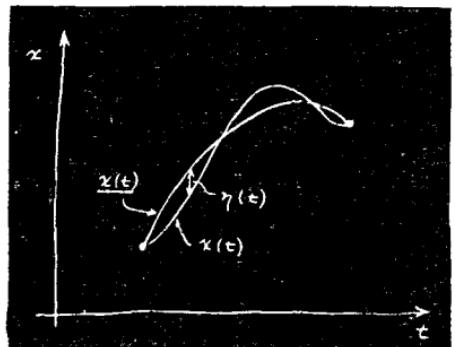
Это легко доказать. Если при каком-то отклонении от кривой возникают изменения в первом порядке, то эти изменения в действии *пропорциональны* отклонению. Они, по всей вероят-



ности, увеличат действие; иначе это не был бы минимум. Но раз изменения пропорциональны отклонению, то перемена знака отклонения уменьшит действие. Выходит, что при отклонении в одну сторону действие возрастает, а при отклонении в обратную сторону — убывает. Единственная возможность того, чтобы это действительно было минимум, — это чтобы в первом приближении никаких изменений не происходило и изменения были бы пропорциональны квадрату отклонения от настоящего пути.

Итак, мы пойдем по следующему пути: обозначим через  $x(t)$  (с чертой внизу) истинный путь — тот, который мы хотим

найти. Возьмем некоторый пробный путь  $\bar{x}(t)$ , отличающийся от искомого на небольшую величину, которую мы обозначим  $\eta(t)$ .



Идея состоит в том, что если мы подсчитаем действие  $S$  на пути  $x(t)$ , то разность между этим  $S$  и тем действием, которое мы вычислили для пути  $\bar{x}(t)$  (для простоты

оно будет обозначено  $\underline{S}$ ), или разность между  $\underline{S}$  и  $S$ , должна быть в первом приближении по  $\eta$  нулем. Они могут отличаться во втором порядке, но в первом разность обязана быть нулем.

И это должно соблюдаться для любой  $\eta$ . Впрочем, не совсем для любой. Метод требует принимать во внимание только те пути, которые все начинаются и кончаются в одной и той же паре точек, т. е. всякий путь должен начинаться в определенной точке в момент  $t_1$  и кончаться в другой определенной точке в момент  $t_2$ . Эти точки и моменты фиксируются. Так что наша функция  $\eta$  (отклонение) должна быть равна нулю на обоих концах:  $\eta(t_1)=0$  и  $\eta(t_2)=0$ . При этом условии наша математическая задача становится полностью определенной.

Если бы вы не знали дифференциального исчисления, вы могли бы проделать такую же вещь для отыскания минимума обычной функции  $f(x)$ . Вы бы задумались над тем, что случится, если взять  $f(x)$  и прибавить к  $x$  малую величину  $h$ , и доказывали бы, что поправка к  $f(x)$  в первом порядке по  $h$  должна в минимуме быть равна нулю. Вы бы подставили  $x+h$  вместо  $x$  и разложили бы  $f(x+h)$  с точностью до первой степени  $h$ ..., словом, повторили бы все то, что мы намерены сделать с  $\eta$ .

Итак, идея наша заключается в том, что мы подставляем  $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$  в формулу для действия

$$S = \int \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) \right] dt,$$

где через  $V(x)$  обозначена потенциальная энергия. Производная  $d\underline{x}/dt$  — это, естественно, производная от  $\underline{x}(t)$  плюс производная от  $\eta(t)$ , так что для действия я получаю такое выражение:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

Теперь это нужно расписать подетальней. Для квадратичного слагаемого я получу

$$\left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

Но постойте-ка! Ведь мне не нужно заботиться о порядках выше первого. Я могу убрать все слагаемые, в которых есть  $\eta^2$  и высшие степени, и ссыпать их в ящик под названием «второй и высшие порядки». Из этого выражения туда попадет только одна вторая степень, но из чего-то другого могут войти и высшие. Итак, часть, связанная с кинетической энергией, такова:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{Второй и высшие порядки}).$$

Дальше нам нужен потенциал  $V$  в точках  $\underline{x} + \eta$ . Я считаю  $\eta$  малой и могу разложить  $V(x)$  в ряд Тэйлора. Приближенно это будет  $V(x)$ ; в следующем приближении (из-за того, что здесь стоят обычные производные) поправка равна  $\eta$ , умноженной на скорость изменения  $V$  по отношению к  $x$  и т. д.:

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2} V''(\underline{x}) + \dots .$$

Для экономии места я обозначил через  $V'$  производную  $V$  по  $x$ . Слагаемое с  $\eta^2$  и все, стоящие за ним, попадают в категорию «второй и высшие порядки». И о них больше нечего беспокоиться. Объединим все, что осталось:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (\text{Второй и высшие порядки}) \right] dt.$$

Если мы теперь внимательно взглянем на это, то увидим, что два первых написанных здесь члена отвечают тому действию  $\underline{S}$ , которое я написал бы для искомого истинного пути  $x$ . Я хочу сосредоточить ваше внимание на изменении  $S$ , т. е. на разности между  $S$  и тем  $\underline{S}$ , которое получилось бы для истинного пути. Эту разность мы будем записывать как  $\delta S$  и назовем ее вариацией  $S$ . Отбрасывая «второй и высшие порядки», получаем для  $\delta S$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(x) \right] dt.$$

Теперь задача выглядит так. Вот передо мной некоторый интеграл. Я не знаю еще, каково это  $x$ , но я твердо знаю, что, какую  $\eta$  я ни возьму, этот интеграл должен быть равен нулю. «Ну что ж,— подумаете вы,— единственная возможность для этого — это чтобы множитель при  $\eta$  был равен нулю». Но как быть с первым слагаемым, где есть  $d\eta/dt$ ? Вы скажете: «Если  $\eta$  обращается в ничто, то и ее производная такое же ничто; значит, коэффициент при  $d\eta/dt$  должен тоже быть нулем». Ну это не совсем верно. Это не совсем верно потому, что между отклонением  $\eta$  и его производной имеется связь; они не полностью независимы, потому что  $\eta(t)$  должно быть нулем и при  $t_1$  и при  $t_2$ .

При решении всех задач вариационного исчисления всегда пользуются одним и тем же общим принципом. Вы чуть сдвигаете то, что хотите варьировать (подобно тому, как это сделали мы, добавляя  $\eta$ ), бросаете взгляд на члены первого порядка, затем расставляете все так, чтобы получился интеграл в таком виде: «сдвиг ( $\eta$ ), умноженный на что получится», но чтобы в нем не было никаких производных от  $\eta$  (никаких  $d\eta/dt$ ). Непременно нужно так все преобразовать, чтобы осталось «нечто», умноженное на  $\eta$ . Сейчас вы поймете, отчего это так важно. (Существуют формулы, которые подскажут вам, как в некоторых случаях можно это проделать без каких-либо выкладок; но они не так уж общи, чтобы стоило заучивать их; лучше всего проделывать выкладки так, как это делаем мы.)

Как же я могу переделать член  $d\eta/dt$ , чтобы в нем появилось  $\eta$ ? Я могу добиться этого, интегрируя по частям. Оказывается, что в вариационном исчислении весь фокус в том и состоит, чтобы расписать вариацию  $S$  и затем проинтегрировать по частям так, чтобы производные от  $\eta$  исчезли. Во всех задачах, в которых появляются производные, проделывается такой же фокус.

Припомните общий принцип интегрирования по частям. Если у вас есть произвольная функция  $f$ , умноженная на  $d\eta/dt$  и проинтегрированная по  $t$ , то вы расписываете произ-

водную от  $\eta f$ :

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

В интересующем вас интеграле стоит как раз последнее слагаемое, так что

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

В нашей формуле для  $\delta S$  за функцию  $f$  принимается произведение  $m$  на  $\frac{dx}{dt}$ ; поэтому я получаю для  $\delta S$  выражение

$$\delta S = m \frac{dx}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x}) \eta(t) dt.$$

В первый член должны быть подставлены пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$ . Тогда я получу под интегралом член от интегрирования по частям и последний член, оставшийся при преобразовании неизменным.

А теперь происходит то, что бывает всегда, — проинтегрированная часть исчезает. (А если не исчезает, то нужно переприменить принцип, добавив условия, обеспечивающие такое исчезновение!) Мы уже говорили, что  $\eta$  на концах пути должна быть равна нулю. Ведь в чем состоит наш принцип? В том, что действие минимально при условии, что варьируемая кривая начинается и кончается в выбранных точках. Это значит, что  $\eta(t_1)=0$  и  $\eta(t_2)=0$ . Поэтому проинтегрированный член получается равным нулю. Мы собираем воедино остальные члены и пишем

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ -m \frac{d^2x}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt.$$

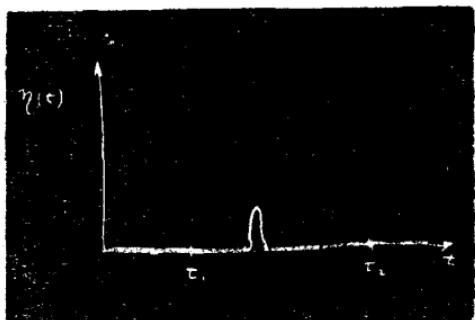
Вариация  $S$  теперь приобрела такой вид, какой мы хотели ей придать: что-то стоит в скобках (обозначим его  $F$ ), и все это умножено на  $\eta(t)$  и проинтегрировано от  $t_1$  до  $t_2$ .

У нас вышло, что интеграл от какого-то выражения, умноженного на  $\eta(t)$ , всегда равен нулю:

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

Стоит какая-то функция от  $t$ ; умножаю ее на  $\eta(t)$  и интегрирую ее от начала до конца. И какова бы ни была  $\eta$ , я получаю нуль. Это означает, что функция  $F(t)$  равна нулю. В общем-то это очевидно, но я на всякий случай покажу вам один из способов доказательства.

Пусть в качестве  $\eta(t)$  я выберу нечто, что равно нулю всюду, при всех  $t$ , кроме одного, заранее выбранного значения  $t$ . Оно остается нулем, пока я не дойду до этого  $t$ ,



затем оно подскакивает на мгновение и сразу же осаживает назад. Если вы берете интеграл от этой  $\eta$ , умноженной на какую-то функцию  $F$ , то единственное место, в котором вы получите что-то ненулевое,— это там, где  $\eta(t)$  подскакивало; и у вас полу-

чится значение  $F$  в этом месте на интеграл по скачку. Сам по себе интеграл по скачку не равен нулю, но после умножения на  $F$  он должен дать нуль. Значит, функция в том месте, где был скачок, должна оказаться нулем. Но ведь скачок можно было сделать в любом месте; значит,  $F$  должна быть нулем всюду.

Мы видим, что если наш интеграл равен нулю при какой угодно  $\eta$ , то коэффициент при  $\eta$  должен обратиться в нуль. Интеграл действия достигает минимума на том пути, который будет удовлетворять такому сложному дифференциальному уравнению:

$$\left[ -m \frac{d^2x}{dt^2} - V'(x) \right] = 0.$$

На самом деле оно не так уж сложно; вы его уже встречали прежде. Это просто  $F=ma$ . Первый член — это масса, умноженная на ускорение; второй — это производная от потенциальной энергии, т. е. сила.

Итак, мы показали (по крайней мере для консервативной системы), что принцип наименьшего действия приводит к правильному ответу; он утверждает, что путь, обладающий минимумом действия,— это путь, удовлетворяющий закону Ньютона.

Нужно сделать еще одно замечание. Я не доказал, что это *минимум*. Может быть, это максимум. На самом деле это и не обязательно должен быть минимум. Здесь все так же, как в «принципе кратчайшего времени», который мы обсуждали, изучая оптику. Там тоже мы сперва говорили о «кратчайшем» времени. Однако выяснилось, что бывают положения, в которых это время не обязательно «кратчайшее». Фундаментальный принцип заключается в том, чтобы для любых *отклонений первого порядка* от оптического пути *изменения* во времени были бы равны нулю; здесь та же самая история. Под «минимумом» мы на самом деле подразумеваем, что в первом порядке малости

изменения величины  $S$  при отклонениях от пути должны быть равны нулю. И это не обязательно «минимум».

Теперь я хочу перейти к некоторым обобщениям. В первую очередь всю эту историю можно было бы проделать и в трех измерениях. Вместо простого  $x$  я тогда имел бы  $x$ ,  $y$  и  $z$  как функции  $t$ , и действие выглядело бы посложнее. При трехмерном движении вы должны использовать полную кинетическую энергию:  $(m/2)$ , умноженное на квадрат всей скорости. Иначе говоря,

$$\text{к. э.} = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Кроме того, потенциальная энергия теперь является функцией  $x$ ,  $y$  и  $z$ . А что можно сказать о пути? Путь есть некоторая кривая общего вида в пространстве; ее не так легко начертить, но идея остается прежней. А как обстоит дело с  $\eta$ ? Что ж, и  $\eta$  имеет три компоненты. Путь можно сдвигать и по  $x$ , и по  $y$ , и по  $z$ , или во всех трех направлениях одновременно. Так что  $\eta$  теперь вектор. От этого сильных усложнений не получается. Раз нулю должны быть равны лишь вариации *первого порядка*, то можно провести расчет последовательно с тремя сдвигами. Сперва можно сдвинуть  $\eta$  только в направлении  $x$  и сказать, что коэффициент должен обратиться в нуль. Получится одно уравнение. Потом мы сдвинем  $\eta$  в направлении  $y$  и получим второе. Затем сдвинем в направлении  $z$  и получим третье. Можно все, если угодно, проделать в другом порядке. Как бы то ни было, возникает тройка уравнений. Но ведь закон Ньютона — это тоже три уравнения в трех измерениях, по одному для каждой компоненты. Вам предоставляется самим убедиться, что это все действует и в трех измерениях (работы здесь не так много). Между прочим, можно взять какую угодно систему координат, полярную, любую, и сразу получить законы Ньютона применительно к этой системе, рассматривая, что получится, когда произойдет сдвиг  $\eta$  вдоль радиуса или по углу, и т. д.

Метод может быть обобщен и на произвольное число частиц. Если, скажем, у вас есть две частицы и между ними действуют какие-то силы и имеется взаимная потенциальная энергия, то вы просто складываете их кинетические энергии и вычитаете из суммы потенциальную энергию взаимодействия. А что вы варьируете? Пути *обеих* частиц. Тогда для двух частиц, движущихся в трех измерениях, возникает шесть уравнений. Вы можете варьировать положение частицы 1 в направлении  $x$ , в направлении  $y$  и в направлении  $z$ , и то же самое проделать с частицей 2, так что существует шесть уравнений. И так и должно быть. Три уравнения определяют ускорение частицы 1 через силу, действующую на нее, а три других — ускорение частицы 2 из-за силы, действующей на нее. Следуйте всегда

тем же правилам игры, и вы получите закон Ньютона для произвольного числа частиц.

Я сказал, что мы получим закон Ньютона. Это не совсем верно, потому что в закон Ньютона входят и неконсервативные силы, например трение. Ньютон утверждал, что  $ma$  равно всякой  $F$ . Принцип же наименьшего действия справедлив только для консервативных систем, таких, где все силы могут быть получены из потенциальной функции. Но ведь вы знаете, что на микроскопическом уровне, т. е. на самом глубинном физическом уровне, неконсервативных сил не существует. Неконсервативные силы (такие, как трение) появляются только от того, что мы пренебрегаем микроскопическими сложными эффектами: просто слишком много частиц приходится анализировать. *Фундаментальные же законы могут быть выражены в виде принципа наименьшего действия.*

Позвольте перейти к дальнейшим обобщениям. Положим, нас интересует, что будет, когда частица движется релятивистски. Пока мы не получили правильного релятивистского уравнения движения;  $F=ma$  верно только в нерелятивистских движениях. Встает вопрос: существует ли в релятивистском случае соответствующий принцип наименьшего действия? Да, существует. Формула в релятивистском случае такова:

$$S = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\varphi(x, y, z, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t)] dt.$$

Первая часть интеграла действия — это произведение массы покоя  $m_0$  на  $c^2$  и на интеграл от функции скорости  $\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Затем вместо того, чтобы вычитать потенциальную энергию, мы имеем интегралы от скалярного потенциала  $\varphi$  и от векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , умноженного на  $\mathbf{v}$ . Конечно, здесь приняты во внимание только электромагнитные силы. Все электрические и магнитные поля выражены в терминах  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ . Такая функция действия дает полную теорию релятивистского движения отдельной частицы в электромагнитном поле.

Конечно, вы должны понимать, что всюду, где я написал  $\mathbf{v}$ , прежде чем делать выкладки, следует подставить  $dx/dt$  вместо  $v_x$  и т. д. Кроме того, там, где я писал просто  $x, y, z$ , вы должны представить себе точки в момент  $t$ :  $x(t), y(t), z(t)$ . Собственно, только после таких подстановок и замен  $\mathbf{v}$  у вас получится формула для действия релятивистской частицы. Пусть самые умелые из вас попытаются доказать, что эта формула для действия действительно дает правильные уравнения движения теории относительности. Позвольте лишь посоветовать для начала отбросить  $\mathbf{A}$ , т. е. обойтись пока без магнитных полей. Тогда вы должны будете получить компоненты уравнения дви-

жения  $\frac{dp/dt}{p} = -q\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi$ , где, как вы, вероятно, помните,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

Включить в рассмотрение векторный потенциал  $\mathbf{A}$  намного труднее. Вариации тогда становятся несравненно более сложными. Но в конце сила оказывается равной тому, чему следует:  $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Но позабавьтесь с этим сами.

Мне хотелось бы подчеркнуть, что в общем случае (к примеру, в релятивистской формуле) под интегралом в действии уже не стоит разность кинетической и потенциальной энергий. Это годилось только в нерелятивистском приближении. Например, член  $m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}$  — это не то, что называют кинетической энергией. Вопрос о том, каким должно быть действие для произвольного частного случая, может быть решен после некоторого числа проб и ошибок. Это задача того же типа, что и определение, каковы должны быть уравнения движения. Вы просто должны поиграть с известными вам уравнениями и посмотреть, можно ли их написать в виде принципа наименьшего действия.

Еще одно замечание по поводу терминологии. Ту функцию, которую интегрируют по времени, чтобы получить действие  $S$ , называют *лагранжианом*  $\mathcal{L}$ . Это функция, зависящая только от скоростей и положений частиц. Так что принцип наименьшего действия записывается также в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i, v_i) dt,$$

где под  $x_i$  и  $v_i$  подразумеваются все компоненты координат и скоростей. Если вы когда-нибудь услышите, что кто-то говорит о «лагранжиане», знайте, что речь идет о функции, применяемой для получения  $S$ . Для релятивистского движения в электромагнитном поле

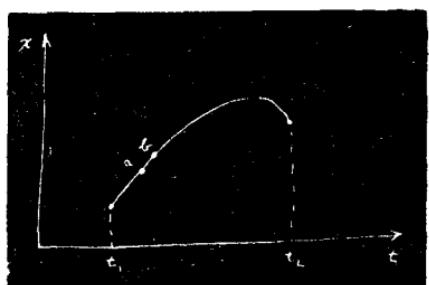
$$\mathcal{L} = -m_0c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

Кроме того, я должен отметить, что самые дотошные и педантичные люди не называют  $S$  действием. Его именуют «первой главной функцией Гамильтона». Но читать лекцию о «принципе наименьшей первой главной функции Гамильтона» было свыше моих сил. Я назвал это «действием». Да к тому же все больше и больше людей называют это «действием». Видите ли, исторически действием было названо нечто другое, не столь полезное для науки, но я думаю, что разумнее изменить определение. Теперь и вы начнете именовать новую функцию действием, а вскоре и все вообще станут называть ее этим простым именем.

Теперь я хочу сообщить вам по поводу нашей темы кое-что, похожее на те рассуждения, которые я вел по поводу принципа

кратчайшего времени. Существует разница в самом существе закона, утверждающего, что некоторый интеграл, взятый от одной точки до другой, имеет минимум,— закона, который сообщает нам что-то обо всем пути сразу, и закона, который говорит, что когда вы двигаетесь, то, значит, есть сила, приводящая к ускорению. Второй подход докладывает вам о каждом вашем шаге, он прослеживает ваш путь пядь за пядью, а первый выдает сразу какое-то общее утверждение обо всем проиденном пути. Толкуя о свете, мы говорили о связи этих двух подходов. Теперь я хочу объяснить вам, отчего должны существовать дифференциальные законы, если имеется такой принцип — принцип наименьшего действия. Причина вот в чем: рассмотрим действительно проиденный в пространстве и времени путь. Как и прежде, обойдемся одним измерением, так что можно будет начертить график зависимости  $x$  от  $t$ . Вдоль

истинного пути  $S$  достигает минимума. Положим, что у нас есть этот путь и что он проходит через некоторую точку  $a$  пространства и времени и через другую соседнюю точку  $b$ .



Теперь, если весь интеграл от  $t_1$  до  $t_2$  достиг минимума, необходимо, чтобы интеграл вдоль маленького участка от  $a$  до  $b$

тоже был минимальным. Не может быть, чтобы часть от  $a$  до  $b$  хоть чуточку превосходила минимум. Иначе вы могли бы подвигать туда-сюда кривую на этом участке и снизить немного значение всего интеграла.

Значит, любая часть пути тоже должна давать минимум. И это справедливо для каких-угодно маленьких долек пути. Поэтому тот принцип, что весь путь должен давать минимум, можно сформулировать, сказав, что бесконечно малая долька пути — это тоже такая кривая, на которой действие минимально. И если мы возьмем достаточно короткий отрезок пути — между очень близкими друг к другу точками  $a$  и  $b$ , — то уже неважно, как меняется потенциал от точки к точке вдали от этого места, потому что, проходя весь ваш коротенький отрезочек, вы почти не сходите с места. Единственное, что вам нужно учитывать, — это изменение первого порядка малости в потенциале. Ответ может зависеть только от производной потенциала, а не от потенциала в других местах. Так, утверждение о свойстве всего пути в целом становится утверждением о том, что происходит на коротком участке пути, т. е. дифференциальным утверждением. И эта дифференциальная фор-

мулировка включает производные от потенциала, т. е. силу в данной точке. Таково качественное объяснение связи между законом в целом и дифференциальным законом.

Когда мы говорили о свете, то обсуждали также вопрос: как все-таки частица находит правильный путь? С дифференциальной точки зрения это понять легко. В каждый момент частица испытывает ускорение и знает только то, что ей положено делать в это мгновение. Но все ваши инстинкты причин и следствий встают на дыбы, когда вы слышите, что частица «решает», какой ей выбрать путь, стремясь к минимуму действия. Уж не «обнюхивает» ли она соседние пути, прикидывая, к чему они приведут — к большему или к меньшему действию? Когда мы на пути света ставили экран так, чтобы фотоны не могли перепробовать все пути, мы выяснили, что они не могут решить, каким путем идти, и получили явление дифракции.

Но верно ли это и для механики? Правда ли, что частица не просто «идет верным путем», а пересматривает все другие мыслимые траектории? И что если, ставя препятства на ее пути, мы не дадим ей заглядывать вперед, то мы получим некий аналог явления дифракции? Самое чудесное во всем этом — то, что все действительно обстоит так. Именно это утверждают законы квантовой механики. Так что наш принцип наименьшего действия сформулирован не полностью. Он состоит не в том, что частица избирает путь наименьшего действия, а в том, что она «чуяет» все соседние пути и выбирает тот, вдоль которого действие минимально, и способ этого выбора сходен с тем, каким свет отбирает кратчайшее время. Вы помните, что способ, каким свет отбирает кратчайшее время, таков: если свет пойдет по пути, требующему другого времени, то придет он с другой фазой. А полная амплитуда в некоторой точке есть сумма вкладов амплитуд для всех путей, по которым свет может ее достичь. Все те пути, у которых фазы резко различаются, ничего после сложения не дают. Но если вам удалось найти всю последовательность путей, фазы которых почти одинаковы, то мелкие вклады сложатся, и в точке прибытия полная амплитуда получит заметное значение. Важнейшим путем становится тот, возле которого имеется множество близких путей, дающих ту же фазу.

В точности то же происходит и в квантовой механике. Законченная квантовая механика (нерелятивистская и пренебрегающая спином электрона) работает так: вероятность того, что частица, выйдя из точки 1 в момент  $t_1$ , достигнет точки 2 в момент  $t_2$ , равна квадрату амплитуды вероятности. Полная амплитуда может быть записана в виде суммы амплитуд для всех возможных путей — для любого пути прибытия. Для любого  $x(t)$ , которое могло бы возникнуть для любой мыслимой воображаемой траектории, нужно подсчитать амплитуду. Затем

их все нужно сложить. Что же мы примем за амплитуду вероятности некоторого пути? Наш интеграл действия говорит нам, какой обязана быть амплитуда отдельного пути. Амплитуда пропорциональна  $e^{iS/\hbar}$ , где  $S$  — действие на этом пути. Это значит, что если мы представим фазу амплитуды в виде комплексного числа, то фазовый угол будет равен  $S/\hbar$ . Действие  $S$  имеет размерность энергии на время, и у постоянной Планка размерность такая же. Это постоянная, которая определяет, когда нужна квантовая механика.

И вот как все это срабатывает. Пусть для всех путей действие  $S$  будет весьма большим по сравнению с числом  $\hbar$ . Пусть какой-то путь привел к некоторой величине амплитуды. Фаза рядом проложенного пути окажется совершенно другой, потому что при огромном  $S$  даже незначительные изменения  $S$  резко меняют фазу (ведь  $\hbar$  чрезвычайно мало). Значит, рядом лежащие пути при сложении обычно гасят свои вклады. И только в одной области это не так — в той, где и путь и его сосед — оба в первом приближении обладают одной и той же фазой (или, точнее, почти одним и тем же действием, меняющимся в пределах  $\hbar$ ). Только такие пути и принимаются в расчет. А в предельном случае, когда постоянная Планка  $\hbar$  стремится к нулю, правильные квантовомеханические законы можно подытожить, сказав: «Забудьте обо всех этих амплитудах вероятностей. Частица и впрямь движется по особому пути — именно по тому, по которому  $S$  в первом приближении не меняется». Такова связь между принципом наименьшего действия и квантовой механикой. То обстоятельство, что таким способом можно сформулировать квантовую механику, было открыто в 1942 г. учеником того же самого учителя, мистера Бадера, о котором я вам рассказывал. [Первоначально квантовая механика была сформулирована при помощи дифференциального уравнения для амплитуды (Шредингер), а также при помощи некоторой матричной математики (Гейзенберг).]

Теперь я хочу потолковать о других принципах минимума в физике. Есть очень много интересных принципов такого рода. Я не буду их все перечислять, а назову еще только один. Позже, когда мы доберемся до одного физического явления, для которого существует превосходный принцип минимума, я расскажу вам о нем. А сейчас я хочу показать, что необязательно описывать электростатику при помощи дифференциального уравнения для поля; можно вместо этого потребовать, чтобы некоторый интеграл обладал максимумом или минимумом. Для начала возьмем случай, когда плотность зарядов известна повсюду, а нужно найти потенциал  $\varphi$  в любой точке пространства. Вы уже знаете, что ответ должен быть такой:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Другой способ утверждать то же самое заключается в следующем: надо вычислить интеграл  $U^*$

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \underline{\varphi})^2 dV - \int \rho \underline{\varphi} dV;$$

это объемный интеграл. Он берется по всему пространству. При правильном распределении потенциала  $\underline{\varphi}(x, y, z)$  это выражение достигает минимума.

Мы можем показать, что оба эти утверждения относительно электростатики эквивалентны. Предположим, что мы выбрали произвольную функцию  $\underline{\varphi}$ . Мы хотим показать, что когда в качестве  $\underline{\varphi}$  мы возьмем правильное значение потенциала  $\underline{\varphi}$  плюс малое отклонение  $f$ , то в первом порядке малости изменение в  $U^*$  будет равно нулю. Так что мы пишем

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi} + f;$$

здесь  $\underline{\varphi}$  — это то, что мы ищем; но мы проворачиваем  $\underline{\varphi}$ , чтобы увидеть, каким он должен быть для того, чтобы вариация  $U^*$  оказалась первого порядка малости. В первом члене  $U^*$  нам нужно написать

$$(\nabla \underline{\varphi})^2 = (\nabla \underline{\varphi})^2 + 2\nabla \underline{\varphi} \cdot \nabla f + (\nabla f)^2.$$

Единственный член первого порядка, который будет меняться, таков:

$$2\nabla \underline{\varphi} \cdot \nabla f.$$

Во втором члене  $U^*$  подынтегральное выражение примет вид

$$\rho \underline{\varphi} = \rho \underline{\varphi} + \rho f;$$

изменяющаяся часть здесь равна  $\rho f$ . Оставляя только меняющиеся члены, получим интеграл

$$\Delta U^* = \int (\epsilon_0 \nabla \underline{\varphi} \cdot \nabla f - \rho f) dV.$$

Дальше, руководствуясь нашим общим правилом, мы должны очистить интеграл от всех производных по  $f$ . Посмотрим, что это за производные. Скалярное произведение равно

$$\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Это нужно проинтегрировать по  $x$ ,  $y$  и по  $z$ . И здесь напрашивается тот же фокус: чтобы избавиться от  $\partial f / \partial x$ , мы проинтегрируем по  $x$  по частям. Это приведет к добавочному дифференцированию  $\underline{\varphi}$  по  $x$ . Это та же основная идея, с помощью которой мы избавились от производных по  $t$ . Мы пользуемся равенством

$$\int \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} - \int f \frac{\partial^2 \underline{\varphi}}{\partial x^2} dx.$$

Проинтегрированный член равен нулю, так как мы считаем  $f$  равным нулю на бесконечности. (Это отвечает обращению  $\eta$  в нуль при  $t_1$  и  $t_2$ . Так что наш принцип более точно формулируется следующим образом:  $U^*$  для правильного  $\varphi$  меньше, чем для любого другого  $\varphi(x, y, z)$ , обладающего теми же значениями на бесконечности.) Затем мы проделаем то же с  $y$  и с  $z$ . Наш интеграл  $\Delta U^*$  обратится в

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\varphi} - \rho) f dV.$$

Чтобы эта вариация была равна нулю при любом произвольном  $f$ , коэффициент при  $f$  должен быть равен нулю. Значит,

$$\nabla^2 \underline{\varphi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Мы вернулись к нашему старому уравнению. Значит, наше «минимальное» предложение верно. Его можно обобщить, если слегка изменить выкладки. Вернемся назад и проинтегрируем по частям, не расписывая все покомпонентно. Начнем с того, что напишем следующее равенство:

$$\nabla \cdot (f \nabla \underline{\varphi}) = \nabla f \cdot \nabla \underline{\varphi} + f \nabla^2 \underline{\varphi}.$$

Продифференцировав левую часть, я могу показать, что она в точности равна правой. Это уравнение подходит для того, чтобы провести интегрирование по частям. В нашем интеграле  $\Delta U^*$  мы заменяем  $\nabla \underline{\varphi} \cdot \nabla f$  на  $-f \nabla^2 \underline{\varphi} + \nabla \cdot (f \nabla \underline{\varphi})$  и затем интегрируем это по объему. Член с дивергенцией после интегрирования по объему заменяется интегралом по поверхности:

$$\int \nabla \cdot (f \nabla \underline{\varphi}) dV = \int f \nabla \underline{\varphi} \cdot \mathbf{n} da.$$

А поскольку мы интегрируем по всему пространству, то поверхность в этом интеграле лежит на бесконечности. Значит,  $f=0$ , и мы получаем прежний результат.

Только теперь мы начинаем понимать, как решать задачи, в которых мы *не знаем*, где расположены все заряды. Пусть мы имеем проводники, на которых как-то распределены заряды. Если потенциалы на всех проводниках зафиксированы, то наш принцип минимума все еще разрешается применять. Интегрирование в  $U^*$  мы проведем только по области, лежащей снаружи всех проводников. Но раз мы не можем на проводниках менять  $\varphi$ , то на их поверхности  $f=0$ , и поверхностный интеграл

$$\int f \nabla \underline{\varphi} \cdot \mathbf{n} da$$

тоже равен нулю. Остающееся объемное интегрирование

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\varphi} - \rho) f dV$$

нужно проделывать только в промежутках между проводниками. И мы, конечно, снова получаем уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \underline{\Phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Мы, стало быть, показали, что наш первоначальный интеграл  $U^*$  достигает минимума и тогда, когда он вычисляется в пространстве между проводниками, каждый из которых находится при фиксированном потенциале [это значит, что каждая пробная функция  $\phi(x, y, z)$  должна равняться заданному потенциалу проводника, когда  $(x, y, z)$  — точки поверхности проводника].

Существует интересный частный случай, когда заряды расположены только на проводниках. Тогда

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \underline{\Phi})^2 dV$$

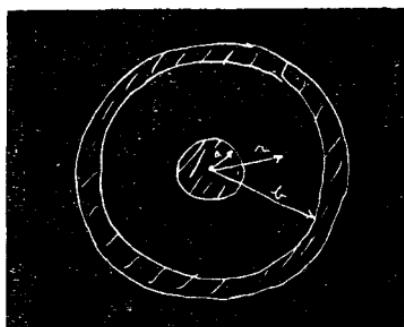
и наш принцип минимума говорит нам, что в случае, когда у каждого проводника есть свой заранее заданный потенциал, потенциалы в промежутках между ними пригоняются так, что интеграл  $U^*$  оказывается как можно меньше. А что это за интеграл? Член  $\nabla \underline{\Phi}$  — это электрическое поле. Значит, интеграл — это электростатическая энергия. Правильное поле и есть то единственное, которое из всех полей, получаемых как градиент потенциала, отличается наименьшей полной энергией.

Я хотел бы воспользоваться этим результатом, чтобы решить какую-нибудь частную задачу и показать вам, что все эти вещи имеют реальное практическое значение. Предположим, что я взял два проводника в форме цилиндрического конденсатора.



У внутреннего проводника потенциал равен, скажем,  $V$ , а у внешнего — нулю. Пусть радиус внутреннего проводника будет равен  $a$ , а внешнего —  $b$ . Теперь мы можем предположить, что распределение потенциалов между ними — любое.

Но если мы возьмем *правильное* значение  $\underline{\Phi}$  и вычислим  $(\epsilon_0/2) \int (\nabla \underline{\Phi})^2 dV$ , то должна получиться энергия системы  $1/2 CV^2$ . Так что с помощью нашего принципа можно подсчитать и емкость  $C$ . Если же мы возьмем *неправильное* распределение потенциала и попытаемся этим методом прикинуть емкость конденсатора, то придем к чрезесчур большому значению емкости при фиксированном  $V$ . Любой предполагаемый потенциал  $\underline{\Phi}$ , не точно



совпадающий с истинным его значением, приведет и к неверной величине  $C$ , большей, чем нужно. Но если неверно выбранный потенциал  $\phi$  является еще грубым приближением, то емкость  $C$  получится уже с хорошей точностью, потому что погрешность в  $C$  — величина второго порядка по сравнению с погрешностью в  $\phi$ .

Предположим, что мне неизвестна емкость цилиндрического конденсатора. Тогда, чтобы узнать ее, я могу воспользоваться этим принципом. Я просто буду испытывать в качестве потенциала разные функции  $\phi$  до тех пор, пока не добьюсь наименьшего значения  $C$ . Допустим, к примеру, что я выбрал потенциал, отвечающий постоянному полю. (Вы, конечно, знаете, что на самом деле поле здесь не постоянно; оно меняется как  $1/r$ .) Если поле постоянно, то это означает, что потенциал линейно зависит от расстояния. Чтобы напряжение на проводниках было каким нужно, функция  $\phi$  должна иметь вид

$$\phi = V \left( 1 - \frac{r-a}{b-a} \right).$$

Эта функция равна  $V$  при  $r=a$ , нулю при  $r=b$ , а между ними имеется постоянный наклон, равный  $-V/(b-a)$ . Значит, чтобы определить интеграл  $U^*$ , надо только помножить квадрат этого градиента на  $\epsilon_0/2$  и проинтегрировать по всему объему. Проведем этот расчет для цилиндра единичной длины. Элемент объема при радиусе  $r$  равен  $2\pi r dr$ . Проводя интегрирование, я нахожу, что моя первая проба дает такую емкость:

$$\frac{1}{2} CV^2 \text{ (первая проба)} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r dr.$$

Интеграл здесь просто равен

$$\pi V^2 \left( \frac{b+a}{b-a} \right).$$

Так я получаю формулу для емкости, которая хотя и неправильна, но является каким-то приближением:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

Конечно, она отличается от правильного ответа  $C=2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ , но в общем-то она не так уж плоха. Давайте попробуем сравнить ее с правильным ответом для нескольких значений  $b/a$ . Вычисленные мною числа приведены в следующей таблице.

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{истинное}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C_{\text{перв. прибл.}}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,500
4	0,721	0,833
10	0,434	0,612
100	0,267	0,51
1,5	2,4662	2,50
1,1	10,492070	10,500000

Даже когда  $b/a=2$  (а это приводит уже к довольно большим отличиям между постоянным и линейным полем), я все еще получаю довольно сносное приближение. Ответ, конечно, как и ожидалось, чуть завышен. Но если тонкую проволочку поместить внутри большого цилиндра, то все выглядит уже гораздо хуже. Тогда поле изменяется очень сильно и замена его постоянным полем ни к чему хорошему не приводит. При  $b/a=100$  мы завышаем ответ почти вдвое. Для малых  $b/a$  положение выглядит намного лучше. В противоположном пределе, когда промежуток между проводниками не очень широк (скажем, при  $b/a=1,1$ ), постоянное поле оказывается весьма хорошим приближением, оно дает значение  $C$  с точностью до десятых процента.

А теперь я расскажу вам, как усовершенствовать этот расчет. (Ответ для цилиндра вам, разумеется, известен, но тот же способ годится и для некоторых других необычных форм конденсаторов, для которых правильный ответ вам может быть и не известен.) Следующим шагом будет подыскание лучшего приближения для неизвестного нам истинного потенциала  $\phi$ . Скажем, можно испытать константу плюс экспоненту  $\phi$  и т. д. Но как вы узнаете, что у вас получилось лучшее приближение, если вы не знаете истинного  $\phi$ ? Ответ: Подсчитайте  $C$ ; чем оно ниже, тем к истине ближе. Давайте проверим эту идею. Пусть потенциал будет не линейным, а, скажем, квадратичным по  $r$ , а электрическое поле не постоянным, а линейным. Самая общая квадратичная форма, которая обращается в  $\phi=0$  при  $r=b$  и в  $\phi=V$  при  $r=a$ , такова:

$$\phi = V \left[ 1 + \alpha \left( \frac{r-a}{b-a} \right) - (1+\alpha) \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right],$$

где  $\alpha$  — постоянное число. Эта формула чуть сложнее прежней. В нее входит и квадратичный член, и линейный. Из нее очень легко получить поле. Оно равно просто

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

Теперь это нужно возвести в квадрат и проинтегрировать по объему. Но погодите минутку. Что же мне принять за  $\alpha$ ? За  $\alpha$  я могу принять параболу, но какую? Вот что я сделаю: подсчитаю емкость при произвольном  $\alpha$ . Я получу

$$\frac{C}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{a}{b-a} \left[ \frac{b}{a} \left( \frac{a^2}{6} + \frac{2a}{3} + 1 \right) + \frac{1}{6} a^2 + \frac{1}{3} \right].$$

Это выглядит малость запутанно, но так уж выходит после интегрирования квадрата поля. Теперь я могу выбирать себе  $\alpha$ . Я знаю, что истина лежит ниже, чем все, что я собираюсь вычислить. Что бы я ни поставил вместо  $\alpha$ , ответ все равно получится слишком большим. Но если я продолжу свою игру с  $\alpha$  и постараюсь добиться наименьшего возможного значения  $C$ , то это наименьшее значение будет ближе к правде, чем любое другое значение. Следовательно, мне теперь надо подобрать  $\alpha$  так, чтобы значение  $C$  достигло своего минимума. Обращаясь к обычному дифференциальному исчислению, я убеждаюсь, что минимум  $C$  будет тогда, когда  $\alpha = -2b/(b+a)$ . Подставляя это значение в формулу, я получаю для наименьшей емкости

$$\frac{C}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

Я прикинул, что дает эта формула для  $C$  при различных значениях  $b/a$ . Эти числа я назвал  $C$  (квадратичные). Привожу таблицу, в которой сравниваются  $C$  (квадратичные) с  $C$  (истинными).

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{истинное}}}{2\pi\varepsilon_0}$	$\frac{C_{\text{квадратичное}}}{2\pi\varepsilon_0}$
2	1,4423	1,444
4	0,721	0,733
10	0,434	0,475
100	0,267	0,346
1,5	2,4662	2,4667
1,1	10,492070	10,492065

Например, когда отношение радиусов равно  $2 : 1$ , я получаю 1,444. Это очень хорошее приближение к правильному ответу, 1,4423. Даже при больших  $b/a$  приближение остается довольно хорошим — оно намного лучше первого приближения. Оно остается сносным (завышение только на 10%) даже при  $b/a=10 : 1$ . Большое расхождение наступает только при отношении  $100 : 1$ . Я получаю  $C$  равным 0,346 вместо 0,267. С другой стороны, для отношения радиусов 1,5 совпадение пре-

восходное, а при  $b/a=1,1$  ответ получается 10,492065 вместо положенного 10,492070. Там, где следует ожидать хорошего ответа, он оказывается очень и очень хорошим.

Я привел все эти примеры, во-первых, чтобы продемонстрировать теоретическую ценность принципа минимального действия и вообще всяких принципов минимума, и, во-вторых, чтобы показать вам их практическую полезность, а вовсе не для того, чтобы подсчитать емкость, которую мы и так великолепно знаем. Для любой другой формы вы можете испробовать приближенное поле с несколькими неизвестными параметрами (наподобие  $\alpha$ ) и подогнать их под минимум. Вы получите превосходные численные результаты в задачах, которые другим способом не решаются.

### *Добавление, сделанное после лекции*

Мне не хватило времени на лекции, чтобы сказать еще об одной вещи (всегда ведь готовишься рассказать больше, чем успеваешь). И я хочу сделать это сейчас. Я уже упоминал о том, что, готовясь к этой лекции, заинтересовался одной задачей. Мне хочется вам рассказать, что это за задача. Я заметил, что большая часть принципов минимума, о которых шла речь, в той или иной форме вытекает из принципа наименьшего действия механики и электродинамики. Но существует еще класс принципов, оттуда не вытекающих. Вот пример. Если сделать так, чтобы токи протекали через массу вещества, удовлетворяющего закону Ома, то токи распределяются в этой массе так, чтобы скорость, с какой генерируется в ней тепло, была наименьшей. Можно также сказать иначе (если температура поддерживается постоянной): что скорость выделения энергии минимальна. Этот принцип, согласно классической теории, выполняется даже в распределении скоростей электронов внутри металла, по которому течет ток. Распределение скоростей не совсем равновесно [см. гл. 40 (вып. 4), уравнение (40.6)], потому что они медленно дрейфуют в стороны. Новое распределение можно найти из того принципа, что оно при данном токе должно быть таково, что развивающаяся в секунду за счет столкновений энтропия уменьшится настолько, насколько это возможно. Впрочем, правильное описание поведения электронов должно быть квантовомеханическим. Так вот в чем состоит вопрос: должен ли этот самый принцип минимума развивающейся энтропии соблюдаться и тогда, когда положение вещей описывается квантовой механикой? Пока мне не удалось это выяснить.

Вопрос этот интересен, конечно, и сам по себе. Подобные принципы возбуждают воображение, и всегда стоит попробовать выяснить, насколько они общи. Но мне необходимо это знать и по более практической причине. Вместе с

несколькими коллегами я опубликовал работу, в которой с помощью квантовой механики мы примерно рассчитали электрическое сопротивление, испытываемое электроном, пробирающимся сквозь ионный кристалл, подобный NaCl. [Статья об этом была напечатана в *Physical Review*, 127, 1004 (1962) и называется «Подвижность медленных электронов в полярных кристаллах.】 Но если бы существовал принцип минимума, мы могли бы воспользоваться им, чтобы сделать результат намного более точным, аналогично тому как принцип минимума емкости конденсатора позволил нам добиться столь высокой точности для емкости, хотя об электрическом поле наши сведения были весьма неточными.

# РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

## § 1. Волны в пустом пространстве; плоские волны

В гл. 18 мы достигли того, что уравнения Максвелла появились в полном виде. Все, что есть в классической теории электрических и магнитных полей, вытекает из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Когда мы свели все эти уравнения воедино, мы обнаружили новое знаменательное явление: поля, создаваемые движущимися зарядами, могут покинуть источник и отправиться путешествовать в пространстве. Мы рассмотрели частный случай, когда внезапно включается целая бесконечная плоскость. После того как в течение времени  $t$  шел ток, возникают однородные электрические и магнитные поля, простирающиеся от плоскости на  $ct$ . Предположим, что по плоскости  $yz$  течет ток в направлении  $+y$  с поверхностью плотностью  $J$ . Электрическое поле будет иметь только  $y$ -компоненту, а магнитное — только  $z$ -компоненту. Величина компонент поля будет равна

$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\epsilon_0 c} \quad (20.2)$$

для положительных  $x$ , меньших  $ct$ . Для больших  $x$  поля равны нулю. Равные по величине поля простираются на то же расстояние от плоскости в направлении отрицательных  $y$ . На фиг. 20.1 показан график зависимости величины полей от  $x$  в момент  $t$ . С течением времени

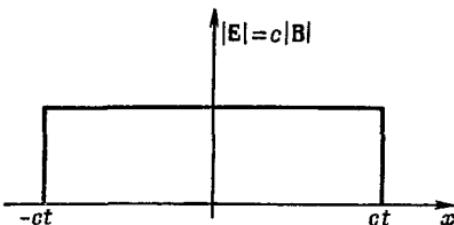
§ 1. Волны в пустом пространстве;  
плоские волны

§ 2. Трехмерные волны

§ 3. Научное воображение

§ 4. Сферические волны

*Позторить:* гл. 47  
(вып. 4) «Звук, Волновое уравнение»;  
гл. 28 (вып. 3)  
«Электромагнитное излучение»



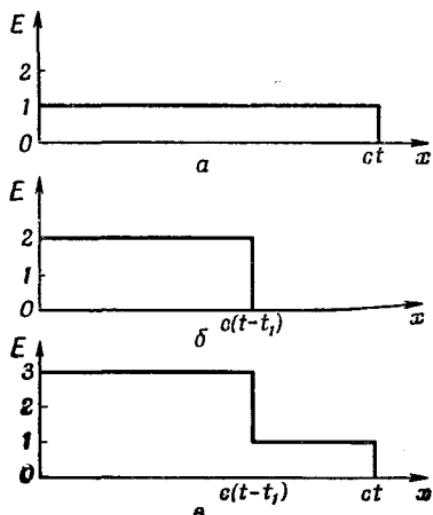
Фиг. 20.1. Зависимость электрического и магнитного полей от  $x$  через  $t$  сек после того, как была включена заряженная плоскость.

«волновой фронт» в  $ct$  распространяется вдоль  $x$  с постоянной скоростью  $c$ .

Теперь представим себе такую последовательность событий. На мгновение мы включаем ток единичной силы, а затем внезапно увеличиваем его силу втрое и поддерживаем его на этом уровне. Как же будут теперь выглядеть поля? Это можно узнать таким образом. Во-первых, надо представить ток с единичной силой, включенный при  $t=0$  и больше не менявшийся. Тогда поля при положительных  $x$  будут иметь вид, представленный на фиг. 20.2, а. Затем надо задать себе вопрос, что произойдет, если в момент  $t_1$  включить постоянный ток силой в две единицы?

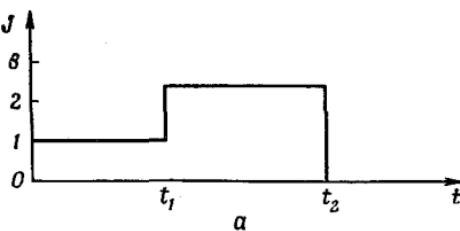
В этом случае поля станут вдвое большие, чем прежде, но отойдут по  $x$  только на промежуток  $c(t-t_1)$  (фиг. 20.2, б). Складывая эти два решения (по принципу суперпозиции), мы получаем, что сумма источников — это ток силой в одну единицу с момента нуль до момента  $t_1$  и ток в три единицы в более поздние моменты. В момент  $t$  поля меняются вдоль  $x$  так, как показано на фиг. 20.2, в.

Возьмем теперь более сложную задачу. Рассмотрим ток, имевший сначала силу в одну единицу, а затем достигший силы в три единицы и выключенный. Каковы будут поля от такого тока? Решение можно получить точно так же, как и раньше,

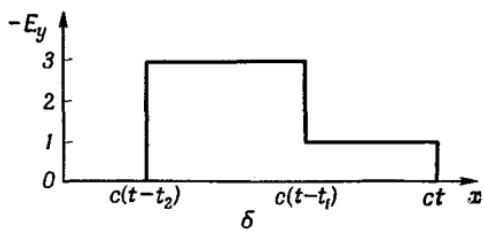


Фиг. 20.2. Электрическое поле плоскости с током.

а — одна единица тока включена в момент  $t=0$ ; б — две единицы тока включены в момент  $t=t_1$ ; в — суперпозиция а и б.



a



b

Фиг. 20.3. Если сила источника тока меняется так, как на рисунке (а), то в момент  $t$  электрическое поле как функция от  $x$  приобретает другой вид (б).

т. е. складывая решения трех разных задач. Сперва найдем поля постоянного тока единичной силы (этую задачу мы уже решали). Потом узнаем поля от тока двойной силы. И, наконец, возьмем решение для полей токов с силой в минус три единицы. Сложив все три решения, мы получим ток силой в одну единицу от  $t=0$  до какого-то более позднего момента, скажем, до  $t_1$ , затем ток силой в три единицы до момента  $t_2$ , а потом ток, равный нулю, т. е. выключенный. График зависимости тока от времени показан на фиг. 20.3, а. Складывая три решения для электрического поля, мы видим, что его изменения с расстоянием  $x$  в данный момент  $t$  подобны изображенным на фиг. 20.3, б. Поле в точности отображает собой ток. Распределение поля в пространстве есть точное отражение изменений тока со временем, но только нарисованное задом наперед. По мере того как проходит время, вся картина перемещается наружу со скоростью  $c$ , так что получается ломтик полей, который движется к положительным  $x$  и хранит в себе всю историю перемен тока. Если бы мы находились где-то на расстоянии многих километров, мы могли бы лишь по изменению электрического или магнитного поля безошибочно рассказать, как менялся ток в источнике.

Заметьте также, что даже после того, как вся деятельность в источнике прекратилась и все заряды исчезли, а токи сошли на нет, наш ломтик полей продолжает свое путешествие через пространство. Получается распределение электрических и магнитных полей, которое существует независимо от токов и зарядов. Это и есть тот новый эффект, который следует из полной системы уравнений Максвелла. Мы можем, если нужно, представить только что проделанный анализ в строго математической форме, написав, что электрическое поле в данном месте и в данное время пропорционально току в источнике, но не в то же время, а в более ранний период  $[t-(x/c)]$ . Можно написать

$$E_y(t) = -\frac{J(t-x/c)}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.3)$$

Вас удивит, если я скажу, что мы уже выводили это уравнение раньше (с другой точки зрения), когда говорили о теории показателя преломления. Тогда нам нужно было представить себе, какие поля создаст слой колеблющихся диполей в тонком плоском диэлектрике, если диполи приводятся в движение электрическим полем падающей электромагнитной волны. Задача наша состояла в расчете комбинированного поля начальной волны и волн, излучаемых колеблющимися диполями. Как же мы смогли тогда рассчитать поля, создаваемые движущимися зарядами, не зная уравнений Максвелла? Мы тогда приняли в качестве исходной (без вывода) формулу для полей излучения, создаваемых на больших расстояниях от ускоряемого точечного заряда. Если вы заглянете в гл. 31 (вып. 3), то увидите, что выражение (31.10) — это как раз наше выражение (20.3), которое мы только что написали. Хотя прежний наш вывод относился только к большим расстояниям от источника, теперь мы видим, что тот же результат верен и вблизи источника.

Сейчас мы хотим взглянуть в общем виде на поведение электрических и магнитных полей в пустом пространстве вдалеке от источников, т. е. от токов и зарядов. Очень близко от них (так близко, что источники за время запаздывания передачи не успевают сильно измениться) поля очень похожи на те, которые получились у нас в электростатике или магнитостатике. Но если перейти к таким большим расстояниям, что запаздывание станет заметным, то природа полей может радикально отличаться от тех решений, которые мы нашли. Когда поля значительно удаляются от всех источников, они начинают в некотором смысле приобретать свой собственный характер. Так что мы вправе приступить к обсуждению поведения полей в области, где нет ни токов, ни зарядов.

Предположим, что нас интересует род полей, которые могут существовать в областях, где  $\rho$  и  $j$  равны нулю. В гл. 18 мы видели, что физику уравнений Максвелла можно также выразить на языке дифференциальных уравнений для скалярного и векторного потенциалов:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (20.4)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (20.5)$$

Если  $\rho$  и  $j$  равны нулю, то эти уравнения упрощаются:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.6)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.7)$$

Стало быть, в пустом пространстве и скалярный потенциал  $\phi$ , и каждая компонента векторного потенциала  $\mathbf{A}$  удовлетворяют одному и тому же математическому уравнению. Пусть буквой  $\psi$  (пси) мы обозначили любую из четырех величин  $\phi, A_x, A_y, A_z$ ; тогда нам нужно изучить общие решения уравнения

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.8)$$

Его называют трехмерным волновым уравнением — трехмерным потому, что функция  $\psi$  может в общем случае зависеть от  $x, y$  и  $z$  и следует учитывать изменения по каждой из этих координат. Это становится ясным, если мы выпишем явно три члена оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.9)$$

В пустом пространстве электрические и магнитные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  тоже удовлетворяют волновому уравнению. Так, поскольку  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , дифференциальное уравнение для  $\mathbf{B}$  можно получить, взяв ротор от уравнения (20.7). Раз лапласиан — это скалярный оператор, то порядок операций вычисления лапласиана и ротора можно переставлять:

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{B}.$$

Точно так же можно переставлять и вычисление  $\text{rot}$  и  $\partial/\partial t$ :

$$\nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Из этого мы получаем следующее дифференциальное уравнение для  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.10)$$

Тем самым выясняется, что компонента магнитного поля  $\mathbf{B}$  удовлетворяет трехмерному волновому уравнению. Подобно этому, из того факта, что  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - d\mathbf{A}/dt$ , следует, что электрическое поле  $\mathbf{E}$  в пустом пространстве удовлетворяет трехмерному волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.11)$$

Все наши электромагнитные поля подчиняются одному и тому же уравнению (20.8). Можно еще спросить: каково самое общее решение этого уравнения? Однако прежде, чем решать этот трудный вопрос, сначала посмотрим, что можно сказать в общем случае о тех решениях, в которых по  $y$  и по  $z$  ничего не меняется. (Всегда сначала беритесь за простые случаи, чтобы

было видно, чего следует ожидать, а уж потом можете переходить к случаям посложней.) Предположим, что величина полей зависит только от  $x$ , так что по  $y$  и по  $z$  поля не меняются. Мы, следовательно, опять рассматриваем плоские волны и должны ожидать, что получатся те же результаты, что и в предыдущей главе. И мы действительно получим в точности те же самые ответы. Вы можете спросить: «Но зачем снова делать то же самое?» Это важно, во-первых, потому, что мы не доказали, что найденные нами волны представляют собой самое общее решение для плоских волн, и, во-вторых, потому что наши поля произошли от источника тока особого вида. Сейчас мы хотели бы выяснить такой вопрос: каков самый общий вид одномерной волны в пустом пространстве? Мы не узнаем этого, если будем рассматривать тот или иной источник особого вида, нам нужна большая общность. Кроме того, на этот раз мы будем работать не с интегральной формой уравнений, а с дифференциальной. Хотя итог одинаков, это прекрасный случай поупражняться в выкладках и убедиться в том, что не имеет значения, каким путем идти. Вы должны уметь действовать любым путем, потому что, паткнувшись на трудную задачу, вы часто обнаруживаете, что годится лишь один из многих способов расчета.

Можно было бы прямо рассмотреть решение волнового уравнения для какой-нибудь из электромагнитных величин. Вместо этого мы начнем прямо с начала, с уравнений Максвелла для пустого пространства, и вы убедитесь в их тесной связи с электромагнитными волнами. Так что мы отправляемся от уравнений (20.1), полагая, что в них токи и заряды равны нулю. Они обращаются в

$$\begin{aligned} \text{I. } & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \text{II. } & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \text{IV. } & c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Распишем первое уравнение покомпонентно:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (20.13)$$

Мы предположили, что по  $y$  и  $z$  поле не меняется, так что два последних члена равны нулю. Тогда, согласно (20.13),

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (20.14)$$

Решением его является постоянное в пространстве  $E_x$  (компонента электрического поля в направлении  $x$ ). Взглянув на урав-

нение IV в (20.12) и полагая, что  $\mathbf{B}$  тоже не изменяется вдоль  $y$  и  $z$ , вы убедитесь, что  $E_x$  постоянно и во времени. Таким образом может оказаться постоянное поле от какого-то заряженного конденсатора вдали от этого конденсатора. Нас сейчас не занимают такие неинтересные статические поля; мы интересуемся лишь динамически изменчивыми полями. А для динамических полей  $E_x=0$ .

Итак, мы пришли к важному результату о том, что при распространении плоских волн в произвольном направлении *электрическое поле должно располагаться поперек направления своего распространения*. Конечно, у него еще остается возможность каким-то сложным образом изменяться по координате  $x$ .

Поперечное поле  $\mathbf{E}$  можно всегда разбить на две компоненты, скажем на  $y$  и  $z$ . Так что сначала разберем случай наличия у электрического поля только одной поперечной компоненты. Для начала возьмем электрическое поле, направленное по  $y$ , т. е. с нулевой  $z$ -компонентой. Ясно, что, решив эту задачу, мы всегда сможем разобрать и тот случай, когда электрическое поле всюду направлено по  $z$ . Общее решение можно всегда представить в виде суперпозиции двух таких полей.

Какими простыми стали теперь наши уравнения! Теперь единственная ненулевая компонента электрического поля — это  $E_y$ , и все производные (кроме производных по  $x$ ) тоже равны нулю. Остатки уравнений Максвелла выглядят чрезвычайно просто.

Рассмотрим теперь второе из уравнений Максвелла [т. е. II из (20.12)]. Расписав компоненты  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ , получаем

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x};$$

здесь  $x$ -компонента  $\nabla \times \mathbf{E}$  равна нулю, потому что равны нулю производные по  $y$  и  $z$ ;  $y$ -компонента тоже равна нулю: первый член потому, что все производные по  $z$  равны нулю, а второй потому, что  $E_z=0$ . Единственная не равная нулю компонента  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  — это  $z$ -компонента, она равна  $\partial E_y / \partial x$ . Полагая, что три компоненты  $\nabla \times \mathbf{E}$  равны соответствующим компонентам  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ , мы заключаем, что

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \quad (20.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (20.16)$$

Поскольку временные производные как  $x$ -компоненты магнитного поля, так и  $y$ -компоненты магнитного поля равны нулю, то обе эти компоненты суть попросту постоянные поля и отвечают найденным раньше магнитостатическим решениям. Ведь кто-то мог оставить постоянный магнит возле того места, где распространяются волны. Мы будем игнорировать эти постоянные поля и положим  $B_x$  и  $B_y$  равными нулю.

Кстати, о равенстве нулю  $x$ -компонент поля  $\mathbf{B}$  мы должны были бы заключить и по другой причине. Поскольку дивергенция  $\mathbf{B}$  равна нулю (по третьему уравнению Максвелла), то мы, прибегая при рассмотрении электрического поля к тем же доводам, что и выше, должны были бы прийти к выводу, что продольная компонента магнитного поля не может изменяться вдоль  $x$ . А раз мы такими однородными полями в наших волновых решениях пренебрегаем, то нам следовало бы положить  $B_x$  равным нулю. В плоских электромагнитных волнах поле  $\mathbf{B}$ , равно как и поле  $\mathbf{E}$ , должно быть направлено поперек направления распространения самих волн.

Равенство (20.16) дает нам добавочное утверждение о том, что если электрическое поле имеет только  $y$ -компоненту, то магнитное поле имеет только  $z$ -компоненту. Значит,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  *перпендикулярны* друг другу. Именно это и наблюдалось в той волне особого типа, которую мы уже рассмотрели.

Теперь мы готовы использовать последнее из уравнений Максвелла для пустого пространства [т. е. IV из (20.12)]. Расписывая покомпонентно, имеем

$$\begin{aligned} c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_x &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_y &= c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_z &= c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Из шести производных от компонент  $\mathbf{B}$  только  $\partial B_z / \partial x$  не равна нулю. Так что три уравнения просто дают

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (20.18)$$

Итог всей нашей деятельности состоит в том, что отличны от нуля только по одной компоненте электрического и магнитного полей и эти компоненты обязаны удовлетворять уравнениям (20.16) и (20.18). Эти два уравнения можно объединить в одно, если первое из них проинтегрировать по  $x$ , а второе— по  $t$ ; тогда левые стороны уравнений совпадут (с точностью до

множителя  $c^2$ ). И мы обнаруживаем, что  $E_y$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (20.19)$$

Мы уже встречали это дифференциальное уравнение, когда изучали распространение звука. Это волновое уравнение для одномерных волн.

Заметьте, что в процессе вывода мы получили *больше*, чем содержится в (20.11). Уравнения Максвелла дали нам информацию и о том, что у электромагнитных волн есть только компоненты поля, расположенные под прямым углом к направлению распространения волн.

Вспомним все, что нам известно о решениях одномерного волнового уравнения. Если какая-то величина  $\psi$  удовлетворяет одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.20)$$

то одним из возможных решений является функция  $\psi(x, t)$ , имеющая вид

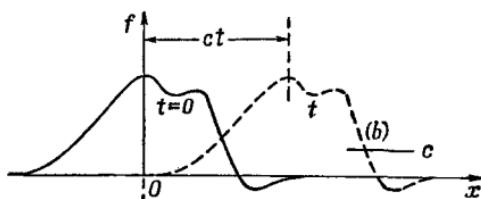
$$\psi(x, t) = f(x - ct), \quad (20.21)$$

т. е. функция *одной-единственной* переменной  $(x - ct)$ . Функция  $f(x - ct)$  представляет собой «жесткое» образование вдоль оси  $x$ , которое движется по направлению к положительным  $x$  со скоростью  $c$  (фиг. 20.4). Так, если максимум функции  $f$  приходится на нулевое значение аргумента, то при  $t=0$  максимум  $\psi$  оказывается при  $x=0$ . В более поздний момент, скажем при  $t=10$ , максимум  $\psi$  окажется в точке  $x=10$  с. Когда время движется, максимум тоже движется в сторону возрастания  $x$  со скоростью  $c$ .

Порой удобнее считать, что решение одномерного волнового уравнения является функцией от  $(t - x/c)$ . Однако в сущности это одно и то же, потому что любая функция от  $(t - x/c)$  — это также функция от  $(x - ct)$ :

$$F\left(t - \frac{x}{c}\right) = F\left(-\frac{x - ct}{c}\right) = f(x - ct).$$

Покажем, что  $f(x - ct)$  действительно есть решение волнового уравнения. Поскольку  $f$  зависит лишь от одной переменной — переменной  $(x - ct)$ , то мы будем через  $f'$  обозначать производную  $f$  по этой переменной, а через  $f''$  — вторую производную.



*Фиг. 20.4. Функция  $f(x - ct)$  представляет неизменный «конту́р», движущийся в направлении возрастания  $x$  со скоростью  $c$ .*

Дифференцируя (20.21) по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x - ct),$$

потому что производная от  $(x - ct)$  по  $x$  равна единице. Вторая производная  $\psi$  по  $x$  равна

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct). \quad (20.22)$$

А производные  $\psi$  по  $t$  дают

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= f'(x - ct)(-c), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +c^2 f''(x - ct).\end{aligned} \quad (20.23)$$

Мы убеждаемся, что  $\psi$  действительно удовлетворяет одномерному волновому уравнению.

Вы недоумеваете: «Откуда же вы взяли, что решением волнового уравнения является  $f(x - ct)$ ? Мне эта проверка задним числом совсем не нравится. Нет ли *прямого* пути отыскать решение?» Хорошо, вот вам прямой путь: знать решение. Можно, конечно, «испечь» по всей науке прямые математические аргументы, тем более, что мы знаем, каким должно быть решение, но с таким простым, как у нас, уравнением игра не стоит свеч. Со временем вы сами дойдете до того, что, как только увидите уравнение (20.20), тут же будете представлять себе  $f(x - ct) = \psi$  в качестве решения. (Подобно тому, как сейчас при виде интеграла от  $x^2 dx$  у вас сразу всплывает ответ  $x^3/3$ .)

На самом деле вы должны представлять себе немножко больше. Решением является не только любая функция от  $(x - ct)$ , но и функция от  $(x + ct)$ . Из-за того что в волновом уравнении  $c$  встречается только в виде  $c^2$ , изменение знака  $c$  ничего не меняет. И действительно, *самое общее* решение одномерного волнового уравнения — это сумма двух произвольных функций, одной от аргумента  $(x - ct)$ , а другой от  $(x + ct)$ :

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (20.24)$$

Первое слагаемое дает волну, движущуюся по направлению к положительным  $x$ , второе — произвольную волну, бегущую к отрицательным  $x$ . Общее решение получается наложением двух таких волн, существующих одновременно.

• • •

Следующий забавный вопрос решите сами. Возьмем функцию  $\psi$  в виде

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

Эта функция не имеет вида  $f(x-ct)$  или  $g(x+ct)$ . Но прямой подстановкой в (20.20) легко убедиться, что она удовлетворяет волновому уравнению. Но как же мы тогда смеем говорить, что общее решение имеет вид (20.24)?

• • •

Применяя эти выводы о решении волнового уравнения к  $y$ -компоненте электрического поля  $E_y$ , мы заключаем, что  $E_y$  может меняться по  $x$  произвольным образом. Всякое поле, которое существует в самом деле, можно всегда рассматривать как сумму двух картин. Одна волна плывет через пространство в каком-то направлении со скоростью  $c$ , причем связанное с нею магнитное поле перпендикулярно к электрическому; другая волна бежит в противоположном направлении с той же скоростью. Такие волны отвечают хорошо нам известным электромагнитным волнам — свету, радиоволнам, инфракрасному излучению, ультрафиолету, рентгеновским лучам и т. д. Мы уже изучали очень подробно излучение света. Так как все, чему мы тогда научились, применимо к любым электромагнитным волнам, то теперь нет нужды рассматривать подробно поведение этих волн.

Пожалуй, стоит лишь сделать несколько замечаний о поляризации электромагнитных волн. Раньше мы решили рассмотреть частный случай электрического поля с одной только  $y$ -компонентой. Имеется, конечно, и другое решение для волн, бегущих в направлении  $+x$  или  $-x$ , т. е. решение, при котором электрическое поле обладает одной лишь  $z$ -компонентой. Так как уравнения Максвелла линейны, общее решение для одномерных волн, распространяющихся в направлении  $x$ , есть сумма волн  $E_y$  и волн  $E_z$ . Общее решение суммируется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_y, E_z), \\ E_y &= f(x-ct) + g(x+ct), \\ E_z &= F(x-ct) + G(x+ct), \\ \mathbf{B} &= (0, B_y, B_z), \\ cB_z &= f(x-ct) - g(x+ct), \\ cB_y &= -F(x-ct) + G(x+ct). \end{aligned} \tag{20.25}$$

У подобных электромагнитных волн направление вектора  $\mathbf{E}$  неизменно: оно как-то произвольно смещается по спирали в плоскости  $yz$ . Но в каждой точке магнитное поле всегда перпендикулярно к электрическому и к направлению распространения.

Если присутствуют только волны, бегущие в одном направлении (скажем, в положительном направлении  $x$ ), то имеется

простое правило, говорящее об относительной ориентации электрического и магнитного полей. Правило состоит в том, что векторное произведение  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  (которое, как известно, является вектором, поперечным и к  $\mathbf{E}$ , и к  $\mathbf{B}$ ) указывает направление, куда бежит волна. Если  $\mathbf{E}$  совмещать с  $\mathbf{B}$  правым поворотом, то вектор поворота показывает направление вектора скорости волны. (Позже мы увидим, что вектор  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  имеет особый физический смысл: это вектор, описывающий течение энергии в электромагнитном поле.)

