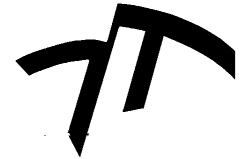


Sistemas de Comunicaciones basados en Radio Definida por Software (SDR)

Dr. Ing. Alejandro José Uriz

Modulación exponencial





- Si partimos de una señal de onda continua, con $A(t)$ constante, pero fase variable con el tiempo:

$$x_c(t) = A_c \cos[\varpi_c t + \phi(t)]$$

- Definiendo el argumento o ángulo total:

$$\theta_c(t) = \varpi_c t + \phi(t)$$

- Es posible escribir:

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \operatorname{Re}[e^{j\theta_c(t)}]$$

- La información está en la fase o en la frecuencia. Por ello, la información del mensaje está en los cruces por cero de la señal.
- En modulación exponencial la amplitud de la portadora no contiene información.
- Las propiedades descriptas le brindan alta inmunidad al ruido.
- El ancho de banda requerido suele ser mayor (o incluso mucho mayor) al requerido en modulación lineal.
- Se utiliza en el servicio de radiodifusión comercial, TV analógica y sistemas de radio móvil bidireccionales.

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \operatorname{Re}[e^{j\theta_c(t)}]$$

Luego, si $\Theta_c(t)$ contiene el mensaje $x(t)$, puede llamarse este proceso como modulación exponencial.

- Enfatizando la relación no lineal entre $x_c(t)$ y $x(t)$.

Modulación de Fase:

- Se define mediante la siguiente dependencia:

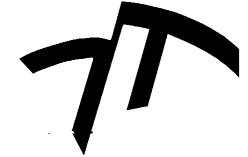
$$\phi(t) = \phi_{\Lambda} x(t) \quad \phi_{\Lambda} \leq 180^\circ$$

$$x_c(t) = A_c \cos[\varpi_c t + \phi_{\Lambda} x(t)]$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA

Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Comunicaciones



- La velocidad de rotación del fasor en ciclos por segundos será:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_c(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)$$

Modulación de frecuencia:

- En el caso de la modulación de frecuencia (FM), la frecuencia instantánea se define como:

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t) \quad f_c \geq f_\Delta$$

- La frecuencia varía linealmente con $x(t)$ a través de una constante f_Δ llamada **desviación de frecuencia**.
- f_Δ representa el **máximo corrimiento de frecuencia** respecto de la portadora, este ocurrirá cuando $x(t)=1$.
- En los sistemas reales $f_\Delta \ll f_c$.

- Si partimos de la expresión de frecuencia instantánea para PM, resulta:

$$X_c(t) = A_c \cdot \cos(\phi_c(t)) = A_c \cos(2\pi f(t) \cdot t) = A_c \cdot \cos[2\pi(f_c + f_\Lambda x(t))t]$$

- Además, usando la expresión de frecuencia instantánea en FM, es posible reescribilo como:

$$f(t) = f_c + f_\Lambda x(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t) \quad \dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Lambda x(t)$$

$$\phi(t) = 2\pi f_\Lambda \int_{t_0}^t x(\lambda) d\lambda \quad t \geq t_0$$

- De las dos expresiones previas, surge la forma de onda para FM:

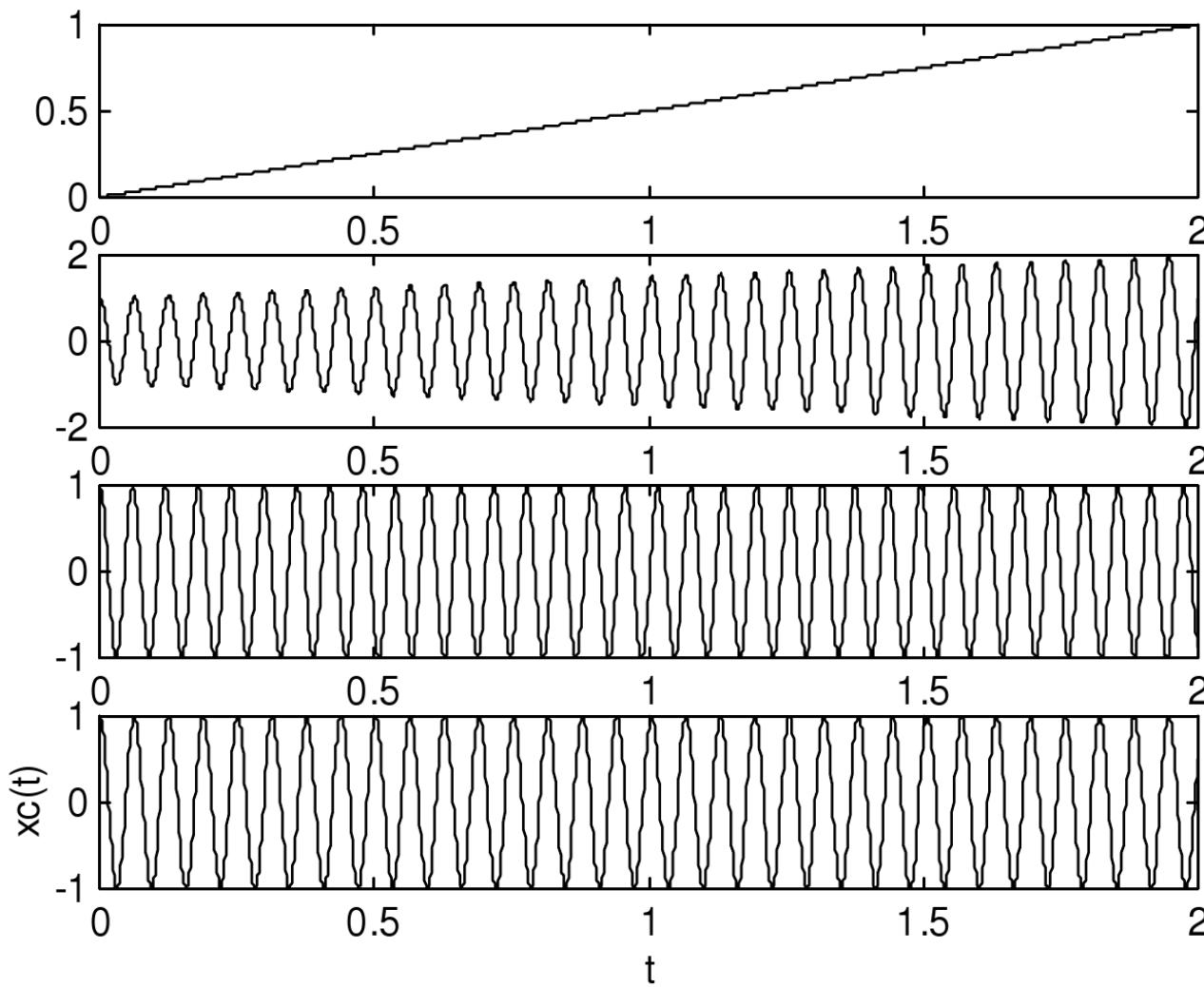
$$x_c(t) = A_c \cos[\varpi_c t + \phi(t)] = A_c \cos\left[\varpi_c t + 2\pi f_{\Delta} \int_0^t x(\lambda) d\lambda\right]$$

ϕ(t)

- Esto nos muestra que también es posible mediante un integrador y un modulador de PM, obtener FM.

	Fase instantánea	Frecuencia instantánea
PM	$\phi_{\Delta}x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_{\Delta}\frac{dx(t)}{dt}$
FM	$2\pi f_{\Delta} \int^t x(\lambda) d\lambda$	$f_c + f_{\Delta}x(t)$

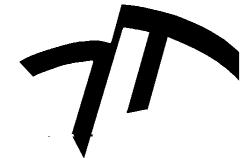
- Modulación de una señal lineal mediante AM, PM y FM.



