Acoplamiento

Una forma alternativa de describir filtros por tabla es hacer uso de lo que se conoce como factores de acoplamiento, definidos como:

$$k_i = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

Estos factores relacionan ramas adyacentes del filtro. En los extremos se define:

$$q_1 = g_0 g_1$$
$$q_n = g_n g_{n+1}$$

Estas descripción es equivalente a la anterior.

Tomando como ejemplo el caso del filtro Butterworth pasabajos $n = 4$:

Acoplamiento

q_1	k_{12}	k_{23}	k_{34}	q_4
0.7654	0.8509	0.5412	0.8409	0.7654

Despejando de las expresiones de los valores de capacidad e inductancia desnormalizados de los factores g:

$$g_i = \frac{2\pi f_c L_i}{R_L} \qquad i\ par$$

$$g_i = 2\pi f_c C_i R_L \quad i\ impar$$

$$g_i = \frac{R_G}{R_L}$$

Acoplamiento

$$k_{\mathrm{i,i+1}} = \frac{1}{2\pi f_c}\frac{1}{\sqrt{L_i C_{i+1}}} \quad i\ par$$

$$k_{\mathrm{i,i+1}} = \frac{1}{2\pi f_c}\frac{1}{\sqrt{C_i L_{i+1}}} \ i\ \mathrm{im}par$$

Para q_1 sería

$$q_1 = g_0 g_1 = 2\pi f_c R_G C_1$$

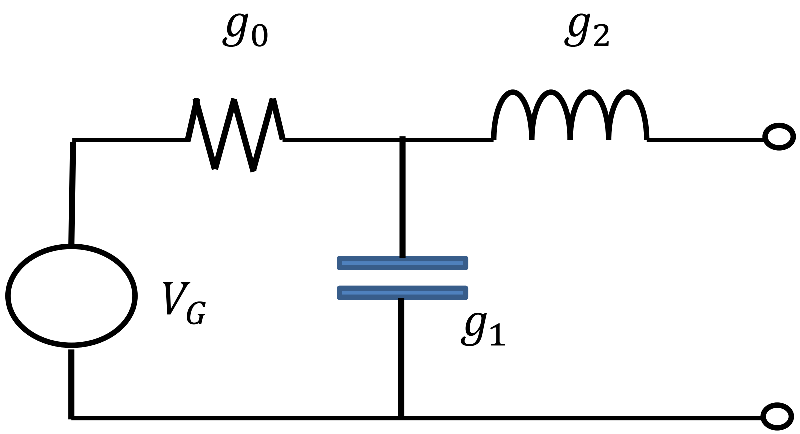
$$q_n = \frac{2\pi f_c L_n}{R_L}\ n\ par$$

$$q_n = 2\pi f_c R_L C_n \quad n\ impar$$

Se analiza que sucede con los valores de q_i y $k_{i,i+1}$ en la transformación pasabajos pasabanda.

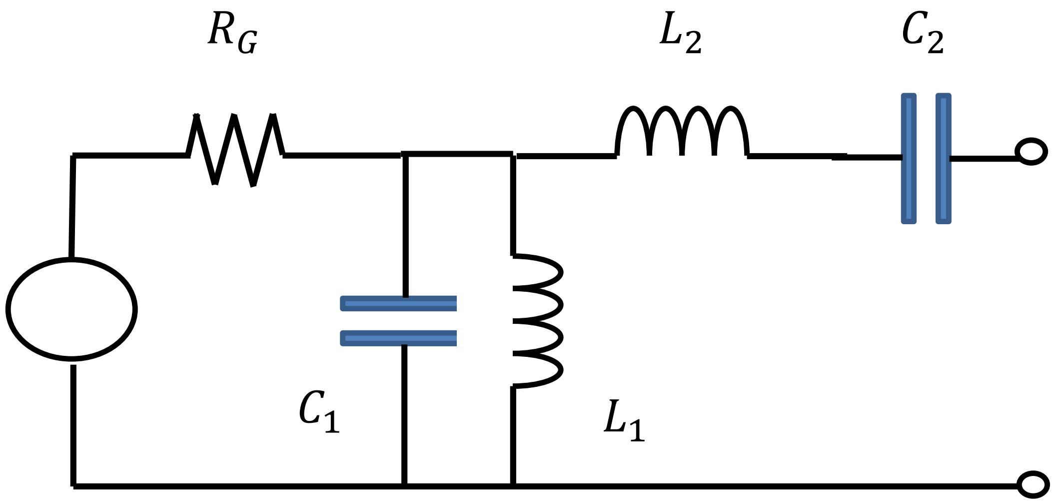
Acoplamiento

Del circuito normalizado pasabajos de la figura:



Se desnormaliza en impedancia y frecuencia y se produce el corrimiento a la frecuencia central f_0, identificando los componentes que resuenan con los del circuito pasabajos:

Acoplamiento



$$C_1 = \frac{g_1}{2\pi B_W R_L}$$

$$L_1 = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C_1} = \frac{B_W R_L}{2\pi {f_0}^2 g_1}$$

E igualmente con e resto de los componentes

Acoplamiento

El parámetro conocido como factor de calidad, se determina como:

$$Q_1 = \frac{R_G}{X_C} = g_0 R_L 2\pi f_0 C_1 = \frac{g_0 g_1 f_0}{B_w}$$

$$Q_1 = q_1 \frac{f_0}{B_w}$$

Los coeficientes de acoplamiento son entonces

$$k_{12} = \frac{1}{2\pi B_w} \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}}$$

Siendo

$$L_2 = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C_2}$$

Acoplamiento

$$k_{12} = \left(\frac{f_0}{B_w}\right)\sqrt{C_2 C_1}$$

Siendo

$$L_2 = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C_2}$$

Definiendo el coeficiente de acoplamiento desnormalizado como:

$$K_{12} = k_{12}\left(\frac{f_0}{B_w}\right)$$

$$K_{12} = \sqrt{C_2 C_1}$$

Acoplamiento

En general:

$$K_{\mathrm{i,i+1}} = \sqrt{C_{i+1}/C_i} = \sqrt{L_i/L_{i+1}} \quad i\,par$$

$$k_{\mathrm{i,i+1}} = \frac{C_i}{C_{i+1}} = \frac{L_{i+1}}{L_i} \quad i\ \mathrm{im}par$$

Inversores de Impedancia y Admitancia

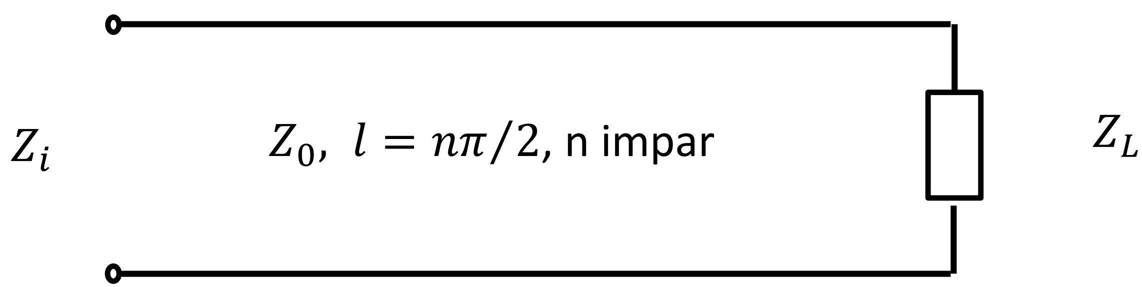
En general si bien es posible determinar los componentes de un dado filtro, en particular a altas frecuencias, como se vio en el ejemplo de un filtro pasabanda en $1\,GHz$, es necesario implementar en parámetros distribuidos.

En ese caso, y observando la topología de los filtros, se encuentra la necesidad de implementar resonadores serie y paralelo, que en algunos casos resulta difícil en la práctica,

Sería conveniente entonces contar con un solo tipo de resonador, y lograr la aparición del otro tipo de resonador por medio de los inversores de impedancia o admitancia.