## § 2. Трехмерные волны

А теперь обратимся к трехмерным волнам. Мы уже знаем, что вектор  $\mathbf{E}$  удовлетворяет волновому уравнению. К тому же выводу легко прийти, отправляясь прямо от уравнений Максвелла. Предположим, что мы исходим из уравнения

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

и берем ротор от обеих частей:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}). \quad (20.26)$$

Вы помните, что ротор от ротора любого вектора может быть записан в виде суммы двух членов, один из которых содержит дивергенцию, а другой — лапласиан:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Но в пустом пространстве дивергенция  $\mathbf{E}$  равна нулю, так что остается только член с лапласианом. Далее, из четвертого уравнения Максвелла в пустом пространстве [см. (20.12)] производная по времени от  $c^2(\nabla \times \mathbf{B})$  равна второй производной  $\mathbf{E}$  по  $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

Тогда (20.26) обращается в

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Это и есть трехмерное волновое уравнение. Расписанное во всей красе, оно выглядит так:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.27)$$

Как же нам найти общее решение этого уравнения? Ответ таков: все решения трехмерного волнового уравнения могут быть представлены в виде суперпозиции уже найденных нами одномерных решений. Мы получили уравнение для волн, бе-

гущих в направлении  $x$ , предположив, что поле не зависит от  $y$  и  $z$ . Конечно, имеются и другие решения, в которых поля не зависят от  $x$  и  $z$ , — это волны, идущие в направлении  $y$ . Затем существуют решения, не зависящие от  $x$  и  $y$ ; они представляют волны, движущиеся в направлении  $z$ . Или в общем случае, поскольку мы записали наши уравнения в векторной форме, трехмерное волновое уравнение может иметь решения, которые являются плоскими волнами, бегущими, вообще говоря, в любом направлении. Кроме того, раз уравнения линейны, то одновременно может распространяться сколько угодно плоских волн, бегущих в каких-угодно направлениях. Таким образом, самое общее решение трехмерного волнового уравнения является суперпозицией всех видов плоских волн, бегущих во всех возможных направлениях.

Попытайтесь представить себе, как выглядят сейчас электрические и магнитные поля в нашей аудитории. Прежде всего здесь имеется постоянное магнитное поле; оно возникло от токов внутри нашей Земли, от постоянного земного магнетизма. Затем здесь имеются какие-то нерегулярные, почти статические электрические поля. Они скорей всего созданы электрическими зарядами, появляющимися из-за того, что кто-то ездает на своем стуле или трется рукавами о стол (словом, в результате трения). Кроме того, здесь есть еще и другие магнитные поля, вызванные переменными токами в электропроводке, — поля, которые меняются с частотой в 50 Гц в такт с работой генератора на городской электростанции. Но еще больший интерес представляют электрические и магнитные поля, меняющиеся быстрее. К примеру, там, где свет падает из окна, освещая стены и пол, имеются небольшие колебания электрического и магнитного полей, перемещающиеся за секунду на 300 000 км. По комнате еще распространяются инфракрасные волны, идущие от ваших горячих голов к холодной доске с формулами. Да! Мы еще позабыли об ультрафиолетовом свете, о рентгеновских лучах и о радиоволнах, которые проносятся по комнате.

Через комнату скользят электромагнитные волны, которые несут в себе джазовую музыку. Проносятся и волны, модулированные серией импульсов, представляющих картины событий, которые происходят сейчас в других местах света, или картины воображаемых явлений, происходящих при растворении воображаемого аспирина в воображаемых желудках. Чтобы убедиться в реальности этих волн, достаточно просто включить электронную аппаратуру, которая превращает эти волны в изображения и звуки.

Если мы займемся дальнейшим анализом еще более слабых колебаний, то заметим мельчайшие электромагнитные волны, пришедшие в нашу комнату с огромных расстояний. В ней существуют мельчайшие колебания электрического поля, гребни

которых отстоят друг от друга примерно на фут, а источник их удален отсюда на миллионы миль. Эти волны передаются на Землю с межпланетной станции Маринер II, которая как раз проходит сейчас где-то мимо Венеры. Ее сигналы несут сводку всей той информации, которую ей удалось ухватить у планеты (информации, полученной от электромагнитных волн, дошедших от Венеры к станции).

И есть здесь еще едва заметные колебания электрических и магнитных полей от волн, возникших в миллиардах световых лет отсюда, в галактиках, находящихся в удаленнейших уголках Вселенной. В том, что это действительно так, убедились, «заполнив комнату проволокой», т. е. соорудив антенны величиной с эту комнату. Так были замечены радиоволны, дошедшие до нас из мест, находящихся за пределами досягаемости крупнейших оптических телескопов. Кстати, даже эти оптические телескопы всего лишь простые собиратели электромагнитных волн. А то, что мы называем звездами, лишь заключения — заключения, выведенные из единственной физической реальности, которую мы до сих пор от них получали, из тщательного изучения бесконечно сложных волновых движений электрических и магнитных полей, достигающих Земли.

В аудитории имеются, конечно, еще другие разные поля — от молний, вспыхивающих где-то вдалеке отсюда, от заряженных частиц в космических лучах в тот момент, когда они проносятся сквозь комнату, и еще поля и еще... Представляете, какая сложная штука все эти электрические поля в пространстве вокруг нас! И все они подчиняются трехмерному волновому уравнению.

### § 3. Научное воображение

Я просил вас представить себе электрические и магнитные поля. Что вы для этого сделали? Знаете ли вы, как это нужно сделать? И как я сам представляю себе электрическое и магнитное поля? Что я на самом деле при этом вижу? Что требуется от научного воображения? Отличается ли оно чем-то от попытки представить себе комнату, полную невидимых ангелов? Нет, это не похоже на такую попытку.

Чтобы получить представление об электромагнитном поле, требуется более высокая степень воображения. Почему? Да потому что для того, чтобы невидимые ангелы стали доступны пониманию, мне нужно только чуть-чуть изменить их свойства — я делаю их слегка видимыми, и тогда я уже могу увидеть и форму их крыльев, и их тела, и их nimбы. Как только мне удалось представить себе видимого ангела, то необходимая для дальнейшего абстракция (состоящая в том, чтобы почти невидимых ангелов представить себе совершенно невидимыми) оказывается сравнительно легким делом.

Вы можете тоже сказать: «Профессор, дайте мне, пожалуйста, приближенное описание электромагнитных волн, пусть даже слегка неточное, но такое, чтобы я смог увидеть их так, как я могу увидеть почти невидимых ангелов. И я видоизменю эту картину до нужной абстракции».

Увы, я не могу этого сделать для вас. Я просто не знаю как. У меня нет картины этого электромагнитного поля, которая была бы хоть в какой-то степени точной. Я узнал об электромагнитном поле давным-давно, 25 лет тому назад, когда я был на вашем месте, и у меня на 25 лет больше опыта размышлений об этих колеблющихся волнах. Когда я начинаю описывать магнитное поле, движущееся через пространство, то говорю о полях  $E$  и  $B$ , делаю руками волнистые движения и вы можете подумать, что я способен их видеть. А на самом деле, что я при этом вижу? Вижу какие-то смутные, туманные, волнистые линии, на них там и сям надписано  $E$  и  $B$ , а у других линий имеются словно какие-то стрелки, то здесь, то там на них есть стрелки, которые исчезают, едва в них взглядишься. Когда я рассказываю о полях, проносящихся сквозь пространство, в моей голове катастрофически перепутываются символы, нужные для описания объектов, и сами объекты. Я не в состоянии дать картину, хотя бы приблизительно похожую на настоящие волны. Так что, если вы сталкиваетесь с такими же затруднениями при попытках представить поле, не терзайтесь, дело обычное.

Наша наука предъявляет воображению немыслимые требования. Степень воображения, которая теперь требуется в науке, несравненно превосходит то, что требовалось для некоторых прежних идей. Нынешние идеи намного труднее вообразить себе. Правда, мы используем для этого множество средств. В ход пускаются математические уравнения и правила, рисуются различные картинки. Вот сейчас я ясно осознаю, что всегда, когда я завожу речь об электромагнитном поле в пространстве, фактически перед моим взором встает своего рода суперпозиция всех тех диаграмм на эту тему, которые я когда-либо видывал. Я не воображаю себе маленьких пучков линий поля, снующих туда и сюда; они не нравятся мне потому, что если бы я двигался с иной скоростью, то они бы исчезли. Я не всегда вижу и электрические, и магнитные поля, потому что временами мне кажется, что гораздо правильнее была бы картина, включающая векторный и скалярный потенциалы, ибо последние, пожалуй, имеют больший физический смысл, чем колебания полей.

Быть может, вы считаете, что остается единственная надежда на математическую точку зрения. Но что такое математическая точка зрения? С математической точки зрения в каждом месте пространства существует вектор электрического поля и вектор магнитного поля, т. е. с каждой точкой связаны шесть

чисел. Способны ли вы вообразить шесть чисел, связанных с каждой точкой пространства? Это слишком трудно. А можете вы вообразить хотя бы одно число, связанное с каждой точкой пространства? Я лично не могу! Я способен себе представить такую вещь, как температура в каждой точке пространства. Но это, по-видимому, вообще вещь представимая: имеется теплота и холод, меняющиеся от места к месту. Но, честное слово, я не способен представить себе число в каждой точке.

Может быть, поэтому стоит поставить вопрос так: нельзя ли представить электрическое поле в виде чего-то сходного с температурой, скажем, похожего на смещения куска студня? Сначала вообразим себе, что мир наполнен тонкой студенистой массой, а поля представляют собой какие-то искривления (скажем, растяжения или повороты) этой массы. Вот тогда можно было бы себе мысленно вообразить поле. А после того, как мы «увидели», на что оно похоже, мы можем отвлечься от студня. Именно это многие и пытались делать довольно долгое время. Максвелл, Ампер, Фарадей и другие пробовали таким способом понять электромагнетизм. (Порой они называли абстрактный студень «эфиром».) Но оказалось, что попытки вообразить электромагнитное поле подобным образом на самом деле препятствуют прогрессу. К сожалению, наши способности к абстракциям, к применению приборов для обнаружения поля, к использованию математических символов для его описания и т. д. ограничены. Однако поля в известном смысле — вещь вполне реальная, ибо, закончив возню с математическими уравнениями (все равно, с иллюстрациями или без, с чертежами или без них, пытаясь представить поле въяве или не делая таких попыток), мы все же можем создать приборы, которые поймают сигналы с космической ракеты или обнаружат в миллиарде световых лет от нас галактику, и тому подобное.

Вопрос о воображении в науке наталкивается зачастую на непонимание у людей других специальностей. Они принимаются испытывать наше воображение следующим способом. Они говорят: «Вот перед вами изображены несколько людей в некоторой ситуации. Как вы представляете, что с ними сейчас случится?» Если вы ответите: «Не могу себе представить», они могут счесть вас за человека со слабым воображением. Они проглядят при этом тот факт, что все, что допускается воображать в науке, должно согласовываться со всем прочим, что нам известно: что электрические поля и волны, о которых мы говорим, это не просто удачные мысли, которые мы вызываем в себе, если нам этого хочется, а идеи, которые обязаны согласовываться со всеми известными законами физики. Недопустимо всерьез воображать себе то, что очевидным образом противоречит известным законам природы. Так что наш род воображения — весьма трудная игра. Надо иметь достаточно вообра-

жения, чтобы думать о чем-то никогда прежде не виденном, никогда прежде не слышанном. В то же время приходится, так сказать, надевать на мысли смирительную рубашку, ограничивать их условиями, вытекающими из наших знаний о том, какому пути на самом деле следует природа. Проблема создания чего-то, что является совершенно новым и в то же время согласуется со всем, что мы видели раньше,— проблема чрезвычайно трудная.

Но раз уж зашла об этом речь, я хочу остановиться на том, в состоянии ли мы себе представить *красоту*, которую мы не можем *видеть*. Это интересный вопрос. Когда мы глядим на радугу, она нам кажется прекрасной. Каждый, увидав ее, воскликнет: «О радуга!». (Смотрите, как научно я подхожу к вопросу. Я осторегаюсь именовать что-то восхитительным, пока нет экспериментального способа определить это.) Ну, а как мы описывали бы радугу, если бы были слепыми? А ведь мы *слепы*, когда измеряем коэффициент отражения инфракрасных лучей от хлористого натрия или когда говорим о частоте волн, пришедших от некоторой невидимой глазу галактики. Тогда мы чертим график, рисуем диаграмму. К примеру, для радуги подобным графиком была бы зависимость интенсивности излучения от длины волны, измеренная спектрофотометром под всевозможными углами к горизонту. Вообще говоря, подобные измерения должны были бы приводить к довольно пологим кривым. И вот в один прекрасный день кто-то обнаружил бы, что при какой-то определенной погоде, под некоторыми углами к горизонту спектр интенсивности как функция длины волны начал себя вести странно — у него появился пик. Если бы угол наклона прибора чуть-чуть изменился, максимум пика перешел бы от одной длины волны к другой. И вот через некоторое время в физическом журнале для слепых появилась бы техническая статья под названием «Интенсивность излучения как функция угла при некоторых метеоусловиях». В этой статье был бы график типа, показанного на фиг. 20.5. «Автор заметил,— говорилось бы, быть может, в статье,— что под большими углами основная часть радиации приходится на длинные волны, а под меньшими максимум излучения смещается к коротким волнам». (Ну, а мы бы сказали, что под углом  $40^\circ$  свет преимущественно зеленый, а под углом  $42^\circ$  — красный.)

Но находите ли вы график, приведенный на фиг. 20.5, восхитительным? В нем ведь содержится существенно больше различных деталей, чем мы в состоянии постичь, когда видим радугу: наши глаза не могут схватить доподлинную форму спектра. А вот глазам радуга все же кажется восхитительной. Хватает ли у вас воображения, чтобы в спектральных кривых увидеть всю ту красоту, которую мы видим, смотря на радугу? У меня — нет.



*Фиг. 20.5. Зависимость интенсивности электромагнитных волн от длины волны под тремя углами (отсчитываемыми от направления, противоположного направлению на Солнце).*

*Доступно наблюдению лишь в определенных метеорологических условиях.*

Но представим себе, что у меня имеется график зависимости коэффициента отражения кристаллов хлористого натрия от длины волны в инфракрасном участке спектра и от угла. Я могу вообразить себе, как это представилось бы моим глазам, обладай они способностью видеть в инфракрасном свете. Должно быть, это был бы какой-то яркий, насыщенный «зеленый цвет», на который накладывались бы отражения от поверхностей «металлически-красных» тонов. Это выглядело бы поистине великолепно, но я не знаю, способен ли я, взглянув на график коэффициента отражения  $\text{NaCl}$ , снятый на каком-то приборе, сказать, что он столь же прелестен.

Но, с другой стороны, хоть мы и не можем видеть красоту тех или иных частных измерений, мы *можем* утверждать, что постигаем своеобразную красоту уравнений, описывающих всеобщие физические законы. Например, в волновом уравнении (20.9) очень красива та правильность, с какой в нем расположены  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . И эта приятная симметрия появления  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  намекает на ту величественную красоту, которая таится в четырех равнозначных координатах, в возможности того, что у пространства есть четырехмерная симметрия, в возможности проанализировать ее и развить специальную теорию относительности. Так что существует еще интеллектуальная красота, ассоциируемая с уравнениями.

#### § 4. Сферические волны

Мы видели, что существуют решения волнового уравнения, отвечающие плоским волнам, и что любая электромагнитная волна может быть описана как суперпозиция многих плоских волн. В определенных случаях, однако, удобнее описывать волновое поле в другой математической форме. Я хотел бы сейчас разобрать теорию сферических волн — волн, которые соответствуют сферическим поверхностям, расходящимся из некоторого центра. Когда вы бросаете камень в пруд, то по водной глади побежит рябь в виде круговых волн — это двумерные волны. Сферические волны похожи на них, только распространяются они во всех трех измерениях.

Прежде чем начать описание сферических волн, немного займемся математикой. Пусть имеется функция, зависящая только

от радиального расстояния  $r$  точки от начала координат, иными словами, сферически симметричая функция. Обозначим ее  $\psi(r)$ , где под  $r$  подразумевается

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

т. е. расстояние от начала координат. Чтобы узнать, какие функции  $\psi(r)$  удовлетворяют волновому уравнению, нам понадобится выражение для лапласиана  $\psi$ . Значит, нам нужно найти сумму вторых производных  $\psi$  по  $x$ , по  $y$  и по  $z$ . Через  $\psi'(r)$  мы обозначим первую производную  $\psi$  по  $r$ , а через  $\psi''(r)$  — вторую.

Сначала найдем производные по  $x$ . Первая производная равна

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Вторая производная по  $x$  равна

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi'' \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \psi' \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right).$$

Частные производные  $r$  по  $x$  можно получить из

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right),$$

так что вторая производная  $\psi$  по  $x$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.28)$$

Точно так же и

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \psi', \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.30)$$

Лапласиан равен сумме этих трех производных. Вспоминая, что  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , получаем

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r). \quad (20.31)$$

Часто бывает удобнее записывать уравнение в следующей форме:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\psi). \quad (20.32)$$

Проделав дифференцирование, указанное в (20.32), вы убедитесь, что правая часть здесь та же, что и в (20.31).

Если мы хотим рассматривать сферически симметричные поля, которые могут распространяться как сферические волны, то величины, описывающие поля, должны быть функцией как  $r$ ,

так и  $t$ . Предположим, что нам нужно знать, какие функции  $\psi(r, t)$  являются решениями трехмерного волнового уравнения

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0. \quad (20.33)$$

Поскольку  $\psi(r, t)$  зависит от пространственных координат только через  $r$ , то в качестве лапласиана можно использовать выражение (20.32). Но для точности, поскольку  $\psi$  зависит также и от  $t$ , нужно дифференцирование по  $r$  записывать в виде частной производной. Волновое уравнение обращается в

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0.$$

Его и предстоит нам решать. Оно выглядит сложнее, чем в случае плоских волн. Но заметьте, что если умножить это уравнение на  $r$ , то получится

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) = 0. \quad (20.34)$$

Это уравнение говорит нам, что функция  $r\psi$  удовлетворяет одномерному волновому уравнению по переменной  $r$ . Используя часто подчеркивавшийся нами общий принцип, что у одних и тех же уравнений и решения одни и те же, мы приходим к выводу, что если  $r\psi$  окажется функцией одного только  $(r - ct)$ , то оно явится решением уравнения (20.34). Итак, мы обнаруживаем, что сферические волны обязаны иметь вид

$$r\psi(r, t) = f(r - ct).$$

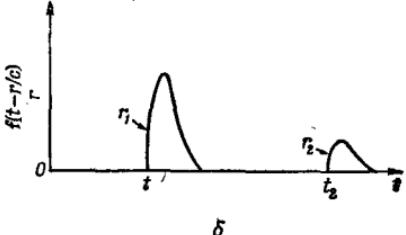
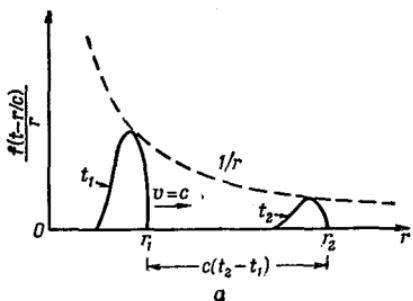
Или, как мы видели раньше, можно в равной степени считать  $r\psi$  имеющим форму

$$r\psi = f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Деля на  $r$ , находим, что характеризующая поле величина  $\psi$  (чем бы она ни была) имеет вид

$$\psi = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (20.35)$$

Такая функция представляет сферическую волну общего вида, распространяющуюся от начала координат со скоростью  $c$ . Если на минуту забыть об  $r$  в знаменателе, то амплитуда волны как функция расстояния от начала координат в каждый данный момент обладает определенной формой, которая распространяется со скоростью  $c$ . Однако  $r$  в знаменателе говорит нам, что по мере того, как волна распространяется, ее амплитуда убывает пропорционально  $1/r$ . Иными словами, в отличие от плоской волны, амплитуда которой остается при движении



Фиг. 20.6. Сферическая волна  $\psi = f(t-r/c)/r$ .

*a* — зависимость  $\psi$  от  $r$  при  $t=t_1$  и та же волна в более поздний момент времени  $t_2$ ;  
*б* — зависимость  $\psi$  от  $t$  при  $r=r_1$  и та же самая волна на расстоянии  $r_2$ .

все время одной и той же, амплитуда сферической волны беспрерывно спадает (фиг. 20.6). Этот факт легко понять из простых физических соображений.

Мы знаем, что плотность энергии в волне зависит от квадрата амплитуды волны. По мере того как волна разбегается, ее энергия расплывается на все большую и большую площадь, пропорциональную квадрату радиуса волны. Если полная энергия сохраняется, плотность энергии должна убывать как  $1/r^2$ , а амплитуда — как  $1/r$ . Поэтому формула (20.35) для сферической волны вполне «разумна».

Мы игнорировали другое возможное решение одномерного волнового уравнения

$$r\psi = g \left( t + \frac{r}{c} \right)$$

или

$$\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}.$$

Это тоже сферическая волна, но бегущая *внутрь*, от больших  $r$  к началу координат.

Тем самым мы делаем некоторое специальное предположение. Мы утверждаем (без какого-либо доказательства), что волны, создаваемые источником, всегда бегут только *от* него. Поскольку мы знаем, что волны вызываются движением зарядов, мы настраиваемся на то, что волны бегут от зарядов. Было бы довольно странно представлять, что прежде чем заряды были приведены в движение, сферическая волна уже вышла из бесконечности и прибыла к зарядам как раз в тот момент, когда они начали шевелиться. Такое решение возможно, но опыт показывает, что, когда заряды ускоряются, волны распространяются *от* зарядов, а не к ним. Хотя уравнения Максвелла предоставляют обеим волнам равные возможности, мы привлекаем *добавочный факт*, основанный на опыте, что «физическими смыслом» обладает только расходящаяся волна.

Нужно, однако, заметить, что из этого добавочного предположения вытекает интересное следствие: мы теряем при этом симметрию относительно времени, которая есть у уравнений Максвелла. Как исходные уравнения для  $E$  и  $B$ , так и вытекающие из них волновые уравнения при изменении знака  $t$  не меняются. Эти уравнения утверждают, что любому решению, которое отвечает волне, бегущей в одну сторону, отвечает столь же правильное решение для волны, бегущей в обратную сторону. И утверждая, что мы намерены брать в расчет только расходящиеся сферические волны, мы делаем тем самым важное дополнительное предположение. (Очень тщательно изучалась такая электродинамика, в которой обходятся без этого дополнительного предположения. Как это ни удивительно, но во многих обстоятельствах она *не приводит* к физически абсурдным результатам. Однако обсуждение этих идей теперь увлекло бы нас чересчур в сторону. Мы поговорим об этом подробнее в гл. 28.)

Нужно упомянуть еще об одном важном факте. В нашем решении для расходящейся волны (20.35) функция  $\psi$  в начале координат бесконечна. Это как-то необычно. Мы бы предпочли иметь такие волновые решения, которые гладки повсюду. Наше решение физически относится к такой ситуации, когда в начале координат располагается источник. Значит, мы нечаянно сделали одну ошибку: наша формула (20.35) не является решением свободного волнового уравнения (20.33) *повсюду*; уравнение (20.33) с нулем в правой части решено повсюду, кроме начала координат. Ошибка вкрадлась оттого, что некоторые действия при выводе уравнения при  $r=0$  «незаконны».

Покажем, что ту же самую ошибку легко сделать и в электростатике. Допустим, что нам нужно решить уравнение электростатического потенциала в пустом пространстве  $\nabla^2\varphi=0$ . Лапласиан равен нулю, потому что мы предположили, что никаких зарядов нигде нет. Но как обстоит дело со сферически симметричным решением уравнения, т. е. с функцией  $\varphi$ , зависящей только от  $r$ ? Используя для лапласиана формулу (20.32), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = 0.$$

Умножив это выражение на  $r$ , приходим к уже интегрировавшемуся уравнению

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = 0.$$

Проинтегрировав один раз по  $r$ , мы увидим, что первая производная  $r\varphi$  равна постоянной, которую мы обозначим через  $a$ :

$$\frac{d}{dr} (r\varphi) = a.$$

Еще раз проинтегрировав, мы получим для  $r\phi$  формулу

$$r\phi = ar + b,$$

где  $b$  — другая постоянная интегрирования. Итак, мы обнаружили, что решение для электростатического потенциала в пустом пространстве имеет вид

$$\phi = a + \frac{b}{r}.$$

Что-то здесь явно не так. Мы же знаем решение для электростатического потенциала в области, где нет электрических зарядов: потенциал всюду постоянен. Это соответствует первому слагаемому в решении. Но имеется еще и второй член, подсказывающий нам, что в потенциал дает вклад нечто, меняющееся как  $1/r$ . Мы знаем, однако, что подобный потенциал соответствует точечному заряду в начале координат. Стало быть, хоть мы и думали, что нашли решение для потенциала в пустом пространстве, наше решение фактически дает нам также поле точечного источника в начале координат. Вы замечаете сходство между тем, что сейчас произошло, и тем, что произошло тогда, когда мы искали сферически симметричное решение волнового уравнения? Если бы в начале координат действительно не было ни зарядов, ни токов, то не возникли бы и сферически расходящиеся волны. Сферические волны должны вызываться источниками в начале координат. В следующей главе мы исследуем связь между излучаемыми электромагнитными волнами и вызывающими их токами и напряжениями.

## РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С ТОКАМИ И ЗАРЯДАМИ

§ 1. Свет и электромагнитные волны

### § 1. Свет и электромагнитные волны

В предыдущей главе мы видели, что среди решений уравнений Максвелла есть электромагнитные волны. Свету, радио, рентгеновским лучам и т. д. отвечают электромагнитные волны, отличающиеся только длиной волны. Мы уже подробно изучали различные явления, связанные со светом. В этой главе мы хотим связать оба вопроса и показать, что уравнения Максвелла действительно могли служить основой для изучения свойств света.

Наше изучение света мы начали с того, что выписали уравнение для электрического поля, создаваемого зарядом, который мог как-то произвольно двигаться. Уравнение имело вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right], \quad (21.1)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}$$

[см. гл. 28 (вып. 3), выражение (28.3)]\*.

Если заряд движется произвольным образом, то электрическое поле, которое существует в некоторой точке, в *настоящий момент* зависит только от положения и движения заряда в *более ранний момент времени*, отстающий на интервал, необходимый для того, чтобы свет, двигаясь со скоростью  $c$ , прошел расстояние  $r'$  от заряда до точки поля. Иными словами, если вам нужно знать электрическое поле в точке (1) в момент  $t$ , вы должны подсчитать положение (2') заряда и его движение в момент  $(t-r'/c)$  [где  $r'$  — расстояние до точки (1)] из положения заряда (2') в момент  $(t-r'/c)$ .

§ 2. Сферические волны от точечного источника

§ 3. Общее решение уравнений Максвелла

§ 4. Поля колеблющегося диполя

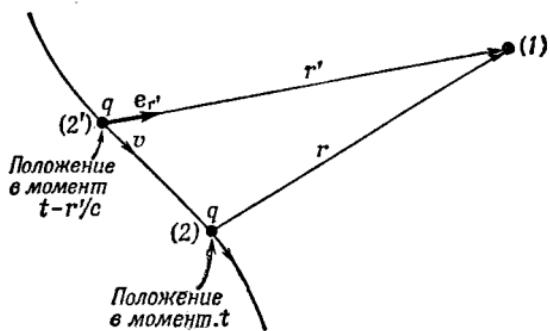
§ 5. Потенциалы движущегося заряда; общее решение Льенара и Вихерта

§ 6. Потенциалы заряда, движущегося с постоянной скоростью; формула Лоренца

**Повторить:** гл. 28 (вып. 3) «Электромагнитное излучение»; гл. 31 (вып. 3) «Как возникает показатель преломления»; гл. 34 (вып. 3) «Релятивистские явления в излучении»

\* С обратным знаком. См. дальше.— Прим. ред.

Фиг. 21.1. Поля в точке (1) в момент  $t$  зависят от того положения (2'), которое заряд  $q$  занимал в момент  $(t - r'/c)$ .



Штрихи здесь напоминают вам, что  $r'$  — это так называемое «запаздывающее расстояние» от точки (2') к точке (1), а вовсе не теперешнее расстояние между точкой (2) — положением заряда в момент  $t$  — и точкой поля (1) (фиг. 21.1). Заметьте, что сейчас по-иному определяется *направление* единичного вектора  $e_r$ . В гл. 28 и 34 (вып. 3) мы усматривались, что  $r$  (и, стало быть,  $e_r$ ) будет показывать *на* источник. Теперь же мы следуем определению, используемому в формулировке закона Кулона, по которому  $r$  направлено *от* заряда [в точке (2)] к точке (1) поля. Единственное отличие в том, что новое  $r$  (и  $e_r$ ) противоположно старому.

Мы видели также, что если скорость заряда  $v$  всегда много меньше  $c$  и если рассматриваются только точки, сильно удаленные от заряда, так что в (21.1) существенно лишь последнее слагаемое, то поля можно также записать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[ \begin{array}{l} \text{проекция ускорения заряда в момент } t - \frac{r'}{c} \\ \text{на направление, поперечное к } r' \end{array} \right] \quad (21.1')$$

и

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

Рассмотрим более детально, что дает полное уравнение (21.1). Вектор  $\mathbf{e}_{r'}$  — это единичный вектор, направленный от «запаздывающей» точки (2') к точке (1). Тогда первое слагаемое дает то, чего следовало бы ожидать, если бы заряд в своем «запаздывающем» положении создавал кулоново поле, — это можно назвать «запаздывающим кулоновым полем». Электрическое поле обратно пропорционально квадрату расстояния и направлено *от* «запаздывающего» положения заряда (т. е. по вектору  $\mathbf{e}_{r'}$ ).

Но это только первое слагаемое. Остальные напоминают нам, что законы электричества *не* утверждают, что все поля, оставаясь, как и были, статическими, начинают просто запаздывать (а такое утверждение порой приходится слышать). К «запаздывающему кулонову полю» надо добавить два других слагаемых.

Второе говорит, что к запаздывающему кулонову полю надо сделать «поправку», равную *быстроте изменения* запаздывающего кулонова поля, умноженной на  $r'/c$ , т. е. на само запаздывание. Этот множитель как бы стремится скомпенсировать запаздывание в первом. Два первых слагаемых соответствуют вычислению «запаздывающего кулонова поля» и затем экстраполяции его в будущее, на время  $r'/c$ , т. е. *как раз к моменту t!* Экстраполяция линейна, как если бы мы предположили, что «запаздывающее кулоново поле» будет по-прежнему изменяться со скоростью, рассчитанной для заряда в точке (2'). Если поле меняется медленно, эффект запаздывания почти полностью сводится на нет поправочным слагаемым, и оба слагаемых вместе приводят к величине электрического поля, очень близкой к «мгновенному кулонову полю» заряда, находящегося в точке (2).

Наконец, в формуле (21.1) имеется еще третье слагаемое — вторая производная единичного вектора  $e_r$ . Изучая явление света, мы по существу использовали тот факт, что вдали от заряда два первых слагаемых убывают как обратный квадрат расстояния и на больших расстояниях оказываются слишком слабыми по сравнению с третьим, которое убывает как  $1/r$ . Поэтому мы сосредоточили наше внимание на последнем слагаемом и показали, что оно (опять-таки на больших расстояниях) пропорционально компоненте ускорения заряда, попечерной к линии зрения. (Кроме того, почти всюду ранее мы рассматривали только случай, когда заряды двигались нерелятивистски. Релятивистские эффекты рассматривались только в гл. 34, вып. 3.)

Теперь нужно попробовать связать эти две вещи. У нас есть уравнения Максвелла и есть формула (21.1) для поля точечного заряда. Естественно спросить, эквивалентны ли они? Если мы сможем вывести (21.1) из уравнений Максвелла, то действительно поймем связь света с электромагнетизмом. Вывод ее и есть главная цель этой главы.

Выясняется, что полного вывода мы сделать не можем — чересчур сложные математические детали не позволят нам выйти с поля боя без потерь. Но все же мы подойдем к цели достаточно близко, так что вы легко поймете, как может быть установлена интересующая нас связь. Мы опустим лишь некоторые математические детали. Математика этой главы может показаться некоторым из вас довольно сложной, и, возможно, вам даже станет скучно следить внимательно за выводом. Но мы все же считаем, что очень важно связать то, что вы учили раньше, с тем, что вы изучаете сейчас, или по крайней мере продемонстрировать, как эта связь может быть установлена. Если вы не забыли прежние главы, то обратите внимание на то, что всякий раз, как мы принимали некоторое высказывание за

исходную точку обсуждения, мы заботливо объясняли, является ли это высказывание новым «допущением», т. е. отражает ли оно основной закон природы или же его можно в конечном счете вывести из каких-то других законов. Дух этих лекций обязывает нас обсудить связь между светом и уравнениями Максвелла. Может быть, вам будет кое-где и трудно — с этим уж ничего не поделаешь: другого пути не существует.

## § 2. Сферические волны от точечного источника

В гл. 18 мы установили, что уравнения Максвелла можно решать подстановкой

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.2)$$

и

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.3)$$

где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  обязаны удовлетворять уравнениям

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21.4)$$

и

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (21.5)$$

и, кроме того, условию

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21.6)$$

Найдем теперь решение уравнений (21.4) и (21.5). Для этого надо уметь решать уравнение

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s, \quad (21.7)$$

где величина  $s$  (которая называется источником) известна. Ясно, что для уравнения (21.4)  $s$  соответствует  $\rho/\epsilon_0$ , а  $\psi$  — это  $\varphi$ , а для уравнения (21.5)  $s$  соответствует  $j_x/\epsilon_0 c^2$ , если  $\psi$  — это  $A_x$ , и т. д. Но нас интересует чисто математическая задача решения (21.7) безотносительно к тому, каков физический смысл  $\psi$  и  $s$ .

Там, где  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  равны нулю (это место называется «пустотой»), там потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  и поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  удовлетворяют трехмерному волновому уравнению без источников; математическая форма этого уравнения такова:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (21.8)$$

В гл. 20 мы видели, что решения этого уравнения могут представлять волны разных сортов: плоские волны, бегущие в  $x$ -направлении  $\Psi = f(t - x/c)$ ; плоские волны, бегущие вдоль  $y$  или вдоль  $z$  или в любом другом направлении; сферические волны вида

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (21.9)$$

(Решения можно записать иначе — например в виде цилиндрических волн, разбегающихся от оси.)

Мы тогда заметили, что физически формула (21.9) относится не совсем к пустоте: в начале координат должны быть какие-то заряды, иначе расходящаяся волна не получилась бы. Иными словами, формула (21.9) есть решение уравнения (21.8) всюду, кроме непосредственной окрестности точки  $r=0$ , где (21.9) представляет собой решение полного уравнения (21.7), в правой части которого стоят источники. Давайте теперь посмотрим, что это за уравнение, т. е. какого рода источник  $s$  в уравнении (21.7) должен вызвать волну типа (21.9).

Предположим, что имеется сферическая волна (21.9) и посмотрим, во что она превращается при очень малых  $r$ . Тогда запаздыванием  $-r/c$  в  $f(t - r/c)$  можно пренебречь, и поскольку функция  $f$  плавная,  $\Psi$  превращается в

$$\Psi = \frac{f(t)}{r} \quad (r \rightarrow 0). \quad (21.10)$$

Итак,  $\Psi$  в точности похоже на кулоново поле заряда, расположенного в начале координат. Мы знаем, что для небольшого сгустка заряда, ограниченного очень малой областью близ начала координат и имеющего плотность  $\rho$ ,

$$\varphi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{r},$$

где  $Q = \int \rho dV$ . Такой потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Следуя тем же расчетам, мы должны были бы сказать, что  $\Psi$  из выражения (21.10) удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Psi = -s \quad (r \rightarrow 0), \quad (21.11)$$

где  $s$  связано с  $f$  формулой

$$f = \frac{s}{4\pi}$$

при

$$S = \int s dV.$$

Единственная разница в том, что в общем случае  $s$ , а, стало быть, и  $S$  может оказаться функцией времени.

Далее очень важно то, что если  $\Psi$  удовлетворяет (21.11) при малых  $r$ , то оно удовлетворяет также и (21.7). По мере приближения к началу координат зависимость  $\Psi$  от  $r$  типа  $1/r$  приводит к тому, что пространственные производные становятся очень большими. А производные по времени остаются теми же. [Это просто производные  $f(t)$  по времени.] Так что, когда  $r$  стремится к нулю, множителем  $\partial^2\Psi/\partial t^2$  в уравнении (21.7) по сравнению с  $\nabla^2\Psi$  можно пренебречь, и (21.7) становится эквивалентным уравнению (21.11).

Подытоживая, можно сказать, что если функция источника  $s(t)$  из уравнения (21.7) сосредоточена в начале координат и ее общая величина равна

$$S(t) = \int s(t) dV, \quad (21.12)$$

то решение уравнения (21.7) имеет вид

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{S(t-r/c)}{r}. \quad (21.13)$$

Влияние слагаемого с  $\partial^2\Psi/\partial t^2$  в (21.7) сказывается лишь на появлении запаздывания ( $t-r/c$ ) в потенциале кулонова типа.

### § 3. Общее решение уравнений Максвелла

Мы нашли решение уравнения (21.7) для «точечного» источника. Теперь встает новый вопрос: Каков вид решения для распределенного источника? Ну, это решить легко; всякий источник  $s(x, y, z, t)$  можно считать состоящим из суммы многих «точечных» источников, расположенных поодиночке в каждом элементе объема  $dV$  и имеющих силу  $s(x, y, z, t)dV$ . Поскольку (21.7) линейно, суммарное поле представляет собой суперпозицию полей от всех таких элементов источника.

Используя результаты предыдущего параграфа [см. (21.13)], мы получим, что в момент  $t$  поле  $d\Psi$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  [или, короче, в точке (1)], создаваемое элементом источника  $s dV$  в точке  $(x_2, y_2, z_2)$  [или, короче, в точке (2)], выражается формулой

$$d\Psi(1, t) = \frac{s(2, t-r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

где  $r_{12}$  — расстояние от (2) до (1). Сложение вкладов от всех частей источника означает, конечно, интегрирование по всей

области, где  $s \neq 0$ , так что мы имеем

$$\Psi(1, t) = \int \frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} dV_2. \quad (21.14)$$

Иначе говоря, поле в точке (1) в момент времени  $t$  представляет собой сумму всех сферических волн, испускаемых в момент  $t - r_{12}/c$  всеми элементами источника, расположенного в точке (2). Выражение (21.14) является решением нашего волнового уравнения для любой системы источников.

Теперь мы видим, как получать общее решение уравнений Максвелла. Если подразумевать под  $\psi$  скалярный потенциал  $\phi$ , то функция источника  $s$  превращается в  $\rho/\epsilon_0$ . А можно считать, что  $\psi$  представляет одну из трех компонент векторного потенциала  $\mathbf{A}$ ; тогда  $s$  означает соответствующую компоненту  $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ . Стало быть, если во всех точках известна плотность зарядов  $\rho(x, y, z, t)$  и плотность тока  $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ , то решения уравнений (21.4) и (21.5) можно выписать немедленно:

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2, \quad (21.15)$$

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (21.16)$$

Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  получатся дифференцированием потенциалов [используются выражения (21.2) и (21.3)]. Кстати, можно проверить явно, что  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ , полученные из (21.15) и (21.16), действительно удовлетворяют равенству (21.6).

Мы решили уравнения Максвелла. В любых обстоятельствах, если только заданы токи и заряды, из этих интегралов можно определить потенциалы, а затем, проинтегрировав их, получить поля. Тем самым с теорией Максвелла покончено. И это позволяет нам также замкнуть круг и вернуться к нашей теории света, потому что достаточно только подсчитать электрическое поле движущегося заряда, чтобы связать все это с нашей прежней теорией света. Все, что нам остается сделать, — это взять движущийся заряд, вычислить из этих интегралов его потенциал и затем из  $-\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ , дифференцируя, найти  $\mathbf{E}$ . Мы должны получить формулу (21.1). Работы придется проделать много, но принцип ясен.

Итак, мы дошли до центра электромагнитной вселенной. У нас в руках полная теория электричества, магнетизма и света, полное описание полей, создаваемых движущимися зарядами, и многое, многое другое. Все сооружение, воздвигнутое Максвеллом, во всей его полноте, красе и мощи сейчас перед нами. Это, пожалуй, одно из величайших свершений физики. И чтобы напомнить о его важности, мы переписываем все формулы вместе и обводим их красивой рамкой.

## *Уравнения Максвелла:*

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

## *И их решения:*

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2,$$

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2.$$

## *§ 4. Поля колеблющегося диполя*

Мы пока еще не провели обещанного вывода формулы (21.1) для электрического поля движущегося точечного заряда. Даже зная то, что мы уже знаем, этот вывод все равно проделать несложно. Нам не удалось обнаружить формулы (21.1) нигде, ни в каких книжках и статьях (кроме первых выпусков этих лекций) \*. Это свидетельствует о том, что вывод ее не прост. (Поля движущегося заряда записывались неоднократно и в других видах, которые все, конечно, эквивалентны.) Мы ограничимся поэтому здесь тем, что просто покажем на нескольких примерах, что (21.15) и (21.16) приводят к тем же результатам, что и (21.1). Первым делом мы покажем, что при том единственном условии, что движение заряженной частицы является нерелятивистским, (21.1) приводит к правильной величине полей. (Уже этот частный случай покрывает 90% всего того, что было сказано о явлении света.)

Рассмотрим такую ситуацию, когда имеется сгусток зарядов, каким-то образом перемещающийся в небольшой области; требуется найти создаваемые им где-то вдалеке от этого

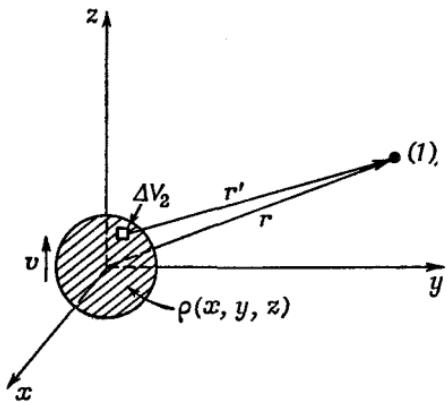
\* Формула была выведена Р. Фейнманом в 1950 г. и приводится иногда в лекциях как удобный способ расчета синхротронного излучения.

места поля. Можно поставить вопрос и иначе: мы найдем поле на произвольном расстоянии от точечного заряда, который почти незаметно колеблется вверх и вниз. Поскольку свет обычно испускают такие нейтральные тела, как атомы, то мы будем считать, что наш колеблющийся заряд  $q$  расположен вблизи неподвижного, равного по величине, но противоположного по знаку заряда. Если расстояние между центрами зарядов равно  $d$ , то у зарядов появится дипольный момент  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ , который мы будем считать функцией времени. Следует ожидать, что поблизости от зарядов запаздыванием поля можно будет пренебречь; электрическое поле будет в точности таким же, как и то, которое получалось раньше для электростатического диполя [но, конечно, с мгновенным дипольным моментом  $\mathbf{p}(t)$ ]. Однако при большом удалении в формуле для поля должно появиться добавочное слагаемое, которое меняется как  $1/r$  и зависит от того, каково ускорение заряда в направлении, поперечном к лучу зрения. Посмотрим, получится ли у нас этот результат.

Начнем с вычисления векторного потенциала  $\mathbf{A}$  при помощи (2.16). Пусть плотность зарядов в сгустке есть  $\rho(x, y, z)$  и весь он движется все время со скоростью  $\mathbf{v}$ . Тогда плотность тока  $\mathbf{j}(x, y, z)$  равна  $v\rho(x, y, z)$ . Удобно систему координат расположить так, чтобы ось  $z$  была направлена по  $\mathbf{v}$ ; тогда геометрия нашей задачи изобразится так, как показано на фиг. 21.2. Нас интересует интеграл

$$\int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.17)$$

Если размеры заряда-сгустка на самом деле намного меньше, чем  $r_{12}$ , то  $r_{12}$  в знаменателе можно положить равным  $r$  (расстоянию от центра сгустка) и вынести  $r$  за знак интеграла. Кроме того, мы собираемся положить и в числителе  $r_{12}=r$ , хотя это и не совсем верно. А неверно это потому, что на самом деле, скажем, полагается брать  $\mathbf{j}$  в верхней части сгустка совсем



Фиг. 21.2. Потенциалы в точке (1) даются интегралами от плотности заряда  $\rho$ .

не в тот момент, когда в нижней, а немного в другое время. Полагая  $r_{12}=r$  в  $\mathbf{j}(t-r_{12}/c)$ , мы вычисляем плотность тока для всего сгустка в одно и то же время  $(t-r/c)$ . Это приближение годится лишь тогда, когда скорость  $v$  заряда много меньше  $c$ . Мы, стало быть, ведем расчет в нерелятивистском случае. После замены  $\mathbf{j}$  на  $rv$  интеграл (21.17) превращается в

$$\frac{1}{r} \int v \rho \left( 2, t - \frac{r}{c} \right) dV_2.$$

Раз скорость всех зарядов в сгустке одна и та же, этот интеграл просто равен  $v/r$ , умноженному на общий заряд  $q$ . Но  $qv$  — это как раз  $\partial p/\partial t$  (скорость изменения дипольного момента), только надо ее, конечно, определять в более раннее время  $(t-r/c)$ . Запишем эту величину так:  $\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)$ . Итак, мы получаем для векторного потенциала

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \quad (21.18)$$

Мы узнали, что ток в меняющемся диполе создает векторный потенциал в форме сферических волн, источник которых обладает силой  $\dot{\mathbf{p}}/4\pi\epsilon_0 c^2$ .

Теперь из  $\mathbf{B}=\nabla \times \mathbf{A}$  можно получить магнитное поле. Поскольку  $\mathbf{p}$  направлен по оси  $z$ , у  $\mathbf{A}$  есть только  $z$ -компоненты; в роторе остаются только две ненулевые производные. Значит,  $B_x=\partial A_z/\partial y$  и  $B_y=-\partial A_z/\partial x$ . Поглядим сперва на  $B_x$ :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \quad (21.19)$$

Чтобы продифференцировать, вспомним, что  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , так что

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (21.20)$$

Но мы помним, что  $\partial r/\partial y=y/r$ ; значит, первое слагаемое даст

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3}, \quad (21.21)$$

что убывает как  $1/r^2$ , т. е. как поле статического диполя (потому что в данном направлении  $y/r$  постоянно).

Второе слагаемое в (21.20) приводит к новому эффекту. Если провести в нем дифференцирование, то получится

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{cr^2} \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (21.22)$$

где  $\ddot{\mathbf{p}}$  — просто вторая производная  $\mathbf{p}$  по  $t$ . Вот это-то получающееся от дифференцирования числителя слагаемое и ответ-

ственno за излучение. Во-первых, оно описывает поле, убывающее на расстоянии как  $1/r$ , во-вторых, зависит от ускорения заряда. Теперь вам должно быть ясно, как мы собираемся получить формулу типа (21.1'), описывающую световое излучение.

Явление это настолько интересно и важно, что стоит немного подробнее разобраться в том, откуда берется это «радиационное» слагаемое. Мы начинали с выражения (21.18), зависящего от  $r$  как  $1/r$  и тем самым похожего на кулонов потенциал (если не обращать внимания на запаздывающий множитель в числителе). Почему же когда мы, желая получить поле, дифференцируем по пространственным координатам, то не получаем просто поля вида  $1/r^2$  (конечно, с соответствующей временной задержкой)?

А вот почему. Представьте, что диполь приведен в колебательное движение вверх и вниз. Тогда

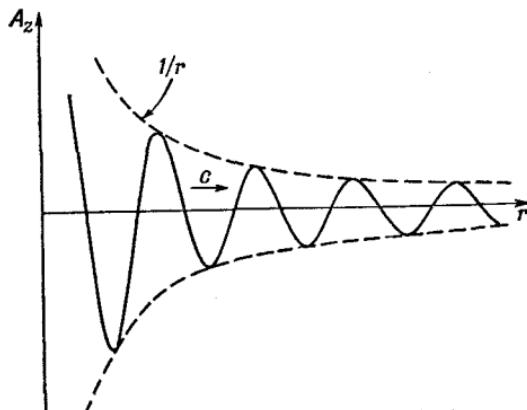
$$p = p_z = p_0 \sin \omega t.$$

и

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega(t - r/c)}{r}.$$

Если начертить график зависимости  $A_z$  от  $r$  в каждый данный момент, то получится кривая, показанная на фиг. 21.3. Амплитуда в пиках убывает как  $1/r$ , но, кроме того, еще имеются пространственные колебания, которые ограничены огибающей вида  $1/r$ . Пространственные производные в формуле пропорциональны наклону кривой. Из фиг. 21.3 видно, что встречаются намного более крутые наклоны, чем наклон самой кривой  $1/r$ . Очевидно, что при данной частоте наклоны в пиках пропорциональны амплитуде волны, меняющейся как  $1/r$ . Тем самым объясняется степень спадания радиационного слагаемого с расстоянием.

Все это получается оттого, что *временные* вариации в источнике превращаются в *пространственные* вариации, когда волны



Фиг. 21.3. Зависимость величины  $A$  от  $r$  в момент  $t$  для сферической волны от колеблющегося диполя.

начинают разбегаться в стороны, магнитные же поля зависят от пространственных производных потенциала.

Теперь возвратимся назад и закончим наши расчеты магнитного поля. Для  $B_x$  мы получили (21.21) и (21.22). Поэтому

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ -\frac{\dot{y}\hat{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{\ddot{y}\hat{p}(t-r/c)}{cr^2} \right]. \quad (21.1')$$

С помощью точно таких же выкладок мы придем к

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{\dot{x}\hat{p}(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{x}\hat{p}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

И все это можно объединить в одну красивую векторную формулу:

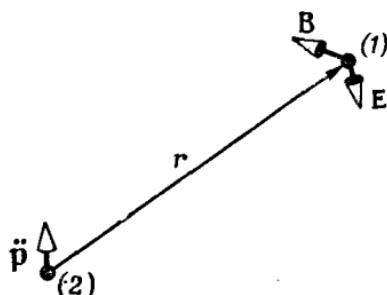
$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]}{r^3} \times \mathbf{r}. \quad (21.23)$$

А теперь взгляните на нее. Прежде всего на больших удалениях (когда  $r$  велико) следует принимать в расчет только  $\ddot{\mathbf{p}}$ . Направление  $\mathbf{B}$  дается вектором  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , перпендикулярным и к радиусу  $\mathbf{r}$ , и к ускорению (фиг. 21.4). Все сходится с тем, что получилось бы из формулы (21.1').

Теперь посмотрите (к этому мы не привыкли) на то, что происходит поблизости от заряда. В гл. 14, § 7 (вып. 5) мы вывели закон Био и Савара для магнитного поля элемента тока. Мы нашли, что элемент тока  $j dV$  привносит в магнитное поле следующий вклад:

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (21.24)$$

Вы видите, что эта формула с виду очень похожа на первое слагаемое в (21.23), если только вспомнить, что  $\mathbf{p}$  — это ток. Но разница все же есть. В (21.23) ток надо подсчитывать в момент  $(t-r/c)$ , а в (21.24) этого нет. На самом деле, однако, (21.24) для малых  $r$  все еще годится, потому что *второе* слагаемое в (21.23) стремится уничтожить эффект запаздывания из первого слагаемого. Вместе оба они приводят при малых  $r$  к результату, очень близкому к (21.24).



Фиг. 21.4. Поля излучения  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  колеблющегося диполя.

В этом можно убедиться следующим образом. Когда  $r$  мал,  $(t-r/c)$  не очень отличается от  $t$ , и в (21.23) скобки можно разложить в ряд Тейлора. Первый член разложения дает

$$\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \text{и т. д.}$$

и в том же порядке по  $r/c$

$$\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \ddot{\mathbf{p}}(t).$$

Если их сложить, члены с  $\dot{\mathbf{p}}$  уничтожаются и слева остается *незапаздывающий* ток  $\mathbf{p}$ , т. е.  $\mathbf{p}(t)$  плюс члены порядка  $(r/c)^2$  и выше [например,  $1/2(r/c)^2\ddot{\mathbf{P}}$ ]. Эти члены при достаточно малых  $r$  (малых настолько, что за время  $r/c$  ток  $\mathbf{p}$  заметно не меняется) будут очень малы.

Стало быть, (21.23) приводит к полям, очень похожим на те, которые дает теория с мгновенным действием, гораздо более похожим на них, чем на поля теории с мгновенным действием и с задержкой; эффекты задержки первого порядка компенсируются вторым членом. Статические формулы очень точны, намного более точны, чем вам могло бы показаться. Конечно, компенсация чувствуется только вблизи от заряда. Для далеких точек эти поправки уже ничего не спасают, потому что временибо запаздывание приводит к очень большим эффектам и в конечном счете к важному члену  $1/r$  — к эффекту излучения.

Перед нами все еще стоит задача расчета электрического поля и доказательства того, что оно совпадает с (21.1'). Правда, уже чувствуется, что на больших расстояниях ответ получится такой, как надо. Мы знаем, что вдали от источников, где возникает распространяющаяся волна,  $\mathbf{E}$  перпендикулярно к  $\mathbf{B}$  (и к  $\mathbf{r}$ ), как на фиг. 21.4, и что  $c\mathbf{B} = \mathbf{E}$ . Значит,  $\mathbf{E}$  пропорционально ускорению  $\mathbf{p}$ , как и предсказывалось формулой (21.1').

Чтобы получить электрическое поле на всех возможных расстояниях, нужно найти электростатический потенциал. Когда мы подсчитывали интеграл токов для  $\mathbf{A}$ , желая получить (21.18), то сделали приближение: мы пренебрели малозаметным изменением  $r$  в члене с запаздыванием. Для электростатического потенциала этого делать нельзя, потому что тогда у нас получилось бы  $1/r$ , умноженное на интеграл от плотности заряда, т. е. на константу. Такое приближение чересчур грубо. Надо обратиться к высшим порядкам. И вместо того, чтобы пугаться в этих прямых расчетах высших приближений, можно поступить иначе — определить скалярный потенциал из равенства (21.6), используя уже найденное значение векторного потенциала. Дивергенция  $\mathbf{A}$  в этом случае просто равна  $\partial A_z / \partial z$ , поскольку  $A_x$  и  $A_y$  тождественно равны нулю. Дифференцируя

точно так же, как это делалось выше при вычислении В, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ - \frac{z \dot{\mathbf{p}} (t - r/c)}{r^3} - \frac{z \ddot{\mathbf{p}} (t - r/c)}{cr^2} \right].$$

Или в векторных обозначениях

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c \cdot \mathbf{r}}}{r^3}.$$

Из равенства (21.6) получается уравнение для  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c \cdot \mathbf{r}}}{r^3}.$$

Интегрирование по  $t$  просто убирает надо всеми  $p$  по одной точке:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c \cdot \mathbf{r}}}{r^3}. \quad (21.25)$$

(Постоянная интегрирования отвечала бы некому наложенному статическому полю, которое, конечно, может существовать, но мы считаем, что у выбранного нами колеблющегося диполя статического поля нет.)

Теперь мы можем из

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

найти электрическое поле  $\mathbf{E}$ . После утомительных (хоть и прямых) выкладок [при этом нужно помнить, что  $\mathbf{p}(t-r/c)$  и его производные по времени зависят от  $x, y$  и  $z$  через запаздывание  $r/c$ ] мы получаем

$$\mathbf{E}(r, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \mathbf{p}^* - 3 \frac{(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{c^2} \left\{ - \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right\} \times \mathbf{r} \right], \quad (21.26)$$

где

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (21.27)$$

Это выглядит довольно сложно, но интерпретируется просто. Вектор  $\mathbf{p}^*$  — это дипольный момент с запаздыванием и с «правкой» на запаздывание, так что два члена с  $\mathbf{p}^*$  в (21.26) при малых  $r$  дают просто статическое поле диполя [см. гл. 6 (вып. 5), выражение (6.14)]. Когда  $r$  велико, то член с  $\ddot{\mathbf{p}}$  преобладает над остальными, и электрическое поле пропорционально ускорению зарядов в направлении поперек  $\mathbf{r}$  и само направлено вдоль проекции  $\ddot{\mathbf{p}}$  на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{r}$ .

Этот результат согласуется с тем, что мы получили бы, применяя формулу (21.1'). Конечно, эта формула — более общая; она годится для любого движения, а не только для мало-заметных движений, для которых запаздывание  $r/c$  в пределах всего источника можно считать постоянным [как (21.26)]. Во всяком случае, теперь мы укрепили столбами все наше прежнее изложение свойств света, за исключением лишь некоторых вопросов из гл. 34 (вып. 3), которые связаны с последней частью выражения (21.26). Мы можем теперь перейти к получению поля быстродвижущихся зарядов. Это приведет нас к релятивистским эффектам [гл. 34 (вып. 3)].

## **§ 5. Потенциалы движущегося заряда; общее решение Льенара и Вихерта**

В предыдущем параграфе мы пошли на упрощение при вычислении интеграла для  $A$ , рассматривая только небольшие скорости. Но при этом мы шли таким путем, которым легко можно прийти и к новым выводам. Поэтому сейчас мы заново предпримем расчет потенциалов точечного заряда, движущегося уже, как ему захочется (даже с релятивистской скоростью). Как только мы получим этот результат, у нас в руках окажутся электромагнитные свойства электрических зарядов во всей их полноте. Даже формулу (21.1') можно будет тогда легко получить, взяв только нужные производные. И наш рассказ удастся, наконец, довести до конца. Итак, запаситесь терпением!

Попробуем подсчитать в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  скалярный потенциал  $\phi(1)$ , создаваемый *точечным* зарядом (вроде электрона), движущимся любым, каким угодно образом. Под «точечным» зарядом подразумевается очень маленький заряженный шарик, такой маленький, как только можно себе представить, с плотностью заряда  $\rho(x, y, z)$ . Потенциал  $\phi$  можно найти из (21.15):

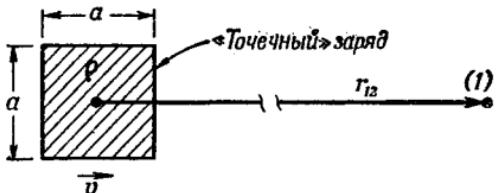
$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.28)$$

На первый взгляд кажется (и почти все так и подумают), что ответ состоит в том, что интеграл от  $\rho$  по такому «точечному» заряду равен просто общему заряду  $q$ , т. е. что

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{12}} \text{ (неверно).}$$

Через  $r_{12}'$  здесь обозначен радиус-вектор от заряда в точке (2) к точке (1), измеренный в более раннее время  $(t - r_{12}/c)$ . Эта формула ошибочна.

*Фиг. 21.5.* «Точечный» заряд (рассматриваемый как небольшое распределение зарядов в форме куба), движущийся со скоростью  $v$  к точке (1).



Правильный ответ такой:

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \frac{1}{1 - v_r/c}, \quad (21.29)$$

где  $v_r$  — компонента скорости заряда, параллельная  $r_{12}$ , т. е. направленная к точке (1). Сейчас я объясню, почему это так. Чтобы легче было следить за моими доводами, я сперва проведу расчет для «точечного» заряда в форме небольшого заряженного кубика, который движется к точке (1) со скоростью  $v$  (фиг. 21.5). Сторона куба будет  $a$ , это число пусть будет много меньше  $r_{12}$  [расстояния от центра заряда до точки (1)].

Чтобы оценить величину интеграла (21.28), мы вернемся к основному определению: запишем его в виде суммы

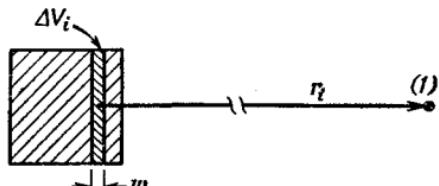
$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i}, \quad (21.30)$$

где  $r_i$  — расстояние от точки (1) к  $i$ -му элементу объема  $\Delta V_i$ , а  $\rho_i$  — плотность заряда в  $\Delta V_i$  в момент  $t_i = (t - r_i/c)$ . Поскольку все  $r_i \gg a$ , удобно будет выбрать все  $\Delta V_i$  в виде тонких прямоугольных ломтиков, перпендикулярных к  $r_{12}$  (фиг. 21.6).

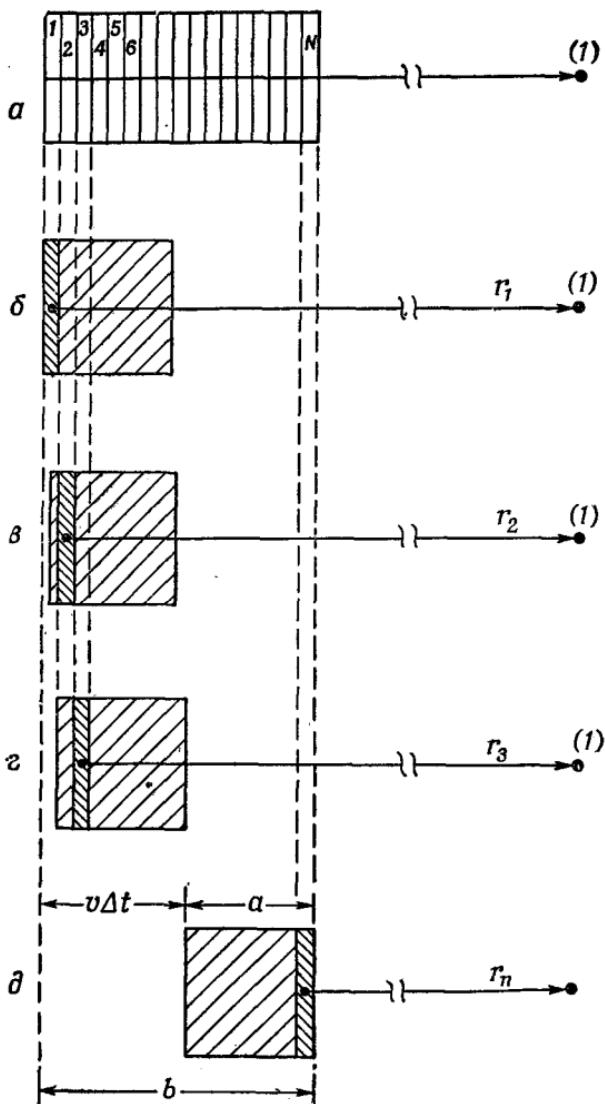
Предположим, что мы начали с того, что взяли элементы объема  $\Delta V_i$  некоторой толщины  $w$ , много меньшей  $a$ .

Отдельные элементы объема будут выглядеть так, как показано на фиг. 21.7, а. Их нарисовано гораздо больше, чем нужно, чтобы закрыть весь заряд. А сам заряд не показан, и по весьма существенной причине. Где его нужно нарисовать? Ведь для каждого элемента объема  $\Delta V_i$  надо брать  $\rho$  в свой момент  $t_i = (t - r_i/c)$ . Но раз заряд движется, то для каждого элемента объема  $\Delta V_i$  он окажется в другом месте!

Начнем, скажем, с элемента объема 1 на фиг. 21.7, а, выбранного так, чтобы в момент  $t_1 = (t - r_1/c)$  «задняя»



*Фиг. 21.6.* Элемент объема  $\Delta V_i$ , используемый для вычисления потенциалов.



Фиг. 21.7. Интегрирование  $\rho(t - r'/c)dV$  для движущегося заряда.

грань заряда пришлась на  $\Delta V_1$  (фиг. 21.7, б). Тогда, вычисляя  $\rho_2 \Delta V_2$ , нужно взять положение заряда в несколько более позднее время  $t_2 = (t - r_2/c)$  и заряд к этому времени сместится в положение, показанное на фиг. 21.7, в. Так же будет с  $\Delta V_3, \Delta V_4$  и т. д. Вот теперь можно подсчитывать сумму.

Толщина каждого  $\Delta V_i$  равна  $w$ , а объем  $wa^2$ . Поэтому каждый элемент объема, накладывающийся на распределение за-

ряда, содержит в себе заряд  $wa^2\rho$ , где  $\rho$  — плотность заряда внутри куба (мы считаем ее однородной). Когда расстояние от заряда до точки (1) велико, то можно все  $r_i$  в знаменателях положить равными некоторому среднему значению, скажем, взятому с учетом запаздывания положению  $r'$  центра куба. Сумма (21.30) превращается в

$$\sum_{i=1}^N \frac{\rho wa^2}{r'},$$

где  $\Delta V_N$  — тот последний элемент  $\Delta V_i$ , который еще накладывается на распределение зарядов (см. фиг. 21.7,  $\partial$ ). Сумма тем самым равна

$$N \frac{\rho wa^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left( \frac{Nw}{a} \right).$$

Но  $\rho a^3$  — просто общий заряд  $q$ , а  $Nw$  — длина  $b$ , показанная на фиг. 21.7,  $\partial$ . Получается

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left( \frac{b}{a} \right). \quad (21.31)$$

А чему же равно  $b$ ? Это длина куба зарядов, увеличенная на расстояние, пройденное зарядом за время от  $t_1 = (t - r_1/c)$  до  $t_N = (t - r_N/c)$ . Это расстояние, пройденное зарядом за время

$$\Delta t = t_N - t_1 = \frac{r_1 - r_N}{c} = \frac{b}{c}.$$

А поскольку скорость заряда равна  $v$ , то пройденное расстояние равно  $v\Delta t = vb/c$ . Но длина  $b$  — само это расстояние плюс  $a$ :

$$b = a + \frac{v}{c} b.$$

Отсюда

$$b = \frac{a}{1 - (v/c)}.$$

Здесь, конечно, под  $v$  подразумевается скорость в «запаздывающий» момент  $t' = (t - r'/c)$ ; это можно указать, записав  $[1 - v/c]_{\text{зап}}$ ; тогда уравнение (21.23) для потенциала принимает вид

$$\Phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{[1 - (v/c)]_{\text{зап}}}.$$

Это согласуется с тем, что было предположено в (21.29). Появился поправочный множитель. Он появился потому, что в то время, как наш интеграл «проносится над зарядом», сам заряд движется. Когда заряд движется к точке (1), его вклад в интеграл увеличивается в  $b/a$  раз. Поэтому правильное значение интеграла равно  $q/r'$ , умноженному на  $b/a$ , т. е. на  $1/[1 - v/c]_{\text{зап}}$ .

Если скорость заряда направлена не к точке наблюдения (1), то легко видеть, что важна только *составляющая* его скорости в направлении к точке (1). Если обозначить эту составляющую скорости через  $v_r$ , то поправочный множитель запишется в виде  $1/[1-v_r/c]_{\text{зап}}$ . Кроме того, проделанный нами анализ в равной степени проходит для распределения заряда *любой* формы (это не обязательно должен быть куб). Наконец, поскольку «размер»  $a$  заряда не вошел в окончательный итог, то тот же результат получится, если заряд станется до любых размеров, вплоть до точки. Общий результат состоит в том, что скалярный потенциал точечного заряда, движущегося с произвольной скоростью, равен

$$\varphi(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' [1 - (v_r/c)]_{\text{зап}}} . \quad (21.32)$$

Это уравнение часто пишут в эквивалентном виде:

$$\varphi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [r - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)]_{\text{зап}}} , \quad (21.33)$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, соединяющий заряд с той точкой (1), в которой вычисляется потенциал  $\varphi$ , а все величины в скобках надо вычислять в «запаздывающий» момент времени  $t' = (t - r'/c)$ .

То же самое получается и тогда, когда по (21.16) вычисляют  $\mathbf{A}$  для точечного заряда. Плотность тока равна  $\rho\mathbf{v}$ , а интеграл от  $\rho$  — тот же, что и в  $\varphi$ . Векторный потенциал равен

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{q\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 [r - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)]_{\text{зап}}} . \quad (21.34)$$

Потенциалы точечного заряда в этой форме были впервые получены Льенаром и Вихертом. Их так и называют: *потенциалы Льенара — Вихерта*.

Чтобы замкнуть круг и вернуться к формуле (21.1), теперь нужно только подсчитать  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  из этих потенциалов (при помощи  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  и  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ). Теперь остается одна арифметика. Впрочем, арифметика эта довольно запутанна, так что мы не будем приводить здесь детали счета. Придется поверить мне на слово, что формула (21.1) эквивалентна выведенным нами потенциалам Льенара — Вихерта \*.

\* Если у вас достаточно времени и вам не жаль бумаги, то попытайтесь проделать это самостоятельно. Вот вам парочка советов: во-первых, не забывайте, что производные  $r'$  довольно запутаны, ведь они суть функции от  $t'$ ! Во-вторых, не пытайтесь *вывести* формулу (21.1); лучше проделайте в ней все дифференцирования и затем сопоставьте то, что у вас получится, с выражением для  $\mathbf{E}$ , полученным из потенциалов (21.33) и (21.34).

