

Diseño de Circuitos en Microondas

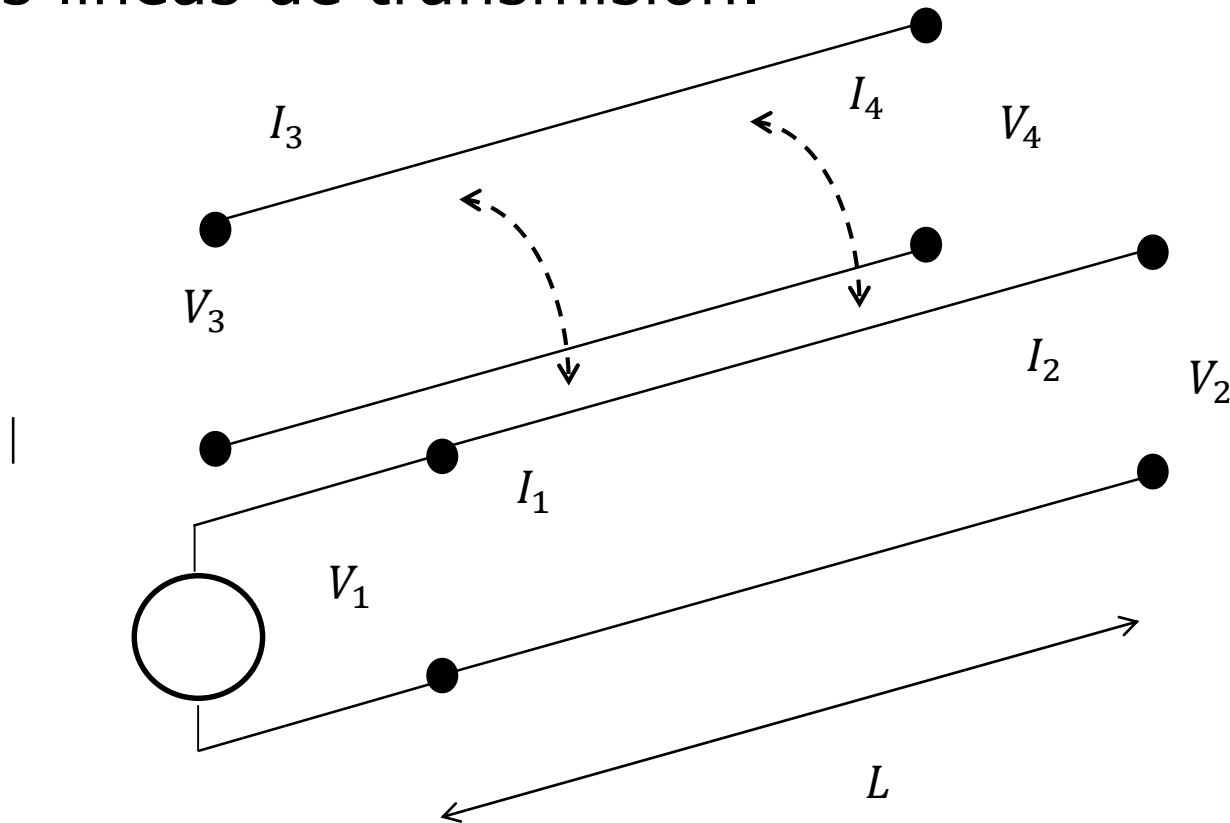
Líneas de Transmisión Acopladas

2023 – Laboratorio de Comunicaciones
Facultad de Ingeniería
UNMDP

Acoplamiento de dos líneas de transmisión ideales

Se analiza el comportamiento de dos líneas de transmisión ideales que operan en modo TEM.

La figura muestra la representación esquemática de dichas líneas de transmisión.



Acoplamiento de dos líneas de transmisión ideales

El sistema a estudiar se encuentra adaptado en todos sus terminales y en el puerto 1 se aplica una tensión de 2 V, a través de un generador cuya impedancia de entrada coincide con la característica de las dos líneas, Z_0 , impedancia con la cual también se carga al resto de los puertos del esquema.