Inversores de Impedancia y Admitancia

En el caso de los parámetros distribuidos, una línea de transmisión de una longitud número impar del cuartos de longitud de onda $\lambda/4$, actúa como inversor de impedancia:



En este circuito, se produce la inversión de impedancia:

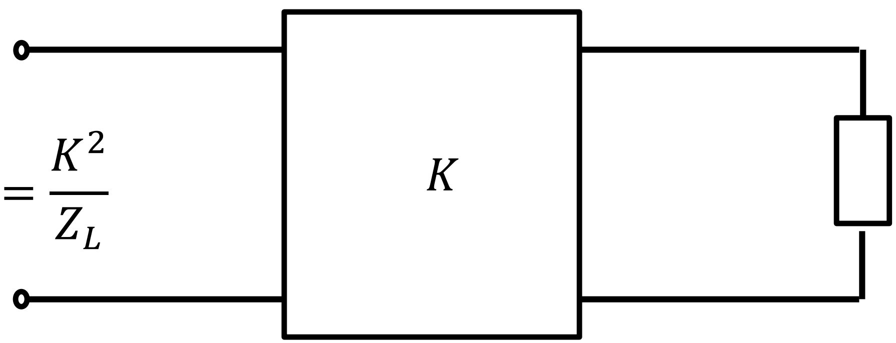
$$Z_i = \frac{{Z_0}^2}{Z_L}$$

Inversores de Impedancia y Admitancia

El efecto de inversión anterior es dependiente de la frecuencia. En el caso ideal en que una transferencia aparece como inversora independientemente de la frecuencia, se refiere al esquema idealizado de las figuras:

Inversor Impedancia

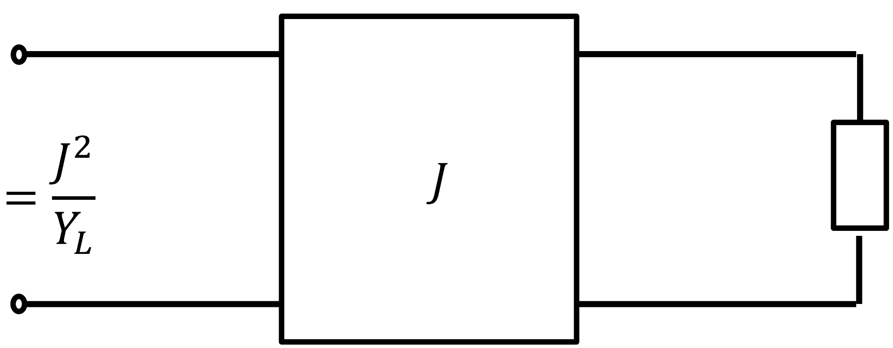
$$Z_i = \frac{K^2}{Z_L}$$



Z_L

Inversor Admitancia

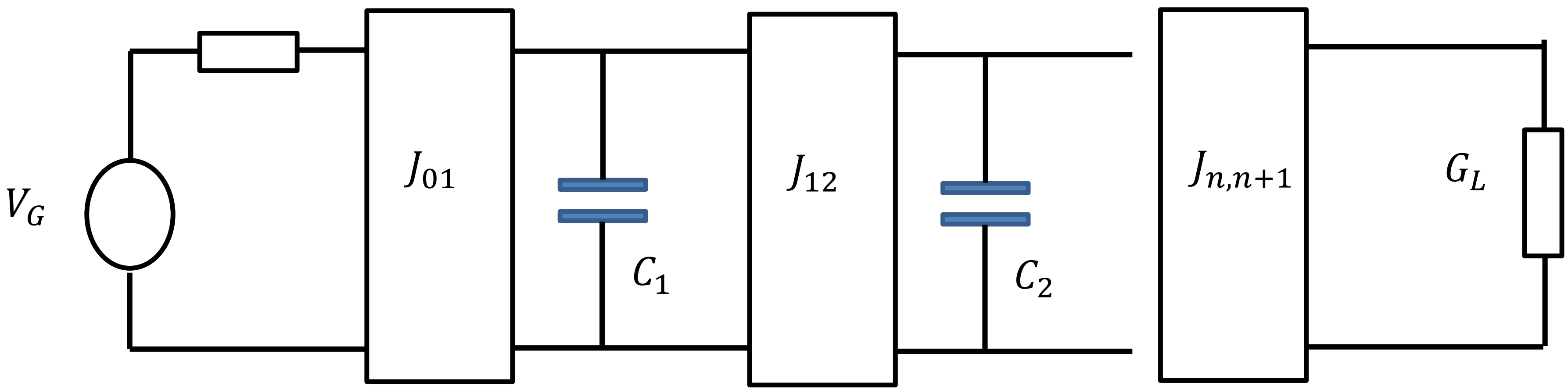
$$Y_i = \frac{J^2}{Y_L}$$



Y_L

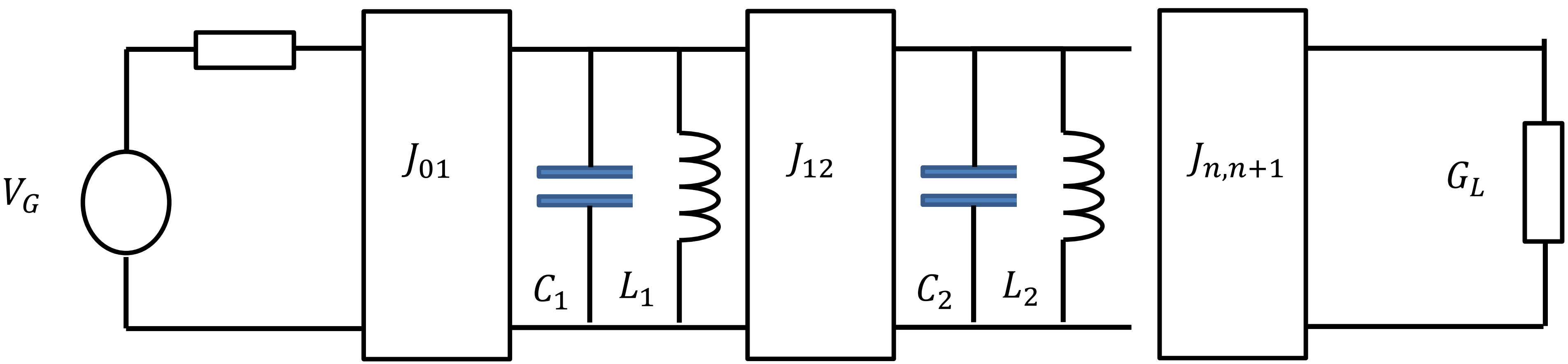
Inversores de Impedancia y Admitancia

De esa manera, se puede diseñar un filtro pásabajos con capacitores e inversores de admitancia:



Inversores de Impedancia y Admitancia

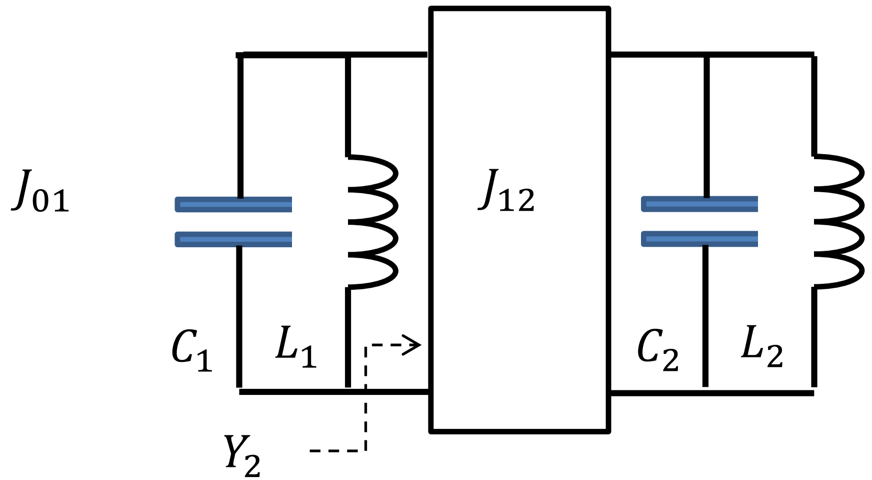
Igualmente para el caso de un filtro pasabanda con capacitores, inductancias e inversores de admitancia, se puede configurar una topología usando un solo tipo de resonador e inversores de impedancia/admitancia:



El efecto de inversión puede analizarse directamente sobre la configuración pasabanda

