Diagramas de Alambre

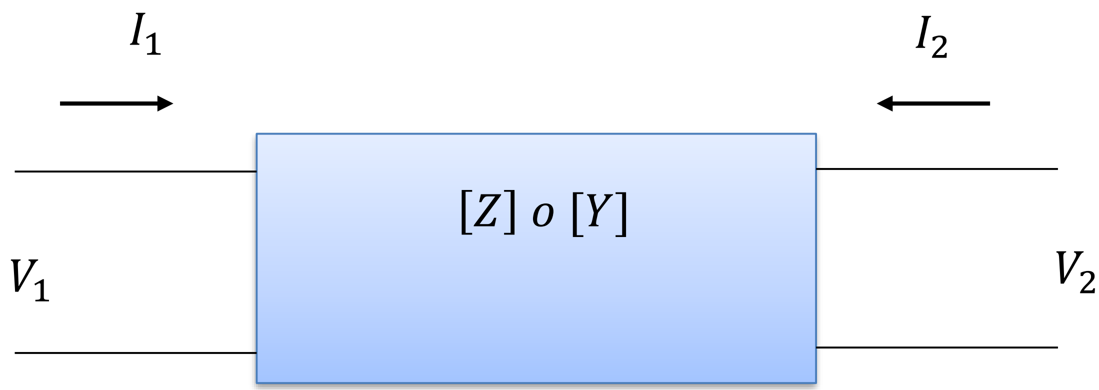
Las líneas de transmisión de tres conductores (cuatro con uno en común) pueden, como se ha visto, reducirse a la operación de dos modos de propagación, el par y el impar, que son independientes.

En este sentido pueden ser analizadas por descomposición en líneas de transmisión de dos conductores.

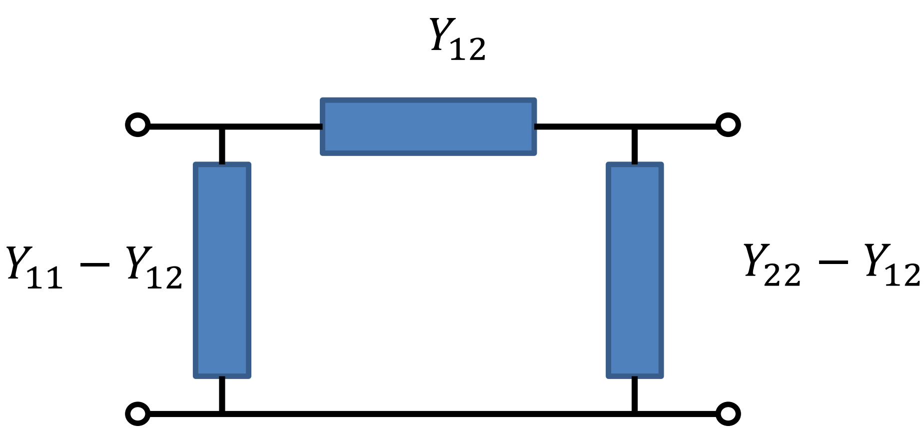
Se propone entonces hallar las matrices de impedancia o admitancia de acuerdo a la siguiente figura. A estos circuitos equivalentes se los conoce como diuagramas de alambre.

Diagramas de Alambre

El siguiente es un cuadripolo descripto en parámetros Z o Y:



Para el caso de la matriz admitancia se tiene que descomponer el sistema en un circuito como el de la figura:



Diagramas de Alambre

Las ecuaciones del sistema son:

$$i_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$
$$i_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

Si el cuadripolo es pasivo, simétrico y recíproco:

$$y_{11} = y_{22}$$
$$y_{12} = y_{21}$$

El cálculo se resume a la determinación de y_{11} y y_{21}:

$$y_{11} = \frac{i_1}{V_1} \qquad V_2 = 0$$

$$y_{21} = \frac{i_2}{V_1} \qquad V_2 = 0$$

Diagramas de Alambre

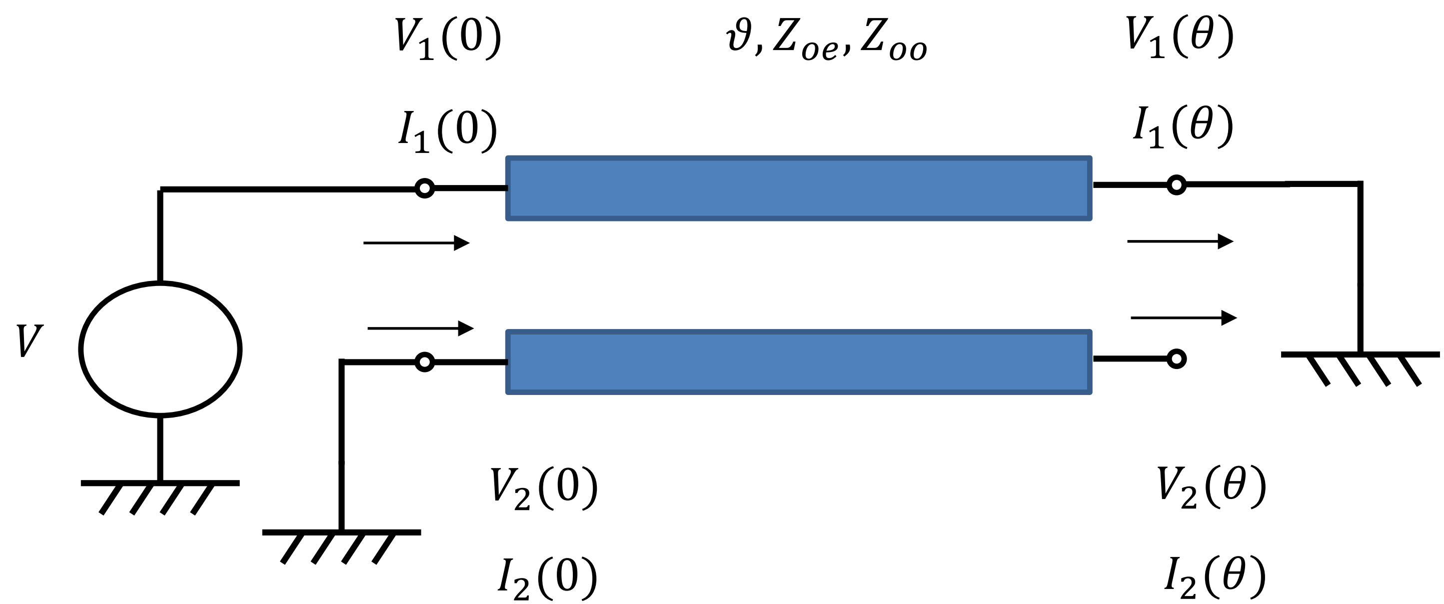
Aplicando esto a las ecuaciones de las líneas de transmisión:

$$V_1(x) = K_{11}e^{j\beta x} + K_{12}e^{-j\beta x}$$
$$V_2(x) = K_{21}e^{j\beta x} + K_{22}e^{-j\beta x}$$

$$I_1(x) = -\frac{\omega C_{11}}{\beta}\left(K_{11}e^{j\beta x} - K_{12}e^{-j\beta x}\right) + \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left(K_{21}e^{j\beta x} - K_{22}e^{-j\beta x}\right)$$
$$I_2(x) = \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left(K_{11}e^{j\beta x} - K_{12}e^{-j\beta x}\right) - \frac{\omega C_{22}}{\beta}\left(K_{21}e^{j\beta x} - K_{22}e^{-j\beta x}\right)$$

Diagramas de Alambre. Ejemplo

Calcule el cuadripolo Y equivalente para el sistema acoplado de la figura, que es una



Diagramas de Alambre

De acuerdo a la condición de contorno del generador y de que $V_2(\theta) = 0$:

$$V_1(0) = V$$
$$V_1(\theta) = 0$$
$$V_2(0) = 0$$
$$V_2(\theta) = 0$$

$$K_{11} + K_{12} = V$$
$$K_{21} + K_{22} = 0$$
$$K_{11}e^{j\theta} + K_{12}e^{-j\theta} = 0$$
$$K_{21}e^{j\theta} + K_{22}e^{-j\theta} = 0$$