- Ya que sin importar $x(t)$, la amplitud de $x_c(t)$ no varía en PM y FM.

$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2$$

- La potencia promedio transmitida no depende de $x(t)$.
- En modulación exponencial los cruces por cero no son periódicos.
- La onda modulada no se parece en nada al mensaje $x(t)$.
- FM permite reducir el ruido sin incrementar S_T , pero a costas de aumentar BT.



Modulación Exponencial de onda contínua

Distorsión y Ancho de banda

Dr. Ing. Alejandro José Uriz
Facultad de Ingeniería

Alternativamente, puede escribirse una expresión más compacta mediante la propiedad:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^{-n} J_n(\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x_c(t) = & A_c J_0(\beta) \cos \varpi_c t + \sum_{n \cdot \text{impar}}^{\infty} A_c J_n(\beta) [\cos(\varpi_c + \varpi_m)t - \cos(\varpi_c - \varpi_m)] + \\ & + \sum_{n \cdot \text{par}}^{\infty} A_c J_n(\beta) [\cos(\varpi_c + \varpi_m)t + \cos(\varpi_c - \varpi_m)] \end{aligned}$$

Puede reescribirse como:

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\varpi_c + n\varpi_m)t$$

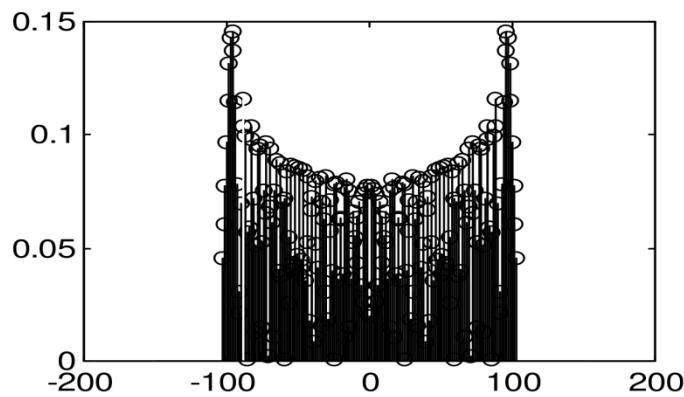
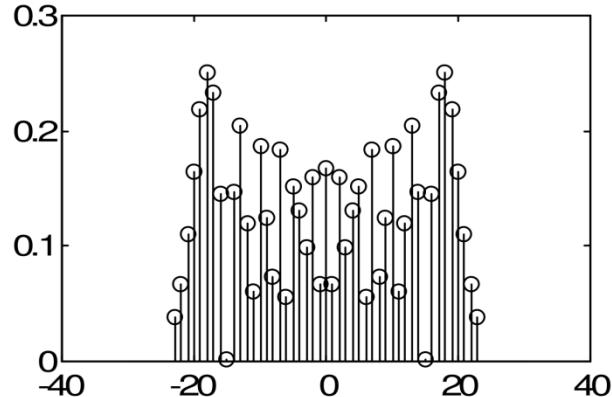
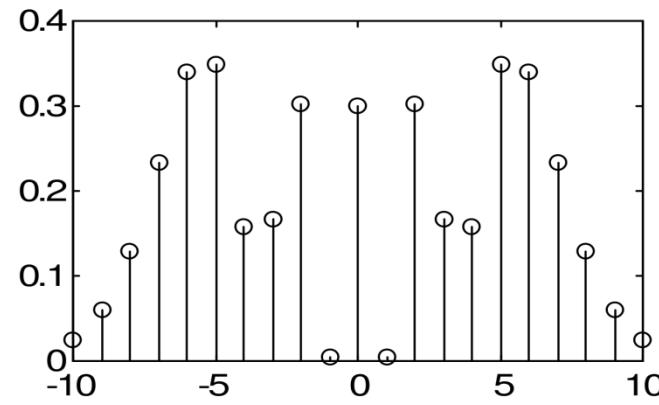
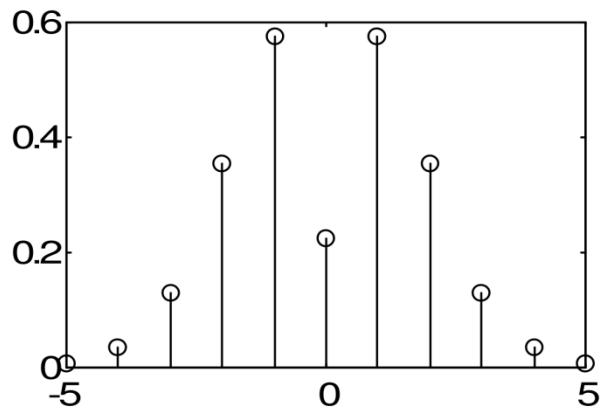
- Desarrollando, obtuvimos:

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\varpi_c + n\varpi_m)t$$

Coeficientes de Bessel

En cualquiera de las dos formas (Ecuac. 7.33 o 7.34) representa matemáticamente una onda de amplitud constante cuya frecuencia instantánea varia sinusoidalmente. Podemos ver que el espectro de FM consiste en un numero infinito de lineas a las frecuencias $f_c \pm nf_m$. Todas las líneas se encuentran igualmente espaciadas en la frecuencia de modulación, y las líneas de orden impar por debajo de f_c estan invertidas respecto a su similar que esta por encima de f_c .

Si se grafica el espectro de líneas en módulo solamente, sin tener en cuenta los cambios de signo, para valores de $\beta = 2, 7, 10$ y 100 se obtienen los espectros de líneas que se muestra en la Fig (7.5). En estos gráficos, el eje de abcisas no está graduado en frecuencia, sino en valores de β . Para pasar a frecuencia, se debe multiplicar por la frecuencia del tono f_m , y desplazar el origen en f_c . Observar que a medida que aumenta β , aumenta la cantidad de líneas, y disminuye la amplitud de las líneas, de modo que la potencia promedio se mantenga constante e igual a $\frac{A_c^2}{2}$. Finalmente, para el caso de $\beta=100$ se puede apreciar que la forma que siguen las líneas corresponde aproximadamente a un ancho de banda igual a 2β .



Coeficientes de Bessel

β	J0	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12
0.00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0.998	0.050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.984	0.124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	0.938	0.242	0,031	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.75	0.864	0.349	0,067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.00	0.765	0,44	0,115	0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	0,646	0,511	0,171	0,037	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.50	0,512	0,558	0,232	0,061	0,012	0	0	0	0	0	0	0	0
1.75	0,369	0,58	0,294	0,092	0,021	0	0	0	0	0	0	0	0
2.00	0,224	0,577	0,353	0,129	0,034	0	0	0	0	0	0	0	0
2.50	-0,048	0,497	0,446	0,217	0,074	0,02	0	0	0	0	0	0	0
3.00	-0,26	0,339	0,486	0,309	0,132	0,043	0,011	0	0	0	0	0	0
3.50	-0,38	0,137	0,459	0,387	0,204	0,08	0,025	0	0	0	0	0	0
4.00	-0,397	-0,066	0,364	0,43	0,281	0,132	0,049	0,015	0	0	0	0	0
4.50	-0,321	-0,231	0,218	0,425	0,348	0,195	0,084	0,03	0	0	0	0	0
5.00	-0,178	-0,328	0,047	0,365	0,391	0,261	0,131	0,053	0,018	0	0	0	0
5.50	0	-0,341	-0,117	0,256	0,397	0,321	0,187	0,087	0,034	0,011	0	0	0
6.00	0,151	-0,277	-0,243	0,115	0,358	0,362	0,246	0,13	0,057	0,021	0	0	0
6.50	0,26	-0,154	-0,307	-0,035	0,275	0,374	0,3	0,18	0,088	0,037	0,013	0	0
7.00	0,3	0	-0,301	-0,168	0,158	0,348	0,339	0,234	0,128	0,059	0,024	0	0

- La pregunta que surge es: **¿Cuánto del espectro es significativo?**

Reglas prácticas establecen que se pueden despreciar coeficientes a partir de $\epsilon < 0,1$ ó $\epsilon < 0,01$ dependiendo de la aplicación.