Inversores de Impedancia y Admitancia

Las frecuencias de resonancia se pueden determinar en base al siguiente circuito:



$$B_2 = Im\{Y_2\} = -\frac{J_{12}}{\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right)}$$

$$B_1 = Im\{Y_1\} = \omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1}$$

Inversores de Impedancia y Admitancia

Definiendo $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$

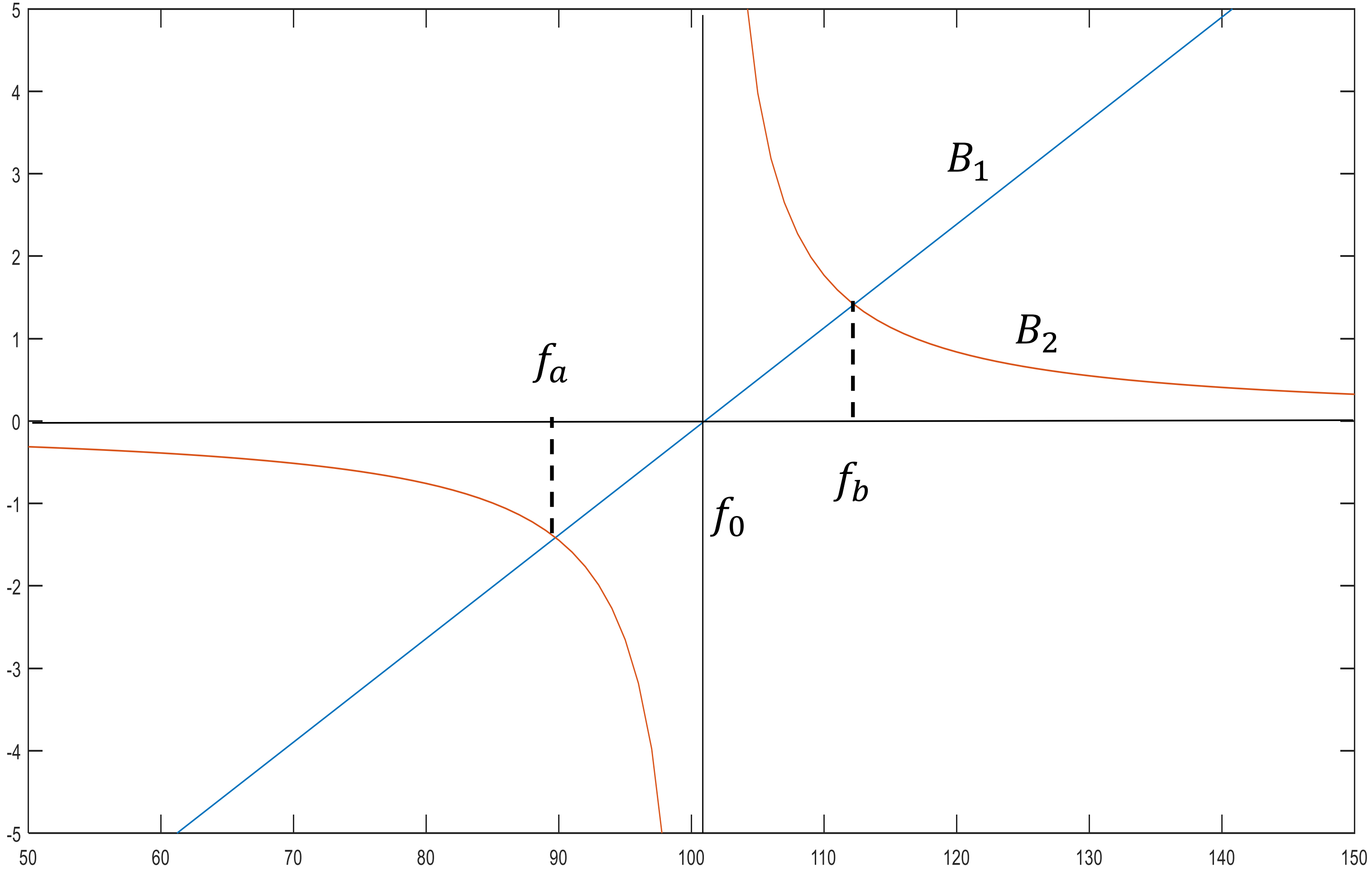
$$B_1 + B_2 = \frac{\Omega^2 - 1}{\omega L_1} - \frac{{J_{12}}^2 L_2}{\Omega^2 - 1} = 0$$