Esta es la forma mas típica de conexión de las líneas de transmisión acopladas en paralelo.

|

El esquema se muestra en la figura:

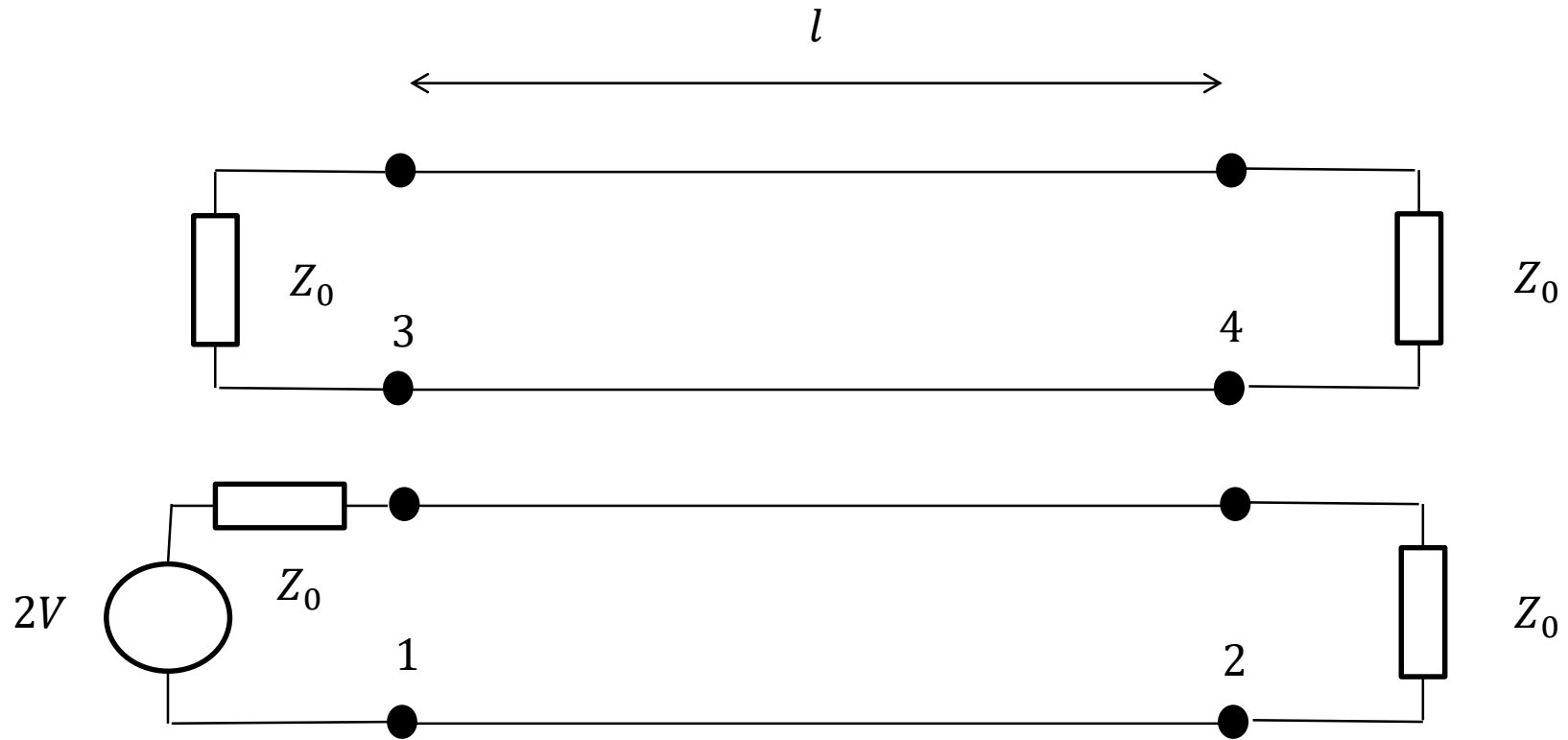
Acoplamiento de dos líneas de transmisión ideales

Ahora procedemos con un análisis detallado de las líneas acopladas en paralelo en modo TEM. La disposición de la figura siguiente puede analizarse considerando primero la excitación solo en condiciones de modo par, luego solo en condiciones de modo impar y, finalmente, combinando los resultados.

En esta disposición se supone que las pérdidas pueden despreciarse de modo que el coeficiente de propagación tiene solo componente imaginaria $j\beta$.

Dado que la estructura es físicamente simétrica, sólo hay que resolver dos circuitos. Luego, podemos usar el hecho de que los voltajes y corrientes totales en la estructura original son una superposición de las soluciones en modo par e impar.