- Por ello, se busca en la tabla de coeficientes un valor de M tal que:

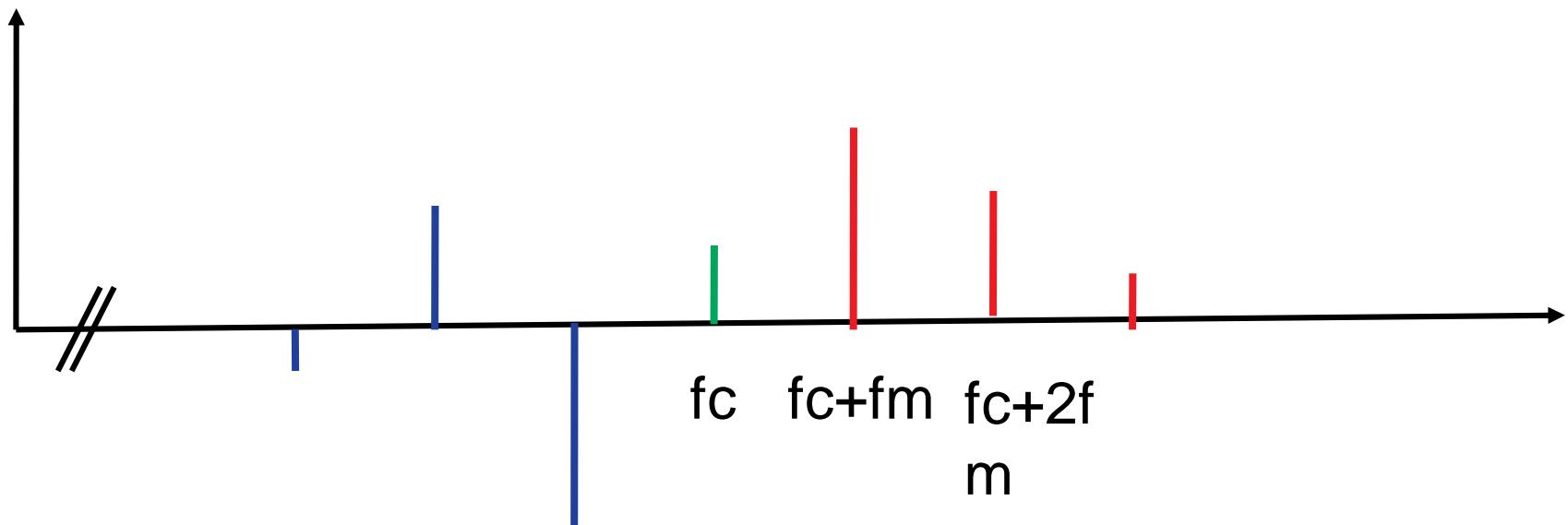
$$|J_{M+1}(\beta)| < \epsilon \quad \text{y} \quad |J_M(\beta)| > \epsilon$$

Por ejemplo: con $b = 2$, tomando $\epsilon=0,1$ resulta $|J_{M+1}(\beta)| = 0,034$ y $|J_M(\beta)| = 0,129$. Es decir que $J_3(\beta)$ es la última línea significativa. Por ello, habrá 3 pares de bandas laterales (además de la portadora).

Coeficientes de Bessel

β	J0	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12
0.00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0.998	0.050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.984	0.124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	0.938	0.242	0.031	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.75	0.864	0.349	0.067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.00	0.765	0.44	0,115	0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	0.646	0.511	0.171	0.037	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.50	0.512	0.558	0.232	0.061	0,012	0	0	0	0	0	0	0	0
1.75	0.369	0.58	0.294	0.092	0,021	0	0	0	0	0	0	0	0
2.00	0.224	0.577	0.353	0,129	0,034	0	0	0	0	0	0	0	0
2.50	-0,048	0.497	0.446	0.217	0,074	0,02	0	0	0	0	0	0	0
3.00	-0.26	0.339	0.486	0.309	0.132	0.043	0.011	0	0	0	0	0	0

- Espectralmente (para $f>0$):



Luego, el ancho de banda es:

$$B = 2M(\beta)f_m \quad M(\beta) > 1$$

- Donde M es la cantidad de líneas significativas.

Estudios experimentales demuestran que $\varepsilon < 0,01$ es muy conservativo. Por otro lado, $\varepsilon < 0,1$ puede resultar en una pequeña pero distingible distorsión.

Para señales que no sean un tono, se debe cumplir que : $A_m < 1$ y $f_m < W$. Teniendo en cuenta esto, los valores de $M(\beta)$ se aproximan a $M(\beta) = \beta + 2$. Se puede aproximar:

$$B \approx 2(\beta + 2)f_m = 2\left(\frac{A_m f_\Delta}{f_m} + 2\right)f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m)$$

- Y en las condiciones previas, puede decirse que:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W) \quad \text{si} \quad \beta > 2$$

Podemos ahora escribir el ancho de banda de una señal arbitraria $x(t)$ como:

$$B_T = 2M(D)W$$

- Se puede aproximar:

$$B_T = \begin{cases} 2DW = 2f\Delta & D \gg 1 \\ 2W & D \ll 1 \end{cases}$$

Ambos límites se pueden combinar en una relación denominada la *regla de Carlson*.

$$B_T \approx 2(f_\Delta + W) = 2(D + 1)W$$

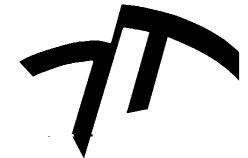
- Esta se cumple si $D \gg 1$ y $D \ll 1$.
- Pero para valores $2 < D < 10$, la regla de Carlson subestima el ancho de banda. Por ello, una mejor aproximación en estos casos es la siguiente:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W) = 2(D + 2)W \quad D > 2$$

- Estimaciones basada en potencia:

B_T = Ancho de banda que contiene el 90% de la potencia total.





Distorsión y Limitadores

Dr. Ing. Alejandro José Uriz
Facultad de Ingeniería



Distorsión no lineal y limitadores

La distorsión de amplitud de una onda de FM produce una conversión de FM en AM. Veremos que la modulación de amplitud resultante puede ser eliminada mediante el uso controlado de distorsión no lineal y filtrado.

Para nuestro análisis, supongamos que la señal de entrada en la Fig. 7.11 sea:

$$v_{in}(t) = A(t) \cos \theta_c(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] \quad (7.76)$$



El elemento no lineal se asume sin memoria, es decir, sin elementos que almacenen energía, por lo que la entrada y la salida están relacionados por una transferencia instantánea $v_{out}=T[v_{in}]$. Además, asumiremos por conveniencia que $T[0]=0$.

A pesar de que $v_{in}(t)$ no es necesariamente periódica en el tiempo, puede ser vista como una función periódica de θ_c con período 2π . Como la salida será función periódica de θ_c , puede ser expandida en serie trigonométrica de Fourier:

$$v_{out} = \sum_{n=1}^{\infty} |2a_n| \cos(n\theta_c + \arg a_n) \quad (7.77)$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int T[v_{in}] e^{-jn\theta_c} d\theta_c \quad (7.78)$$

La variable tiempo no aparece aquí explícitamente, pero v_{out} depende de t a través de la variación en el tiempo de θ_c . Adicionalmente, los coeficientes a_n pueden ser función del tiempo, cuando la amplitud de v_{in} tiene variaciones en el tiempo.