$$(\Omega^2 - 1)^2 = {J_{12}}^2 \Omega^2 {\omega_0}^2 L_1 L_2$$

Esta ecuación tiene como soluciones a las frecuencias f_ay f_b que están relacionadas con los coeficientes de acoplamiento desnormalizados:

$$K_{12} = \frac{f_a - f_b}{f_0} = \frac{J_{12}}{\omega_0}\sqrt{C_1 C_2}$$

Inversores de Impedancia y Admitancia



Inversores de Impedancia y Admitancia

El valor de los J se encuentra aplicando las expresiones:

$$J_{i,i+1} = K_{i,i+1}\omega_0\sqrt{C_i C_{i+1}}$$

Pero:

$$K_{i,i+1} = k_{i,i+1}\left(\frac{B_W}{f_0}\right)$$

Y

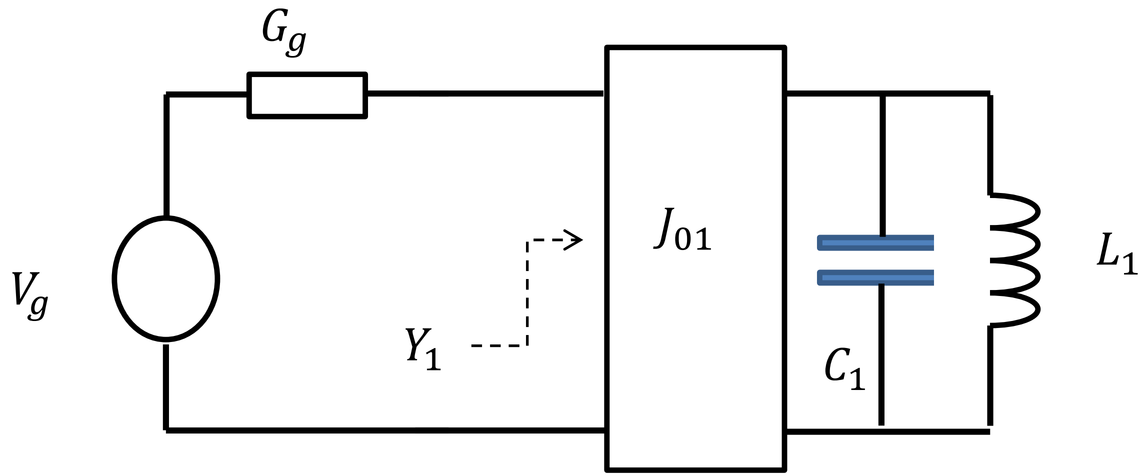
$$k_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

Reemplazando:

$$J_{i,i+1} = 2\pi B_W\sqrt{\frac{C_i C_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}$$

Inversores de Impedancia y Admitancia

Para el primer resonador



$$\frac{1}{R_g} = \frac{J_{01}^2}{G_g}$$

Inversores de Impedancia y Admitancia

Si el Q del primer resonador es:

$$Q_1 = \omega_0 R_g C_1 = \omega_0 C_1 \frac{G_g}{J_{01}^2}$$

Luego:

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\omega_0 C_1 G_g}{Q_1}}$$

Así, para el último resonador:

$$J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\omega_0 C_n G_L}{Q_n}}$$

Coeficientes de Reactancia y Susceptancia

Para el circuito resonante paralelo LC la susceptancia vale:

$$B = \omega C = \frac{1}{\omega L}$$

Y resuena a una frecuencia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Calculando la derivada de la susceptancia respecto de la frecuencia angular, evaluada a la frecuencia de resonancia ω_0 es:

$$\left.\frac{dB}{d\omega}\right|_{\omega = \omega_0} = 2C$$

Coeficientes de Reactancia y Susceptancia

Se define el coeficiente de susceptancia como:

$$b = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)\left(\frac{dB}{d\omega}\bigg|_{\omega = \omega_0}\right)$$

De la misma manera el coeficiente de reactancia es:

$$x = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)\left(\frac{dX}{d\omega}\bigg|_{\omega = \omega_0}\right)$$

Para los resonadores serie y paralelo estos factores valen:

$$b = \omega_0 C$$
$$x = \omega_0 L$$

Coeficientes de Reactancia y Susceptancia

Podemos escribir las expresiones de los coeficientes J en función de estos coeficientes:

$$J_{i,\,i+1} = \delta\sqrt{\frac{b_i b_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}$$

