Líneas de Transmisión acopladas

Una de las estructuras mas utilizadas en el diseño de dispositivos y partes de un sistema de microondas es el de las líneas de transmisión de tres conductores, que consideraremos inicialmente sin pérdidas.

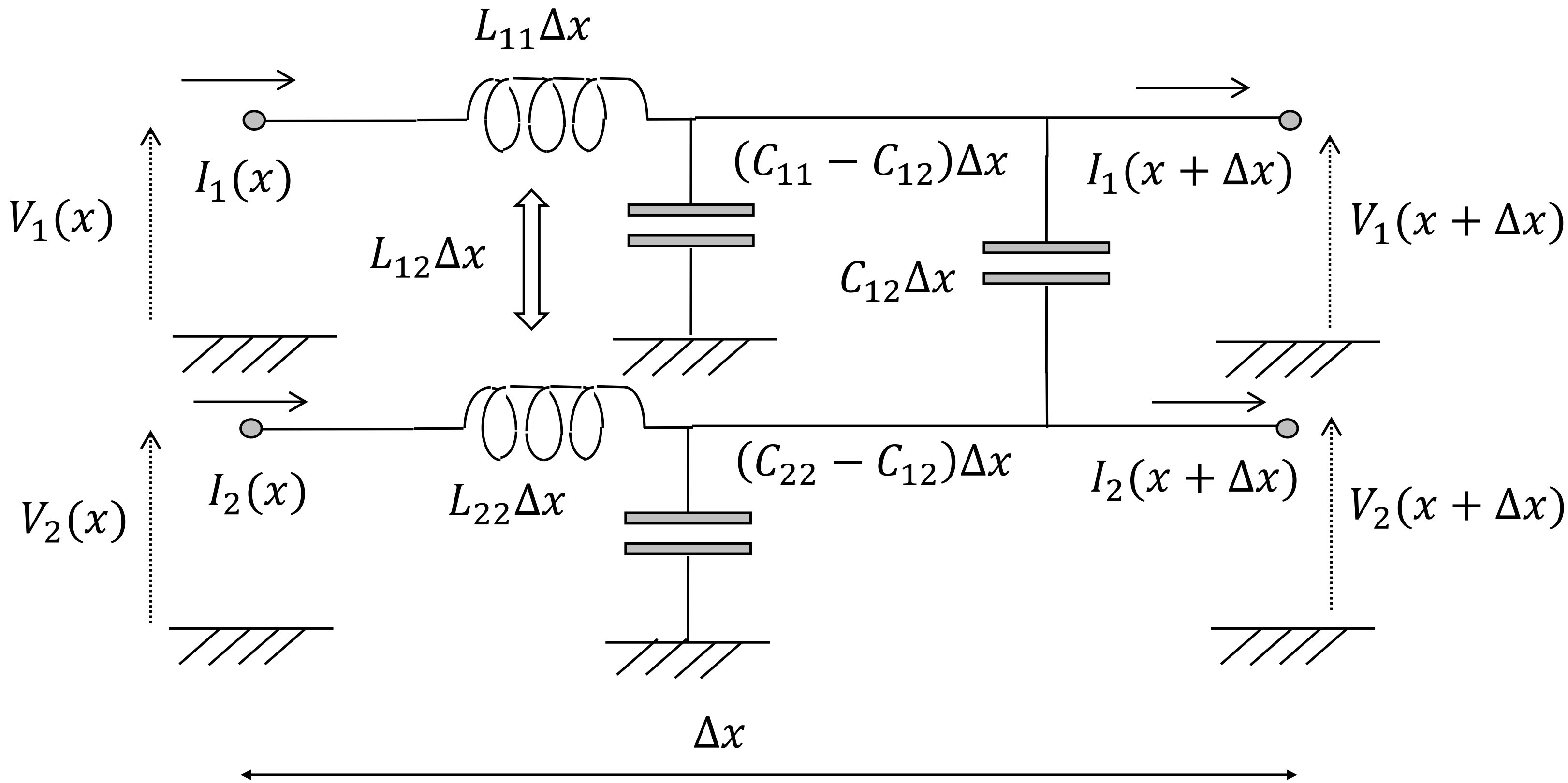
Esta estructura consiste de dos líneas de transmisión que presentan acoplamiento electromagnético mutuo debido a la proximidad entre las mismas, cuyo grado de acoplamiento es parte del diseño a realizar.