Inicialmente consideremos el caso de una entrada de FM sin distorsión, por lo que $A(t)$ es una constante A_c y todos los coeficientes a_n son constantes. Escribiendo la Ecuac. 7.77 término a término, con t explícitamente incluído, tenemos:

$$v_{out}(t) = |2a_1| \cos[\varpi_c t + \phi(t) + \arg a_1] + |2a_2| \cos[2\varpi_c t + 2\phi(t) + \arg a_2] + \dots \quad (7.79)$$

Esta expresión revela que la distorsión no lineal produce ondas moduladas en FM en las armónicas de la frecuencia portadora, teniendo la n-ésima una amplitud constante $|2a_n|$ y una modulación de fase $n\Phi(t)$ más un desplazamiento de fase constante $\arg a_n$.

Si estas ondas no se solapan en el dominio de la frecuencia, se puede recobrar la entrada *sin distorsión* aplicando la salida distorsionada a un filtro pasabanda, que permita el paso de la portadora y sus bandas laterales. Es decir, se cambia $A(t)$, que contiene modulación de amplitud por $|2a_n|$ que es una constante. Podemos concluir que FM tiene una inmunidad considerable contra los efectos de la distorsión no lineal mediante el uso de limitadores.

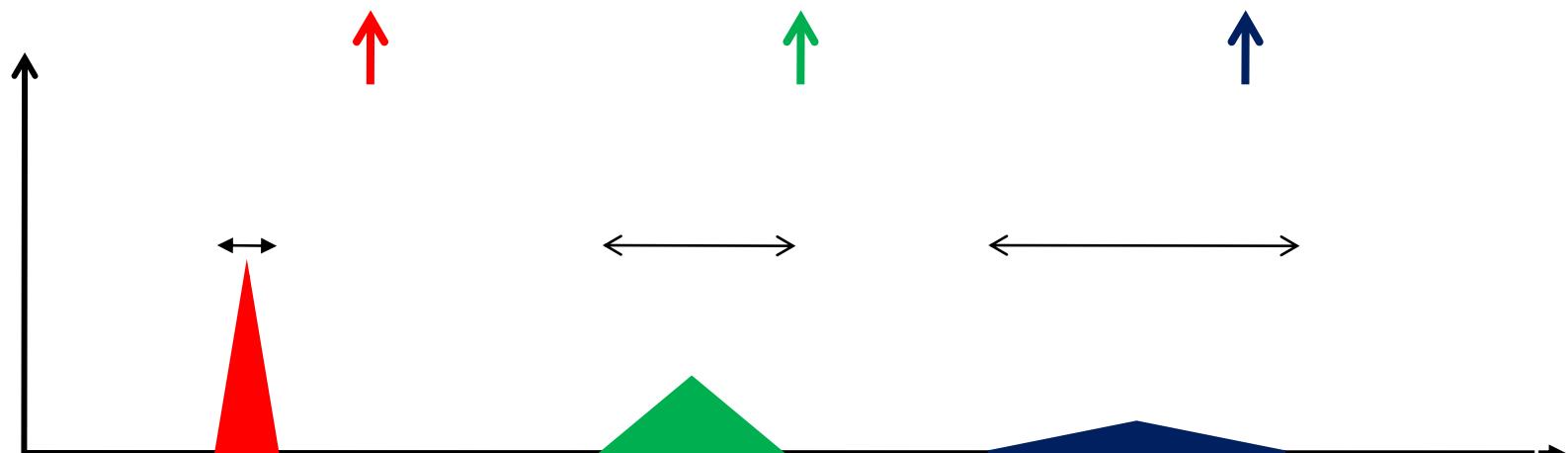
Volviendo a las variaciones de amplitud no deseadas $A(t)$ de una onda de FM, pueden ser eliminadas por medio de un *limitador* o *recortador* cuya transferencia se muestra en la Fig. 7.12.

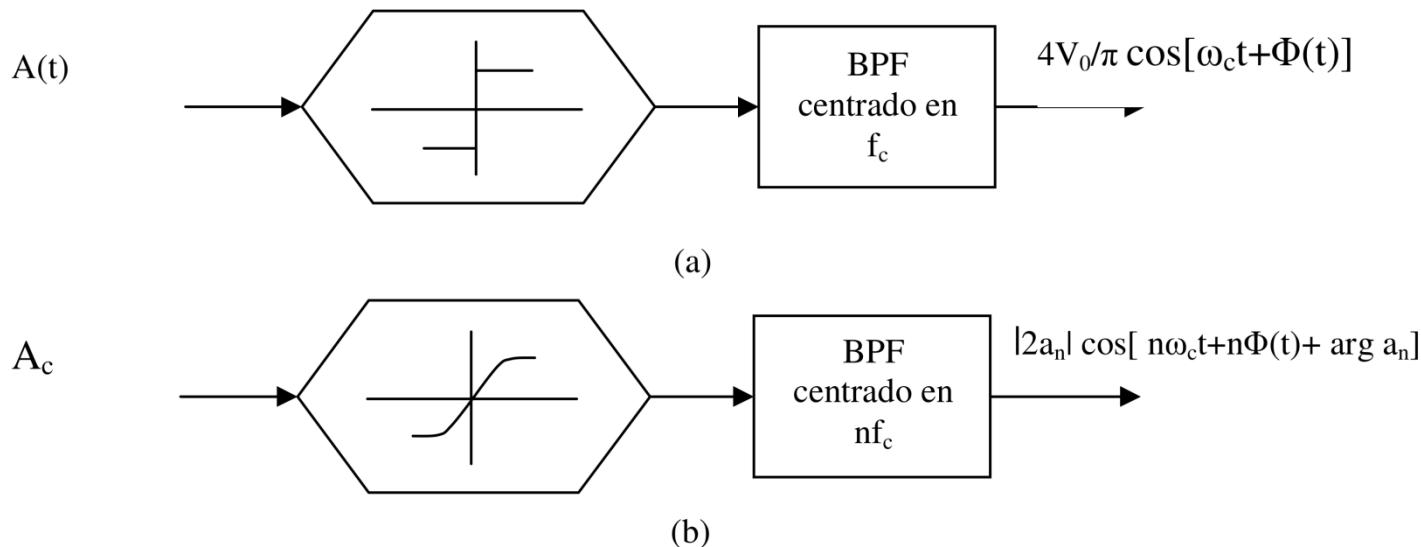
Los coeficientes que se obtienen con la Ecuac. 7.78 son:

$$a_n = \begin{cases} +\frac{2V_0}{n\pi} & n = 1,5,9,\dots \\ -\frac{2V_0}{n\pi} & n = 3,7,11,\dots \\ 0 & n = 2,4,6,\dots \end{cases} \quad (7.81)$$

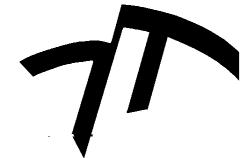
Que son independientes del tiempo, ya que $A(t) > 0$ no afecta el signo de v_{in} . Por lo tanto la salida será:

$$v_{out}(t) = \frac{4V_0}{\pi} \cos[w_c t + \phi(t)] - \frac{4V_0}{3\pi} \cos[3w_c t + 3\phi(t)] + \frac{4V_0}{5\pi} \cos[5w_c t + 5\phi(t)] + \dots \quad (7.82)$$





La Fig. 7.13 sumariza los resultados. El limitador más un filtro pasabanda centrado en la frecuencia de portadora, remueve las variaciones de amplitud de PM o FM, y se utiliza en los receptores, como operación previa a la demodulación. De esta forma, nos aseguramos que la salida del demodulador sólo responderá a los cruces por cero, donde reside la información y no a las variaciones de amplitud que las distorsiones no lineales hayan creado. Si el filtro pasabanda está centrado en una armónica de la portadora, se obtiene un *multiplicador de frecuencia*. Su utilización principal es en ciertos tipos de transmisores de FM, para aumentar el índice de desviación de frecuencia, o simplemente para obtener un múltiplo de una frecuencia.