Acoplamiento de dos líneas de transmisión ideales



Descomposición en modos Par e Impar

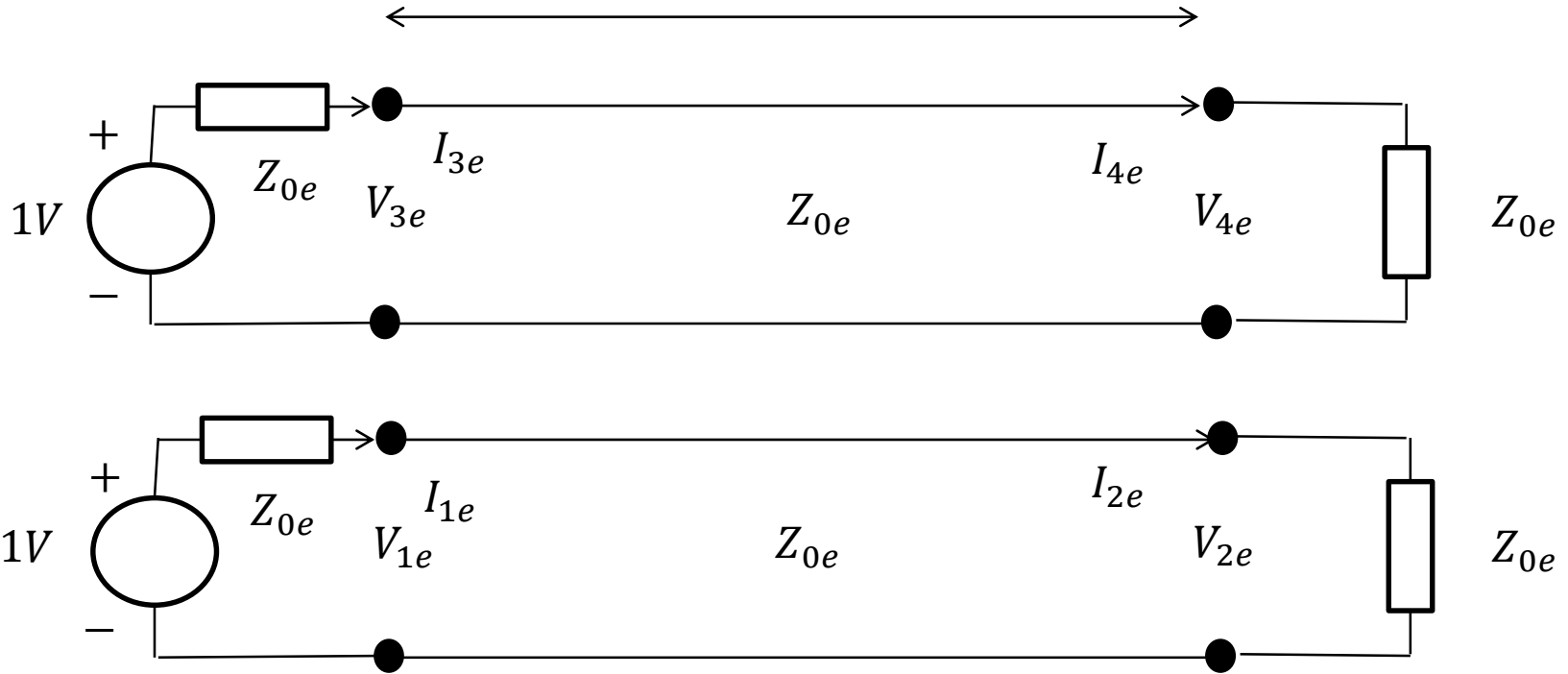
El sistema se descompone en dos modos de operación, los modos PAR e IMPAR, para los cuales se supone que poseen la misma velocidad de fase.

El sistema planteado de líneas acopladas puede descomponerse, basándonos en el principio de superposición, en dos circuitos como los mostrados en las siguientes figuras:

|

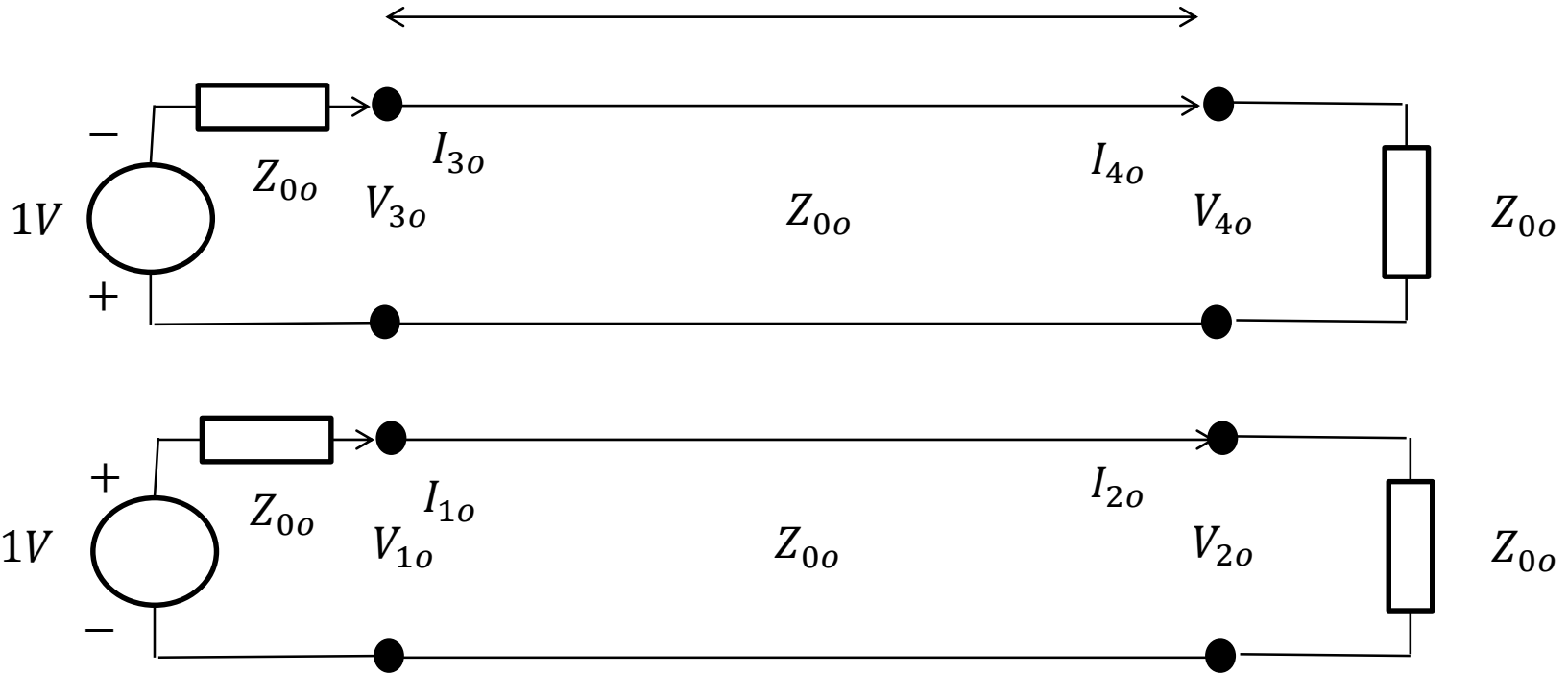
Modo Par

$$\theta = \beta l$$



Modo Impar

$$\theta = \beta l$$



Descomposición en modos Par e Impar

Las tensiones y corrientes totales se calculan sumando las contribuciones de los modos de la descomposición:

$$V_1 = V_{1e} + V_{1o}$$

$$V_2 = V_{2e} + V_{2o}$$

$$V_3 = V_{1e} - V_{1o}$$

$$V_4 = V_{2e} - V_{2o}$$

$$I_1 = I_{1e} + I_{1o}$$

$$I_2 = I_{2e} + I_{2o}$$

$$I_3 = I_{1e} - I_{1o}$$

$$I_4 = I_{2e} - I_{2o}$$

Descomposición en modos Par e Impar

Como puede deducirse del modelo de la línea de transmisión sin pérdidas, las tensiones y corrientes para este tipo de línea se pueden escribir como:

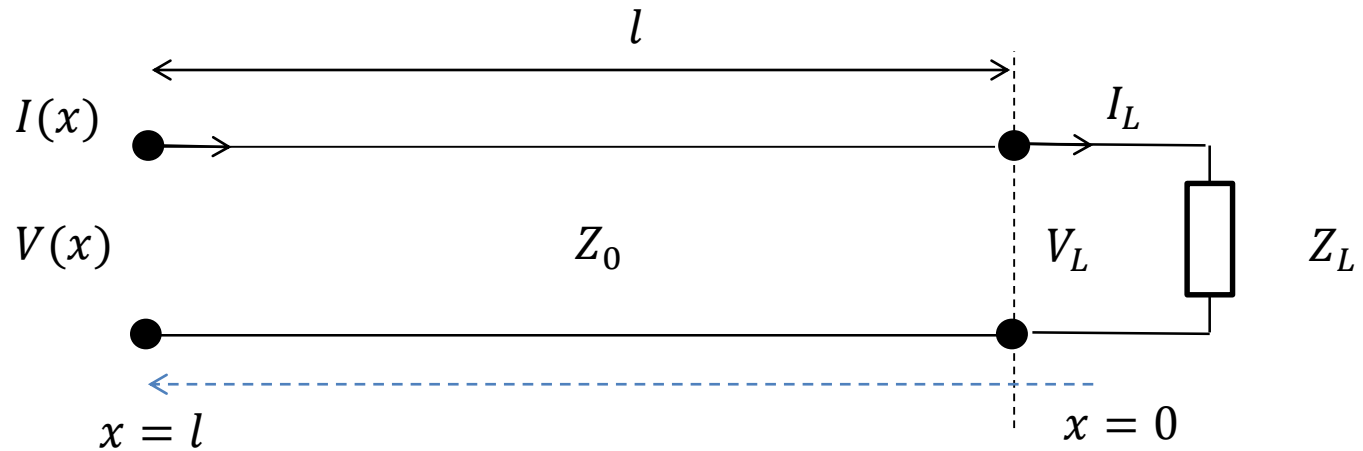
$$V(x) = V_L \cos(\beta x) + jZ_0 I_L \sin(\beta x)$$

$$I(x) = j \frac{V_L}{Z_0} \sin(\beta x) + I_L \cos(\beta x)$$

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta x) & jZ_0 \sin(\beta x) \\ j \frac{1}{Z_0} \sin(\beta x) & \cos(\beta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix}$$

Que se calculan sobre un esquema de línea de transmisión sin pérdidas de la configuración que se ve en la siguiente figura:

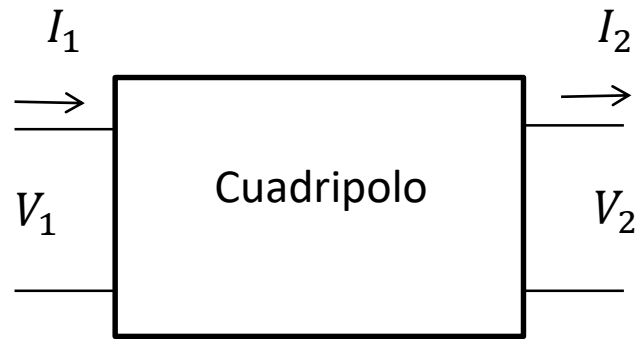
Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas



Luego, para la longitud $x=l$

$$\begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jZ_0 \sin(\beta l) \\ j\frac{1}{Z_0} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix}$$

Parámetros ABCD

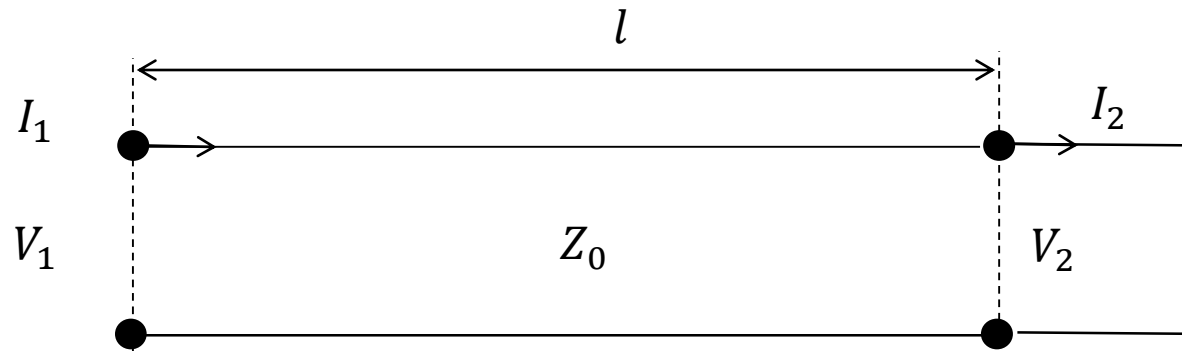


Los parámetros ABCD, o cadena, se definen sobre el esquema de la figura como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Que en el caso de una línea de transmisión sin pérdidas se pueden describir de la siguiente manera:

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jZ_0 \sin(\beta l) \\ j\frac{1}{Z_0} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jZ_0 \sin(\beta l) \\ j\frac{1}{Z_0} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

Las expresiones anteriores pueden aplicarse a cada línea de transmisión de los modos par e impar, siendo $\theta = \beta l$:

$$\begin{bmatrix} V_{1e} \\ I_{1e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & jZ_{0e}\sin(\theta) \\ jY_{0e}\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2e} \\ I_{2e} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} V_{1o} \\ I_{1o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & jZ_{0o}\sin(\theta) \\ jY_{0o}\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2o} \\ I_{2o} \end{bmatrix}$$

Para nuestra configuración de líneas acopladas en modo simétrico y adaptado a los puertos de entrada y salida, las condiciones de contorno que pueden aplicarse son:

$$\begin{aligned} V_{2e} &= Z_{0e}I_{2e} & V_{2o} &= Z_{0o}I_{2o} \\ V_{1e} + Z_0I_{1e} &= 1 & V_{1o} + Z_0I_{1o} &= 1 \end{aligned}$$

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

Resolviendo el sistema de ecuaciones, en el modo par:

$$\begin{aligned} V_{1e} &= \frac{Z_0 Z_{0e} \cos(\theta) + j Z_{0e}^2 \sin(\theta)}{2 Z_0 Z_{0e} \cos(\theta) + j (Z_{0e}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \\ I_{1e} &= \frac{Z_{0e} \cos(\theta) + j Z_0 \sin(\theta)}{2 Z_0 Z_{0e} \cos(\theta) + j (Z_{0e}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \\ V_{2e} &= \frac{Z_0 Z_{0e}}{2 Z_0 Z_{0e} \cos(\theta) + j (Z_{0e}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \\ I_{2e} &= \frac{Z_{0e}}{2 Z_0 Z_{0e} \cos(\theta) + j (Z_{0e}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \end{aligned}$$

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

Resolviendo el sistema de ecuaciones, en el modo impar:

$$\begin{aligned} V_{1o} &= \frac{Z_0 Z_{0o} \cos(\theta) + j Z_0^2 \sin(\theta)}{2 Z_0 Z_{0o} \cos(\theta) + j (Z_{0o}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \\ I_{1o} &= \frac{Z_{0o} \cos(\theta) + j Z_0 \sin(\theta)}{2 Z_0 Z_{0o} \cos(\theta) + j (Z_{0o}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \\ V_{2o} &= \frac{Z_0 Z_{0e}}{2 Z_0 Z_{0o} \cos(\theta) + j (Z_{0o}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \\ I_{2o} &= \frac{Z_{0e}}{2 Z_0 Z_{0o} \cos(\theta) + j (Z_{0o}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)} \end{aligned}$$

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

El próximo paso consiste en lograr que el sistema completo alimentado por un generador de tensión de impedancia interna Z_0 , se vea adaptado.

De esta manera, la impedancia de entrada total del sistema debe ser también Z_0 :

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_{1e} + V_{1o}}{I_{1e} + I_{1o}} = Z_0$$

Reemplazando y utilizando las expresiones anteriores:

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

Luego:

$$Z_0 = \frac{Z_0(Z_{0o}D_e + Z_{0e}D_o) \cos(\theta) + j(Z_{0o}^2 D_e + Z_{0e}^2 D_o) \sin(\theta)}{(Z_{0o}D_e + Z_{0e}D_o) \cos(\theta) + jZ_0(D_e + D_o) \sin(\theta)}$$

Donde:

$$D_e = 2Z_0Z_{0e} \cos(\theta) + j(Z_{0e}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)$$

$$D_o = 2Z_0Z_{0o} \cos(\theta) + j(Z_{0o}^2 + Z_0^2) \sin(\theta)$$

La identidad anterior para Z_0 se cumple si:

$$Z_0^2(D_e + D_o) = Z_{0o}^2 D_e + Z_{0e}^2 D_o$$

Substituyendo D_e y D_o

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

$$\begin{aligned} & 2Z_0^3(Z_{0e} + Z_{0o})\cos(\theta) + j(Z_{0e}^2Z_0^2 + Z_{0o}^2Z_0^2 + Z_0^4)\sin(\theta) \\ &= 2Z_0Z_{0e}Z_{0o}(Z_{0e} + Z_{0o})\cos(\theta) \\ &+ j(Z_{0e}^2Z_0^2 + Z_{0o}^2Z_0^2 + 2Z_{0e}^2Z_{0o}^2)\sin(\theta) \end{aligned}$$

La ecuación se satisface si:

$$Z_0^2 = Z_{0e}Z_{0o}$$

Que garantiza la adaptación del sistema de líneas de transmisión acopladas.