El análisis de esta estructura puede hacerse recurriendo al circuito equivalente de un tramo diferencial de longitud de las líneas, como puede verse en la siguiente figura.

Puede verse que al considerar líneas de transmisión ideales los componentes resistivos del circuito equivalente no se tienen en cuenta, pero por otro lado, sí se consideran los acoplamientos de tipo eléctrico, en la forma de una capacidad mutua, y magnético, en la forma de inductancia mutua.

Líneas de Transmisión acopladas

El circuito equivalente de dos líneas de transmisión acopladas se observa en la figura, que representa un tramo diferencial Δx. Las líneas poseen un acoplamiento electromagnético con capacidades e inductancias mutuas simétricas.



Líneas de Transmisión acopladas

Suponiendo una excitación de tipo sinusoidal para la estructura:

$$V_i(x,t) = V_i(x)e^{j\omega t}$$
$$I_i(x,t) = I_i(x)e^{j\omega t}$$

Del circuito equivalente podemos decir que, para la línea de transmisión 1:

$V_1(x+\Delta x,t) = V_1(x,t) + \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x}\Delta x$ y también:

$$V_1(x,t) + \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x}\Delta x - V_1(x,t) = -L_{11}\Delta x\frac{\partial I_1(x,t)}{\partial t} - L_{12}\Delta x\frac{\partial I_2(x,t)}{\partial t}$$
$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial x}\Delta x + L_{11}\Delta x\frac{\partial I_1(x,t)}{\partial t} + L_{12}\Delta x\frac{\partial I_2(x,t)}{\partial t} = 0$$

Líneas de Transmisión acopladas

$$\frac{\partial\left(V_1(x)e^{j\omega t}\right)}{\partial x}\Delta x + L_{11}\Delta x\frac{\partial\left(I_1(x)e^{j\omega t}\right)}{\partial t} + L_{12}\Delta x\frac{\partial\left(I_2(x)e^{j\omega t}\right)}{\partial t} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{dV_1(x)}{dx} + j\omega L_{11}I_1(x) + j\omega L_{12}I_2(x) = 0$$

De la misma manera para la segunda línea de transmisión:

$$\frac{dV_2(x)}{dx} + j\omega L_{22}I_2(x) + j\omega L_{12}I_1(x) = 0$$

Las otras ecuaciones que se deducen del circuito equivalente tienen que ver con las corrientes existentes:

$$I_1(x,t) + \frac{\partial I_1(x,t)}{\partial x}\Delta x - I_1(x,t) = -C_{11}\Delta x\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} - C_{12}\Delta x\frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I_1(x,t)}{\partial x}\Delta x + C_{11}\Delta x\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + C_{12}\Delta x\frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t} = 0$$

Líneas de Transmisión acopladas

$$\frac{dI_1(x)}{dx} + j\omega C_{11}V_1(x) + j\omega C_{12}V_2(x) = 0$$

De la misma manera para la segunda línea de transmisión:

$$\frac{dI_2(x)}{dx} + j\omega C_{11}V_2(x) + j\omega C_{12}V_1(x) = 0$$

Este conjunto de 4 ecuaciones puede ser resuelto por derivación cruzada en cada expresión, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dV_1(x)}{dx} + j\omega L_{11}I_1(x) + j\omega L_{12}I_2(x)\right) = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dV_2(x)}{dx} + j\omega L_{22}I_2(x) + j\omega L_{12}I_1(x)\right) = 0$$