## § 6. Потенциалы заряда, движущегося с постоянной скоростью; формула Лоренца

Применим теперь потенциалы Льенара — Вихерта к случаю заряда, движущегося по прямой с постоянной скоростью, и вычислим поле этого заряда. Позже мы повторим этот вывод, используя уже принцип относительности. Мы знаем величину потенциалов в той системе, в которой заряд поконится. Когда заряд движется, то все получается простым релятивистским преобразованием от одной системы к другой. Но теория относительности ведет свое начало от теории электричества и магнетизма. Формулы преобразований Лоренца [см. гл. 15 (вып. 2)] — это открытия, сделанные Лоренцем при исследовании уравнений электричества и магнетизма. И для того чтобы вы понимали, откуда все пошло, я хочу показать вам, что уравнения Максвелла действительно приводят к преобразованиям Лоренца. Я начну с вычисления потенциала равномерно движущегося заряда прямо из электродинамики, из уравнений Максвелла. Мы уже показали, что уравнения Максвелла приводят к потенциалу, полученному в предыдущем параграфе. Стало быть, пользуясь этими потенциалами, мы используем тем самым теорию Максвелла.

Пусть имеется заряд, движущийся вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$  (фиг. 21.8). Нас интересуют потенциалы в точке  $P(x, y, z)$ . Если  $t=0$  — момент, в который заряд проходит через начало координат, то в момент  $t$  заряд окажется в точке  $x=vt$ ,  $y=z=0$ . А нам нужно знать его положение с учетом запаздывания, т. е. положение в момент

$$t' = t - \frac{r'}{c}, \quad (21.35)$$

где  $r'$  — расстояние от заряда до точки  $P$  в этот запаздывающий момент. В это более раннее время  $t'$  заряд был в  $x=vt'$ , так что

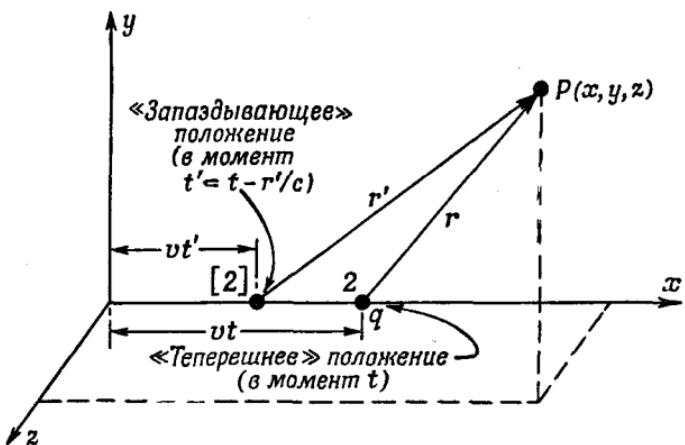
$$r' = \sqrt{(x-vt')^2 + y^2 + z^2}. \quad (21.36)$$

Чтобы найти  $r'$  или  $t'$ , это уравнение надо сопоставить с (21.35). Исключим сперва  $r'$ , решив (21.35) относительно  $r'$  и подставив в (21.36). Возвысив затем обе части в квадрат, получим

$$c^2(t-t')^2 = (x-vt')^2 + y^2 + z^2,$$

т. е. квадратное уравнение относительно  $t'$ . Раскрыв скобки и расположив члены по степеням  $t'$ , получим

$$(v^2 - c^2)t'^2 - 2(xv - c^2t)t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$



Фиг. 21.8. Определение потенциала в точке  $P$  заряда, движущегося равномерно вдоль оси  $x$ .

Отсюда найдем

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}. \quad (21.37)$$

Чтобы получить  $r'$ , надо это  $t'$  подставить в

$$r' = c(t - t').$$

Теперь мы уже можем найти  $\varphi$  из выражения (21.33), имеющего вид

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' / c)} \quad (21.38)$$

(ввиду того, что  $v$  постоянно).

Составляющая  $\mathbf{v}$  в направлении  $\mathbf{r}'$  равна  $v(x-vt')/r'$ , так что  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'$  просто равно  $v(x-vt')$ , а весь знаменатель равен

$$c(t - t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c \left[ t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' \right].$$

Подставляя  $(1 - v^2/c^2)t'$  из (21.37), получаем

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}.$$

Это уравнение становится более понятным, если переписать его в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[ \left( \frac{x-vt}{1-v^2/c^2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}}}. \quad (21.39)$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  — это такое же выражение, но с добавочным множителем  $\mathbf{v}/c^2$ :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \Phi.$$

В выражении (21.39) со всей ясностью предстает перед вами начало преобразований Лоренца. Если бы заряд находился в начале координат в своей собственной системе покоя, то его потенциал имел бы вид

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}.$$

А мы смотрим на него из движущейся системы координат, и нам кажется, что координаты следует преобразовать с помощью формул

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y &\rightarrow y, \\ z &\rightarrow z. \end{aligned}$$

Это обычное преобразование Лоренца. Лоренц вывел его тем же самым способом, каким пользовались и мы.

Но что можно сказать о добавочном множителе  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , который появился перед дробью в (21.39)? И кроме того, как появляется векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , если он в системе покоя частицы повсюду равен нулю? Мы вскоре покажем, что  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  вместе составляют четырехвектор, подобно импульсу  $\mathbf{p}$  и полной энергии  $U$  частицы. Добавка  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  в (21.39) — это тот самый множитель, который появляется всегда, когда преобразуют компоненты четырехвектора, так же как плотность заряда  $\rho$  преобразуется в  $\rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Собственно из формул (21.4) и (21.5) почти очевидно, что  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  суть компоненты одного четырехвектора, потому что в гл. 13 (вып. 5) уже было показано, что  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  — компоненты четырехвектора.

Позднее мы более подробно разберем относительность в электродинамике; здесь мы хотели только показать, как естественно уравнения Максвелла приводят к преобразованиям Лоренца. Поэтому не надо удивляться, узнав, что законы электричества и магнетизма уже вполне пригодны и для теории относительности Эйнштейна. Их не нужно даже как-то особо подгонять, как это приходилось делать с ньютоновой механикой.

## ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 1. Импедансы

§ 2. Генераторы

§ 3. Сети идеальных элементов; метод Кирхгофа

## § 1. Импедансы

В основном наши усилия при чтении этих лекций были направлены на то, чтобы получить полные уравнения Максвелла. В предыдущих двух главах мы обсудили следствия этих уравнений. Выяснилось, что они содержат объяснение всех статических явлений, которые мы изучали раньше, и явлений электромагнитных волн и света — вопроса, подробно изучавшегося в самом начале нашего курса. Уравнения Максвелла дают и то и другое, смотря по тому, где эти поля вычисляются: поблизости от токов и зарядов или же вдали от них. Есть и промежуточная область, но о ней ничего интересного сказать нельзя; там никаких особых явлений не происходит.

Но в электромагнетизме остается еще несколько вопросов, которые стоит осветить. Надо будет обсудить вопрос связи относительности и уравнений Максвелла, т. е. выяснить, что произойдет, если на уравнения Максвелла посмотреть из движущейся системы координат. Важен еще и вопрос о сохранении энергии в электромагнитных системах. Кроме того, существует общирная область электромагнитных свойств материалов; до сих пор мы рассматривали только электромагнитные поля в пустом пространстве, если не считать изучения свойств диэлектриков. Да и при изучении света все еще оставалось несколько вопросов, которые хотелось бы рассмотреть еще раз с точки зрения уравнений поля.

В частности, надо бы еще раз вернуться к вопросу о показателе преломления (особенно у плотных веществ). Наконец, интересны явления, связанные с волнами, заключенными

§ 4. Эквивалентные контуры

§ 5. Энергия

§ 6. Лестничная се-

§ 7. Фильтры

§ 8. Другие элемен-

повторить: гл. (вып. 2) «Алге-

ра»;

гл. 23 (вып. 2)

«Резонанс»;

гл. 25 (вып.

«Линейные си-

темы и обзор»

внутри ограниченной области пространства. Мы кратко коснулись этой проблемы, когда изучали звуковые волны. Но уравнения Максвелла тоже приводят к решениям, которые представляют волны электрических и магнитных полей, замкнутые в некотором объеме. В одной из последующих глав мы рассмотрим этот вопрос, имеющий важные технические применения. И чтобы подойти к нему, мы начнем с того, что изложим свойства электрических цепей при низких частотах. После этого мы сможем сравнить такие системы, когда к уравнениям Максвелла применимо почти статическое приближение, и системы, в которых преобладают высокочастотные эффекты.

Итак, снизойдем с величественных и труднодоступных высот последних нескольких глав и обратим свой взор на сравнительно низменную задачу — задачу об электрических цепях. Впрочем, мы убедимся в том, что даже столь мирские дела оказываются весьма запутанными, если в них вникнуть достаточно глубоко.

В гл. 23 и 25 (вып. 2) мы уже обсуждали некоторые свойства электрических цепей (контуров). Теперь мы повторим часть изложенного там материала, но более подробно. Мы по-прежнему будем иметь дело с линейными системами и с напряжениями и токами, которые меняются синусоидально; поэтому мы можем представить все напряжения и токи в виде комплексных чисел, пользуясь экспоненциальными обозначениями, введенными в гл. 22 (вып. 2). Так, меняющееся во времени напряжение  $V(t)$  будет записываться в виде

$$V(t) = \hat{V} e^{i\omega t}, \quad (22.1)$$

где  $\hat{V}$  — комплексное число, не зависящее от  $t$ . При этом, конечно, подразумевается, что настояще переменное по времени напряжение  $V(t)$  представляется действительной частью комплексной функции в правой части уравнения.

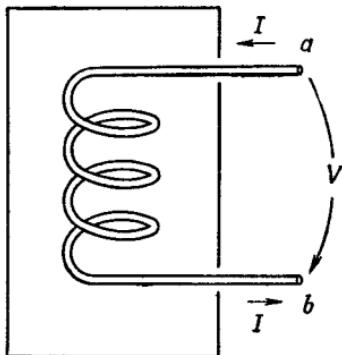
Подобным же образом и все другие меняющиеся во времени величины будут считаться изменяющимися синусоидально с той же частотой  $\omega$ . Мы будем писать

$$\begin{aligned} I &= \hat{I} e^{i\omega t} \text{ (ток),} \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \text{ (э. д. с.),} \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}} e^{i\omega t} \text{ (электрическое поле)} \end{aligned} \quad (22.2)$$

и т. д.

Большой частью мы будем писать уравнения, пользуясь обозначениями  $V, I, \mathcal{E}, \dots$  (вместо  $\hat{V}, \hat{I}, \hat{\mathcal{E}}, \dots$ ), помня при этом, что они изменяются со временем всегда так, как в (22.2).

В прежних наших рассуждениях об электрических цепях мы полагали, что такие вещи, как индуктивность, емкость и сопротивление, вам знакомы. Сейчас мы немного подробнее объясним, что понимают под этими идеализированными элементами схем. Начнем с индуктивности.



Фиг. 22.1. Индуктивность.

Индуктивность — это навитая в несколько рядов проволока в форме катушки, два конца которой выведены к зажимам на некотором расстоянии от катушки (фиг. 22.1). Предположим, что магнитное поле, создаваемое токами в катушке, не очень распространяется на все пространство и не воздействует на другие части цепи. Обычно этого добиваются, придав катушке форму лепешки или намотав ее на подходящий железный сердечник (это сжимает магнитное поле); можно еще поместить катушку внутрь металлической коробочки: схематически это показано на фиг. 22.1. В любом случае предполагается, что во внешней области у зажимов *a* и *b* магнитным полем можно пренебречь. Кроме того, мы будем считать, что электрическое сопротивление проводов в катушке можно не учитывать. И наконец, полагают, что можно пренебречь и электрическим зарядом, возникающим на поверхности провода, когда создаются электрические поля.

С учетом всех этих приближений и возникает то, что называют «идеальной» индуктивностью. (Позже мы вернемся к этому пункту и поговорим о том, что бывает в реальных индуктивностях.) Про идеальную индуктивность говорят, что напряжение на ее зажимах равно  $L(dI/dt)$ . Почему? Когда через индуктивность идет ток, то внутри катушки создается магнитное поле, пропорциональное силе тока. Если ток во времени меняется, то меняется и магнитное поле. Вообще говоря, ротор  $\mathbf{E}$  равен  $-dB/dt$ ; можно сказать и по-другому: контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому пути равен (с минусом) быстроте изменения потока  $\mathbf{B}$  через контур. Представьте теперь себе следующий путь: начинается он на зажиме *a* и тянется вдоль катушки (оставаясь все время внутри провода) к зажиму *b*; затем возвращается от зажима *b* к *a* по воздуху в пространстве вне катушки. Контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  по этому замкнутому пути можно записать в виде суммы двух частей:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.3)$$

По проводу                                      Снаружи

Как мы уже выяснили раньше, внутри идеального проводника электрических полей существовать не может. (Малейшие поля вызвали бы бесконечно большие токи.) Поэтому интеграл от зажима  $a$  до  $b$  через катушку равен нулю. Весь вклад в контурный интеграл от  $E$  приходится на путь снаружи индуктивности, от зажима  $b$  к зажиму  $a$ . А так как было предположено, что в пространстве вне «коробки» нет никаких магнитных полей, то эта часть интеграла не зависит от выбора пути. Значит, можно определить понятие потенциала обоих зажимов. Разность этих двух потенциалов и есть то, что называют напряжением  $V$ , так что

$$V = - \int_b^a E \cdot ds = - \oint E \cdot ds.$$

Полный интеграл по контуру — это то, что мы раньше называли э. д. с.  $\mathcal{E}$ . Он, естественно, равен скорости изменения магнитного поля в катушке. Мы уже знаем, что эта э. д. с. равна (со знаком минус) быстроте изменения тока, так что

$$V = -\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt},$$

где  $L$  — индуктивность катушки. Поскольку  $dI/dt = i\omega I$ , то мы имеем

$$V = i\omega L I. \quad (22.4)$$

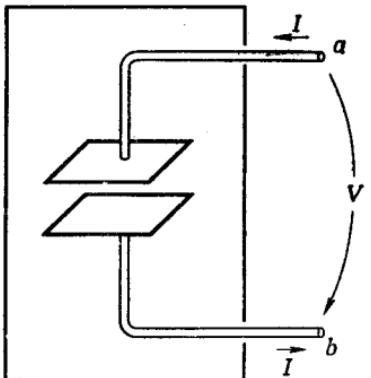
Тот способ, которым мы описали идеальную индуктивность, иллюстрирует общий подход к другим идеальным элементам цепи — обычно их называют «сосредоточенными» элементами. Свойства элемента полностью описываются на языке токов и напряжений, возникающих на его зажимах. Прибегнув к подходящим приближениям, можно игнорировать огромную сложность тех полей, которые возникают внутри объекта. То, что происходит внутри, отделяется от того, что происходит снаружи.

Для всех элементов цепи мы намерены сейчас найти соотношения, подобные формуле (22.4). В ней напряжение пропорционально силе тока с константой пропорциональности, которая, вообще говоря, есть комплексное число. Этот комплексный коэффициент пропорциональности называется *импедансом*, и его привыкли обозначать через  $z$  (не следует путать с координатой  $z$ ). В общем случае это функция частоты  $\omega$ . Стало быть, для каждого сосредоточенного элемента мы напишем

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z. \quad (22.5)$$

Для индуктивности мы имеем

$$z \text{ (индуктивности)} = z_L = i\omega L. \quad (22.6)$$



Фиг. 22.2. Емкость (или конденсатор).

Рассмотрим с этой точки зрения емкость \*. Она состоит из двух проводящих пластин (обкладок), от которых к нужным зажимам отходят два провода. Пластины могут быть любой формы и часто отделяются друг от друга каким-нибудь диэлектриком. Это схематически изображено на фиг. 22.2. Мы снова делаем несколько упрощающих предположений. Мы считаем, что пластины и провода — идеальные проводники, а изоляция между пластинами тоже идеальна, так что через нее никакие заряды с пластинами на пластину перейти не могут. Затем мы предполагаем, что проводники находятся близко друг от друга, но зато значительно удалены от всех остальных проводников, так что все линии поля, выйдя из одной пластины, непременно оканчиваются на другой. И тогда заряды на пластинках всегда равны и противоположны друг другу, причем по величине намного превосходят величину заряда на поверхности проводов. И, наконец, мы считаем, что поблизости от конденсатора магнитных полей нет.

Рассмотрим теперь контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  вдоль замкнутой петли, которая начинается на клемме  $a$ , проходит внутри провода до верхней обкладки конденсатора, пересекает промежуток между пластинами, проходит с нижней обкладки на клемму  $b$  и возвращается к клемме  $a$  по пространству снаружи конденсатора. Раз магнитного поля нет, контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  по этому замкнутому пути равен нулю. Интеграл можно разбить на три части:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Вдоль проводов}} \mathbf{E} \cdot ds + \int_{\text{Между пластинами}} \mathbf{E} \cdot ds + \int_b^a \mathbf{E} \cdot ds. \quad (22.7)$$

\* Кое-кто говорит, что предметы мы обязаны называть словами «катушка» и «конденсатор», а их *свойства* — соответственно «индуктивность» и «емкость». Но я предпочитаю пользоваться словами, какие слышу в лаборатории, где почти всегда и про физическую катушку, и про ее самоиндукцию  $L$  говорят «индуктивность». Точно так же предпочитаю говорить «емкость», «сопротивление», хотя часто можно услышать и слово «конденсатор».

Интеграл вдоль проводов равен нулю, потому что внутри идеальных проводников электрического поля не бывает. Интеграл от зажима  $b$  до  $a$  снаружи конденсатора равен разности потенциалов между клеммами со знаком минус. А поскольку мы считаем, что обкладки как-то изолированы от прочего мира, то общий заряд двух обкладок должен быть равен нулю; и если на верхней обкладке есть заряд  $Q$ , то на нижней имеется заряд  $-Q$ . Раньше мы уже видели, что если заряды двух проводников равны и противоположны,  $+Q$  и  $-Q$ , то разность потенциалов между ними есть  $Q/C$ , где  $C$  — емкость этих проводников. Из (22.7) следует, что разность потенциалов между зажимами  $a$  и  $b$  равна разности потенциалов между обкладками. Поэтому

$$V = \frac{Q}{C}.$$

Электрический ток  $I$ , втекающий в конденсатор через клемму  $a$  (и покидающий его через клемму  $b$ ), равен  $dQ/dt$  — быстроте изменения электрического заряда на обкладках. Записывая  $dV/dt$  в виде  $i\omega V$ , можно связь между током и напряжением для конденсатора дать в следующем виде:

$$i\omega V = \frac{I}{C},$$

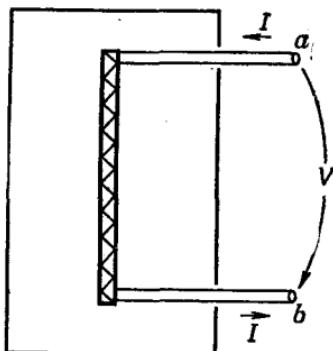
или

$$V = \frac{I}{i\omega C}. \quad (22.8)$$

Тогда импеданс  $z$  конденсатора равен

$$z \text{ (конденсатора)} = z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (22.9)$$

Третий элемент, который нужно рассмотреть, — это сопротивление. Но, поскольку мы пока еще не рассматривали электрических свойств реальных веществ, мы не готовы обсуждать то, что творится внутри реального проводника. Придется просто принять как факт, что внутри реальных веществ могут существовать электрические поля, что эти поля порождают поток электрического заряда (т. е. ток) и что этот ток пропорционален интегралу электрического поля от одного конца проводника до другого. Затем надо представить себе идеальное сопротивление, сделанное так, как показано на фиг. 22.3. Два провода, которые мы считаем идеальными проводниками, тянутся от клемм  $a$  и  $b$  к двум концам бруска, сделанного из материала, оказывающего сопротивление току. Следуя нашей обычной линии рассуждений, приходим к выводу, что разность потенциалов между зажимами  $a$  и  $b$  равна контурному интегралу от внешнего электрического поля, равному также контурному интегралу от



Фиг. 22.3. Сопротивление.

электрического поля по пути, проходящему через бруск. Отсюда следует, что ток  $I$  через сопротивление пропорционален напряжению  $V$  на зажимах:

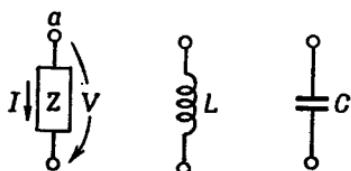
$$I = \frac{V}{R},$$

где  $R$  называется сопротивлением. Позже мы убедимся, что связь между силой тока  $I$  и напряжением  $V$  для реальных проводящих материалов только приближенно можно считать линейной. Мы убедимся также, что считать эту приближенную пропорциональность не зависящей от частоты изменений тока и напряжения можно лишь тогда, когда частота не слишком высока. И тогда для переменных токов напряжение на зажимах оказывается в фазе с током, а это значит, что сопротивление — число действительное:

$$z = z_R = R. \quad (22.10)$$

Результаты наших рассуждений о трех сосредоточенных элементах цепи — индуктивности, емкости, сопротивлении — подытожены фиг. 22.4. На этом рисунке, как и на предыдущих, напряжение отмечено стрелкой, направленной от одной клеммы к другой. Если напряжение «положительно», т. е. если на клемме  $a$  потенциал выше, чем на клемме  $b$ , то стрелка указывает направление «падения напряжения».

Хотя мы сейчас говорим о переменных токах, конечно, можно включить сюда и особый случай цепей постоянного тока, если



Фиг. 22.4. Идеальные сосредоточенные элементы цепи (пассивные).

$$Z = \frac{V}{I} \quad i\omega L \quad \frac{1}{i\omega C} \quad R$$

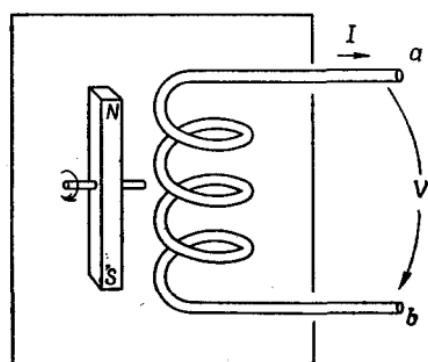
перейти к пределу, когда частота  $\omega$  стремится к нулю. При нулевой частоте, т. е. при постоянном токе, импеданс индуктивности стремится к нулю; между клеммами наступает короткое замыкание. Импеданс же емкости при постоянном токе стремится к бесконечности; цепь между клеммами размыкается. Принимать в расчет при постоянных токах нужно только обычные сопротивления: они не зависят от частоты.

В описанных до сих пор элементах цепи ток и напряжение были пропорциональны друг другу. Если одно равно нулю, то и другое равно нулю. Обычно мы мыслим на таком языке: приложенное напряжение «ответственно» за ток или ток «создает» напряжение на клеммах. Элемент словно в некотором смысле «отвечает» на «приложенные» внешние условия. По этой причине такие элементы называются *пассивными*. Тем самым их можно противопоставить активным элементам, таким, как генераторы, которые мы рассмотрим в следующем параграфе и которые представляют собой *источники* колебаний токов или напряжений в цепи.

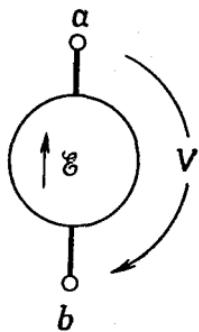
## § 2. Генераторы

Поговорим теперь об *активном* элементе цепи, источнике и токов и напряжений в ней, т. е. о *генераторе*.

Пусть у нас имеется катушка, наподобие катушки самоиндукции, но только витков у нее немного и на магнитное поле ее собственного тока можно внимания не обращать. Эта катушка, однако, находится в переменном магнитном поле, подобном тому, какое создается вращающимся магнитом (фиг. 22.5). (Мы уже видели ранее, что такое вращающееся магнитное поле можно также создать с помощью подходящей совокупности катушек с переменными токами.) Сделаем снова несколько упрощающих допущений. Это все те же допущения, которые мы делали, говоря об индуктивности. В частности, мы предполагаем, что меняющееся магнитное поле ограничено лишь небольшой областью



Фиг. 22.5. Генератор, состоящий из закрепленной катушки и врачающегося магнитного поля.



Фиг. 22.6. Обозначение идеального генератора.

поблизости от катушки и за пределами генератора, в пространстве между зажимами, оно не чувствуется.

Повторяя опять в точности тот же анализ, что и для индуктивности, рассмотрим контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  вдоль замкнутой петли, которая начинается на зажиме  $a$ , проходит по катушке до зажима  $b$  и возвращается к началу по пространству между зажимами. Снова заключаем, что разность потенциалов между зажимами  $a$  и  $b$  равна всему интегралу от  $\mathbf{E}$  вдоль петли:

$$V = - \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Этот контурный интеграл равен э.д.с. в цепи, и поэтому разность потенциалов  $V$  между выводами генератора тоже равна скорости изменения магнитного потока сквозь катушку:

$$V = - \mathcal{E} = \frac{d}{dt} (\text{поток}). \quad (22.11)$$

Предполагается далее, что у идеального генератора магнитный поток через катушку определяется внешними условиями (такими, как угловая скорость вращающегося магнитного поля) и что на него никак не влияют токи, текущие через генератор. Таким образом, генератор (по крайней мере рассматриваемый нами *идеальный*) — это не импеданс. Разность потенциалов на его зажимах определяется произвольно задаваемой э.д.с.  $\mathcal{E}(t)$ . Такой идеальный генератор представляют символом, показанным на фиг. 22.6. Маленькая стрелка дает направление положительной э.д.с. Положительная э.д.с. в генераторе, изображенном на фиг. 22.6, создает напряжение  $V = \mathcal{E}$  с более высоким потенциалом на зажиме  $a$ .

Можно сделать генератор и по-другому. Внутри он будет устроен совершенно иначе, но снаружи, на зажимах, он ничем не будет отличаться от только что описанного. Представим катушку, которая вращается в *неподвижном* магнитном поле (фиг. 22.7).

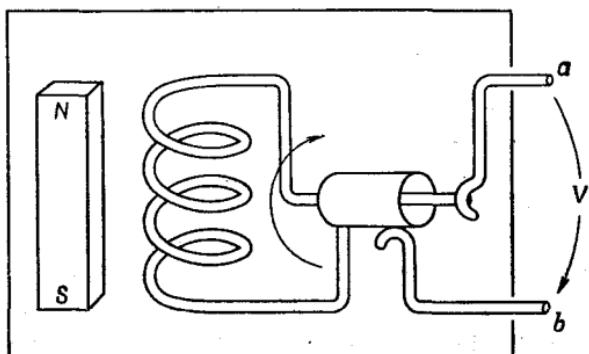
Мы изобразили магнитную палочку, чтобы показать наличие магнитного поля, но его можно, конечно, заменить любым другим источником постоянного магнитного поля, скажем добавочной катушкой, по которой течет постоянный ток. Как показано на рисунке, вращающаяся катушка связана с внешним миром скользящими контактами, или «кольцами». Нас опять интересует разность потенциалов, которая появляется между клеммами *a* и *b*, т. е. интеграл от электрического поля между *a* и *b* по пути снаружи генератора.

Теперь в этой системе уже нет изменяющихся магнитных полей и на первый взгляд кажется удивительным, откуда на зажимах генератора берется напряжение. Действительно, ведь нигде же внутри генератора нет никаких электрических полей. Мы, как обычно, предполагаем для наших идеальных элементов, что внутри них провода сделаны из идеально проводящего материала; а, как уже неоднократно повторялось, электрическое поле внутри идеального проводника равно нулю. Но это не всегда верно. Это неверно тогда, когда проводник движется в магнитном поле. Правильное утверждение таково: общая сила, действующая на произвольный заряд внутри идеального проводника, должна быть равна нулю. Иначе в нем возник бы бесконечный ток свободных зарядов. Так что надо брать сумму электрического поля  $E$  и векторного произведения скорости проводника  $v$  на магнитное поле  $B$ ; это есть полная сила, действующая на единичный заряд, и вот она-то всегда равна нулю:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{в идеальном проводнике}). \quad (22.12)$$

А наше прежнее утверждение о том, что внутри идеальных проводников электрических полей не бывает, верно лишь тогда, когда скорость проводника  $v$  равна нулю; в противном случае справедливо выражение (22.12).

Вернемся к нашему генератору, показанному на фиг. 22.7. Теперь мы видим, что контурный интеграл от электрического



Фиг. 22.7. Генератор, состоящий из катушки, вращающейся в неподвижном магнитном поле.

поля  $E$  между зажимами  $a$  и  $b$  по проводящим путям генератора должен быть равен контурному интегралу от  $v \times B$  по тому же пути:

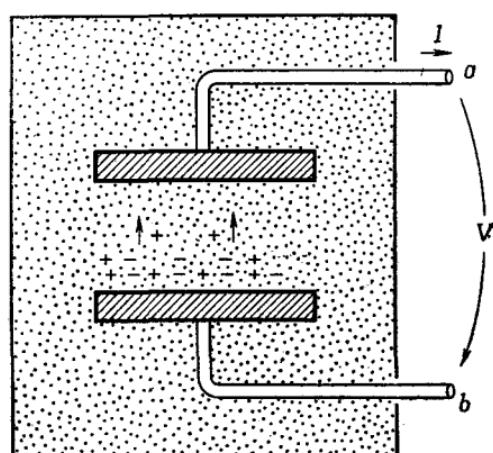
$$\int_a^b E \cdot ds = - \int_a^b (v \times B) \cdot ds. \quad (22.13)$$

Внутри проводника                          Внутри проводника

Однако по-прежнему остается верным, что контурный интеграл от  $E$  по замкнутой петле, включая возвращение от зажима  $b$  к  $a$  вне генератора, должен быть равен нулю, потому что меняющиеся магнитные поля отсутствуют. Так что первый интеграл в (22.13) по-прежнему равен  $V$  — напряжению на зажимах. Оказывается, что интеграл в правой части (22.13) просто равен быстроте изменения потока через катушку, а значит, по правилу потока, равен э.д.с. катушки. И опять получается, что разность потенциалов между зажимами равна э.д.с. цепи в согласии с уравнением (22.11). Так что все равно, какой у нас генератор: меняется ли в нем магнитное поле возле закрепленной катушки, вертится ли в закрепленном магнитном поле катушка, — внешние свойства генераторов одни и те же. На клеммах всегда существует напряжение  $V$ , которое не зависит от тока в цепи, а определяется только условиями внутри генератора, формируемыми по нашему произволу.

Поскольку мы пытаемся понять работу генератора, основываясь на уравнениях Максвелла, может возникнуть вопрос об обычном химическом элементе, о батарейке для карманного фонарика. Это тоже генератор, т. е. источник напряжения, хотя и применяется он только в цепях постоянного тока. Проще всего разобраться в элементе, изображенном на фиг. 22.8. Представьте две металлические пластины, погруженные в какой-то химический раствор. Пусть раствор содержит в себе положительные

и отрицательные ионы. Мы предположим еще, что ионы одного сорта, скажем отрицательные, много массивнее ионов, имеющих



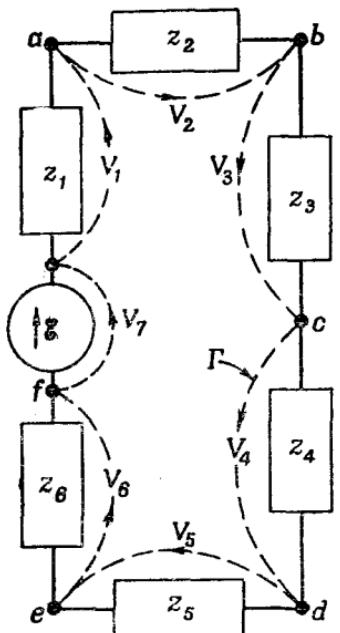
Фиг. 22.8. Химический элемент.

противоположную полярность, так что их движение в растворе (диффузия) происходит намного медленнее. Наконец, положим, что тем или иным способом удалось добиться изменения концентрации раствора от места к месту, так что число ионов обеих полярностей, скажем у нижней пластинки, становится намного больше концентрации ионов у верхней пластинки. Благодаря большей подвижности положительные ионы легче проникнут в область низких концентраций, так что будет наблюдаться легкий избыток положительных зарядов, достигающих верхней пластиинки. Она зарядится положительно, а нижняя будет обладать избытком отрицательного заряда. По мере того как все больше и больше зарядов диффундирует к верхней пластинке, потенциал ее будет расти, пока возникающее между пластинками электрическое поле не создаст силу, действующую на ионы, которая компенсирует их избыточную подвижность. Два электрода быстро достигают разности потенциалов, характерной для внутреннего устройства этого элемента.

Рассуждая так же, как это мы делали, когда говорили об идеальном конденсаторе, мы убедимся, что, если нет избытка диффузии ионов какого-либо знака, разность потенциалов между зажимами  $a$  и  $b$  равна просто контурному интегралу от электрического поля между электродами. Конечно, между конденсатором и таким химическим элементом есть существенная разница. Если на мгновение закоротить выводы конденсатора, он разрядится и разности потенциалов между выводами уже не будет. В случае же химического элемента ток с зажимов можно снимать непрерывно, никак не изменяя при этом э.д.с., пока, конечно, реактивы в элементе не израсходуются. Известно, что в реальном элементе разность потенциалов на зажимах убывает по мере возрастания снимаемого с него тока. Но при нашей идеализации задачи легко себе представить, что у нас есть идеальный элемент, в котором напряжение на электродах не зависит от силы тока. Тогда реальный элемент можно рассматривать как идеальный, соединенный последовательно с сопротивлением.

### **§ 3. Сети идеальных элементов; правила Кирхгофа**

Как мы видели в предыдущем параграфе, очень просто описывать идеальные элементы схем, говоря лишь о том, что происходит вне элемента. Ток и напряжение связаны линейно. Но очень сложно описать все то, что на самом деле происходит внутри элемента, и весьма трудно при этом пользоваться языком уравнений Максвелла. Представьте, что вам нужно точно описать электрические и магнитные поля внутри радиоприемника, состоящего из сотен сопротивлений, емкостей и самоиндукций.



Фиг. 22.9. Сумма падений напряжения вдоль любого замкнутого пути равна нулю.

Было бы непосильным делом проанализировать такую мешанину, пользуясь уравнениями Максвелла. Но, делая множество приближений, которые мы описали в § 2, и переводя существенные черты реальных элементов схем на язык идеализаций, можно проанализировать электрическую цепь сравнительно просто. Сейчас мы покажем, как это делается.

Пусть имеется цепь, которая состоит из генератора и нескольких

импедансов, связанных между собой так, как показано на фиг. 22.9. Согласно нашим приближениям, в областях между отдельными элементами цепи магнитного поля нет. Поэтому интеграл от  $\mathbf{E}$  вдоль любой кривой, которая не проходит ни через один из элементов, равен нулю. Рассмотрим кривую  $\Gamma$ , показанную штрихом на фиг. 22.9, которая обходит по цепи кругом. Контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  вдоль этой кривой состоит из нескольких частей. Каждая часть — это интеграл от одного зажима элемента цепи до следующего. Мы назвали этот контурный интеграл падением напряжения на элементе цепи. Тогда весь контурный интеграл равен просто сумме падений напряжения на всех элементах цепи порознь:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum V_n.$$

А поскольку контурный интеграл равен нулю, то получается, что сумма разностей потенциалов вдоль всего замкнутого контура цепи равна нулю:

$$\sum_{\text{Вдоль любого контура}} V_n = 0. \quad (22.14)$$

Этот результат следует из одного из уравнений Максвелла, утверждающего, что в области, где нет магнитных полей, криволинейный интеграл от  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру равен нулю.

Теперь рассмотрим другую цепь (фиг. 22.10). Горизонтальная линия, соединяющая выводы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , нарисована для того,

чтобы показать, что эти выводы все связаны между собой или что они соединяются проводами с ничтожным сопротивлением. Во всяком случае такой чертеж означает, что все выводы  $a, b, c, d$  находятся под одним потенциалом, а выводы  $e, f, g$  и  $h$  — тоже под одним. Тогда падение напряжения  $V$  на любом из четырех элементов одинаковое.

Но одна из наших идеализаций состояла в том, что на выводах импедансов сосредоточиваются пренебрежимо малые количества электричества. Предположим теперь, что и электрическим зарядом, накапливаемым на соединительных проводах, тоже можно пренебречь. Тогда сохранение заряда требует, чтобы любой заряд, покинувший один из элементов цепи, немедленно входил в какой-либо другой элемент цепи. Или, что то же самое, чтобы алгебраическая сумма токов, входящих в любую из точек соединения, была равна нулю. Под точкой соединения мы понимаем любую совокупность выводов, таких, как  $a, b, c, d$ , которые соединены друг с другом. Такая совокупность соединенных между собой выводов обычно называется «узлом». Сохранение заряда, стало быть, требует, чтобы в цепи, показанной на фиг. 22.10, было

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (22.15)$$

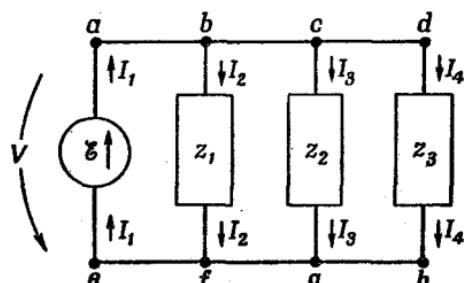
Сумма токов, входящих в узел, состоящий из четырех выводов  $e, f, g, h$ , тоже должна быть равна нулю:

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (22.16)$$

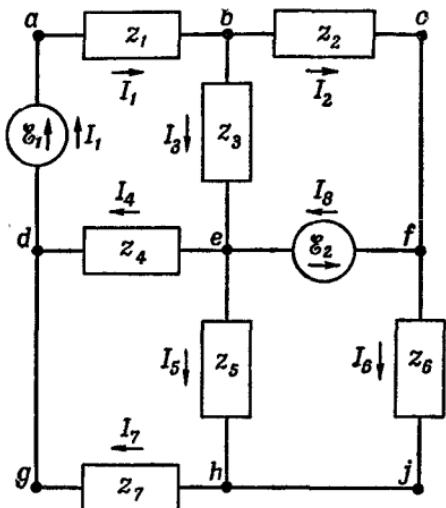
Ясно, что это то же самое уравнение, что и (22.15). Оба эти уравнения не независимы. Общее правило гласит, что *сумма токов, втекающих в любой узел, обязана быть равна нулю*:

$$\sum_{\substack{\text{В любой} \\ \text{узел}}} I_n = 0. \quad (22.17)$$

Наше прежнее заключение о том, что сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна нулю, должно выполняться для каждого контура сложной цепи. Точно так же наш результат, что сумма сил токов, втекающих в узел, равна нулю, тоже должен выполняться для любого узла. Эти два уравнения



Фиг. 22.10. Сумма токов, входящих в любой узел, равна нулю.



Фиг. 22.11. Анализ цепи с помощью правил Кирхгофа.

известны под названием *правил Кирхгофа*. С их помощью можно найти силы токов и напряжения в какой угодно цепи.

Рассмотрим, например, цепь посложнее (фиг. 22.11). Как определить токи и на-

преждения в ней? Прямой путь решения таков. Рассмотрим каждый из четырех вспомогательных контуров цепи. (Скажем, один контур проходит через клеммы *a*, *b*, *e*, *d* и обратно к *a*.) Для каждого замкнутого контура напишем уравнение первого правила Кирхгофа — сумма падений напряжения вдоль всякого контура равна нулю. Нужно помнить, что падение напряжения считается положительным, если направление обхода *совпадает* с направлением тока, и отрицательным, если направление обхода *противоположно* направлению тока; и надо еще помнить, что падение напряжения на генераторе равно *отрицательному* значению э.д.с. в этом направлении. Так что для контура *abeda* получается

$$z_1 I_1 + z_3 I_3 + z_4 I_4 - \mathcal{E}_1 = 0.$$

Прилагая те же правила к остальным контурам, получим еще три сходных уравнения.

После этого нужно написать уравнения для токов в каждом узле цепи. Например, складывая все токи в узле *b*, получаем

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0.$$

Аналогично, в узле *e* уравнение для токов принимает вид

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

В изображенной схеме таких уравнений для токов пять. Оказывается, однако, что любое из этих уравнений можно вывести из остальных четырех, поэтому независимых уравнений только четыре. Итого в нашем распоряжении восемь независимых линейных уравнений: четыре для напряжений, четыре для токов. Из них можно получить восемь независимых токов. А если станут известны токи, то определится и вся цепь. Падение на-

пряжения на любом элементе дается током через этот элемент, умноженным на его импеданс (а для источников напряжения они вообще известны заранее).

Мы видели, что одно из уравнений для тока зависит от остальных. Вообще-то уравнений для напряжения тоже можно написать больше, чем нужно. Хотя в схеме фиг. 22.11 и рассматривалась только четверка самых маленьких контуров, но ничего не стоило взять другие контуры и выписать для них уравнения для напряжений. Можно было взять, скажем, путь  $abcfed$ . Или сделать обход по пути  $abcfehgda$ . Вы видите, что контуров — множество. И, анализируя сложные схемы, ничего не стоит получить слишком много уравнений. Но хоть есть правила, которые подсказывают, как надо поступать, чтобы вышло наименьшее количество уравнений, обычно и так бывает сразу понятно, как выписать нужное число простейших уравнений. Кроме того, одно-два лишних уравнения вреда не приносят. К неверному ответу они не приведут, разве только немногого запутают выкладки.

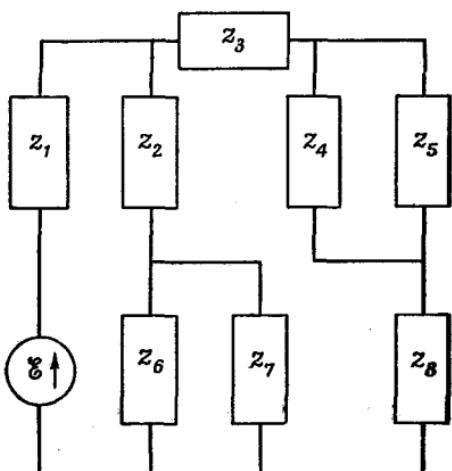
В гл. 25 (вып. 2) мы показали, что, если два импеданса  $z_1$  и  $z_2$  соединены последовательно, они эквивалентны одиночному импедансу  $z_s$ , равному

$$z_s = z_1 + z_2. \quad (22.18)$$

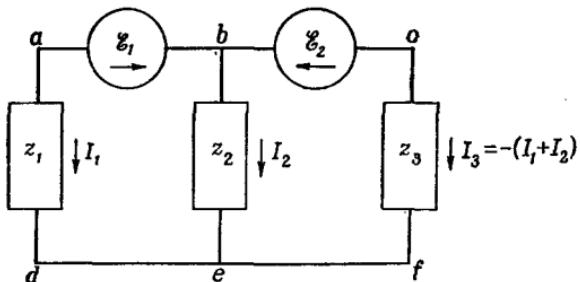
Кроме того, было показано, что, когда два импеданса соединены параллельно, они эквивалентны одиночному импедансу  $z_p$ , равному

$$z_p = \frac{1}{(1/z_1) + (1/z_2)} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (22.19)$$

Если вы теперь оглянетесь назад, то увидите, что выводя эти результаты, на самом деле вы пользовались правилами Кирхгофа. Часто можно проанализировать сложную схему, повторно



Фиг. 22.12. Цепь, которую можно проанализировать с помощью последовательных и параллельных комбинаций.



Фиг. 22.13. Цепь, которую нельзя проанализировать с помощью последовательных и параллельных комбинаций.

применяя формулы для последовательного и параллельного импедансов. Скажем, таким способом можно проанализировать схему, показанную на фиг. 22.12. Импедансы  $z_4$  и  $z_5$  можно заменить их параллельным эквивалентом, то же можно сделать с импедансами  $z_6$  и  $z_7$ . Затем импеданс  $z_2$  можно скомбинировать с параллельным эквивалентом  $z_6$  и  $z_7$  по правилу последовательного соединения импедансов. Так постепенно можно свести всю схему к генератору, последовательно соединенному с одним импедансом  $Z$ . И тогда ток через генератор просто равен  $\mathcal{E}/Z$ . А действуя в обратном порядке, можно найти токи в каждом импедансе.

Однако бывают совсем простые схемы, которые этим методом не проанализируешь. Например, схема фиг. 22.13. Чтобы проанализировать эту цепь, надо расписать уравнения для токов и напряжений по правилам Кирхгофа. Давайте проделаем это. Имеется только одно уравнение для токов:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

откуда

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$

Выкладки можно сэкономить, если этот результат сразу же подставить в уравнения для напряжений. В этой схеме таких уравнений два:

$$-\mathcal{E}_1 + I_2 z_2 - I_1 z_1 = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_2 - (I_1 + I_2) z_3 - I_2 z_2 = 0.$$

На два уравнения приходится два неизвестных тока. Решая их, получаем  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{z_2 \mathcal{E}_2 - (z_2 + z_3) \mathcal{E}_1}{z_1 (z_2 + z_3) + z_2 z_3} \quad (22.20)$$

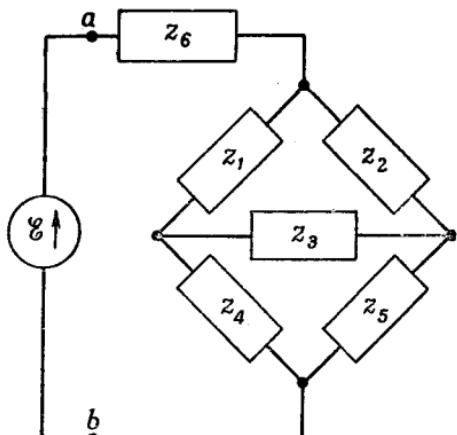
и

$$I_2 = \frac{z_1 \mathcal{E}_2 + z_3 \mathcal{E}_1}{z_1 (z_2 + z_3) + z_2 z_3}. \quad (22.21)$$

А третий ток получается как сумма первых двух.

Вот еще пример цепи, которую по правилам параллельных и последовательных импедансов рассчитывать нельзя

Фиг. 22.14. Мостиковая схема.



(фиг. 22.14). Такую схему называют «мостиком». Она встречается во многих приборах, измеряющих импедансы. В таких схемах обычно интересуются таким вопросом:

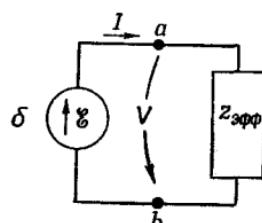
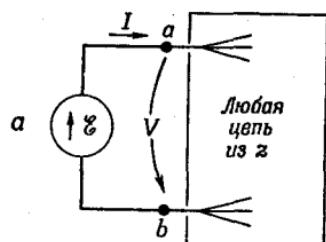
как должны соотноситься различные импедансы, чтобы ток через импеданс  $z_3$  был равен нулю? Вам предоставляется право найти те условия, при которых это действительно так.

#### § 4. Эквивалентные контуры

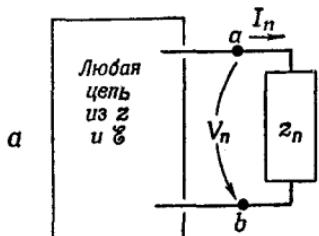
Положим, мы подключили генератор  $\mathcal{E}$  к цепи, в которой есть множество сложных переплетений импедансов (схематически это показано на фиг. 22.15, а). Все уравнения, вытекающие из правил Кирхгофа, линейны, и поэтому, вычислив из них ток  $I$  через генераторы, мы получим величину  $I$ , пропорциональную  $\mathcal{E}$ . Можно написать

$$I = \frac{\mathcal{E}}{z_{\text{эфф}}} ,$$

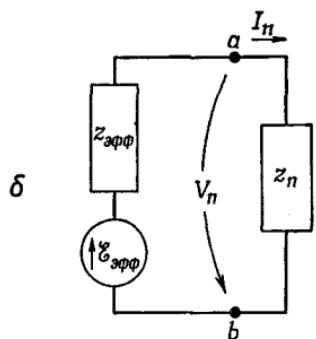
где теперь  $z_{\text{эфф}}$  — это некоторое комплексное число, алгебраическая функция всех элементов цепи. (Если в цепи нет никаких генераторов, кроме упомянутого, то в формуле не будет добавочной части, не зависящей от  $\mathcal{E}$ .) Но получившееся уравнение — это как раз то, которое нужно было бы написать для схемы фиг. 22.15, б. И покуда нас интересует



Фиг. 22.15. Любая сеть пассивных элементов с двумя выводами эквивалентна эффективному импедансу.



Фиг. 22.16. Любую сеть с двумя выводами можно заменить генератором, последовательно соединенным с импедансом.



только то, что происходит слева от зажимов  $a$  и  $b$ , до тех пор обе схемы фиг. 22.15 эквивалентны. И поэтому можно сделать общее утверждение, что любую цепь пассивных элементов с двумя выводами можно заменить одним-единственным импедансом  $z_{\text{эфф}}$ , не изменив в остальной части цепи никаких токов, ни напряжений. Утверждение

это, естественно, всего лишь мелкое замечание о том, что следует из правил Кирхгофа, а в конечном счете — из линейности уравнений Максвелла.

Идею эту можно обобщить на схемы, в которые входят как генераторы, так и импедансы. Представьте, что мы глядим на эту схему «с точки зрения» одного из импедансов, который мы обозначим  $z_n$  (фиг. 22.16,  $a$ ). Если бы решить уравнение для тока, мы бы увидели, что напряжение  $V_n$  между зажимами  $a$  и  $b$  есть линейная функция  $I_n$ , которую можно записать в виде

$$V_n = A - BI_n. \quad (22.22)$$

Здесь  $A$  и  $B$  зависят от генераторов и импедансов в цепи слева от зажимов. Например, в схеме, показанной на фиг. 22.13, мы находим  $V_1 = I_1 z_1$ . Это можно переписать [используя (22.20)] в виде

$$V_1 = \left[ \left( \frac{z_2}{z_2 + z_3} \right) \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \right] - \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} I_1. \quad (22.23)$$

Тогда полное решение мы получаем, комбинируя это уравнение с уравнением для импеданса  $z_1$ , т. е. с  $V_1 = I_1 z_1$ , или в общем случае комбинируя (22.22) с

$$V_n = I_n z_n.$$

Если мы рассмотрим теперь случай, когда  $z_n$  подключается к простой цепи из последовательно соединенных генератора и

импеданса (см. фиг. 22.15, б), то уравнение, соответствующее (22.22), примет вид

$$V_n = \mathcal{E}_{\text{эфф}} - I_n z_{\text{эфф}},$$

что совпадает с (22.22), если принять  $\mathcal{E}_{\text{эфф}} = A$  и  $z_{\text{эфф}} = B$ . Значит, если нас интересует лишь то, что происходит *направо* от выводов *a* и *b*, то произвольную схему фиг. 22.16 можно всегда заменить эквивалентным сочетанием генератора, последовательно соединенного с импедансом.

## § 5. Энергия

Мы видели, что для создания в индуктивности тока *I* надо из внешней цепи доставить энергию  $U = \frac{1}{2}LI^2$ . Когда ток спадает до нуля, эта энергия уводится обратно во внешнюю цепь.

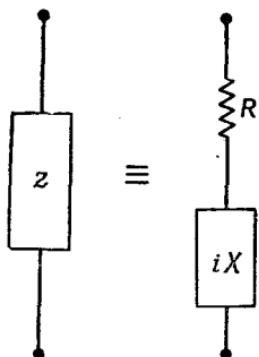
В идеальной индуктивности механизма потерь энергии нет. Когда через индуктивность течет переменный ток, энергия перетекает то туда, то сюда — от индуктивности к остальной части цепи и обратно, но средняя скорость, с какой энергия передается в цепь, равна нулю. Мы говорим, что индуктивность — *недиссиативный элемент*, в ней не растратывается (не «диссирирует») электрическая энергия.

Точно так же возвращается во внешнюю цепь и энергия конденсатора  $U = \frac{1}{2}CV^2$ , когда он разряжается. Когда он стоит в цепи переменного тока, то энергия течет то в него, то из него, но полный поток энергии за каждый цикл равен нулю. Идеальный конденсатор — тоже недиссиативный элемент.

Мы знаем, что э. д. с. — это источник энергии. Когда ток *I* течет в направлении э.д.с., то энергия поставляется во внешнюю цепь со скоростью  $dU/dt = \mathcal{E}I$ . Если электричество гонят *против* э. д. с. (с помощью других генераторов), то э. д. с. поглощает энергию со скоростью  $\mathcal{E}I$ ; поскольку *I* отрицательно, то и  $dU/dt$  отрицательно.

Если генератор подключен к сопротивлению *R*, то ток через сопротивление равен  $I = \mathcal{E}/R$ . Энергия, поставляемая генератором со скоростью  $\mathcal{E}I$ , поглощается сопротивлением. Эта энергия тратится на нагрев сопротивления и для электрической энергии цепи фактически уже потеряна. Мы говорим, что электрическая энергия рассеивается, *диссириует* в сопротивлении. Скорость, с которой она рассеивается, равна  $dU/dt = RI^2$ .

В цепи переменного тока средняя скорость потерь энергии в сопротивлении — это среднее значение  $RI^2$  за цикл. Поскольку  $I = \hat{I}e^{i\omega t}$  (что, собственно, означает, что *I* меняется как  $\cos \omega t$ ), то среднее значение  $I^2$  за цикл равно  $|\hat{I}|^2/2$ , потому что ток в максимуме — это  $|\hat{I}|$ , а среднее значение  $\cos^2 \omega t$  равно  $\frac{1}{2}$ .



Фиг. 22.17. Любой импеданс эквивалентен последовательному соединению чистого сопротивления и чистого реактанса.

А что можно сказать о потерях энергии, когда генератор подключен к произвольному импедансу  $z$ ? (Под «потерями» мы, конечно, понимаем превращение электрической энергии в тепловую.) Всякий импеданс  $z$  может быть разбит на действительную и мнимую части, т. е.

$$z = R + iX, \quad (22.24)$$

где  $R$  и  $X$  — числа действительные. С точки зрения эквивалентных схем можно сказать, что всякий импеданс эквивалентен сопротивлению, последовательно соединенному с чисто мнимым импедансом, называемым *реактансом* (фиг. 22.17).

Мы уже видели раньше, что любая цепь, содержащая только  $L$  и  $C$ , обладает импедансом, выражаемым чисто мнимым числом. А раз в любом из  $L$  и  $C$  в среднем никаких потерь не бывает, то и в чистом реактансе, в котором имеются только  $L$  и  $C$ , потеря энергии не бывает. Можно показать, что это должно быть верно для всякого реактанса.

Если генератор с э. д. с.  $\mathcal{E}$  подсоединен к импедансу  $z$  (см. фиг. 22.17), то его э. д. с. должна быть связана с током  $I$  из генератора соотношением

$$\mathcal{E} = I(R + iX). \quad (22.25)$$

Чтобы найти, с какой средней скоростью подводится энергия, нужно усреднить произведение  $\mathcal{E}I$ . Но теперь следует быть осторожным. Оперируя с такими произведениями, надо иметь дело только с действительными величинами  $\mathcal{E}(t)$  и  $I(t)$ . (Действительные части комплексных функций изображают настоящие физические величины только тогда, когда уравнения линейны; сейчас же речь идет о *произведении*, а это, несомненно, вещь нелинейная.)

Пусть мы начали отсчитывать  $t$  так, что амплитуда  $\hat{I}$  оказалась действительным числом, скажем  $I_0$ ; тогда истинное изменение  $I$  во времени дается формулой

$$I = I_0 \cos \omega t.$$

Входящая в уравнение (22.25) э.д.с.— это действительная часть от

$$I_0 e^{i\omega t} (R + iX),$$

или

$$\mathcal{E} = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t. \quad (22.26)$$

Два слагаемых в (22.26) представляют падение напряжений на  $R$  и  $X$  (см. фиг. 22.17). Мы видим, что падение напряжения на сопротивлении находится в фазе с током, тогда как падение напряжения на чисто реактивной части находится с током в противофазе.

Средняя скорость потерь энергии  $\langle P \rangle_{cp}$ , текущей от генератора, есть интеграл от произведения  $\mathcal{E}I$  за один цикл, деленный на период  $T$ ; иными словами,

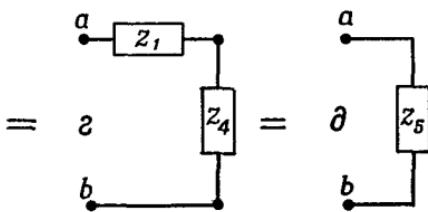
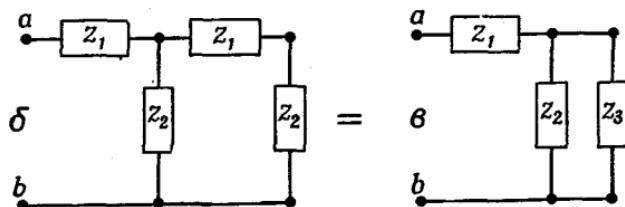
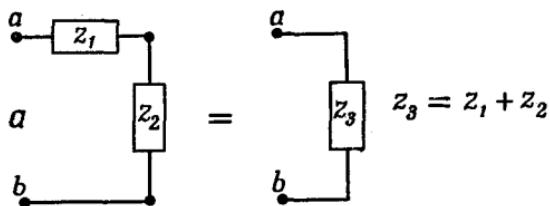
$$\langle P \rangle_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}Idt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t dt.$$

Первый интеграл равен  $\frac{1}{2}I_0^2 R$ , а второй равен нулю. Стало быть, средняя потеря энергии в импедансе  $z=R+iX$  зависит лишь от действительной части  $z$  и равна  $I_0^2 R / 2$ . Это согласуется с нашим прежним выводом о потерях энергии в сопротивлении. В реактивной части потерь энергии не бывает.

## § 6. Лестничная сеть

А теперь мы рассмотрим интереснейшую цепь, которую можно выражать через параллельные и последовательные сочетания. Начнем с цепи, изображенной на фиг. 22.18, *a*. Сразу видно, что импеданс между зажимами *a* и *b* просто равен  $z_1 + z_2$ . Возьмем теперь цепь потруднее (фиг. 22.18, *b*). Ее можно проанализировать с помощью правил Кирхгофа, но нетрудно обойтись и последовательными и параллельными комбинациями. Два импеданса на правом конце можно заменить одним  $z_3 = z_1 + z_2$  (см. фиг. 22.18, *c*). Тогда два импеданса  $z_2$  и  $z_3$  можно заменить их эквивалентным параллельным импедансом  $z_4$  (фиг. 22.18, *z*). И наконец,  $z_1$  и  $z_4$  эквивалентны одному импедансу  $z_5$  (фиг. 22.18, *d*).

А теперь можно поставить забавный вопрос: что произойдет, если к цепи, показанной на фиг. 22.18, *b*, бесконечно подключать все новые и новые звенья (штриховая линия на фиг. 22.19, *a*)? Можно ли решить задачу о такой бесконечной цепи? Представьте, это совсем не трудно. Прежде всего мы замечаем, что такая бесконечная цепь не меняется, если новое звено подключить к «переднему» концу. Ведь если к бесконечной цепи добавляется одно звено, она остается все той же бесконечной



$$\frac{1}{z_4} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \quad z_5 = z_1 + z_4$$

Фиг. 22.18. Эффективный импеданс лестницы.

цепью. Пусть мы обозначили импеданс между зажимами  $a$  и  $b$  бесконечной цепи через  $z_0$ ; тогда импеданс всего того, что справа от зажимов  $c$  и  $d$ , тоже равен  $z_0$ . Поэтому если смотреть с переднего конца, то вся цепь представляется в виде, показанном на фиг. 22.19, б. Заменяя два параллельных импеданса  $z_2$  и  $z_0$  одним и складывая его с  $z_1$ , сразу же получаем импеданс всего сочетания

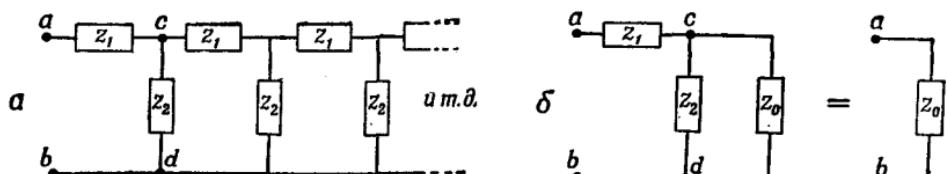
$$z = z_1 + \frac{1}{(1/z_2) + (1/z_0)} \quad \text{или} \quad z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

Но этот импеданс тоже равен  $z_0$ . Получается уравнение

$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

Найдем из него  $z_0$ :

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}. \quad (22.27)$$



Фиг. 22.19. Эффективный импеданс бесконечной лестницы.

Таким образом, мы нашли решение для импеданса бесконечной лестницы повторяющихся параллельных и последовательных импедансов. Импеданс  $z_0$  называется *характеристическим импедансом* такой бесконечной цепи.

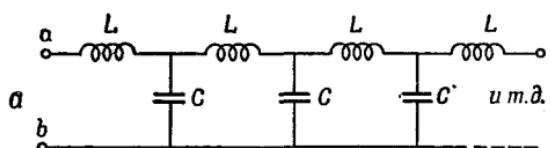
Рассмотрим теперь частный пример, когда последовательный элемент — всегда индуктивность  $L$ , а шунтовой элемент — емкость  $C$  (фиг. 22.20, а). В этом случае импеданс бесконечной сети получается, если положить  $z_1 = i\omega L$  и  $z_2 = 1/i\omega C$ . Заметьте, что первое слагаемое  $z_1/2$  в (22.27) равно просто половине импеданса первого элемента. Естественное было бы поэтому (или по крайней мере проще) рисовать нашу бесконечную сеть так, как показано на фиг. 22.20, б. Глядя на бесконечную сеть из зажима  $a'$ , мы бы увидели характеристический импеданс

$$z_0 = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \quad (22.28)$$

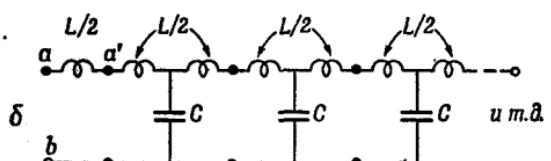
Смотря по тому, какова частота  $\omega$ , наблюдаются два интересных случая. Если  $\omega^2$  меньше  $4/LC$ , то второе слагаемое под корнем меньше первого, и импеданс  $z_0$  станет действительным числом. Если же  $\omega^2$  больше  $4/LC$ , то импеданс  $z_0$  станет чисто мнимым числом и его можно записать в виде

$$z_0 = i \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}}.$$

Раньше мы сказали, что цепь, составленная из одних только мнимых импедансов, таких, как индуктивности и емкости, будет иметь чисто мнимый импеданс. Но как же тогда выходит, что



Фиг. 22.20. Лестница  $L-C$ , изображенная двумя эквивалентными способами.



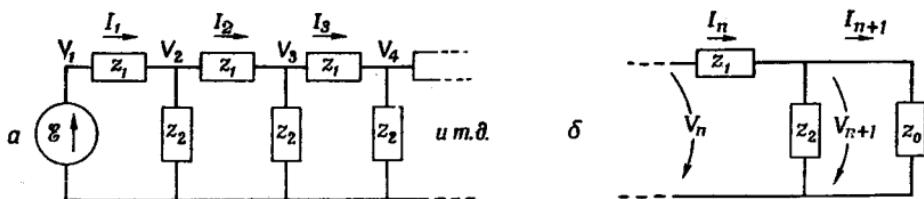
в той цепи, которую мы сейчас рассматриваем (а в ней есть только одни  $L$  и  $C$ ), импеданс при частотах ниже  $\sqrt{4/LC}$  представляет собой чистое сопротивление? Для высоких частот импеданс чисто мнимый, в полном согласии с нашим прежним утверждением. Для низких же частот импеданс — чистое сопротивление и поэтому поглощает энергию. Но как может цепь, подобно сопротивлению, непрерывно поглощать энергию, если она составлена только из индуктивностей и емкостей? Ответ состоит в том, что этих емкостей и самоиндукций бесконечное множество, и получается, что, когда источник соединен с цепью, он обязан сперва снабдить энергией первую индуктивность и емкость, затем вторую, третью и т. д. В цепях подобного рода энергия непрерывно и с постоянной скоростью отсасывается из генератора и безостановочно течет в цепь. Энергия запасается в индуктивностях и емкостях вдоль цепи.

Эта идея подсказывает интересную мысль о том, что фактически происходит внутри цепи. Следует ожидать, что если к переднему концу цепи подключить источник, то действие этого источника начнет распространяться вдоль по цепи к бесконечному концу. Распространение волн вдоль линии очень похоже на излучение от антенны, которая отбирает энергию от питающего ее источника; точнее, можно ожидать, что такое распространение происходит, когда импеданс действителен, т. е. когда  $\omega$  меньше  $\sqrt{4/LC}$ . Но когда импеданс чисто мнимый, т. е. при  $\omega$ , больших  $\sqrt{4/LC}$ , такого распространения ожидать не следует.

## § 7. Фильтры

В предыдущем параграфе мы видели, что бесконечная лестничная сеть (см. фиг. 22.20) непрерывно поглощает энергию, если эта энергия подводится с частотой, которая ниже некоторого критического значения  $\sqrt{4/LC}$ , называемого *граничной частотой*  $\omega_0$ . У нас возникла мысль, что этот эффект можно понять, основываясь на представлении о непрерывном переносе энергии вдоль линии. С другой стороны, на высоких частотах (при  $\omega > \omega_0$ ) непрерывного поглощения энергии не бывает; тогда следует ожидать, что токи, видимо, не смогут «проникнуть» далеко вдоль линии. Поглядим, верны ли эти представления.

Пусть передний конец лестницы соединен с каким-то генератором переменного тока, и нас интересует, как выглядит напряжение, скажем, в 754-м звене лестницы. Поскольку сеть бесконечна, при переходе от одного звена к другому происходит всегда одно и то же; так что можно просто посмотреть, что случается, когда мы переходим от  $n$ -го звена к  $(n+1)$ -му. Токи  $I_n$  и напряжения  $V_n$  мы определим так, как показано на фиг. 22.21, а.



Фиг. 22.21. Нахождение фактора распространения лестницы.

Напряжение  $V_{n+1}$  можно получить из  $V_n$ , если вспомнить, что остаток лестницы (за  $n$ -м звеном) всегда можно заменить ее характеристическим импедансом  $z_0$ ; и тогда достаточно проанализировать только схему фиг. 22.21, б. Мы прежде всего замечаем, что каждое  $V_n$ , поскольку это напряжение на зажимах сопротивления  $z_0$ , должно быть равно  $I_n z_0$ . Кроме того, разность между  $V_n$  и  $V_{n+1}$  равна просто  $I_n z_1$ :

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

Получается отношение

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0},$$

которое можно назвать *фактором распространения* для одного звена лестницы; обозначим его  $\alpha$ . Для всех звеньев

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z_0}, \quad (22.29)$$

и напряжение за  $n$ -м звеном равно

$$V_n = \alpha^n \phi. \quad (22.30)$$

Теперь ничего не стоит найти напряжение за 754-м звеном; оно просто равно произведению  $\phi$  на 754-ю степень  $\alpha$ .

Как выглядит  $\alpha$  для лестницы  $L-C$  на фиг. 22.20, а? Взяв  $z_0$  из уравнения (22.27) и  $z_1 = i\omega L$ , получим

$$\alpha = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)}. \quad (22.31)$$

Если частота на входе ниже граничной частоты  $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ , то корень — число действительное, и модули комплексных чисел в числите и знаменателе одинаковы. Поэтому значение  $\alpha$  по модулю равно единице; можно написать

$$\alpha = e^{i\delta},$$

а это означает, что величина (модуль) напряжения в каждом звене одна и та же; меняется только фаза. Она меняется на число

δ; оно на самом деле отрицательно и представляет собой «задержку» напряжения по мере того, как последнее проходит по сети.

А для частот выше граничной частоты  $\omega_0$  лучше вынести в числителе и знаменателе (22.31) множитель  $i$  и переписать его в виде

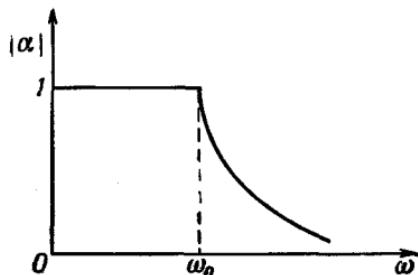
$$\alpha = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)}. \quad (22.32)$$

Теперь фактор распространения  $\alpha$  — число действительное, притом меньшее единицы. Это означает, что напряжение в некотором звене всегда меньше напряжения в предыдущем звене; множитель пропорциональности равен  $\alpha$ . При частотах выше  $\omega_0$  напряжение быстро спадает по мере движения вдоль сети. Кривая модуля  $\alpha$  как функции частоты похожа на график, приведенный на фиг. 22.22.