Diagramas de Alambre

Luego:

$K_{21} = K_{22} = 0;\ K_{11} = \frac{V}{1-e^{j2\theta}},\ K_{12} = \frac{-e^{j2\theta}V}{1-e^{j2\theta}}$

$$I_1(0) = -\frac{\omega C_{11}}{\beta}\left(\frac{V}{1-e^{j2\theta}} - \frac{-e^{j2\theta}V}{1-e^{j2\theta}}\right)$$

$$I_1(0) = -\frac{\omega C_{11}V}{\beta}\left(\frac{1+e^{j2\theta}}{1-e^{j2\theta}}\right) = -\frac{\omega C_{11}V}{\beta}\frac{2\cos(\theta)}{\left(-j2sen(\theta)\right)}$$

$$= -j\frac{\omega C_{11}V}{\beta}cotg(\theta)$$

$$y_{11} = \frac{i_1}{V_1}\bigg|_{V_2=0} = \frac{I_1(0)}{V} = -j\frac{\omega C_{11}}{\beta}cotg(\theta)$$

$$y_{11} = -j\left(\frac{Y_{oe}+Y_{oo}}{2}\right)cotg(\theta)$$

Diagramas de Alambre

$$I_2(\theta) = \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left(K_{11}e^{j\theta} - K_{12}e^{-j\theta}\right) =$$

$$I_2(\theta) = \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left(\frac{V}{1-e^{j2\theta}}e^{j\theta} + \frac{e^{j2\theta}V}{1-e^{j2\theta}}e^{-j\theta}\right) =$$

$$I_2(\theta) = \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left(\frac{2V}{1-e^{j2\theta}}e^{j\theta}\right) =$$

$$I_2(\theta) = \frac{\omega C_{12}V}{\beta}\left(\frac{2}{e^{-j\theta} - e^{j\theta}}\right) =$$

$$I_2(\theta) = \frac{\omega C_{12}V}{\beta}\left(\frac{2}{-2jsen(\theta)}\right) = -j\frac{\omega C_{12}V}{\beta}$$

Diagramas de Alambre

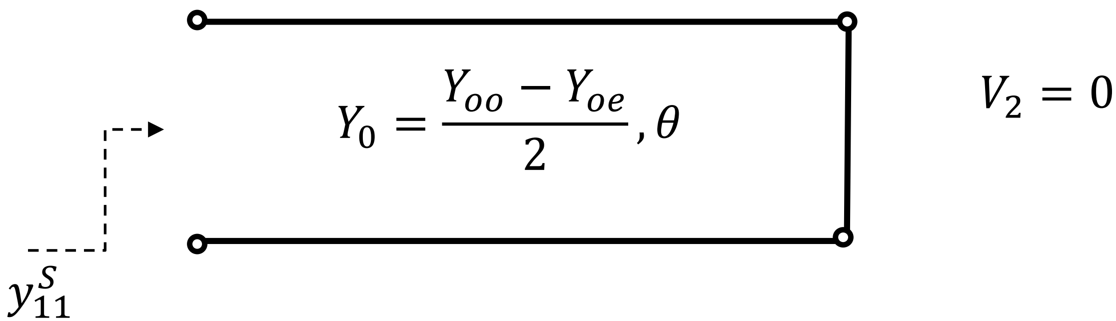
$$I_2(\theta) = \frac{\omega C_{12} V}{\beta}\left(\frac{2}{-2jsen(\theta)}\right) = -j\,\frac{\omega C_{12} V}{\beta}\frac{1}{sen(\theta)}$$

$$y_{21} = \frac{i_2}{V_1}\bigg|_{V_2=0} = \frac{I_2(\theta)}{V} = -j\,\frac{\omega C_{12}}{\beta}\frac{1}{sen(\theta)} =$$

$$y_{21} = -j\left(\frac{Y_{oo} - Y_{oe}}{2}\right)\frac{1}{sen(\theta)}$$

El parámetro y_{21} es la transferencia de una línea de admitancia característica $\frac{Y_{oo}-Y_{oe}}{2}$. El parámetro y_{11} ya calculado no puede obtenerse del circuito equivalente hasta ahora definido, que es una línea de transmisión, a la cual debe agregarse una línea en paraleo que permita ajustar este parámetro que se mide haciendo $V_2 = 0$:

Diagramas de Alambre



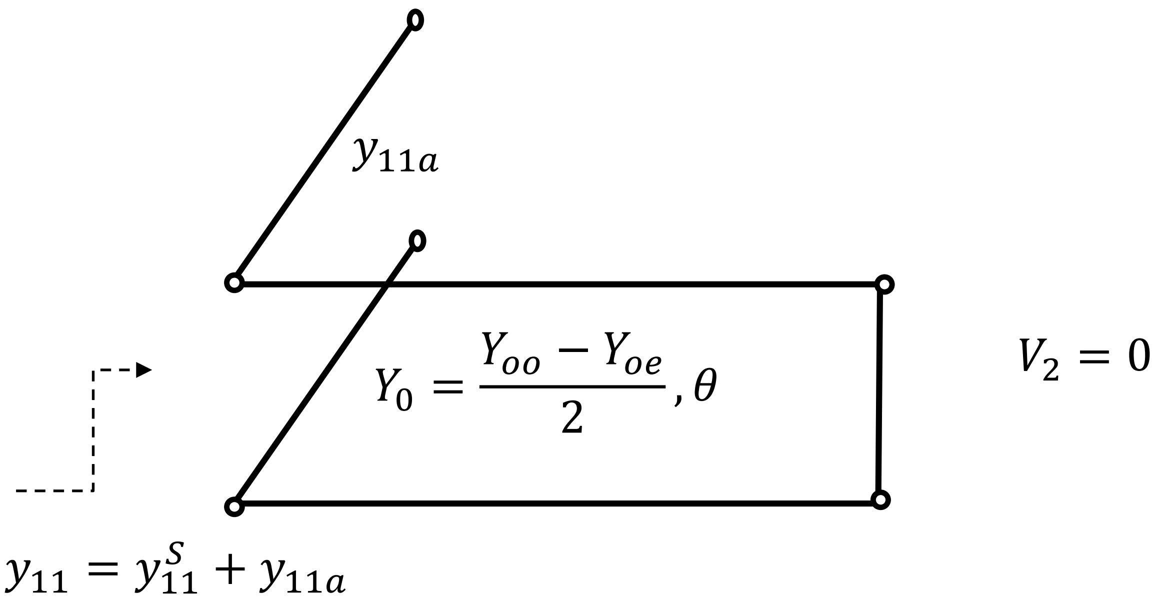
$$y_{11}^S = -\mathrm{j}\left(\frac{Y_{oo} - Y_{oe}}{2}\right) cotg(\theta)$$

Para lograr el valor del parámetro

$$y_{11} = -j\left(\frac{Y_{oe} + Y_{oo}}{2}\right) cotg(\theta)$$

Se recurre a la conexión de un taco en paralelo, cuyas características se determinan en función de lo deseado