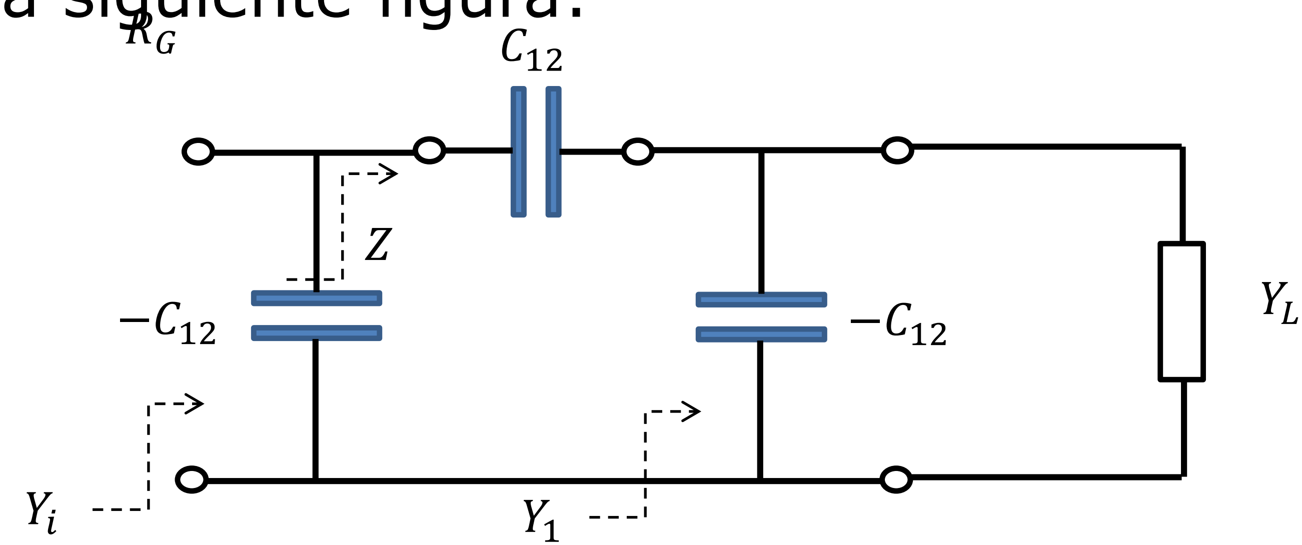
Con $\delta = \frac{B_w}{f_0}$ ancho de banda fraccional,

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\delta b_1 G_g}{g_0 g_1}}$$

$$J_{n\,n+1} = \sqrt{\frac{\delta b_n G_L}{g_n}}$$

Inversores de Impedancia

Un inversor de admitancia muy típico es el que constituye la siguiente figura:



$$Y_1 = -j\omega C_{12} + Y_L$$

$$Z = \frac{(j\omega C_{12}) + (-j\omega C_{12} + Y_L)}{(j\omega C_{12})(-j\omega C_{12} + Y_L)} = \frac{Y_L}{(j\omega C_{12})(-j\omega C_{12} + Y_L)}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{(j\omega C_{12})(-j\omega C_{12} + Y_L)}{Y_L}$$

Inversores de Impedancia

$$Y_i = -j\omega C_{12} + \frac{(j\omega C_{12})(-j\omega C_{12} + Y_L)}{Y_L}$$

$$Y_i = \frac{-j\omega C_{12} Y_L + j\omega C_{12} Y_L + \omega^2 C_{12}^2}{Y_L}$$

