Interpretación física de las variables scattering

$$P_1 = Re\{V_1 I_1{}^*\} = Re\left\{\sqrt{Z_0}(a_1 + b_1)(a_1{}^* - b_1{}^*)/\sqrt{Z_0}\right\}$$
$$= Re\{a_1 a_1{}^* - b_1 b_1{}^* + b_1 a_1{}^* - a_1 b_1{}^*\}$$
$$P_1 = |a_1|^2 - |b_1|^2$$

Igualmente:

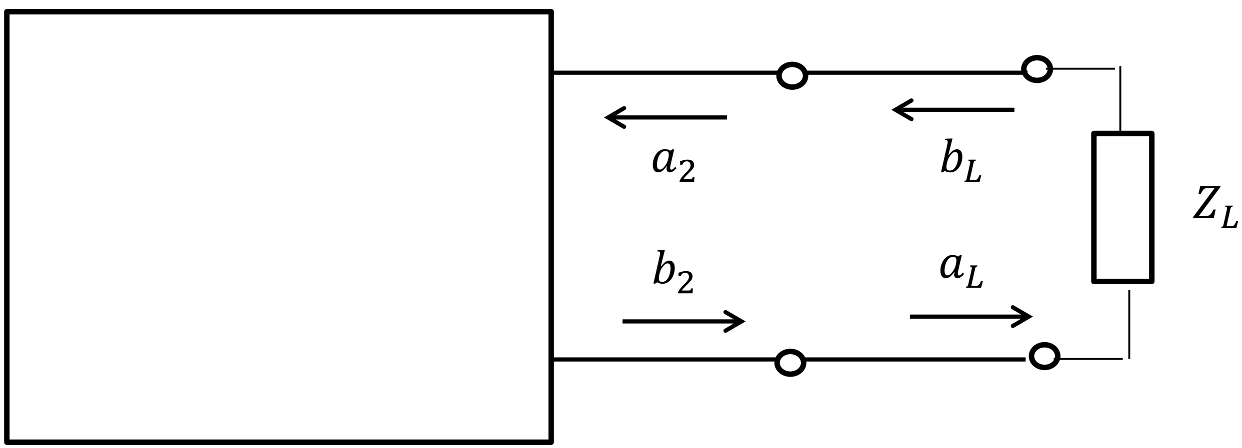
$$P_2 = |a_2|^2 - |b_2|^2$$

La potencia promedio en un puerto de cuadripolo es la resta entre la potencia incidente (módulo de la onda scattering incidente elevado al cuadrado) menos la potencia reflejada (módulo de la onda scattering reflejada elevado al cuadrado).

Definición de coeficientes de reflexión de un dipolo

Observando por ejemplo el puerto de salida de un cuadripolo, y la relación entre las ondas incidentes y reflejadas en el puerto y la carga Z_L, se tiene:

$$a_2 = b_L; \qquad b_2 = a_L$$

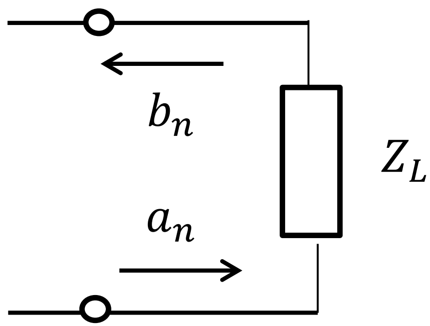


Una situación similar se produce en el puerto del generador con la impedancia del generador Z_G.

Definición de coeficientes de reflexión de un dipolo

Par un dipolo genérico, (carga o generador) como el de la figura, se define el coeficiente de reflexión como:

$$\Gamma_n = \frac{b_n}{a_n}$$



Con:

$$V_n = \sqrt{Z_0}(a_n + b_n)$$
$$I_n = (a_n - b_n)/\sqrt{Z_0}$$

$$\frac{(a_n + b_n)}{(a_n - b_n)} = \frac{V_n}{I_n Z_0}$$

Definición de coeficientes de reflexión de un dipolo

Pero como:

$$Z_n = \frac{V_n}{I_n}$$

$$\frac{(a_n + b_n)/a_n}{(a_n - b_n)/a_n} = \frac{1 + \Gamma_n}{1 - \Gamma_n} = \frac{V_n}{I_n Z_0} = \frac{Z_n}{Z_0}$$

De donde:

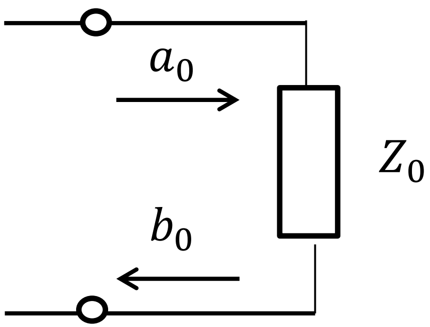
$$\Gamma_n = \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0}$$

Expresión ya conocida de las líneas de transmisión cargadas:

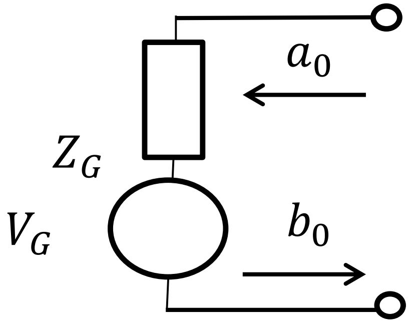
$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} \qquad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Definición de coeficientes de reflexión de un dipolo

Par un dipolo de adaptación como el de la figura, se define el coeficiente de reflexión como:



En el terminal generador la notación es:



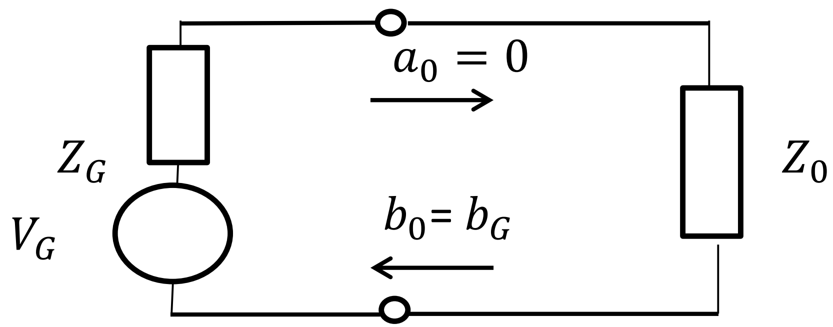
Definición de coeficientes de reflexión de un dipolo

En la figura anterior se cumple que:

$$b_0 = \Gamma_G a_0 + b_G$$

Donde $\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$.

Para el generador conectado a una impedancia de adaptación como el de la figura,



Definición de coeficientes de reflexión de un dipolo

Para conocer b_G adaptamos el sistema de manera que $a_0 = 0$. Si cargamos al generador con $Z_L = Z_0$, entonces $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0$ y $\Gamma_L b_G = 0$, por lo que:

$$I_0 = \frac{V_G}{Z_G + Z_0} \qquad\qquad a_0 = 0$$

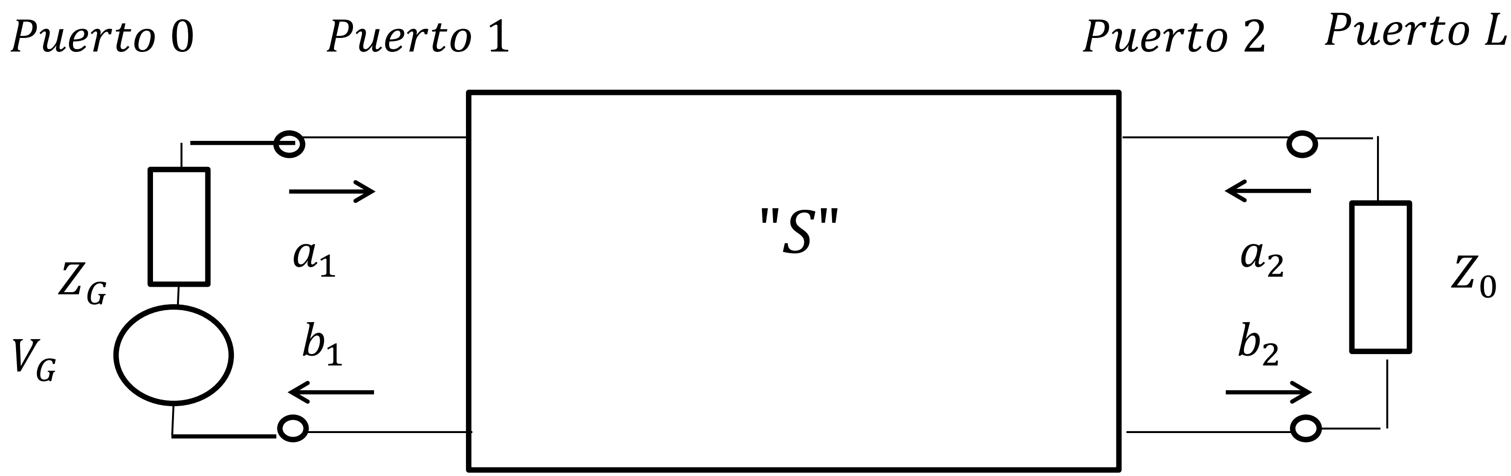
Siendo I_0 saliente, y aplicando

$$a_n - b_n = I_n\sqrt{Z_0} = a_0 - b_0 = -I_0\sqrt{Z_0}$$
$$b_0 = b_G = -I_0\sqrt{Z_0}$$