Líneas de Transmisión acopladas

$$\frac{d^2V_1(x)}{dx^2} + j\omega L_{11}\frac{dI_1(x)}{dx} + j\omega L_{12}\frac{dI_2(x)}{dx} = 0$$
$$\frac{d^2V_2(x)}{dx^2} + j\omega L_{22}\frac{dI_2(x)}{dx} + j\omega L_{12}\frac{dI_1(x)}{dx} = 0$$

Y remplazando

$$-\frac{d^2V_1(x)}{dx^2} = A_{11}V_1(x) + A_{12}V_2(x)$$
$$-\frac{d^2V_2(x)}{dx^2} = A_{21}V_1(x) + A_{22}V_2(x)$$

Siendo:

$$A_{11} = \omega^2[L_{11}C_{11} - L_{12}C_{12}]$$

$$A_{12} = \omega^2[L_{12}C_{22} - L_{12}C_{12}]$$

$$A_{21} = \omega^2[L_{12}C_{11} - L_{22}C_{12}]$$

$$A_{22} = \omega^2[L_{22}C_{22} - L_{12}C_{12}]$$

Líneas de Transmisión acopladas

Simplificando la notación:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{d^2}{dx^2} \\ -\dfrac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

O bien:

$$-\frac{d^2}{dx^2}[V] = [A][V]$$

Generando dos tensiones que sean combinación lineal de las existentes:

$$V_1^{\#} = B_{11}V_1 + B_{12}V_2$$
$$V_2^{\#} = B_{21}V_1 + B_{22}V_2$$

Luego:

$$[V^{\#}] = [B][V]$$

Líneas de Transmisión acopladas

Si la matriz B tiene inversa:

$$[V] = [B]^{-1}[V^{\#}]$$

Derivando

$$-\frac{d^2}{dx^2}[V] = [B]^{-1}\left\{-\frac{d^2}{dx^2}[V^{\#}]\right\}$$

Y combinando con:

$$-\frac{d^2}{dx^2}[V] = [A][V]$$

$$[B]^{-1}\left\{-\frac{d^2}{dx^2}[V^{\#}]\right\} = [A][B]^{-1}\,[V^{\#}]$$

Líneas de Transmisión acopladas

Premultiplicando por $[B]$

$$-\frac{d^2}{dx^2}[V^{\#}] = [B][A][B]^{-1}\ [V^{\#}]$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}[V^{\#}] = [A^{\#}][V^{\#}]$$

Donde:

$$[A^{\#}] = [B][A][B]^{-1}$$

La matriz $[B]$ se puede elegir de manera que $[A^{\#}]$ sea diagonal:

$$[A^{\#}] = \begin{bmatrix} {A_{11}}^{\#} & 0 \\ 0 & {A_{22}}^{\#} \end{bmatrix}$$

Líneas de Transmisión acopladas

Permitiendo entonces resolver el problema como dos ecuaciones independientes:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[{V_1}^{\#}\right] + {A_{11}}^{\#}\left[{V_1}^{\#}\right] = 0$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left[{V_2}^{\#}\right] + {A_{22}}^{\#}\left[{V_2}^{\#}\right] = 0$$

Las soluciones a estas ecuaciones so los llamados modos normales y estos modos son independientes.

Líneas de Transmisión acopladas

$$V_1{}^{\#} = K_{11}{}^{\#} e^{j\beta_1 x} + K_{12}{}^{\#} e^{-j\beta_1 x}$$
$$V_2{}^{\#} = K_{21}{}^{\#} e^{j\beta_2 x} + K_{22}{}^{\#} e^{-j\beta_2 x}$$

El modo de propagación es TEM e igual para ambas líneas:

$$V_1{}^{\#} = K_{11}{}^{\#} e^{j\beta x} + K_{12}{}^{\#} e^{-j\beta x}$$
$$V_2{}^{\#} = K_{21}{}^{\#} e^{j\beta x} + K_{22}{}^{\#} e^{-j\beta x}$$

Volviendo a la expresión:

$$[V] = [B]^{-1}[V^{\#}]$$

$$V_1 = K_{11} e^{j\beta x} + K_{12} e^{-j\beta x}$$
$$V_2 = K_{21} e^{j\beta x} + K_{22} e^{-j\beta x}$$