$$Y_i = \frac{\omega^2 C_{12}^2}{Y_L} = \frac{J^2}{Y_L}$$

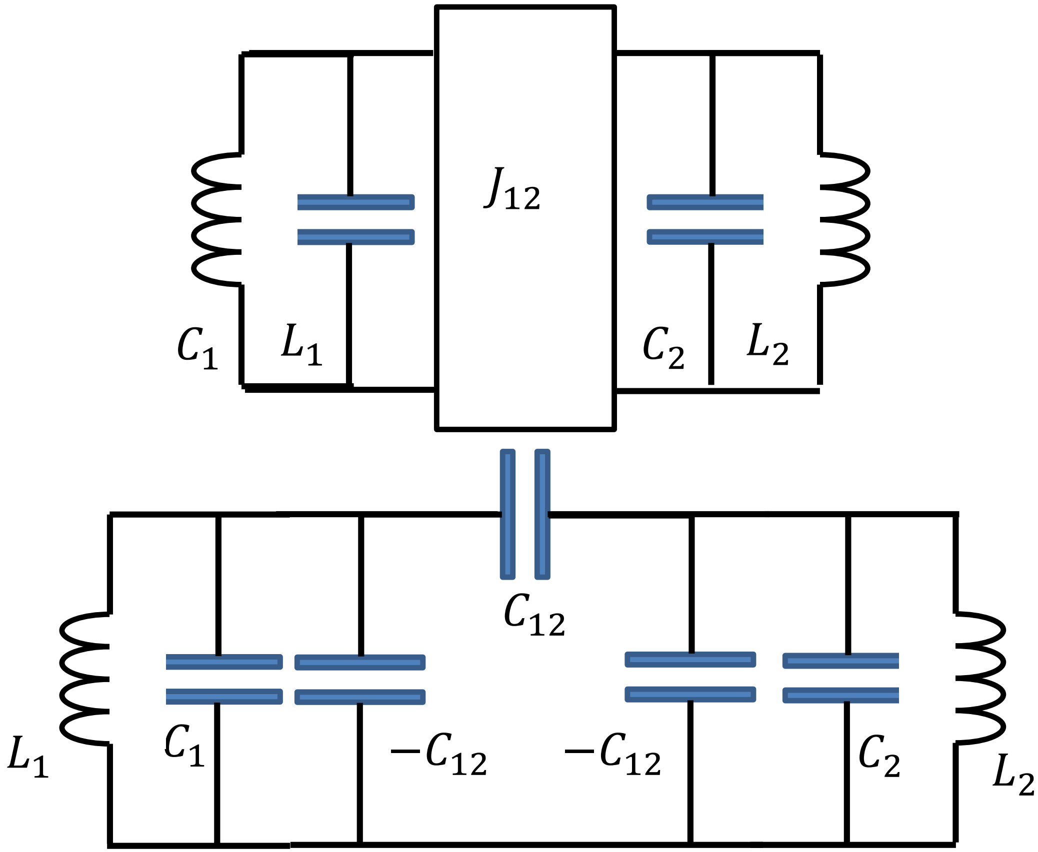
Luego:

$$J = \omega C_{12}$$

Si bien los inversores de impedancia o admitancia pueden utilizarse indistintamente, suele recurrirse a los de impedancia en circuitos serie, y a los de admitancia en circuitos paralelo.

Inversores de Impedancia y Admitancia

Así entonces en el circuito de resonancia paralelo el inversor puede ser implementado con el de admitancia recientemente visto



Inversores de Impedancia

La supuesta falta de sentido de un capacitor negativo adopta una forma realizable al ser descontado de un capacitor de magnitud mayor en paralelo, de modo que el valor total es la diferencia de ambas capacidades.

Se cumple que:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$C_1' = C_1 - C_{12}$$

$$C_2' = C_2 - C_{12}$$

Las susceptancias de los resonadores son.

Inversores de Impedancia

$$B_1 = \omega C_1' - \frac{1}{\omega L_1}$$
$$B_2 = \omega C_2' - \frac{1}{\omega L_2}$$

Luego:

$$B_i = \omega C_1' - \frac{1}{\omega L_1} + \frac{1}{-\frac{1}{\omega C_{12}} + \frac{1}{\left(\omega C_2' - \frac{1}{\omega L_2}\right)}}$$

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$$
$$C_1' = C_1 - C_{12}$$
$$C_2' = C_2 - C_{12}$$

Las suscentancias de los resonadores son

Inversores de Impedancia

Operando:

$$(1-\Omega^2)^2 = \frac{(\Omega^2 C_{12})^2}{C_1 C_2}$$

Despejando con una aproximación:

$$\Omega = 1 \pm \frac{C_{12}}{\sqrt{2C_1 C_2}}$$

De donde:

$$K_{12} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_1 C_2}}$$