Мы видим, что поведение  $\alpha$  как выше, так и ниже  $\omega_0$  согласуется с нашим представлением о том, что сеть передает энергию при  $\omega < \omega_0$  и задерживает ее при  $\omega > \omega_0$ . Говорят, что сеть «пропускает» низкие частоты и «отбрасывает», или «отфильтровывает», высокие. Всякая сеть, устроенная так, чтобы ее характеристики менялись указанным образом, называется «фильтром». Мы проанализировали «фильтр низкого пропускания», или «низких частот».

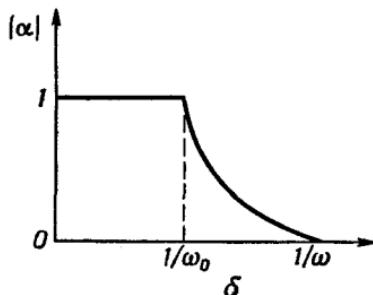
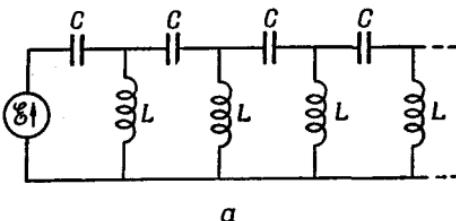
Вас может удивить — к чему все это обсуждение бесконечных сетей, если на самом деле они невозможны? Но вся хитрость в том и заключается, что те же характеристики вы обнаружите и в конечной сети, если заключите ее импедансом, совпадающим с характеристическим импедансом  $z_0$ . Практически, конечно, невозможно точно воспроизвести характеристический импеданс несколькими простыми элементами, такими, как  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Но в некоторой полосе частот нередко этого можно добиться в хорошем приближении. Этим способом можно сделать конечную фильтрующую сеть со свойствами, очень близкими к тем, которые проявляются в бесконечном фильтре. Скажем, лестница  $L-C$  будет во многом вести себя так, как было описано, если на конце ее помещено чистое сопротивление  $R = \sqrt{L/C}$ .

А если в нашей лестнице  $L-C$  мы поменяем местами  $L$  и  $C$ , чтобы получилась лестница, показанная на фиг. 22.23, а,



Фиг. 22.22. Фактор распространения одного звена лестницы.

Ф и г. 22.23. Высокочастотный фильтр (а) и его фактор распространения как функция  $1/\omega$  (б).

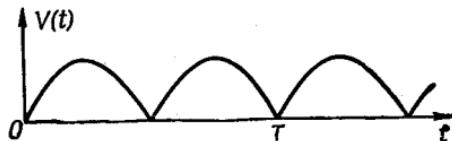


то получится фильтр, который пропускает *высокие* частоты и отбрасывает низкие. Пользуясь уже полученными результатами, легко понять, что происходит в этой сети. Вы уже, наверно, заметили, что всегда, когда  $L$  заменяется на  $C$  и наоборот, то и  $i\omega$  заменяется на  $1/i\omega$  и наоборот. Значит, все, что происходило раньше с  $\omega$ , теперь будет происходить с  $1/\omega$ . В частности, можно узнать, как меняется  $\alpha$  с частотой, взяв фиг. 22.22 и повсюду вместо  $\omega$  написав  $1/\omega$  (фиг. 22.23, б).

У описанных фильтров высоких и низких частот есть многочисленные технические приложения. Фильтр  $L-C$  низких частот часто используется как «сглаживающий» фильтр в цепях постоянного тока. Если нам нужно получить постоянный ток от источника переменного тока, мы включаем выпрямитель, который позволяет течь току только в одну сторону. Из выпрямителя выходит пульсирующий ток, график которого выглядит как функция  $V(t)$ , показанная на фиг. 22.24. Постоянство такого тока — никудышное: он шатается вверх и вниз, а нам нужен постоянный ток, чистенький, гладенький, как от батареи аккумуляторов. Этого можно добиться, включив фильтр низких частот между выпрямителем и нагрузкой.

Из гл. 50 (вып. 4) мы уже знаем, что временная функция на фиг. 22.24 может быть представлена в виде наложения постоян-

Ф и г. 22.24. Напряжение на выходе всеволнового выпрямителя.

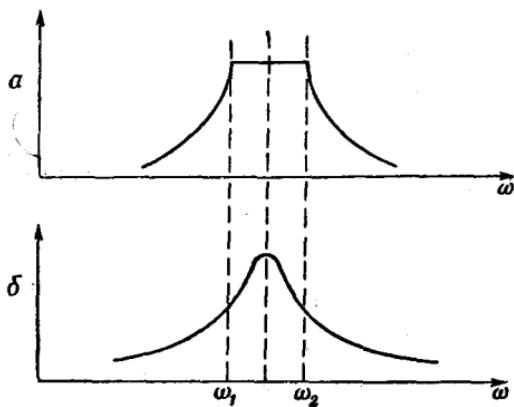


го напряжения на синусную волну плюс синусную волну большей частоты плюс еще более высокочастотную синусоиду и т. д., т. е. как ряд Фурье. Если наш фильтр — линейный (т. е. если, как мы предполагали,  $L$  и  $C$  при изменении токов или напряжений не меняются), то то, что выходит из фильтра, представляет собой тоже наложение выходов от каждой компоненты на входе. Если устроить так, чтобы граничная частота  $\omega_0$  нашего фильтра была значительно ниже наименьшей из частот функции  $V(t)$ , то постоянный ток (у которого  $\omega=0$ ) прекрасно пройдет через фильтр, а амплитуда первой гармоники будет крепко срезана; ну, а амплитуды высших гармоник — тем более. Значит, на выходе можно получить какую угодно гладкость, смотря по тому, на сколько звеньев фильтра у вас хватит денег.

Высокочастотный фильтр нужен тогда, когда необходимо срезать некоторые низкие частоты. Например, в граммофонном усилителе высокочастотный фильтр можно использовать, чтобы музыка неискажалась: он задержит низкочастотное громыхание моторчика и диска.

Можно еще делать и «полосовые» фильтры, отбрасывающие частоты ниже некоторой частоты  $\omega_1$  и частоты выше некоторой другой частоты  $\omega_2$  (больше  $\omega_1$ ), но зато пропускающие все частоты от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Это можно сделать просто, совместив высокочастотный и низкочастотный фильтры, но обычно делают лестничную схему, в которой импедансы  $z_1$  и  $z_2$  имеют более сложный вид — они сами суть комбинации  $L$  и  $C$ . У такого полосового фильтра постоянная распространения может выглядеть так, как на фиг. 22.25, а. Его можно использовать, скажем, чтобы отделять сигналы, которые занимают только некоторый интервал частот, например каждый из каналов телефонной связи в высокочастотном телефонном кабеле или модулированную несущую частоту при радиопередаче.

В гл. 25 (вып. 2) мы видели, что такое фильтрование можно производить еще, используя избирательность обычной резонанс-



Фиг. 22.25. Полосовой фильтр (а) и простой резонансный фильтр (б).

ной кривой (для сравнения она приведена на фиг. 22.25,б). Но резонансный фильтр для некоторых целей подходит хуже, чем полосовой. Вы помните (это было в гл. 48, вып. 4), когда несущая частота  $\omega_c$  модулирована «сигнальной» частотой  $\omega_s$ , то общий сигнал содержит не только несущую, но и две боковые частоты  $\omega_c + \omega_s$  и  $\omega_c - \omega_s$ . В резонансном фильтре эти боковые полосы всегда как-то ослабляются, и чем выше сигнальная частота, тем, как видно из рисунка, больше это ослабление. Поэтому «отклик на частоту» здесь неважный. Высшие музыкальные тоны и вовсе не проходят. Но если взять полосовой фильтр, устроенный так, что ширина  $\omega_2 - \omega_1$  по крайней мере вдвое больше наивысшей сигнальной частоты, то отклик на частоту будет для интересующих нас сигналов плоским.

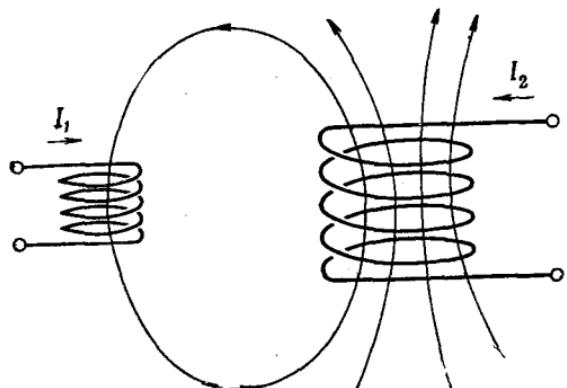
Еще одно замечание о лестничном фильтре: лестница  $L-C$  на фиг. 22.20 — это также приближенное представление передающей линии (фидера). Если имеется длинный проводник, расположенный параллельно другому проводнику (скажем, провод, помещенный в коаксиальном кабеле или подвешенный над землей), то между ними существует какая-то емкость и некоторая индуктивность (из-за магнитного поля между ними). Если представить эту линию составленной из небольших участков  $\Delta l$ , то каждый участок похож на одно звено лестницы  $L-C$  с последовательной индуктивностью  $\Delta L$  и шунтирующей емкостью  $\Delta C$ . Поэтому мы вправе применять здесь наши результаты для лестничного фильтра. Переходя к пределу при  $\Delta l \rightarrow 0$ , мы получим хорошее описание передающей линии. Заметьте, что, когда  $\Delta l$  становится все меньше и меньше, уменьшаются и  $\Delta L$  и  $\Delta C$ , но они уменьшаются в одной и той же пропорции, так что отношение  $\Delta L/\Delta C$  не падает. Поэтому, переходя в уравнении (22.28) к пределу при  $\Delta L$  и  $\Delta C$ , стремящихся к нулю, мы увидим, что характеристический импеданс  $z_0$  — это чистое сопротивление, величина которого равна  $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$ . Отношение  $\Delta L/\Delta C$  можно записать также в виде  $L_0/C_0$ , где  $L_0$  и  $C_0$  — индуктивность и емкость единицы длины линии; тогда

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (22.33)$$

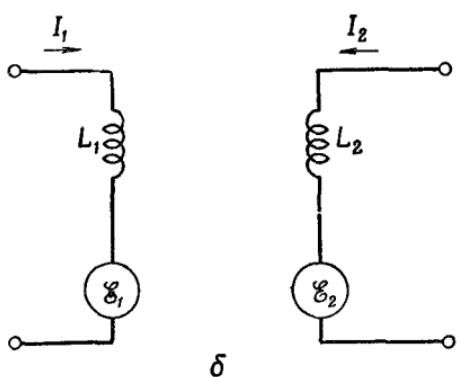
Заметьте еще, что, когда  $\Delta L$  и  $\Delta C$  стремятся к нулю, граничная частота  $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$  уходит в бесконечность. У идеальной передающей линии нет граничной частоты.

## § 8. Другие элементы цепи

До сих пор мы определили только идеальные импедансы цепи — индуктивность, емкость и сопротивление, а также идеальный генератор напряжения. Теперь мы хотим показать, что другие элементы, такие, как взаимоиндукция, или транзисторы,



*a*



*b*

Фиг. 22.26. Эквивалентная схема взаимной индукции.

или радиолампы, можно описать, пользуясь теми же основными элементами. Пусть имеются две катушки, и пусть (это сделано нарочно или как-нибудь иначе) поток от одной из катушек пересекает другую (фиг. 22.26, *a*). Тогда возникает взаимная индукция  $M$  двух катушек, так что, когда ток в одной катушке меняется, в другой генерируется напряжение. Можно ли в наших эквивалентных контурах учесть такой эффект? Можно, поступив следующим образом. Мы видели, что наведенная в каждой из двух взаимодействующих катушек э. д. с. может быть представлена в виде суммы двух частей:

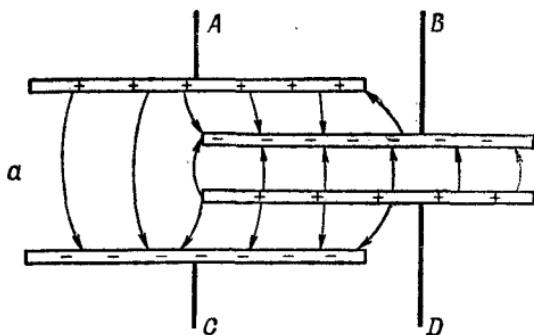
$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}, \quad (22.34)$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.$$

Первое слагаемое возникает из самоиндукции катушки, а второе — из ее взаимоиндукции с другой катушкой. Перед вторым слагаемым может стоять плюс или минус, смотря по тому, как поток от одной катушки пронизывает вторую. Делая те же приближения, как и тогда, когда мы описывали идеальную индуктивность, мы можем сказать, что разность потенциалов на зажимах каждой катушки равна э. д. с. катушки. И тогда оба уравнения (22.34) совпадут с теми, которые получились бы из цепи фиг. 22.26, *b*, если бы э. д. с. в каждом из двух начертанных контуров зависела от тока в противоположном контуре следующим образом:

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2, \quad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1. \quad (22.35)$$

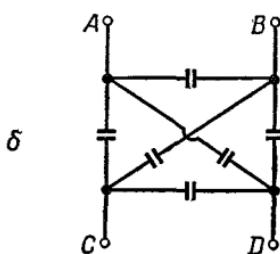
Фиг. 22.27. Эквивалентная схема взаимной емкости.

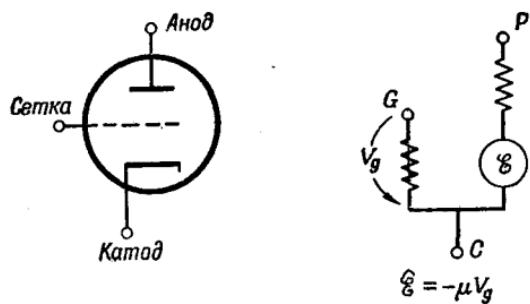


Значит, можно представить действие самоиндукции нормальным образом, а действие взаимной индукции заменить вспомогательным идеальным генератором напряжения. Надо, конечно, иметь еще уравнение, связывающее эту э. д. с. с током в какой-то другой части цепи; но, поскольку это уравнение линейно, мы просто добавляем к нашим уравнениям цепи еще одно линейное уравнение, и все наши прежние выводы насчет эквивалентных схем и тому подобного все равно остаются правильными.

Кроме взаимной индукции, можно еще говорить и о взаимной емкости. До сих пор, говоря о конденсаторах, мы всегда представляли, что у них только по два электрода, но во многих случаях (скажем, в радиолампах) могут быть и по нескольку электродов, расположенных вплотную друг к другу. Если на один из них поместить электрический заряд, то его электростатическое поле наведет заряды на всех остальных электродах и повлияет на их потенциал. В качестве примера рассмотрим расположение четырех пластин (фиг. 22.27, а). Представим, что эти четыре пластины соединяются с внешней цепью проводами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Так вот, пока нас интересуют только электростатические эффекты, эквивалентную схему такого расположения электродов можно считать такой, как на фиг. 22.27, б. Электростатическое взаимодействие электродов (всякого со всяkim) эквивалентно емкости между этой парой электродов.

И, наконец, посмотрим, как нужно представлять в цепях переменного тока такие сложные устройства, как транзисторы или радиолампы. Надо сначала подчеркнуть, что эти устройства часто действуют так, что связь между токами и напряжениями отнюдь не линейна. В этих случаях часть сделанных нами раньше утверждений, а именно те, которые зависят от линейности уравнений, естественно, перестают быть правильными. Но во





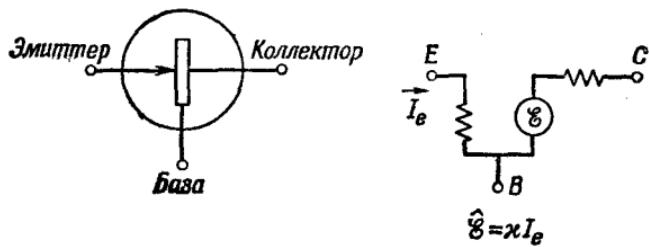
Фиг. 22.28. Низкочастотная эквивалентная схема вакуумного триода.

многих приложениях рабочие характеристики в достаточной мере линейны — так что и транзисторы и лампы можно считать линейными устройствами. Под этим подразумевается, что переменные токи, скажем в анодной цепи радиолампы, прямо пропорциональны разности потенциалов на других электродах, например потенциала сетки и анодного потенциала. Когда же такие линейные соотношения существуют, то к устройствам можно применять представление об эквивалентных схемах.

Как и в случае взаимной индукции, это описание должно включать в себя добавочные генераторы напряжения, которые описывают влияние напряжений или токов в одной части устройства на токи или напряжения в другой его части. К примеру, анодный контур триода, как правило, можно представить сопротивлением, последовательно соединенным с идеальным генератором напряжения, у которого сила источника пропорциональна напряжению на сетке. Получится эквивалентный контур, изображенный на фиг. 22.28 \*. Подобным же образом контур коллектора транзистора удобно представлять в виде сопротивления, последовательно соединенного с идеальным генератором напряжения, сила источника которого пропорциональна силе тока, текущего от эмиттера к базе транзистора. Эквивалентный контур тогда похож на изображенный на фиг. 22.29. До тех пор пока уравнения, описывающие их действие, остаются линейными, мы имеем полное право пользоваться таким представлением для ламп или транзисторов. И тогда, даже если они входят в сложную сеть, все равно наше общее заключение об эквивалентном представлении любого произвольного соединения элементов остается верным.

Контур транзистора и радиолампы имеет одну замечательную способность, которой лишены контуры, включающие одни импедансы: действительная часть эффективного импеданса  $z_{\text{эфф}}$  может стать отрицательной. Мы видели, что действительная

\* Эта эквивалентная схема годится только для низких частот. На высокой частоте эквивалентная схема усложняется, в нее надо включить различные, так называемые «паразитические», емкости и индуктивности.



Фиг. 22.29. Низкочастотная эквивалентная схема транзистора.

часть  $z$  представляет потери энергии. Но важная характеристика транзисторов и радиоламп состоит в том, что они снабжают контур энергией. (Конечно, они ее не «вырабатывают»; они берут энергию у цепи постоянного тока, у источника тока, и превращают ее в энергию переменного тока.) Стало быть, появляется возможность получить контур с отрицательным сопротивлением. Такой контур имеет интересное свойство: если подключить его к импедансу с положительной действительной частью, т. е. к положительному сопротивлению, и устроить все так, чтобы сумма двух действительных частей обратилась в нуль, то в этом объединенном контуре рассеяния энергии не будет. А раз нет потерь энергии, то любое переменное напряжение, стоит его однажды включить, никогда больше не исчезнет. Это основная идея работы осциллятора или генератора сигналов, который можно использовать в качестве источника переменного тока какой угодно частоты.

## ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

§ 1. Реальные  
элементы цепи

§ 2. Конденсатор  
на больших  
частотах

§ 3. Резонансная  
полость

§ 4. Собственные  
колебания  
полости

§ 5. Полости  
и резонансные  
контуры

**Повторить:** гл. 2  
(вып. 2)  
«Резонанс» ;  
гл. 49 (вып. 4)  
«Собственные  
колебания» .

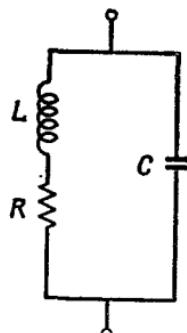
Если посмотреть на любую цепь, состоящую из идеальных импедансов и генераторов, со стороны какой-нибудь пары клемм, то при данной частоте она будет эквивалентна генератору  $\mathcal{E}$ , последовательно соединенному с импедансом  $z$ . Если приложить к этим клеммам напряжение  $V$  и вычислить из уравнений силу тока, то между током и напряжением должна получиться линейная зависимость. Поскольку все уравнения линейны, то и  $I$  должно зависеть от  $V$  линейно и только линейно. А самое общее линейное выражение можно записать в виде

$$I = \frac{1}{z} (V - \mathcal{E}). \quad (23.1)$$

Вообще-то и  $z$  и  $\mathcal{E}$  могут как-то очень сложно зависеть от частоты  $\omega$ . Однако соотношение (23.1) — это то соотношение, которое получилось бы, если бы за клеммами находился просто генератор  $\mathcal{E}(\omega)$ , последовательно соединенный с импедансом  $z(\omega)$ .

Можно поставить и обратный вопрос: имеется какое-то электромагнитное устройство с двумя полюсами (выводами) и нам известна связь между  $I$  и  $V$ , т. е. известны  $\mathcal{E}$  и  $z$  как функции частоты; можно ли всегда найти такую комбинацию идеальных элементов, которая даст эквивалентный внутренний импеданс  $z$ ? Ответ на это таков: для любой разумной, т. е. физически осмысленной функции  $z(\omega)$ , действительно возможно построить с любой степенью точности модель с помощью контура, составленного из конечного числа идеальных элементов. Мы не собираемся изучать общую задачу, а только

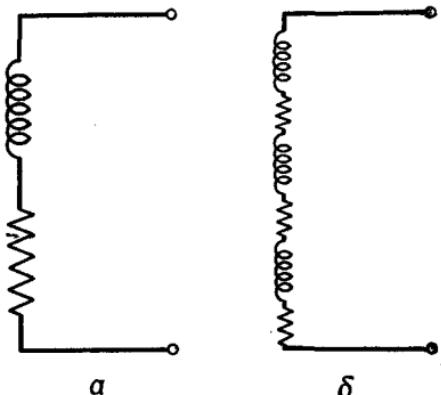
Фиг. 23.1. Эквивалентная схема реального сопротивления.



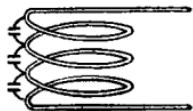
посмотрим, основываясь на физических соображениях, чего можно ожидать в отдельных случаях.

Известно, что ток, протекающий через реальное сопротивление, создает магнитное поле. Значит, каждое реальное сопротивление должно обладать и некоторой индуктивностью. Далее, если к сопротивлению приложена некоторая разность потенциалов, то на его концах должны возникнуть заряды, создающие нужные электрические поля. При изменении напряжения пропорционально меняется и заряд, так что у сопротивления имеется и какая-то емкость. Следует ожидать, что эквивалентная схема реального сопротивления должна иметь такой вид, как на фиг. 23.1. Если сопротивление хорошее, то его так называемые «паразитические элементы»  $L$  и  $C$  малы, так что при тех частотах, для которых оно предназначено,  $\omega L$  много меньше  $R$ , а  $1/\omega C$  — много больше  $R$ . Поэтому «паразитическими» элементами можно пренебречь. Когда же частота повышается, то не исключено, что значение этих элементов возрастет и сопротивление станет похожим на резонансный контур.

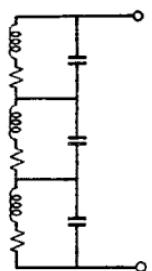
Реальная индуктивность также не совпадает с идеальной, импеданс которой равен  $i\omega L$ . У реальной проволочной катушки бывает какое-то сопротивление, и при низких частотах она фактически эквивалентна индуктивности, последовательно соединенной с сопротивлением (фиг. 23.2,  $a$ ). Вы можете подумать, что



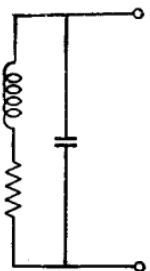
Фиг. 23.2. Эквивалентная схема реальной индуктивности на малых частотах.



а



б



в

Фиг. 23.3. Эквивалентная схема реальной индуктивности на больших частотах.

в реальной катушке сопротивление и индуктивность *объединены*, что сопротивление распределено вдоль всего провода и перемешано с его индуктивностью. Может быть, надо пользоваться контуром, смахивающим скорее на фиг. 23.2, б, где последовательно расставлено несколько маленьких  $R$  и  $L$ ? Однако общий импеданс такого контура просто равен  $\Sigma R + \Sigma i\omega L$ , а это то же самое, что дает более простая диаграмма, изображенная на фиг. 23.2, а.

Когда же частота повышается, то уже нельзя представлять реальную катушку в виде индуктивности плюс сопротивление. Начинают играть роль заряды, которые возникают на проводах, чтобы создать напряжение. Дело выглядит так, как будто между витками провода нанизаны маленькие конденсаторчики (фиг. 23.3, а). Можно попробовать приближенно представить реальную катушку в виде схемы фиг. 23.3, б. На низких частотах эту схему очень хорошо имитирует более простая (фиг. 23.3, в); это опять тот же резонансный контур, который давал нам высокочастотную модель сопротивления. Однако для более высоких частот более сложный контур фиг. 23.3, б подходит лучше. Так что чем точнее вы хотите представить истинный импеданс реальной физической индуктивности, тем больше надо взять идеальных элементов для построения искусственной модели.

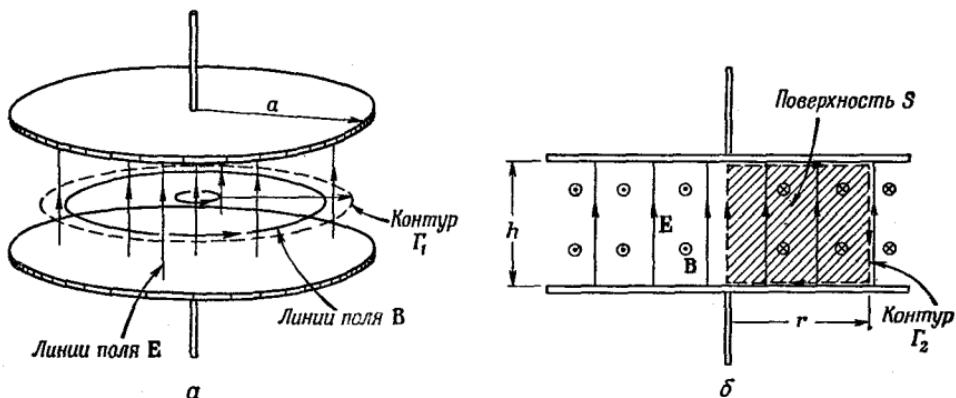
Посмотрим теперь внимательнее на то, что происходит в реальной катушке. Импеданс индуктивности изменяется как  $\omega L$ , значит, он на низких частотах обращается в нуль — «замыкается накоротко», и мы замечаем только сопротивление провода. Если частота начинает расти, то  $\omega L$  вскоре становится больше  $R$  и катушка выглядит почти как идеальная индуктивность. А если подняться по частоте еще выше, то начнут играть роль и емкости. Их импеданс пропорционален  $1/\omega C$ ; он велик на низких частотах. На достаточно низких частотах конденсатор выглядит как «разрыв в цепи», и если его с чем-нибудь запараллелить, то ток через него не пойдет. Но на высоких частотах ток предпочи-

тает течь через емкости между витками, а не через индуктивность. Оттого-то ток в катушке прыгает с одного витка на другой, вовсе не помышляя крутить петлю за петлей там, где ему приходится преодолевать э. д. с. Хоть нам, может быть, и хотелось бы, чтобы ток шел по виткам катушки, но сам-то он выбирает путь полегче, переходя на дорогу наименьшего импеданса.

Если это было бы нужно, то такой эффект можно было бы назвать «высокочастотным барьером» или чем-нибудь в этом роде. Похожие вещи происходят и в других науках. В аэродинамике, скажем, если вы захотите заставить что-то двигаться быстрее звука, а движение рассчитано на малые скорости, то у вас ничего не выйдет. Это не значит, что возник какой-то непрходимый «барьер»; просто надо изменить конструкцию. Точно так же наша катушка, которую первоначально сконструировали как «индуктивность», на очень высоких частотах работает не как индуктивность, а как что-то другое. Для больших частот надо изобретать уже новое устройство.

## § 2. Конденсатор на больших частотах

А теперь обсудим подробнее поведение конденсатора — геометрически идеального конденсатора,— когда частота становится все выше и выше. Мы проследим за изменением его свойств. (Мы предпочли рассматривать конденсатор, а не индуктивность, потому что геометрия пары обкладок много проще геометрии катушки.) Итак, вот конденсатор (фиг. 23.4, *a*), состоящий из двух параллельных круговых обкладок, соединенных с внешним генератором парой проводов. Если зарядить конденсатор постоянным током, то на одной из обкладок появится положительный заряд, на другой — отрицательный, а между обкладками будет однородное электрическое поле.



Фиг. 23.4. Электрическое и магнитное поля между обкладками конденсатора.

Представим теперь, что вместо постоянного тока к обкладкам приложено переменное напряжение низкой частоты. (После мы увидим, какая частота «низкая», а какая «высокая».) Конденсатор, скажем, соединен с низкочастотным генератором. Когда напряжение меняется, то с верхней обкладки положительный заряд убирается и прикладывается отрицательный. В момент, когда это происходит, электрическое поле исчезает, а потом восстанавливается, но уже в обратную сторону. Заряд медленно пляшется туда-сюда, и поле поспевает за ним. В каждый момент электрическое поле однородно (фиг. 23.4, б); есть, правда, небольшие краевые эффекты, но мы намерены ими пренебречь. Величину электрического поля можно записать в виде

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (23.2)$$

где  $E_0$  — постоянно.

Но останется ли это справедливым, когда частота возрастет? Нет, потому что при движении электрического поля вверх и вниз через произвольную петлю  $\Gamma_1$  проходит поток электрического поля (фиг. 23.4, а). А, как вам известно, изменяющееся электрическое поле создает магнитное. Согласно одному из уравнений Максвелла, при наличии изменяющегося электрического поля (как в нашем случае) обязан существовать и криволинейный интеграл от магнитного поля. Интеграл от магнитного поля по замкнутому кругу, умноженный на  $c^2$ , равен скорости изменения во времени электрического потока через поверхность внутри круга (если нет никаких токов):

$$c^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Внутри } \Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (23.3)$$

Итак, сколько же здесь этого магнитного поля? Это узнать не-трудно. Возьмем в качестве петли  $\Gamma_1$  круг радиуса  $r$ . Из симметрии ясно, что магнитное поле идет так, как показано на рисунке. Тогда интеграл от  $\mathbf{B}$  равен  $2\pi r B$ . А поскольку электрическое поле однородно, то поток его равен просто  $E$ , умноженному на  $\pi r^2$ , на площадь круга:

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2. \quad (23.4)$$

Производная  $E$  по времени в нашем переменном поле равна  $i\omega E_0 e^{i\omega t}$ . Значит, в нашем конденсаторе магнитное поле равно

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.5)$$

Иными словами, магнитное поле тоже колеблется, а его величина пропорциональна  $\omega$  и  $r$ .

К какому эффекту это приведет? Когда существует магнитное поле, которое меняется, то возникнут наведенные электрические поля, и действие конденсатора станет слегка похоже на

индуктивность. По мере роста частоты магнитное поле усиливается: оно пропорционально скорости изменения  $E$ , т. е.  $\omega$ . Импеданс конденсатора больше не будет просто равен  $1/i\omega C$ .

Будем увеличивать частоту и посмотрим повнимательнее, что происходит. У нас есть магнитное поле, которое плещется то туда, то сюда. Но тогда и электрическое поле не может, как мы раньше предполагали, остаться однородным! Если имеется изменяющееся магнитное поле, то по закону Фарадея должен существовать и контурный интеграл от электрического поля. Так что если существует заметное магнитное поле (а так и бывает на высоких частотах), то электрическое поле не может быть на всех расстояниях от центра одинаковым. Оно должно так меняться с  $r$ , чтобы криволинейный интеграл от него мог быть равен изменяющемуся потоку магнитного поля.

Посмотрим, сможем ли мы представить себе правильное электрическое поле. Это можно сделать, подсчитав «поправку» к тому, что было на низких частотах,— к однородному полю. Обозначим поле при низких частотах через  $E_1$ , и пусть оно по-прежнему равно  $E_0 e^{i\omega t}$ , а правильное поле запишем в виде

$$E = E_1 + E_2,$$

где  $E_2$ — поправка из-за изменения магнитного поля. При любых  $\omega$  мы будем задавать поле в центре конденсатора в виде  $E_0 e^{i\omega t}$  (тем самым определяя  $E_0$ ), так что в центре поправки не будет:  $E_2=0$  при  $r=0$ .

Чтобы найти  $E_2$ , можно использовать интегральную форму закона Фарадея

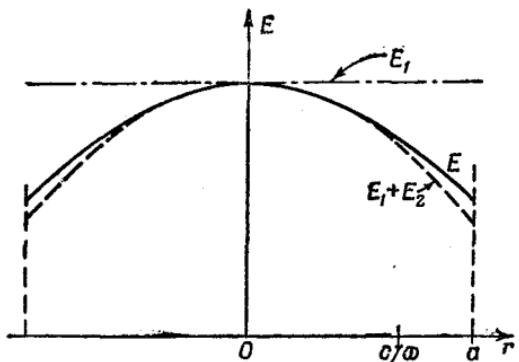
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{поток } B).$$

Интегралы берутся просто, если вычислять их вдоль линии  $\Gamma_2$ , показанной на фиг. 23.4,б и идущей сперва по оси, затем по радиусу вдоль верхней обкладки до расстояния  $r$ , потом вертикально вниз на нижнюю обкладку и обратно к оси по радиусу. Контурный интеграл от  $E_1$  вдоль этой кривой, конечно, равен нулю; значит, в интеграл дает вклад только  $E_2$ , и интеграл равен просто  $-E_2(r)h$ , где  $h$ —зазор между обкладками. (Мы считаем  $E$  положительным, когда оно направлено вверх.) Это равно скорости изменения потока  $B$ , который получится, если вычислить интеграл по заштрихованной площади  $S$  внутри  $\Gamma_2$  (фиг. 23.4,б). Поток через вертикальную полосу шириной  $dr$  равен  $B(r)hdr$ , а суммарный поток

$$h \int B(r) dr.$$

Полагая  $-\partial/\partial t$  от потока равным контурному интегралу от  $E_2$ , получаем

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B(r) dr. \quad (23.6)$$



Фиг. 23.5. Электрическое поле между обкладками конденсатора на высоких частотах. Краевыми эффектами пренебрегли.

Заметьте, что  $h$  выпало: поля не зависят от величины зазора между обкладками.

Используя для  $B(r)$  формулу (23.5), получаем

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\omega r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}.$$

Дифференцирование по времени даст нам просто еще один множитель  $i\omega$ :

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

Как и ожидалось, наведенное поле стремится свести на нет первоначальное электрическое поле. Исправленное поле  $E = E_1 + E_2$  тогда равно

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.8)$$

Электрическое поле в конденсаторе больше уже не однородно; оно имеет параболическую форму (штриховая линия на фиг. 23.5). Вы видите, что наш простенький конденсатор уже слегка усложняется.

Наши результаты можно использовать для того, чтобы подсчитать импеданс конденсатора на больших частотах. Зная электрическое поле, можно подсчитать заряд обкладок и узнать, как ток через конденсатор зависит от частоты  $\omega$ . Но эта задача нас сейчас не интересует. Нас больше интересует другое: что станется, если частота будет продолжать повышаться, что произойдет на еще больших частотах? Но разве мы уже не кончили наш расчет? Нет, потому что раз мы исправили электрическое поле, то, значит, магнитное поле, которое мы раньше подсчитали, больше уже не годится. Приближенно магнитное поле (23.5) правильно, но только в первом приближении. Обозначим его  $B_1$ , а (23.5) перепишем в виде

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.9)$$

Вспомните, что это поле появилось от изменения  $E_1$ . А правильное магнитное поле будет создаваться изменением суммарного электрического поля  $E_1 + E_2$ . Если магнитное поле представить в виде  $B = B_1 + B_2$ , то второе слагаемое — это просто добавочное поле, создаваемое полем  $E_2$ . Чтобы узнать  $B_2$ , надо повторить все те же рассуждения, которые приводились, когда подсчитывали  $B_1$ : контурный интеграл от  $B_2$  вдоль кривой  $\Gamma_1$  равен скорости изменения потока  $E_2$  через  $\Gamma_1$ . Опять получится то же уравнение (23.4), но  $B$  в нем надо заменить на  $B_2$ , а  $E$  — на  $E_2$ :

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} (\text{поток } E_2 \text{ через } \Gamma_1).$$

Поскольку  $E_2$  с радиусом меняется, то для получения его потока надо интегрировать по круговой поверхности внутри  $\Gamma_1$ . Беря в качестве элемента площади  $2\pi r dr$ , напишем этот интеграл в виде

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r dr.$$

Значит,  $B_2(r)$  выразится так:

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r) r dr. \quad (23.10)$$

Подставляя сюда  $E_2(r)$  из (23.7), получаем интеграл от  $r^3 dr$ , который равен, очевидно,  $r^4/4$ . Наша поправка к магнитному полю окажется равной

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.11)$$

Но мы еще не кончили! Раз магнитное поле  $B$  вовсе не такое, как мы сперва думали, то мы, значит, неверно подсчитывали  $E_2$ . Надо найти еще поправку к  $E$ , вызываемую добавочным магнитным полем  $B_2$ . Эту добавочную поправку к электрическому полю назовем  $E_3$ . Она связана с магнитным полем  $B_2$  так же, как  $E_2$  была связана с  $B_1$ . Можно опять прибегнуть к тому же самому соотношению (23.6), изменив в нем только индексы:

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) dr. \quad (23.12)$$

Подставляя сюда наш новый результат (23.11), получаем новую поправку к электрическому полю:

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.13)$$

Если теперь наше дважды исправленное поле записать в виде  $E = E_1 + E_2 + E_3$ , то мы получим

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[ 1 - \frac{1}{2^2} \left( \frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left( \frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (23.14)$$

Изменение электрического поля с радиусом происходит уже не по параболе, как было на фиг. 23.5; на больших радиусах значение поля лежит чуть выше кривой  $(E_1 + E_2)$ .

Мы пока еще не дошли до конца. Новое электрическое поле вызовет новую поправку к магнитному полю, а заново подправленное магнитное поле вызовет необходимость дальнейшей поправки к электрическому и т. д. и т. д. Но у нас уже есть все нужные формулы. Для  $B_3$  можно использовать (23.10), изменив индексы при  $B$  и  $E$  с 2 до 3.

Очередная поправка к электрическому полю равна

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left( \frac{\omega r}{c} \right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

С этой степенью точности все электрическое поле дается, стало быть, формулой

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[ 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left( \frac{\omega r}{2c} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left( \frac{\omega r}{2c} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left( \frac{\omega r}{c} \right)^6 + \dots \right], \quad (23.15)$$

где численные коэффициенты написаны в таком виде, что становится ясно, как продолжить ряд.

Окончательно получается, что электрическое поле между обкладками конденсатора на любой частоте дается произведением  $E_0 e^{i\omega t}$  на бесконечный ряд, который содержит только переменную  $\omega r/c$ . Можно, если мы захотим, определить специальную функцию, обозначив ее через  $J_0(x)$ , как бесконечный ряд в скобках формулы (23.15):

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^6 + \dots. \quad (23.16)$$

Тогда искомое решение есть произведение  $E_0 e^{i\omega t}$  на эту функцию при  $x = \omega r/c$ :

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0 \left( \frac{\omega r}{c} \right). \quad (23.17)$$

Мы обозначили нашу специальную функцию через  $J_0$  потому, что, естественно, не мы первые с вами занялись задачей колебаний в цилиндре. Функция эта появилась давным-давно, и ее уже привыкли обозначать  $J_0$ . Она всегда возникает, когда

вы решаете задачу о волнах, обладающих цилиндрической симметрией. Функция  $J_0$  по отношению к цилиндрическим волнам — это то же, что косинус по отношению к прямолинейным волнам. Итак, это очень важная функция. И изобретена она очень давно. Затем с нею связал свое имя математик Бессель. Индекс нуль означает, что Бессель изобрел целую кучу разных функций, а наша — самая первая из них.

Другие функции Бесселя —  $J_1$ ,  $J_2$  и т. д. — относятся к цилиндрическим волнам, сила которых меняется при обходе вокруг оси цилиндра.

Полностью скорректированное электрическое поле между обкладками нашего кругового конденсатора, даваемое формулой (23.17), изображено на фиг. 23.5 сплошной линией. Для не очень больших частот нашего второго приближения вполне хватает. Третье приближение было бы еще лучше — настолько хорошо, что если его начертить, то вы бы не заметили разницы между ним и сплошной линией. В следующем параграфе вы увидите, однако, что может понадобиться и весь ряд, чтобы получилось аккуратное описание поля на больших радиусах или на больших частотах.

### § 3. Резонансная полость

Посмотрим теперь, что даст наше решение для электрического поля между обкладками конденсатора, если продолжать увеличивать частоту все выше и выше. При больших  $\omega$  параметр  $x = \omega r/c$  тоже становится большим, и первые несколько слагаемых ряда для  $J_0$  от  $x$  быстро возрастают. Это означает, что парабола, которую мы начертили на фиг. 23.5, на больших частотах изгибается книзу кручё.

В самом деле, она выглядит так, как будто поле на высокой частоте все время старается обратиться в нуль где-то при  $c/\omega$ , примерно равном половине  $a$ . Давайте посмотрим, действительно ли функция  $J_0$  проходит через нуль и становится отрицательной. Сперва испытаем  $x=2$ :

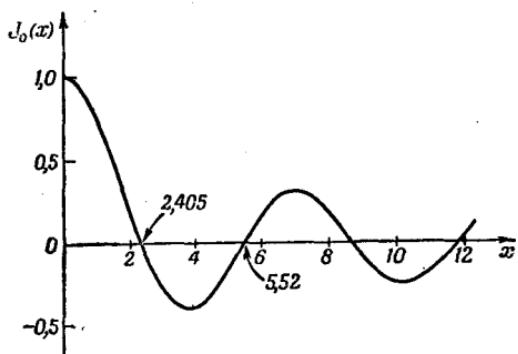
$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0,22.$$

Это еще не нуль; но попробуем число побольше, скажем  $x=2,5$ . Подстановка дает

$$J_0(2,5) = 1 - 1,56 + 0,61 - 0,09 = -0,04.$$

В точке  $x=2,5$  функция  $J_0$  уже перешла через нуль. Результаты при  $x=2$  и при  $x=2,5$  выглядят так, как будто  $J_0$  прошла через нуль на одной пятой пути от 2,5 до 2. Поэтому надо проверить число 2,4:

$$J_0(2,4) = 1 - 1,44 + 0,52 - 0,08 = 0,00.$$



Фиг. 23.6. Функция Бесселя  $J_0(x)$ .

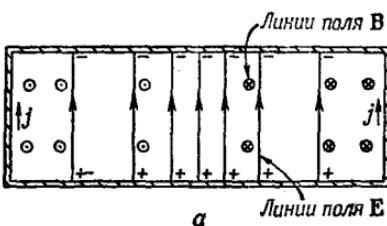
С точностью до двух знаков после запятой получился нуль. Если рассчитывать точнее (или, поскольку функция  $J_0$  известна, если разыскать ответ в книжке), то обнаружится, что  $J_0$  проходит через нуль при  $x=2,405$ . Мы провели расчет собственноручно, чтобы показать вам, что вы тоже способны открывать подобные вещи, а не заимствовать их из книг.

А если уж вы посмотрели про  $J_0$  в книжке, то интересно выяснить, как она идет при больших значениях  $x$ ; она напоминает кривую на фиг. 23.6. Когда  $x$  возрастает,  $J_0(x)$  колеблется от положительных значений к отрицательным и обратно, постепенно уменьшая размах колебаний.

Мы получили интересный результат: если достаточно увеличить частоту, то электрические поля в центре конденсатора и у его края могут быть направлены в противоположные стороны. Например, пусть  $\omega$  так велико, что  $x=\omega r/c$  на внешнем краю конденсатора равно 4; тогда на фиг. 23.6 краю конденсатора отвечает абсцисса  $x=4$ . Это означает, что наш конденсатор работает при частоте  $\omega=4c/a$ . И на краю обкладок электрическое поле будет довольно велико, но направлено не туда, куда можно было ожидать, а в обратную сторону. Эта ужасная вещь может произойти с конденсатором на больших частотах. При переходе к очень большим частотам электрическое поле по мере удаления от центра конденсатора много раз меняет свое направление. Кроме того, имеется еще связанное с этими электрическими полями магнитное поле. Не удивительно, что наш конденсатор при высоких частотах уже не напоминает идеальной емкости. Можно даже задуматься над тем, на что похож он сильнее: на емкость или на индуктивность. Надо к тому же подчеркнуть, что на краях конденсатора происходят и более сложные эффекты, которыми мы пренебрегли. Например, там происходит еще излучение волн за края конденсатора, так что настоящие поля куда сложнее тех, которые мы рассчитали. Впрочем, мы не будем сейчас заниматься этими эффектами.

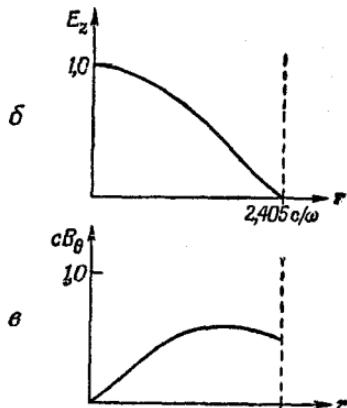
Можно было бы, конечно, попробовать представить себе для конденсатора эквивалентную цепь, но, вероятно, будет

*Фиг. 23.7. Электрическое и магнитное поля в закрытой цилиндрической банке.*



лучше, если мы просто примем, что тот конденсатор, который мы сконструировали для низкочастотных полей, больше не годится, когда частоты слишком велики. И если мы хотим изучить, как действует такой объект на высоких частотах, нам нужно оставить те приближения к уравнениям Максвелла, которые мы делали, изучая цепи, и вернуться к полной системе уравнений, полностью описывающей поля в пространстве. Вместо того чтобы манипулировать с идеализированными элементами цепи, надо оперировать с реальными проводниками, с такими, какие они есть на самом деле, учитывая все поля в пространстве между ними. Например, если нам нужен резонансный контур на высокие частоты, то не нужно пытаться его сконструировать с помощью одной катушки и плоского конденсатора.

Мы уже упомянули, что плоский конденсатор, который мы рассматривали, похож, с одной стороны, на емкость, а с другой — на индуктивность. От электрического поля возникают заряды на поверхностях обкладок, а от магнитного — обратные э.д.с. Не может ли оказаться, что перед нами уже готовый резонансный контур? Оказывается, да. Представьте, что мы выбрали такую частоту, при которой картина электрического поля падает до нуля на каком-то расстоянии от края диска; иначе говоря, мы выбрали  $\omega a/c$  большим, чем 2,405. Всюду на окружности, центр которой лежит на оси обкладок, электрическое поле обратится в нуль. Возьмем кусок жести и вырежем полоску такой ширины, чтобы она как раз поместилась между плоскими обкладками конденсатора. Затем изогнем ее в форме цилиндра такого радиуса, на котором электрическое поле равно нулю. Раз там нет электрического поля, то по вставленному в конденсатор цилинду никаких токов не потечет, и ни электрические, ни магнитные поля не изменятся. Мы, стало быть, смогли



закоротить друг на друга обкладки конденсатора, ничего не изменив в нем. И посмотрите, что получилось: выпла настоящая цилиндрическая банка с электрическим и магнитным полями внутри, причем никак не связанная с внешним миром. Поля внутри не изменятся, даже если отрезать выступающие края обкладок и провода, ведущие к конденсатору. Останется только закрытая банка с электрическим и магнитным полями внутри нее (фиг. 23.7, а). Электрические поля колеблются то вперед, то назад с частотой  $\omega$ , которая, не забывайте, определила собою диаметр банки. Амплитуда колеблющегося поля  $E$  меняется с расстоянием от оси банки так, как показано на фиг. 23.7, б. Кривая эта — просто первая дуга функции Бесселя нулевого порядка. В банке есть еще и круговое магнитное поле, которое колеблется во времени со сдвигом по фазе на  $90^\circ$  относительно электрического поля.

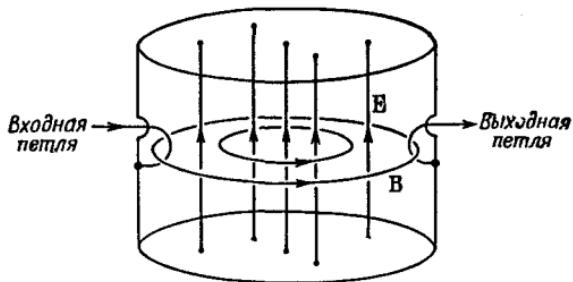
Магнитное поле можно тоже разложить в ряд и изобразить на графике, как это сделано на фиг. 23.7, в.

Но как же это получается, что внутри банки могут существовать электрические и магнитные поля, не соединенные с внешним миром? Оттого, что электрическое и магнитное поля сами себя поддерживают: изменение  $E$  создает  $B$ , а изменение  $B$  создает  $E$  — все в согласии с уравнениями Максвелла. Магнитное поле ответственно за индуктивность, электрическое — за емкость; вместе они создают нечто, похожее на резонансный контур. Заметьте, что описанные нами условия возникают лишь тогда, когда радиус банки в точности равен  $2,405 c/\omega$ . В банке заданного радиуса колеблющиеся электрическое и магнитное поля будут поддерживать друг друга (описанным способом) лишь при этой определенной частоте. Итак, цилиндрическая банка радиуса  $r$  *резонирует* при частоте

$$\omega_0 = 2,405 \frac{c}{r}. \quad (23.18)$$

Мы сказали, что если банка совершенно закрыта, то поля продолжают колебаться так же, как и раньше. Это не совсем так. Это было бы так, если бы стенки банки были идеальными проводниками. В реальной банке, однако, колеблющиеся токи, текущие по стенкам, могут из-за сопротивления материала терять энергию. Колебания полей постепенно замрут. Из фиг. 23.7 ясно, что там должны существовать сильные токи, связанные с электрическими и магнитными полями внутри полости. Из-за того, что вертикальное электрическое поле внезапно исчезает на верхнем и нижнем торцах банки, у него возникает там сильная дивергенция; значит, на внутренней поверхности банки должны появляться положительные и отрицательные заряды (фиг. 23.7, а). Когда электрическое поле меняет направление на обратное, должны менять знак и заряды, так что между верхним

Фиг. 23.8. Подключение резонансной полости.

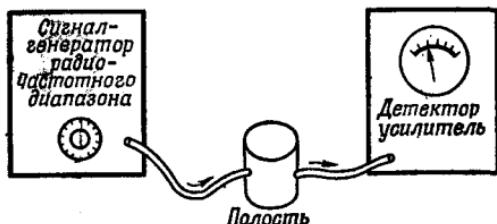


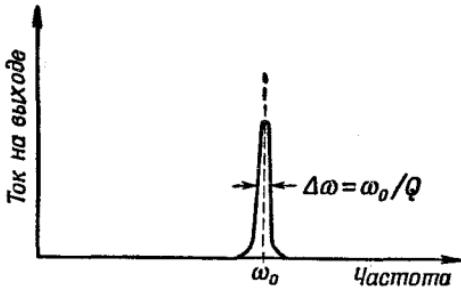
и нижним торцами банки должен течь переменный ток. Он будет течь по боковой поверхности банки, как показано на рисунке. То, что по бокам банки должны течь токи, можно понять еще, рассмотрев то, что происходит в магнитном поле. Кривая на фиг. 23.7, *в* сообщает нам, что магнитное поле на краю банки внезапно обращается в нуль. Такое внезапное изменение магнитного поля может произойти лишь от того, что по стенке течет ток. Этот ток как раз и создает переменные электрические заряды на верхней и нижней обкладках банки.

Вас может удивить наше открытие — обнаружение токов на боковых сторонах банки. А как же с нашим прежним утверждением, что ничего не изменится, если в области, где электрическое поле равно нулю, поставить эти боковые стенки? Вспомните, однако, что, когда мы впервые вставляли в конденсатор эти боковые стенки, верхняя и нижняя обкладки выступали за них, так что магнитные поля оказывались и снаружи нашей банки. И только когда мы отрезали выступающие за края банки части конденсатора, на внутренней части боковых стенок появились какие-то токи.

Хоть электрические и магнитные поля в абсолютно закрытой банке из-за потерь энергии постепенно исчезнут, можно сделать так, чтобы этого не было. Для этого надо провортереть в банке сбоку дырочку и понемножку подавлять энергию, чтобы возмещать потери. Надо взять проволочку, просунуть ее через дырочку в банке и припаять ее к внутренней части стенки, чтобы получилась петля (фиг. 23.8). Если подсоединить эту проволочку к источнику высокочастотного переменного тока, то этот ток будет снабжать энергией электрическое и магнитное поля полости и поддерживать колебания. Это произойдет, конечно,

Фиг. 23.9. Устройство для наблюдения резонанса в полости.





Фиг. 23.10. Кривая отклика на частоту для резонансной полости.

лишь в том случае, если частота источника энергии совпадет с резонансной частотой банки. Если частота у источника не та, то электрические и магнитные поля резонировать не будут и поля в банке окажутся слабенькими.

Резонансное поведение легко наблюдать, если в банке проделать другую дырку и прорезть в нее другую петлю (фиг. 23.8). Изменяющееся магнитное поле, проходящее через эту вторую петлю, будет генерировать в ней э. д. с. индукции. Если теперь эту петлю соединить с внешним измерительным контуром, то токи в нем будут пропорциональными напряженности полей в полости. Представьте теперь, что входная петля нашей полости соединена с радиочастотным сигнал-генератором (фиг. 23.9). Сигнал-генератор состоит из источника переменного тока, частоту которого можно менять, поворачивая ручку на панели генератора. Соединим затем выходную петлю полости с «детектором» — прибором, измеряющим ток от выходной петли. Отсчеты на его шкале пропорциональны этому току. Если затем измерить ток на выходе как функцию частоты сигнал-генератора, то получится кривая, похожая на изображенную на фиг. 23.10. Ток на выходе невелик на всех частотах, кроме тех, которые близки к  $\omega_0$  — резонансной частоте полости. Резонансная кривая очень похожа на ту, о которой говорилось в гл. 23 (вып. 2). Однако ширина резонанса меньше, нежели обычно получается в резонансных контурах, составленных из индуктивностей и емкостей; иначе говоря,  $Q$  (добротность) полости очень высока. Зачастую встречаются даже  $Q$  порядка 100 000 и выше, особенно если внутренние стенки полости сделаны из очень хорошо проводящего материала, например из серебра.

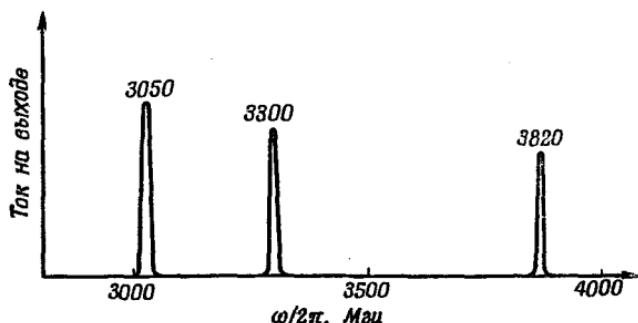
#### § 4. Собственные колебания полости

Предположим, что мы пытаемся проверить свою теорию и делаем измерения с настоящей банкой. Мы берем банку в форме цилиндра диаметром 7,5 см и высотой около 6,3 см. К ней приделываются входная и выходная петли (см. фиг. 23.8). Если рассчитать ожидаемую для этой банки резонансную частоту по формуле (23.18), то получится  $f_0 = \omega_0/2\pi = 3010$  Гц. Мы берем

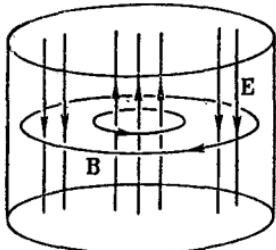
сигнал-генератор с частотой около 3000  $M\text{гц}$  и начинаем слегка ее варьировать, пока не появляется резонанс; мы замечаем, что наибольший ток на выходе возникает, скажем, при частоте 3050  $M\text{гц}$ . Это очень близко к предсказанной резонансной частоте, но до конца не совпадает. Можно привести несколько мыслимых причин расхождения. Может быть, резонансная частота немного изменилась, потому что мы прорезали несколько дырок, чтобы вставить соединительные петли. Но это вряд ли: дырки должны были бы слегка понизить резонансную частоту, так что причина не в этом. Тогда, может быть, в калибровке частоты сигнала-генератора допущена небольшая ошибка или измерения диаметра полости недостаточно точны. Во всяком случае, согласие довольно хорошее.

Но гораздо важнее то, что произойдет, когда частота нашего сигнала-генератора уже значительно удалится от 3000  $M\text{гц}$ . Тогда мы получим такой результат, как на фиг. 23.11. Если начать сильнее менять частоту, то получится, что, кроме ожидавшегося резонанса близ 3000  $M\text{гц}$ , имеется еще другой резонанс возле 3300  $M\text{гц}$  и третий возле 3820  $M\text{гц}$ . Что означают эти добавочные резонансы? Разгадку дает фиг. 23.6. Там мы предположили, что на край банки приходится первый нуль функции Бесселя. Но ведь не исключено, что краю банки отвечает второй нуль функции Бесселя, так что в промежутке от центра банки до ее края происходит одно полное колебание электрического поля (фиг. 23.12, а). Такой тип колебаний полей вполне допустим, и естественно ожидать, что банка начнет резонировать на такой частоте. Но заметьте: второй нуль функции Бесселя наблюдается при  $x=5,52$  (фиг. 23.12, б), т. е. более чем вдвое дальше, чем первый нуль. Значит, резонансная частота колебаний этого типа превышала бы 6000  $M\text{гц}$ . Ее, без сомнения, можно заметить, но это не объясняет нам резонанса при 3300  $M\text{гц}$ .

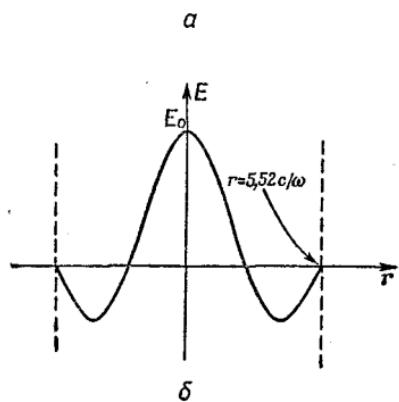
Все дело в том, что в своем анализе поведения резонансной полости мы рассмотрели лишь одно возможное геометрическое расположение электрических и магнитных полей. Мы считали,



Фиг. 23.11. Наблюдаемые резонансные частоты цилиндрической полости.

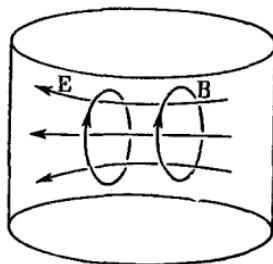


Фиг. 23.12. Более высокочастотный тип колебаний.



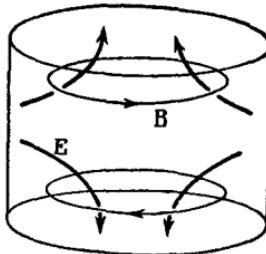
где низ, а где бока? И действительно, можно показать, что существует такой тип колебаний полей внутри банки, при котором электрическое поле идет более или менее вдоль ее диаметра (фиг. 23.13).

И не так уж трудно понять, почему собственная частота колебаний этого типа не будет сильно отличаться от собственной частоты первого рассмотренного нами типа колебаний. Представьте, что вместо цилиндрической полости мы взяли бы полость в виде куба со стороной 7,5 см. Ясно, что у нее будет три разных типа колебаний, но с одной и той же частотой. Тип колебаний, при котором электрическое поле направлено примерно вертикально, будет иметь ту же частоту, что и тип колебаний, при котором электрическое поле направлено вправо и влево. Если теперь этот куб переделать в цилиндр, то частоты как-то изменятся. Но все же можно ожидать, что изменение не будет большим, если



Фиг. 23.13. Поперечный тип колебаний цилиндрической полости.

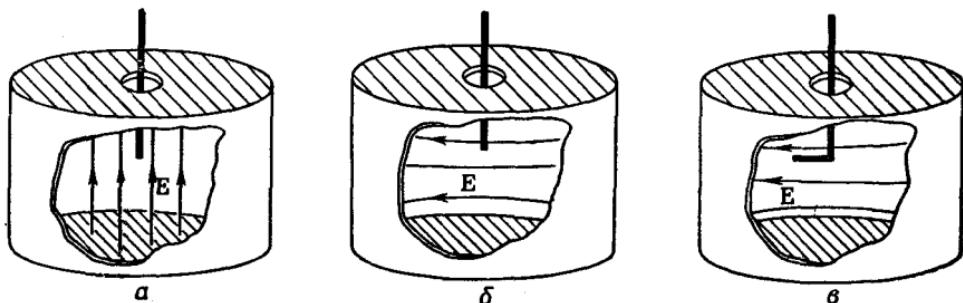
Фиг. 23.14. Еще один тип колебаний цилиндрической полости.



размеры полости изменяются очень мало. Значит, частота того типа колебаний, что на фиг. 23.13, не должна сильно отличаться от частоты на фиг. 23.8. Можно было бы подробно рассчитать собственную частоту того типа колебаний, который показан на фиг. 23.13, но мы этого сейчас делать не будем. Если бы вычисления были проделаны, мы обнаружили бы, что при предположенных размерах резонансная частота получается совсем близко от наблюденного резонанса при 3300  $M\text{гц}$ . С помощью подобных расчетов можно показать, что должен существовать еще другой тип колебаний при другой замеченной нами резонансной частоте — 3800  $M\text{гц}$ . Электрические и магнитные поля, характерные для этого типа колебаний, показаны на фиг. 23.14. Электрическое поле здесь больше не пытается тянуться через всю полость. Оно направлено от боков к торцам.

Теперь, надеюсь, вы уже поверите мне, что при дальнейшем повышении частоты следует ожидать появления все новых и новых резонансов. Существует множество различных типов колебаний; у каждого из них своя частота, отвечающая какому-то частному расположению электрических и магнитных полей. Каждое такое расположение полей называют *собственным колебанием* (или модой). Резонансную частоту каждого типа колебаний можно подсчитать, найдя из уравнений Максвелла электрические и магнитные поля в полости.

Как можно узнать, наблюдая резонанс при некоторой определенной частоте, что за тип колебаний при этом возбуждается? Один способ такой: надо в полость через отверстие просунуть

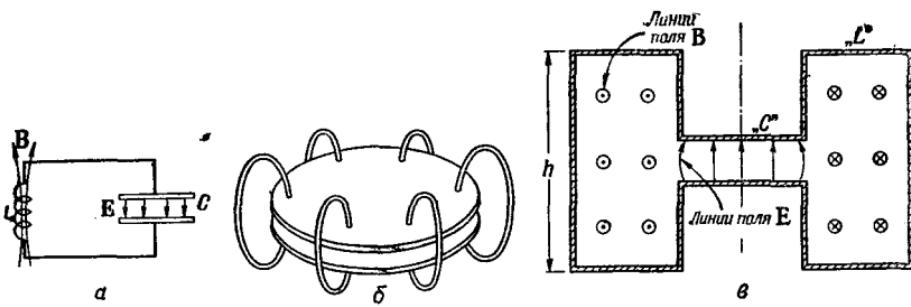


Фиг. 23.15. Небольшая проволочка, введенная в полость, если она параллельна к  $E$ , сильней исказит резонанс, чем та, которая расположена поперек  $E$ .

проводочку. Если электрическое поле направлено вдоль проволочки (фиг. 23.15, а), в ней возникнут сравнительно сильные токи. Они начнут сильно сосать энергию из полей, и резонанс будет подавлен. Если же электрическое поле будет такое, как на фиг. 23.15, б, то проволочка создаст гораздо меньший эффект. В какую сторону в этом месте направлено поле при этом типе колебаний, можно узнать, согнув проволочку так, как показано на фиг. 23.15, в. Поворачивая проволочку, вы увидите, что она сильно изменяет силу резонанса, когда ее конец параллелен  $E$ , и мало влияет на резонанс, если он повернут поперек  $E$ .

## § 5. Полости и резонансные контуры

Хотя описанная нами резонансная полость с виду очень не-похожа на обычный, состоящий из катушки и конденсатора резонансный контур, однако обе резонансные системы тесно между собой связаны. Обе они — члены одной семьи; это всего лишь два крайних примера электромагнитных резонаторов, и между ними можно поместить немало промежуточных стадий. Начнем, скажем, с того, что подключим конденсатор в параллель с индуктивностью и образуем резонансный контур (фиг. 23.16, а). Этот контур будет резонировать на частоту  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Если мы захотим поднять частоту в этом контуре, то этого можно достичь, понизив индуктивность  $L$ , например уменьшив число витков в катушке. Но далеко на таком пути мы не уйдем. Мы дойдем до последнего витка и тогда останется просто кусок провода, соединяющий верх и низ конденсатора. Можно было бы продолжать повышать резонансную частоту, уменьшая емкость; однако можно и дальше уменьшать индуктивность, запараллеливая рядом несколько индуктивностей. Две одновитковые индуктивности, включенные в параллель друг у друга, приведут к половине индуктивности одного витка. Так что, даже доведя катушку до одного витка, можно продолжать повышать резонансную частоту, добавляя отдельные петли, соединяющие верхнюю обкладку конденсатора с нижней. На фиг. 23.16, б показаны обкладки конденсатора, соединенные шестью подобными «одновитковыми индуктивностями». Продолжая прибавлять новые куски провода, мы постепенно перейдем к совершенно замкнутой резонансной системе. Такая система (вернее, ее осевое сечение) показана на фиг. 23.16, в. Теперь индуктивность — это пустотелый цилиндр, прищаянный к краям обкладок конденсатора. Электрические и магнитные поля будут иметь направление, показанное на рисунке. Такой предмет — это, в сущности, уже резонансная полость. Ее называют «нагруженной» полостью. Но можно ее также все еще рассматривать как  $L-C$ -контур, в котором емкостная часть — область, где нахо-



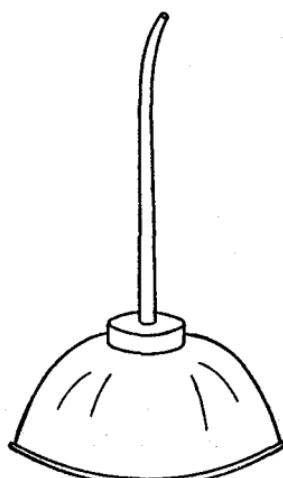
Фиг. 23.16. Резонаторы с возрастающей резонансной частотой.

дится большая часть электрического поля, а индуктивная — где помещается большая часть магнитного поля.

Если мы захотим повысить частоту резонатора на фиг. 23.16, в сильнее, то надо еще уменьшить индуктивность  $L$ . Чтобы этого добиться, следует уменьшить геометрические размеры индуктивной секции, скажем, уменьшить на чертеже высоту  $h$ . При уменьшении  $h$  резонансная частота растет. И в конце концов можно, конечно, дойти до такого положения, при котором высота  $h$  сравняется с промежутком между обкладками. Получится обычная цилиндрическая банка; наш резонансный контур превратится в полый резонатор, показанный на фиг. 23.7.

Заметьте теперь, что в первоначальном резонанском  $L-C$ -контуре (фиг. 23.16) электрические и магнитные поля были совершенно разделены. Когда мы постепенно видоизменяли резонансную систему, все повышая ее частоту, то магнитное поле теснее и теснее сближалось с электрическим, пока в полом резонаторе окончательно не перемешалось с ним.

Хотя все полые резонаторы, о которых в этой главе говорилось, были цилиндрическими, ничего волшебного в самой цилиндрической форме нет. Банка любого вида все равно будет обладать резонансными частотами, отвечающими различным допустимым типам колебаний электрических и магнитных полей. К примеру, у «полости» на фиг. 23.17 будет своя личная совокупность резонансных частот, хотя их и трудно расчитать.



Фиг. 23.17. Еще одна резонансная полость.

## ВОЛНОВОДЫ

**§ 1. Передающая линия**

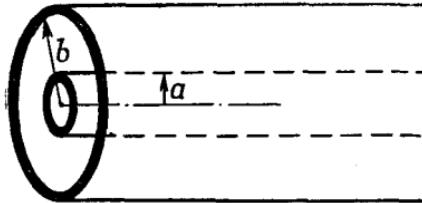
В предыдущей главе мы выяснили, что случится с сосредоточенными элементами цепи, если на них подать очень высокую частоту. Мы пришли к выводу, что резонансный контур можно заменить полостью, внутри которой поля вступают друг с другом в резонанс. Но есть и другой интересный технический вопрос: как связать между собой два предмета, чтобы можно было передать электрическую энергию от одного к другому? В цепях низкой частоты эта связь осуществляется по проводам, но этот способ на высоких частотах не очень хорош, потому что энергия рассеивается во все стороны и трудно контролировать, куда она потечет. От проводов во все стороны разбегаются поля; к тому же токи и напряжения высокой частоты не очень хорошо «проводятся» проводами. В этой главе мы и хотим разобраться в том, как можно соединять между собой предметы на большой частоте. Таков по крайней мере один подход к теме нашей лекции.

