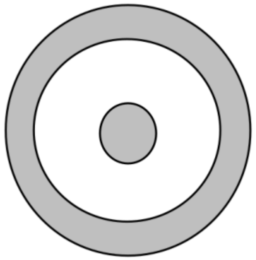
Líneas de Transmisión

Las líneas de transmisión son dispositivos destinados a conducir una onda electromagnética de manera controlada. En general se habla de sistemas de guías de onda, entre los cuales se incluyen los cables coaxiales, la línea bifilar, el par trenzado, la línea telefónica, como sistemas de transmisión de ondas TEM (Transverso Electro-Magnéticas) y las así llamadas guías de onda, que transmiten modos TE (Transverso-Eléctrico) y/o TM (Transverso-Magnético). Un caso particular de guías de onda es la fibra óptica.

En una propagación en modo TEM los campos eléctrico y magnético esta perpendiculares entre si, y forman una única terna de vectores.

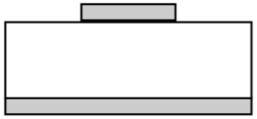
Un sistema cuyo corte transversal es de forma doblemente conexa, es capaz de transmitir ondas TEM. La línea bifilar y el cable coaxial por ejemplo, son sistemas de transmisión que propagan ondas TEM.

Introducción

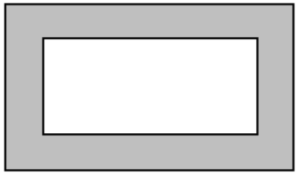


cable

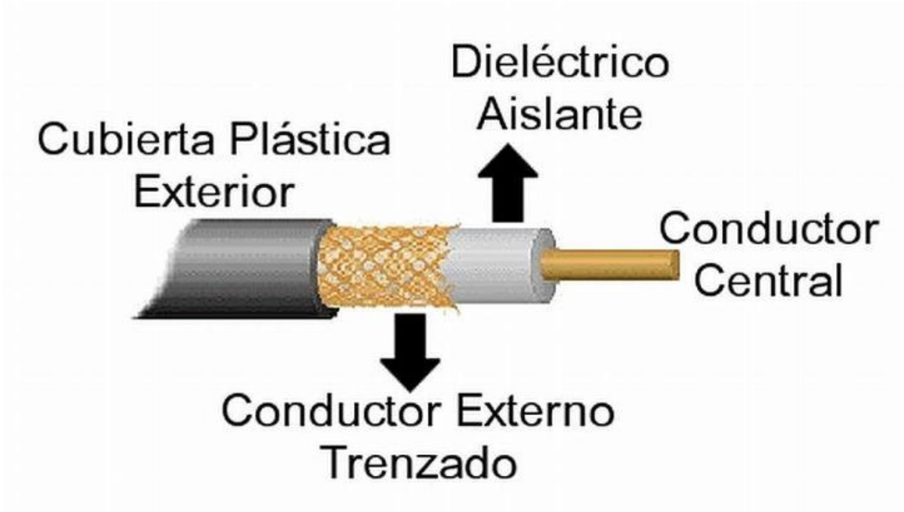
línea bifilar



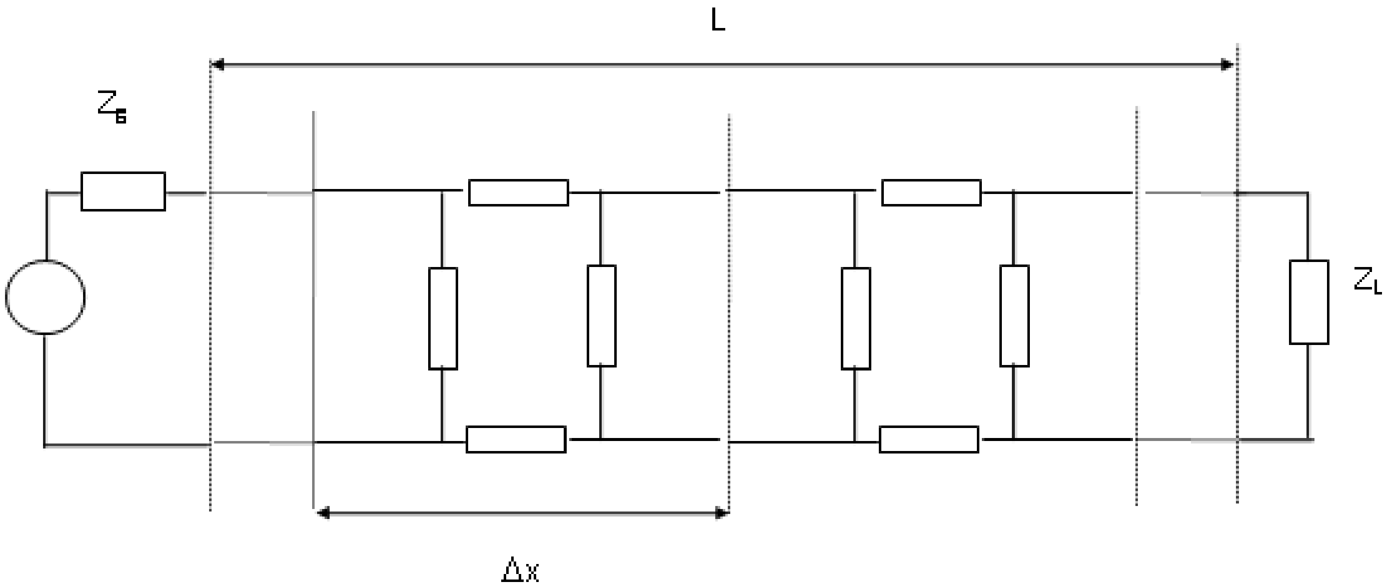
Microstrip



guía de onda rectangular

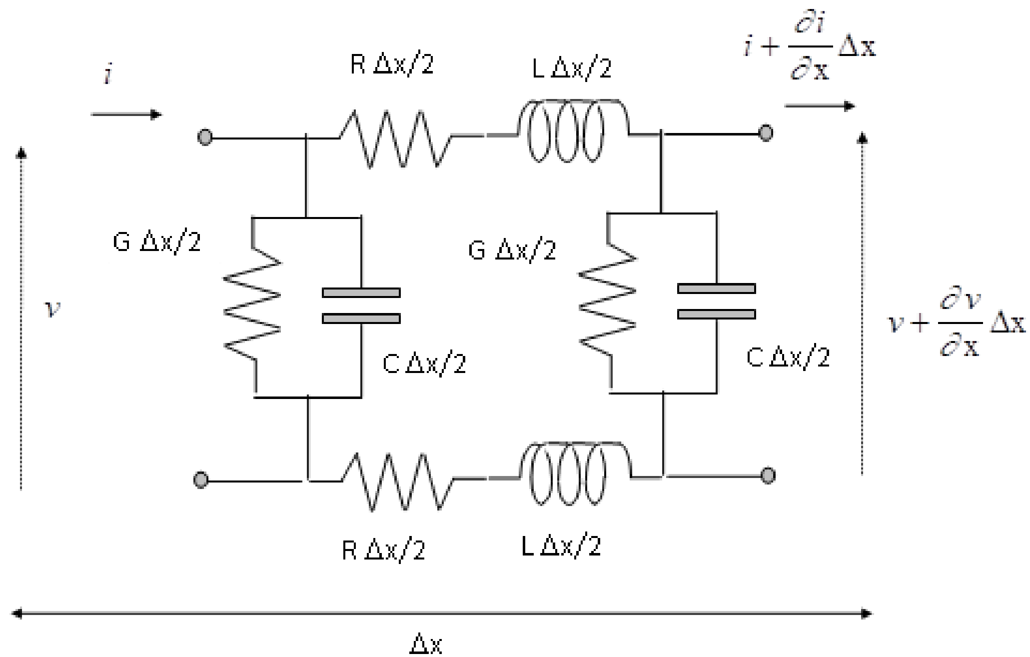


Líneas de Transmisión



La línea de transmisión como sistema distribuído de diferenciales de circuito

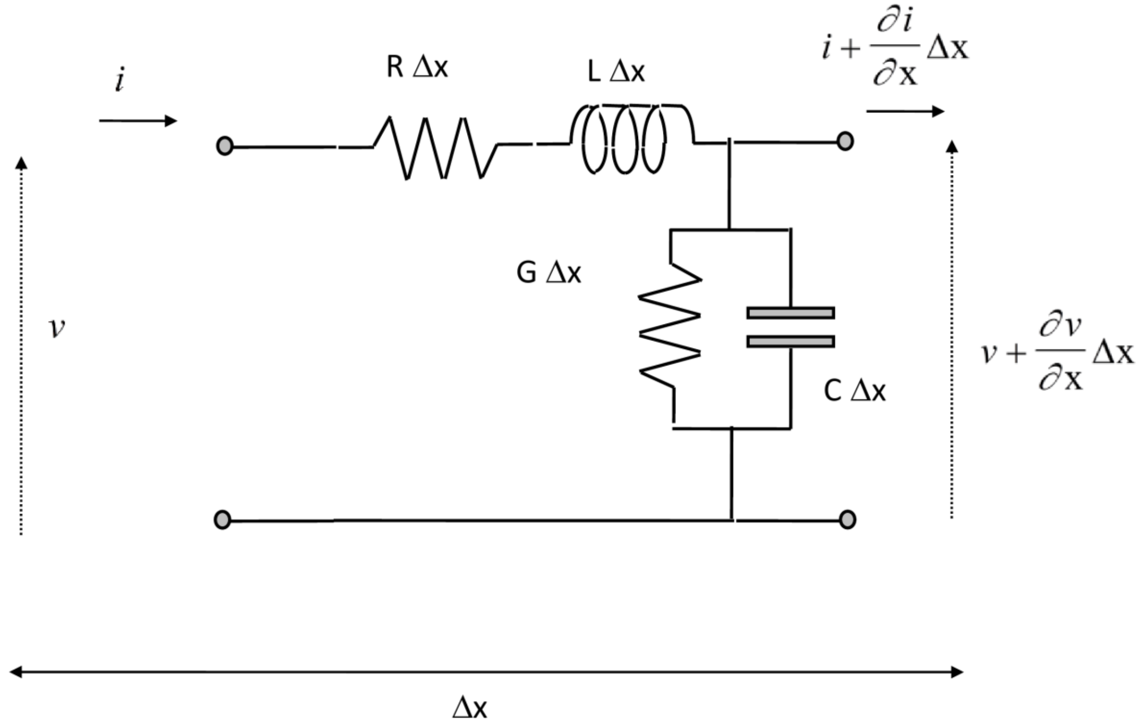
Líneas de Transmisión balanceada



Elemento diferencial de circuito para una LT. Modo Balanceado

El esquema circuital de la figura corresponde a un elemento diferencial de línea de transmisión, donde R, L, G y C son parámetros por unidad de longitud. Presentado de la forma que lo muestra la figura, el circuito corresponde mas bien a una línea de transmisión de tipo bifilar. En ella se presenta simetría respecto de los dos conductores que la componente. Este tipo de línea de transmisión se lo denomina de tipo balanceado.

Líneas de Transmisión desbalanceada



Elemento diferencial de circuito para una LT. Modo desbalanceado.

El cable coaxial sin embargo, tiene un conductor externo que hace las veces de blindaje frente a interferencias externas, y de reducción de las ocasionadas desde el sistema hacia fuera, que la da una característica no simétrica. El cable coaxial es típico caso de una línea desbalanceada.

Líneas de Transmisión. Ecuaciones

La teoría de circuitos puede aplicarse a este diferencial de línea de transmisión para obtener una relación entre sus variables. Se ha supuesto como consecuencia de la caída de tensión en la rama serie, y la derivación de corriente en la rama paralelo, que las variables v e i han cambiado en función de la posición, y lo han hecho como un crecimiento parcial de la función correspondiente en cada caso, que puede expresarse como una variación parcial en derivadas:

$$v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x - v = -R\Delta x.i - L\Delta x\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i + \frac{\partial i}{\partial x}\Delta x - i = -G\Delta x.v - C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}$$

Líneas de Transmisión. Ecuaciones

Las ecuaciones anteriores adoptan la forma:

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = R.\,i(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = Gv(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

Si se asume que la señal aplicada por el generador es de tipo senoidal, las tensiones y corrientes dentro de la línea serán de la forma:

$$v(x,t) = |V(x)|\cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(x,t) = |I(x)|\cos(\omega t + \varphi)$$