$$b_G = \frac{V_G\sqrt{Z_0}}{Z_G + Z_0}$$

Análisis de redes con parámetros "S"

En el esquema de la figura



Recordando las expresiones de las ondas normalizadas incidentes y reflejadas en el cuadripolo:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

Análisis de redes con parámetros "S"

De la figura anterior

$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = \frac{a_2}{b_2}$ y $b_2 = \Gamma_L a_2$, por lo que, combinando con las expresiones de parámetros S:

$$S_{21}a_1 + \left(S_{22} - \frac{1}{\Gamma_L}\right)a_2 = 0$$

En la anterior figura, se puede ver que:

$a_1 = b_0$ y $b_1 = a_0$

Y combinando con:

$$b_0 = \Gamma_G a_0 + b_G$$
$$a_1 = \Gamma_G b_1 + b_G$$

Análisis de redes con parámetros "S"

Reemplazando en

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$

$$-\frac{b_G}{\Gamma_G} = \left(S_{11} - \frac{1}{\Gamma_G}\right)a_1 + S_{12}a_2$$

Reordenamos estas expresiones para escribirlas de la forma:

$$0 = A_{21}a_1 + A_{22}a_2$$
$$-b_G = A_{11}a_1 + A_{12}a_2$$

Donde:

$$A_{11} = \Gamma_G S_{11} - 1$$
$$A_{12} = \Gamma_G S_{12}$$
$$A_{21} = \Gamma_L S_{21}$$
$$A_{22} = \Gamma_L S_{22} - 1$$

Análisis de redes con parámetros "S"

El determinante del sistema es:

$$D = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{vmatrix} = A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}$$

Donde:

$$A_{21} = \Gamma_L S_{21}$$
$$A_{12} = \Gamma_G S_{12}$$
$$A_{11} = \Gamma_G S_{11} - 1$$
$$A_{22} = \Gamma_L S_{22} - 1$$

Resolviendo para a_1:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_{22} \\ -b_G & A_{12} \end{vmatrix}}{D} = -b_G A_{22}/\mathrm{D}$$

Análisis de redes con parámetros "S"

Y para a_2:

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} A_{21} & 0 \\ A_{11} & -b_G \end{vmatrix}}{D} = -b_G A_{21}/D$$

Las ondas reflejadas se obtienen en función de las incidentes como:

$$b_1 = b_G(A_{22}S_{11} - S_{12}A_{21})/D$$
$$b_2 = b_G(A_{22}S_{21} - S_{22}A_{21})/D$$

Estas expresiones resuelven un cuadripolo en términos de lo parámetros S.

Ganancia de Tensión

La ganancia de tensión para un cuadripolo se define como:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1}$$

Donde típicamente la tensión V_1 es laque se presenta en el puerto o dipolo de entrada 1, y la tensión V_2 es laque se presenta en el puerto o dipolo de salida 2,

Utilizando expresiones anteriores:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}$$

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-A_{21} + (A_{22}S_{21} - S_{22}A_{21})}{A_{22} + (A_{22}S_{11} - S_{12}A_{21})}$$

Ganancia de Potencia.

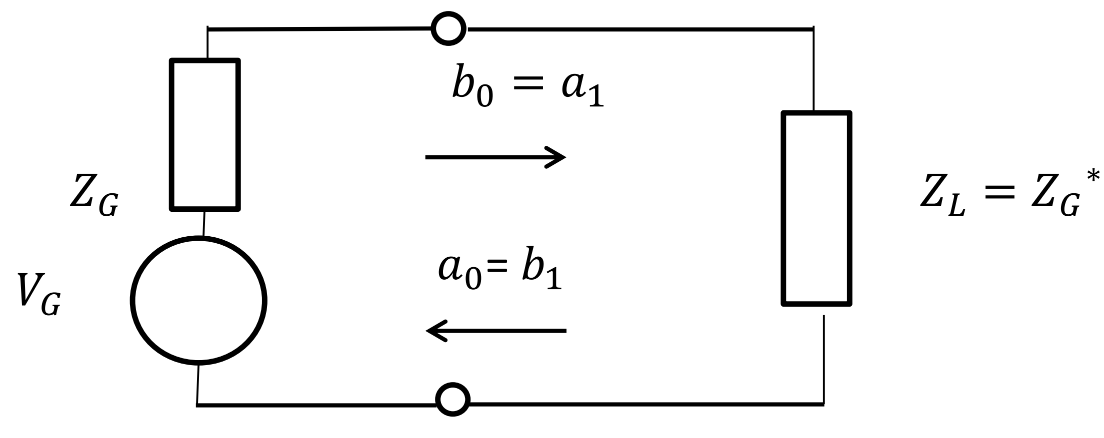
En el caso de la ganancia de potencia, se habla de la ganancia de potencia de transducción, definida como:

$$G_T = \frac{potencia\ desarrollada\ sobre\ la\ carga}{potencia\ disponible\ de\ la\ fuente}$$

La potencia disponible de la fuente es aquella que se desarrolla sobre una carga conectada al generador que, por el teorema de la máxima transferencia de potencia, es la conjugada de la impedancia interna del generador, es decir:

$$Z_L = {Z_G}^*$$

Ganancia de Potencia.



En la figura se identifica que $a_0 = b_1$. Pero b_1 es la onda reflejada que produce la impedancia de carga $Z_L = Z_G{}^*$

Asociada a un coeficiente de reflexión:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_G{}^* - Z_0}{Z_G{}^* + Z_0} = \Gamma_G{}^*$$

Ganancia de Potencia.

$$b_1 = {\Gamma_G}^* a_1$$

Como ya se había determinado para el dipolo generador:

$$b_0 = a_1 = \Gamma_G {\Gamma_G}^* a_1 + b_G = |\Gamma_G|^2 a_1 + b_G$$

Luego:

$$a_1 = \frac{b_G}{1 - |\Gamma_G|^2}$$

Combinando $b_1 = {\Gamma_G}^* a_1$ y

$$P_{av} = Re\{a_1 {a_1}^* - b_1 {b_1}^* + b_1 {a_1}^* - a_1 {b_1}^*\} = a_1 {a_1}^* - b_1 {b_1}^*$$

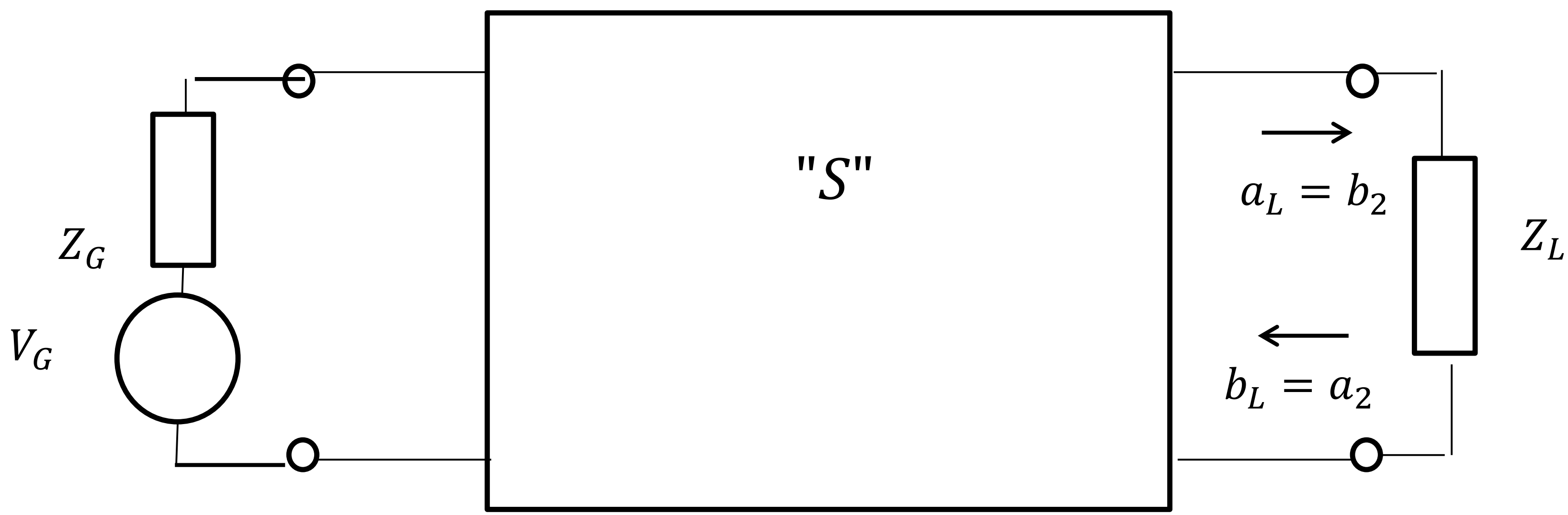
$$P_{av} = a_1 {a_1}^* (1 - {\Gamma_G}^* \Gamma_G) = |a_1|^2 (1 - |\Gamma_G|^2)$$