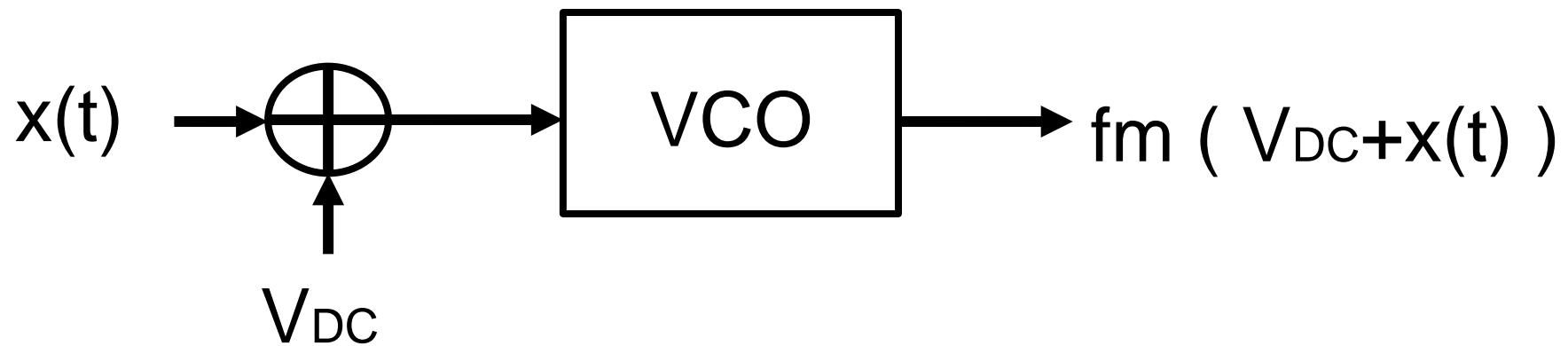
Generación de FM y PM

VCO's y FM directa
FM indirecta y moduladores de fase

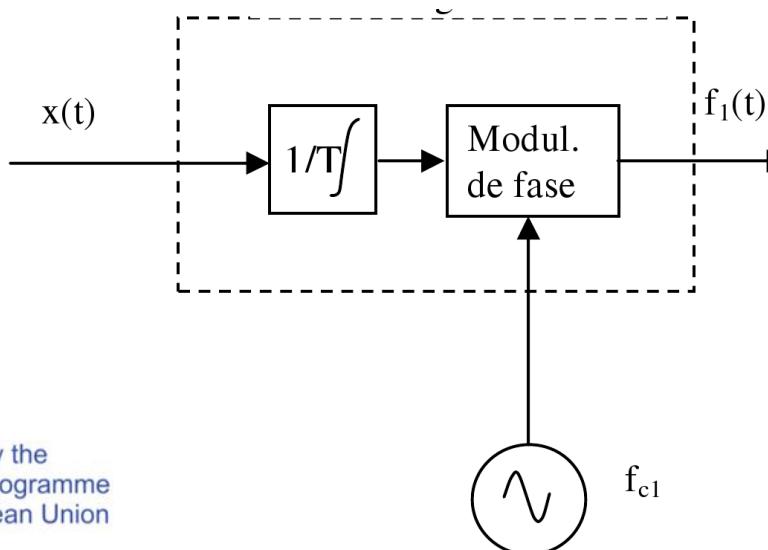
Dr. Ing. Alejandro José Uriz
Facultad de Ingeniería

Como se vió previamente hay dos alternativas para la generación de FM:

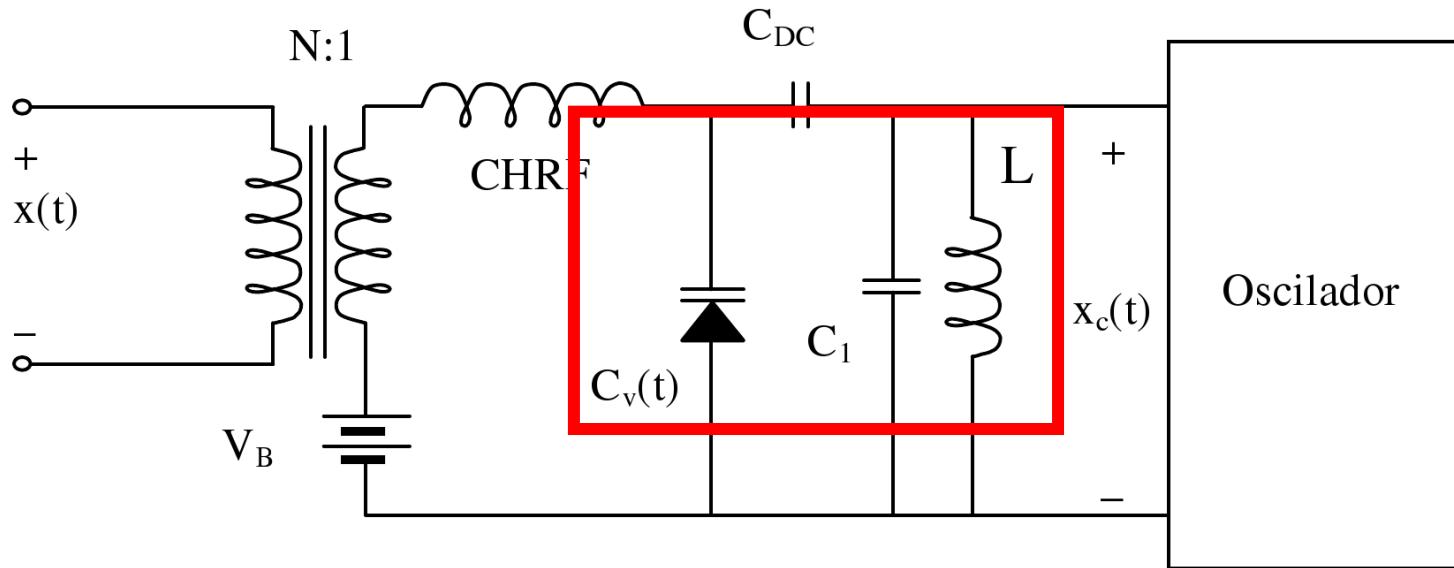
- Método Directo.



- Método Indirecto.



• Método directo de generación de FM



Este circuito consiste en un VCO. Su frecuencia de resonancia depende de L y C . La capacidad total del sistema es controlada mediante $x(t)$.

- Pero la mayor desventaja de este circuito es que su frecuencia de portadora tiende a desplazarse, por lo que debe ser estabilizado con un circuito de control mas elaborado, conocido como un PLL. Este es realizado con divisores y comparadores digitales.
- Por dicha razón hasta que no aparecieron los circuitos digitales, los moduladores fueron del tipo indirecto.