Líneas de Transmisión acopladas

Aplicando:

$$\frac{dI_1(x)}{dx} + j\omega C_{11} V_1(x) + j\omega C_{12} V_2(x) = 0$$

$$\frac{dI_2(x)}{dx} + j\omega C_{11} V_2(x) + j\omega C_{12} V_1(x) = 0$$

$$I_1(x) = -\frac{\omega C_{11}}{\beta}\left[K_{11}e^{j\beta x} - K_{12}e^{-j\beta x}\right] + \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left[K_{21}e^{j\beta x} - K_{22}e^{-j\beta x}\right]$$

$$I_2(x) = \frac{\omega C_{12}}{\beta}\left[K_{11}e^{j\beta x} - K_{12}e^{-j\beta x}\right] - \frac{\omega C_{22}}{\beta}\left[K_{21}e^{j\beta x} - K_{22}e^{-j\beta x}\right]$$

Líneas de Transmisión acopladas

La solución final al problema consiste en determinar las constantes K_{11}, K_{12}, K_{21} y K_{22}, que pueden definirse aplicando condiciones de contorno al sistema.

Dependiendo de la forma en que se ingresa la señal se habla de dos modos, el modo PAR, para el cual:

$$V_1(0) = V_2(0) = V$$

y el modo IMPAR, para el cual:

$$V_1(0) = -V_2(0) = V$$

Los cuales no son necesariamente independientes.

Como la onda incidente es, para el modo par:

$$V_1 = K_{12}e^{-j\beta x}$$
$$V_2 = K_{22}e^{-j\beta x}$$

Líneas de Transmisión acopladas

Siendo:

$$V_1(0) = V_2(0) = V$$
$$K_{12} = K_{22} = \mathrm{V}$$

Para las corrientes incidentes:

$$I_1(x) = \frac{\omega V}{\beta}[C_{11} - C_{12}]e^{-j\beta x}$$
$$I_2(x) = \frac{\omega V}{\beta}[C_{22} - C_{12}]e^{-j\beta x}$$

Líneas de Transmisión acopladas

Luego:

$$I_1(0) = \frac{\omega V}{\beta}[C_{11} - C_{12}]$$

$$I_2(0) = \frac{\omega V}{\beta}[C_{22} - C_{12}]$$

Se define la admitancia de modo par para cada nodo como:

$$Y_{oe}{}^{i} = \frac{I_i(0)}{V_i(0)}$$

$$Y_{oe}{}^{1} = \frac{I_1(0)}{V_1(0)} = \frac{\omega}{\beta}[C_{11} - C_{12}] = v[C_{11} - C_{12}]$$

$$Y_{oe}{}^{2} = \frac{I_2(0)}{V_2(0)} = \frac{\omega}{\beta}[C_{22} - C_{12}] = v[C_{22} - C_{12}]$$

Líneas de Transmisión acopladas

Como la onda incidente es, para el modo impar:

$$V_1 = K_{12}e^{-j\beta x}$$
$$V_2 = K_{22}e^{-j\beta x}$$

Siendo:

$$V_1(0) = -V_2(0) = -V$$
$$K_{12} = -K_{22} = -\mathrm{V}$$
$$I_1(0) = \frac{\omega V}{\beta}[C_{11} + C_{12}]$$
$$I_2(0) = \frac{\omega V}{\beta}[C_{22} + C_{12}]$$

Líneas de Transmisión acopladas

Se define la admitancia de modo impar para cada nodo como:

$$Y_{oo}{}^{i} = \frac{I_i(0)}{V_i(0)}$$

$$Y_{oo}{}^{1} = \frac{I_1(0)}{V_1(0)} = \frac{\omega}{\beta}[C_{11} + C_{12}] = v[C_{11} + C_{12}]$$

$$Y_{oo}{}^{2} = \frac{I_2(0)}{V_2(0)} = \frac{\omega}{\beta}[C_{22} + C_{12}] = v[C_{22} + C_{12}]$$