Но можно к ней подойти и по-другому, можно сказать, что мы пока обсуждали поведение волн в пустом пространстве, а теперь пришло время посмотреть, что случится, если колеблющиеся поля ограничить в одном или двух измерениях. Мы обнаружим новое интересное явление: если поля ограничить в двух измерениях и дать им свободу в третьем, они распространяются в виде волн. «Волны в волноводе» и будут предметом нашей лекции.

Начнем с разработки общей теории линии передачи. Обычная линия электропередачи, которая тянется от мачты к мачте по полям и лесам, тратит часть своей мощности на излучение,

**§ 1. Передающая линия****§ 2. Прямоугольный волновод****§ 3. Границная частота****§ 4. Скорость волн в волноводе****§ 5. Как наблюдать волны в волноводе****§ 6. Сочленение волноводов****§ 7. Типы волн в волноводе****§ 8. Другой способ рассмотрения волн в волноводе**

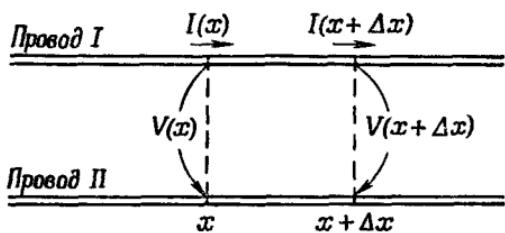
Ф и г. 24.1. Коаксиальная передающая линия.



но частота здесь так мала ( $50-60$  гц), что эти потери почти не заметны. От излучения можно избавиться, поместив провод в металлическую трубу, но это непрактично, потому что при таких токах и напряжениях в сети без больших, тяжелых и дорогих труб не обойтись. Так что в ходу обычно «открытые линии».

На частотах чуть выше (порядка нескольких килогерц) излучение уже вполне заметно. Но его можно уменьшить, пользуясь «двухжильной» линией передачи, как это делается при телефонной связи на малые расстояния. Однако при дальнейшем повышении частоты излучение вскоре становится нетерпимо сильным либо за счет потерь энергии, либо из-за того, что энергия перетекает в другие контуры, где она совсем не нужна. На частоте от нескольких килогерц до нескольких тысяч мегагерц электромагнитные сигналы и электромагнитная энергия обычно передаются по коаксиальным линиям, т. е. по проводу, помещенному внутрь цилиндрического «внешнего проводника», или «защиты». Хотя дальнейшие рассуждения годятся для линии передачи из двух параллельных проводников любого сечения, речь будет идти о коаксиальном кабеле.

Возьмем простейшую коаксиальную линию, состоящую из центрального проводника (пусть это будет тонкостенный полый цилиндр) и внешнего проводника — тоже тонкостенного цилиндра, ось которого совпадает с осью внутреннего проводника (фиг. 24.1). Для начала представим себе, как примерно ведет себя эта линия при относительно низких частотах. Мы уже кое-что говорили о поведении при низких частотах, когда утверждали, что у двух таких проводников на каждую единицу длины приходится сколько-то там индуктивности и сколько-то емкости. И действительно, поведение любой передающей линии при низких частотах можно описать, задав ее индуктивность на единицу длины  $L_0$  и ее емкость на единицу длины  $C_0$ . Тогда линию можно было бы рассматривать как предельный случай фильтра  $L-C$  (см. гл. 22, § 7). Можно создать такой фильтр, который будет имитировать линию, если последовательно соединить между собой маленькие элементы индуктивности  $L_0\Delta x$  и запустировать их маленькими емкостями  $C_0\Delta x$  (где  $\Delta x$  — элемент длины линии). Применяя к бесконечному фильтру наши прежние результаты, мы бы увидели, что вдоль линии должны распространяться электрические сигналы. Но поступим иначе и вместо



Фиг. 24.2. Токи и напряжения в передающей линии.

этого изучим свойства линии, опираясь на дифференциальные уравнения.

Предположим, мы наблюдаем за происходящим в двух соседних точках передающей линии, скажем, на расстояниях  $x$  и  $x+\Delta x$  от начала линии. Обозначим напряжение между проводниками через  $V(x)$ , а ток в верхнем проводнике  $I(x)$  (фиг. 24.2). Если ток в линии меняется, то индуктивность вызовет падение напряжения вдоль небольшого участка линии от  $x$  до  $x+\Delta x$

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt}.$$

Или, беря предел при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (24.1)$$

Изменение тока приводит к перепаду напряжения.

Теперь еще раз взгляните на рисунок. Если напряжение в  $x$  меняется, то должны появляться заряды, которые на этом участке передаются емкости. Если взять небольшой участок линии от  $x$  до  $x+\Delta x$ , то заряд на нем равен  $q = C_0 \Delta x V$ . Скорость изменения этого заряда равна  $C_0 \Delta x dV/dt$ , но заряд меняется только тогда, когда ток  $I(x)$ , входящий в элемент, отличается от выходящего тока  $I(x+\Delta x)$ . Обозначая разность через  $\Delta I$ , имеем

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{dV}{dt}.$$

Если перейти к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получается

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (24.2)$$

Так что сохранение заряда предполагает, что градиент тока пропорционален скорости изменения напряжения во времени.

Уравнения (24.1) и (24.2) — это основные уравнения линии передачи. При желании их можно видоизменить так, чтобы они учитывали сопротивление проводников или утечку зарядов через изоляцию между проводниками, но пока нам достаточно самого простого примера.

Оба уравнения передающей линии можно объединить, про-  
дифференцировав первое по  $t$ , а второе по  $x$  и исключив  $V$  или  $I$ .  
Получится либо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (24.3)$$

либо

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (24.4)$$

Мы снова узнаем волновое уравнение по  $x$ . В однородной передающей линии напряжение (и ток) распространяется вдоль линии как волна. Напряжение вдоль линии будет следовать закону  $V(x, t) = f(x - vt)$  или  $V(x, t) = g(x + vt)$  или их сумме. А что такое здесь  $v$ ? Мы знаем, что коэффициент при  $\partial^2/\partial t^2$  — это просто  $1/v^2$ , так что

$$v = \sqrt{\frac{1}{C_0 L_0}}. \quad (24.5)$$

Покажите самостоятельно, что напряжение для каждой волны в линии пропорционально току этой волны и что коэффициент пропорциональности — это просто характеристический импеданс  $z_0$ . Обозначив через  $V_+$  и  $I_+$  напряжение и ток для волны, бегущей в направлении  $+x$ , вы должны будете получить

$$V_+ = z_0 I_+. \quad (24.6)$$

Равным образом, для волны, бегущей в направлении  $-x$ , получится

$$V_- = -z_0 I_-.$$

Характеристический импеданс, как мы уже видели из наших уравнений для фильтра, дается выражением

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (24.7)$$

и поэтому есть чистое сопротивление.

Чтобы найти скорость распространения  $v$  и характеристический импеданс  $z_0$  передающей линии, нужно знать индуктивность и емкость единицы длины линии. Для коаксиального кабеля их легко подсчитать. Поглядим, как это делается. При расчете индуктивности мы будем следовать идеям, изложенными в гл. 17, § 8, и положим  $1/2 LI^2$  равным магнитной энергии, в свою очередь получаемой интегрированием  $\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$  по объему. Пусть по внутреннему проводнику течет ток  $I$ ; тогда мы знаем, что  $B = I / 2\pi \epsilon_0 c^2 r$ , где  $r$  — расстояние от оси. Беря в качестве элемента объема цилиндрический слой толщины  $dr$  и длины  $l$ ,

получаем для магнитной энергии

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left( \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)^2 l 2\pi r dr,$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы внутреннего и внешнего проводников. Интегрируя, получаем

$$U = \frac{l^2 I}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.8)$$

Приравниваем эту энергию к  $\frac{1}{2}LI^2$  и находим

$$L = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.9)$$

Как и следовало ожидать,  $L$  пропорционально длине  $l$  линии, поэтому  $L_0$  (индуктивность на единицу длины) равна

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}. \quad (24.10)$$

Мы уже рассчитывали заряд на цилиндрическом конденсаторе [гл. 12, § 2 (вып. 5)]. Деля теперь этот заряд на разность потенциалов, получаем

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

Емкость же на единицу длины  $C_0$  — это  $C/l$ . Сопоставляя этот результат с (24.10), мы убеждаемся, что произведение  $L_0 C_0$  равно просто  $1/c^2$ , т. е.  $v=1/\sqrt{L_0 C_0}$  равно  $c$ . Волна бежит по линии со скоростью света. Нужно подчеркнуть, что этот результат зависит от сделанных предположений: а) что в промежутке между проводниками нет ни диэлектриков, ни магнитных материалов; б) что все токи текут только по поверхности проводников (как это бывает в идеальных проводниках). Позже мы увидим, что на высоких частотах все токи распределяются на поверхности хороших проводников, словно они идеальные проводники, так что это предположение правильно.

Любопытно, что в этих двух предположениях произведение  $L_0 C_0$  равно  $1/c^2$  для любой параллельной пары проводников, даже в том случае, если, скажем, внутренний шестигранный проводник тянется как-то вдоль эллиптического внешнего. Пока сечение постоянно и между проводниками нет ничего, волны распространяются со скоростью света.

Подобных общих утверждений по поводу характеристического импеданса сделать нельзя. Для коаксиальной линии он равен

$$z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}. \quad (24.11)$$

Множитель  $1/\varepsilon_0 c$  имеет размерность сопротивления и равен  $120\pi \text{ ом}$ . Геометрический фактор  $\ln(b/a)$  только логарифмически зависит от размеров, так что коаксиальная линия (и большинство других линий), как правило, обладает характеристическим импедансом порядка  $50 \text{ ом}$  или что-то около этого, до нескольких сот ом.

## § 2. Прямоугольный волновод

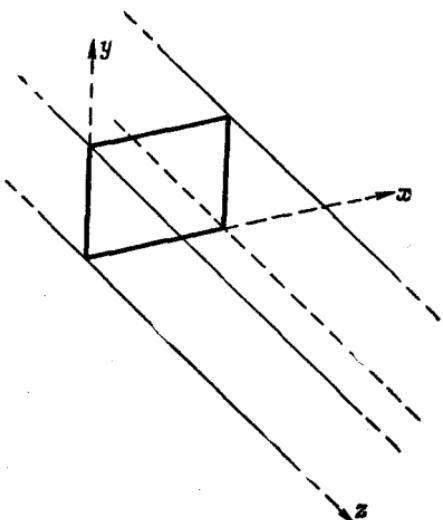
То, о чем мы сейчас будем говорить, на первый взгляд кажется поразительным явлением: если из коаксиального кабеля убрать внутреннюю жилу, он все равно будет проводить электромагнитную энергию. Иными словами, на достаточно высокой частоте полая труба действует ничуть не хуже, чем труба, внутри которой имеется провод. Связано это с другим таинственным явлением, о котором мы уже знаем,— на высоких частотах резонансный контур (конденсатор с катушкой) можно заменить простой банкой.

Это выглядит очень странно, если пользоваться представлением о передающей линии, как о распределенных индуктивности и емкости. Но ведь все мы знаем, что внутри пустой металлической трубы могут распространяться электромагнитные волны. Если труба прямая, через нее *все видно!* Значит, электромагнитные волны через трубу бесспорно проходят. Но мы знаем также, что нет возможности передавать волны низкой частоты (переменный ток или телефонные сигналы) через одну-единственную металлическую трубу. Выходит, электромагнитные волны проходят через нее только тогда, когда их длина волны достаточно мала. Поэтому мы рассмотрим предельный случай самых длинных волн (или самых низких частот), способных проходить через трубу данного размера. Эту трубу, служащую для прохождения волн, называют *волноводом*.

Начнем с прямоугольной трубы, ее проще всего анализировать. Сперва изложим все математически, а потом еще раз вернемся назад и рассмотрим вопрос более элементарно. Но этот более элементарный подход легко применить лишь к прямоугольным трубам. Основные же явления в любой трубе одни и те же, так что математические доводы звучат более основательно.

Поставим перед собой следующий вопрос: какого типа волны могут существовать в прямоугольной трубе? Выберем сначала удобные оси координат: ось  $z$  направим вдоль трубы, а оси  $x$  и  $y$  — вдоль стенок (фиг. 24.3).

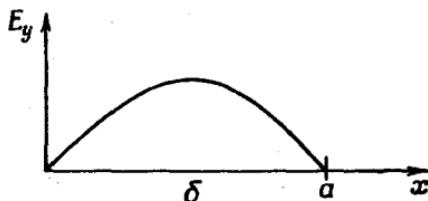
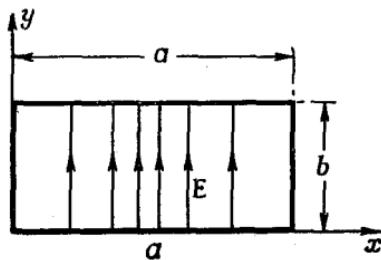
Известно, что когда волны света бегут по трубе, их электрическое поле поперечно; поэтому начнем с поиска таких решений, в которых  $E$  перпендикулярно  $z$ , скажем решений с одной только  $y$ -компонентой  $E_y$  (фиг. 24.4,а). Это электрическое поле



Фиг. 24.3. Выбор осей координат для прямоугольного волновода.

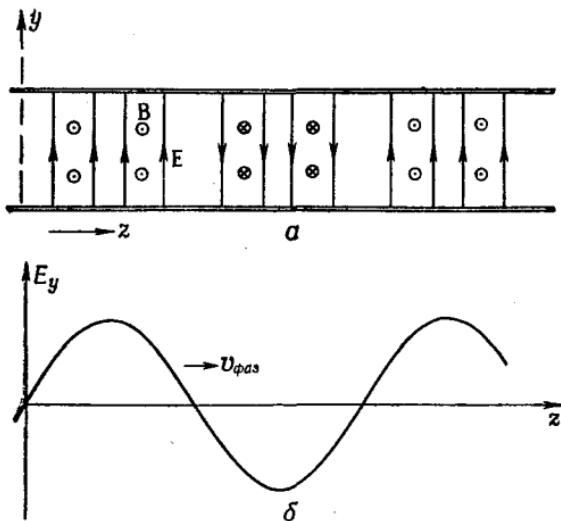
должно как-то меняться поперек волновода; действительно, ведь оно должно обратиться в нуль на сторонах, параллельных оси  $y$ : токи и заряды в проводнике устраиваются всегда так, чтобы на его поверхности не осталось никаких касательных составляющих электрического поля. Значит, график  $E_y$  от  $x$  должен напоминать некоторую дугу (фиг. 24.4, б). Может быть, это найденная нами для полости функция Бесселя? Нет, функции Бесселя появляются только в задачах с цилиндрической симметрией. При прямоугольных сечениях волны — это обычные гармонические функции, что-нибудь вроде  $\sin k_x x$ .

Раз мы ищем волны, которые бегут вдоль трубы, то следует ожидать, что поле как функция  $z$  будет колебаться между положительными и отрицательными значениями (фиг. 24.5) и что



Фиг. 24.4. Электрическое поле в волноводе при некотором значении  $z$ .

Фиг. 24.5. Зависимость поля в волноводе от  $z$ .



эти колебания будут бежать вдоль трубы с какой-то скоростью  $v$ . Если имеются колебания с определенной частотой  $\omega$ , то надо испытать, может ли волна меняться по  $z$  как  $\cos(\omega t - k_z z)$  или, в более удобной математической форме, как  $e^{i(\omega t - k_z z)}$ . Такая зависимость от  $z$  представляет волну, бегущую со скоростью  $v = \omega/k_z$  [см. гл. 29 (вып. 3)].

Значит, можно допустить, что волна в трубе имеет следующую математическую форму:

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (24.12)$$

Давайте-ка поглядим, можно ли при таком допущении удовлетворить правильным уравнениям поля. Во-первых, электрическое поле не должно иметь составляющих, касательных к проводнику. Для этого наше поле подходит; вверху и внизу оно направлено поперек стенок, а с боков равно нулю. Впрочем, для последнего необходимо, чтобы полволны  $\sin k_x x$  как раз укладывалось на всей ширине волновода, т. е. чтобы было

$$k_x a = \pi. \quad (24.13)$$

Это условие определяет  $k_x$ . Есть и иные возможности, например  $k_x a = 2\pi, 3\pi, \dots$  или в общем случае

$$k_x a = n\pi, \quad (24.14)$$

где  $n$  — целое. Все они представляют различные сложные расположения полей, но мы дальше будем говорить о самом простом, когда  $k_x = \pi/a$ , а  $a$  — внутренняя ширина трубы.

Далее, дивергенция  $E$  в пустом пространстве внутри трубы должна быть равна нулю, потому что в трубе нет зарядов. У нашего  $E$  есть только  $y$ -компоненты, но по  $y$  она не меняется, так что действительно  $\nabla \cdot E = 0$ .

Наконец, наше электрическое поле должно согласовываться с остальными уравнениями Максвелла для пустого пространства внутри трубы. Это все равно, что потребовать, чтобы оно удовлетворяло волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (24.15)$$

Нам надо проверить, подойдет ли сюда выбранная нами форма (24.12). Вторая производная  $E_y$  по  $x$  просто равна  $-k_x^2 E_y$ . Вторая производная по  $y$  равна нулю, потому что от  $y$  ничего не зависит. Вторая производная по  $z$  есть  $-k_z^2 E_y$ , а вторая производная по  $t$  это  $-\omega^2 E_y$ . Тогда уравнение (24.15) утверждает, что

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

Если  $E_y$  не обращается всюду в нуль (этот случай нас не очень интересует), то это уравнение выполняется всегда, если

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (24.16)$$

Число  $k_x$  мы уже закрепили, так что это уравнение говорит нам, что волны предположенного нами типа возможны лишь тогда, когда  $k_z$  связано с частотой  $\omega$  условием (24.16), т. е. когда

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (24.17)$$

Волны, которые мы описали, распространяются в направлении  $z$  с таким значением  $k_z$ .

Волновое число  $k_z$ , которое мы получили из (24.17), дает нам при данной частоте  $\omega$  скорость, с которой бегут вдоль трубы узлы волны. Фазовая скорость равна

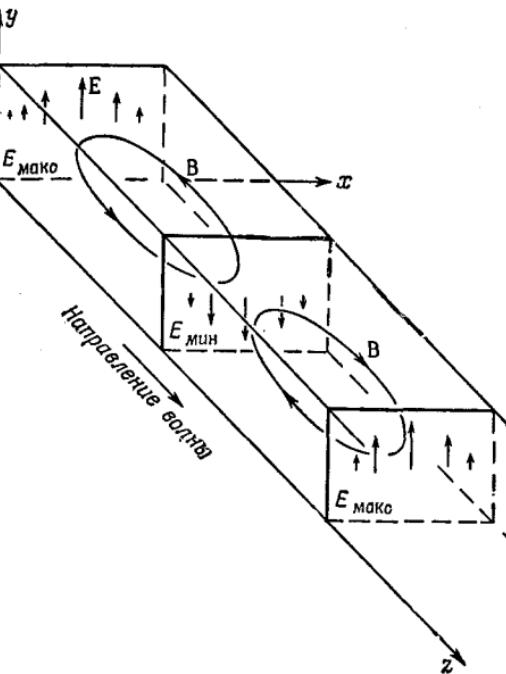
$$v = \frac{\omega}{k_z}. \quad (24.18)$$

Вспомните теперь, что длина  $\lambda$  бегущей волны дается формулой  $\lambda = 2\pi v / \omega$ , так что  $k_z$  также равняется  $2\pi/\lambda_g$ , где  $\lambda_g$  — длина волны осцилляций в направлении  $z$  — «длина волны в волноводе». Длина волны в волноводе, конечно, отличается от длины электромагнитных волн той же частоты, но в пустом пространстве. Если длину волны в пустом пространстве обозначить  $\lambda_0$  (что равно  $2\pi c / \omega$ ), то (24.17) можно переписать в таком виде:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}. \quad (24.19)$$

Фиг. 24.6. Магнитное поле в волноводе.

Кроме электрических полей, существуют и магнитные поля, которые тоже движутся волнообразно. Мы не будем сейчас заниматься выводом выражений для них. Ведь  $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$ , и линии  $\mathbf{B}$  циркулируют вокруг областей, где  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  — наибольшее, т. е. на полпути между максимумом и минимумом  $\mathbf{E}$ . Петли  $\mathbf{B}$  лежат параллельно плоскости  $xz$  и между гребнями и впадинами  $\mathbf{E}$  (фиг. 24.6).



### § 3. Границная частота

Уравнение (24.16) для  $k_z$  на самом деле имеет два корня — один с плюсом, другой с минусом. Ответ следует писать так:

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (24.20)$$

Смысл этих двух знаков просто в том, что волны в волноводе могут бежать и с отрицательной фазовой скоростью (в направлении  $-z$ ), и с положительной. Волны, естественно, должны иметь возможность бежать в любую сторону. И раз одновременно могут существовать оба типа волн, то решение в виде стоячих волн тоже возможно.

Наше уравнение для  $k_z$  сообщает нам также, что высшие частоты приводят к большим значениям  $k_z$ , т. е. к более коротким волнам, пока в пределе больших  $\omega$  величина  $k$  не станет равной  $\omega/c$  — тому значению, которое бывает, когда волна бежит в пустоте. Свет, который мы «видим» сквозь трубу, все еще бежит со скоростью  $c$ . Но посмотрите зато, какая странная вещь получается, когда частота убывает. Сперва волны становятся все длиннее и длиннее. Но если частота  $\omega$  станет чересчур малой, то под корнем в (24.20) внезапно появится отрицательное число. Это

произойдет, когда  $\omega$  перевалит через  $\pi c/a$  или когда  $\lambda_0$  станет больше  $2a$ . Иначе говоря, когда частота становится меньше некоторой критической частоты  $\omega_c = \pi c/a$ , волновое число  $k_z$  (а также  $\lambda_g$ ) становится мнимым и никакого решения у нас не остается. Или остается? Кто, собственно, сказал, что  $k_z$  должно быть действительным? Что случится, если оно станет мнимым? Уравнение поля по-прежнему ведь будут удовлетворяться. Может быть, и мнимые  $k_z$  тоже представляют какую-то волну?

Предположим, что  $\omega$  действительно меньше  $\omega_c$ ; тогда можно написать

$$k_z = \pm ik', \quad (24.21)$$

где  $k'$  — действительное положительное число:

$$k' = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (24.22)$$

Если теперь вернуться к нашей формуле (24.12) для  $E_y$ , то надо будет написать

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t \mp ik' z)}, \quad (24.23)$$

что можно также представить в виде

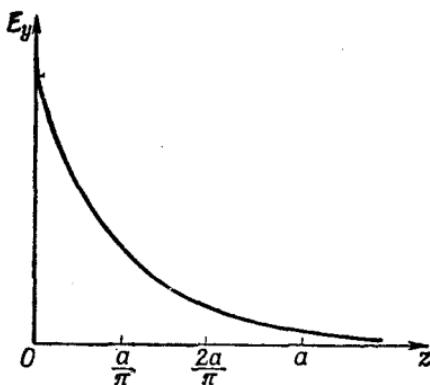
$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{\pm k' z} e^{i\omega t}. \quad (24.24)$$

Это выражение приводит к полю  $E$ , которое во времени колеблется как  $e^{i\omega t}$ , а по  $z$  меняется как  $e^{\pm k' z}$ . Оно плавно убывает или возрастает с  $z$ , как всякая действительная экспонента. В нашем выводе мы не думали о том, откуда взялись волны, где их источник, но, конечно, где-то в волноводе он должен быть. И знак, который стоит при  $k'$ , должен быть таков, чтобы поле убывало при удалении от источника волн.

Итак, при частотах ниже  $\omega_c = \pi c/a$  волны вдоль трубы не распространяются; осциллирующее поле проникает в трубу лишь на расстояние порядка  $1/k'$ . По этой причине частоту  $\omega_c$  называют «границей частотой» волновода. Глядя на (24.22), мы видим, что для частот чуть выше  $\omega_c$  число  $k'$  мало, и поля могут проникать в трубу довольно далеко. Но если  $\omega$  намного меньше  $\omega_c$ , коэффициент  $k'$  в экспоненте равняется  $\pi/a$ , и поле отмирает чрезвычайно быстро (фиг. 24.7). Поле убывает в  $e$  раз на расстоянии  $a/\pi$ , т. е. на трети ширины волновода. Поля проникают в волновод на очень малое расстояние от источника.

Мы хотим еще раз подчеркнуть эту характерную черту нашего анализа прохождения волн по трубе — появление мнимого волнового числа  $k_z$ . Когда, решая уравнение в физике, мы получаем мнимое число, то это обычно ничего физического не означает. Для волн, однако, мнимое волновое число *действительно* нечто означает. Волновое уравнение по-прежнему удовлетворяется; оно только означает, что решение приводит к экспонен-

Фиг. 24.7. Изменение  $E_y$  с ростом  $z$  при  $\omega \ll \omega_c$ .



циальном убывающему полю вместо распространяющихся волн. Итак, если в любой задаче на волны  $k$  при какой-то частоте становится мнимым, это означает, что форма волны меняется — синусоида переходит в экспоненту.

#### § 4. Скорость волн в волноводе

Та скорость волн, о которой мы пока говорили, — это фазовая скорость, т. е. скорость узлов волны; она есть функция частоты. Если подставить (24.17) в (24.18), то можно написать

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}. \quad (24.25)$$

Для частот выше граничной (для которых бегущая волна существует)  $\omega_c/\omega$  меньше единицы,  $v_{\text{фаз}}$  — действительное число, большее скорости света. Мы уже видели в гл. 48 (вып. 4), что фазовые скорости, большие скорости света, возможны, потому что это просто движутся узлы волны, а не энергия и не информация. Чтобы узнать, как быстро движутся сигналы, надо подсчитать быстроту всплесков или модуляций, вызываемых интерференцией волн одной частоты с одной или несколькими волнами слегка иных частот [см. гл. 48 (вып. 4)]. Скорость огибающей такой группы волн мы назвали волновой скоростью; это не  $\omega/k$ , а  $d\omega/dk$ :

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.26)$$

Дифференцируя (24.17) по  $\omega$  и переворачивая, чтобы получить  $d\omega/dk$ , получаем

$$v_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}. \quad (24.27)$$

Это меньше скорости света.

Среднее геометрическое между  $v_{\text{фаз}}$  и  $v_{\text{гр}}$  в точности равно  $c$  — скорости света:

$$v_{\text{фаз}} v_{\text{гр}} = c^2. \quad (24.28)$$

Это любопытно, ведь сходное соотношение мы встречали и в квантовой механике. У частицы с любой скоростью (даже у релятивистской) импульс  $p$  и энергия  $U$  связаны соотношением

$$U^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (24.29)$$

Но в квантовой механике энергия — это  $\hbar\omega$ , а импульс — это  $\hbar k$ , или  $\hbar k$ ; значит, (24.29) можно записать так:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \quad (24.30)$$

или

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}, \quad (24.31)$$

а это очень похоже на (24.17). . . Интересно, не правда ли?

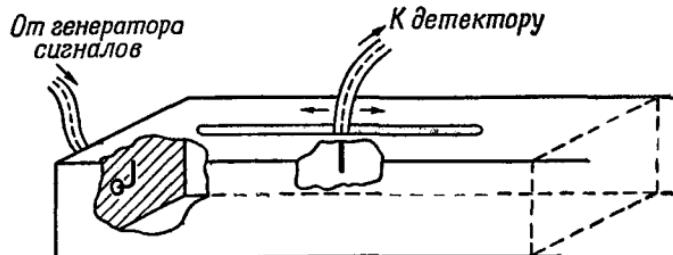
Групповая скорость волн — это также скорость, с какой энергия передается по трубе. Если вам нужно найти поток энергии сквозь волновод, надо умножить плотность энергии на групповую скорость. Если среднее квадратичное электрическое поле равно  $E_0$ , то средняя плотность электрической энергии равна  $\epsilon_0 E_0^2 / 2$ . Кроме этого, часть энергии связана с магнитным полем. Мы не будем здесь это доказывать, но в любой полости или трубе магнитная и электрическая энергии равны между собой, так что полная плотность электромагнитной энергии равна  $\epsilon_0 E_0^2$ . А мощность  $dU/dt$ , передаваемая волноводом, поэтому равна

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 ab v_{\text{гр}}. \quad (24.32)$$

(Позже мы рассмотрим другой, более общий способ вычисления потока энергии.)

## § 5. Как наблюдать волны в волноводе

Энергию в волновод можно ввести своего рода «антенной», воспользовавшись для этого, например, вертикальной проволочкой, или «штырем». В наличии волн в волноводе можно убедиться, отведя из него часть электромагнитной энергии с помощью приемной «антенки» — тоже какого-нибудь проволочного штыря или петельки. На фиг. 24.8 показан волновод, часть стенок на рисунке выхвачена, чтобы были видны входной штырь и



Фиг. 24.8. Волновод с входным штырем и пробником.

приемный «пробник». Входной штырь можно подключить через коаксиальный кабель к генератору сигналов, а приемный пробник таким же кабелем можно соединить с детектором. Обычно удобнее вводить пробник через длинную прорезь в стенке волновода. Тогда можно им водить вдоль волновода и замерять поле в разных местах.

Если подать с сигнал-генератора частоту  $\omega$ , большую, чем граничная частота  $\omega_c$ , то по волноводу от штыря побегут волны. Если волновод бесконечной длины, то никаких волн, кроме этих, не будет (чтобы сделать его бесконечным, надо на конце его поставить тщательно сконструированный поглотитель, который не допустит отражения от этого конца). Тогда поскольку детектор измеряет поле близи пробника, усредненное по времени, то он будет воспринимать сигнал, не зависящий от положения в волноводе; на выходе будет регистрироваться величина, пропорциональная передаваемой мощности.

Если же сделать так, чтобы от дальнего конца волновода отражалась волна (предельный случай: если закрыть его металлической пластинкой), то вдобавок к первоначальной волне появится отраженная. Эти две волны будут интерферировать и создадут в волноводе стоячую волну, похожую на стоячие волны в струне, о которых говорилось в гл. 49 (вып. 4). В этом случае, по мере того как пробник передвигается вдоль трубы, отсчеты детектора будут периодически повышаться и падать; максимум поля будет отмечать подъемы волны, а минимум — узлы. Расстояние между двумя последовательными узлами (или гребнями) равно  $\lambda_g/2$ . Это дает нам удобный способ измерять длину волны в волноводе. Если сдвигать частоту ближе к  $\omega_c$ , то расстояние между узлами увеличится, показывая тем самым, что длина волны в волноводе изменяется по закону (24.19).

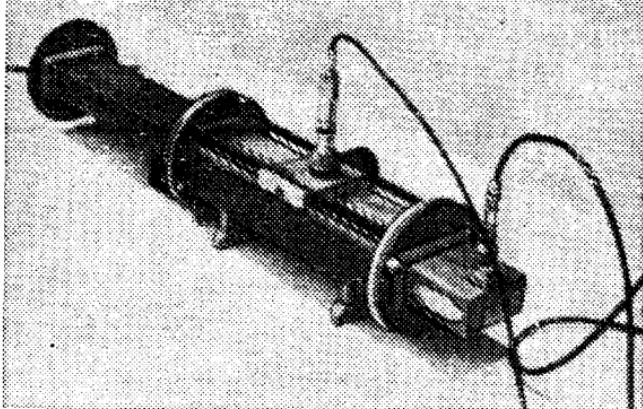
Пусть теперь наш сигнал-генератор включен на частоту, чуть-чуть меньшую, чем  $\omega_c$ . Тогда показания детектора будут постепенно падать по мере того, как пробник удаляется вдоль волновода. Если еще понизить частоту, напряженность поля начнет убывать быстрее, следуя кривой фиг. 24.7 и показывая, что волны не распространяются.

## § 6. Сочленение волноводов

Важное практическое применение волноводов состоит в передаче высокочастотной мощности. Ими, например, соединяют высокочастотный осциллятор или выходной усилитель радиолокатора с антенной. Сама же антenna обычно состоит из параболического рефлектора, в фокус которого подается энергия от волновода, расширяющегося на конце в виде «рога», который излучает волны, приходящие по волноводу. Хотя высокую частоту можно передавать и по коаксиальному кабелю, волновод все же лучше — по нему можно передавать большую мощность. Во-первых, передаваемая по кабелю мощность ограничена опасностью пробоя изоляции (твердой или газообразной) между проводниками. Напряженности полей в волноводе при данной мощности обычно не столь велики, как в кабеле, так что можно передавать большие мощности, не опасаясь пробоя. Во-вторых, потери мощности в коаксиальном кабеле обычно больше, чем в волноводе. В кабель приходится ставить изоляционный материал, чтобы поддержать внутренний проводник, и в этом материале возникают потери энергии, особенно при высоких частотах. Кроме того, плотности тока во внутреннем проводе весьма высоки, а поскольку потери пропорциональны *квадрату* плотности тока, то чем слабее ток в стенках волновода, тем меньше потери энергии. Чтобы свести эти потери к минимуму, внутреннюю поверхность волновода часто покрывают хорошо проводящим материалом, скажем серебром.

Проблема соединения «контуров» с волноводами резко отличается от аналогичной задачи при низких частотах. Ее часто называют микроволновым «сочленением». Для этой цели было придумано много приборов. Например, две секции волновода обычно связываются при помощи фланцев (фиг. 24.9), но такое соединение может повлечь за собой серьезные потери энергии, потому что через соединение текут поверхностные токи, а их сопротивление довольно велико. Один из способов избежать потерь — это сделать фланцы так, как показано на фиг. 24.10. Между соседними секциями волновода оставляют небольшой зазор, а на торце одного из фланцев делается желобок. Получается небольшая полость (ср. с фиг. 23.16,б), размеры которой выбирают так, чтобы ее резонансная частота совпадала с частотой волн в волноводе. У такой резонансной полости «импеданс» очень высок, поэтому через металлическое соединение (точка *a* на фиг. 24.10) идет сравнительно слабый ток. Сильные токи в волноводе попросту заряжают и разряжают «емкость» щели (в точке *b*), где энергия рассеивается слабо.

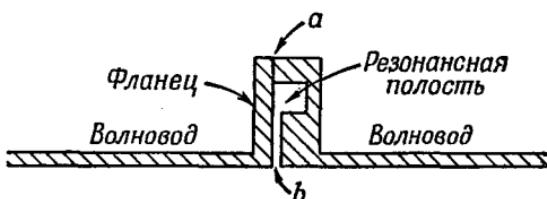
Теперь представьте, что вам нужно закрыть волновод так, чтобы не возникло никаких отраженных волн. Значит, надо в конце поставить что-нибудь такое, что сможет имитировать



Фиг. 24.9. Секции волновода, соединенные фланцами.

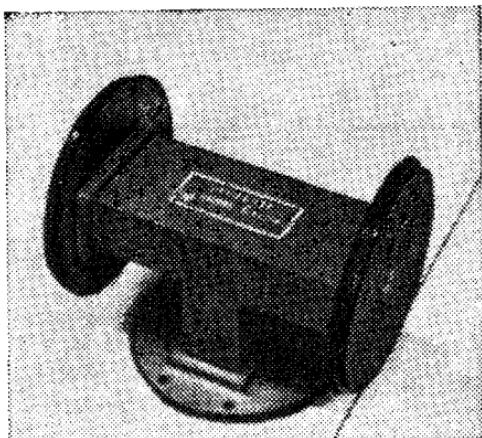
бесконечность волновода. Нужно такое «конечное» устройство, которое действовало бы на волновод так, как действует на передающую линию ее характеристический импеданс — что-то, что только поглощает набегающие волны, но не отражает их. Тогда волновод будет действовать так, будто он бесконечный. Такие окончания получаются, если поставить внутрь трубы тщательно изготовленные клинья из проводящего материала. Они только поглощают энергию и почти не генерируют отраженных волн.

Если вам нужно соединить между собой *три* элемента, скажем один источник и две антенны, то для этого годится устройство в виде «Т», как показано на фиг. 24.11. Мощность, подводимая центральной секцией этого «Т», расщепляется и расходится по двум рукавам (здесь еще может произойти и отражение волн). Из схемы, представленной на фиг. 24.12, можно качественно увидеть, что поля на конце входной секции могут разойтись и создать электрические поля, которые дадут начало волнам, разбегающимся по рукавам. Смотря по тому, перпендикулярны ли электрические поля «верхушке» нашего «Т» или



Фиг. 24.10. Сочленение двух секций волновода, дающее малые потери.



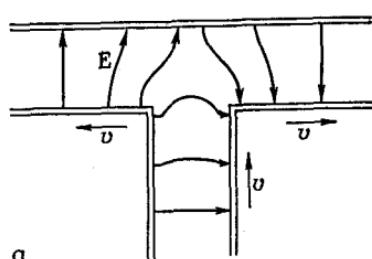


Фиг. 24.11. Волновод «Т».

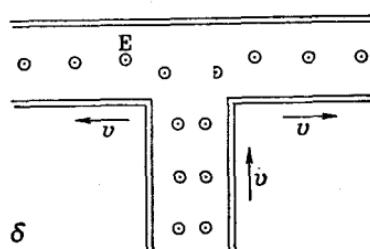
На фланцы надеты пластмассовые колпачки, предохраняющие внутреннюю часть «Т» от загрязнения в неработающем состоянии.

параллельны ей, поля в месте сочленения могут оказаться либо такими, как на фиг. 24.12, а, либо как на фиг. 24.12, б.

Наконец, хотелось бы описать прибор, именуемый «направленным ответвителем». Это очень полезное устройство, когда нужно узнать, что получилось после того, как вы соединили между собой какое-то сложное расположение волноводов. Например, нужно узнать, в какую сторону бегут волны в той или иной секции трубы; скажем, необходимо представить себе, насколько сильна в ней отраженная волна. Направленный ответвитель отбирает немножко мощности у волновода, если по нему бежит волна в одну сторону, и не отбирает ничего, если она бежит в другую. Подключив выход соединителя к детектору, можно измерить «одностороннюю» мощность в волноводе. Направленный ответвитель (фиг. 24.13) — это кусок волновода *AB*, к одной из сторон которого припаян другой кусок волновода *CD*. Труба *CD* отогнута в сторону так, чтобы поместился соединительный фланец. Прежде чем спаять трубы, через соседние их стенки насеквоздь просверлили пару (или несколько) отверстий, чтобы через них часть полей в главном волноводе *AB* могла пройти во вторичный волновод *CD*. Каждое отверстие



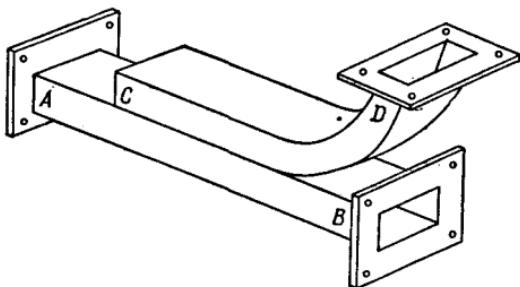
а



б

Фиг. 24.12. Электрические поля в волноводе «Т» при двух возможных ориентациях поля.

Фиг. 24.13. Направленный ответвитель.

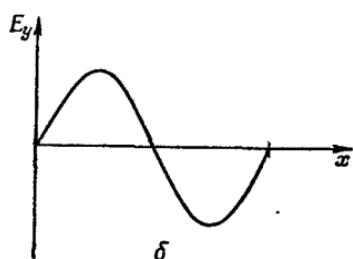
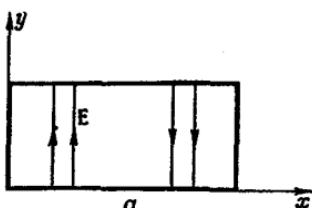


действует как антенна — генерирует волны во вторичном волноводе. Если бы отверстие было одно, то волны расходились бы в обе стороны и были бы одинаковы независимо от того, куда направлены волны в первичном волноводе. Но когда отверстий два и когда расстояние между ними равно четверти длины волны в волноводе, то они представляют собой два источника, сдвинутые по фазе на  $90^\circ$ . А вы помните, мы рассматривали в гл. 29 (вып. 3) интерференцию волн от двух антенн, раздвинутых на  $\lambda/4$  и возбуждаемых со сдвигом  $90^\circ$  по фазе? Мы установили тогда, что в одном направлении волны вычитаются, а в другом складываются. То же самое происходит и здесь. Волна, генерируемая в  $CD$ , будет бежать в ту же сторону, что и  $AB$ .

И если волна в первичном волноводе бежит от  $A$  к  $B$ , то на выходе  $D$  вторичного волновода мы тоже заметим волну. Если же волна в первичном волноводе бежит от  $B$  к  $A$ , то во вторичном волноводе волна побежит к  $C$ . А на этом конце стоит такое окончание, что эта волна в нем поглотится и на выходе ответвителя волн вообще не будет.

### § 7. Типы волн в волноводе

Выбранная нами для анализа волна — всего лишь одно из решений уравнений поля. Их на самом деле куда больше. Каждое решение представляет собой свой «тип волны» в волноводе. Скажем, в нашей волне вдоль направления  $x$  укладывалось только полсинусоиды. Ничуть не хуже решение, в котором вдоль  $x$  укладывается вся синусоида; изменение  $E_y$  с  $x$  тогда показано на фиг. 24.14. У этого типа волн  $k_x$  вдвое больше и граничная частота много выше. Кроме того, изученная нами волна  $E$  имеет лишь  $y$ -компоненту, но бывают и типы волн с более сложными электрическими полями. Если у электрического поля есть только  $x$ - и  $y$ -компоненты, так что оно всегда перпендикулярно к оси  $z$ , то такой тип волн называется «поперечным электрическим» (или сокращенно  $TE$ ) типом волн. Магнитное поле в волне такого типа всегда обладает  $z$ -компонентой. Далее, оказывается, что когда у  $E$  есть  $z$ -компоненты (вдоль направления распространения), то у магнитного поля есть только поперечные



Фиг. 24.14. Еще одна возможная зависимость  $E_y$  от  $x$ .

компоненты. Такие поля называются «поперечными магнитными» (сокращенно  $TM$ ) типами волн. В прямоугольном волноводе все типы обладают более высокой граничной частотой, чем описанный нами простой  $TE$ -тип. Поэтому всегда возможно (и так обычно делают) использовать такой волновод, в котором частота немножко превышает граничную частоту этого наименее типичного типа колебаний, но находится ниже граничных частот всех других типов. В таком волноводе распространяется волна только одного типа. В противном случае поведение волны усложняется и его трудно контролировать.

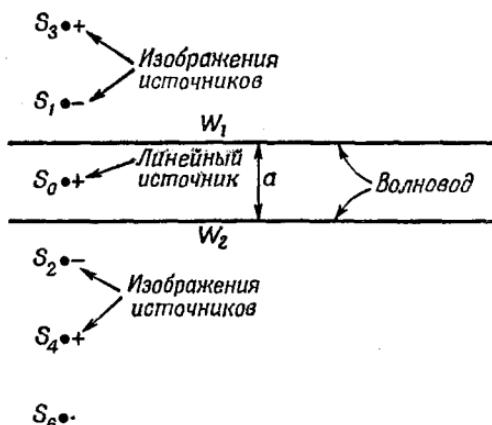
### § 8. Другой способ рассмотрения волн в волноводе

Теперь я хочу по-другому объяснить вам, почему волновод так сильно ослабляет поля, частота которых ниже граничной частоты  $\omega_c$ . Я хочу, чтобы вы получили более «физическое» представление о том, почему так резко меняется поведение волновода при низких и при высоких частотах. Для прямоугольного волновода это можно сделать, анализируя поля на языке отражений (или изображений) в стенах волновода. Такой подход годится, однако, только для прямоугольных волноводов; вот почему мы начали с математического анализа, который в принципе годится для волноводов любой формы.

Для описанного нами типа колебаний вертикальные размеры (по  $y$ ) не имели никакого значения, поэтому можно не обращать внимания на верх и низ волновода и представлять себе, что волновод в вертикальном направлении простирается бесконечно. Пусть он просто состоит из двух вертикальных пластин, удаленных друг от друга на расстояние  $a$ .

Давайте возьмем в качестве источника полей вертикальный провод между пластинами; по нему течет ток, который меняется

Фиг. 24.15. Линейный источник  $S_0$  между проводящими плоскими стенками  $W_1$  и  $W_2$ . Стенки можно заменить бесконечной последовательностью изображений источников.



с частотой  $\omega$ . Если бы волновод не имел стенок, то от такого провода расходились бы цилиндрические волны.

Представим, что стенки волновода сделаны из идеального проводника. Тогда, в частности как в электростатике, условия на поверхности будут выполнены, если к полю провода мы добавим поле одного или нескольких правильно подобранных его изображений. Представление об изображениях работает в электродинамике ничуть не хуже, чем в электростатике, при условии, конечно, что мы учитываем запаздывание. Мы знаем, что это так, потому что мы много раз видели в зеркале изображение источника света. А зеркало — это и есть «идеальный» проводник для электромагнитных волн оптической частоты.

Рассечем наш волновод горизонтально, как показано на фиг. 24.15, где  $W_1$  и  $W_2$  — стенки волновода, а  $S_0$  — источник (провод). Обозначим направление тока в проводе знаком плюс. Будь у волновода лишь одна стенка, скажем  $W_1$ , ее можно было бы убрать, поместив изображение источника (с противоположной полярностью) в точке  $S_1$ . Но при двух стенах появится также изображение  $S_0$  в стенке  $W_2$ ; обозначим его  $S_2$ . Этот источник также будет обладать своим изображением в  $W_1$ ; обозначим его  $S_3$ . Дальше, сами  $S_1$  и  $S_3$  изобразятся в  $W_2$  точками  $S_4$  и  $S_6$  и т. д. И для нашей пары плоских проводников с источником посередине поле между проводниками совпадет с полем, генерируемым бесконечной цепочкой источников на расстоянии  $a$  друг от друга. (Это на самом деле как раз то, что вы увидите, посмотрев на провод, расположенный посередине между двумя параллельными зеркалами.) Чтобы поля обращались в нуль на стенах, полярности токов в изображениях должны меняться от одного изображения к следующему. Иначе говоря, их фаза меняется на  $180^\circ$ . Поле волновода — это просто

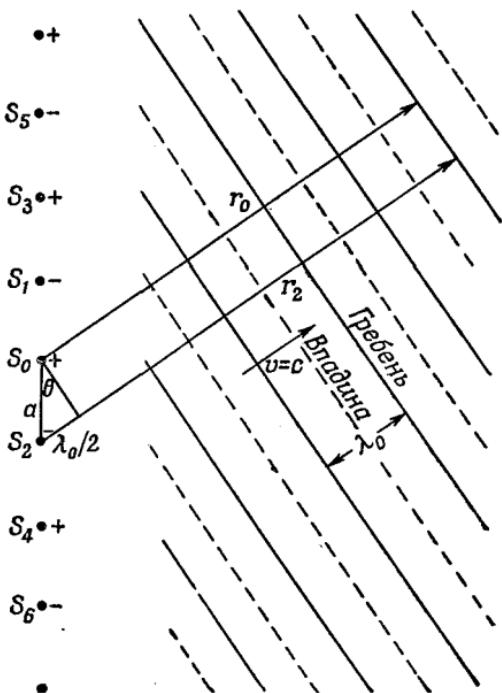
суперпозиция полей всей этой бесконечной совокупности линейных источников.

Известно, что вблизи от источников поле очень напоминает статические поля. В гл. 7, § 5 (вып. 5) мы рассматривали статическое поле сетки линейных источников и нашли, что оно похоже на поле заряженной пластины, если не считать членов ряда, убывающих по мере удаления от сетки экспоненциально. У нас средняя сила источников равна нулю, потому что у каждой пары соседних источников знаки противоположны. Любые поля, существующие здесь, должны с расстоянием убывать экспоненциально. Вплотную к источнику мы в основном воспринимаем поле этого ближайшего источника; на больших расстояниях уже существует несколько источников, и их суммарное влияние дает нуль. Мы теперь понимаем, отчего волновод ниже граничной частоты дает экспоненциально убывающее поле. При низких частотах годится статическое приближение, и оно предсказывает быстрое ослабление полей с расстоянием.

Теперь зато возникает противоположный вопрос: отчего же в таком случае волны вообще распространяются? Теперь уже это выглядит таинственно! А причина-то в том, что при высоких частотах запаздывание полей может внести в фазу добавочные изменения, которые могут привести к тому, что поля источников с противоположной фазой будут усиливать, а не гасить друг друга. В гл. 29 (вып. 3) мы уже изучали как раз для этой задачи

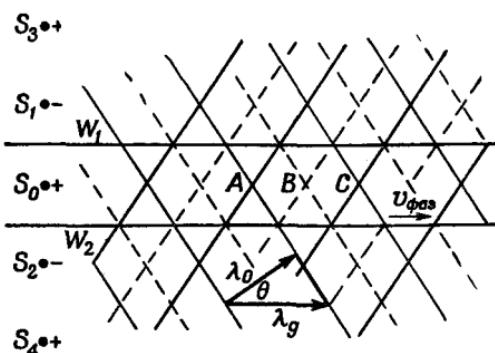
поля, создаваемые системой антенн или оптической решеткой. Тогда мы обнаружили, что соответствующее расположение нескольких радиоантенн может привести к такой интерференционной картине, что в одном направлении сигнал будет очень сильный, а в других сигналов вообще не будет.

Вернемся к фиг. 24.15 и посмотрим на поля на



Фиг. 24.16. Одна совокупность когерентных волн от вереницы линейных источников.

*Фиг. 24.17. Поле в волноводе можно рассматривать как наложение двух верениц плоских волн.*



большом расстоянии от линии изображений источников. Поля будут велики лишь в некоторых направлениях, зависящих от частоты, именно в тех направлениях, в каких поля всех источников попадают в фазу друг к другу и складываются. На заметном расстоянии от источников поле в этих специальных направлениях распространяется как плоские волны. Мы изобразили такую волну на фиг. 24.16, где сплошными линиями даны гребни волны, а штрихом — впадины. Направление волны должно быть таким, чтобы разность запаздываний от двух соседних источников до гребня волны отвечала полуperiоду колебания. Иными словами, разность между  $r_2$  и  $r_0$  на рисунке равна половине длины волны в пустом пространстве:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Тогда угол  $\theta$  дается условием

$$\sin \theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \quad (24.33)$$

Имеется, конечно, и другая совокупность волн, бегущих вниз под симметричным углом по отношению к линии источников. А полное поле в волноводе (не слишком близко к источнику) является суперпозицией этих двух совокупностей волн (фиг. 24.17). Конечно, в действительности картина истинных полей совпадает с изображенной лишь в пространстве между стенками волновода.

В таких точках, как  $A$  и  $C$ , гребни двух волновых картин совпадут, и у поля будет максимум; в точках же наподобие  $B$  пики обеих волн направлены в отрицательную сторону, и поле обладает минимумом (наименьшим отрицательным значением). С течением времени поле в волноводе будет двигаться вдоль него. Длина волны будет равна  $\lambda_g$  — расстоянию от  $A$  до  $C$ . Она связана с  $\theta$  формулой

$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \quad (24.34)$$

Подставляя (24.33) вместо  $\theta$ , получаем

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (24.35)$$

что в точности совпадает с (24.19).

Теперь нам становится понятно, почему волны распространяются только выше граничной частоты  $\omega_0$ . Если длина волны в пустом пространстве больше  $2a$ , то не существует угла, под которым может появиться волна, показанная на фиг. 24.16. Необходимая для этого конструктивная интерференция возникает внезапно, едва  $\lambda_0$  оказывается меньше  $2a$ , или, что то же самое, когда  $\omega_0 = \pi c/a$ .

А если частота достаточно высока, то может появиться два или больше возможных направления распространения волн. В нашем случае это произойдет при  $\lambda_0 < \frac{2}{3}a$ . Но вообще-то это может происходить и при  $\lambda_0 < a$ . Эти добавочные волны отвечают высшим типам волн, о которых мы говорили.

После нашего анализа становится также ясно, отчего фазовая скорость волн, бегущих по трубе, превышает  $c$  и зависит от  $\omega$ . Когда  $\omega$  меняется, меняется и угол на фиг. 24.16, под которым в пустом пространстве распространяются волны, а вместе с этим меняется и скорость вдоль трубы.

Хотя мы описали волны в волноводе в виде суперпозиции полей бесконечной совокупности линейных источников, но можно убедиться в том, что тот же результат можно было бы получить, представив себе две совокупности волн в пустом пространстве, многократно отражаемых от двух идеальных зеркал вперед и назад, и вспоминая, что подобное отражение означает перемену знака фазы. Эти совокупности отражаемых волн гасили бы друг друга под всеми углами, кроме угла  $\theta$  [см. (24.33)]. Одну и ту же вещь можно рассматривать многими способами.

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

## § 1. Четырехвекторы

В этой главе мы рассмотрим применение специальной теории относительности к электродинамике. Мы изучали теорию относительности довольно давно (гл. 15—17, вып. 2), поэтому я здесь коротко напомню основные идеи.

Экспериментально установлено, что законы физики при равномерном движении не изменяются. Если вы находитесь внутри звездолета, летящего с постоянной скоростью по прямой линии, то не можете установить самого факта движения корабля: для этого надо выглянуть наружу или по крайней мере провести какие-то наблюдения, связанные с внешним миром. Любой написанный нами истинный закон физики должен быть сформулирован так, чтобы этот факт природы был «встроен» в него.

Соотношение между пространством и временем в двух системах координат (одна из которых  $S'$  равномерно движется относительно другой  $S$  в направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ ) определяется преобразованиями Лоренца:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, & y' &= y, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, & z' &= z. \end{aligned} \quad (25.1)$$

Законы физики должны быть таковы, чтобы после преобразований Лоренца они в новой форме выглядели абсолютно так же, как и раньше. Это в точности напоминает принцип независимости законов физики от *ориентации* нашей системы координат. В гл. 11 (вып. 1) мы видели, что способом математического описания этой инвариантности относительно вращения является запись уравнений в *векторном* виде.

§ 1. Четырехвекторы

§ 2. Скалярное произведение

§ 3. Четырехмерный градиент

§ 4. Электродинамика в четырехмерных обозначениях

§ 5. Четырехмерный потенциал движущегося заряда

§ 6. Инвариантность уравнений электродинамики

В этой главе  $c = 1$

**Повторить:** гл. 15 (вып. 2) «Специальная теория относительности»; гл. 16 (вып. 2) «Релятивистская энергия и импульс»; гл. 17 (вып. 2) «Пространство-время»; гл. 13 (вып. 5) «Магнитостатика»

Там мы обнаружили, что если, скажем, взять два вектора

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

то комбинация

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

при повороте системы координат не меняется. Таким образом, если с обеих сторон уравнения мы видим скалярное произведение, подобное  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , то уравнение будет иметь в точности ту же форму в любой повернутой системе координат. Кроме того, мы открыли оператор (см. гл. 2)

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

который, будучи применен к скалярной функции, дает три величины, преобразующиеся в точности как вектор. С помощью этого оператора был определен градиент, а в комбинации с другими векторами — дивергенция и лапласиан. И, наконец, мы обнаружили, что, составляя суммы некоторых попарных произведений компонент двух векторов, можно получить три величины, которые ведут себя подобно новому вектору. Мы назвали это *векторным произведением* двух векторов. Используя затем векторное произведение с оператором  $\nabla$ , мы определили ротор вектора. В дальнейшем нам часто придется ссылаться на то, что было нами сделано в векторном анализе, поэтому все важнейшие векторные операции в трехмерном пространстве, которые использовались в прошлом, мы собрали в табл. 25.1.

Таблица 25.1 • ВАЖНЕЙШИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОПЕРАТОРЫ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Определение вектора	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Скалярное произведение	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
Векторный дифференциальный оператор $\nabla$	
Градиент	$\nabla \phi$
Дивергенция	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
Лапласиан	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
Векторное произведение	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
Ротор	$\nabla \times \mathbf{A}$

Пользуясь ею, можно так записать любое уравнение физики, что обе его части преобразуются при вращениях одинаковым образом. Если одна его часть — вектор, то вектором должна быть и другая часть, и обе они при вращении системы координат изменяются в точности одинаково. Аналогично, если одна часть скаляр, то скаляром должна быть и другая часть, так что ни та, ни другая не изменяется при вращении системы координат и т. д.

В теории относительности пространство и время неразделимо связаны друг с другом, поэтому то же самое придется проделать и для четырех измерений. Мы хотим, чтобы наши уравнения оставались неизменными не только при вращениях, но и при переходе в любую инерциальную систему. Это означает, что наши уравнения должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца (25.1). Цель настоящей главы — показать, как этого можно добиться. Но прежде чем начать, примем соглашение, которое значительно облегчит нашу работу (и к тому же поможет избежать путаницы). Заключается оно в таком выборе единиц измерения длины и времени, чтобы скорость света  $c$  оказалась равной единице. Вы можете считать, например, что в качестве единицы времени взят *интервал*, за который свет проходит отрезок в один метр (это составляет около  $3 \cdot 10^{-9}$  сек). Можно даже так и назвать эту единицу времени: «один световой метр». Использование этой единицы еще ярче оттеняет симметрию пространства и времени. Кроме того, из наших релятивистских уравнений исчезнут все  $c$ . (Если это почему-либо вас смущает, то вы можете в любом уравнении восстановить их или заменить каждое  $t$  на  $ct$ , а еще лучше вставить  $c$  повсюду, где это необходимо для правильной размерности уравнения.) Теперь, после такой подготовки, мы можем двигаться дальше.

Наша программа состоит в том, чтобы повторить в четырехмерном пространстве-времени все то, что мы делали с векторами в трех измерениях. Дело это нехитрое — мы просто будем действовать аналогично. Единственное затруднение встретится только при обозначениях (символ вектора у нас уже занят трехмерными векторами), и несколько изменятся знаки в скалярном произведении.

Прежде всего, по аналогии с векторами в трехмерном пространстве, введем *четырехвектор* как набор четырех величин  $a_t, a_x, a_y$  и  $a_z$ , которые при переходе в движущуюся систему координат преобразуются подобно  $t, x, y$  и  $z$ . Для обозначения четырехвектора используется несколько различных способов. Мы же будем писать просто  $a_\mu$ , понимая под этим группу четырех величин ( $a_t, a_x, a_y, a_z$ ); другими словами, значок  $\mu$  принимает какое-либо из четырех «значений»:  $t, x, y$  и  $z$ . Иногда нам будет удобно обозначать три пространственные компоненты в виде трехмерного вектора, т. е. писать  $a_\mu = (a_t, \mathbf{a})$ .

Мы уже сталкивались с одним таким четырехвектором, состоящим из энергии и импульса частицы (см. гл. 17, вып. 2). В наших новых обозначениях он запишется так:

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}), \quad (25.2)$$

т. е. четырехвектор  $p_\mu$  состоит из энергии  $E$  и трех компонент трехмерного импульса частицы  $\mathbf{p}$ .

Похоже, что игра действительно оказывается нехитрой: единственное, что мы должны сделать,— это найти для каждого трехмерного вектора недостающую компоненту и получить четырехвектор. Однако все же эта задача потруднее, чем кажется на первый взгляд. Возьмем, например, вектор скорости с компонентами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Что будет его временной компонентой? Инстинкт подсказывает нам, что поскольку четырехвектор подобен  $t, x, y, z$ , то временной компонентой как будто должно быть

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1.$$

*Но это неверно.* Дело в том, что время  $t$  в каждом знаменателе не инвариантно при преобразованиях Лоренца. Числитель имеет правильное поведение, а  $dt$  в знаменателе портит все дело: оно не одинаково в двух различных системах.

Оказывается, что четыре компоненты «скорости», которые нам нужно выписать, превратятся в компоненты четырехвектора, если мы попросту поделим их на  $\sqrt{1-v^2}$ . В правильности этого можно убедиться, взяв четырехвектор импульса

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}) = \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (25.3)$$

и поделив его на массу покоя, которая в *четырехмерном пространстве* является скаляром. Мы получим при этом

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (25.4)$$

что по-прежнему должно быть четырехвектором. (Деление на скаляр не изменяет трансформационных свойств.) Так что четырехвектор скорости  $u_\mu$  можно определить так:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Это очень полезная величина; мы можем теперь написать, например,

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \quad (25.6)$$

Таков типичный вид, который должен иметь правильное релятивистское уравнение: каждая сторона его должна быть четырехвектором. (В правой части стоит произведение инварианта на четырехвектор, которое по-прежнему есть четырехвектор.)

## § 2. Скалярное произведение

То, что расстояние от некоторой точки до начала координат не изменяется при повороте, если хотите, — счастливая случайность. Математически это означает, что  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  является инвариантом. Другими словами, после поворота  $r'^2 = r^2$  или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Возникает вопрос: существует ли подобная величина, которая инвариантна при преобразованиях Лоренца? Да, существует. Из (25.1) вы видите, что

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

Она была бы всем хороша, если бы только не зависела от нашего выбора оси  $x$ . Но этот недостаток легко исправить вычитанием  $y^2$  и  $z^2$ . Тогда преобразование Лоренца *плюс* вращение оставляют ее неизменной. Таким образом, роль величины, аналогичной трехмерному  $r^2$  в четырехмерном пространстве, играет комбинация

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Она является инвариантом так называемой «полной группы Лоренца», которая включает как перемещения с постоянной скоростью, так и повороты.

Далее, поскольку эта инвариантность представляет собой алгебраическое свойство, зависящее только от правил преобразования (25.1) *плюс* вращение, то она справедлива для любого четырехвектора. (Все они, по определению, преобразуются одинаковым образом.) Так что для любого четырехвектора  $a_\mu$

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

Эту величину мы будем называть квадратом «длины» четырехвектора  $a_\mu$ . (Будьте внимательны! Иногда берут обратные знаки у всех слагаемых и квадратом длины называют число  $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ .)

Если теперь у нас есть *два* вектора  $a_\mu$  и  $b_\mu$ , то их одноименные компоненты преобразуются одинаково, поэтому комбинация

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

также будет инвариантной (скалярной) величиной. (Фактически мы доказали это уже в гл. 17, вып. 2.) Получилась величина, совершенно аналогичная скалярному произведению векторов. Мы так и будем называть ее *скалярным произведением* двух четырехвекторов. Логично, казалось бы, и записывать его  $a_\mu \cdot b_\mu$ , чтобы оно даже *выглядело похожим* на скалярное произведение. Но обычно, к сожалению, так не делают и пишут его без точки.

И мы тоже будем придерживаться этого порядка и записывать скалярное произведение просто  $a_\mu b_\mu$ . Итак, по определению,

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (25.7)$$

Помните, что повсюду, где вы видите два одинаковых значка (вместо  $\mu$  мы иногда будем пользоваться  $v$  или другими буквами), необходимо взять четыре произведения и сложить их, не забывая при этом о знаке минус перед произведениями пространственных компонент. С учетом такого соглашения инвариантность скалярного произведения при преобразованиях Лоренца можно записать как

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

Поскольку последние три слагаемых в формуле (25.7) представляют просто трехмерное скалярное произведение, то часто удобнее принять такую запись:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

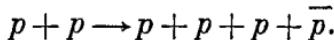
Очевидно, что введенную выше четырехмерную длину можно записать как  $a_\mu a_\mu$ :

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (25.8)$$

Но иногда удобно эту величину записать как  $a_\mu^2$ :

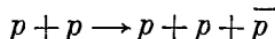
$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

Продемонстрируем теперь плодотворность четырехмерного скалярного произведения. Антипротоны ( $\bar{p}$ ) получают на больших ускорителях из реакции

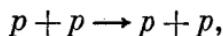


Иначе говоря, высокоэнергетический протон сталкивается с покоящимся протоном (например, с помещенной в пучок водородной мишенью), и если падающий протон обладает достаточной энергией, то в добавок к двум первоначальным протонам может родиться пара протон—антипротон \*.

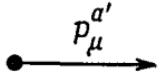
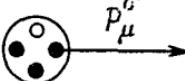
\* Вас может удивить, почему же мы не пользуемся реакцией



или даже



для которой, несомненно, требуется меньшая энергия? Все дело в принципе, называемом *сохранением барионного заряда*, согласно которому величина, равная числу протонов минус число антипротонов, не может изменяться. В левой стороне нашей реакции эта величина равна 2. Следовательно, если мы хотим справа иметь антипротон, то ему должны сопутствовать еще *три* протона (или других бариона).

	<i>До соударения</i>	<i>После соударения</i>
<i>Система центра масс</i>	$p_{\mu}^a$ $p_{\mu}^b$ 	$p_{\mu}^c$ 
<i>Лабораторная система</i>	$p_{\mu}^{a'}$ $p_{\mu}^{b'}$ 	$p_{\mu}^{c'}$ 

Фиг. 25.1. Реакция  $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$  в лабораторной системе и системе ц. м.

Предполагается, что энергия падающего протона как раз достаточна для протекания реакции. Протоны обозначены черными кружочками, а антiproтоны — белыми.

Какой энергией должен обладать падающий протон, чтобы эта реакция стала энергетически возможной?

Ответ легче всего получить, рассмотрев эту реакцию в системе центра масс (ц. м.) (фиг. 25.1). Назовем падающий протон протоном  $a$ , а его четырехимпульс обозначим через  $p_{\mu}^a$ . Аналогично, протон мишени назовем  $b$ , а его четырехимпульс обозначим через  $p_{\mu}^b$ . Если энергии падающего протона как раз достаточно для реакции, то в конечном состоянии (т. е. в состоянии после соударения) образуется система, содержащая три протона и антiproton, покоящиеся в системе ц. м. Если энергия падающего протона будет несколько выше, то частицы в конечном состоянии вылетят с некоторой кинетической энергией и будут разлетаться в стороны; если же она немного ниже, то ее будет недостаточно для образования четырех частиц.

Пусть  $p_{\mu}^c$  — полный четырехимпульс всей системы в конечном состоянии, тогда, согласно закону сохранения энергии и импульса,

$$p^a + p^b = p^c$$

и

$$E^a + E^b = E^c,$$

а комбинируя эти два выражения, можно написать

$$p_{\mu}^a + p_{\mu}^b = p_{\mu}^c. \quad (25.9)$$

Теперь еще одно важное обстоятельство: поскольку мы получили уравнение для четырехвекторов, то оно должно выполняться в любой инерциальной системе. Этим фактом можно воспользоваться для упрощения вычислений. Напишем длины каждой из частей (25.9), которые, разумеется, тоже должны быть равны друг другу, т. е.

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)(p_\mu^a + p_\mu^b) = p_\mu^c p_\mu^c. \quad (25.10)$$

Так как  $p_\mu^c p_\mu^c$  — инвариант, то можно вычислить его в какой-то одной системе координат. В системе ц. м. временная компонента  $p_\mu^c$  равна энергии покоя четырех протонов, т. е.  $4M$ , а пространственная часть  $\mathbf{p}$  равна нулю, так что  $p_\mu^c = (4M, 0)$ . При этом мы воспользовались равенством массы протона и антипротона, обозначив их одной буквой  $M$ .

Таким образом, уравнение (25.10) принимает вид

$$p_\mu^a p_\mu^a + 2p_\mu^a p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2. \quad (25.11)$$

Произведения  $p_\mu^a p_\mu^a$  и  $p_\mu^b p_\mu^b$  вычисляются очень быстро: «длина» четырехвектора импульса любой частицы равна просто квадрату ее массы:

$$p_\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = M^2.$$

Это можно доказать прямыми вычислениями или, несколько более эффективно, простым замечанием, что в *системе покоя* частицы  $p_\mu = (M, 0)$ , а следовательно,  $p_\mu p_\mu = M^2$ . А так как это инвариант, то он равен  $M^2$  в *любой* системе отсчета. Подставляя результаты в уравнение (25.11), мы получаем

$$2p_\mu^a p_\mu^b = 14M^2$$

или

$$p_\mu^a p_\mu^b = 7M^2. \quad (25.12)$$

Теперь можно вычислить  $p_\mu^a p_\mu^b$  в лабораторной системе. В этой системе четырехвектор  $p_\mu^a = (E^a, \mathbf{p}^a)$ , а  $p_\mu^b = (M, 0)$ , ибо он описывает покоящийся протон. Итак,  $p_\mu^a p_\mu^b$  должно быть равно  $ME^a$ , а мы знаем, что скалярное произведение — это инвариант, поэтому оно должно быть равно значению, найденному нами в (25.12). В результате получается

$$E^a = 7M.$$

*Полная* энергия падающего протона должна быть по меньшей мере равна  $7M$  (что составляет около 6,6 ГэВ, так как  $M=938 M_{\text{эв}}$ ) или после вычитания массы покоя  $M$  получаем, что *кинетическая* энергия должна быть равна по меньшей мере  $6M$  (около 5,6 ГэВ). Именно с тем, чтобы иметь возможность производить антипротоны, беватрон в Беркли проектировался на кинетическую энергию ускоренных протонов около 6,2 ГэВ.