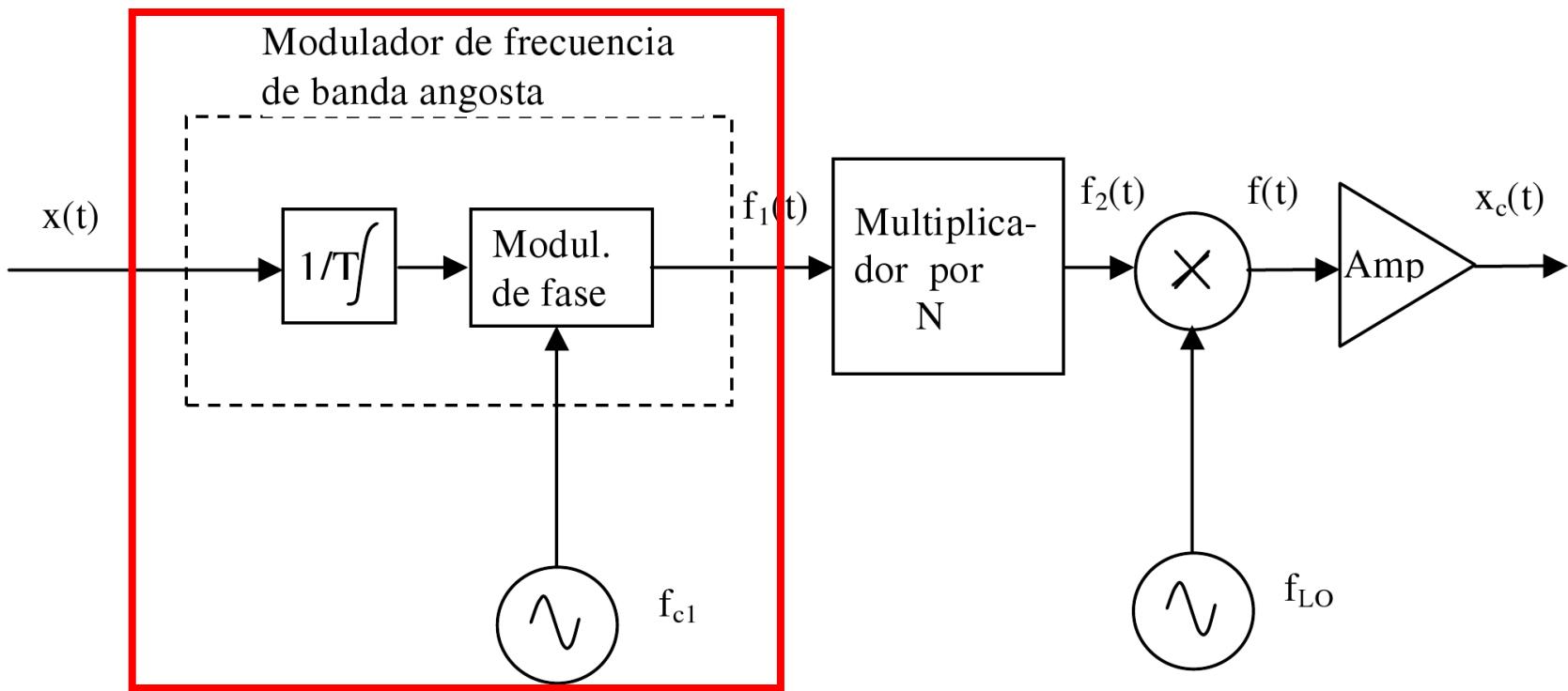
Método indirecto de generación de FM

Si bien PM es raramente usada, sus moduladores son interesantes porque:

Su implementación es simple.

La portadora puede obtenerse mediante un oscilador local estable (por ejemplo: un cristal).

Mediante la integración del mensaje, puede obtenerse a su salida FM.



El integrador y el modulador constituyen un modulador de FM de banda angosta. Esto genera NBFM con :

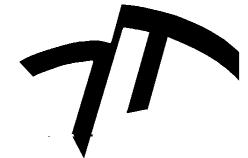
$$f_1(t) = f_{c1} + \frac{\phi_\Delta}{2\pi T} x(t)$$

Luego, la frecuencia instantánea a la salida será:

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

Esta conversión incluso puede realizarse en cualquier punto de los multiplicadores con el fin de mantener la frecuencia en cada punto del sistema relativamente baja.

Asimismo, sólo cambiado el oscilador local, es posible reubicar la frecuencia de portadora.



Detección de Frecuencia

Dr. Ing. Alejandro José Uriz
Facultad de Ingeniería

Detección de frecuencia

Un detector de frecuencia, comúnmente llamado *discriminador*, produce una tensión de salida que varía linealmente con la frecuencia instantánea de la entrada. Existen muchas variantes en circuitos de detectores de frecuencia, pero todos se pueden clasificar dentro de las cuatro categorías siguientes:

1. Conversión FM a AM.
2. Discriminadores por desplazamiento de fase.
3. Detección por cruce por cero.
4. Realimentación de frecuencia.

No se analizarán los detectores de fase, porque raramente se los utiliza, y en caso de ser necesario se pueden implementar simplemente integrando la salida de un detector de FM.

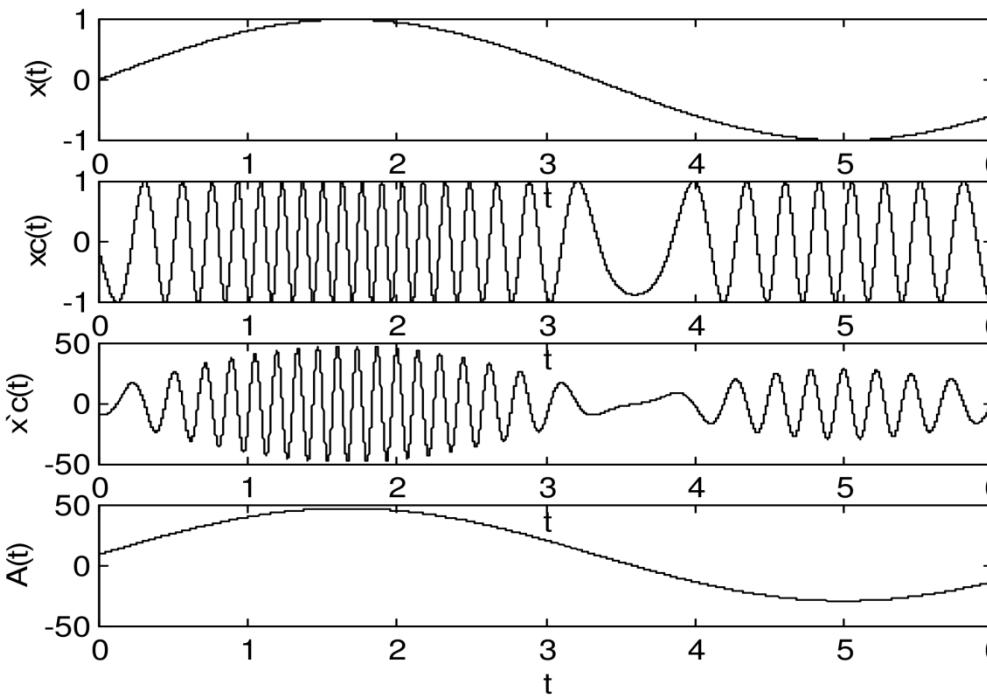
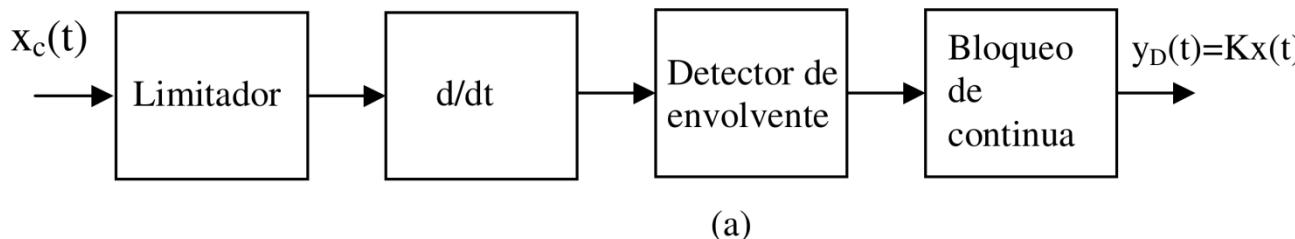
Cualquier dispositivo o circuito que produzca en la salida, la *derivada en el tiempo* de su entrada, produce conversión de FM a AM. Específicamente, si la entrada es una onda modulada exponencialmente:

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) \quad (7.92)$$

$$\dot{\theta}_c(t) = 2\pi [f_c + f_\Delta x(t)] \quad (7.93)$$

$$\dot{x}_c(t) = -A_c \dot{\theta}_c(t) \sin \theta_c(t) = 2\pi A_c [f_c + f_\Delta x(t)] \sin [\theta_c(t) \pm 180^\circ] \quad (7.94)$$

La expresión 7.91 tiene una amplitud constante A_c que no es función del tiempo, pero en la expresión 7.94 aparece una amplitud función del tiempo, que tiene la forma de una modulación de amplitud, con un índice de modulación f_Δ/f_c . Por lo tanto si aplicamos la forma de onda de la Ecuac. 7.94 a un detector de envolvente, nos dará un salida proporcional a $f(t)=f_c+f_\Delta x(t)$, es decir proporcional al mensaje.