Diagramas de Alambre

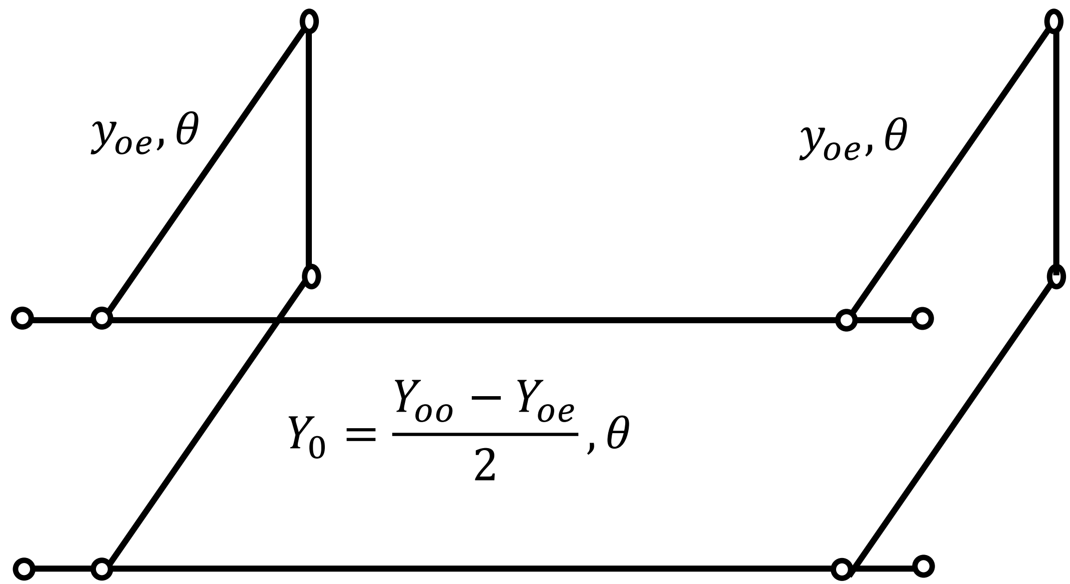


Se calcula la magnitud del taco en paralelo:

$$y_{11a} = y_{11} - y_{11}^S = -j\left(\frac{Y_{oe} + Y_{oo}}{2}\right)cotg(\theta) + \mathrm{j}\left(\frac{Y_{oo} - Y_{oe}}{2}\right)cotg(\theta)$$

$$y_{11a} = -jY_{oe}cotg(\theta)$$

Diagramas de Alambre



Finalmente y considerando la simetría del caso, de forma que $y_{11} = y_{22}$, el circuito equivalente es el que se observa en la figura. El valor de admitancia de los tacos agregados define su condición como tacos cortocircuitados.

Diagramas de Alambre

Como se observa, el circuito equivalente del esquema estudiado puede actuar como un filtro. Si la longitud del sistema de líneas acopladas se ajusta a un valor de un cuarto de longitud de onda, $\lambda/4$, es decir $\theta = \pi/2$, los tacos en paralelo actúan como resonadores y el tramo de línea en serie como inversor de impedancia.

De todas maneras, la diferencia respecto del caso ideal es que las partes del circuito deben ser linealizados, es decir que la aproximación es válida solo en un entorno de la frecuencia central, que es algo también a considerar respecto a que el tramo serie actuaría como inversor también en un entorno frecuencial respecto a la frecuencia central.

Diagramas de Alambre

Se procede entonces a la linealización:

La admitancia de los resonadores en paralelo es:

$$B = -Y_{oe} cotg(\theta)$$

Si $\theta = \pi/2$, hay resonancia:

$$B = 0$$

Calculando la derivada $dB/d\omega$

$$dB/d\theta = \frac{Y_{oe}}{sen^2(\theta)}$$

$$d\theta/d\omega = \frac{d(\omega L_e/v)}{d\omega} = \frac{L_e}{v} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

Y

Diagramas de Alambre

Siendo L_e la longitud eléctrica de la línea y v la velocidad de fase, y cumpliéndose que $\omega_0/v = \pi/2$:

$$dB/d\omega = \frac{Y_{oe}\pi}{2\omega_0}$$

Por lo que el modelo linealizado es:

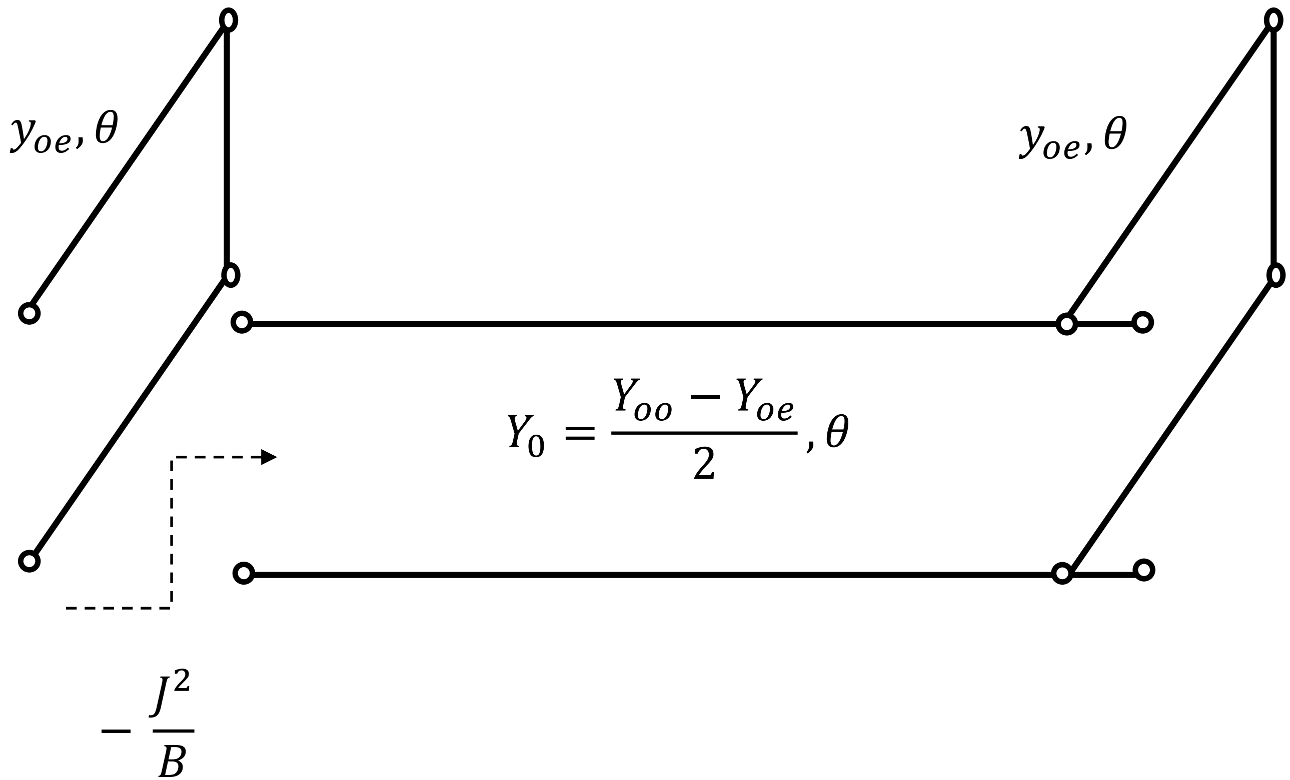
$$B = \frac{Y_{oe}\pi(\omega - \omega_0)}{2\omega_0}$$

Y el factor de reactancia es:

$$b = \frac{Y_{oe}\pi}{4}$$

Diagramas de Alambre

Para determinar los factores K aplicamos el método ya utilizado:



Teniendo que cumplirse que:

Diagramas de Alambre

$$B = \frac{Y_{oe}\pi(\omega - \omega_0)}{2\omega_0} = \frac{J^2}{\frac{Y_{oe}\pi(\omega - \omega_0)}{2\omega_0}}$$

$$\pm J = \frac{Y_{oe}\pi(\omega - \omega_0)}{2\omega_0}$$

$$(\omega - \omega_0) = \pm\frac{J2\omega_0}{Y_{oe}\pi}$$

$$\delta\omega = \frac{4J\omega_0}{Y_{oe}\pi}$$

Pero

$$K = \frac{\delta\omega}{\omega_0}$$

Diagramas de Alambre

$$K = \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{4J}{Y_{oe}\pi}$$

Y

$$J = \frac{Y_{oo} - Y_{oe}}{2}$$

O bien:

$$K = \frac{4C_{12}}{\pi(C_{11} - C_{12})}$$

Si las líneas no fueran simétricas:

$$K = \frac{4C_{12}}{\pi\sqrt{(C_{11} - C_{12})(C_{22} - C_{12})}}$$

Diagramas de Alambre

El factor K es el factor desnormalizado, y se encuentra relacionado co0n el factor k normalizado, que se obtiene de las tablas ya presentadas, como:

$$K = \frac{\mathrm{KB_w}}{f_0}$$

Con estas consideraciones entonces el diseño de un filtro parte del conocimiento de los factores normalizados k, que llevan al conocimiento de los desnormalizados K, que llevan al conocimiento de la estructura acoplada para determinar los valores C_{11} y C_{12}, relacionados con las capacidades de una estructura como la del microstrip por ejemplo.