Скалярное произведение — инвариант, поэтому полезно знать его величину. Что, например, можно сказать о «длине» четырехвектора скорости  $u_\mu u_\mu$ ?

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1,$$

т. е.  $u_\mu$  — единичный четырехвектор.

### § 3. Четырехмерный градиент

Следующей величиной, которую нам следует обсудить, является четырехмерный аналог градиента. Напомним (см. гл. 14, вып. 1), что три оператора дифференцирования  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  преобразуются подобно трехмерному вектору и называются градиентом. Та же схема должна работать и в четырех измерениях; по простоте вы можете подумать, что четырехмерным градиентом должны быть  $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ , но это неверно.

Чтобы обнаружить ошибку, рассмотрим скалярную функцию, которая зависит только от  $x$  и  $t$ . Приращение  $\Phi$  при малом изменении  $t$  на  $\Delta t$  и постоянном  $x$  равно

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \Delta t. \quad (25.13)$$

С другой стороны, с точки зрения движущегося наблюдателя

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial\Phi}{\partial t'} \Delta t'.$$

Используя уравнение (25.1), мы можем выразить  $\Delta x'$  и  $\Delta t'$  через  $\Delta t$ . Вспоминая теперь, что величина  $x$  постоянна, так что  $\Delta x = 0$ , мы пишем

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Delta t, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \left( -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Delta t \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t'} \left( \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t'} - v \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \right) \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}$$

Сравнивая этот результат с (25.13), мы узнаем, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t'} - v \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \right). \quad (25.14)$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - v \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right). \quad (25.15)$$

Теперь вы видите, что градиент получился довольно странным. Выражения для  $x$  и  $t$  через  $x'$  и  $t'$  [полученные решением уравнений (25.1)] имеют вид

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Именно так должен преобразовываться четырехвектор. Но в уравнениях (25.14) и (25.15) знаки получились неправильными!

Выход в том, что надо заменить неправильное определение четырехмерного оператора градиента  $(\partial/\partial t, \nabla)$  правильным:

$$\nabla_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (25.16)$$

Мы его обозначим  $\nabla_\mu$ . Для такого  $\nabla_\mu$  трудности исчезают, и он ведет себя так, как подобает настоящему четырехвектору. (Ужасно неприятно наличие минусов, но так уж устроено в мире.) Разумеется, говоря, что  $\nabla_\mu$  «ведет себя как четырехвектор», мы подразумеваем, что четырехмерный градиент скалярной функции есть четырехвектор. Если  $\varphi$  — настоящее скалярное (лоренц-инвариантное) поле, то  $\nabla_\mu \varphi$  будет четырехвекторным полем.

Итак, все уладилось. Теперь у нас есть векторы, градиенты и скалярное произведение. Следующий на очереди — инвариант, аналогичный дивергенции в трехмерном векторном анализе. Ясно, что аналогом его должно быть выражение  $\nabla_\mu b_\mu$ , где  $b_\mu$  — векторное поле, компоненты которого являются функциями пространства и времени. Мы определим дивергенцию четырехвектора  $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$  как скалярное произведение  $\nabla_\mu$  на  $b_\mu$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu b_\mu &= \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) b_x - \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) b_y - \left( -\frac{\partial}{\partial z} \right) b_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (25.17)$$

где  $\nabla \cdot \mathbf{b}$  — обычная трехмерная дивергенция вектора  $\mathbf{b}$ . Не забывайте внимательно следить за знаками. Один знак минус связан с определением скалярного произведения [формула (25.7)], а другой возникает от пространственных компонент  $\nabla_\mu$  [формула (25.16)]. Дивергенция, определяемая формулой (25.7), есть инвариант, и для всех систем координат, отличающихся друг от друга преобразованием Лоренца, применение ее приводит к одинаковой величине.

Остановимся теперь на физическом примере, в котором появляется четырехмерная дивергенция. Ею можно воспользоваться при решении задачи о полях вокруг движущегося проводника. Мы уже видели (гл. 13, § 7, вып. 5), что плотность электрического заряда  $\rho$  и плотность тока  $j$  образуют четырехвектор  $j_\mu = (\rho, j)$ . Если незаряженный провод переносит ток  $j_x$ , то в системе отсчета, движущейся относительно него со скоростью  $v$  (вдоль оси  $x$ ), в проводнике наряду с током появится и заряд [который возникает согласно закону преобразований Лоренца (25.1)]:

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Но это как раз то, что мы нашли в гл. 13. Теперь нужно подставить эти источники в уравнение Максвелла в движущейся системе и найти поля.

Закон сохранения заряда в четырехмерных обозначениях тоже принимает очень простой вид. Рассмотрим четырехмерную дивергенцию вектора  $j_\mu$ :

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j. \quad (25.18)$$

Закон сохранения заряда утверждает, что утекание тока из единицы объема должно быть равно отрицательной скорости увеличения плотности заряда. Иными словами,

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Подставляя это в (25.18), получаем очень простую форму закона сохранения заряда:

$$\nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.19)$$

Благодаря тому что  $\nabla_\mu j_\mu$  — инвариант, равенство его нулю в одной системе отсчета означает равенство нулю и во всех других. Таким образом, если заряд сохраняется в одной системе, он будет сохраняться и во всех других системах координат, движущихся относительно нее с постоянной скоростью.

В качестве последнего примера рассмотрим скалярное произведение оператора градиента  $\nabla_\mu$  на себя. В трехмерном пространстве такое произведение даёт лапласиан

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Что получится для четырех измерений? Вычислить это очень просто. Следуя нашему правилу скалярного произведения, находим

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \left( -\frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \end{aligned}$$

Таблица 25.2

• ВАЖНЕЙШИЕ ВЕЛИЧИНЫ ТРЕХМЕРНОГО И ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

## Трехвекторы

## Четырехвекторы

Вектор

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

Скалярное произведение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$$

$$\begin{aligned} a_\mu b_\mu &= a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = \\ &= a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) =$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\mathbf{v} \right)$$

Градиент

$$\nabla \Psi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Psi &= \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}, -\nabla \varphi \right) \end{aligned}$$

Дивергенция

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu a_\mu &= \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

Лапласиан и даламбертиан

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\mu &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^3 \end{aligned}$$

Этот оператор, представляющий аналог трехмерного лапласиана, называется *даламбертианом* и обозначается специальным символом

$$\square^2 = \nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (25.20)$$

По построению он является скалярным оператором, т. е., если подействовать им, скажем, на четырехвекторное поле, возникает новое четырехвекторное поле. [Иногда даламбертиан определяется с противоположным по отношению к (25.20) знаком, так что при чтении литературы будьте внимательны!]

Итак, для большинства величин, перечисленных нами в табл. 25.1, мы нашли их четырехмерные эквиваленты. (У нас еще нет эквивалента векторного произведения, но его нахождение мы оставим до следующей главы.) А теперь соберем в одно место все важнейшие результаты и определения и составим еще одну таблицу (табл. 25.2); она поможет вам лучше запомнить, что во что переходит.

#### § 4. Электродинамика в четырехмерных обозначениях

В гл. 18, § 6, мы уже сталкивались с оператором Даламбера, хотя и не знали, что он так называется. Мы нашли там дифференциальное уравнение для потенциалов, которое в новых обозначениях выглядит так:

$$\square^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (25.21)$$

С правой стороны (25.21) стоят четыре величины  $\rho, j_x, j_y, j_z$ , поделенные на  $\epsilon_0$  — универсальную постоянную, одинаковую во всех системах координат, если во всех системах для измерения заряда используется одна и та же единица. Таким образом, четыре величины  $\rho/\epsilon_0, j_x/\epsilon_0, j_y/\epsilon_0, j_z/\epsilon_0$  тоже преобразуются как четырехвектор. Их можно записать в виде  $j_\mu/\epsilon_0$ . Оператор Даламбера не изменяется при переходе к другим системам координат, так что четыре величины  $\varphi, A_x, A_y$  и  $A_z$  тоже должны преобразоваться как четырехвектор, т. е. должны быть компонентами четырехвектора. Короче говоря, величина

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$$

есть четырехвектор. То, что мы называли скалярным и векторным потенциалами, оказывается только разными частями от одной и той же физической величины. Они неотделимы друг от друга. А если это так, то релятивистская инвариантность мира очевидна. Вектор  $A_\mu$  мы называем *четырехмерным потенциалом* (4-потенциалом).

В четырехмерных обозначениях (25.21) приобретает очень простой вид:

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}. \quad (25.22)$$

Физика этого уравнения та же, что и уравнений Максвелла. Но есть своя прелест в том, что можно переписывать их в столь элегантной форме. Впрочем, эта красивая форма содержит и кое-что более значительное — из нее непосредственно видна инвариантность электродинамики относительно преобразований Лоренца.

Напомним, что уравнение (25.21) можно получить из уравнений Максвелла только тогда, когда наложено дополнительное условие градиентной инвариантности:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (25.23)$$

что означает просто  $\nabla_\mu A_\mu = 0$ , т. е. условие градиентной инвариантности говорит, что дивергенция четырехмерного вектора  $A_\mu$  равна нулю. Это требование носит название *условия Лоренца*. Такая форма его записи очень удобна, ибо она инвариантна, а поэтому уравнения Максвелла во всех системах отсчета сохраняют вид (25.22).

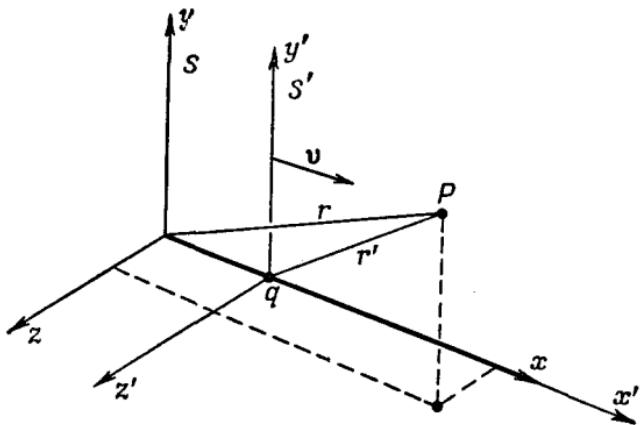
## § 5. Четырехмерный потенциал движущегося заряда

Теперь выпишем законы преобразования, выражающие  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  в движущейся системе через  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  в неподвижной, хотя неявно мы уже говорили о них. Поскольку  $A_\mu = (\Phi, \mathbf{A})$  является четырехвектором, это уравнение должно выглядеть подобно (25.1), за исключением того, что  $t$  нужно заменить на  $\Phi$ , а  $\mathbf{x}$  — на  $\mathbf{A}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\Phi - v A_x}{\sqrt{1-v^2}}, & A'_y &= A_y, \\ A'_x &= \frac{A_x - v \Phi}{\sqrt{1-v^2}}, & A'_z &= A_z. \end{aligned} \quad (25.24)$$

При этом предполагается, что штрихованная система координат движется по отношению к нештрихованной со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ .

Рассмотрим один пример плодотворности идеи 4-потенциала. Чему равны векторный и скалярный потенциалы заряда  $q$ , движущегося со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ ? Задача очень упрощается в системе координат, движущейся вместе с зарядом, ибо в этой системе заряд покоится. Пусть заряд находится в начале координат системы  $S'$ , как это показано на фиг. 25.2.



Фиг. 25.2. Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $v$  (в направлении оси  $x$ ) по отношению к системе  $S$ .

Заряд, покоящийся в начале системы координат  $S'$ , находится в системе  $S$  в точке  $x = vt$ . Потенциалы в точке  $P$  могут быть найдены для любой системы отсчета.

Скалярный потенциал в движущейся системе задается выражением

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (25.25)$$

причем  $r'$  — расстояние от заряда  $q$  до точки в движущейся системе, где производится измерение поля. Векторный же потенциал  $\mathbf{A}'$ , разумеется, равен нулю.

Теперь без особых хитростей можно найти потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  в неподвижной системе координат. Соотношениями, обратными к уравнениям (25.24), будут

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, & A_y &= A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + v\varphi'}{\sqrt{1-v^2}}, & A_z &= A'_z. \end{aligned} \quad (25.26)$$

Используя далее выражение для  $\varphi'$  [см. (25.25)] и равенство  $\mathbf{A}' = 0$ , получаем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' \sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Эта формула дает нам скалярный потенциал  $\varphi$ , который мы увидели бы в системе  $S$ , но он, к сожалению, записан через координаты штрихованной системы. Впрочем, это дело легко поправимо; с помощью (25.1) можно выразить  $t'$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  через  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и получить

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \quad (25.27)$$

Повторяя ту же процедуру для вектора  $\mathbf{A}$ , вы можете показать, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi. \quad (25.28)$$

Это те же самые формулы, которые мы вывели в гл. 21, но там они были получены другим методом.

## § 6. Инвариантность уравнений электродинамики

Итак, потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , оказывается, образуют в совокупности четырехвектор, который мы обозначили через  $A_\mu$ , а волновое уравнение (полное уравнение, выражающее  $A_\mu$  через  $j_\mu$ ) можно записать в виде (25.22). Это уравнение вместе с сохранением заряда (25.19) составляют фундаментальный закон электромагнитного поля:

$$\square^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.29)$$

И вот, пожалуйста, все уравнения Максвелла просто и красиво записываются всего в одной строке. Достигли ли мы чего-нибудь, записав их в таком виде, кроме, разумеется, красоты и простоты? Прежде всего, есть ли здесь какое-нибудь отличие от того, что было раньше, когда мы выписывали их во всем разнообразии компонент? Можно ли из этих уравнений получить нечто, чего нельзя получить из волновых уравнений для потенциалов, содержащих заряды и токи? Ответ вполне определенный — конечно, нельзя. Единственное, что мы сделали — это изменили названия, т. е. использовали новые обозначения. Мы нарисовали квадратик для обозначения производных, но это по-прежнему не более и не менее как вторая производная по  $t$  минус вторая производная по  $x$ , минус вторая производная по  $y$ , минус вторая производная по  $z$ . А значок  $\mu$  говорит, что у нас есть четыре уравнения, по одному для каждого из значений  $\mu = t, x, y$  или  $z$ . Какой же тогда смысл того, что уравнения можно записать в столь простой форме? С точки зрения получения чего-то нового — никакого. Хотя, возможно, простота уравнений и выражает определенную простоту природы.

Сейчас я покажу вам нечто интересное, чему мы понемногу научились. Можно сказать, что *все законы физики описываются одним уравнением*:

$$\mathbf{U} = 0. \quad (25.30)$$

Не правда ли, удивительно простое уравнение! Конечно, нужно еще знать, что обозначает символ  $\mathbf{U}$ . Это физическая величина, которую мы будем называть «несообразностью» \* ситуации. У нас даже есть для нее формула. Вот как вычисляется

\* В английском оригинале «unworldliness». — Прим. ред.

эта несообразность: вы берете все физические законы и записываете их в особой форме. Например, вы взяли закон механики  $F=ma$  и записали его в виде  $F - ma = 0$ . Теперь вы можете величину ( $F - ma$ ), которая, разумеется, в нашем мире должна быть нулем, назвать «несообразностью» механики. Затем вы берете квадрат этой несообразности, обозначаете его через  $U_1$  и называете ее «механической несообразностью». Другими словами, вы берете

$$U_1 = (F - ma)^2, \quad (25.31)$$

потом выписываете второй физический закон, скажем  $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ , и определяете

$$U_2 = \left( \nabla \cdot E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)^2,$$

который можно назвать «гауссовой электрической несообразностью». Продолжая этот процесс, вы можете ввести  $U_3$ ,  $U_4$  и т. д. для каждого из физических законов.

Наконец, полной несообразностью мира  $U$  вы называете сумму  $U_i$  для каждого из различных явлений, т. е.  $U = \sum_i U_i$ .

И тогда «великий закон природы» гласит:

$U = 0.$

(25.32)

Этот «закон», разумеется, утверждает лишь, что сумма квадратов всех отдельных отклонений равна нулю, однако единственный способ сделать сумму квадратов множества членов равной нулю — это приравнять нулю каждое из ее слагаемых.

Таким образом, «удивительно простой закон» (25.32) эквивалентен целому ряду уравнений, которые вы писали первонациально. Поэтому совершенно очевидно, что простые обозначения, скрывающие сложности за определением символов, — это еще не истинная простота. Это только трюк. Так и в выражении (25.32) за кажущейся простотой скрывается несколько уравнений; это снова не более чем трюк. Развернув их, вы снова получите то, что было раньше.

Однако закон электродинамики, написанный в форме уравнения (25.29), содержит нечто большее, чем простую запись; в векторном анализе, кроме простоты записи, также есть нечто большее. Тот факт, что уравнения электромагнетизма можно записать в особых обозначениях, которые специально приспособлены для четырехмерной геометрии преобразований Лоренца, иначе говоря, как векторные уравнения в четырехмерном мире, означает, что они инвариантны относительно преобразований Лоренца. Именно потому, что уравнения Максвелла инвариантны относительно этих преобразований, их можно записать в столь красивом виде.

В том, что законы электродинамики можно записать в форме элегантного уравнения (25.29), нет ничего случайного. Теория относительности была развита именно потому, что экспериментально подтвердились неизменность предсказанных уравнением Максвелла явлений в любой инерциальной системе. Именно при изучении трансформационных свойств уравнений Максвелла Лоренц открыл свои преобразования как преобразования, оставляющие инвариантными эти уравнения.

Однако есть и другая причина записывать уравнения в таком виде. Было обнаружено, что все законы физики должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца (первый об этом догадался Эйнштейн). Таково содержание принципа относительности. Поэтому если вы изобрели обозначения, которые сразу же показывают, инвариантен ли выписанный вами закон, то можно гарантировать, что при попытке создать новую теорию вы будете писать только уравнения, соглашающиеся с принципом относительности.

В простоте уравнений Максвелла в этих частных обозначениях никакого чуда нет. Обозначения специально были придуманы именно для них. Самая интересная с физической точки зрения вещь состоит в том, что любой физический закон (будь то распространение мезонных волн, или поведение нейтрино в  $\beta$ -распаде, или что-то другое) должен иметь ту же самую инвариантность относительно тех же преобразований. Так что если ваш звездолет движется с постоянной скоростью, то все законы природы вместе преобразуются так, что никаких новых явлений не возникает. Именно благодаря тому, что принцип относительности является законом природы, уравнения нашего мира в четырехмерных обозначениях должны выглядеть гораздо проще.

## ЛОРЕНЦЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ

### § 1. Четырехмерный потенциал движущегося заряда

В предыдущей главе мы видели, что потенциал  $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$  является четырехвектором. Его временной компонентой служит скалярный потенциал  $\varphi$ , а тремя пространственными компонентами — векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . Используя преобразования Лоренца, мы нашли также потенциал частицы, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью. (В гл. 21 то же самое было сделано несколько иным методом.) Для точечного заряда, координаты которого в момент  $t$  равны  $(vt, 0, 0)$ , потенциалы в точке  $(x, y, z)$  имеют вид

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2} \left[ \frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2}},$$

$$A_x = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2} \left[ \frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2}}, \quad (26.1)$$

$$A_y = A_z = 0.$$

Уравнения (26.1) дают потенциалы в точке  $x, y, z$  в момент  $t$ , возникающие от движущегося заряда, «истинное» положение которого (имеется в виду положение *в момент времени*  $t$ )  $x=vt$ . Заметьте, что в уравнение входят координаты  $(x-vt), y$  и  $z$ , которые являются координатами относительно *переменного положения*  $P$  движущегося заряда (фиг. 26.1). Но, как вы знаете, истинное влияние распространяется на самом деле со скоростью  $c$ , так что поле в точке определяется на самом деле запаздывающим положением заряда  $P'$ , координата  $x$  которого равна  $vt'$  (где  $t' = t - r'/c$  — «запаздывающее»

§ 1. Четырехмерный потенциал движущегося заряда

§ 2. Поля точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью

§ 3. Релятивистское преобразование полей

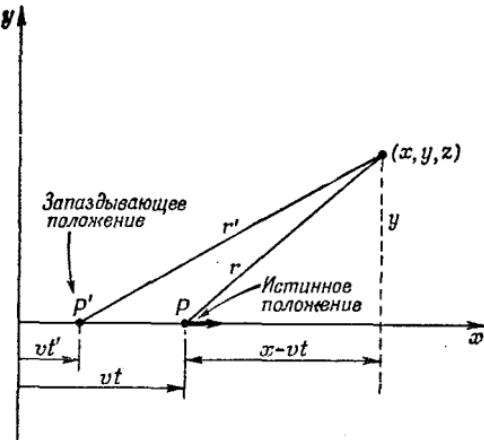
§ 4. Уравнение движения в релятивистских обозначениях

**В этой главе  $c=1$**

**Повторить:** гл. 20  
«Решение уравнений Maxwella в пустом пространстве»

*Ф и е. 26.1. Определение полей в точке  $P$  от заряда  $q$ , движущегося вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ .*

Поле в точке  $(x, y, z)$  в «настоящий момент» можно выразить как через «истинное» положение  $P$ , так и через «запаздывающее» положение  $P'$  (т. е. положение в момент  $t' = t - r'/c$ ).



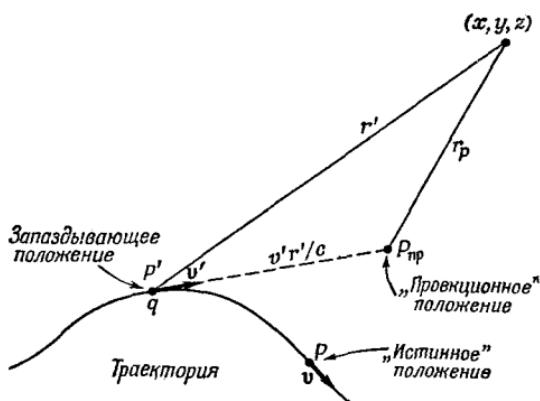
время)\*. Нам, однако, известно, что заряд двигался с постоянной скоростью по прямой линии, поэтому естественно, что поведение в точке  $P'$  непосредственно связано с переменным положением заряда. Фактически, если мы добавим предположение, что потенциалы зависят только от положения и скорости в запаздывающий момент, тогда уравнение (26.1) будет представлять собой полную формулу для потенциалов заряда, движущегося любым образом. Вот как все это работает. Пусть у вас имеется заряд, движущийся каким-то произвольным образом, скажем, по траектории, изображенной на фиг. 26.2, и вы пытаетесь найти потенциал в точке  $(x, y, z)$ . Прежде всего вы находите запаздывающее положение  $P'$  и скорость  $v'$  в этой точке. Вообразите затем, что заряд сохраняет свое движение с этой скоростью на весь период запаздывания ( $t' - t$ ), так что он появился бы затем в воображаемом положении  $P_{\text{пр}}$ , которое мы будем называть «проекционным», причем двигаясь с той же скоростью  $v'$ . (На самом деле он, конечно, не делает этого; в момент  $t$  он находится в точке  $P$ .) Тогда потенциалы в точке  $(x, y, z)$  будут как раз такими, которые дали бы уравнения (26.1) для воображаемого заряда в проекционном положении  $P_{\text{пр}}$ . Мы хотим здесь сказать, что, поскольку потенциалы зависят только от того, что делает заряд в запаздывающий момент, они будут одинаковы, независимо от того, продолжает ли заряд свое движение с постоянной скоростью или изменяет его после момента  $t'$ , т. е. после того, как потенциалы, которые возникнут в момент  $t$  в точке  $(x, y, z)$ , уже определены.

Вы понимаете, конечно, что в тот момент, когда получены формулы для потенциалов произвольно движущегося заряда,

\* Штрих используется здесь для обозначения запаздывающего положения и времени; не путайте его со штрихом в предыдущей главе, обозначавшим систему отсчета, подвергнутую преобразованиям Лоренца.

*Фиг. 26.2. Движение заряда по произвольной траектории.*

Потенциалы в точке  $(x, y, z)$  в момент  $t$  определяются положением  $P'$  и скоростью  $v'$  в запаздывающий момент  $t' = t - r'/c$ . Их удобно выражать через координаты относительно «проекционного» положения  $P_{\text{пр}}$  (истинным положением в момент  $t$  является точка  $P$ ).



мы имеем полную электродинамику; из принципа суперпозиции мы можем получить потенциалы для любого распределения зарядов. Следовательно, все явления электродинамики можно вывести либо из уравнений Максвелла, либо из следующего ряда замечаний. (Запомните их на случай, если вы вдруг очутитесь на необитаемом острове. Исходя из них, можно восстановить все. Преобразования Лоренца вы, конечно, помните. Не забывайте их ни на необитаемом острове, ни в каком-либо другом месте.)

Во-первых,  $A_\mu$  — четырехвектор. Во-вторых, кулоны потенциал любого покоящегося заряда равен  $q/4\pi\epsilon_0 r$ . В-третьих, потенциал, созданный зарядом, движущимся произвольным образом, зависит только от положения в запаздывающий момент времени. Из этих трех фактов вы можете получить все. Из того, что  $A_\mu$  — четырехвектор, мы преобразованием кулонова потенциала, который известен, получим потенциал заряда, движущегося с постоянной скоростью. Затем из последнего утверждения, что потенциал зависит только от скорости в запаздывающий момент, мы, используя проекционное положение, можем их найти. Правда, это не очень-то удобный способ рассмотрения, но интересно убедиться в том, что законы физики можно сформулировать множеством самых различных способов.

Иногда кое-кто безответственно заявляет, что вся электродинамика может быть получена только из преобразований Лоренца и закона Кулона. Это, конечно, совершенно неверно. Мы прежде всего должны предположить, что у нас имеются скалярный и векторный потенциалы, которые в совокупности образуют четырехвектор. Это говорит нам, как преобразуются потенциалы. Затем, откуда нам известно, что необходимо учитывать только эффект в запаздывающий момент? Или, еще лучше, почему потенциал зависит только от положения и скорости и не

зависит, например, от ускорения? Ведь поля **E** и **B** зависят все-таки и от ускорения. Если вы попытаетесь применить те же рассуждения к ним, то будете вынуждены признать, что они зависят только от положения и скорости в запаздывающий момент. Но тогда поле ускоряющегося заряда было бы таким же, как и поле от заряда в проекционном положении, а это неверно. Поля зависят не только от положения и скорости вдоль траектории, но и от ускорения. Так что в «великом» утверждении, что все можно получить из преобразования Лоренца, содержится еще несколько неявных дополнительных предположений. (Всегда, когда вы слышите подобное эффектное утверждение, что нечто большое можно построить на основе малого числа предположений,— ищите ошибку. Обычно неявно принимается довольно много такого, что оказывается далеко не очевидным, если посмотреть внимательнее.)

## **§ 2. Поля точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью**

Итак, мы нашли потенциалы точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью. Для практических целей нам нужно найти поля. Равномерно движущиеся заряды попадаются буквально на каждом шагу, скажем проходящие через камеру Вильсона космические лучи или даже медленно движущиеся электроны в проводнике. Так что давайте хотя бы посмотрим, как выглядят эти поля для любых скоростей заряда, даже для скоростей, близких к скорости света, но предположим при этом, что ускорение вообще отсутствует. Это очень интересный вопрос.

Поля мы будем находить по обычным правилам, исходя из потенциалов

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Возьмем сначала  $E_z$ :

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Но компонента  $A_z$  равна нулю, а дифференцирование выражения (26.1) для  $\varphi$  дает

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[ \frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (26.2)$$

Аналогичная процедура для  $E_y$  приводит к

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[ \frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (26.3)$$

Немного больше работы с  $x$ -компонентой. Производная от  $\phi$  более сложна, да и  $A_x$  не равна нулю. Давайте сначала вычислим  $-\partial\phi/\partial x$ :

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.4)$$

А затем продифференцируем  $A_x$  по  $t$ :

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.5)$$

И, наконец, складывая их, получаем

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.6)$$

Бросим на минуту заниматься полем  $E$ , а сначала найдем  $B$ . Для его  $z$ -компоненты мы имеем

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Но, поскольку  $A_y$  равна нулю, у нас остается только одна производная. Заметьте, однако, что  $A_x$  просто равна  $v\phi$ , а производная  $(\partial/\partial y)v\phi$  равна  $-vE_y$ . Так что

$$B_z = vE_y. \quad (26.7)$$

Аналогично,

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = v \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

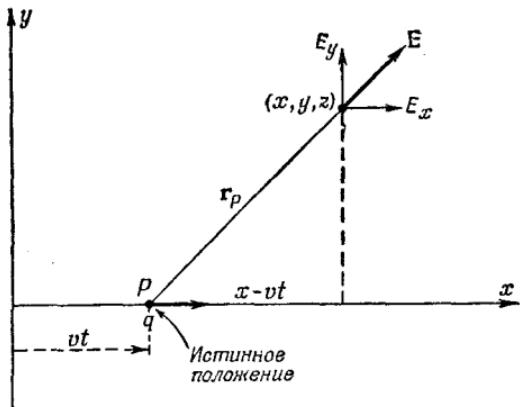
или

$$B_y = -vE_z. \quad (26.8)$$

Наконец, компонента  $B_x$  равна нулю, поскольку равны нулю и  $A_y$  и  $A_z$ . Таким образом, магнитное поле можно записать в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (26.9)$$

Теперь посмотрим, как выглядят наши поля. Мы попытаемся нарисовать картину поля вокруг положения заряда в настоящий момент. Конечно, влияние заряда в каком-то смысле происходит из запаздывающего положения, но, поскольку мы имеем дело со строго заданным движением, запаздывающее положение однозначно определяется положением в настоящий момент. При постоянной скорости заряда поля лучше связывать с текущими координатами, ибо компоненты поля в точке  $x, y, z$  зависят только от  $(x-vt), y$  и  $z$ , которые являются компонентами



Фиг. 26.3. Электрическое поле заряда, движущегося с постоянной скоростью, направлено по радиусу от истинного положения заряда.

вектора перемещения  $r_p$  из постоянного положения заряда в точку  $(x, y, z)$  (фиг. 26.3).

Рассмотрим сначала точки, для которых  $z=0$ . Поле  $\mathbf{E}$  в этих точках имеет только  $x$ - и  $y$ -компоненты. Из уравнений (26.3) и (26.6) видно, что отношение этих компонент как раз равно отношению  $x$ - и  $y$ -компонент вектора перемещения. Это означает, что направление  $\mathbf{E}$  совпадает с направлением  $\mathbf{r}_p$ , как это показано на фиг. 26.3. Тот же результат остается справедливым и для трех измерений, поскольку  $E_z$  пропорционально  $z$ . Короче говоря, электрическое поле заряда радиально и силовые линии расходятся от заряда так же, как и в стационарном случае. Конечно, вследствие наличия дополнительного фактора  $(1-v^2)$  поле не будет тем же самым, что в стационарном случае. Но здесь мы можем увидеть нечто очень интересное. Дело обстоит так, как будто вы пишете закон Кулона в особой системе координат, «сжатой» вдоль оси  $x$  множителем  $\sqrt{1-v^2}$ . Если вы сделаете это, то силовые линии впереди и позади заряда разойдутся, а по бокам сгустятся (фиг. 26.4).

Если мы связываем обычным образом напряженность поля  $\mathbf{E}$  с плотностью силовых линий, то видим, что поле впереди и позади заряда ослабевает, но зато по бокам становится сильнее, т. е. как раз то, о чем говорит нам уравнение. Когда вы измеряете напряженность поля под прямыми углами к линии движения, т. е. при  $(x-vt)=0$ , расстояние от заряда будет равно  $y^2+z^2$ , а полная напряженность  $\sqrt{E_x^2+E_y^2}$  в этих точках равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2} y^2 + z^2}. \quad (26.10)$$

Она, как и в случае кулонова поля, пропорциональна квадрату расстояния, но еще усиливается постоянным множителем  $1/\sqrt{1-v^2}$ , который всегда больше единицы. Таким образом, по бокам движущегося заряда электрическое поле сильнее, чем

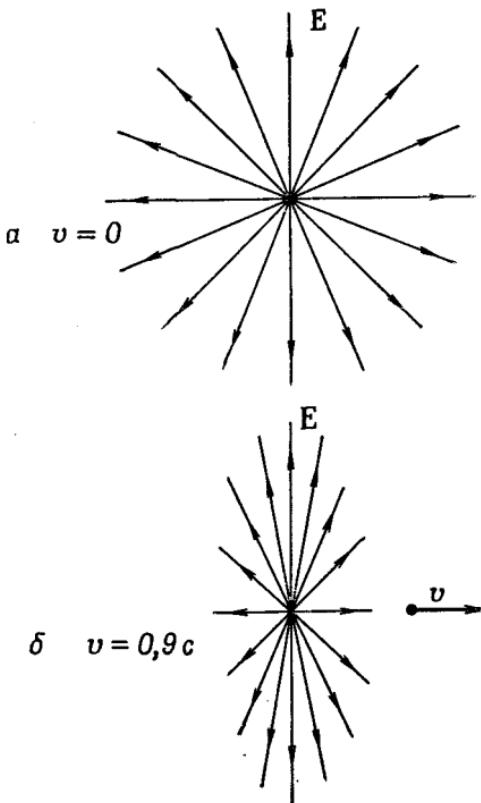
это следует из закона Кулона. Фактически увеличение по сравнению с кулоновым потенциалом равно отношению энергии частицы к ее массе покоя.

Впереди заряда (или позади него)  $y$  и  $z$  равны нулю, а поэтому

$$E = E_x = \frac{q(1-v^2)}{4\pi\epsilon_0(x-vt)^2}. \quad (26.11)$$

Снова поле обратно пропорционально расстоянию от заряда, но теперь оно *зарезается* множителем  $(1-v^2)$ , что согласуется с картиной силовых линий. Если  $v/c$  мало, то  $v^2/c^2$  еще меньше, и действие  $(1-v^2)$  почти незаметно, поэтому мы снова возвращаемся к закону Кулона. Но если частица движется со скоростью, близкой к скорости света, то поле перед частицей сильно уменьшается, а поле сбоку чудовищно возрастает.

Наш результат, относящийся к электрическому полю заряда, можно представить и так. Предположим, что вы на клочке бумаги нарисовали силовые линии покоящегося заряда, а затем эту картину запустили со скоростью  $v^2$ . Тогда благодаря лоренцеву сокращению рисунок сожмется, т. е. частички графита на бумаге будут казаться нам расположенными в других местах. Но чудо состоит в том, что в результате на пролетающем мимо листочке вы увидите точную картину силовых линий точечного движущегося заряда. Лоренцево сокращение сблизит их по бокам, раздвинет перед зарядом и позади него как раз настолько, чтобы получить нужную плотность. Мы уже отмечали, что силовые линии — это не реальность, а лишь способ представить себе электрическое поле. Однако здесь они ведут себя как самые настоящие реальные линии. В этом частном



Фиг. 26.4. Электрическое поле заряда.

*a* — неподвижного, *б* — летящего с постоянной скоростью  $v=0,9$  с.

случае, если вы и сделали ошибку, рассматривая силовые линии как нечто реальное и преобразуя их как реальные линии в пространстве, поле в результате все равно получилось бы правильным. Однако от этого силовые линии не станут более реальными. Вспомните об электрическом поле, создаваемом зарядом вместе с магнитом; когда магнит движется, он создает новое электрическое поле и разрушает всю нашу прекрасную картину. Так что простая идея сокращающейся картинки, вообще говоря, не годится. Но все же это очень удобный способ запомнить, как выглядит поле быстро движущегося заряда.

Магнитное поле [из уравнения (26.9)] равно  $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ . Когда вы векторно помножите скорость на радиальное поле  $\mathbf{E}$ , то получите поле  $\mathbf{B}$ , силовые линии которого представляют окружности вокруг линии движения (фиг. 26.5). Если же теперь мы подставим обратно все  $c$ , то вы убедитесь, что результат получился тот же, что и для медленно движущихся зарядов. Хороший способ установить, куда должны войти  $c$ , — это вспомнить формулу для силы:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Вы видите, что произведение скорости на магнитное поле имеет ту же размерность, что и электрическое поле, так что в правой части (26.9) должен стоять множитель  $1/c^2$ , т. е.

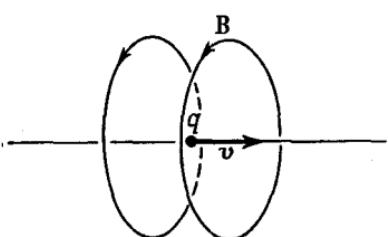
$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (26.12)$$

Для медленно движущегося заряда ( $v \ll c$ ) поле можно считать кулоновым, и тогда

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^2}. \quad (26.13)$$

Эта формула в точности соответствует магнитному полю тока, которое было найдено в гл. 14 (вып. 5).

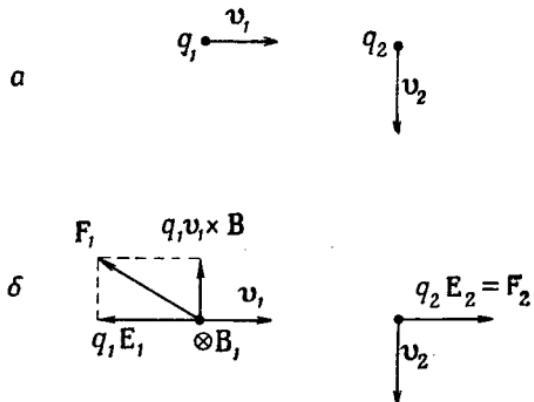
Попутно мне хотелось бы отметить кое-что весьма интересное просто для того, чтобы вы об этом подумали. (К обсуждению этого мы еще вернемся, но несколько позже.) Представьте себе два электрона, скорости которых перпендикулярны, так что пути их пересекаются, однако электроны не сталкиваются; один из них успевает проскочить перед другим. В какой-то мо-



Фиг. 26.5. Магнитное поле вблизи движущегося заряда равно  $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$  (ср. с фиг. 26.4).

*Фиг. 26.6. Силы между двумя движущимися зарядами не всегда равны и противоположны.*

*«Действие», оказывается, не равно «противодействию».*



мент их относительное положение будет таким, как изображено на фиг. 26.6, а. Рассмотрим теперь силы, с которыми  $q_2$  действует на  $q_1$ , и наоборот. На  $q_2$  со стороны  $q_1$  действует только электрическая сила, ибо  $q_1$  на линии своего движения не создает магнитного поля. Однако на  $q_1$ , кроме электрического поля, действует еще и магнитное, так что он движется и в магнитном поле, создаваемом зарядом  $q_2$ . Все эти силы показаны на фиг. 26.6, б. Электрические силы, действующие на  $q_1$  и  $q_2$ , равны по величине и противоположны по направлению. Однако на  $q_1$  еще действует и боковая (магнитная) сила, которой и в помине нет у  $q_2$ . Равно ли здесь действие противодействию? Поломайте голову над этим вопросом.

### § 3. Релятивистское преобразование полей

В предыдущем параграфе мы вычисляли электрическое и магнитное поля, исходя из трансформационных свойств потенциалов. Но, несмотря на приведенные ранее аргументы в пользу физического смысла и реальности потенциалов, поля все же важнее. Они тоже реальны, и для многих задач было бы удобно иметь способ вычисления полей в движущейся системе, если поля в некоторой «покоящейся» системе уже известны. Мы имеем законы преобразования для  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ , поскольку  $A_\mu$  представляет собой четырехвектор. Теперь нам хотелось бы найти законы преобразования  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Пусть мы знаем векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в одной системе отсчета. Как же они выглядят в другой системе, движущейся относительно первой? Здесь-то нам и понадобятся преобразования. Конечно, мы всегда можем сделать это через потенциал, но иногда удобно уметь преобразовывать поля непосредственно. Сейчас мы увидим, как это делается.

Как можно найти закон преобразования полей? Нам известны законы преобразования  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ , и мы знаем, как выражаются поля через  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ , так что отсюда нетрудно найти преобразования для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . (Вы можете подумать, что у каждого вектора

есть нечто, дополняющее его до четырехвектора, так что, например, с вектором  $\mathbf{E}$  можно связать некую величину, которая сделает его четырехвектором. То же самое относится и к  $\mathbf{B}$ . Увы, это не так. Все оказывается совершенно непохожим на то, что можно было бы ожидать.) Для начала возьмем магнитное поле  $\mathbf{B}$ , которое, конечно, равно  $\nabla \times \mathbf{A}$ . Теперь мы знаем, что  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -компоненты векторного потенциала — это только одна часть, помимо них есть еще и  $t$ -компоненты. Кроме того, мы знаем, что у аналога оператора  $\nabla$  наряду с производными по  $x$ ,  $y$  и  $z$  есть также производная по  $t$ . Давайте же попытаемся найти, что получится, если мы произведем замену  $y$  на  $t$ , или  $z$  на  $t$ , или еще что-нибудь в этом духе.

Прежде всего обратите внимание на форму слагаемых, образующих компоненты  $\mathbf{B}$ :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (26.14)$$

В слагаемые, образующие  $x$ -компоненту  $B$ , входят только  $z$ - и  $y$ -компоненты  $A$ . Предположим, мы назвали эту комбинацию производных и компонент « $zy$ -штукой», или сокращенно  $F_{zy}$ . Мы просто имеем в виду, что

$$F_{zy} \equiv \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (26.15)$$

Подобной же «штуке» равна и компонента  $B_y$ , но на сей раз это будет « $xz$ -штукой», а  $B_z$ , разумеется, равна « $yx$ -штукой». Таким образом,

$$B_x = F_{zy}, \quad B_y = F_{xz}, \quad B_z = F_{yx}. \quad (26.16)$$

Посмотрим теперь, что получится, если мы попытаемся смастерить «штуки» типа « $t$ », т. е.  $F_{xt}$  или  $F_{tz}$  (ведь природа должна быть красива и симметрична по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ ). Что такое, например,  $F_{tz}$ ? Разумеется, она равна

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Но вспомните, ведь  $A_t = \varphi$ , поэтому предыдущее выражение равно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Такое выражение нам уже встречалось раньше. Это почти  $z$ -компоненты поля  $\mathbf{E}$ . Почти, за исключением неверного знака. Впрочем, мы забыли, что в четырехмерном градиенте производная по  $t$  идет со знаком, противоположным производным по  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Так что на самом деле нам следует взять более

умное обобщение, т. е. считать

$$F_{tz} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (26.17)$$

Теперь она в точности равна  $-E_z$ . Так же можно построить  $F_{tx}$  и  $F_{ty}$  и получить три выражения:

$$F_{tx} = -E_x, \quad F_{ty} = -E_y, \quad F_{tz} = -E_z. \quad (26.18)$$

А что, если оба индекса внизу будут  $t$ ? Или оба будут  $x$ ? Тогда мы получим выражения типа

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t}$$

и

$$F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x},$$

т. е. просто нуль.

Итак, у нас есть шесть таких « $F$ -штук». Кроме них, есть еще шесть полученных перестановкой индексов, но они не дают ничего нового, ибо

$$F_{xy} = -F_{yx}$$

и т. п. Таким образом, из шести возможных попарных комбинаций четырех значений индексов мы получили шесть различных физических объектов, которые представляют компоненты  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ .

Чтобы записать члены  $F$  в общем виде, мы воспользуемся обобщенными индексами  $\mu$  и  $\nu$ , каждый из которых может быть 0, 1, 2 или 3, обозначающих соответственно (как и в обычных четырехвекторах)  $t$ ,  $x$ ,  $y$  или  $z$ . Кроме того, все будет прекрасно согласовываться с нашими четырехмерными обозначениями, если  $F_{\mu\nu}$  определить как

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (26.19)$$

помня при этом, что

$$\nabla_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right),$$

а

$$A_\mu = (\varphi, A_x, A_y, A_z).$$

То, что мы нашли, можно сформулировать так: в природе существуют шесть величин, которые представляют различные стороны чего-то одного. Электрическое и магнитное поля, которые в нашем обычном медленно движущемся мире (где нас не беспокоит конечность скорости света) рассматривались как совершенно отдельные векторы, в четырехмерном пространстве уже не будут ими. Они — часть некоторой новой «штуки».

Наше физическое «поле» на самом деле шестикомпонентный объект  $F_{\mu\nu}$ . Вот как обстоит дело в теории относительности. Полученные результаты для  $F_{\mu\nu}$  собраны в табл. 26.1.

Таблица 26.1 • КОМПОНЕНТЫ  $F_{\mu\nu}$

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	
$F_{\mu\mu} = 0$	
$F_{xy} = -B_z$	$F_{xt} = E_x$
$F_{yz} = -B_x$	$F_{yt} = E_y$
$F_{zx} = -B_y$	$F_{zt} = E_z$

Вы видите, что мы сделали фактически обобщение векторного произведения. Мы начали с ротора и с того факта, что его свойства преобразования в точности такие же, как свойства преобразования *двух* векторов — обычного трехмерного вектора  $A$  и оператора градиента, который, как нам известно, ведет себя подобно вектору. Возвратимся на минуту к обычному векторному произведению в трехмерном пространстве, например к моменту количества движения частицы. При движении частицы в плоскости важной характеристикой оказывается комбинация  $(xv_y - yv_x)$ , а при движении в трехмерном пространстве появляются три подобные величины, которые мы назвали моментом количества движения:

$$\begin{aligned} L_{xy} &= m(xv_y - yv_x), \\ L_{yz} &= m(yv_z - zv_y), \\ L_{zx} &= m(zv_x - xv_z). \end{aligned}$$

Затем (хотя сейчас вы, может быть, об этом и забыли) мы сотворили в гл. 20 (вып. 2) чудо: эти три величины превратились в компоненты вектора. Чтобы сделать это, мы приняли искусственное соглашение: правило правой руки. Нам просто повезло. И повезло потому, что момент  $L_{ij}$  ( $i$  и  $j$  равны  $x$ ,  $y$  или  $z$ ) оказался антисимметричным объектом, т. е.

$$L_{ij} = -L_{ji}, \quad L_{ii} = 0.$$

Из девяти возможных его величин независимы лишь три. И вот оказалось, что при изменении системы координат эти три оператора преобразуются в точности, как компоненты вектора.

То же свойство позволяет записать в виде вектора и элемент поверхности. Элемент поверхности имеет две части, скажем  $dx$  и  $dy$ , которые можно представить вектором  $da$ , ортогональным к поверхности. Но мы не можем сделать этого же для четырех измерений. Что будет нормалью к элементу  $dxdy$ ? Куда она направлена — по оси  $z$  или по  $t$ ?

Короче говоря, для трех измерений оказывается, что комбинацию двух векторов типа  $L_{ij}$ , к счастью, снова можно представить в виде вектора, поскольку возникают как раз три члена, которые, выходит, преобразуются подобно компонентам вектора. Для четырех измерений это, очевидно, невозможно, поскольку независимых членов шесть, а шесть величин вы никак не представите в виде четырех.

Однако даже в трехмерном пространстве можно составить такую комбинацию векторов, которую невозможно представить в виде вектора. Предположим, мы взяли какие-то два вектора  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  и  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  и составили всевозможные различные комбинации компонент типа  $a_x b_x$ ,  $a_x b_y$  и т. д. Всего получается девять возможных величин:

$$\begin{array}{lll} a_x b_x, & a_x b_y, & a_x b_z, \\ a_y b_x, & a_y b_y, & a_y b_z, \\ a_z b_x, & a_z b_y, & a_z b_z. \end{array}$$

Эти величины можно назвать  $T_{ij}$ .

Если теперь перейти в повернутую систему координат (скажем, относительно оси  $z$ ), то при этом компоненты  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  изменяются. В новой системе  $a_x$  должно быть заменено на

$$a'_x = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta,$$

а  $b_y$  — на

$$b'_y = b_y \cos \theta - b_x \sin \theta.$$

Аналогичные вещи происходят и с другими компонентами. Девять компонент изобретенной нами величины  $T_{ij}$ , разумеется, тоже изменяются. Например,  $T_{xy} = a_x b_y$  переходит в  $T'_{xy} = a_x b_y (\cos^2 \theta) - a_x b_x (\cos \theta \sin \theta) + a_y b_y (\sin \theta \cos \theta) - a_y b_x (\sin^2 \theta)$ , или

$$T'_{xy} = T_{xy} \cos^2 \theta - T_{xx} \cos \theta \sin \theta + T_{yy} \sin \theta \cos \theta - T_{yx} \sin^2 \theta.$$

Каждая компонента  $T_{ij}$  — это линейная комбинация компонент  $T_{ij}$ .

Итак, мы обнаружили, что из векторов можно сделать не только векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , три компоненты которого преобразуют подобно вектору. Искусственно мы из двух векторов  $T_{ij}$  можем сделать «произведение» другого сорта. Девять его компонент преобразуются при вращении по сложным правилам, которые можно выписать. Подобный объект, требующий для своего описания вместо одного индекса два, называется *тензором*. Мы построили тензор «второго ранга», но так же можно поступить и с тремя векторами и получить тензор третьего ранга, а из четырех векторов — тензор четвертого ранга и т. д. Тензором первого ранга является вектор.

Суть всего этого разговора в том, что наше электромагнитное поле  $F_{\mu\nu}$  — тоже тензор второго ранга, так как у него два индекса. Однако это уже тензор в четырехмерном пространстве. Он преобразуется специальным образом, и через минуту мы найдем его. Это просто произведение векторных преобразований. Если у тензора  $F_{\mu\nu}$  вы переставите индексы, то он изменит свой знак. Это особый вид тензора, и называется он *антисимметричным*. Иначе говоря, электрическое и магнитное поля являются частью антисимметричного тензора второго ранга в четырехмерном пространстве.

Вот какой мы прошли длинный путь. Помните, мы начали с определения, что такое скорость? А теперь мы уже рассуждаем о «тензоре второго ранга в четырехмерном пространстве».

Теперь нам нужно найти закон преобразования  $F_{\mu\nu}$ . Сделать это нетрудно — мороки только много,— шевелить мозгами особенно не нужно, а вот потрудиться все же придется. Единственное, что мы должны найти,— это преобразование Лоренца величины  $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ . Так как  $\nabla_\mu$  — просто специальный случай вектора, то мы будем работать с общей антисимметричной комбинацией векторов, которую можно назвать  $G_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \quad (26.20)$$

(Для наших целей  $a_\mu$  следует, в конце концов, заменить на  $\nabla_\mu$ , а  $b_\mu$  — на потенциал  $A_\mu$ .) Компоненты  $a_\mu$  и  $b_\mu$  преобразуются по формулам Лоренца:

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_x &= \frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y, \\ a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z. \end{aligned} \quad (26.21)$$

Теперь преобразуем компоненты  $G_{\mu\nu}$ . Начнем с  $G_{tx}$ :

$$\begin{aligned} G'_{tx} &= a'_t b'_x - a'_x b'_t = \left( \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left( \frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \left( \frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left( \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \\ &= a_t b_x - a_x b_t. \end{aligned}$$

Но ведь это просто  $G_{tx}$ . Таким образом, мы получили простой результат

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

Возьмем еще одну компоненту:

$$G'_{ty} = \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Итак, получается

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - vG_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

И, конечно, точно таким же образом

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - vG_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

А теперь ясно, как ведут себя все остальные компоненты. Давайте составим таблицу преобразований всех шести членов; только теперь мы будем все писать для величин  $F_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - vF_{ty}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - vF_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - vF_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - vF_{zt}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (26.22)$$

Разумеется, по-прежнему у нас  $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ , а  $F'_{\mu\mu} = 0$ .

Итак, мы имеем преобразования электрических и магнитных полей. Единственное, что нам нужно сделать,— это заглянуть в табл. 26.1 и узнать, что означает для векторов  $E$  и  $B$  преобразование, записанное для  $F_{\mu\nu}$ . Речь идет о простой подстановке. Чтобы можно было видеть, как это все выглядит в обычных символах, перепишем наши преобразования компонент поля в виде табл. 26.2.

Таблица 26.2 • ЛОРЕНЦЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$

(Помните:  $c=1$ )

Уравнения в этой таблице говорят нам, как изменяются  $E$  и  $B$  при переходе от одной инерциальной системы к другой. Если известны  $E$  и  $B$  в одной системе, то мы можем найти, чему они равны в другой, движущейся относительно нее со скоростью  $v$ .

Можно переписать эти уравнения в форме, более легкой для запоминания. Для этого заметьте, что поскольку скорость  $v$

направлена по оси  $x$ , то все компоненты с  $v$  представляют собой векторные произведения  $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$  и  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Так что преобразования можно записать в виде табл. 26.3.

Таблица 26.3 • ДРУГАЯ ФОРМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_z}{\sqrt{1-v^2}}$
(Помните: $c=1$ )	

Теперь легко запомнить, какая компонента куда идет. Фактически эти преобразования можно записать даже еще проще, если ввести компоненты поля, направленные по оси  $x$ , т. е. «параллельные» компоненты  $E_{||}$  и  $B_{||}$  (которые параллельны относительной скорости систем  $S$  и  $S'$ ) и полные поперечные или «перпендикулярные» компоненты  $E_{\perp}$  и  $B_{\perp}$ , т. е. векторную сумму  $y$ - и  $z$ -компонент. В результате мы получим уравнения, сведенные в табл. 26.4. (Для полноты мы восстановили все  $c$ .)

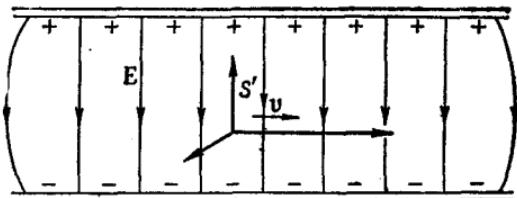
Таблица 26.4 • ЕЩЕ ОДНА ФОРМА ЛОРЕНЦЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЛЕЙ  $E$  И  $B$

$E'_{  } = E_{  }$	$B'_{  } = B_{  }$
$E'_{\perp} = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$B'_{\perp} = \frac{\left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right)_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Преобразования поля позволяют по-другому решить задачи, которыми мы занимались прежде, например найти поле движущегося точечного заряда. Раньше мы вычисляли поля, дифференцируя потенциалы. Но теперь то же самое можно сделать, преобразуя кулоново поле. Если у нас в системе  $S$  находится покоящийся заряд, то он создает только простое радиальное поле  $\mathbf{E}$ . В системе  $S'$ , движущейся относительно системы  $S$  со скоростью  $v = -u$ , точечный заряд будет казаться нам летящим со скоростью  $u$ . Покажите сами, что преобразования табл. 26.3 и 26.4 дают те же самые электрические и магнитные поля, которые мы получили в § 2.

Преобразования табл. 26.2 дают нам очень интересный и простой ответ на вопрос: что мы видим, если движемся мимо

Фиг. 26.7. Система координат  $S'$  движется в статическом электрическом поле.



любой системы фиксированных зарядов? Пусть нам хочется узнать поля в *нашой* системе  $S'$ , если мы движемся между пластинами конденсатора вдоль него, как показано на фиг. 26.7. (Но, разумеется, все равно, если бы заряженный конденсатор двигался мимо *нас*.) Что же мы увидим? Преобразования в этом случае облегчаются тем, что в первоначальной системе поле  $\mathbf{B}$  отсутствует. Предположим сначала, что наше движение перпендикулярно к направлению  $\mathbf{E}$ , при этом мы увидим поле  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , которое остается полностью поперечным. Но мы еще увидим и магнитное поле  $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}'/c^2$ . (Не удивляйтесь, что в этой формуле нет  $\sqrt{1-v^2}$ ; ведь мы записали ее через  $\mathbf{E}'$ , а не через  $\mathbf{E}$ ; так тоже можно делать.) Итак, когда мы движемся в направлении, перпендикулярном к статическому полю, то видим измененное  $\mathbf{E}$  и вдобавок еще поперечное поле  $\mathbf{B}$ . Если наше движение не перпендикулярно вектору  $\mathbf{E}$ , то мы разбиваем  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{E}_{\parallel}$  и  $\mathbf{E}_{\perp}$ . Параллельная часть остается неизменной,  $\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$ , а что происходит с перпендикулярной компонентой, мы уже описали.

Давайте разберем противоположный случай и вообразим, что мы движемся через чисто статическое *магнитное* поле. На этот раз мы бы увидели *электрическое* поле  $\mathbf{E}'$ , равное  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ , и магнитное поле, усиленное множителем  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  (предполагая, что оно поперечное). До тех пор, пока  $v$  много меньше  $c$ , изменением магнитного поля можно пренебречь, и основным эффектом будет появление электрического поля. В качестве примера этого эффекта рассмотрим некогда знаменитую проблему определения скорости самолета. Сейчас она уже больше не знаменита, поскольку для определения скорости можно использовать отражение от Земли сигналов радиолокатора. Но раньше в плохую погоду скорость самолета было очень трудно определить. Ведь вы не видите Землю и не можете сказать куда вы летите. А знать, насколько быстро вы движетесь относительно Земли, было важно. Как же это можно сделать, не видя ее? Те, кому были знакомы уравнения преобразования, считали, что нужно использовать тот факт, что самолет движется в магнитном поле Земли. Предположим, что самолет летит там, где магнитное поле нам более или менее известно. Возьмем простейший случай, когда магнитное поле вертикально. Если

мы летим через него с горизонтальной скоростью  $v$ , то в соответствии с нашей формулой должны наблюдать электрическое поле  $v \times B$ , т. е. перпендикулярное к направлению движения. Если поперек самолета подвесить изолированный провод, то электрическое поле на его концах будет индуцировать заряды. Ну в этом ничего нового нет. С точки зрения наблюдателя на Земле, мы просто передвигаем провод в магнитном поле, а сила  $q(v \times B)$  заставляет заряд двигаться к концу провода. Уравнения преобразования говорят то же самое, но другими словами. (То, что одну и ту же вещь можно получить не одним, а несколькими способами, вовсе не означает, что один способ лучше другого. Мы овладели столькими методами и приемами, что один и тот же результат можем получать какими хотите способами!)

Итак, единственное, что мы должны сделать для определения скорости  $v$ , — это измерить напряжение между концами провода. Хотя для этой цели мы не можем воспользоваться вольтметром, ибо то же самое поле будет действовать и на провода внутри вольтметра, способы измерения таких полей все же существуют. О некоторых из них мы уже говорили в гл. 9 (вып. 5), когда рассказывали об атмосферном электричестве. Так что измерить скорость самолета, казалось бы, можно.

Однако эта важная проблема не была решена таким методом. Дело в том, что величина электрического поля, которое при этом развивается, — порядка нескольких милливольт на метр. Измерить такие поля, конечно, можно, но вся беда в том, что они ничем не отличаются от любых других электрических полей. Поля, создаваемые движением через магнитное поле, нельзя отличить от электрических полей, возникающих в воздухе по каким-то другим причинам (скажем, от электростатических зарядов в воздухе или на облаках). В гл. 9 мы говорили, что обычно над поверхностью Земли существуют электрические поля с напряженностью около 100 в/м, но они совершенно нерегулярные. Так что самолет во время полета будет наблюдать флюктуации атмосферных электрических полей, которые огромны по сравнению со слабенькими полями, возникающими из-за множителя  $v \times B$ . Ввиду этих чисто практических причин измерить скорость самолета, используя его движение в магнитном поле Земли, невозможно.

#### **§ 4. Уравнения движения в релятивистских обозначениях\***

Полученные из уравнений Максвелла электрические и магнитные поля сами по себе не представляют особой ценности, если мы не знаем, что эти поля могут делать, на что они спо-

\* В этом параграфе мы не будем принимать с за единицу.

собны. Вы, вероятно, помните, что поля нужны для нахождения действующих на заряды сил и что именно эти силы определяют их движение. Так что связь движения зарядов с силами, разумеется, тоже есть часть электродинамики.

На отдельный заряд, находящийся в полях  $E$  и  $B$ , действует сила

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.23)$$

При небольших скоростях эта сила равна произведению массы на ускорение, но истинный закон, справедливый при любых скоростях, гласит: сила равна  $d\mathbf{p}/dt$ . Подставляя  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , находим релятивистское уравнение движения заряда:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.24)$$

Теперь мы хотим обсудить это уравнение с точки зрения теории относительности. Поскольку уравнения Максвелла записаны у нас в релятивистской форме, интересно посмотреть, как в релятивистской же форме выглядят уравнения движения. Посмотрим, можно ли переписать уравнения движения в четырехмерных обозначениях.

Мы знаем, что импульс есть часть четырехмерного вектора  $p_\mu$  с энергией  $m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  в качестве временной компоненты, так что мы надеемся заменить левую часть уравнения (26.24) на  $dp_\mu/dt$ . Теперь нам нужно найти только четвертую компоненту силы  $\mathbf{F}$ . Эта компонента должна быть равна скорости изменения энергии или скорости совершения работы, т. е.  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . Так что правую часть уравнения (26.24) желательно было бы записать в виде четырехвектора типа  $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, F_x, F_y, F_z)$ . Однако эти величины не составляют четырехвектора.

Производная четырехвектора *по времени* не будет больше четырехвектором, так как  $d/dt$  требует для измерения  $t$  некоторой специальной системы отсчета. С этой трудностью мы уже сталкивались раньше, когда пытались сделать четырехвектор из скорости  $\mathbf{v}$ . Тогда мы попытались считать, что роль временной компоненты скорости играет  $cdt/dt = c$ . Но на самом деле величины

$$\left( c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (c, \mathbf{v}) \quad (26.25)$$

не образуют четырехвектора. После этого мы обнаружили, что их можно превратить в компоненты четырехвектора, если помножить каждую на  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . «Четырехмерной скоростью»  $u_\mu$  оказался вектор

$$u_\mu = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (26.26)$$

Вот в чем фокус! Нужно умножать производную  $d/dt$  на  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , если мы хотим превратить ее компоненту в четырехвектор.

Итак, вторая гипотеза: четырехвектором должна быть величина

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} (p_\mu). \quad (26.27)$$

Но что такое  $\mathbf{v}$ ? Это уже скорость частицы, а не скорость системы координат! Таким образом, обобщением силы на четырехмерное пространство будет величина  $f_\mu$ :

$$f_\mu = \left( \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \quad (26.28)$$

которую мы назовем «4-силой». Она уже четырехвектор, и ее пространственными компонентами будут уже не  $\mathbf{F}$ , а  $\mathbf{F}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

Почему же  $f_\mu$  четырехвектор? Неплохо бы понять, что это за таинственный множитель  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Так как мы встречаемся с ним уже второй раз, то самое время посмотреть, почему производная  $d/dt$  всегда должна входить с одним и тем же множителем. Ответ заключается вот в чем. Когда мы берем производную по времени некоторой функции  $x$ , то подсчитываем приращение  $\Delta x$  за малый интервал  $\Delta t$  переменной  $t$ . Но в другой системе отсчета интервал  $\Delta t$  может соответствовать изменению как  $t'$ , так и  $x'$ , так что при изменении только  $t'$  изменение  $x$  будет другим. Для наших дифференцирований следовало бы найти такую переменную, которая была бы мерой «интервала» в *пространстве-времени* и оставалась бы той же самой во всех системах отсчета. Когда в качестве этого интервала мы принимаем приращение  $\Delta x$ , то оно будет тем же во всех системах отсчета. Когда частица «движется» в четырехмерном пространстве, то возникают приращения как  $\Delta t$ , так и  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Можно ли из них сделать интервал? Да, они образуют компоненты приращения четырехвектора  $x_\mu = (ct, x, y, z)$ , так что, если определить величину  $\Delta s$  через

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2} \Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2), \quad (26.29)$$

что представляет четырехмерное скалярное произведение, то в ней мы приобретаем настоящий скаляр и можем пользоваться им для измерения четырехмерного интервала. Исходя из величины  $\Delta s$  или ее предела  $ds$ , мы можем определить параметр  $s = \int ds$ . Хорошим четырехмерным оператором будет и производная по  $s$ , т. е.  $d/ds$ , так как она инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Для движущейся частицы  $ds$  легко связывается с  $dt$ . Для точечной частицы

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt, \quad (26.30)$$

а

$$ds = \sqrt{(dt^2/c^2)(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (26.31)$$

Таким образом, оператор

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}$$

есть *инвариантный оператор*. Если подействовать им на любой четырехвектор, то мы получим другой четырехвектор. Например, если мы действуем им на  $(ct, x, y, z)$ , то получаем четырехвектор скорости

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu.$$

Теперь мы видим, почему  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  поправляет дело.

Инвариантная переменная  $s$  — очень полезная физическая величина. Ее называют «собственным временем» вдоль траектории частицы, ибо в системе, в любой момент движущейся вместе с частицей,  $ds$  просто равно интервалу времени. (В этой системе  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ , а  $\Delta s = \Delta t$ .) Если вы представите себе часы, скорость хода которых не зависит от ускорения, то, двигаясь вместе с частицей, такие часы будут показывать время  $s$ .

Теперь можно вернуться назад и записать закон Ньютона (подправленный Эйнштейном) в изящной форме:

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu, \quad (26.32)$$

где  $f_\mu$  определяется формулой (26.28). Импульс же  $p_\mu$  может быть записан в виде

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds}, \quad (26.33)$$

где координаты  $x_\mu = (ct, x, y, z)$  описывают теперь траекторию частицы. Наконец, четырехмерные обозначения приводят нас к очень простой форме уравнений движения:

$$f_\mu = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}, \quad (26.34)$$

напоминающей уравнения  $F = ma$ . Важно отметить, что уравнения (26.34) и  $F = ma$  — вещи разные, ибо четырехвекторная форма уравнения (26.34) содержит в себе релятивистскую механику, которая при больших скоростях отличается от механики

Ньютона. Это абсолютно непохоже на случай уравнений Максвелла, где нам нужно было переписать уравнения в релятивистской форме, *совершенно не изменяя их смысла*, а изменения лишь обозначения.

Вернемся теперь к уравнению (26.24) и посмотрим, как в четырехвекторных обозначениях записывается правая часть. Три компоненты  $F$ , поделенные на  $\sqrt{1-v^2/c^2}$ , составляют пространственные компоненты  $f_\mu$ , так что

$$f_x = \frac{q(E + v \times B)_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q \left[ \frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_y B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_z B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]. \quad (26.35)$$

Теперь мы должны подставить все величины в их релятивистских обозначениях. Прежде всего  $c/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ,  $v_y/\sqrt{1-v^2/c^2}$  и  $v_z/\sqrt{1-v^2/c^2}$  представляют  $t$ -,  $y$ - и  $z$ -компоненты 4-скорости  $u_\mu$ . Компоненты же  $E$  и  $B$  входят в электромагнитный тензор второго ранга  $F_{\mu\nu}$ . Отыскав в табл. 26.1 компоненты  $F_{\mu\nu}$ , соответствующие  $E_x$ ,  $B_z$  и  $B_y$ , получим

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz});$$

здесь уже начинает вырисовываться что-то интересное. В каждом слагаемом есть индекс  $x$ , и это разумно, ибо мы находим  $x$ -компоненту силы. Все же остальные индексы появляются в парах  $tt$ ,  $yy$ ,  $zz$  — все, кроме слагаемого с  $xx$ , которое куда-то делось. Давайте просто вставим его и запишем

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_x F_{xx} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}). \quad (26.36)$$

Этим мы ничего не изменили, так как благодаря антисимметрии  $F_{\mu\nu}$  слагаемое  $F_{xx}$  равно нулю. Причиной же нашего желания восстановить его является возможность сокращенной записи уравнения (26.36):

$$f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.37)$$

Это по-прежнему уравнение (26.36), если предварительно мы примем соглашение: когда какой-то индекс встречается в произведении дважды (подобно  $v$ ), нужно автоматически суммировать все слагаемые с одинаковыми значениями этого индекса точно так же, как и в скалярном произведении, т. е. *пользуясь тем же самым правилом знаков*.

Нетрудно поверить, что уравнение (26.37) так же хорошо работает и для  $\mu=y$ , и для  $\mu=z$ . Но как обстоит дело с  $\mu=t$ ? Посмотрим для забавы, что дает формула

$$f_t = q(u_t F_{tt} - u_x F_{tx} - u_y F_{ty} - u_z F_{tz}).$$

Теперь мы снова должны перейти к Е и В. После этого получается

$$f_t = q \left( 0 + \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_x + \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_y + \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_z \right), \quad (26.38)$$

или

$$f_t = \frac{q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Но в (26.28)  $f_t$  бралось равным

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q \mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

А это одно и то же, что (26.38), ибо  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  равно нулю. Так что все идет как нельзя лучше.