Y considerando la representación compleja de las mismas:

Líneas de Transmisión. Ecuaciones

$$v(x,t) = \mathrm{Re}\{|V(x)|e^{j(\omega t+\varphi_v)}\} = \mathrm{Re}\{V(x)e^{j\omega t}\}$$

$$i(x,t) = \mathrm{Re}\{|I(x)|e^{j(\omega t+\varphi_i)}\} = \mathrm{Re}\{I(x)e^{j\omega t}\}$$

Siendo entonces:

$$V(x) = |V(x)|e^{j(\varphi_v)}$$

$$I(x) = |I(x)|e^{j(\varphi_i)}$$

Los fasores tensión y corriente respectivamente. Reemplazando en las ecuaciones de línea:

$$-\frac{\partial(\mathrm{Re}\{V(x)e^{j\omega t}\})}{\partial x} = R.\mathrm{Re}\{I(x)e^{j\omega t}\} + L\frac{\partial(\mathrm{Re}\{I(x)e^{j\omega t}\})}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial(\mathrm{Re}\{I(x)e^{j\omega t}\})}{\partial x} = G.\mathrm{Re}\{V(x)e^{j\omega t}\} + C\frac{\partial(\mathrm{Re}\{V(x)e^{j\omega t}\})}{\partial t}$$

Líneas de Transmisión. Ecuaciones

Se obtienen expresiones en derivadas totales:

$$-\frac{dV(x)}{dx} = RI(x) + j\omega LI(x)$$
$$-\frac{dI(x)}{dx} = GI(x) + j\omega CV(x)$$

$$-\frac{dV(x)}{dx} = (R + j\omega L)I(x) = ZI(x)$$
$$-\frac{dI(x)}{dx} = (G + j\omega C)V(x) = YV(x)$$

Donde se ha denominado:

$$Z = (R + j\omega L)$$

$$Y = (G + j\omega C)$$

Líneas de Transmisión. Ecuaciones

Aplicando derivación sobre la correspondiente variable, se pueden obtener las ecuaciones de onda en la línea, expresadas en función de los fasores de tensión y corriente:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -Z\frac{dI(x)}{dx} = YZV(x) = \gamma^2V(x)$$

$$\frac{d^2I(x)}{dx^2} = -Z\frac{dV(x)}{dx} = YZI(x) = \gamma^2I(x)$$

La solución a estas ecuaciones viene dada por:

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

$$I(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x}$$

Donde:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

Ondas incidente y reflejada.

La constante de propagación es en general un numero complejo. Si la línea fuera sin pérdidas, la resistencia y conductancia por unidad de longitud, R y G, serian cero, por lo que tal constante se torna imaginaria pura. Este caso corresponde a una línea de transmisión ideal, que no provoca ningún tipo de atenuación.

Sin embargo, el caso real es que toda línea de transmisión produce pérdidas de tipo óhmico en la resistencia asociada al conductor que las constituye, y pérdidas por calor, registradas en el dieléctrico base de la línea. α es la constante de atenuación, mientras que β es la constante de fase.

Existe entonces un termino que se identifica con una onda incidente, y otro con la reflejada, para cada variable circuital, V o I.

Impedancia Característica.

La relación entre la tensión y la corriente para cada termino de onda se puede obtener aplicando las expresiones anteriores:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -ZI(x) = -A\gamma e^{-\gamma x} + B\gamma e^{\gamma x} = -Z(Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x})$$

$$I(x) = \frac{A\gamma}{Z} e^{-\gamma x} - \frac{B\gamma}{Z} e^{\gamma x} = (Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x})$$

Los cocientes:

$$Z_0 = \frac{A}{C} = -\frac{B}{D} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{Z}{\gamma}$$

Se igualan a Z_0, que se define como la impedancia característica de la línea de transmisión. Este parámetro depende de la frecuencia, y de las características constructivas de la línea de transmisión. Su valor normalizado para los sistemas de radio-frecuencia es 50 Ω, mientras que en televisión dicho valor normalizado es 75 Ω.

Impedancia Característica.