Reemplazando en las ecuaciones que describen los modos par e impar:

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

Resolviendo el sistema de ecuaciones, en el modo par:

$$V_{1e} = \frac{Z_0 \cos(\theta) + jZ_{0e} \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$I_{1e} = \frac{\cos(\theta) + jZ_{0o}Y_0 \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$V_{2e} = \frac{Z_0}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$I_{2e} = \frac{1}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

Parámetros de línea de transmisión sin pérdidas

Resolviendo el sistema de ecuaciones, en el modo impar:

$$V_{1o} = \frac{Z_0 \cos(\theta) + jZ_{0o} \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$I_{1o} = \frac{\cos(\theta) + jZ_{0e}Y_0 \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$V_{2o} = \frac{Z_0}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$I_{2o} = \frac{1}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

Descomposición en modos Par e Impar

Podemos ahora determinar las tensiones y corrientes totales, que se calculan sumando las contribuciones de los modos de la descomposición:

$$V_1 = V_{1e} + V_{1o} = \frac{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)} = 1$$

$$I_1 = I_{1e} + I_{1o} = \frac{2 \cos(\theta) + jY_0(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)} = \frac{1}{Z_0}$$

$$V_2 = V_{2e} + V_{2o} = \frac{2Z_0}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$I_2 = I_{2e} + I_{2o} = \frac{2}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

Descomposición en modos Par e Impar

$$V_3 = V_{1e} - V_{1o} = \frac{j(Z_{0e} - Z_{0o}) \sin(\theta)}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$I_3 = I_{1e} - I_{1o} = \frac{jY_0(Z_{0e} - Z_{0o})}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)}$$

$$V_4 = V_{2e} - V_{2o} = V_{1o} = \frac{0}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)} = 0$$

$$\begin{array}{c} | \\ I_4 = I_{2e} - I_{2o} = \frac{0}{2Z_0 \cos(\theta) + j(Z_{0e} + Z_{0o}) \sin(\theta)} = 0 \end{array}$$

Descomposición en modos Par e Impar

Las expresiones anteriores pueden ser re escritas de una manera mas comprensiva, si se define el factor de acoplamiento C como:

$$C = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}$$

Que junto con la condición de adaptación:

$$Z_0^2 = Z_{0e}Z_{0o}$$

Nos permite escribir las expresiones de tensiones y corrientes como:

Descomposición en modos Par e Impar

$$V_1 = 1$$

la tensión de entrada normalizada

$$V_2 = \frac{\sqrt{1 - C^2}}{\sqrt{1 - C^2} \cos(\theta) + j \sin(\theta)}$$

$$V_3 = \frac{jC \sin(\theta)}{\sqrt{1 - C^2} \cos(\theta) + j \sin(\theta)}$$

$$V_4 = 0$$

Tensión nula en el puerto 4.

Descomposición en modos Par e Impar

El factor de acoplamiento C se hace máximo si la longitud de la línea es igual a $\frac{\lambda_g}{4}$, es decir a un cuarto de longitud de onda dentro del sistema de guía de las líneas de transmisión acopadas. En este caso:

$$V_1 = 1$$

$$V_2 = -j\sqrt{1 - C^2}$$

|

$$V_3 = C$$

$$V_4 = 0$$

Descomposición en modos Par e Impar

De las expresiones anteriores es claro que el factor de acoplamiento C se hace máximo si la longitud de la línea es igual a $\frac{\lambda_g}{4}$, es decir a un cuarto de longitud de onda existente dentro del sistema de guía de las líneas de transmisión acopadas. En este caso:

$$V_1 = 1$$

$$| \quad V_2 = -j\sqrt{1 - C^2}$$

$$V_3 = C$$

$$V_4 = 0$$

Descomposición en modos Par e Impar

La ecuación para V_3 da la extensión (máxima) de acoplamiento de la banda media, C , expresada en términos de impedancias par e impar ya descriptas.