В результате наше уравнение движения записывается в элегантном виде:

$$m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = f_\mu = q u_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.39)$$

Как ни приятно видеть столь красиво записанное уравнение, форма эта не особенно полезна. При нахождении движения частицы обычно удобнее пользоваться первоначальным уравнением (26.24), что мы и будем делать в дальнейшем.

## ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ И ЕГО ИМПУЛЬС

§ 1. Локальные законы сохранения

§ 2. Сохранение энергии и электромагнитное поле

§ 3. Плотность энергии и потоки энергии в электромагнитном поле

§ 4. Неопределенность энергии поля

§ 5. Примеры потоков энергии

§ 6. Импульс поля

## § 1. Локальные законы сохранения

То, что энергия вещества не всегда сохраняется, ясно как день. При излучении света объект теряет энергию. Однако потерянную энергию можно представить в какой-то другой форме, скажем, в форме энергии света. Поэтому закон сохранения энергии не полон, если не рассмотреть энергию, связанную со светом, в частности, и с электромагнитным полем вообще. Сейчас мы подправим его, а заодно и закон сохранения импульса с учетом электромагнитного поля. Мы, разумеется, не можем обсуждать их порознь, ибо, согласно теории относительности, это различные проявления одного и того же четырехвектора.

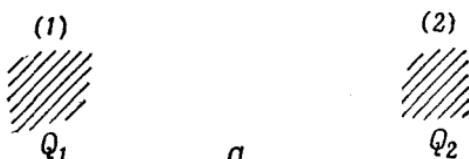
С сохранением энергии мы познакомились еще в начале нашего курса; тогда мы просто сказали, что полная энергия в мире остается постоянной. Теперь же мы хотим сделать очень важное обобщение идеи закона сохранения энергии, которое скажет нам нечто о *деталях* того, как это происходит. Новый закон будет говорить, что если энергия уходит из какой-то области, то это может происходить только за счет ее *вытекания* через границы рассматриваемой области. Это утверждение сильнее, чем просто сохранение энергии без подобных ограничений.

Чтобы легче понять смысл этого утверждения, посмотрим, как работает закон сохранения заряда. У нас есть плотность тока  $j$  и плотность заряда  $\rho$ , а сохранение заряда описывается тем, что если в каком-то месте заряд уменьшается, то оттуда должен происходить отток зарядов. Мы называем это сохранением заряда. Математически закон сохранения записывается

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (27.1)$$

Как следствие этого закона полный заряд всего мира остается постоянным. Заряды никогда не рождались и не уничтожались; в мире как целом нет никакой чистой прибыли зарядов, как нет и никаких потерь. Однако полный заряд мира можно сделать постоянным и другим способом. Пусть вблизи точки (1) находится заряд  $Q_1$ , а вблизи точки (2), расположенной от нее на некотором расстоянии, никакого заряда нет (фиг. 27.1). Предположим теперь, что с течением времени заряд  $Q_1$  постепенно исчезает, но что одновременно с уменьшением  $Q_1$  вблизи точки (2) появляется заряд  $Q_2$ , причем так, что в любой момент сумма  $Q_1$  и  $Q_2$  остается постоянной. Другими словами, в любой промежуточный момент количество заряда, теряемое  $Q_1$ , прибавляется к  $Q_2$ . При этом в мире полное количество заряда сохраняется. Хотя это тоже «всемирное» сохранение заряда, мы не будем его называть «локальным» сохранением, ибо для того, чтобы заряд перебрался из точки (1) в точку (2), ему не обязательно появляться где-то в пространстве между этими точками. Локально заряд просто «теряется».

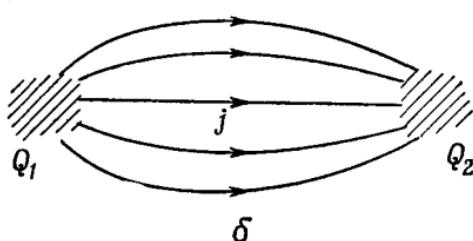
Однако такой «всемирный» закон сохранения встречает в теории относительности большие трудности. Понятие «одновременно» для точек, разделенных расстоянием, неэквивалентно для разных систем. Два события, происходящие одновременно в одной системе, не будут одновременными в системе, движущейся относительно нее. Для «всемирного» сохранения только что описанного типа требуется только одно — чтобы заряд, теряемый  $Q_1$ , одновременно появлялся в  $Q_2$ . В противном случае будут такие моменты, когда заряд не сохраняется. По-видимому, способа сделать закон сохранения заряда релятивистски



Фиг. 27.1. Два способа описания сохранения заряда.

$a$ :  $Q_1 + Q_2$  постоянно.

$$b: \frac{dQ_1}{dt} = \int j \cdot n \, da = -\frac{dQ_2}{dt}.$$



инвариантным, не делая его «локальным», не существует. Суть в том, что требование лоренцевой инвариантности, как оказывается, удивительнейшим образом ограничивает возможные законы природы. В современной квантовой теории поля, например, теоретики часто пытаются изменить теорию, допустив то, что мы называем «нелокальным» взаимодействием, когда нечто, находящееся *здесь*, непосредственно влияет на нечто, находящееся *там*, но мы всегда наталкиваемся на трудности, связанные с принципами относительности.

«Локальные» же законы сохранения основаны на другой идеи. Они утверждают, что заряд может перейти из одного места в другое только при том условии, что нечто такое происходит в пространстве между ними. Чтобы описать такой закон, нам нужна не только плотность заряда  $\rho$ , но и величина другого sorta, именно вектор  $j$ , задающий скорость потока заряда через поверхность. При этом поток связан со скоростью изменения заряда уравнением (27.1). Это более сильная формулировка закона сохранения. Она говорит, что заряд сохраняется особым образом, сохраняется «локально».

Сохранение энергии, оказывается, тоже *локальный* процесс. В мире существует не только плотность энергии в данной области, но и вектор, представляющий скорость потока энергии через поверхность. Например, когда источник излучает свет, мы можем найти энергию света, излучаемого им. Если мы вообразим некую математическую поверхность, окружающую источник света, то потеря энергии этого источника равна потоку энергии через окружающую его поверхность.

## § 2. Сохранение энергии и электромагнитное поле

Нам надо теперь описать сохранение энергии в электромагнитном поле количественно. Для этого нужно выяснить, сколько энергии находится в единице объема, а также какова скорость ее потока. Рассмотрим сначала энергию только электромагнитного поля. Пусть  $u$  обозначает *плотность энергии* поля, т. е. количество энергии в единице объема пространства, а вектор  $S$  — *поток энергии* поля (т. е. количество энергии, прошедшее в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную к потоку). Тогда, аналогично сохранению заряда (27.1), можно написать «локальный» закон сохранения энергии поля в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \nabla \cdot S. \quad (27.2)$$

Конечно, этот закон, вообще говоря, не верен; энергия поля не сохраняется. Представьте, что вы находитесь в темной ком-

нате, а затем поворачиваете выключатель. Комната внезапно наполняется светом, т. е. в ней оказывается энергия поля, которой раньше не было. Уравнение (27.2) не составляет полного закона сохранения, ибо энергия *одного только поля* не сохраняется, а существует еще энергия вещества; сохраняется лишь полная энергия во всем мире. Энергия поля будет изменяться, если оно производит работу над веществом или вещество производит работу над полем.

Однако если внутри интересующего нас объема находится вещество, то мы знаем, сколько энергии оно несет в себе: энергия каждой частицы равна  $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Полная же энергия вещества равна просто сумме энергий всех частиц, а поток ее через поверхность равен просто сумме энергий, переносимой каждой частицей, пересекающей эту поверхность. Но сейчас мы будем иметь дело только с энергией электромагнитного поля. Так что мы должны написать уравнение, которое говорит, что полная энергия поля в данном объеме уменьшается *либо* в результате вытекания ее из объема, *либо* потому, что поле передает свою энергию веществу (или приобретает ее, что означает просто отрицательную потерю). Энергия поля в объеме  $V$  равна

$$\int_V u dV,$$

а скорость ее уменьшения равна производной этого интеграла по времени со знаком минус. Поток энергии поля из объема  $V$  равен интегралу от нормальной компоненты  $\mathbf{S}$  по поверхности  $\Sigma$ , ограничивающей объем  $V$ :

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \int_{\Sigma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da + (\text{Работа, затраченная на вещество в объеме } V). \quad (27.3)$$

Раньше мы видели, что над каждой единицей объема вещества поле в единицу времени производит работу  $E \cdot j$ . [Сила, действующая на частицу, равна  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , а мощность равна  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ . Если в единице объема содержится  $N$  частиц, то эта мощность в единице объема равна  $Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ , а  $Nqv = j$ .] Таким образом, величина  $E \cdot j$  должна быть равна энергии, теряемой полем в единице объема за единицу времени. Уравнение (27.3) при этом приобретает вид

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \int_{\Sigma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da + \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) dV. \quad (27.4)$$

Вот как выглядит наш закон сохранения энергии в поле. Его можно записать как дифференциальное уравнение, подобное (27.2); для этого второе слагаемое нужно превратить в интеграл по объему, что легко делается с помощью теоремы Гаусса. Поверхностный интеграл от нормальной компоненты  $\mathbf{S}$  равен интегралу от дивергенции  $\mathbf{S}$  по объему, ограниченному этой поверхностью, так что уравнение (27.3) эквивалентно следующему:

$$-\int_V \frac{du}{dt} dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV + \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) dV,$$

где производную по времени от первого слагаемого мы внесли под интеграл. Поскольку это уравнение верно для любого объема, то интегралы можно отбросить и получить уравнение для энергии электромагнитного поля:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{S}) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}). \quad (27.5)$$

Однако это уравнение не даст нам ничего хорошего, пока мы не узнаем, что такое  $u$  и  $\mathbf{S}$ . Быть может, мне следовало бы просто сказать вам, как они выражаются через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , поскольку это единственное, что нам, собственно, нужно. Однако мне очень хочется изложить вам все те рассуждения, которыми в 1884 г. воспользовался Пойнтинг, чтобы получить формулы для  $\mathbf{S}$  и  $u$ , с тем чтобы вы понимали, откуда они взялись. (Для дальнейшей работы, впрочем, вам этот вывод не потребуется.)

### **§ 3. Плотность энергии и поток энергии в электромагнитном поле**

Идея заключается в том, что должны существовать плотность энергии  $u$  и поток  $\mathbf{S}$ , которые зависят только от полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . [В электростатике, например, плотность энергии, как мы знаем, можно записать в виде  $\frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$ .] Разумеется,  $u$  и  $\mathbf{S}$  могут зависеть от потенциалов и чего-то другого, но давайте лучше посмотрим, что мы можем написать. Попытаемся переписать величину  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$  в таком виде, чтобы она стала суммой двух слагаемых, одно из которых было бы производной по времени от некоторой величины, а второе — дивергенцией. Тогда первую величину мы бы назвали  $u$ , а вторую —  $\mathbf{S}$  (разумеется, с надлежащими знаками). Обе величины должны быть выражены только через поля, т. е. мы хотим записать наше равенство в виде

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial u}{\partial t} - (\nabla \cdot \mathbf{S}), \quad (27.6)$$

причем левая часть уравнения должна выражаться только через поля. Как это сделать? Разумеется, нужно воспользоваться

уравнениями Максвелла. Из уравнения для ротора В имеем

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Подставляя это в (27.6), получаем выражение его только через Е и В:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (27.7)$$

Работа частично нами уже закончена. Последнее слагаемое есть производная по времени — это  $(\partial/\partial t)(1/2 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$ .

Итак,  $1/2 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{E}}$  должно быть по крайней мере частью и. Такое же выражение получалось у нас и в электростатике. А теперь единственное, что нам остается сделать, — это превратить в дивергенцию чего-то второе слагаемое.

Заметьте, что первое слагаемое в правой части (27.7) переписывается в виде

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}; \quad (27.8)$$

вы знаете из векторной алгебры, что  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  равно  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , поэтому первое слагаемое принимает вид

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}), \quad (27.9)$$

т. е. получилась дивергенция «чего-то», к которой мы так стремились. Получилась, но только все это неверно! Я предупреждал вас, что оператор  $\nabla$  только «похож» на вектор, а на самом деле он не «настоящий» вектор. Вспомните, что в дифференциальном исчислении существует дополнительное соглашение: когда оператор производной стоит перед произведением, он действует на все стоящее правее него. В уравнении (27.7) оператор  $\nabla$  действует только на В и не затрагивает Е. Но если бы мы записали его в форме уравнения (27.9), то общепринятое соглашение говорило бы, что  $\nabla$  действует как на В, так и на Е. Так что это *не одно и то же*. В самом деле, если расписать  $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$  по компонентам, то можно убедиться, что оно равно  $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  плюс какие-то другие слагаемые. Это напоминает взятие производной от произведения в обычном анализе. Например,

$$\frac{d}{dx} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{dg}{dx}.$$

Вместо того чтобы выписать все компоненты  $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ , мне бы хотелось показать вам один трюк, очень полезный в задачах такого рода. Он позволит вам всюду в выражениях, содержащих оператор  $\nabla$ , пользоваться правилами векторной алгебры, не попадая впросак. Трюк состоит в отбрасывании (по крайней мере на время) правил дифференциального исчисления относительно того, на что действует оператор производной. Вы знаете,

что порядок сомножителей важен в *двух* различных случаях. Во-первых, в дифференциальном исчислении:  $f(d/dx)g$  не то же самое, что  $g(d/dx)f$ ; и, во-вторых, в векторной алгебре:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  отличается от  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . Мы можем, если захотим, на минуту откаться от правил дифференциального исчисления. Вместо того чтобы говорить, что производная действует на все стоящее правее от нее, мы примем *новое правило*, избавляющее нас от порядка, в котором записаны сомножители. После этого мы можем крутить ими, как хотим, без всяких помех.

Вот наше новое правило: с помощью индекса мы будем указывать, на что же именно действует дифференциальный оператор; при этом *порядок* сомножителей не имеет никакого значения. Допустим, что оператор  $\partial/\partial x$  мы обозначили через  $D$ . Тогда символ  $D_f$  говорит, что берется производная только функции  $f$ , т. е.

$$D_f f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Но если мы имеем выражение  $D_f fg$ , то оно означает

$$D_f fg = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g.$$

Заметим теперь, что, согласно нашему новому правилу,  $f D_g g$  означает то же самое. Одно и то же выражение можно записать любым из следующих способов:

$$D_f fg = g D_f f = f D_g g = f g D_f.$$

Вы видите, что  $D_f$  может стоять даже *после* всего. (Странно, почему такому удобному обозначению обычно не учат в книгах по математике и физике.)

Вы, пожалуй, удивитесь: а что, если я *хочу* написать производную от  $fg$ ? Если мне нужна производная от *обоих* членов? Это очень легко: вы пишете  $D_f(fg) + D_g(fg)$ , т. е.  $g(\partial f/\partial x) + f(\partial g/\partial x)$ , что в старых обозначениях как раз равно  $\partial(fg)/\partial x$ .

Вы сейчас увидите, как просто теперь получить новое выражение для  $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ . Начнем с перехода к новому обозначению и напишем

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \nabla_E \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}). \quad (27.10)$$

Как только мы сделали это, уже нет больше нужды придерживаться строгого порядка. Мы всегда знаем, что  $\nabla_E$  действует только на  $\mathbf{E}$ , а  $\nabla_B$  действует только на  $\mathbf{B}$ . При этих обстоятельствах оператором  $\nabla$  можно пользоваться как обычным вектором. (Разумеется, после того как все будет окончено, нам захочется вернуться к «стандартным» обозначениям, которые обычно используются.) Таким образом, теперь мы можем делать различные перестановки сомножителей. Так, средний сомножитель

в уравнении (27.10) можно переписать как  $\mathbf{E} \cdot (\nabla_B \times \mathbf{B})$ . [Надеюсь, вы помните, что  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ .] А последний — как  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_E)$ . Хотя это выглядит несколько странно, но тем не менее здесь все в порядке. Если же мы теперь попытаемся вернуться к старым обозначениям, то должны будем расположить операторы  $\nabla$  так, чтобы они действовали на свои «собственные» переменные. В первом из них все в порядке, так что мы можем просто опустить индекс у  $\nabla$ . Второй же требует некоторой реорганизации, чтобы оператор  $\nabla$  поставить перед  $\mathbf{E}$ . Этого можно добиться, переставляя сомножители в векторном произведении и меняя знак:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_E) = -\mathbf{B} \cdot (\nabla_E \times \mathbf{E}).$$

Теперь все стоит на своем месте и можно вернуться к обычным обозначениям. Формула (27.10) эквивалентна следующему равенству:

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (27.11)$$

(В этом специальном случае быстрее было бы использовать компоненты, но, право же, стоило потратить время ради того, чтобы показать вам математический трюк. Может случиться, что вы больше нигде его не встретите, а он очень удобен тогда, когда в векторной алгебре нужно освободиться от правила порядка членов при дифференцировании.)

Вернемся теперь к нашему закону сохранения энергии, причем для преобразования  $\nabla \times \mathbf{B}$  в (27.7) мы используем новый результат — равенство (27.11). Вот что оно дает:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (27.12)$$

Теперь вы видите, что мы почти у цели. Одно из наших слагаемых — настоящая производная по  $t$ , ее мы используем при образовании  $i$ , а другое (превосходная дивергенция) войдет в  $S$ . К несчастью, справа в середине осталось еще одно слагаемое, которое не является ни дивергенцией, ни производной по  $t$ . Так что пока еще не все закончено. После некоторых размышлений мы опять обращаемся к уравнениям Максвелла и, к счастью, обнаруживаем, что  $(\nabla \times \mathbf{E})$  равно  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ .

Это позволяет превратить дополнительный член в чистую производную чего-то по времени:

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right).$$

Вот теперь у нас получилось то, что нужно. Уравнение для энергии переписывается в виде

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (27.13)$$

А это, если мы определим  $u$  и  $\mathbf{S}$  как

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (27.14)$$

и

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (27.15)$$

в точности напоминает уравнение (27.6). (Перестановкой сомножителей в векторном произведении мы добиваемся правильного знака.)

Итак, наша программа успешно выполнена. Из выражения для плотности энергии мы видим, что она представляет сумму «электрической» и «магнитной» плотностей энергии, которые в точности равны выражениям, полученным нами в статике, когда мы находили выражение для энергии через поля. Кроме того, мы получили выражение для вектора потока энергии электромагнитного поля. Этот новый вектор  $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  по имени своего первооткрывателя называется «вектором Пойнтига». Он говорит нам о скорости, с которой энергия движется в пространстве. Энергия, протекающая в секунду через малую поверхность  $da$ , равна  $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор, перпендикулярный к поверхности  $da$ . (Теперь, когда у нас есть формулы для  $u$  и  $\mathbf{S}$ , можете, если хотите, забыть все выкладки.)

#### § 4. Неопределенность энергии поля

Прежде чем заняться некоторыми приложениями формул Пойнтига [т. е. выражений (27.14) и (27.15)], я хотел бы заметить, что на самом деле мы их не «доказали». Все, что мы сделали, — это нашли только возможное  $u$  и возможное  $\mathbf{S}$ . Но откуда же нам известно, что, покрутив формулами, мы не приедем к другому выражению для  $u$  и другому выражению для  $\mathbf{S}$ ? Новое  $\mathbf{S}$  и новое  $u$  будут отличаться от старых, но по-прежнему будут удовлетворять уравнению (27.6). Такое вполне может случиться. Однако в формулы, которые получаются при этом, всегда входят различные производные полей (причем это всегда члены второго порядка типа второй производной или квадрата первой производной). Для  $u$  и  $\mathbf{S}$  можно фактически написать бесконечное число различных выражений, и до сих пор никто не думал над экспериментальной проверкой того, которое же из них истинное. Люди полагают, что простейшее выражение, по-видимому, и должно быть истинным, но надо сознаться, что мы так и не знаем, как же на самом деле распределена энергия в электромагнитном поле. Пойдем по тому же легчайшему пути и постулируем, что энергия поля определяется выражением (27.14). При этом вектор потока  $\mathbf{S}$  должен задаваться уравнением (27.15).

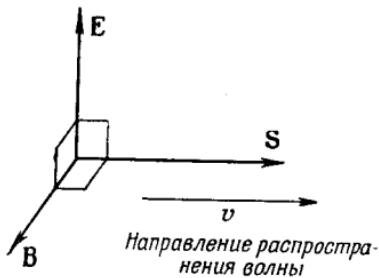
Самое интересное то, что единого способа избавиться от неопределенности энергии поля, по-видимому, вообще нет. Иногда утверждают, что эту проблему можно разрешить, используя теорию гравитации; при этом приводятся такие доводы. В теории гравитации источником гравитационного притяжения является вся энергия. Поэтому если нам известно, какие гравитационные силы действуют на свет, то можно правильно определить плотность энергии электричества. До сих пор, однако, такими тонкими экспериментами, которые позволили бы точно определить гравитационное влияние на электромагнитное поле, никто не занимался. Впрочем, установлено, что свет при прохождении около Солнца отклоняется, поэтому мы можем говорить, что Солнце притягивает к себе свет. Во всяком случае, найденные нами выражения для электромагнитной энергии и потока всегда всеми признавались. И хотя иногда результаты, полученные с их использованием, казались странными, никто никогда не обнаружил в них чего-то невероятного, какого-то расхождения с экспериментом. Согласимся со всеми и будем считать, что, по-видимому, здесь все в порядке.

Мне хотелось бы сделать еще одно замечание о формуле для энергий. Прежде всего формула для энергии поля в единице объема очень проста — это сумма электрической и магнитной энергий, если электрическую энергию мы определим как  $E^2$ , а магнитную — как  $B^2$ . Эти выражения были найдены нами как возможные выражения для энергии при рассмотрении статических задач. Кроме него, мы нашли для энергии электростатического поля и несколько других выражений, например  $\rho\phi$ , которое в электростатическом случае равно интегралу от  $E \cdot E$ . Однако в электродинамическом случае это равенство нарушается, и нет критерия, позволяющего установить, которая из формул правильна. Но теперь мы это знаем. Аналогично, мы нашли выражение для магнитной энергии, которое верно в самом общем случае.

## § 5. Примеры потоков энергии

Наша формула для вектора потока энергии  $S$  представляет нечто новое. Теперь следует посмотреть, насколько она годится в некоторых специальных случаях, а также проверить ее на том, что мы знали раньше. Первым нашим примером будет свет. В световой волне векторы  $E$  и  $B$  направлены под прямым углом друг к другу и направлению распространения волны (фиг. 27.2). В электромагнитной волне величина  $B$  равна  $(1/c)E$ , а поскольку они направлены под прямым углом, то величина  $(E \times B)$  равна просто  $E^2/c$ . Таким образом, для света поток энергии в секунду через единичную поверхность равен

$$S = \epsilon_0 c E^2 \quad (27.16)$$



Фиг. 27.2. Векторы  $E$ ,  $B$  и  $S$  световой волны.

В световой волне, где  $E = E_0 \cos \omega(t - x/c)$ , средняя скорость потока энергии через единичную площадь  $\langle S \rangle_{cp}$ , которая называется «интенсивностью» света, равна среднему значению электрического поля, помноженному на  $\epsilon_0 c$ :

$$\text{Интенсивность} = \langle S \rangle_{cp} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{cp}. \quad (27.17)$$

Этот результат, как ни странно, мы уже получали в гл. 31, § 5 (вып. 3), когда изучали свет. Мы получили его совсем другим путем и поэтому можем сейчас в него поверить. Когда у нас есть пучок света, то плотность энергии в пространстве задается уравнением (27.14). Воспользовавшись теперь тем, что в световой волне  $cB = E$ , получаем

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \frac{E^2}{c^2} \right) = \epsilon_0 E^2.$$

Однако вектор  $E$  изменяется в пространстве, поэтому средняя плотность энергии равна

$$\langle u \rangle_{cp} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{cp}. \quad (27.18)$$

Далее, свет распространяется со скоростью  $c$ , поэтому можно думать, что энергия, проходящая в секунду через квадратный метр, равна произведению  $c$  на количество энергии в кубическом метре, т. е.

$$\langle S \rangle_{cp} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{cp}.$$

Все в порядке. Мы снова получили выражение (27.17).

Возьмем теперь другой пример, на этот раз очень любопытный. Рассмотрим поток энергии в медленно заряжающемся конденсаторе. (Мы не хотим сейчас иметь дело со столь высокими частотами, при которых конденсатор становится похожим на резонансную полость, но нам не нужен и постоянный ток.) Возьмем обычный конденсатор с круглыми параллельными пластинами (фиг. 27.3). Между ними создается почти однородное электрическое поле, которое изменяется с течением времени. Полная электромагнитная энергия внутри конденсатора в любой момент равна произведению плотности энергии  $u$  на объем. Если радиус пластин равен  $a$ , а расстояние между ними  $h$ , то полная энергия,

заключенная между пластинами, будет

$$U = \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) (\pi a^2 h). \quad (27.19)$$

С изменением напряженности  $E$  эта энергия тоже меняется. Когда конденсатор заряжается, внутренний объем приобретает энергию со скоростью

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \epsilon_0 \pi a^2 E \dot{E}. \quad (27.20)$$

Так что должен существовать поток энергии, направленный откуда-то со стороны внутрь объема. Вы, конечно, думаете, что он идет от проводов, заряжающих конденсатор,— а вот и нет! Поток внутрь никоим образом не может идти с этой стороны, так как  $E$  перпендикулярно к пластинам, а поэтому  $E \times B$  должно быть *параллельно им*.

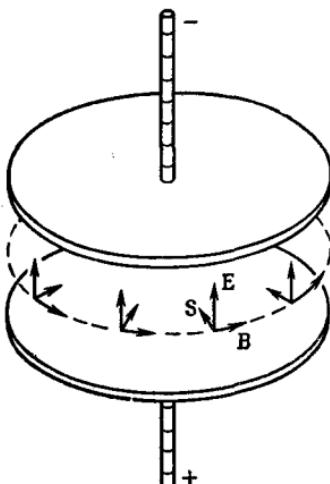
Вы, вероятно, помните, что при зарядке конденсатора возникает магнитное поле, которое направлено по окружности вокруг оси. Об этом говорилось в гл. 23. Воспользовавшись последним уравнением Максвелла, мы там нашли, что магнитное поле на краю конденсатора определяется выражением

$$2\pi a c^2 B = \dot{E} \cdot \pi a^2,$$

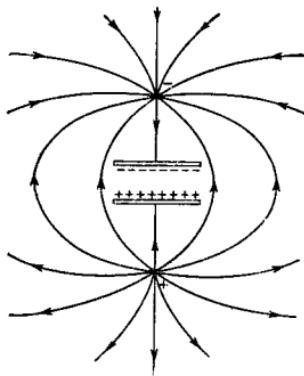
или

$$B = \frac{a}{2c^2} \dot{E}.$$

Направление его показано на фиг. 27.3. Таким образом, на краях конденсатора, как видно из рисунка, возникает поток энергии, пропорциональный  $E \times B$ . Так что энергия на самом деле втекает в конденсатор не со стороны проводов, а со стороны окружающего его пространства.



Фиг. 27.3. Вблизи заряженного конденсатора вектор Пойнтинга  $S$  направлен внутрь него.



Фиг. 27.4. Поле вне конденсатора, заряженного двумя очень удаленными зарядами.

Давайте проверим, согласуется ли полный поток через всю поверхность между краями пластин со скоростью изменения внутренней энергии. Для этого лучше всего повторить весь путь, проделанный нами при выводе выражения (27.15). Посмотрим, к чему он приведет. Площадь поверхности равна  $2\pi ah$ , а абсолютная величина  $S = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  равна

$$\epsilon_0 c^2 E \left( \frac{a}{2c^2} \dot{E} \right),$$

так что полный поток энергии будет

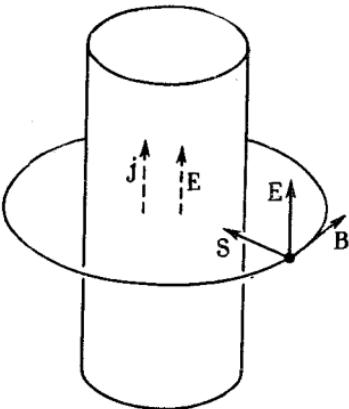
$$\pi a^2 h \epsilon_0 E \dot{E}.$$

Это совпадает с уравнением (27.20). Удивительная вещь! Оказывается, при зарядке конденсатора энергия идет туда не через провода, а через зазор между краями пластин. Вот что говорит нам эта теория!

Как это может быть? Вопрос не из легких, но вот вам один из способов рассуждения. Предположим, у нас есть заряды, расположенные над и под конденсатором вдали от него. Когда такие заряды расположены вдалеке, то конденсатор окружает хотя и слабое, но необычайно протяженное поле (фиг. 27.4). Затем, когда заряды подходят все ближе и ближе, поле становится все сильнее и сильнее и все теснее «обнимает» конденсатор. Так что энергия поля, которая вначале была далека, движется «по направлению» к конденсатору и в конце концов входит в пространство между пластинами.

В качестве следующего примера давайте посмотрим, что происходит с кусочком провода (с ненулевым сопротивлением), по которому течет ток. Поскольку провод обладает каким-то сопротивлением, то вдоль него действует электрическое поле, которое порождает ток, а в результате падения потенциала вдоль провода существует также параллельное его поверхности электрическое поле вне провода (фиг. 27.5). Кроме того, наличие тока порождает также магнитное поле, направленное по окруж-

Фиг. 27.5. Вектор Пойнтинга  $S$   
вблизи провода с током.

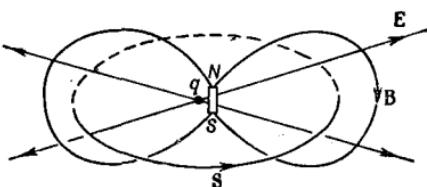


ности вокруг провода. Векторы  $E$  и  $B$  направлены под прямым углом, а поэтому вектор Пойнтинга направлен радиально, как это показано на рисунке. Внутрь проводника со всех сторон втекает энергия. Она, разумеется, должна быть равна энергии, теряемой проводником в виде тепла.

Таким образом, наша «сумасшедшая» теория говорит, что электроны получают свою энергию, растратываемую ими на создание теплоты извне, от потока энергии внешнего поля внутрь провода. Интуиция нам подсказывает, что электрон пополняет свою энергию за счет «давления», которое толкает его вдоль провода, так что энергия как будто должна течь вниз (или вверх) по проводу. А вот теория утверждает, что на самом деле на электрон действует электрическое поле, создаваемое очень далекими зарядами, и электроны теряют свою энергию, расходуемую на тепло именно из этих полей. Энергия удаленных зарядов каким-то образом растекается по большой области пространства и затем втекает внутрь провода.

Наконец, чтобы окончательно убедить вас в том, что это явно ненормальная теория, возьмем еще один пример, когда электрический заряд и магнит покоятся — сидят себе рядышком и не шевелятся. Представьте, что мы взяли точечный заряд, покоящийся вблизи центра магнитного бруска (фиг. 27.6). Все находится в покое, так что энергия тоже не изменяется со временем;  $E$  и  $B$  постоянны. Но вектор Пойнтинга утверждает, что здесь есть поток энергии, так как  $E \times B$  не равно нулю. Если вы понаблюдаете за потоком энергии, то убедитесь, что он циркулирует вокруг этой системы. Но никакого изменения энергии не

Фиг. 27.6. Заряд и магнит дают вектор Пойнтинга, циркулирующий по замкнутой петле.



происходит; все, что втекает в любой объем, снова вытекает из него. Это напоминает круговой поток несжимаемой воды. Итак, в такой, казалось бы, статической ситуации есть поток энергии. Выглядит, прямо скажем, абсурдно!

А, может быть, это все-таки не так уж удивительно, если вспомнить, что так называемый «статический» магнит представляет на самом деле непрерывно циркулирующий ток. Внутри постоянного магнита электроны все время крутятся. Так что, может быть, циркуляция энергии не так уж удивительна.

У вас, без сомнения, начинает создаваться впечатление, что теория Пойнтинга, по крайней мере частично, опровергает вашу интуицию относительно того, где находится энергия электромагнитного поля. Вам может показаться, что необходимо заняться «починкой» своей интуиции, отработкой ее на множестве примеров. Однако в этом, по-видимому, никакой необходимости нет. Не думаю, чтобы вы оказались в большом затруднении, забыв на время, что энергия втекает внутрь провода извне, а не течет вдоль него. Не так уж важно, используя идею сохранения энергии, указать во всех деталях, какой путь избирает энергия. Циркуляция энергии вокруг магнита и заряда в большинстве случаев, по-видимому, совершенно несущественна. Хотя это и не так уж важно, однако ясно, что повседневная интуиция нас обманывает.

## § 6. Импульс поля

Теперь мне бы хотелось поговорить об импульсе поля. Поле обладает энергией; точно так же в единице объема оно обладает каким-то импульсом. Обозначим плотность импульса через  $g$ . Импульс, разумеется, может иметь различные направления, поэтому  $g$  должно быть вектором. Временно мы будем говорить об одной компоненте и для начала возьмем  $x$ -компоненту. Поскольку любая компонента импульса сохраняется, то мы можем сразу написать закон примерно такого вида:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \underset{\text{вещества}}{\text{Импульс}} \right)_x = \frac{\partial g_x}{\partial t} + \left( \underset{\text{импульса}}{\text{Поток}} \right)_x.$$

Левая часть тривиальна. Скорость изменения импульса вещества равна просто действующей на него силе. Для частиц  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , а для распределенных зарядов на единицу объема действует сила  $\mathbf{F} = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})$ . Однако слагаемое «поток импульса» несколько странно. Оно не может быть дивергенцией какого-то вектора, ибо это не скаляр, а скорее  $x$ -компоненты некоторого вектора. Но как бы то ни было оно должно иметь вид

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

поскольку  $x$ -компоненты импульса должна течь в каком-либо из трех направлений. Во всяком случае, каковы бы ни были  $a$ ,  $b$  и  $c$ , такая комбинация предполагается равной потоку  $x$ -компоненты импульса.

Дальше по правилам той же самой игры напишем  $\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  только через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , исключив плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  и затем жонглируя слагаемыми и произведя подстановку, получаем

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Сопоставляя затем разные слагаемые, мы должны найти выражения для  $g_x$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$ . В общем, здесь масса работы, но мы не собираемся заниматься ею. Вместо этого мы найдем только выражение для плотности импульса  $g$  и притом совсем другим способом.

В механике есть очень важная теорема, которая говорит: каков бы ни был поток энергии любого вида (энергия поля или какой-то другой сорт энергии), произведение ее количества, прошедшего через единицу площади в единицу времени, на  $1/c^2$  равно импульсу в единице объема пространства. В случае электродинамики эта теорема говорит, что  $g$  равно вектору Пойнгтинга, поделенному на  $c^2$ :

$$g = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (27.21)$$

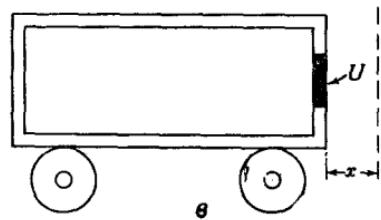
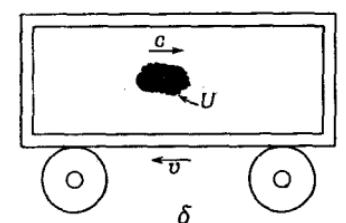
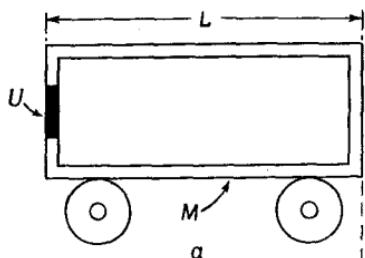
Так что вектор Пойнгтинга дает нам не только поток энергии, но после деления на  $c^2$  и плотность импульса. Этот же результат получился бы из анализа, который мы только что предполагали проделать, однако более заманчиво воспользоваться общей теоремой. Сейчас мы рассмотрим несколько интересных примеров и рассуждений, призванных убедить вас в справедливости этой общей теоремы.

Первый пример: возьмем множество заключенных в ящик частиц. Пусть, скажем, их будет  $N$  штук на кубический метр, и пусть они движутся вдоль ящика со скоростью  $v$ . Рассмотрим теперь воображаемую плоскость, перпендикулярную к  $v$ . Поток энергии через единицу площади этой плоскости в секунду равен  $Nv$  (т. е. числу частиц, пересекающих плоскость за секунду), умноженному на энергию каждой частицы. Энергия же каждой частицы будет  $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Так что поток энергии равен

$$Nv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Но импульс каждой частицы равен  $m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , откуда плотность импульса будет

$$N \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$



Фиг. 27.7. Порция энергии  $U$ , двигаясь со скоростью  $c$ , несет импульс, равный  $U/c$ .

что в полном согласии с теоремой как раз равно  $1/c^2$  на поток энергии. Таким образом, для пучка частиц теорема оказывается верной.

Верна она и для света. При изучении света (см. вып. 3) мы установили, что, когда происходит поглощение света, поглотителю передается некоторое количество импульса. Действительно, в гл. 34 (вып. 3) мы видели, что импульс равен поглощенной энергии, деленной на  $c$  [уравнение (34.24)]. Пусть  $U_0$  будет энергией, падающей в секунду на единич-

ную площадь, тогда переданный той же поверхности за то же время импульс равен  $U_0/c$ . Но импульс распространяется со скоростью  $c$ , так что его плотность перед поглотителем должна быть равна  $U_0/c^2$ . Теорема снова справедлива.

Наконец, я приведу рассуждение Эйнштейна, которое еще раз продемонстрирует то же самое утверждение. Предположим, у нас есть вагон с какой-то большой массой  $M$ , который может без трения катиться по рельсам. В одном его конце расположено устройство, способное «выстреливать» какие-то частицы или световой импульс (совершенно безразлично, чем оно стреляет), которые ударяются о противоположный конец вагона. Следовательно, некоторое количество энергии, скажем  $U$ , находившееся первоначально на одном конце (фиг. 27.7, а), перелетает на противоположный конец (фиг. 27.7, в). Таким образом, энергия  $U$  перемещается на расстояние, равное длине вагона  $L$ . Этой энергии  $U$  соответствует масса  $U/c^2$ , так что если вагон вначале стоял, то его центр масс должен передвинуться. Эйнштейну не понравилось заключение о том, что центр масс предмета можно переместить какими-то манипуляциями внутри него. Он считал, что никакие внутренние действия не могут изменить центр масс. Но если это так, то при перемещении энергии  $U$  с одного конца на другой сам вагон должен откатиться на расстояние  $x$ .

(фиг. 27.7,*в*). В самом деле, нетрудно убедиться, что полная масса вагона, умноженная на  $x$ , должна быть равна произведению перемещенной энергии  $U/c^2$  на длину  $L$  (при условии, что  $U/c^2$  много меньше  $M$ ), т. е.

$$Mx = \frac{U}{c^2} L. \quad (27.22)$$

Теперь рассмотрим конкретный случай, когда энергия переносится вспышкой света. (Все рассуждения можно повторить и для частиц, но мы будем следовать за Эйнштейном, который интересовался проблемами света.) Что заставляет вагон двигаться? Эйнштейн рассуждал так: при испускании света должна быть отдача, какая-то неизвестная отдача с импульсом  $p$ . Именно она заставляет вагон откатиться назад. Скорость вагона  $v$  при такой отдаче должна быть равна импульсу отдачи, поделенному на массу  $M$ :

$$v = \frac{P}{M}.$$

Вагон движется с этой скоростью до тех пор, пока свет не достигнет противоположного конца. Ударясь, свет отдает импульс вагону и останавливает его. Если  $x$  мало, то время, в течение которого вагон движется, равно  $L/c$ , так что мы получаем

$$x = vt = v \frac{L}{c} = \frac{p}{M} \frac{L}{c}.$$

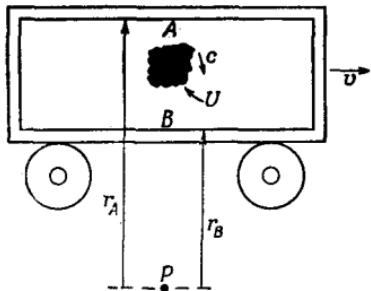
Подставляя  $x$  в (27.22), находим

$$p = \frac{U}{c}.$$

Снова получилось соотношение между энергией и импульсом света. Деля это на  $c$ , находим плотность импульса  $g = p/c$ , и опять

$$g = \frac{U}{c^2}. \quad (27.23)$$

Вас может удивить, так ли уж важна теорема о центре масс. Может быть, она нарушается? Возможно, но тогда вы теряете и закон сохранения момента количества движения. Предположим, что наш вагончик движется по рельсам с некоторой скоростью  $v$ , и мы «выстреливаем» какое-то количество световой энергии от потолка к полу, например из точки  $A$  в точку  $B$  (фиг. 27.8). Посмотрим теперь на момент количества движения относительно точки  $P$ . До того как порция энергии  $U$  покинула точку  $A$ , у нее была масса  $m = U/c$  и скорость  $v$ , так что ее момент количества движения был равен  $mvr_a$ . Когда же она прилетела в точку  $B$ , масса ее остается прежней, и если импульс



Фиг. 27.8. Для сохранения момента количества движения относительно точки  $P$  порция энергии  $U$  должна нести импульс  $U/c$ .

всего вагона не изменился, то она по-прежнему должна иметь скорость  $v$ . Однако момент количества движения относительно точки  $P$  будет уже  $mvr_B$ . Таким образом, если вагону при излучении света не передается никакого импульса, т. е. если свет не переносит импульса  $U/c$ , то момент количества движения должен измениться. Оказывается, что в теории относительности сохранение момента количества движения и теорема о центре масс тесно связаны между собой. И если неверна теорема, то нарушается и закон сохранения момента количества движения. Во всяком случае, общий закон должен быть справедлив и для электродинамики, так что им можно воспользоваться для получения импульса поля.

Упомянем еще о двух примерах импульса в электромагнитном поле. В гл. 26, § 2, мы говорили о нарушении закона действия и противодействия для двух заряженных частиц, движущихся перпендикулярно друг другу. Силы, действующие на эти частицы, не уравновешивают друг друга, так что действие и противодействие оказываются неравными, а полный импульс вещества поэтому должен изменяться. Он не сохраняется. Но в такой ситуации изменяется и импульс поля. Если вы рассмотрите величину импульса, задаваемую вектором Пойнтинга, то она оказывается непостоянной. Однако изменение импульса частицы в точности компенсируется импульсом поля, так что полный импульс частиц и поля все же сохраняется.

Второй наш пример — система заряда и магнита, изображенная на фиг. 27.6. К своему огорчению, мы обнаружили, что в этом примере энергия «бегает по кругу», но, как нам теперь известно, поток энергии и импульса пропорциональны друг другу, поэтому здесь мы имеем дело с циркуляцией импульса. Но циркуляция импульса означает наличие момента количества движения. Поле обладает моментом количества движения. Помните парадокс с соленоидом и зарядами на диске, описанный в гл. 17, § 4? Казалось, что при включении тока весь диск должен начать крутиться.

Остается загадка, откуда возникает этот момент количества движения? Ответ на этот вопрос такой: если у вас есть магнитное

поле и какие-то заряды, то поле имеет и момент количества движения. Он возник еще при создании самого поля. Когда же поле выключается, момент количества движения отдается обратно. Так что диск в этом парадоксе *начнет* крутиться. Таинственный циркулирующий поток энергии, который сначала кажется чем-то непонятным, на самом деле абсолютно необходим. Ведь существует реальный поток импульса. Он необходим для выполнения закона сохранения момента количества движения в целом.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ МАССА

### § 1. Энергия поля точечного заряда

Синтез теории относительности и уравнений Максвелла в основном завершает наше изучение теории электромагнетизма. Разумеется, по дороге мы перескочили через некоторые детали и оставили незатронутой довольно большую область, к которой, однако, мы еще вернемся в будущем, когда займемся взаимодействием электромагнитного поля с веществом. И все же, если еще задержаться на минуту и посмотреть на фасад этого удивительного сооружения, имевшего столь громадный успех в объяснении столь многих явлений, то можно обнаружить, что оно вот-вот завалится и рассыплется на куски. Если вы поглубже вгрызетесь почти в любую из наших физических теорий, то обнаружите, что в конце концов попадаете в какую-нибудь неприятную историю. Сейчас нам предстоит обсудить серьезную трудность — несостоятельность классической электромагнитной теории. Может показаться, что это нарушение, естественно, связано с падением всей классической теории под ударами квантовомеханических эффектов. Возьмите классическую механику. Математически это вполне самосогласованная теория, хотя она и отвергается опытом. Однако самое интересное, что классическая теория электромагнетизма неудовлетворительна сама по себе. В ней до сих пор есть трудности, которые связаны с самими *идеями* теории Максвелла и которые не имеют непосредственного отношения к квантовой механике. Вы можете подумать: «А зачем нам заранее беспокоиться об этих трудностях. Ведь квантовая механика все равно изменит законы электродинамики. Не лучше ли подождать и посмотреть, во что превратятся эти

§ 1. Энергия поля точечного заряда

§ 2. Импульс поля движущегося заряда

§ 3. Электромагнитная масса

§ 4. С какой силой электрон действует сам на себя?

§ 5. Попытки изменения теории Максвелла

§ 6. Поле ядерных сил

трудности после изменений?» Однако трудности остаются и после соединения электродинамики с квантовой механикой, так что рассмотрение их сейчас не будет напрасной тратой времени; вдобавок они очень важны с исторической точки зрения. Кроме того, если вы в силах столь глубоко проникнуть в теорию, чтобы увидеть в ней все, не исключая и трудностей, то это дает вам известное чувство завершенности.

Трудность, о которой я собираюсь говорить, связана с применением понятий электромагнитного импульса и энергии к электрону или другой заряженной частице. Понятия простых заряженных частиц и электромагнитного поля как-то не согласуются друг с другом. Описание этой трудности мы начнем с некоторых примеров вычисления энергии и импульса. Найдем сначала энергию заряженной частицы. Представьте, что мы взяли простейшую модель электрона, когда весь его заряд  $q$  равномерно распределен по поверхности сферы радиусом  $a$ . В специальном случае точечного заряда мы можем положить его равным нулю. Теперь вычислим энергию электромагнитного поля. Если заряд неподвижен, то никакого магнитного поля вокруг нет, и энергия в единице объема будет пропорциональна квадрату напряженности электрического поля. Величина же напряженности электрического поля равна  $q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , поэтому плотность энергии

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

Чтобы получить полную энергию, нужно эту плотность проинтегрировать по всему пространству. Используя элемент объема  $4\pi r^2 dr$ , найдем полную энергию, которую мы обозначим через  $U_{\text{эл}}$ :

$$U_{\text{эл}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

Это выражение интегрируется очень просто. Нижний предел интегрирования равен  $a$ , а верхний — бесконечности, поэтому

$$U_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}. \quad (28.1)$$

Если вместо  $q$  подставить заряд электрона  $q_e$  и обозначить символом  $e^2$  комбинацию  $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ , то получим

$$U_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}. \quad (28.2)$$

Все идет хорошо до тех пор, пока мы не переходим к точечному заряду, т. е. пока мы не положим  $a=0$ . Но как только мы переходим к точечному заряду, начинаются все наши беды. И все потому, что энергия поля изменяется обратно пропорционально четвертой степени расстояния, интеграл по объему становится

расходящимся, а количество энергии, окружающей точечный заряд, оказывается бесконечным.

Но чем, собственно, плоха бесконечная энергия? Есть ли какая-то реальная трудность в том, что энергия никуда не может уйти от заряда и обречена навсегда оставаться около него? Досадно, конечно, что величина оказалась бесконечной, но главный вопрос в том — есть ли здесь какой-нибудь *наблюдаемый* физический эффект? Чтобы ответить на него, нужно обратиться не к энергии, а к чему-то другому. Нас может, скажем, заинтересовать, как изменяется энергия, когда заряд движется. Если при этом окажется бесконечным *изменение*, то дело совсем плохо.

## § 2. Импульс поля движущегося заряда

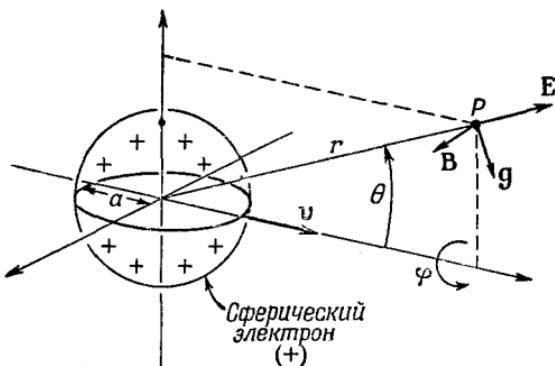
Возьмем равномерно движущийся электрон и предположим на минуту, что скорость его мала по сравнению со скоростью света. С таким движущимся электроном всегда связан какой-то импульс — даже если у электрона до того, как он был заряжен, не было никакой массы — это импульс электромагнитного поля. Мы покажем, что для малых скоростей он пропорционален скорости  $v$  и совпадает с ней по направлению. В точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $r$  от центра заряда и под углом  $\theta$  к линии его движения (фиг. 28.1), электрическое поле радиально, а магнитное, как мы видели, равно  $v \times E/c^2$ . Плотность же импульса, в соответствии с формулой (27.21), будет

$$g = \epsilon_0 E \times B.$$

Она обязательно направлена по линии движения, как это видно из рисунка, и по величине равна

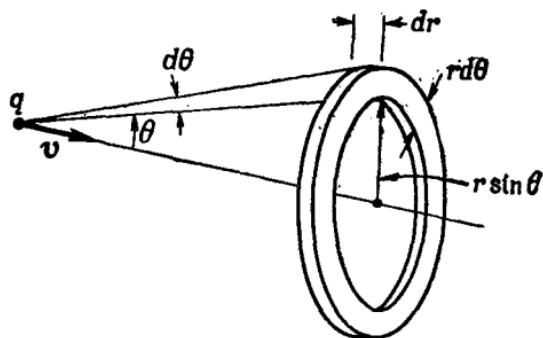
$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin \theta.$$

Поле симметрично относительно линии движения заряда, поэтому поперечные компоненты дадут в сумме нуль, и полученный



Фиг. 28.1. Поля  $E$  и  $B$  и плотность импульса  $g$  для положительного электрона.  
Для отрицательного электрона поля  $E$  и  $B$  повернуты в обратную сторону, но  $g$  остается тем же.

Фиг. 28.2. Элемент объема  $2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$ , используемый при вычислении импульса поля.



в результате импульс будет параллелен скорости  $v$ . Величину составляющей вектора  $g$  в этом направлении, равную  $g \sin \theta$ , нужно проинтегрировать по всему пространству. В качестве элемента объема возьмем кольцо, плоскость которого перпендикулярна  $v$  (фиг. 28.2). Объем его равен  $2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$ . Полный импульс будет при этом

$$p = \int \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr.$$

Поскольку  $E$  не зависит от угла  $\theta$  (для  $v \ll c$ ), то по углу можно немедленно проинтегрировать:

$$\int \sin^3 \theta d\theta = - \int (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = - \cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3}.$$

Интегрирование по  $\theta$  ведется в пределах от 0 до  $\pi$ , так что этот интеграл дает просто множитель  $4/3$ , т. е.

$$p = \frac{8\pi}{3} \frac{\epsilon_0 v}{c^2} \int E^2 r^2 dr.$$

А такой интеграл (для  $v \ll c$ ) мы только что вычисляли, чтобы найти энергию; он равен  $q^2/16\pi^2\epsilon_0 a$ , так что

$$p = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{ac^2},$$

или

$$p = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} v. \quad (28.3)$$

Импульс поля, т. е. электромагнитный импульс, оказался пропорциональным  $v$ . В частности, то же самое выражение получилось бы для частицы с массой, равной коэффициенту пропорциональности при  $v$ . Вот почему этот коэффициент пропорциональности мы можем назвать *электромагнитной массой*  $m_{em}$ , т. е. положить

$$m_{em} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.4)$$

### § 3. Электромагнитная масса

Откуда же вообще возникло понятие массы? В наших законах механики мы предполагали, что любому предмету присуще некое свойство, называемое массой. Оно означает пропорциональность импульса предмета его скорости. Теперь же мы обнаружили, что это свойство вполне понятно — заряженная частица несет импульс, который пропорционален ее скорости. Дело можно представить так, как будто масса — это просто электродинамический эффект. Ведь до сих пор причина возникновения массы оставалась нераскрытым. И вот, наконец, в электродинамике нам представилась прекрасная возможность понять то, чего мы никогда не понимали раньше. Прямо как с неба (а точнее, от Максвелла и Пойнтинга) свалилось на нас объяснение пропорциональности импульса любой заряженной частицы ее скорости через электромагнитные свойства.

Но давайте все-таки встанем на более консервативную точку зрения и будем говорить, по крайней мере временно, что имеется два сорта масс и что полный импульс предмета должен быть суммой механического и электромагнитного импульсов. Причем механический импульс равен произведению «механической» массы  $m_{\text{мех}}$  на скорость  $v$ . В тех экспериментах, где масса частицы измеряется, например, определением импульса или «кручением на веревочке», мы находим ее полную массу. Импульс равен произведению именно полной массы ( $m_{\text{мех}} + m_{\text{эл}}$ ) на скорость. Таким образом, наблюдаемая масса может состоять из двух (а может быть, и из большего числа, если мы учтем другие поля) частей: механической и электромагнитной. Мы знаем, что наверняка имеется электромагнитная часть; для нее у нас есть даже формула. А сейчас появилась увлекательная возможность выбросить механическую массу совсем и считать массу полностью электромагнитной.

Посмотрим, каков должен быть размер электрона, если «механическая» часть массы полностью отсутствует. Это можно выяснить, приравнивая электромагнитную массу (28.4) наблюдаемой массе электрона, т. е.  $m_e$ . Получаем

$$a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (28.5)$$

Величина

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (28.6)$$

называется «классическим радиусом электрона» и равна она  $2,82 \times 10^{-13}$  см, т. е. одной стотысячной диаметра атома.

Почему радиусом электрона названа величина  $r_0$ , а не  $a$ ? Потому что мы можем провести те же самые расчеты с другим распределением заряда. Мы можем взять его равномерно разма-

занным по всему объему шара или наподобие пушистого шарика. Например, для заряда, равномерно распределенного по всему объему сферы, коэффициент  $\frac{2}{3}$  заменяется коэффициентом  $\frac{4}{5}$ . Вместо того чтобы спорить, какое распределение правильно, а какое нет, было решено взять в качестве «номинального» радиуса величину  $r_0$ . А разные теории приписывают к ней свой коэффициент.

Давайте продолжим наше обсуждение электромагнитной теории массы. Мы провели расчет для  $v \ll c$ , а что произойдет при переходе к большим скоростям? Первые попытки вычисления привели к какой-то путанице, но позднее Лоренц понял, что при больших скоростях заряженная сфера должна сжиматься в эллипсоид, а поля должны изменяться согласно полученным нами для релятивистского случая в гл. 26 формулам (26.6) и (26.7). Если вы проделаете все вычисления для  $\mathbf{p}$  в этом случае, то получите, что для произвольной скорости  $v$  импульс умножается еще на  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , т. е.

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (28.7)$$

Другими словами, электромагнитная масса возрастает с увеличением скорости обратно пропорционально  $\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Это открытие было сделано еще до создания теории относительности.

Тогда предлагались даже эксперименты по определению зависимости наблюдаемой массы от скорости, чтобы установить, какая часть ее электрическая по своему происхождению, а какая — механическая. В те времена считали, что электромагнитная часть массы должна зависеть от скорости, а ее механическая часть — нет.

Но пока ставились эксперименты, теоретики тоже не дремали. И вскоре была развита теория относительности, которая доказала, что любая масса, независимо от своего происхождения, должна изменяться как  $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Таким образом, уравнение (28.7) было началом теории, согласно которой масса зависит от скорости.

А теперь вернемся к нашим вычислениям энергии поля, которые привели к выводу выражения (28.2). Энергия  $U$  в соответствии с теорией относительности эквивалентна массе  $U/c^2$ , поэтому (28.2) говорит, что поле электрона должно обладать массой

$$m'_{\text{эм}} = \frac{U_{\text{эл}}}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{ac^2}, \quad (28.8)$$

которая не совпадает с электромагнитной массой  $m_{\text{эм}}$ , определенной формулой (28.4). В самом деле, если бы мы просто

скомбинировали выражения (28.2) и (28.4), то должны были написать

$$U_{\text{эл}} = \frac{4}{3} m_{\text{эм}} c^2.$$

Эта формула была получена еще до теории относительности, и когда Эйнштейн и другие физики начали понимать, что  $U$  всегда должно быть равно  $mc^2$ , то замешательство было очень велико.

#### § 4. С какой силой электрон действует сам на себя?

Разница между двумя формулами электромагнитной массы особенно обидна, потому что совсем недавно мы доказали согласованность электродинамики с принципами относительности. Кроме того, теория относительности неявно и неизбежно предполагает, что импульс должен быть равен произведению энергии на  $v/c^2$ . Неприятная история! По-видимому, мы где-то допустили ошибку. Конечно, не алгебраическую ошибку в наших расчетах, а где-то проглядели что-то существенное.

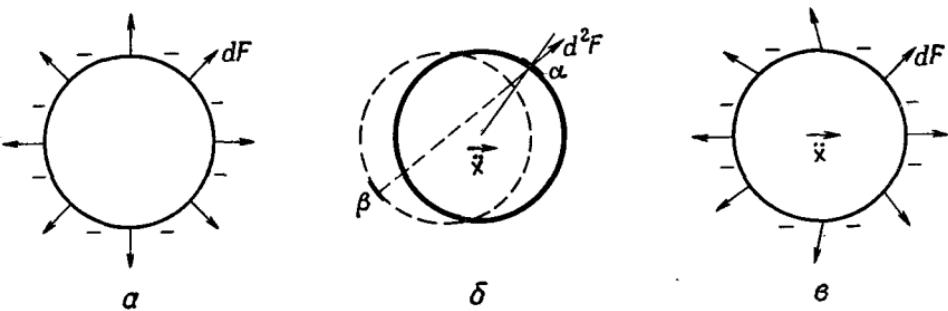
При выводе наших уравнений для энергии и импульса мы предполагали справедливость законов сохранения. Мы считали, что учтены *все* силы, учтена любая работа и любой импульс, порождаемый другими «неэлектрическими» механизмами. Но если мы имеем дело с заряженной сферой, то, поскольку все электрические силы — это силы отталкивающие, электрон стремится разорваться. А раз в системе не учтены уравновешивающие силы, то в законах, связывающих импульс и энергию, возможны любые ошибки. Чтобы картина была *самосогласованной*, нужно предположить, что нечто удерживает электрон от разрыва. Заряды должны *удерживаться* на сфере чем-то вроде «резинок», которые препятствуют их стремлению разлететься в стороны. Пуанкаре первый заметил, что подобные «резинки» или нечто в этом роде, связывающие электрон, необходимо учитывать при вычислении энергии и импульса. По этой причине дополнительные неэлектрические силы известны под именем «напряжений Пуанкаре». Если включить их в расчет, то это сразу изменит массы, полученные в обоих случаях (характер изменения зависит от детальных предположений), и результат будет согласовываться с теорией относительности, т. е. масса, полученная из вычислений импульса, становится той же самой, что и масса, полученная из энергии. Однако теперь массы будут состоять из *двух* частей: электромагнитной и происходящей от «напряжений Пуанкаре». И только когда обе части складываются вместе, мы получаем согласованную теорию.

Итак, наши надежды не оправдались, мы не можем всю массу сделать чисто электромагнитной. Теория, содержащая

только электродинамику, незаконна. К ней необходимо прибавить что-то еще. Как бы мы ни назвали это «что-то» — «резинками» или «напряжениями Пуанкаре» или как-то по-другому, — оно все равно должно порождать новые силы, обеспечивающие согласованность теории такого рода.

Но совершенно ясно, что, как только мы вынуждены посадить внутрь электрона посторонние силы, красота всей картины тотчас исчезает. Все становится слишком сложным. Сразу же возникает вопрос: насколько сильны эти напряжения? Что происходит с электроном? Осциллирует ли он или нет? Каковы все его внутренние свойства? И т. д. и т. п. Возможно, что какие-то внутренние свойства электрона все-таки очень сложны. И если мы начнем строить электрон, следуя этому рецепту, то придем к каким-нибудь странным свойствам наподобие собственных гармоник, которые, по-видимому, еще не наблюдались. Я сказал «по-видимому», ибо в природе мы наблюдаем множество странных вещей, которым еще не можем придать никакого смысла. Возможно, что когда-нибудь в один прекрасный день окажется, что какое-то явление, из тех, что непонятны нам сегодня ( $\mu$ -мезон, например), можно на самом деле объяснить как осцилляции «напряжений Пуанкаре». Сейчас это не кажется правдоподобным, но кто может гарантировать? Ведь мы еще столького не понимаем в мире элементарных частиц! Во всяком случае, сложная структура, предполагаемая этой теорией, весьма нежелательна, и попытка объяснить все массы только через электромагнетизм, по крайней мере описанным нами способом, завела в тупик.

Мне еще хотелось бы порассуждать немного о том, почему при пропорциональности импульса поля скорости мы говорили о массе. Очень просто! Ведь масса — это и есть коэффициент между импульсом и скоростью. Однако возможна и другая точка зрения. Можно говорить, что частица имеет массу, если для ускорения ее мы вынуждены прилагать какую-то силу. Посмотрим повнимательней на то, откуда берутся силы; это может помочь нашему пониманию. Откуда мы узнаем, что здесь должно проявиться действие сил? Да просто потому, что мы доказали закон сохранения импульса для полей. Если у нас есть заряженная частица и мы некоторое время «нажимаем» на нее, то у электромагнитного поля появится импульс. Каким-то образом он был передан электромагнитному полю. Следовательно, чтобы разогнать электрон, к нему нужно приложить силу, дополнительную к той, которая требуется механической инерцией, связанную с его электромагнитным взаимодействием. При этом должна возникнуть соответствующая обратная реакция со стороны «толкаемого» нами электрона. Но откуда берется эта сила? Картина примерно такова. Можно считать электрон заряженной сферой. Когда он покоятся, то каждый его заряженный



Фиг. 28.3. Сила действия ускоряющегося электрона благодаря запаздыванию не равна нулю.

Под  $dF$  мы подразумеваем силу, действующую на элемент  $da$ , а под  $d^2F$  — силу, действующую на элемент  $da_\alpha$  со стороны заряда, расположенного на элементе поверхности  $da_\beta$ .

участок отталкивает любой другой, но, все силы уравновешены попарно, так что *результатирующая* равна нулю (фиг. 28.3, а). Однако при ускорении электрона силы больше не уравновешиваются, так как, чтобы электромагнитное влияние дошло от одного места до другого, нужно некоторое время. Например, сила, действующая на участок  $\alpha$  (фиг. 28.3, б) со стороны участка  $\beta$ , расположенного на противоположной стороне, зависит от положения  $\beta$  в запаздывающий момент. И величина и направление силы определяются движением заряда. Если он ускоряется, то силы, действующие на разные части электрона, могут быть такими, как это показано на фиг. 28.3, в. Теперь при сложении всех этих сил они не сокращаются. Для постоянной скорости эти силы уравновешивались бы, хотя на первый взгляд кажется, что даже при равномерном движении запаздывание приведет к неуравновешенным силам. Тем не менее оказывается, что в тех случаях, когда электрон не ускоряется, равнодействующая сила равна нулю. Если же мы рассмотрим силы между различными частями ускоряющегося электрона, то действие и противодействие не компенсируют в точности друг друга и электрон действует *сам на себя*, стараясь уменьшить ускорение. Он тянет сам себя «за шиворот» назад.

Можно, хотя и не легко, вычислить эту силу самодействия, однако здесь мы не будем заниматься такими трудоемкими расчетами. Я просто скажу вам, что получается в специальном сравнительно простом случае движения в одном измерении, скажем вдоль оси  $x$ . Самодействие в этом случае можно записать в виде ряда. Первый член этого ряда зависит от ускорений  $\dot{x}$ , следующий — пропорционален  $\ddot{x}$  и т. д. \*

\* Мы пользуемся такими обозначениями  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ,  $\dddot{x} = d^3x/dt^3$  и т. д.

Так что в результате

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{\dot{\dot{x}}} + \dots, \quad (28.9)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  — числовые коэффициенты порядка единицы. Коэффициент  $\alpha$  при слагаемом  $\ddot{x}$  зависит от предположенного распределения зарядов; если заряды равномерно распределены по сфере, то  $\alpha = \frac{2}{3}$ . Таким образом, слагаемое, пропорциональное ускорению, изменяется обратно пропорционально радиусу электрона  $a$ , что в точности согласуется с величиной, полученной для  $m_{\text{эм}}$  в (28.4). Если взять другое распределение, то  $\alpha$  изменится, но в точности так же изменится и величина  $\frac{2}{3}$  в (28.4). Слагаемое с  $\ddot{\dot{x}}$  не зависит ни от радиуса  $a$ , ни от предположенного распределения заряда; коэффициент при нем всегда равен  $\frac{2}{3}$ . Следующее слагаемое пропорционально радиусу  $a$  и коэффициент  $\gamma$  при нем определяется распределением заряда. Обратите внимание, что если устремить радиус электрона к нулю, то последнее слагаемое (равно как и все высшие члены) обратится в нуль, второе остается постоянным, но первое — электромагнитная масса — становится бесконечным. Видно, что бесконечность возникает из-за действия одной части электрона на другую; по-видимому, мы допустили глупость — возможность «точечного» электрона действовать на самого себя.

## § 5. Попытки изменения теории Максвелла

Теперь мне бы хотелось обсудить, как можно изменить электродинамику Максвелла, но изменить так, чтобы сохранить понятие простого точечного заряда. В этом направлении было сделано немало попыток, а некоторые теории сумели даже так представить дело, что вся масса электрона оказалась полностью электромагнитной. Однако ни одной из этих теорий не суждено было выжить. И все же интересно обсудить некоторые из предложенных возможностей хотя бы для того, чтобы оценить борьбу человеческого разума.

Наша теория электромагнетизма началась с разговоров о взаимодействии одного заряда с другим. Затем мы построили теорию этих взаимодействующих зарядов и закончили наше изучение теорией поля. Мы настолько уверовали в нее, что пытались с ее помощью определить, как одна часть электрона действует на другую. Все трудности, возможно, происходят из-за того, что электрон не действует сам на себя; экстраполяция закона взаимодействия между отдельными электронами на взаимодействие электрона самого с собой, возможно, ничем не оправдана. Поэтому некоторые из предложенных теорий совсем исключают возможность самодействия электрона. Из-за этого в них уже не

возникает бесконечностей. И никакой электромагнитной массы при этом у частиц нет, а ее масса снова полностью механическая. Однако в такой теории возникают новые трудности.

Нужно сразу же вам сказать, что такие теории требуют изменения и понятий электромагнитного поля. Как вы помните, мы говорили, что сила, действующая на частицу в любой точке, определяется просто двумя величинами:  $E$  и  $B$ . Если мы отказываемся от идеи самодействия, то это утверждение становится уже несправедливым, ибо силы, действующие на электрон в некотором месте, больше не определяются полными  $E$  и  $B$ , а только теми их частями, которые создаются *другими* зарядами. Так что мы всегда должны помнить о том, какие поля  $E$  и  $B$  создает тот заряд, для которого вычисляется действующая сила, а какие — все остальные заряды. Это делает теорию гораздо более запутанной, хотя и позволяет избежать трудностей с бесконечностями.

Итак, если нам очень хочется, мы можем выбросить весь набор сил в уравнении (28.9), приговаривая при этом, что такое явление, как действие электрона на себя, отсутствует. Но вместе с водой мы выплескиваем и ребенка! Ведь второе-то слагаемое в (28.9), слагаемое с  $\ddot{x}$ , совершенно необходимо. Эта сила приводит к вполне определенному эффекту. Если вы ее выбросите — беды не миновать. Когда вы разгоняете заряд, он излучает электромагнитные волны, т. е. теряет энергию. Поэтому ускорение заряда требует большей силы, чем ускорение нейтрального объекта той же массы; в противном случае энергия не будет сохраняться. Скорость, с которой мы затрачиваем работу на ускорение заряда, должна быть равна скорости потери энергии на излучение. Мы уже говорили об этом эффекте; он был назван радиационным сопротивлением. Снова перед нами вопрос: откуда берутся те дополнительные силы, на преодоление которых затрачивается эта работа? Когда излучает большая антенна, то эти силы возникают под влиянием токов одной ее части на токи в другой. Но у отдельного ускоряющегося электрона, излучающего в пустое пространство, возможен только один источник таких сил — действие одной части электрона на другую.