Las constantes están relacionadas de la siguiente forma:

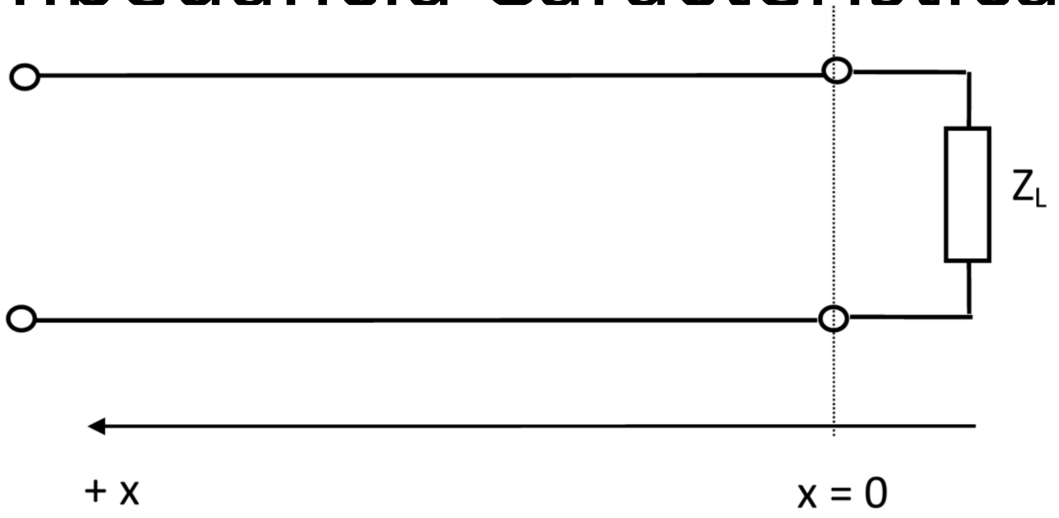
$$C = \frac{A}{Z_0}, \; D = -\frac{B}{Z_0}$$

Por lo que las expresiones de las corrientes y tensiones incidente y reflejada son:

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{A}{Z_0}e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_0}e^{\gamma x}$$

Impedancia Característica.



Para todo valor de x ≥ 0:

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$
$$I(x) = \frac{A}{Z_0}e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_0}e^{\gamma x}$$

En x = 0:

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L};\ V(0) = V_L;\ I(0) = I_L$$

Impedancia Característica.

Luego:

$$A = \frac{1}{2}(V_L + Z_0 I_L)$$

$$B = \frac{1}{2}(V_L - Z_0 I_L)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(V_L + Z_0 I_L)e^{+\gamma x} + \frac{1}{2}(V_L - Z_0 I_L)e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{1}{2Z_0}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x} - \frac{1}{2Z_0}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\gamma x}$$

$$V(x) = V_i(x) + V_r(x)$$

$$I(x) = I_i(x) + I_r(x)$$

Impedancia Característica.

O bien:

$$V(x) = \frac{1}{2}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x} + \frac{1}{2}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\gamma x}$$
$$I(x) = \frac{1}{2Z_0}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x} - \frac{1}{2Z_0}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\gamma x}$$

$$V(x) = V_i(x) + V_r(x)$$

$$I(x) = I_i(x) + I_r(x)$$
$$V_i(x) = \frac{1}{2}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x}$$
$$V_r(x) = \frac{1}{2}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\gamma x}$$
$$I_i(x) = \frac{1}{2Z_0}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x}$$
$$I_r(x) = \frac{1}{2Z_0}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\gamma x}$$

Impedancia Característica.

En relación a la figura anterior, y teniendo en cuenta le presencia de dos señales, una incidente y otra reflejada, las tensiones y corrientes totales para x ≥ 0 son suma de las dos ondas.

El cociente entre la tensión y la corriente totales ya no es constante en general, sino que depende de la posición. La impedancia, función de la posición es igual a:

$$Z(x) = \frac{V_L \cosh(\gamma x) + Z_0 I_L senh(\gamma x)}{\frac{V_L}{Z_0} senh(\gamma x) + I_L cosh(\gamma x)}$$

Derivada realizando el cociente de las expresiones para $V(x)$ e $I(x)$ obtenidas anteriormente. Dividiendo por I_L y multiplicando por Z_0:

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 tgh(\gamma x)}{Z_L tgh(\gamma x) + Z_0}$$

Coeficientes de reflexión de V e I

El coeficiente de reflexión de tensión se define como el cociente entre la onda reflejada y la incidente, ambas función de la posición:

$$\rho(x) = \frac{V_r(x)}{V_i(x)}$$

Luego:

$$\rho(x) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma x}$$

Que es en general un número complejo. Reescribiendo la ecuación anterior:

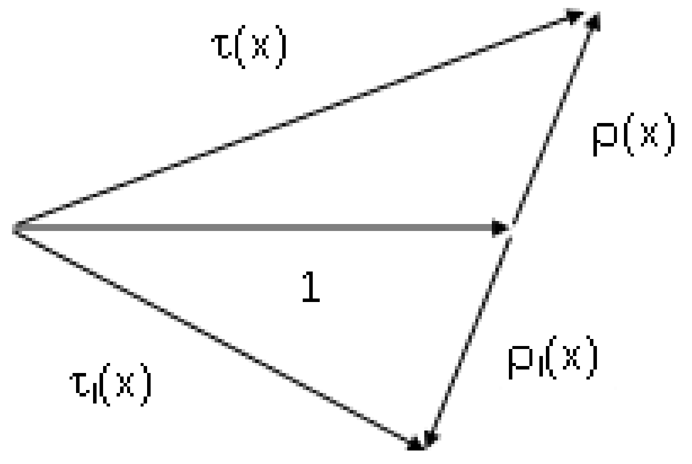
$$\rho(x) = \rho_L e^{-2\gamma x} = |\rho_L| e^{-2\alpha x} e^{j(\varphi - 2\beta x)}$$

De esta forma el coeficiente de reflexión de tensión queda expresado en función del coeficiente de reflexión en la carga.
El coeficiente de reflexión de corriente es:

$$\rho_I(x) = \frac{I_r(x)}{I_i(x)} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma x} = -\rho(x)$$

Coeficientes de reflexión de V e I

En todo momento, el coeficiente de reflexión de corriente es igual en modulo, pero de sentido contrario al coeficiente de reflexión de tensión.



Relación entre coeficientes de reflexión y transmisión.

Por otra parte, la impedancia, función de la posición, se calcula como el cociente de la tensión total dividida la corriente total:

Coeficientes de reflexión de V e I

$$Z(x) = \frac{V_i(x) + V_r(x)}{I_i(x) + I_r(x)} = \frac{V_i(x)}{I_i(x)} \frac{(1 + \rho(x))}{(1 - \rho(x))} = Z_0 \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)}$$

O bien:

$$\rho(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0}$$

Coeficiente de transmisión V e I

El coeficiente de transmisión se define como el cociente de entre la onda transmitida y la incidente para un punto determinado de la línea:

$$\tau(x) = \frac{V(x)}{V_i(x)} = \frac{V_i(x) + V_r(x)}{V_i(x)} = 1 + \rho(x)$$

para x = 0, en la carga:

$$\tau_L = 1 + \rho_L = 1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$$

Líneas de Transmisión sin pérdidas (LTSP).

Una línea de transmisión sin pérdidas es aquella para la cual $R = G = 0$.

De esta manera, al no registrarse pérdidas en los conductores ni en el dieléctrico que compone la línea, la atenuación es nula, y la constante de atenuación es $\alpha = 0$.

La constante de propagación $\gamma = j\beta$ es imaginaria pura.

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} = j\omega/v_f$$

Como la línea de transmisión es sin pérdidas, la impedancia característica se puede calcular simplemente como:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La impedancia característica es siempre un numero real positivo.

Líneas de Transmisión sin pérdidas.

Aun en caso de líneas de transmisión de bajas pérdidas, que serán consideradas mas adelante, se asumirá, como una aproximación, que la impedancia característica de la misma es un numero real positivo.

Las expresiones de las tensiones y corrientes, así como de los coeficientes de reflexión y transmisión se ven modificadas y simplificadas en el caso de la línea de transmisión ideal o sin pérdidas.

Haciendo uso de las igualdades trigonométricas:

$$senhjx = jsenx$$
$$\cosh jx = \cos x$$
$$tghjx = jtgx$$

Las tensiones y corrientes para la línea sin pérdidas se transforman en:

$$V(x) = V_L \cos\beta x + jZ_0 I_L sen\beta x$$
$$I(x) = I_L \cos\beta x + j\frac{V_L}{Z_0} sen\beta x$$

Líneas de Transmisión sin pérdidas.

La impedancia en cada punto de la línea, Z(x), es el cociente de las expresiones anteriores:

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg\beta x}{Z_0 + jZ_L tg\beta x}$$

La particularidad mas importante de la tensión y la corriente en la línea sin pérdidas, es que sus valores se repiten periódicamente. De esta forma, la impedancia también repite su valor cada vez que la distancia x varia en $\lambda/2$.

Coeficiente de reflexión en LTSP.