Se observa que la amplitud de la portadora A_c es un factor dentro de la salida en la Ecuac.7.94. Si A_c es constante, simplemente será un factor de escala, pero como consecuencia de las alinealidades que seguramente atravesó $x_c(t)$ en etapas anteriores, dejará de ser constante y se hace necesario utilizar un *limitador* para eliminar las variaciones de amplitud.

El demodulador de *cuadratura* o por desplazamiento de fase, en contraste con los anteriores que utilizan una transferencia lineal en amplitud, utiliza circuitos de transferencia de fase lineal. Utiliza como principio una aproximación para la derivada con respecto al tiempo, dada por:

$$\dot{v}(t) \approx \frac{1}{t_1} [v(t) - v(t - t_1)] \quad (795)$$

Es decir, el cociente entre el incremento de la función y el el incremento de la variable, nos dará el valor de la pendiente en ese punto, siempre que el incremento sea muy pequeño, con lo que se obtiene la derivada con respecto al tiempo.

Una onda modulada en FM tiene:

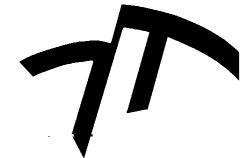
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_c(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_c + f_\Delta x(t) \quad (7.96)$$

$$\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t) \quad (7.97)$$

Utilizando la aproximación:

$$\phi(t) - \phi(t - t_1) \approx t_1 \dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta t_1 x(t)$$

(7.98)



Interferencia en modulación lineal y exponencial

Dr. Ing. Alejandro José Uriz
Facultad de Ingeniería

INTERFERENCIA

Con interferencia se quiere significar la contaminación de la señal con otra señal, que generalmente tiene origen en un sistema o dispositivo utilizado por algún usuario. Un ejemplo puede ser cuando una antena de recepción tomas dos señales en la misma banda de frecuencias, y que corresponden a distintas emisoras. Otro ejemplo es la propagación multirayectoria, mediante la que se reciben dos o más señales de la misma antena, pero con diferencias de amplitud y fase entre ellas. A diferencia del ruido, el control del origen de una interferencia, depende de la actividad humana, en tanto que el ruido depende de causas naturales, y no puede gobernarse. De todos modos, cualquiera sea su causa, la interferencia severa puede hacer imposible la recuperación del mensaje. Comenzaremos nuestro estudio con ejemplos simples de interferencias causadas por sinusoides, que representan portadoras sin modulación, para ver las diferencias entre los efectos de la interferencia en AM, PM y FM.

Sinusoides interferentes.

Consideremos un receptor sintonizado a una frecuencia de portadora f_c , y cuya señal recibida está formada por la señal deseada, en la forma de una portadora sin modulación, y otro término es la portadora interferente, con amplitud A_i , frecuencia f_c+f_i y un ángulo relativo Φ_i

$$v(t) = A_c \cos \varpi_c t + A_i \cos[(\varpi_c + \varpi_i)t + \phi_i] = A_v(t) \cos[\varpi_c t + \phi_v(t)] \quad (7.104)$$

Introduciremos las siguientes relaciones:

$$\rho \equiv \frac{A_i}{A_c} \quad \theta_i(t) \equiv \varpi_i t + \phi_i \quad (7.105)$$

La suma de los términos de la Ecuac. 7.104 se pueden expresar como módulo y fase de una señal pasabanda, como se muestra en el diagrama fasorial de la Fig. 7.20:

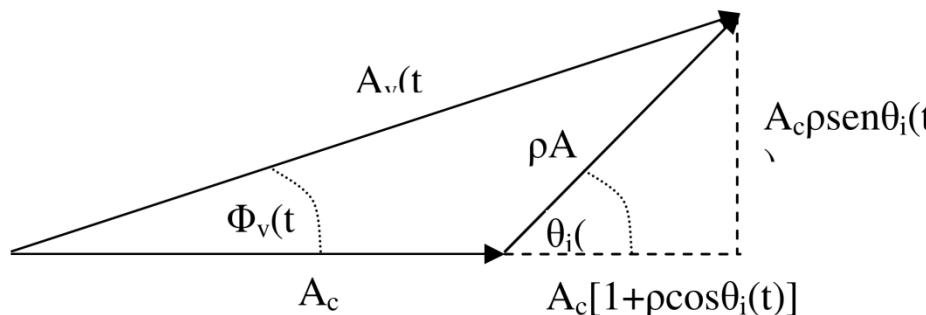


Fig. 7.20 Diagrama fasorial de interferencia

$$A_v(t) = A_c \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta_i(t)}$$

$$\phi_v(t) = \arctan \frac{\rho \sin \theta_i(t)}{1 + \rho \cos \theta_i(t)}$$

Estas expresiones nos muestran que la interferencia produce tanto modulación de amplitud como modulación de fase. En el caso de que $\rho \ll 1$, entonces:

$$A_v(t) \approx A_c [1 + \rho \cos(\varpi_i t + \phi_i)] \quad (7.109)$$

$$\phi_v(t) \approx \rho \sin(\varpi_i t + \phi_i) \quad (7.110)$$

Por lo que la envolvente contiene modulación de amplitud, que corresponde a un tono de frecuencia f_i , es decir a la diferencia entre la frecuencia de la portadora y la de la interferencia, con índice de modulación ρ , y además modulación de fase o frecuencia, con índice $\beta = \rho$.

En el otro extremo, si $\rho \gg 1$, entonces:

$$A_v(t) \approx A_i [1 + \rho^{-1} \cos(\varpi_i t + \phi_i)] \quad (7.111)$$

$$\phi_v(t) \approx (\varpi_i t + \phi_i) \quad (7.112)$$

La envolvente aún contiene modulación de amplitud, pero la fase corresponde a una portadora desplazada a $f_c + f_i$, más una constante Φ_i .

Veremos que sucede si esta señal ingresa a un detector ideal, que puede ser de AM, FM o PM, con una constante K_D . Tomaremos el caso de interferencia débil ($\rho \ll 1$) y usaremos las aproximaciones de las Ecuac. 7.109 y 7.110, con $\Phi_i=0$. La salida del detector será en cada caso:

$$y_D(t) \approx \begin{cases} A_v(t) = K_D(1 + \rho \cos \varpi_i t) & AM \\ \phi_v(t) = K_D \rho \sin \varpi_i t & PM \\ \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}_v(t) = K_D \rho f_i \cos \varpi_i t & FM \end{cases} \quad (7.113)$$

Siempre que $|f_i| < W$, de otro modo el filtro pasabajos a la salida del detector rechazará las frecuencias en que $|f_i| > W$. El término constante en el detector de AM, será removido si a la salida del mismo hay bloqueo de continua. Como se asumió $\Phi_i=0$, los resultados para el detector de envolvente se mantendrán para la detección sincrónica, para DSB y SSB.