В гл. 32 (вып. 3) мы обнаружили, что осциллирующий заряд излучает энергию со скоростью

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\ddot{x})^2}{c^3}. \quad (28.10)$$

Давайте посмотрим, какая мощность необходима для преодоления силы самодействия (28.9). Мощность, как известно, равна силе, умноженной на скорость, т. е.  $Fx$ :

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \dot{x} \dot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} \dot{x} + \dots \quad (28.11)$$

Первый член пропорционален  $dx^2/dt$  и поэтому соответствует скорости изменения кинетической энергии  $1/2mv^2$ , связанной с электромагнитной массой. А второй соответствует излучению мощности (28.10). Однако он отличается от (28.10). Разница состоит в том, что (28.11) справедливо в общем случае, тогда как (28.10) верно только для осциллирующего заряда. Мы можем доказать, что эти два выражения для периодического движения заряда эквивалентны. Перепишем для этого второй член выражения (28.11) в виде

$$-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt} (\ddot{x}\dot{x}) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2,$$

что будет просто алгебраическим преобразованием. Если движение электрона периодическое, то величина  $\ddot{x}\dot{x}$  периодически возвращается к одному и тому же значению. Так что если мы возьмем среднее значение ее производной по времени, то получим нуль. Однако второй член всегда положителен (как квадрат величины), так что его производная тоже положительна. Соответствующая ему мощность как раз равна выражению (28.10).

Итак, слагаемое с  $\ddot{x}$  в выражении для силы самодействия необходимо для сохранения энергии излучающей системы и не может быть выброшено. Это было одним из триумфов теории Лоренца, доказавшего возникновение такого слагаемого в результате воздействия электрона самого на себя. Мы вынуждены поверить в идею самодействия и необходимость слагаемого с  $\ddot{x}$ . Проблема в том, как сохранить его, избавившись при этом от первого слагаемого в выражении (28.9), которое портит все дело. Этого мы не знаем. Как видите, классическая теория электрона сама себя завела в тупик.

Были предприняты и другие попытки исправить положение. Один путь был предложен Борном и Инфельдом. Состоит он в очень сложном изменении уравнений Максвелла, так что они перестают быть линейными. При этом можно сделать так, чтобы энергия и импульс оказались конечными. Но предложенные ими законы предсказывают явления, которые никогда не наблюдались. Их теория страдает еще и другим недостатком, к которому мы придем позднее и который присущ всем попыткам избежать описанную трудность.

Следующая интересная возможность была предложена Дираком. Он рассуждал так: давайте допустим, что действие электрона на себя описывается не первым слагаемым выражения (28.9), а вторым. И тогда ему пришла заманчивая идея избавиться от первого слагаемого, сохранив при этом второе. Смотрите — сказал он, — когда мы брали только запаздывающие решения уравнений Максвелла, это условие выступало как дополнительное предположение; если бы вместо запаздывающих мы

взяли *опережающие* волны, то ответ получился бы несколько другим. Выражение для силы самодействия приобрело бы вид

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{\dot{\dot{x}}} + \dots \quad (28.12)$$

Это выражение в точности такое же, как и (28.9), за исключением знака перед вторым и некоторыми высшими членами ряда. [Замена запаздывающих волн опережающими означает просто смену *знака* запаздывания, что, как нетрудно видеть, эквивалентно изменению знака  $t$ . В выражении (28.9) это приводит только к изменению знака всех нечетных производных.] Итак, Дирак предложил: давайте примем новое правило, что электрон действует на себя *полуразностью* создаваемых им запаздывающих и опережающих полей. Полуразность выражений (28.9) и (28.12) дает

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \text{Высшие члены.}$$

Во всех высших членах радиус  $a$  входит в числитель в положительной степени. Поэтому, когда мы переходим к пределу точечного заряда, остается только один член — как раз тот, который нам нужен. Таким путем Дирак сохранил радиационное сопротивление и избавился от силы инерции. Электромагнитная масса исчезла, классическая теория спасена, но благополучие это достигнуто ценой насилия над самодействием электрона.

Произвол дополнительных предположений Дирака был устранен, по крайней мере до некоторой степени, Уилером и Фейнманом, которые предложили еще более странную теорию. Они предположили, что точечный заряд взаимодействует *только* с другими зарядами, но взаимодействие идет наполовину через запаздывающие, наполовину через опережающие волны. Самое удивительное, как оказалось, что в большинстве случаев вы не видите эффекта опережающих волн, но они дают как раз нужную силу радиационного сопротивления. Однако радиационное сопротивление возникает *не* как самодействие электрона, а в результате следующего интересного эффекта. Когда электрон ускоряется в момент  $t$ , то он влияет на все другие заряды в мире в *поздний* момент  $t' = t + r/c$  (где  $r$  — расстояние до других зарядов) из-за *запаздывающих* волн. Но затем эти другие заряды действуют снова на первоначальный электрон с помощью *опережающих* волн, которые приходят к нему в момент  $t''$ , равный  $t'$  минус  $r/c$ , что как раз равно  $t$ . (Они, конечно, воздействуют и с помощью запаздывающих волн, но это просто соответствует обычным «отраженным» волнам.) Комбинация опережающих и запаздывающих волн означает, что в тот момент, когда электрон ускоряется, осциллирующий заряд испытывает воздействие силы со стороны всех зарядов, которые «пригото-

вились» поглотить излученные им волны. Вот в какой петле запутались физики, пытаясь спасти теорию электрона!

Я расскажу вам еще об одной теории, чтобы показать, до каких вещей додумываются люди, когда они увлечены. Это несколько другая модификация законов электродинамики, которую предложил Бопп.

Вы понимаете, что, решившись изменить уравнения электромагнетизма, можно делать это в любом месте. Вы можете изменить закон сил, действующих на электрон, или можете изменить уравнения Максвелла (как это будет сделано в теории, которую я собираюсь описать) или еще что-нибудь. Одна из возможностей — изменить формулы, определяющие потенциал через заряды и токи. Возьмем формулу, которая выражает потенциалы в некоторой точке через плотности токов (или зарядов) в любой другой точке в ранний момент времени. С помощью четырехвекторных обозначений для потенциалов мы можем записать ее в виде

$$A_{\mu}(1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int \frac{j_{\mu}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (28.13)$$

Удивительно простая идея Боппа заключается в следующем. Может быть, все зло происходит от множителя  $1/r$  под интегралом. Предположим с самого начала, что потенциал в одной точке зависит от плотности зарядов в любой точке как *некоторая* функция расстояния между точками, скажем как  $f(r_{12})$ . Тогда полный потенциал в точке 1 будет определяться интегралом по всему пространству от произведения  $j_{\mu}$  на эту функцию

$$A_{\mu}(1) = \int j_{\mu}(2) f(r_{12}) dV_2.$$

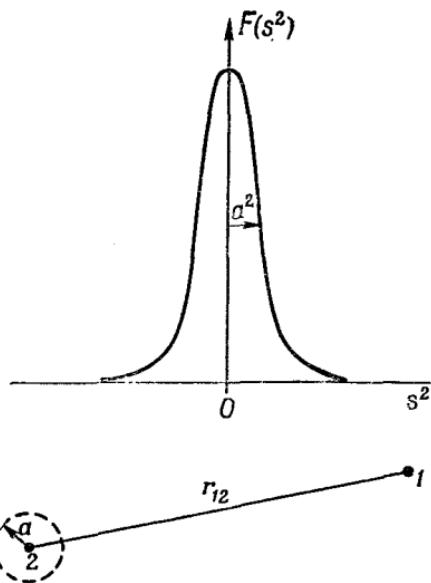
Вот и все. Никаких дифференциальных уравнений, ничего больше. Есть только еще одно условие. Мы должны потребовать, чтобы результат был релятивистски инвариантным. Так что в качестве «расстояния» мы должны взять инвариантное «расстояние» между двумя точками в пространстве-времени. Квадрат этого расстояния (с точностью до знака, который несуществен) равен

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (28.14)$$

Так что для релятивистской инвариантности теории функция должна зависеть от  $s_{12}$  или, что то же самое, от  $s_{12}^2$ . Таким образом, в теории Боппа

$$A_{\mu}(1, t) = \int j_{\mu}(2, t_2) F(s_{12}^2) dV_2 dt_2. \quad (28.15)$$

(Интеграл, разумеется, должен браться по четырехмерному объему  $dt_2 dx_2 dy_2 dz_2$ .)



Фиг. 28.4. Функция  $F(s^2)$ , используемая в нелокальной теории Бонна.

Теперь остается только выбрать подходящую функцию  $F$ . Относительно нее мы предполагаем только одно, что она повсюду мала, за исключением области аргумента вблизи нуля, т. е. что график  $F$  ведет себя подобно кривой, изображенной на фиг. 28.4. Это узкий пик в

окрестности  $s^2=0$ , ширины которого грубо можно считать величину  $a^2$ . Если вычисляется потенциал в точке 1, то приближенно можно утверждать, что заметный вклад дают только те точки 2, для которых  $s_{12}^2=c^2(t_2-t_1)^2-r_{12}^2$  отличается от нуля на  $\pm a^2$ . Это можно выразить, сказав, что  $F$  важно только для

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 \approx \pm a^2. \quad (28.16)$$

Если понадобится, можно проделать все математически более строго, но идея вам уже ясна.

Предположим теперь, что  $a$  очень мало по сравнению с размерами обычных объектов типа электромоторов, генераторов и тому подобное, поэтому для обычных задач  $r_{12} \gg a$ . Тогда выражение (28.16) говорит, что в интеграл (28.15) дают вклад только те токи, для которых  $t_1 - t_2$  очень мало:

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} = r_{12} \sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}.$$

Но поскольку  $a^2/r_{12}^2 \ll 1$ , то квадратный корень приближенно равен  $1 \pm a^2/2r_{12}^2$ , так что

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c} \left( 1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2} \right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$

В чем здесь суть? Полученный результат говорит, что для  $A_\mu$  в момент  $t_1$  важны только те времена  $t_2$ , которые отличаются от него на запаздывание  $r_{12}/c$  с пренебрежимо малой поправкой,

ибо  $r_{12} \gg a$ . Другими словами, теория Боппа переходит в теорию Максвелла при удалении от зарядов в том смысле, что она приводит к эффекту запаздывания.

Мы можем приблизенно увидеть, к чему нас приведет интеграл (28.15). Если, зафиксировав  $r_{12}$ , провести интегрирование по  $t_2$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то  $s^2_{12}$  тоже будет изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Но основной вклад даст участок по  $t_2$  шириной  $\Delta t_2 = 2 \cdot a^2 / 2r_{12}c$  с центром в момент  $t_1 - r_{12}/c$ . Пусть функция  $F(s^2)$  при  $s^2=0$  принимает значение  $K$ , тогда интегрирование по  $t_2$  дает приблизительно  $K j_\mu \Delta t_2$ , или

$$\frac{Ka^2}{c} \frac{j_\mu}{r_{12}}.$$

Разумеется, величину  $j_\mu$  следует взять в момент  $t_2 = t_1 - r_{12}/c$ , так что (28.15) принимает вид

$$A_\mu(1, t) = \frac{Ka^2}{c} \int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2.$$

Если выбрать  $K = q^2 c / 4\pi \epsilon_0 a^2$ , то мы придем прямо к запаздывающему решению уравнений Максвелла для потенциалов, причем автоматически возникает зависимость  $1/r$ ! И все это получилось из простого предположения, что потенциал в одной точке пространства-времени зависит от плотности токов во всех других точках пространства-времени с весовым множителем, в качестве которого взята некая функция четырехмерного расстояния между двумя точками. Эта теория тоже дает конечную электромагнитную массу электрона, а соотношение между энергией и массой как раз такое, какое требуется в теории относительности. Ничего другого не могло и быть, ибо теория релятивистски инвариантна с самого начала.

Однако и этой теории и всем другим описанным нами теориям можно предъявить тяжкое обвинение. Все известные нам частицы подчиняются законам квантовой механики, поэтому необходима квантовомеханическая форма электродинамики. Свет ведет себя подобно фотонам. Это уже не 100-процентная теория Максвелла. Следовательно, электродинамика должна быть изменена. Мы уже говорили, что упорное старание исправить классическую теорию может оказаться напрасной тратой времени, ибо в квантовой электродинамике трудности могут исчезнуть или будут разрешены другим образом. Однако и в квантовой электродинамике трудности не исчезают. В этом кроется одна из причин, почему люди потратили столько времени, пытаясь преодолеть классические трудности и надеясь, что если они смогут преодолеть их, то после квантового обобщения уравнений Максвелла все будет в порядке. Однако и после такого обобщения трудности не исчезают.

Квантовые эффекты, правда, приводят к некоторым изменениям. Изменяется формула для масс, появляется постоянная Планка  $\hbar$ , но ответ по-прежнему выходит бесконечным, если вы не обрезаете как-то интегрирование, подобно тому как мы обрезали интеграл при  $r=a$  в классической теории. Ответ при этом зависит от характера обрезания. К сожалению, я не могу вам показать, что трудности в основном те же самые, ибо вы еще слишком мало знаете о квантовой механике, а о квантовой электродинамике — и того меньше. Поэтому вам придется поверить мне на слово, что и квантовая электродинамика Максвелла приводит к бесконечной массе точечного электрона.

Оказывается, однако, что до сих пор никому не удалось даже приблизиться к *самосогласованному* квантовому обобщению на основе *любой* из модифицированных теорий. Идея Борна и Инфельда никогда не суждено было стать квантовой теорией. Не привели к удовлетворительной квантовой теории опережающие и запаздывающие волны Дирака и Уилера — Фейнмана. Не привела к удовлетворительной квантовой теории и идея Боппа. Так что и до сего дня нам не известно решение этой проблемы. Мы не знаем, как с учетом квантовой механики построить самосогласованную теорию, которая не давала бы бесконечной собственной энергии электрона или какого-то другого точечного заряда. И в то же время нет удовлетворительной теории, которая описывала бы неточечный заряд. Так эта проблема и осталась нерешенной.

Если вы вздумаете попытать счастья и построить теорию, полностью удалив действие электрона на себя, так чтобы электромагнитная масса не имела смысла, а затем будете делать из нее квантовую теорию, то могу вас заверить — трудностей вы не избежите. Экспериментально доказано существование электромагнитной инерции и тот факт, что часть массы заряженных частиц — электромагнитная по своему происхождению.

В старых книгах часто утверждалось, что поскольку природа не подарила нам двух одинаковых частиц, из которых одна нейтральная, а другая заряженная, то мы никогда не сможем сказать, какая доля массы является электромагнитной, а какая механической. Однако оказалось, что природа все же была достаточно щедра и *подарила* нам именно два таких объекта, так что, сравнивая наблюдаемую массу заряженной частицы с массой нейтральной, мы можем сказать, существует ли электромагнитная масса. Возьмем, например, нейtron и протон. Они взаимодействуют с огромной силой — ядерной силой, детали происхождения которой нам неизвестны. Однако, как мы уже говорили, ядерные силы обладают одним замечательным свойством. По отношению к этим силам нейtron и протон в точности одинаковы. Насколько мы сейчас можем судить, ядерные силы между двумя нейtronами, нейtronом и протоном и двумя прото-

нами совершенно одинаковы. Отличаются эти частицы только сравнительно слабыми электромагнитными силами; по отношению к ним протон и нейtron отличаются, как день и ночь. Вот это нам как раз и нужно. Итак, мы имеем две частицы, одинаковые с точки зрения сильных взаимодействий и различных с точки зрения электрических. И они имеют небольшую разницу в массах. Разница масс между протоном и нейтроном, выраженная в единицах энергии покоя  $mc^2$ , составляет  $1,3 \text{ Мэв}$ , что соответствует  $2,6$  электронным массам. Классическая теория предсказывает для радиуса протона величину между  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{2}$  радиуса электрона, или около  $10^{-13} \text{ см}$ . Конечно, на самом деле следует пользоваться квантовой теорией, но по какой-то странной случайности все константы,  $2\pi$ ,  $\hbar$  и т. д., комбинируются так, что приблизительно дают тот же самый результат, что и классическая теория. Одна беда: *знак* оказывается неверным! Нейтрон на самом деле *тяжелее* протона.

Природа дала нам еще несколько других пар и троек частиц, которые, за исключением электрического заряда, во всех остальных отношениях оказываются в точности одинаковыми. Они взаимодействуют с протонами и нейтронами посредством так называемого «сильного» взаимодействия. В таких взаимодействиях все частицы данного сорта, скажем  $\pi$ -мезон, ведут себя во всех отношениях как одна и та же частица, *за исключением* их электрического заряда.

В табл. 28.1 мы приводим список таких частиц вместе с их массами. Заряженные  $\pi$ -мезоны имеют массу  $139,6 \text{ Мэв}$ , а нейтральный  $\pi^0$ -мезон на  $4,6 \text{ Мэв}$  легче. Эту разность масс мы считаем электромагнитной. Она соответствовала бы частице с радиусом от  $3$  до  $4 \cdot 10^{-14} \text{ см}$ . Вы видите из таблицы, что разницы масс других частиц того же масштаба.

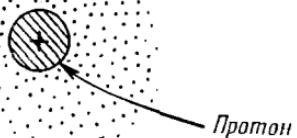
Таблица 28.1 • МАССА ЧАСТИЦ

Частица	Заряд (электрон- ный)	Масса, $M_{\text{эв}}$	$\Delta m$ , $M_{\text{эв}}$
$n$ (нейтрон)	0	939,5	
$p$ (протон)	+1	938,2	-1,3
$\pi$ ( $\pi$ -мезон)	0	135,0	
	$\pm 1$	139,6	+4,6
$K$ ( $K$ -мезон)	0	497,8	
	$\pm 1$	493,8*	-3,9
$\Sigma$ (сигма-гиперон)	0	1192,3*	
	+1	1189,4	-2,9*
	-1	1197,2*	+4,9*

$\Delta m =$  Масса заряженной частицы — Масса нейтральной частицы.  
(\*Данные 1965 г. — Прим. ред.)

*Отрицательный  
π-мезон*

*Фиг. 28.5. В некоторые моменты нейтрон может представлять собой протон, окруженный облаком отрицательного π-мезона.*



Однако размеры этих частиц можно определить и другими методами, например по кажущемуся диаметру при высокозергетических соударениях. Таким образом, электромагнитная масса, по-видимому, находится в согласии с электромагнитной теорией, если мы обрезаем интеграл от энергии поля на радиусе, полученном этими другими методами. Вот почему мы верим, что разница все же обусловлена электромагнитной массой.

Вас, конечно, беспокоят разные знаки разности масс в таблице. Нетрудно понять, почему заряженная частица должна быть тяжелее нейтральной. Но что можно сказать о таких парах, как нейтрон и протон, где наблюдаемая разность масс оказывается совсем другой? Эти частицы оказываются довольно сложными, и вычисление их электромагнитной массы более хитро. Например, хотя нейтрон *в целом* нейтрален, у него все же есть внутреннее распределение заряда и равен нулю только *суммарный* заряд. Мы думаем, что нейтрон, по крайней мере в некоторые моменты времени, выглядит как протон, окруженный «облаком» отрицательного π-мезона (фиг. 28.5). И несмотря на то, что нейтрон «нейтрален», т. е. полный его заряд равен нулю, у него все же есть какая-то электромагнитная энергия (например, у него есть магнитный момент), так что без детальной теории внутренней структуры судить о знаке электромагнитной разности масс нелегко.

Мне хотелось бы подчеркнуть лишь следующие особенности:

1. Электромагнитная теория предсказывает существование электромагнитной массы, но она тут же терпит фиаско, ибо оказывается несамосогласованной. Это в равной мере относится и к квантовым модификациям.

2. Существует экспериментальное подтверждение электромагнитной массы.

3. Все разности масс по порядку величины такие же, как и масса электрона.

Итак, мы снова возвращаемся к первоначальной идеи Лоренца, что масса электрона вполне может быть целиком электромагнитной, т. е. все его 0,511 Мэв обусловлены электродинамикой. Так это или нет? У нас нет теории и по сей день, поэтому мы ничего не можем сказать с уверенностью.

Мне хочется упомянуть еще об одном досадном обстоятельстве. В природе существует еще одна частица, называемая  $\mu$ -мезоном, или мюоном, которая, насколько нам известно сегодня, решительно ничем не отличается от электрона, за исключением своей массы (равной 206,77 электронных масс). Она во всем ведет себя так же, как электрон: взаимодействует с нейтринами и электромагнитным полем, но на нее не действуют ядерные силы. С ней не происходит ничего такого, чего не происходит с электронами, по крайней мере ничего такого, чего нельзя было бы объяснить, как простое следствие большей массы. Поэтому, если в конце концов кому-то удается объяснить массу электрона, для него остается загадкой, откуда же берет свою массу  $\mu$ -мезон. Почему? Да потому, что все, что делает электрон, может делать и  $\mu$ -мезон, так что массы их должны получиться одинаковыми. Есть люди, которые непоколебимо верят, что  $\mu$ -мезон и электрон — это одна и та же частица, что в окончательной будущей теории масс формула, из которой они должны определяться, будет представлять собой квадратное уравнение с двумя корнями, один из которых даст массу  $\mu$ -мезона, а другой — электрона. Есть и такие, которые полагают, что это будет трансцендентное уравнение с бесконечным числом корней; они занимаются гаданием, какими должны быть массы других частиц этого ряда и почему они не открыты до сих пор.

## § 6. Поле ядерных сил

Мне бы хотелось сделать еще несколько замечаний о неэлектромагнитной части массы ядерных частиц. Откуда берется большая доля их массы? Кроме электродинамических сил, существуют еще силы другого рода — ядерные силы, у которых есть своя собственная теория поля, хотя никому неизвестно, правильна она или нет. Эта теория также предсказывает энергию поля, которая для ядерных частиц дает массу, аналогичную электромагнитной. Ее можно называть « $\pi$ -мезополевой массой». Она, по-видимому, очень велика, так как ядерные силы чрезвычайно мощны, и возможно, что именно они являются причиной массы тяжелых частиц. Однако теории мезонных полей находятся в весьма зачаточном состоянии. Даже в сравнительно хорошо развитой теории электромагнетизма мы видели, что, кроме первоначальных намеков, невозможно получить объяснение массы электрона. В мезонных же теориях мы в этом месте тоже терпим неудачу.

Однако мезонная теория очень интересно связана с электродинамикой, и поэтому стоит все же уделить некоторое время изложению ее основ. Поле в электродинамике можно описать четырехвектором потенциала, удовлетворяющим уравнению

$$\square^2 A_\mu = \text{Источники}.$$

Мы видели, что поле может быть излучено, после чего оно существует независимо от источника. Это фотоны, и они описываются дифференциальным уравнением без источника:

$$\square^2 A_\mu = 0.$$

Некоторые физики утверждают, что поле ядерных сил тоже должно иметь свои собственные «фотоны», роль которых, по-видимому, играют  $\pi$ -мезоны, и что они должны описываться аналогичным дифференциальным уравнением. (До чего же бесполезен человеческий разум! Мы не можем придумать чего-то действительно нового и беремся рассуждать только по аналогии с тем, что знаем.) Таким образом, возможным уравнением для мезонов будет

$$\square^2 \varphi = 0,$$

где  $\varphi$  может быть каким-то другим четырехвектором или, возможно, скаляром. Далее выяснилось, что у  $\pi$ -мезона никакой поляризации нет, поэтому  $\varphi$  должно быть скаляром. Согласно этому простому уравнению, мезонное поле должно изменяться с расстоянием от источника как  $1/r^2$ , т. е. в точности как электрическое. Однако мы знаем, что радиус действия ядерных сил гораздо меньше, чего не может обеспечить нам это простое уравнение. Есть только один способ изменить положение вещей, не разрушая релятивистской инвариантности,— добавить или вычесть из даламбертиана произведение константы на поле  $\varphi$ . Итак, Юкава предположил, что свободные кванты ядерных сил могут подчиняться уравнению

$$\square^2 \varphi - \mu^2 \varphi = 0, \quad (28.17)$$

где  $\mu^2$  — некоторая постоянная, т. е. какой-то скаляр. (Поскольку  $\square^2$  является скалярным дифференциальным оператором, то инвариантность не нарушится, если мы добавим к нему другой скаляр.)

Давайте посмотрим, что дает уравнение (28.17), когда ядерные силы не изменяются с течением времени. Мы хотим найти решение уравнения

$$\nabla^2 \varphi - \mu^2 \varphi = 0,$$

которое было бы сферически симметрично относительно некоторой точки, скажем относительно начала координат. Если  $\varphi$  зависит только от  $r$ , то мы знаем, что

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi).$$

Таким образом, получается уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \mu^2 \varphi = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = \mu^2 (r\varphi).$$

Рассматривая теперь произведение  $(r\varphi)$  как новую функцию, мы имеем для нее уравнение, которое встречалось нам уже много раз. Решение ее имеет вид

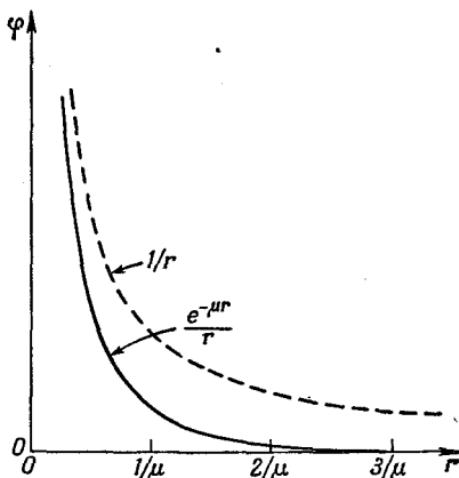
$$r\varphi = Ke^{\pm\mu r}.$$

Ясно, что при больших  $r$  поле  $\varphi$  не может быть бесконечным, поэтому нужно отбросить знак плюс в показателе экспоненты, после чего решение примет вид

$$\varphi = K \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (28.18)$$

Эта функция называется *потенциалом Юкавы*. Для сил притяжения  $K$  должно быть отрицательным числом, величина которого подбирается так, чтобы удовлетворить экспериментально наблюдаемой величине ядерных сил.

Потенциал Юкавы благодаря экспоненциальному множителю угасает быстрее, чем  $1/r$ . Как это видно из фиг. 28.6, для расстояний, превышающих  $1/\mu$ , потенциал, а следовательно, и ядерные силы приближаются к нулю гораздо быстрее, чем  $1/r$ . Поэтому «радиус действия» ядерных сил гораздо меньше «радиуса действия» электростатических. Экспериментально доказано, что ядерные силы не простираются на расстояния свыше  $10^{-13}$  см, поэтому  $\mu \approx 10^{15}$  м<sup>-1</sup>.



Фиг. 28.6. Сравнение потенциала Юкавы  $e^{-\mu r}/r$  с кулоновым потенциалом  $1/r$ .

И, наконец, давайте рассмотрим волновое решение уравнения (28.17). Если мы подставим в него

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\omega t - kz)},$$

то получим

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0.$$

Связывая теперь частоту с энергией, а волновое число с импульсом, как это делалось в конце гл. 34 (вып. 3), мы найдем соотношение

$$\frac{E^2}{e^2} - p^2 = \mu^2 \hbar^2,$$

которое говорит, что масса «фотона» Юкавы равна  $\mu \hbar/c$ . Если в качестве  $\mu$  взять величину  $\sim 10^{15} \text{ м}^{-1}$ , которую дает наблюдаемый радиус действия ядерных сил, то масса оказывается равной  $3 \cdot 10^{-25} \text{ г}$ , или  $170 \text{ Мэв}$ , что приблизительно равно наблюдаемой массе  $\pi$ -мезона. Таким образом, по аналогии с электродинамикой мы бы сказали, что  $\pi$ -мезон — это «фотон» поля ядерных сил. Однако теперь мы распространяли идеи электродинамики в такую область, где они на самом деле могут оказаться и неверными. Мы вышли далеко за рамки электродинамики и очутились перед проблемой ядерных сил.

## ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

### § 1. Движение в однородных электрическом и магнитном полях

Мы теперь перейдем к описанию в общих чертах движения зарядов в различных условиях. Наиболее интересные явления возникают тогда, когда зарядов движется много и все они взаимодействуют друг с другом. Так обстоит дело, когда электромагнитные волны проходят через кусок вещества или плазму; тогда легионы зарядов взаимодействуют друг с другом. Но это очень сложная картина. Позднее мы поговорим и о таких проблемах; пока же мы обсудим несравненно более простую задачу о движении отдельного заряда в *заданном* поле. При этом можно пренебречь всеми другими зарядами, за исключением, разумеется, тех зарядов и токов, которые создают предполагаемое нами поле.

Начать, по-видимому, нужно с движения частицы в однородном электрическом поле. Движение при небольших скоростях не представляет особенного интереса — это просто равномерно ускоренное движение в направлении поля. А вот когда частица, набрав достаточно энергии, превращается в релятивистскую, движение ее становится более сложным. Решение для этого случая я оставляю вам — потрудитесь и отыщите его сами.

Мы же рассмотрим движение в однородном магнитном поле, когда электрического поля нет. Эту задачу мы уже решали. Одним из решений было движение частиц по окружности. Магнитная сила  $qv \times B$  всегда действует под прямым углом к направлению движения, так что производная  $d\mathbf{p}/dt$  перпендикулярна  $\mathbf{p}$  и

§ 1. Движение  
в однородных  
электрическом  
и магнитном  
полях

§ 2. Анализатор  
импульсов

§ 3. Электростатиче-  
ская линза

§ 4. Магнитная линза

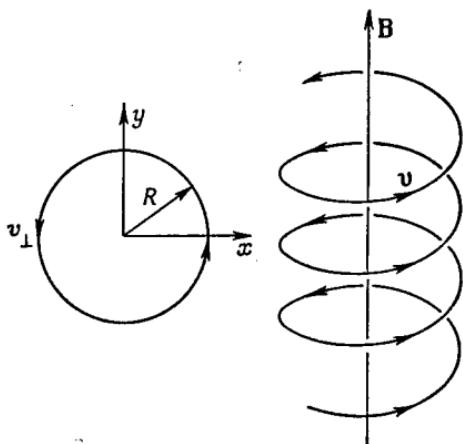
§ 5. Электронный  
микроскоп

§ 6. Стабилизирую-  
щие поля ускори-  
телей

§ 7. Фокусировка  
чередующимся  
градиентом

§ 8. Движение  
в скрещенных  
электрическом  
и магнитном  
полях

*Новаторство*: гл. 36  
(вып. 3)  
«Дифракция»



Фиг. 29.1. Движение частицы в однородном магнитном поле.

равна по величине  $v_p/R$ , где  $R$  — радиус окружности, т. е.

$$F = qvB = \frac{v_p}{R}.$$

Таким образом, радиус круговой орбиты равен

$$R = \frac{p}{qB}. \quad (29.1)$$

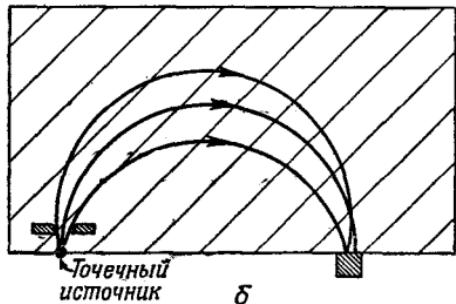
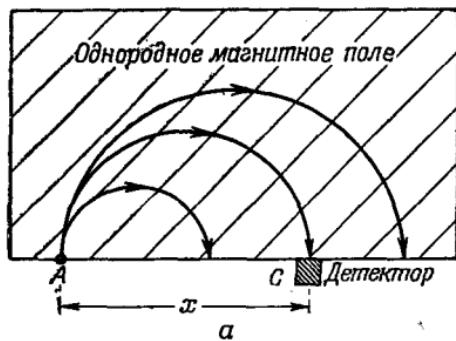
Это одно из возможных движений. Если движущаяся частица имеет только одну составляющую в направлении поля, то она не изменяется, ибо у магнитной силы отсутствует компонента в направлении поля. Общее же движение частицы в однородном магнитном поле — это движение с постоянной скоростью в направлении  $\mathbf{B}$  и круговое движение под прямым углом к  $\mathbf{B}$ , т. е. движение по цилиндрической спирали (фиг. 29.1). Радиус спирали определяется равенством (29.1) с заменой  $p$  на  $p_{\perp}$  — компоненту импульса, перпендикулярную к направлению поля.

## § 2. Анализатор импульсов

Однородное магнитное поле часто применяется в «анализаторе», или «спектрометре импульсов» высокoenергетических частиц. Предположим, что в точке  $A$  (фиг. 29.2, а) в однородное магнитное поле влетают заряженные частицы, причем магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка. При этом каждая частица будет лететь по круговой орбите, радиус которой пропорционален ее импульсу. Если все частицы влетают в поле перпендикулярно его краю, то они покидают его на расстоянии  $x$  от точки  $A$ , пропорциональном их импульсу  $p$ . Помещенный в некоторой точке  $C$  счетчик будет регистрировать только такие частицы, импульс которых находится где-то в интервале  $\Delta p$  величин  $p = qBx/2$ .

**Фиг. 29.2.** 180-градусный спектрометр импульсов с однородным магнитным полем.

*а* — траектории частиц с разными импульсами; *б* — траектории частиц, влетающих под разными углами. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка.

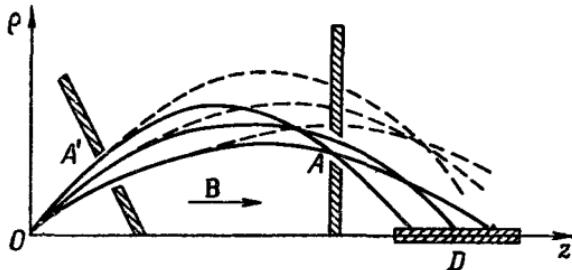


Нет необходимости, разумеется, чтобы перед регистрацией частица поворачивалась на  $180^\circ$ , но такой «180-градусный спектрометр» обладает особым свойством: для него совсем необязательно, чтобы частицы входили под прямым углом к краю поля. На фиг. 29.2, *б* показаны траектории трех частиц с одинаковым импульсом, но входящих в поле под различными углами. Вы видите, что траектории у них разные, но все они покидают поле очень близко к точке *C*. В подобных случаях мы говорим о «фокусировке». Преимущество такого способа фокусировки в том, что она позволяет допускать в точку *A* частицы, летящие под большими углами, хотя обычно, как видно из рисунка, углы эти в какой-то степени ограничены. Большое угловое разрешение обычно означает регистрацию за данный промежуток времени большего числа частиц и сокращения, следовательно, времени измерения.

Изменяя магнитное поле, передвигая счетчик вдоль оси *x* или же покрывая с помощью многих счетчиков целую область по оси *x*, можно измерить «спектр» падающего пучка [«спектр» импульсов  $f(p)$  означает, что число частиц с импульсами в интервале между  $p$  и  $(p+dp)$  равно  $f(p)dp$ ]. Такие измерения проводятся, например, при определении распределения по энергиям в  $\beta$ -распаде различных ядер.

Имеется еще много других типов импульсных спектрометров, но я расскажу вам только об одном из них, характерном особенно большим разрешением по пространственному углу. В основе его лежат винтовые орбиты в однородном поле, как это показано на фиг. 29.1. Представьте себе цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ , причем ось *z* выбрана по направлению магнитного поля. Если частица испускается из начала координат под углом

Фиг. 29.3. Спектрометр с аксиальным полем.



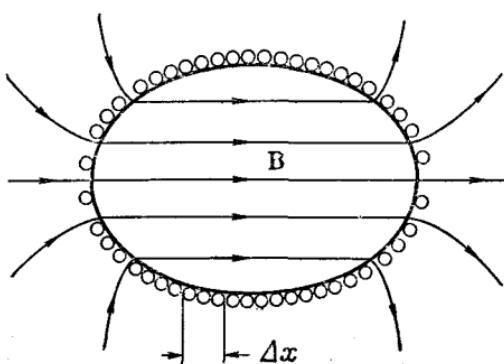
$\alpha$  к направлению оси  $z$ , то она будет двигаться по спиральной линии, описываемой выражением

$$\rho = a \sin kz, \quad \theta = bz;$$

входящие туда параметры  $a$ ,  $b$  и  $k$  нетрудно выразить через  $p$ ,  $\alpha$  и магнитное поле  $B$ . Если для данного импульса, но разных начальных углов отложить расстояние  $\rho$  от оси как функцию  $z$ , то мы получим кривые, подобные сплошным кривым на фиг. 29.3. (Вы помните — ведь это своего рода проекция винтовой траектории.) Когда угол между осью и начальным направлением велик, максимальное значение  $\rho$  тоже будет большим, а продольная скорость при этом уменьшается, так что выходящие под различными углами траектории стремятся собраться в своего рода фокус (точка  $A$  на рисунке). Если на расстоянии  $A$  поставить узкое кольцевое отверстие, то частицы, летящие в некоторой области углов, могут пройти через отверстие и достигнуть оси, где для их регистрации мы подготовим протяженный детектор  $D$ .

Частицы, вылетающие из начала координат под тем же самым углом, но с большим импульсом, летят по пути, обозначенному нами пунктирной линией, и не могут пройти через отверстие  $A$ . Итак, прибор выбирает небольшой интервал импульса. Преимущество такого спектрометра по сравнению с описанным ранее состоит в том, что отверстия  $A$  и  $A'$  можно сделать кольцевыми, так что могут быть зарегистрированы частицы в довольно большом телесном угле. Это преимущество особенно важно для слабых источников и при очень точных измерениях,

Фиг. 29.4. Внутри эллипсоидальной катушки, ток которой на любом интервале оси  $\Delta x$  одинаков, возникает однородное поле.



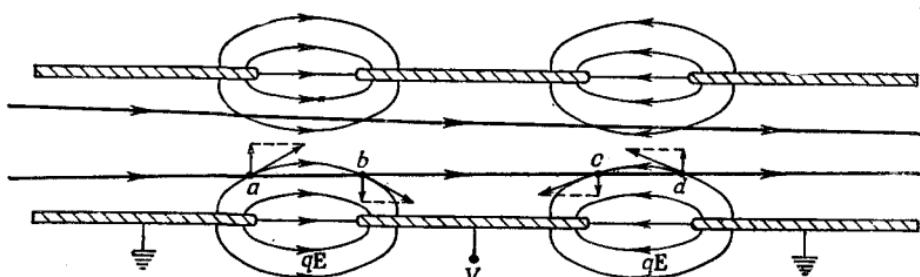
когда необходимо использовать возможно большую долю испущенных источником частиц.

Но за это преимущество приходится расплачиваться, ибо метод требует большого объема однородного магнитного поля, и он практически пригоден только для частиц с небольшой энергией. Если вы помните, один из способов получения однородного поля — это намотать провод на сферу так, чтобы поверхностная плотность тока была пропорциональна синусу угла. Вы можете доказать, что то же самое справедливо и для эллипсоида вращения. Поэтому очень часто такой спектрометр изготавливают, просто наматывая эллипсоидальные витки на деревянный или алюминиевый каркас. Единственное, что при этом требуется, — это чтобы ток на любом интервале оси  $\Delta x$  (фиг. 29.4) был одним и тем же.

### § 3. Электростатическая линза

Фокусировка частицы имеет множество применений. Например, в телевизионной трубке электроны, вылетающие из катода, фокусируются на экране в маленькое пятнышко. Делается это для того, чтобы отобрать электроны одинаковой энергии, но летящие под различными углами, и собрать их в небольшую точку. Эта задача напоминает фокусировку света с помощью линз, поэтому устройства, которые выполняют такие функции, тоже называются линзами.

В качестве примера электронной линзы здесь приведена фиг. 29.5. Это «электростатическая» линза, действие которой зависит от электрического поля между двумя соседними электродами. Работу ее можно понять, проследив за тем, что она делает со входящим слева параллельным пучком частиц. Попав в область  $a$ , электроны испытывают действие силы с боковой компонентой, которая прижимает их к оси. В области  $b$  электроны, казалось бы, должны получить равный по величине, но противоположный по знаку импульс, однако это не так. К тому времени, когда они достигнут области  $b$ , энергия их несколько



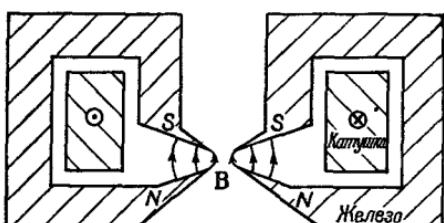
Фиг. 29.5. Электростатическая линза.  
Показаны силовые линии, т. е. линии вектора  $qE$ .

увеличится, и поэтому на прохождение области *b* они затратят меньше времени. Силы-то те же самые, но время их действия меньше, поэтому и импульс будет меньше. А полный импульс силы при прохождении областей *a* и *b* направлен к оси, так что в результате электроны стягиваются к одной общей точке. Покидая область высокого напряжения, частицы получают добавочный толчок по направлению к оси. В области *c* сила направлена от оси, а в области *d* — к оси, но во второй области частица остается дольше, так что снова полный импульс направлен к оси. Для небольших расстояний от оси полный импульс силы на протяжении всей линзы пропорционален расстоянию от оси (понимаете почему?), и это как раз основное условие, необходимое для обеспечения фокусировки линз такого типа.

С помощью этих же рассуждений вы можете убедиться, что фокусировка будет достигнута во всех случаях, когда потенциал в середине электрода по отношению к двум другим либо положителен, либо отрицателен. Электростатические линзы такого типа обычно используются в катоднолучевых трубках и некоторых электронных микроскопах.

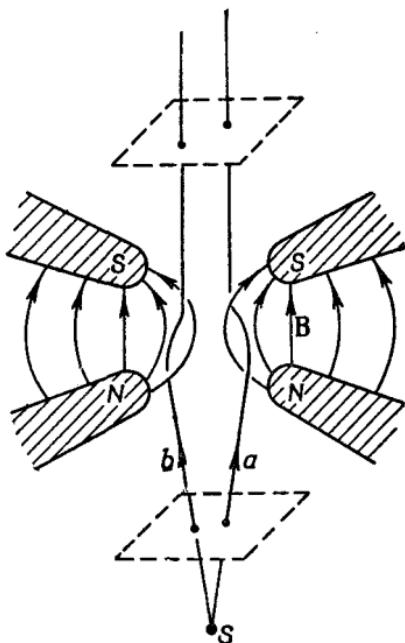
#### § 4. Магнитная линза

Есть еще один сорт линз — их часто можно встретить в электронных микроскопах — это магнитные линзы. Схематически они изображены на фиг. 29.6. Цилиндрически симметричный электромагнит с очень острыми кольцевыми наконечниками полюсов создает в малой области очень сильное неоднородное магнитное поле. Оно фокусирует электроны, летящие вертикально через эту область. Механизм фокусировки нетрудно понять; посмотрите увеличенное изображение области вблизи наконечников полюсов на фиг. 29.7. Вы видите два электрона *a* и *b*, которые покидают источник *S* под некоторым углом по отношению к оси. Как только электрон *a* достигнет начала поля, горизонтальная компонента поля отклонит его в направлении *от вас*. Он приобретет боковую скорость и, пролетая через сильное вертикальное поле, получит импульс в направлении к оси. Боковое же движение убирается магнитной силой, когда электрон



Фиг. 29.6. Магнитная линза.

Фиг. 29.7. Движение электрона в магнитной линзе.



покидает поле, так что окончательным эффектом будет импульс, направленный к оси, плюс «вращение» относительно нее. На частицу *b* действуют те же силы, но в противоположном направлении, поэтому она тоже отклоняется по направлению к оси. На рисунке видно, как расходящиеся электроны собираются в параллельный пучок.

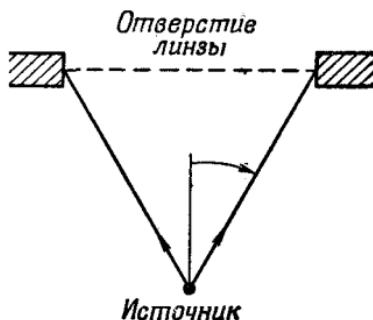
Действие такого устройства по-

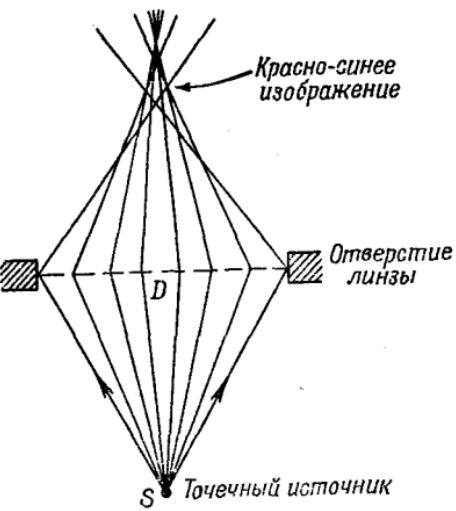
добно действию линзы на находящийся в ее фокусе объект. Если бы теперь вверху поставить еще одну такую же линзу, то она бы сфокусировала электроны снова в одну точку и получилось бы изображение источника *S*.

## § 5. Электронный микроскоп

Вы знаете, что в электронный микроскоп можно «увидеть» предметы, которые недоступно малы для оптического микроскопа. В гл. 30 (вып. 3) мы обсуждали общие ограничения любой оптической системы, вызываемые дифракцией на отверстии линзы. Если отверстие объектива видно из источника под углом  $2\theta$  (фиг. 29.8), то две соседние точки, расположенные около источника, будут неразличимы, если расстояние между ними

Фиг. 29.8. Разрешение микроскопа ограничивается угловым размером объектива относительно фокуса.





Фиг. 29.9. Сферическая аберрация линзы.

по порядку величины меньше

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \theta},$$

где  $\lambda$  — длина волны света. Для лучших оптических микроскопов угол  $\theta$  приближается к теоретическому пределу  $90^\circ$ , так что  $\delta$  приблизительно равно  $\lambda$ , или около  $5000 \text{ \AA}$ .

Те же самые ограничения применимы и к электронному микроскопу, но только длина волн в нем, т. е. длина волны электронов с энергией  $50 \text{ кв}$ , составляет  $0,05 \text{ \AA}$ . Если бы можно было использовать объектив с отверстием около  $30^\circ$ , то мы способны были бы различить объекты величиной в  $1/5 \text{ \AA}$ . Атомы в молекулах обычно расположены на расстоянии  $1-2 \text{ \AA}$ , следовательно, тогда вполне можно было бы получать фотографии молекул. Биология стала бы куда проще; мы бы могли сфотографировать структуру ДНК. Как это было бы замечательно! Ведь все сегодняшние исследования в молекулярной биологии — это попытки определить структуру сложных органических молекул. Если бы мы были способны их видеть!

Но к несчастью, самая лучшая разрешающая способность электронных микроскопов приближается только к  $20 \text{ \AA}$ . А все потому, что до сих пор никому не удалось построить линзу с большой светосилой. Все линзы страдают «сферической аберрацией». Это означает вот что: лучи, идущие под большим углом к оси, и лучи, идущие близко к ней, фокусируются в разных точках (фиг. 29.9). С помощью специальной технологии изготавливаются линзы для оптических микроскопов с пренебрежимо малой сферической аберрацией, но никому до сих пор не удалось получить электронную линзу, лишенную сферической аберрации. Можно показать, что для любой электростатической или магнитной линзы описанных нами типов сферическая аберрация неизбежна. Наряду с дифракцией аберрация ограничивает разрешающую способность электронных микроскопов ее современным значением.

Ограничения, о которых мы упоминали, не относятся к электрическим и магнитным полям, не имеющим осевой симметрии или не постоянным во времени. Вполне возможно, что в

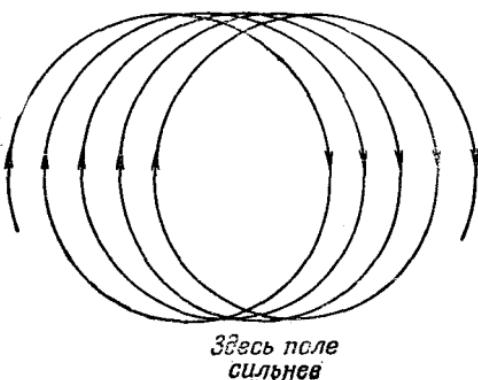
один прекрасный день кто-нибудь придумает новый тип электронных линз, свободных от аберраций, присущей простым электронным линзам. Тогда можно будет непосредственно фотографировать атомы. Возможно, что когда-нибудь химические соединения будут анализироваться просто визуальным наблюдением за расположением атомов, а не по цвету какого-то осадка!

## § 6. Стабилизирующие поля ускорителей

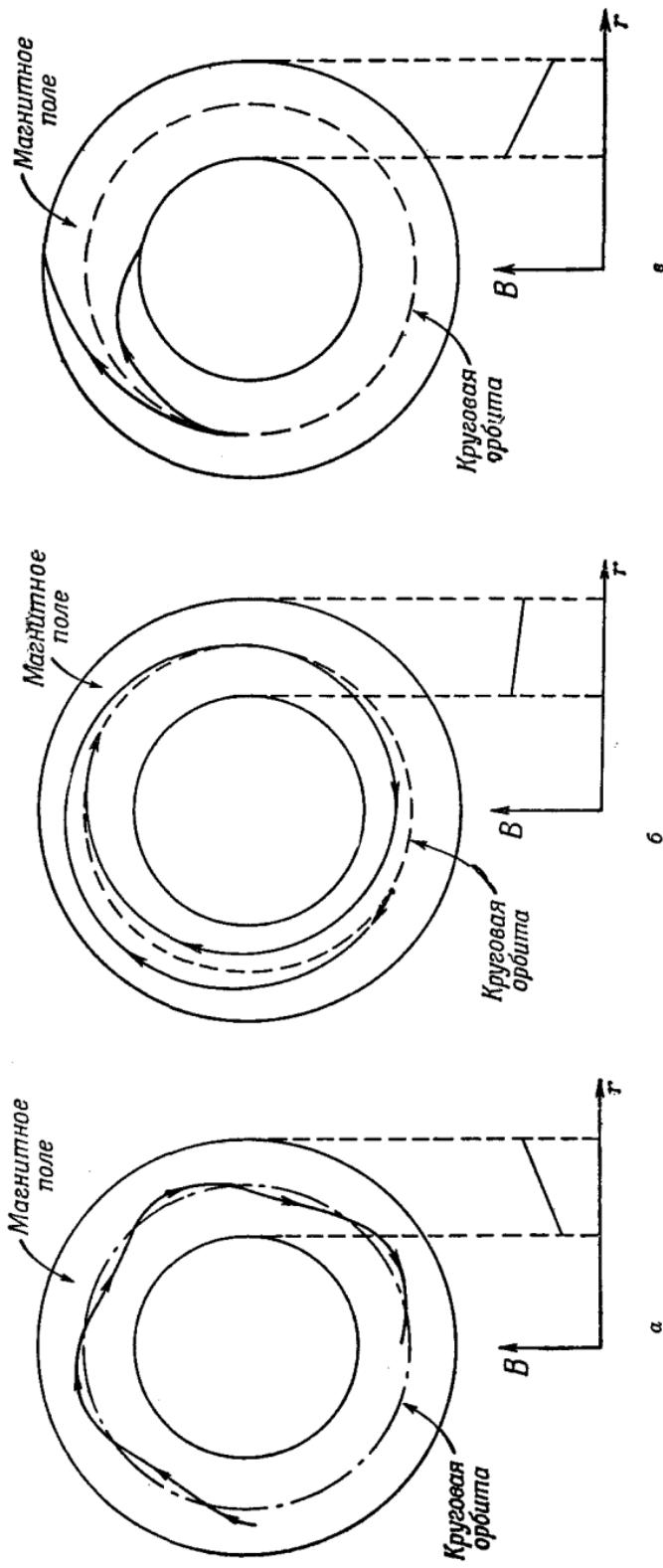
Магнитные поля используются в высокогенергетических ускорителях еще для того, чтобы заставить частицу двигаться по нужной траектории. Такие устройства, как циклотрон и синхротрон, ускоряют частицу до высоких энергий, заставляя ее много-кратно проходить через сильное электрическое поле. А на своей орбите частицу удерживает магнитное поле.

Мы видели, что путь частицы в однородном магнитном поле проходит по круговой орбите. Но это справедливо только для идеального магнитного поля. А представьте себе, что поле  $B$  в большой области только приблизительно однородно: в одной части оно немного сильнее, чем в другой. Если в такое поле мы запустим частицу с импульсом  $p$ , то она полетит по примерно круговой орбите с радиусом  $R = p/qB$ . Однако в области более сильного поля радиус кривизны будет несколько меньше. При этом орбита уже не будет замкнутой окружностью, а возникнет «дрейф», подобный изображеному на фиг. 29.10. Если угодно, можно считать, что небольшая «ошибка» в поле приводит к толчку, который сдвигает частицу на новую траекторию. В ускорителе же частица делает миллионы оборотов, поэтому необходима своего рода «радиальная фокусировка», которая удерживала бы траектории частиц на близкой к желаемой орбите.

Другая трудность, связанная с однородным полем, состоит в том, что частицы не остаются в одной плоскости. Если они начинают движение под небольшим углом или небольшой угол создается неточностью поля, то частицы идут по спиральному пути, который в конце концов приведет их либо на полюс магнита, либо на потолок или пол вакуумной



Фиг. 29.10. Движение частицы в слабо неоднородном поле.



Фиг. 29.11. Радиальное движение частицы в магнитном поле.  
а — с большим пологовитальным «наклоном»; б — с малым отрицательным «наклоном»;

камеры. Чтобы избежать такого вертикального дрейфа, нужны какие-то устройства; магнитное поле должно обеспечивать как радиальную, так и «вертикальную» фокусировки.

Сразу же можно догадаться, что радиальную фокусировку обеспечивает созданное магнитное поле, которое увеличивается с ростом расстояния от центра проектируемого пути. Тогда, если частица выйдет на больший радиус, она окажется в более сильном поле, которое вернет ее назад на нужную орбиту. Если она перейдет на меньший радиус, то «загибание» будет меньше и она снова вернется назад на желаемый радиус. Если частица внезапно начала двигаться под углом к идеальной орбите, она начнет осциллировать относительно нее (фиг. 29.11, а) и радиальная фокусировка будет удерживать частицу вблизи кругового пути.

Фактически радиальная фокусировка происходит даже при *противоположном* «наклоне». Это может происходить в тех случаях, когда радиус кривизны траектории увеличивается не быстрее, чем расстояние частицы от центра поля. Орбиты частиц будут подобны изображенным на фиг. 29.11, б. Но если градиент поля слишком велик, то частицы не вернутся на желаемый радиус, а будут по спирали выходить из поля либо внутрь, либо наружу (фиг. 29.11, в).

«Наклон» поля мы обычно характеризуем «относительным градиентом», или *индексом поля*  $n$

$$n = \frac{dB/B}{dr/r}. \quad (29.2)$$

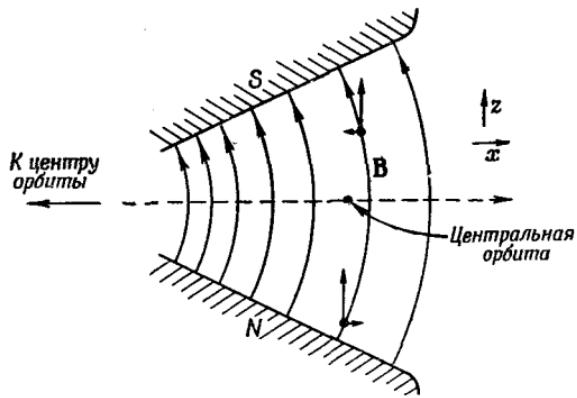
Направляющее поле создает радиальную фокусировку, если относительный градиент будет больше  $-1$ .

Радиальный градиент поля приведет также к *вертикальным* силам, действующим на частицу. Предположим, мы имеем поле, которое вблизи центра орбиты сильнее, а снаружи слабее. Вертикальное поперечное сечение магнита под прямым углом к орбите может иметь такой вид, как показано на фиг. 29.12. (Причем протоны летят на нас из страницы.) Если нам нужно, чтобы поле было сильнее слева и слабее справа, то магнитные силовые линии должны быть искривлены подобно изображенным на рисунке. То, что это должно быть так, можно увидеть из закона равенства нулю циркуляции  $\mathbf{B}$  в пустом пространстве. Если выбрать систему координат, показанную на рисунке, то

$$(\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0,$$

или

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (29.3)$$



Фиг. 29.12. Вертикально фокусирующее поле.  
Вид в поперечном сечении, перпендикулярном к орбите.

Поскольку мы предполагаем, что  $\partial B_z / \partial x$  отрицательно, то равным ему и отрицательным должно быть и  $\partial B_x / \partial z$ . Если «номинальной» плоскостью орбиты является плоскость симметрии, где  $B_x = 0$ , то радиальная компонента  $B_x$  будет отрицательной над плоскостью и положительной под ней. При этом линии должны быть искривлены так, как это изображено на рисунке.

Такое поле должно обладать вертикально фокусирующими свойствами. Представьте себе протон, летящий более или менее параллельно центральной орбите, но выше нее. Горизонтальная компонента  $B$  будет действовать на протон с силой, направленной вниз. Если же протон находится ниже центральной орбиты, то сила изменит свое направление. Таким образом, возникает эффективная «восстанавливающая сила», направленная к центру орбиты. Из наших рассуждений получается, что при условии уменьшения вертикального поля с увеличением радиуса должна происходить вертикальная фокусировка. Однако если градиент поля положительный, то происходит «вертикальная дефокусировка». Таким образом, для вертикальной фокусировки индекс поля  $n$  должен быть меньше нуля. Выше мы нашли, что для радиальной фокусировки значение  $n$  должно быть больше  $-1$ . Комбинация этих двух условий требует для удержания частиц на стабильных орбитах, чтобы

$$-1 < n < 0.$$

В циклотронах обычно используется величина  $n$ , приблизительно равная нулю, а в бетатронах и синхротронах типичной величиной является  $n = -0,6$ .

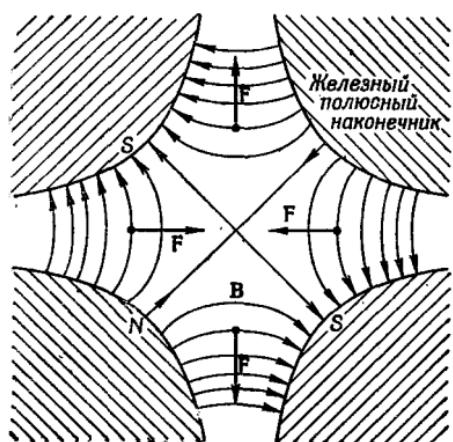
### § 7. Фокусировка чередующимся градиентом

Столь малые величины  $n$  дают довольно «слабую» фокусировку. Ясно, что гораздо большую радиальную фокусировку можно было бы получить для большого положительного градиента

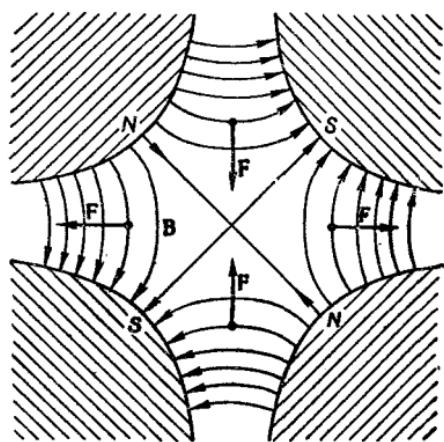
$(n \gg 1)$ , но при этом вертикальные силы будут сильно дефокусирующими. Подобным же образом большой отрицательный наклон ( $n \ll -1$ ) давал бы большие вертикальные силы, но при этом вызывал бы сильную радиальную дефокусировку. Однако примерно 10 лет назад было установлено, что чередующиеся действия областей с сильной фокусировкой и область с сильной дефокусировкой в целом приводят к фокусирующему эффекту.

Чтобы объяснить, как работает такая фокусировка, разберем сначала действие квадрупольной линзы, которая устроена по тому же принципу. Представьте себе, что к магнитному полю, изображеному на фиг. 29.12, добавлено однородное отрицательное магнитное поле, сила которого подобрана так, чтобы поле на орбите было равно нулю. Результирующее поле при малых смещениях от нейтральной точки будет напоминать изображенное на фиг. 29.13. Такой четырехполюсный магнит называется «квадрупольной линзой». Положительная частица, которая входит (со стороны читателя) справа или слева от центра, снова втягивается в центр. Если же частица входит сверху или снизу от центра, то она выталкивается из него. Это горизонтально-фокусирующая линза. Если теперь обратить горизонтальный градиент, что может быть сделано перенесением всех полюсов на противоположные, то знак всех сил изменится на обратный и мы получим вертикально-фокусирующую линзу (фиг. 29.14). Напряженность поля у таких линз, а следовательно, и фокусирующая сила возрастают линейно с удалением от оси линзы.

Представьте себе теперь, что мы поставили подряд две такие линзы. Если частица входит с некоторым горизонтальным смещением относительно оси (фиг. 29.15, a), то она отклонится по направлению к оси первой линзы. Когда же она подходит ко второй линзе, то оказывается ближе к оси, где выталкивающая



Фиг. 29.13. Горизонтально-фокусирующая квадрупольная линза.



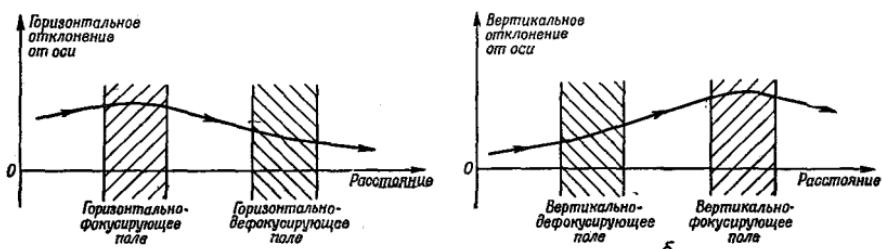
Фиг. 29.14. Вертикально-фокусирующая квадрупольная линза.

сила меньше, поэтому меньшим будет и отклонение от оси. В результате же получится наклон к оси, т. е. в среднем их действие окажется горизонтально-фокусирующим. С другой стороны, если мы возьмем частицу, которая отклоняется от оси в вертикальном направлении, то путь ее будет таким, как показано на фиг. 29.15, б. Частица сначала отклоняется от оси, а затем входит во вторую линзу с большим смещением, испытывая действие большей силы, в результате чего отклоняется к оси. В целом эффект снова будет фокусирующим. Таким образом, действие пары квадрупольных линз, действующих независимо в горизонтальном и вертикальном направлениях, очень напоминает действие оптической линзы. Квадрупольные линзы используются для формирования пучка частиц и контроля над ним в точности также, как оптические линзы используются для светового пучка.

Нужно подчеркнуть, что переменно-градиентная система не всегда приводит к фокусировке. Если градиент слишком велик (по сравнению с импульсом частиц или с расстоянием между линзами), то результатирующее действие будет дефокусирующим. Вы поймете, как это получается, если вообразите, что пространство между двумя линзами на фиг. 29.15 увеличилось в три или четыре раза.

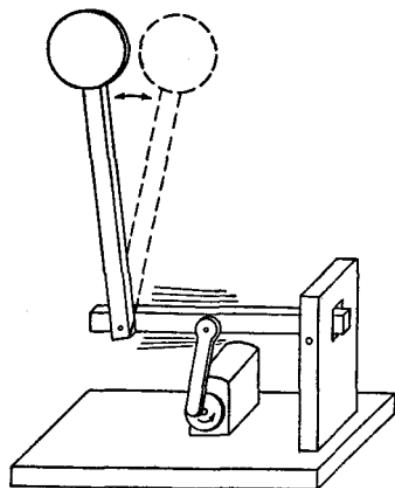
А теперь вернемся к синхротронному направляющему магниту. Можно считать, что он состоит из чередующейся последовательности «положительных» и «отрицательных» линз с наложенным поверх них однородным полем. Однородное поле служит для удержания частиц в среднем на горизонтальной окружности (на вертикальное движение оно не влияет), а переменные линзы действуют на любую частицу, которая норовит сбиться с пути, подталкивая ее все время к центральной орбите (в среднем).

Существует очень хороший механический аналог, который демонстрирует, как переменная «фокусирующая и дефокусирующая» сила может привести в результате к «фокусирующему» эффекту. Представьте себе механический «маятник», состоящий из твердого стержня с грузиком, подвешенным на оси, которая с помощью кривошипа, связанного с мотором, может быстро



Фиг. 29.15. Горизонтальная и вертикальная фокусировка парой квадрупольных линз.

Фиг. 29.16. Маятник с осциллирующей осью имеет устойчивое положение с грузиком, находящимся наверху.

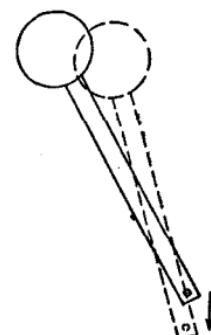


раскачиваться вверх и вниз. У такого маятника есть два положения равновесия. Кроме нормального положения, когда маятник свешивается вниз, у него есть еще положение равновесия, когда он торчит вверху,— грузик при этом находится над точкой опоры (фиг. 29.16).

Простые рассуждения показывают, что вертикальное движение стержня эквивалентно переменной фокусирующей силе. Когда стержень ускоряется вниз, грузик стремится двигаться по направлению к вертикали, как это показано на фиг. 29.17, а когда грузик ускоряется вверх,— все происходит в обратном порядке. Но несмотря на то, что сила все время изменяет свое направление, в среднем она действует к вертикали. Таким образом, маятник будет качаться туда и сюда около нейтрального положения, которое прямо противоположно нормальному.

Существует, конечно, более простой способ удержать маятник «вверх ногами» — например сбалансировать его на пальце. А вот попробуйте-ка так удержать два независимых маятника на одном пальце. Или даже один, но с закрытыми глазами. Балансирование означает внесение небольших поправок в то, что неверно. А если одновременно неверны несколько параметров, то балансирование в большинстве случаев невозможно. Однако в синхротроне по орбите одновременно движутся миллиарды частиц, каждая из которых имеет свою собственную «ошибку», и тем не менее описанный нами способ фокусировки действует сразу на все эти частицы.

Фиг. 29.17. Ускорение оси маятника вниз приводит к движению его по направлению к вертикали.

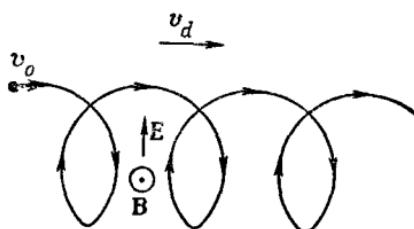


## § 8. Движение в скрещенных электрическом и магнитном полях

До сих пор мы говорили о частицах, находящихся только в электрическом или только в магнитном поле. Но есть интересные эффекты, возникающие при одновременном действии обоих полей. Пусть у нас имеется однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$  и направленное к нему под прямым углом электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Тогда частицы, влетающие перпендикулярно полю  $\mathbf{B}$ , будут двигаться по кривой, подобной изображенной на фиг. 29.18. (Это *плоская* кривая, а *не* спираль.) Качественно это движение понять не трудно. Если частица (которую мы считаем положительной) движется в направлении поля  $\mathbf{E}$ , то она набирает скорость, и магнитное поле загибает ее меньше. А когда частица движется против поля  $\mathbf{E}$ , то она теряет скорость и постепенно все больше и больше загибается магнитным полем. В результате же получается «дрейф» в направлении ( $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ).

Мы можем показать, что такое движение есть по существу суперпозиция равномерного движения со скоростью  $v_d = E/B$  и кругового, т. е. на фиг. 29.18 изображена просто циклоида. Представьте себе наблюдателя, который движется направо с постоянной скоростью. В его системе отсчета наше магнитное поле преобразуется в новое магнитное поле *плюс* электрическое поле, направленное вниз. Если его скорость подобрана так, что полное электрическое поле окажется равным нулю, то наблюдатель будет видеть электрон, движущийся по окружности. Таким образом, движение, которое мы видим, будет круговым движением *плюс* перенос со скоростью дрейфа  $v_d = E/B$ . Движение электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях лежит в основе магнетронов, т. е. осцилляторов, применяемых при генерации микроволнового излучения.

Есть еще немало других интересных примеров движения частиц в электрическом и магнитном полях, например орбиты электронов или протонов, захваченных в радиационных поясах в верхних слоях стратосферы, но, к сожалению, у нас не хватает времени, чтобы заниматься сейчас еще и этими вопросами.



Фиг. 29.18. Путь частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.