En el caso analizado, la constante de atenuación es cero. Luego:

$$\rho(x) = \rho_L e^{-2j\beta x} = |\rho_L| e^{j(\varphi - 2\beta x)}$$

En una línea de transmisión sin pérdidas, el modulo de coeficiente de reflexión permanece constante.

Onda estacionaria en LTSP

Las tensiones y corrientes en la línea sin pérdidas se expresan ahora como:

$$V(x) = \frac{1}{2}(Z_L + Z_0)I_L e^{+j\beta x} + \frac{1}{2}(Z_L - Z_0)I_L e^{-j\beta x}$$

$$I(x) = \frac{1}{2Z_0}(Z_L + Z_0)I_L e^{+j\beta x} - \frac{1}{2Z_0}(Z_L - Z_0)I_L e^{-j\beta x}$$

reordenando la primera ecuación:

$$V(x) = \frac{1}{2}(Z_L + Z_0)I_L e^{j\beta x}(1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} I_L e^{-j2\beta x})$$

$$V(x) = V_i(x)(1 + \rho(x))$$

Igualmente puede deducirse que:

$$I(x) = I_i(x)(1 - \rho(x))$$

Onda estacionaria en LTSP

Tomando modulo de las expresiones anteriores se puede analizar la distribución de máximos y mínimos para cada variable:

$$|V(x)| = |V_i(x)||(1 + \rho(x))|$$

$$|V_i(x)| = |\frac{Z_L+Z_0}{2}||I_L||e^{j\beta x}|$$

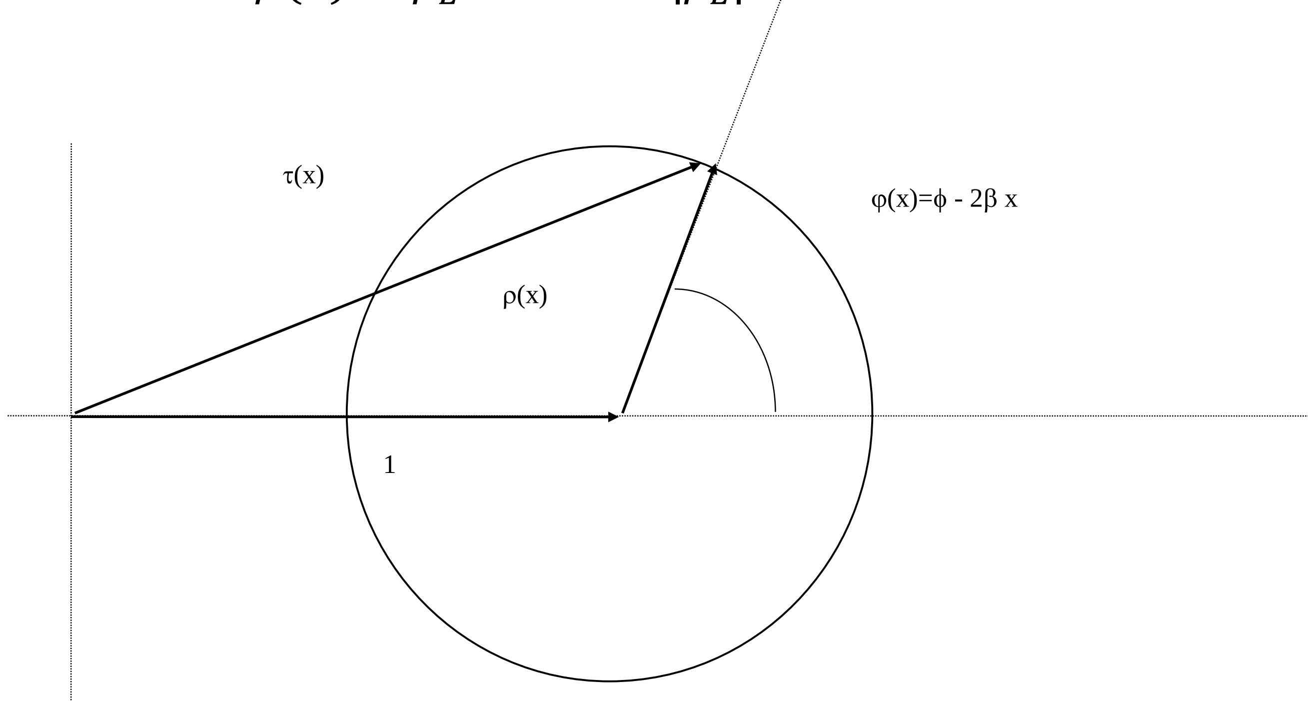
que resulta ser independiente de la posición x.

$$\rho(x) = \rho_L e^{-2j\beta x} = \ |\rho_L|e^{j(\varphi-2\beta x)}$$

Onda estacionaria en LTSP

La tensión varia con la posición, pero su valor modular permanece constante. De esta forma los máximos de V(x) por ejemplo se registran cuando $\varphi(x) = 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2,$...los mínimos se producen cuando $\varphi(x) = k\pi, k = 1, 3,$...

$$\rho(x) = \rho_L e^{-2j\beta x} = |\rho_L| e^{j(\varphi - 2\beta x)}$$



Onda estacionaria en LTSP

La distribución de tensión y corriente es tal que los máximos o mínimos se repiten a lo largo de la línea. la distancia entre dos máximos vecinos es:

$$2\beta d_1 = 2\pi \quad , \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

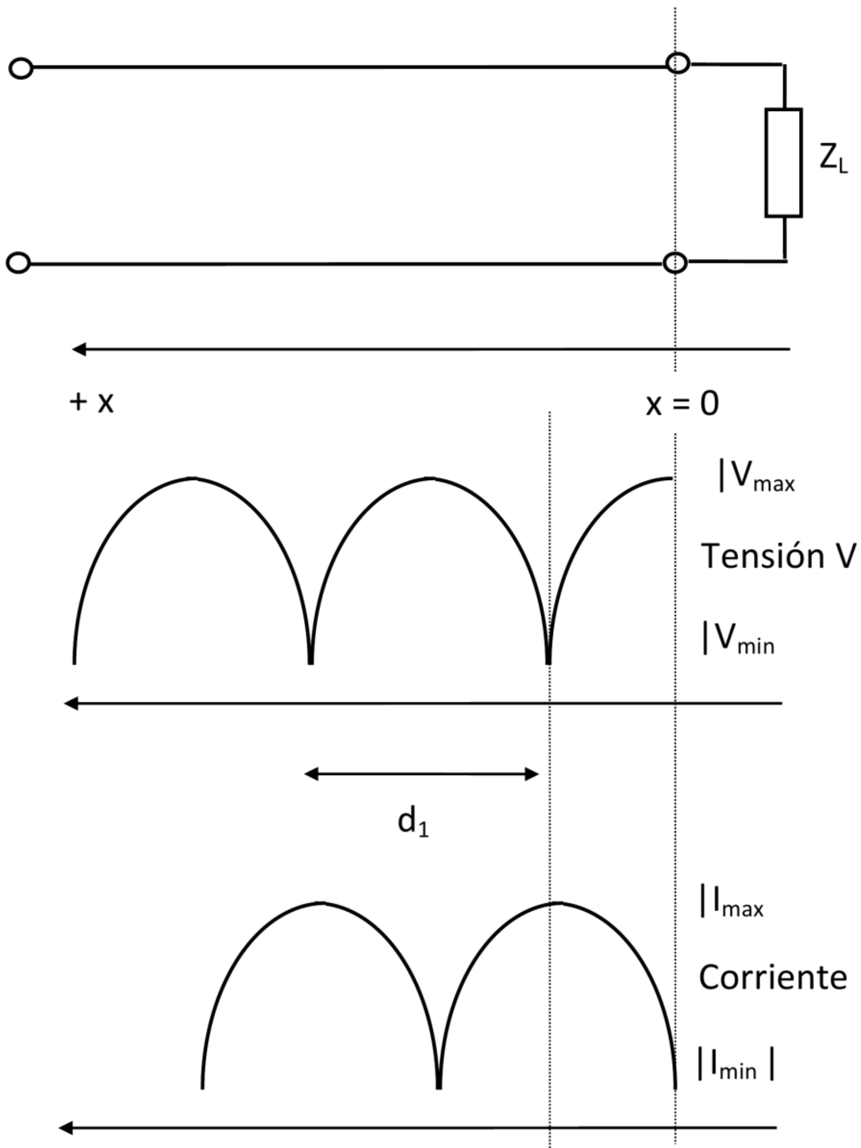
$$d_1 = \frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre máximos, o entre mínimos es $\lambda/2$. Debido a que el coeficiente de reflexión de corriente es igual al de tensión, pero con 180º de fase, los mínimos de corriente coinciden con los máximos de tensión, y viceversa.

$$|I(x)| = |I_i(x)||(1 - \rho(x))|$$

La distancia entre un máximo y un mínimo de la misma variable es igual a $\lambda/4$.