Ganancia de Potencia.

$$P_{av} = a_1 a_1{}^*(1 - \Gamma_G{}^* \Gamma_G) = \left| \frac{b_G}{1 - |\Gamma_G|^2} \right|^2 (1 - |\Gamma_G|^2)$$

$$P_{av} = \frac{|b_G|^2}{1 - |\Gamma_G|^2}$$

La siguiente figura nos muestra un esquema para determinar la potencia sobre la carga:



Ganancia de Potencia.

Luego:

$$P_L = a_L {a_L}^* - b_L {b_L}^*$$

$$P_L = a_L {a_L}^* (1 - \Gamma_L {\Gamma_L}^*) = |a_L|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)$$

$$P_L = |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)$$

Tenemos finalmente:

$$G_T = \frac{P_T}{P_{av}} = \frac{|b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)(1 - |\Gamma_G|^2)}{|b_G|^2}$$

Y Reemplazando con expresiones anteriores función de los parámetros S:

Ganancia de Potencia.

Con:

$$b_2 = b_G(A_{22}S_{21} - S_{22}A_{21})/D$$

$$G_T = \frac{|b_G(A_{22}S_{21} - S_{22}A_{21})/D\ |^2(1-|\Gamma_L|^2)(1-|\Gamma_G|^2)}{|b_G|^2}$$
$$= \frac{|(A_{22}S_{21} - S_{22}A_{21})|^2(1-|\Gamma_L|^2)(1-|\Gamma_G|^2)}{|D|^2}$$
$$= \frac{|(A_{22}S_{21} - S_{22}A_{21})|^2(1-|\Gamma_L|^2)(1-|\Gamma_G|^2)}{|A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}|^2}$$

Expresando todo en parámetros S:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1-|\Gamma_L|^2)(1-|\Gamma_G|^2)}{|(1-\Gamma_G S_{11})(1-\Gamma_L S_{22}) - \Gamma_G \Gamma_L S_{11} S_{22}|^2}$$

Impedancia de entrada y de salida.

Se busca determinar cual es la impedancia de entrada que se presenta en un cuadripolo cargado con una cierta impedancia de carga a la salida Z_L, o bien medir desde el puerto de salida que impedancia se ve cuando el generador tiene una impedancia Z_G.

El coeficiente de reflexión en el puerto de entrada de un cuadripolo se define como:

$$\Gamma_i = \frac{b_1}{a_1} = \frac{A_{22}S_{11} - S_{12}A_{21}}{A_{22}}$$

$$\Gamma_i = S_{11} - \frac{S_{12}A_{21}}{A_{22}}$$

$$\Gamma_i = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

Impedancia de entrada y de salida.

con $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

Para la salida definimos:

$$\Gamma_o = \frac{b_2}{a_2} = \frac{-A_{22}S_{21} + S_{22}A_{21}}{A_{21}}$$

$$\Gamma_o = S_{22} - \frac{S_{12}A_{21}}{A_{22}}$$

$$\Gamma_o = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G}$$

Con $\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$

Impedancia de entrada y de salida.

Las expresiones anteriores determinan las impedancias de entrada y salida con las diferentes posibilidades de impedancias en cada puerto.

Cuando por ejemplo el puerto de salida tiene conectada una impedancia de adaptación $Z_L = Z_0$, la impedancia de entrada es el parámetro $\Gamma_i = S_{11}$. Lo mismo sucede desde la salida con adaptación a la entrada llevando a medir S_{22}.

Ejemplo:

Los parámetros S del transistor MRF901 polarizado con $V_{CE} = 6\,V$, $I_C = 20\,mA$ ala frecuencia $f = 500\,Mhz$ son:

Impedancia de entrada y de salida.

$S_{11} = 0.46|-151°$, $S_{12} = 0.04|51°$, $S_{21} = 7.5|92°$,
$S_{22} = 0.43|-33°$,

Determine la impedancia de entrada que se tiene si la carga está cortocircuitada.

$$\Gamma_i = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}} = 0.384|-122.95°$$