La ecuación para V_2 muestra que esta tensión transmitida depende del acoplamiento C , y está desfasada 90° con respecto a V_1 y, por lo tanto, también con respecto a V_3 .

Esta característica da lugar a los nombres que se utilizan a menudo para los acopladores basados en este principio de línea acoplada en paralelo, como acoplador híbrido o en cuadratura de 90° .

También importante es que no hay salida en el puerto 4 para una estructura teóricamente perfecta como la planteada, con niveles de adaptación y simetría ideales.

Descomposición en modos Par e Impar

Las principales características de respuesta de frecuencia, $|V_2(\theta)|$ y $|V_3(\theta)|$, pueden obtenerse de las ecuaciones anteriores, donde observamos que la longitud eléctrica θ está dada por:

$$\theta = \frac{2\pi l}{\lambda_g} = \frac{2\pi f l}{v}$$

Siendo v la velocidad de fase en el medio en cuestión. Dado que la longitud física l de la estructura es fija y suponemos que la velocidad de propagación v es constante, la ecuación anterior muestra que θ depende directamente de la frecuencia f .

Descomposición en modos Par e Impar

Para el diseño de un sistema de líneas de transmisión acopladas, se procura determinar las dimensiones físicas de alguna estructura de línea acoplada en paralelo que se ajuste a los requisitos.

Las dimensiones de la sección transversal, la separación de líneas y los diámetros o anchos de las líneas se pueden determinar dados Z_{0e} y Z_{0o} .

En el ¹diseño se necesita conocer Z_{0e} y Z_{0o} en función de los valores de Z_0 y C . Estas relaciones pueden obtenerse de las ecuaciones anteriormente vistas.

Descomposición en modos Par e Impar

El factor de acoplamiento C a menudo se expresa en decibelios. Si llamamos a este valor C_{dB} y recordamos que tenemos una relación de voltaje, entonces:

$$C_{dB} = 20 \log_{10} C = 20 \log_{10} \left| \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}} \right|$$

Combinando esto con la ecuación de adaptación del sistema acoplado:

$$Z_0^2 = Z_{0e} Z_{0o}$$

y para un determinado nivel deseado del acoplamiento C :

Descomposición en modos Par e Impar

$$Z_{0e} = Z_0 \sqrt{\frac{1 + 10^{C_{dB}/20}}{1 - 10^{C_{dB}/20}}}$$

$$Z_{0o} = Z_0 \sqrt{\frac{1 - 10^{C_{dB}/20}}{1 + 10^{C_{dB}/20}}}$$

|

Longitud de la región acoplada

Como se vio anteriormente, el acoplamiento es máximo cuando la longitud de la región acoplada es $\lambda_{gm}/4$, es decir un cuarto de longitud de onda del promedio de longitudes de onda para los modos par e impar.

Se procede entonces a determinar las longitudes de onda de cada modo, para luego calcular el promedio.

Como es sabido:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{v_p C} = v_p L$$

La última forma de esta expresión es la más conveniente de usar, ya que podemos razonablemente suponer que la inductancia L permanece constante independientemente de si el sustrato dieléctrico está presente o ausente.

Longitud de la región acoplada

Para el modo impar se tiene que:

$Z_{0o} = v_{po} L_o$ estructura con dieléctrico de constante ϵ_r

$Z_{01o} = c L_o$ estructura sin dieléctrico, constante $\epsilon_r = 1$

Entonces:

$$v_{po} = c \frac{Z_{0o}}{Z_{01o}}$$

|

De la misma manera para el modo par:

$$v_{pe} = c \frac{Z_{0e}}{Z_{01e}}$$

Longitud de la región acoplada

Las longitudes de onda son, entonces, para el modo impar:

$$\lambda_{go} = \frac{v_{po}}{f}$$

De la misma manera para el modo par:

$$\lambda_{ge} = \frac{v_{pe}}{f}$$

Luego:

$$\lambda_{go} = \frac{c}{f} \frac{Z_{0o}}{Z_{01o}}$$

$$\lambda_{ge} = \frac{c}{f} \frac{Z_{0e}}{Z_{01e}}$$

$$\frac{\lambda_{gm}}{4} = \frac{\lambda_{go} + \lambda_{ge}}{8} = \frac{c}{8f} \left(\frac{Z_{0o}}{Z_{01o}} + \frac{Z_{0e}}{Z_{01e}} \right)$$