Onda estacionaria en LTSP



Relación Onda Estacionaria (ROE)

El valor de la onda estacionaria puede calcularse del patrón de onda estacionaria que presenta la figura anterior. Este patrón puede ser medido experimentalmente.

$$ROE = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{|V_i| + |V_r|}{|V_i| - |V_r|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

De donde se deduce que:

$$|\rho| = \frac{ROE - 1}{ROE + 1}$$

LTSP en cortocircuito.

Las líneas de transmisión sin perdidas tienen una impedancia que repite su valor en forma cíclica, en función de la posición.
En particular se vera que cuando una línea de transmisión se cortocircuita o se deja a circuito abierto en su extremo de carga, ofrece una impedancia en bornes de entrada que es de naturaleza reactiva pura.

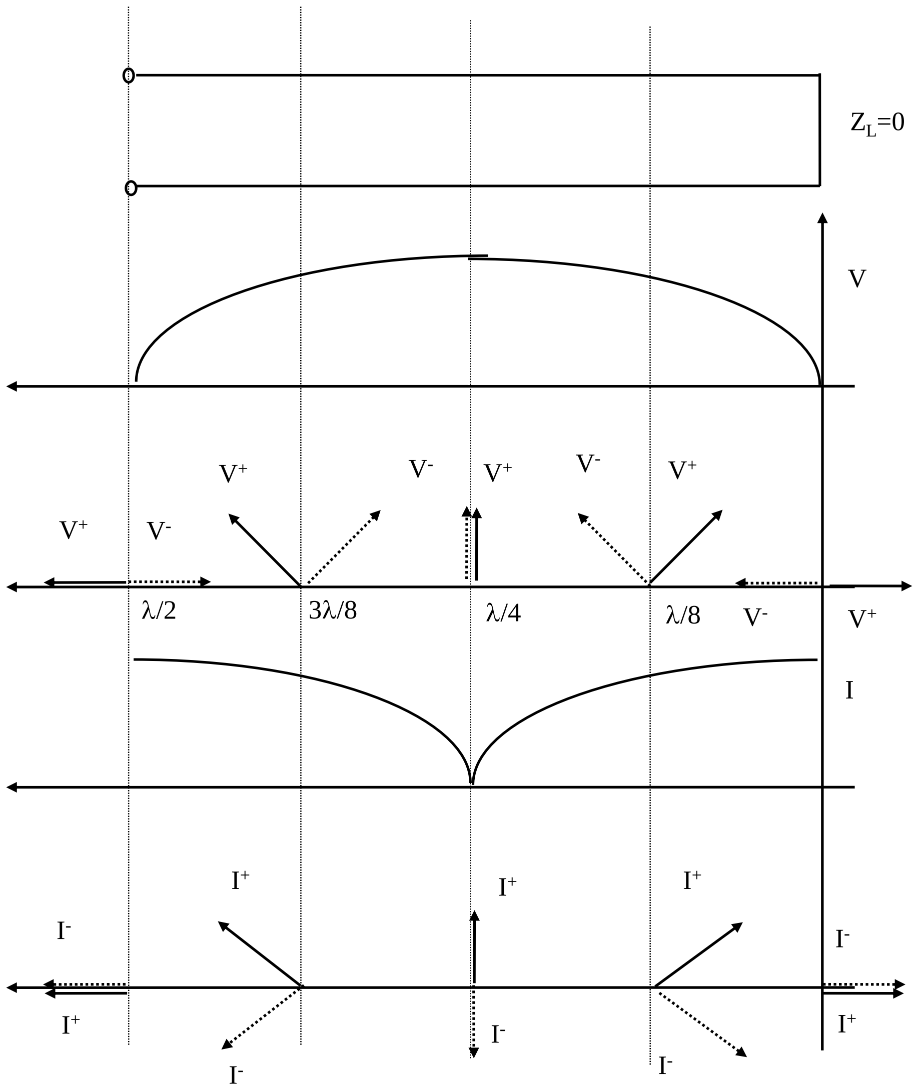
En el caso del cortocircuito se conecta una carga $Z_L = 0\,\Omega$. El coeficiente de reflexión es igual a $\rho_L = -1$. Luego $V_{Li} = -V_{Lr}$.
Las tensiones y corrientes en función de la posición se expresan como:

$$V(x) = \frac{1}{2} Z_0 I_L e^{+j\beta x} - \frac{1}{2} Z_0 I_L e^{-j\beta x}$$

$$I(x) = \frac{1}{2} I_L e^{+j\beta x} + \frac{1}{2} I_L e^{-j\beta x}$$

Si se analiza gráficamente lo que sucede:

LTSP en cortocircuito.



LTSP en cortocircuito.

el máximo de tensión se verifica en las posiciones donde la corriente es mínima, y viceversa. El patrón de distribución de tensión y corriente es el de onda estacionaria pura. La corriente total se encuentra desfasada 90º respecto de la tensión.

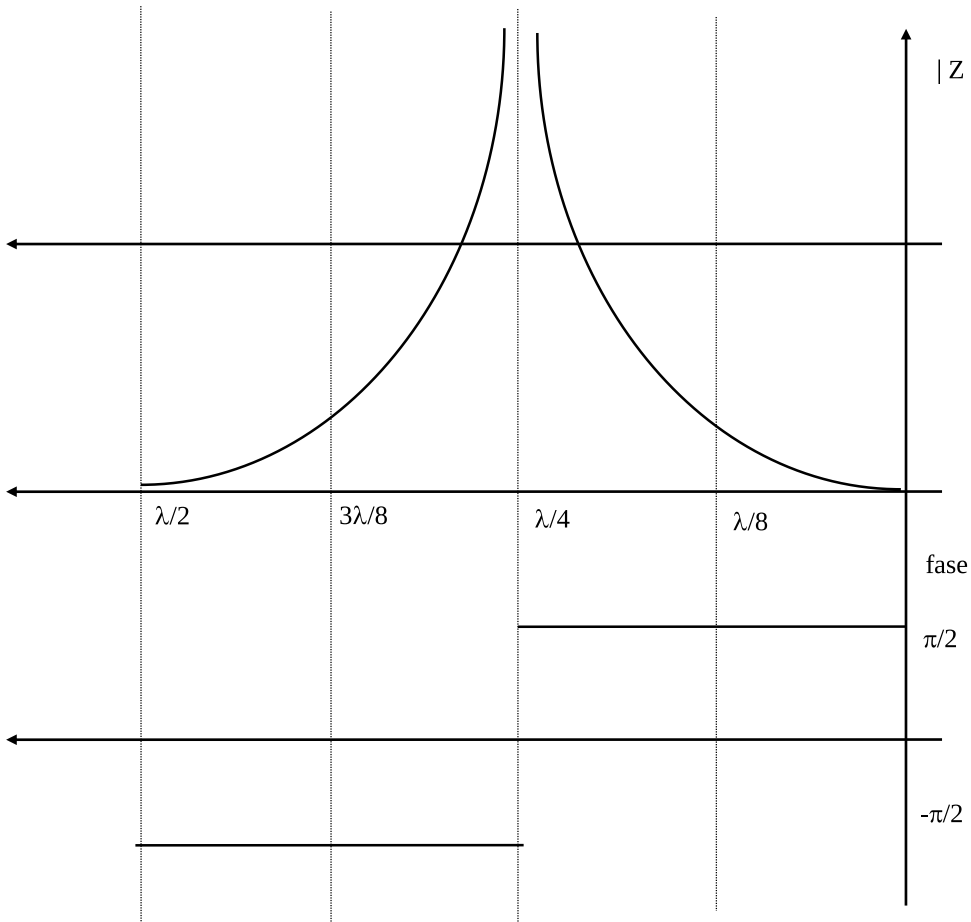
En la zona $(0 \leq x \quad /4)$ la conducta de la línea es de tipo inductivo, ya que la tensión adelanta a la corriente. En la zona $(\lambda/4 \leq x \quad /2)$ es la corriente la que esta adelantada 90º respecto de la tensión, teniendo en esa zona comportamiento capacitivo.

En todos los casos la impedancia es reactiva pura.
analíticamente esto resulta de calcular la impedancia para este caso, como función de la posición:

$$V(x) = Z_0 I_L \frac{e^{+j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} = jZ_0 I_L sen\beta x$$

$$I(x) = I_L \frac{e^{+j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} = I_L \cos\beta x$$

LTSP en cortocircuito.



Impedancia en función de x en el caso de la línea de transmisión en cortocircuito

LTSP a circuito abierto.

En el caso del circuito abierto se conecta una carga $Z_L = \infty\,\Omega$. El coeficiente de reflexión es igual a $\rho_L = +1$. Luego $V_{Li} = V_{Lr}$.
Las tensiones y corrientes en función de la posición se expresan como:

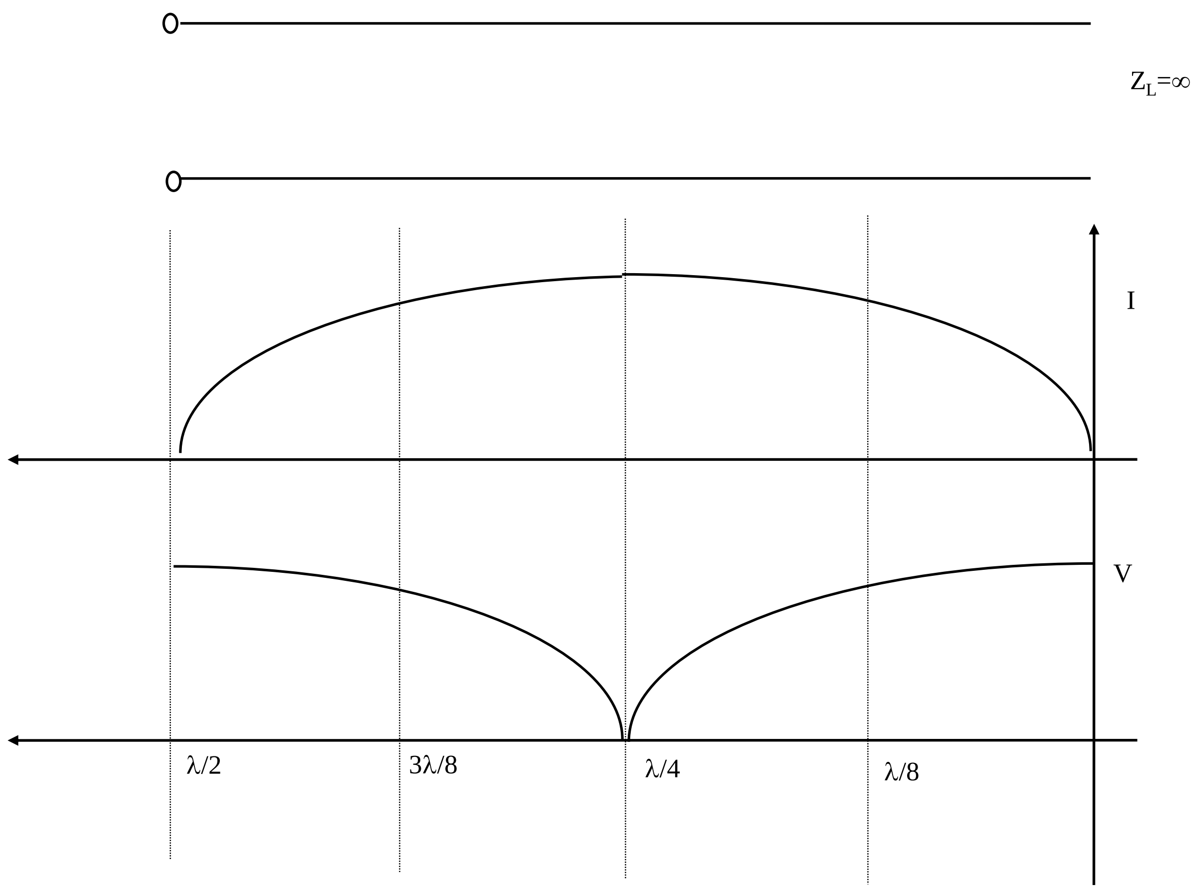
$$V(x) = \frac{1}{2} Z_0 I_L e^{+j\beta x} + \frac{1}{2} Z_0 I_L e^{-j\beta x}$$

$$I(x) = \frac{1}{2} I_L e^{+j\beta x} - \frac{1}{2} I_L e^{-j\beta x}$$

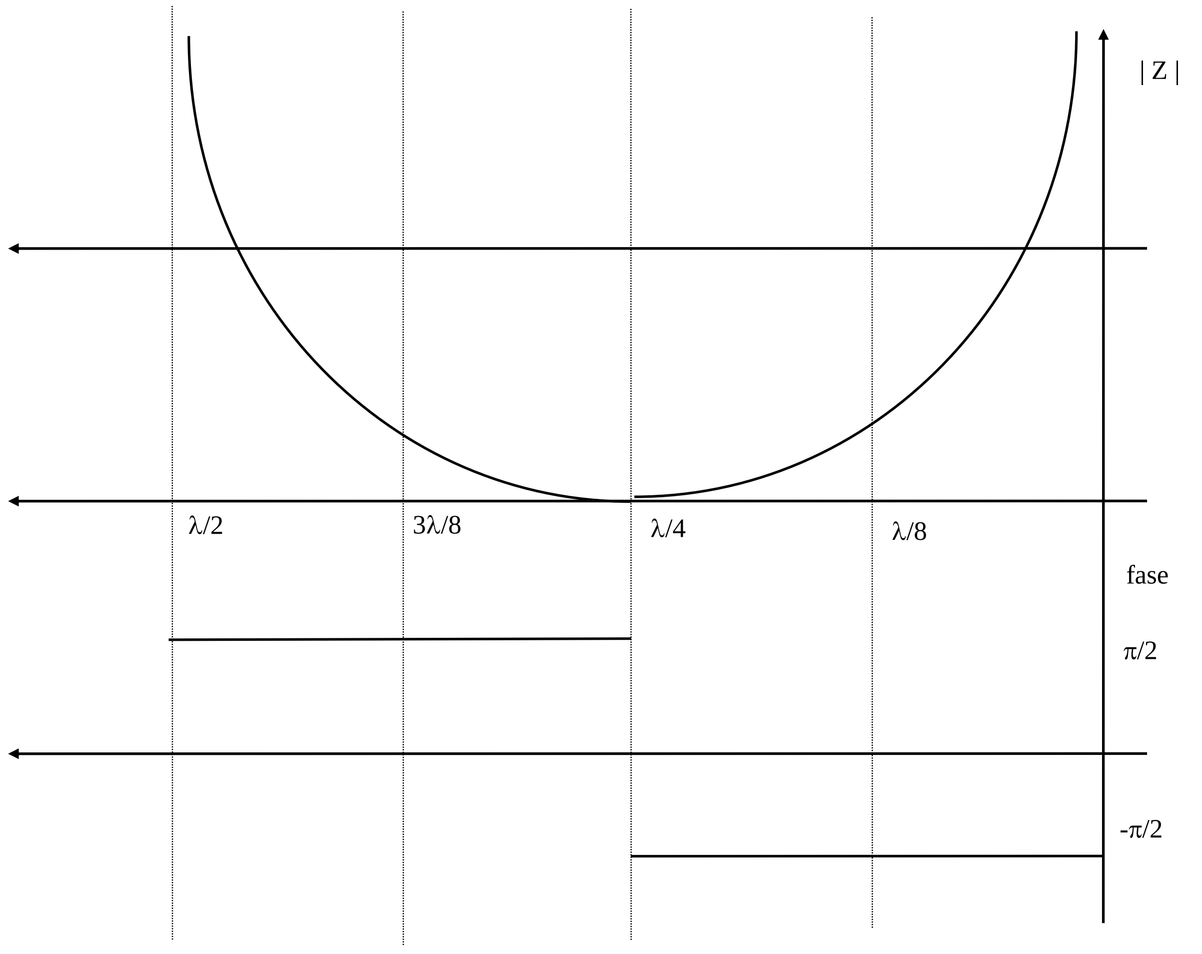
$$V(x) = V_L \cos\beta x$$
$$I(x) = j\frac{V_L}{Z_0} sen\beta x$$
$$Z(x) = -jZ_0 \text{cotg}\beta x$$

Si se analiza gráficamente lo que sucede:

LTSP a circuito abierto.



LTSP a circuito abierto.



Impedancia en función de x en el caso de la línea de transmisión en circuito abierto

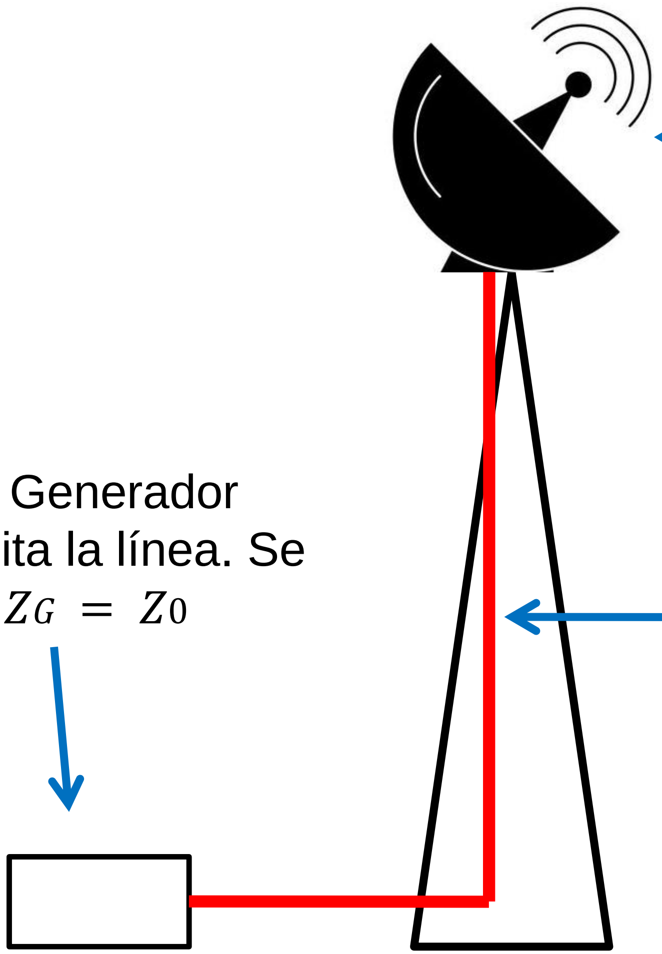
LTSP adaptada.

Cuando la carga es una impedancia igual a la característica de la línea, $Z_L = Z_0$, el coeficiente de reflexión en la carga se anula.

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L - Z_0} = 0$$

La impedancia $Z(x) = Z_0$ para todo punto de la línea. No existe onda reflejada, ni onda estacionaria.

Líneas de Transmisión – Línea Adaptada: Caso de estudio



Carga: Antena. Hay adaptación si $Z_L = Z_0$

Fuente: Generador que excita la línea. Se asume: $Z_G = Z_0$

Línea de transmisión: Cable que une la antena y el generador. Posee impedancia característica Z_0

Líneas de transmisión con perdidas.

Cuando la línea de transmisión presenta perdidas, tanto la constante de propagación como la impedancia característica son números complejos.

Sin embargo el modelo de línea de transmisión sin perdidas, en el cual la impedancia característica es siempre un numero real, será tomado como base para el análisis de una línea de transmisión con bajas perdidas, donde la impedancia característica será considera un numero real positivo, pero la atenuación en la constante de propagación se considera ahora no nula.

El modelo de la línea de transmisión con bajas perdidas esta basado en el de la línea sin perdidas, y solo le agrega el efecto de la atenuación. en la expresión de la contante de propagación, ninguna de las dos constantes es nula.

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

Gráficos de $\boldsymbol{V(x)}$, $\boldsymbol{I(x)}$ y $\boldsymbol{Z(x)}$.

Las expresiones de la tensión y la corriente en función de x fueron analizadas previamente.

$$V(x) = \frac{1}{2}(Z_L + Z_0)I_L e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \frac{1}{2}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$I(x) = \frac{1}{2Z_0}(Z_L + Z_0)I_L e^{\alpha x} e^{j\beta x} - \frac{1}{2Z_0}(Z_L - Z_0)I_L e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

La tensión puede expresarse en función de $V_i(x)$, $V_r(x)$, $I_i(x)$ e $I_r(x)$:

$$V(x) = V_i(x)(1 + \frac{V_r(x)}{V_i(x)}) = V_i(x)[1 + \rho_L e^{-2\alpha x} e^{-j2\beta x}]$$

$$I(x) = I_i(x)(1 + \frac{I_r(x)}{I_i(x)}) = I_i(x)[1 - \rho_L e^{-2\alpha x} e^{-j2\beta x}]$$

Gráficos de $\boldsymbol{V(x)}$, $\boldsymbol{I(x)}$ y $\boldsymbol{Z(x)}$.

$$|V(x)| = |V_i(x)||(1 + \frac{V_r(x)}{V_i(x)})| = |V_i(x)||[1 + |\rho_L|e^{-2\alpha x}e^{-j(\varphi - 2\beta x)}]|$$

$$|I(x)| = |I_i(x)||(1 + \frac{I_r(x)}{I_i(x)})| = |I_i(x)||[1 - |\rho_L|e^{-2\alpha x}e^{-j(\varphi - 2\beta x)}]|$$

La tensión y la corriente sufren el efecto de la atenuación provocada por las perdidas, de forma que su valor se reduce exponencialmente en la medida que se avanza en el sentido de propagación de la onda analizada.

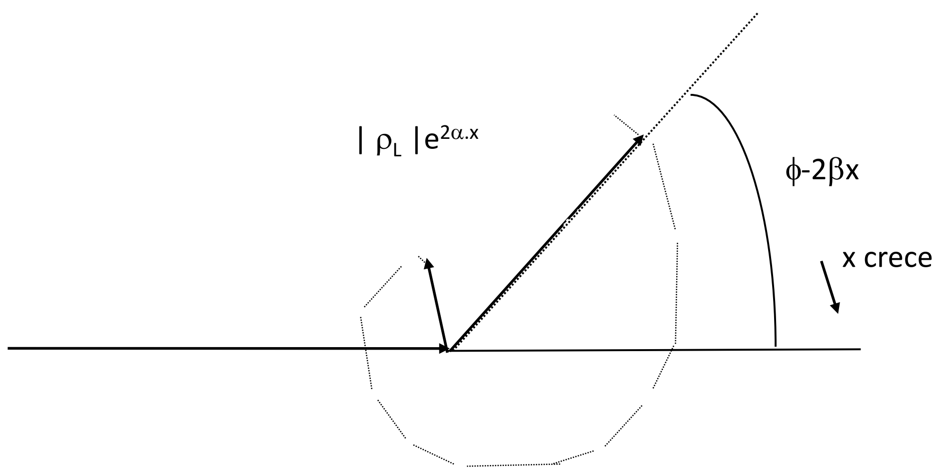
Adoptando el sentido anti-horario como positivo para el ángulo del coeficiente de reflexión, el avance hacia el generador implica que este ángulo crece en el sentido horario (negativo). Cuando la variable x crece, el modulo del coeficiente de reflexión decrece.

Efecto de la atenuación en $Z(x)$

Si el avance se produce de manera que x decrece, se observa la impedancia desde un punto determinado en dirección a la carga. En ese caso el modulo del coeficiente de reflexión crece. El ángulo del coeficiente de reflexión crece en el sentido anti-horario (positivo).

La impedancia calculada como función de la posición se puede expresar en términos del coeficiente de reflexión de tensión en la carga:

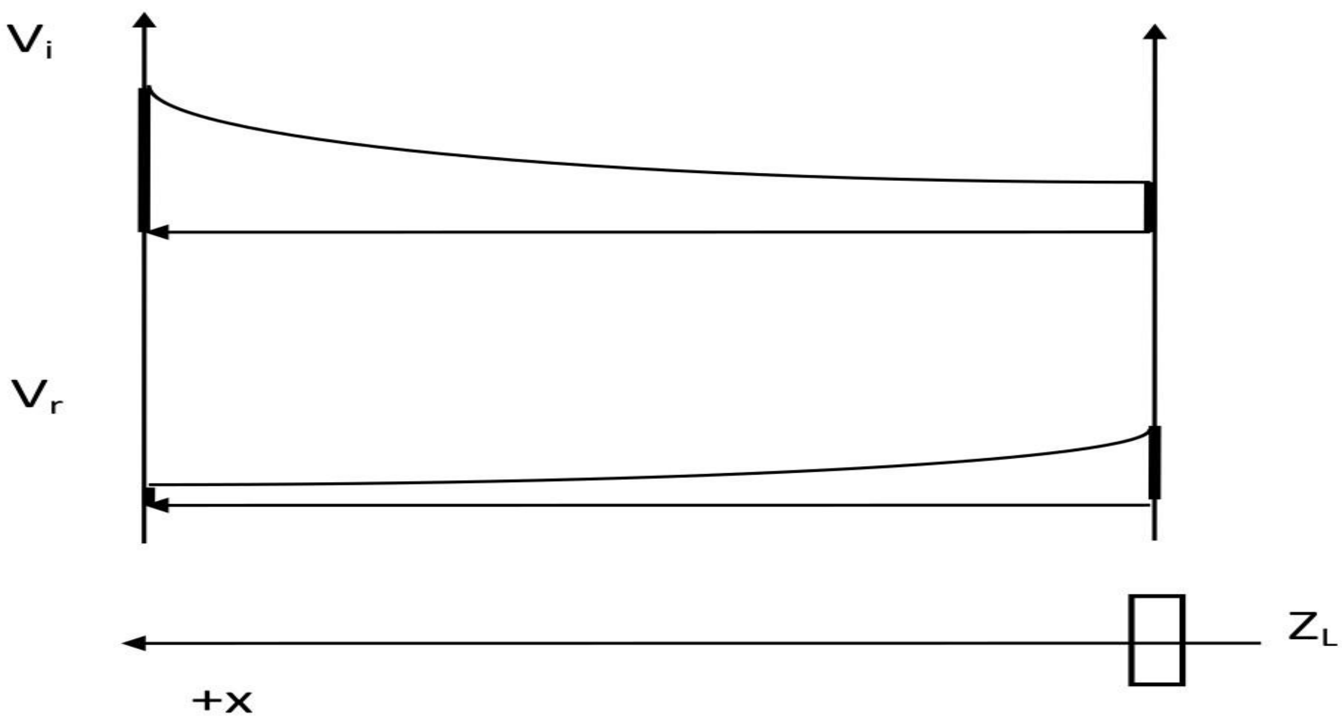
$$Z(x) = Z_0 \frac{1+|\rho_L|e^{-2\alpha x}e^{j(\varphi-2\beta x)}}{1-|\rho_L|e^{-2\alpha x}e^{j(\varphi-2\beta x)}}$$



Efecto de la atenuación en $Z(x)$

En este caso la impedancia no varia de la misma forma que lo hace en una línea de transmisión sin perdidas. El valor de impedancia no se repite cíclicamente debido a la atenuación. El valor del coeficiente de reflexión cambia con x de forma que su fase y su modulo se modifican.

La onda incidente se atenúa en el sentido en que viaja. La onda reflejada sufre atenuación en el sentido de su viaje, que es contrario a la de la incidente.



Efecto de la atenuación en $\rho(x)$

La onda incidente es mayor en el generador que en la carga. El valor de tensión que, atenuado, llega a la carga sufre a su vez la atenuación en el sentido contrario. La tensión reflejada es mínima en el generador.

El cociente de la tensión reflejada sobre la incidente, o sea el modulo del coeficiente de reflexión, es mínimo en el generador, y máximo en la carga.

Esto tiene relación con el hecho que el modulo del coeficiente de reflexión es de un valor determinado en la carga, y se atenúa exponencialmente cuando se avanza hacia el generador.

Expresion de la impedancia Z_0

La impedancia Z_0 en una línea de transmisión con bajas perdidas puede ser aproximada por la expresión:

$$Z_0 \cong \sqrt{\frac{L}{C}}\left[1 + j\frac{G}{2\omega C} - \frac{R}{2\omega L}\right] = \sqrt{\frac{L}{C}} + j\frac{1}{\omega C}\left(\frac{GZ_0}{2} - \frac{\mathrm{R}}{2Z_0}\right)$$

Si los valores de G y R son pequeños en comparación con la impedancia Z_0, el valor aproximado para la impedancia característica es entonces $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Atenuación

Como se ha descripto anteriormente, las tensiones incidente y reflejada son función de la posición. La constante de atenuación define la forma de propagación.

$$V_i(x) = \frac{1}{2}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x}$$

$$I_i(x) = \frac{V_i(x)}{Z_0} = \frac{1}{2Z_0}(Z_L + Z_0)I_L e^{+\gamma x}$$

La potencia incidente será entonces:

$$P_i(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V_i(x)I_i(x)\,*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_i(x)\frac{V_i(x)\,*}{Z_0^*}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{|V_i(x)|^2}{Z_0^*}\right\} =$$
$$\frac{1}{8}\mathrm{Re}\left\{\frac{|(Z_L + Z_0)|^2|I_L|^2 e^{+2\alpha x}}{Z_0}\right\} = e^{+2\alpha x}\frac{1}{8}\mathrm{Re}\left\{\frac{|(Z_L + Z_0)|^2|I_L|^2}{Z_0}\right\}$$

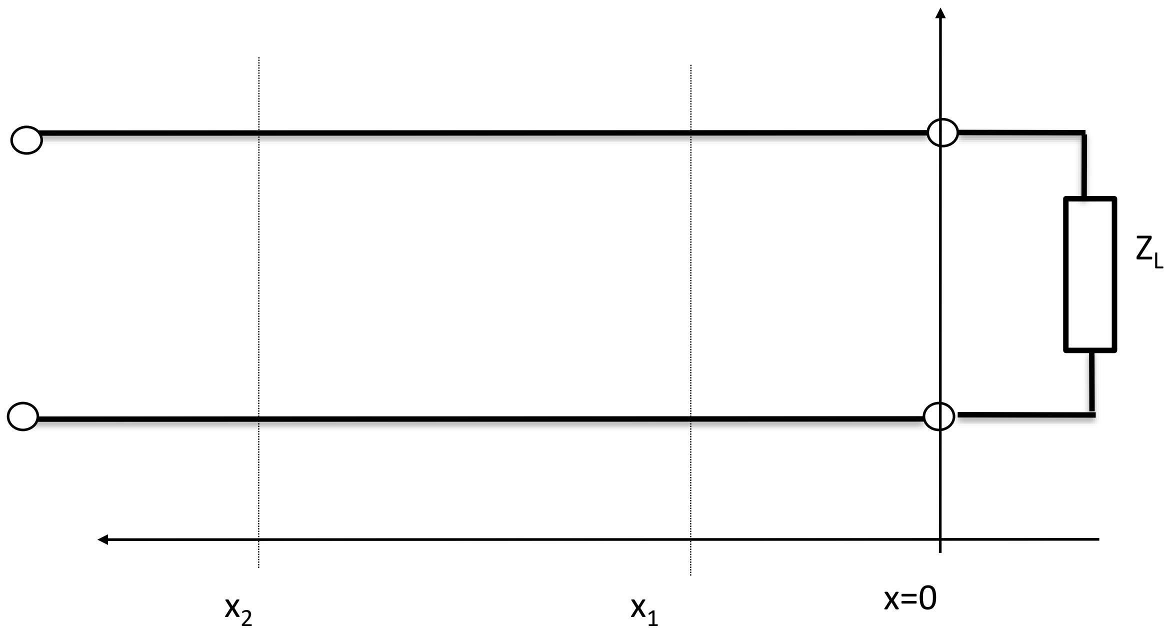
pues $Z_0 = Z_0^*$

Atenuación

En general:

$$P_i(x) = e^{+2\alpha x}\frac{1}{8}\mathrm{Re}\left\{\frac{|Z_L+Z_0|^2|I_L|^2}{Z_0}\right\} = Ke^{+2\alpha x} \qquad Z_0 = Z_0^*$$

Para dos puntos de la línea de transmisión, de abscisas x_1 y x_2:



Atenuación

$$P_{i1}(x) = \mathrm{K}e^{+2\alpha x_1}$$
$$P_{i2}(x) = \mathrm{K}e^{+2\alpha x_2}$$

Se puede definir la constante de atenuación α como:

$$\alpha_{nep} = \frac{1}{2}\ln(\frac{P_{i2}}{P_{i1}}) = \frac{1}{2}\ln(e^{2\alpha(x_2-x_1)}) = \alpha(x_2 - x_1)$$
$$\alpha = \frac{\alpha_{nep}}{x_2 - x_1}$$

Y la atenuación en dB como:

$$At = 10\log_{10}\left(\frac{P_{i2}}{P_{i1}}\right)$$
$$At = 10\log_{10}(e^{2\alpha(x_2-x_1)}) = 20\alpha(x_2 - x_1)\log_{10}e = 8.686\alpha(x_2 - x_1)$$

Mientras que la atenuación en dB por unidad de longitud es:

$$A = \frac{At}{x_2 - x_1} = 8.686\alpha$$