La Ecuac. 7.113 muestra que la interferencia débil en un sistema de modulación lineal, o en un sistema de modulación de fase, produce un tono espurio a la salida, con amplitud proporcional a $\rho = A_i/A_c$, independiente de f_i . Pero en FM la amplitud del tono es proporcional a ρf_i por lo que, si la señal interferente está en la misma frecuencia que la portadora de la señal deseada, con lo que $f_i=0$, no se producirá el tono espurio a la salida. Por ello, FM es más vulnerable a la interferencia de canal adyacente⁷, donde f_i no es cero. La Fig. 7.21 muestra esta diferencia graficando la amplitud de la interferencia demodulada versus $|f_i|$. El punto de cruce corresponde a una frecuencia de 1 Hz. si todos los detectores tienen la misma constante K_D .

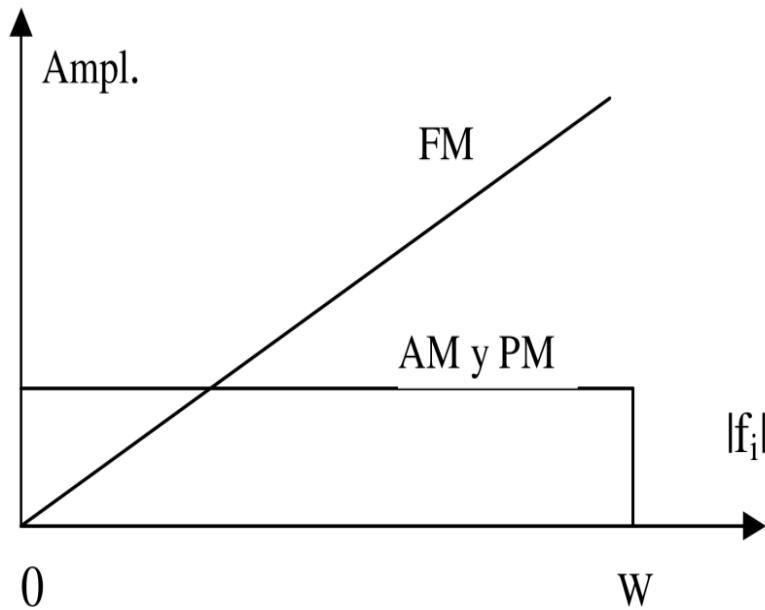
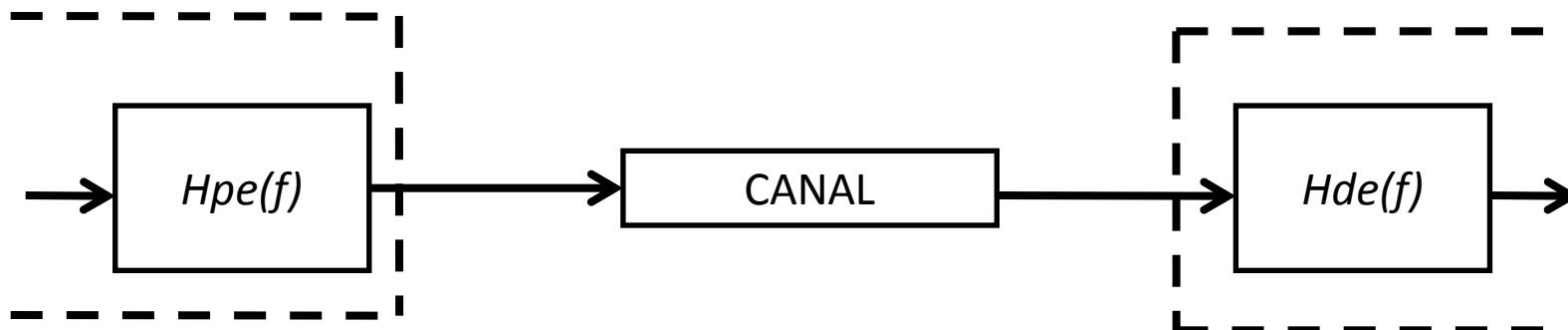


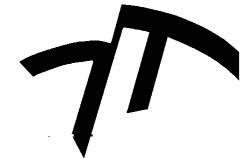
Fig. 7.21 Amplitud de la interferencia demodulada de una portadora a f_c+f_i

Filtrado de pre-énfasis de-énfasis

El hecho de que la interferencia detectada en FM sea más severa para grandes valores de $|f_i|$, sugiere un método para mejorar la performance del sistema, mediante un filtrado de post-detección selectivo, llamado *de-énfasis*. Supongamos que a continuación del detector colocamos un filtro pasabajos, cuya relación de amplitudes comienza a decrecer gradualmente a frecuencias por debajo de W ; esto reducirá las amplitudes de las frecuencias más altas, y por ende la interferencia. Obviamente, también atenuará la porción de frecuencias altas del mensaje, causando distorsión a la salida del mensaje detectado. Pero se puede compensar esta distorsión, mediante una pre-distorsión o *pre-énfasis*, en la señal que se envía al transmisor, previo a su modulación. Para que la compensación entre ambas operaciones, el de-énfasis y el pre-énfasis, sea de modo que no modifique el mensaje, se debe cumplir que:

$$H_{pe}(f) = \frac{1}{H_{de}(f)} \quad |f| \leq W \quad (7.114)$$





Modulación Exponencial con ruido

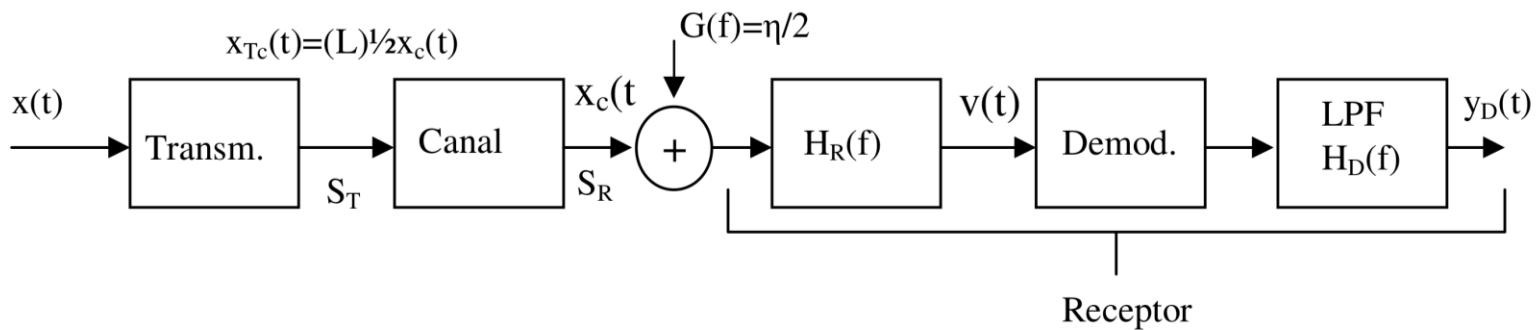
Dr. Ing. Alejandro José Uriz



8.4 Modulación exponencial con ruido

En esta sección veremos como se comportan los sistemas de FM y PM en presencia de ruido. Dada la naturaleza no lineal de la modulación exponencial, que dificulta el análisis, comenzaremos en condiciones de gran relación señal a ruido ($S/N_R \gg 1$), para determinar el ruido de postdetección, y las relaciones señal a ruido de postdetección

Modelo generalizado:



Ruido de postdetección

La porción de predetección de un receptor de modulación exponencial tiene la estructura mostrada previamente en la Fig. 8.4. La señal recibida es:

$$x_c(t) = A_c \cos[\varpi_c t + \phi(t)] \quad (8.68)$$

donde $\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_\Delta x(t)$ para una onda de PM, o $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ para una onda de FM. En cualquiera de los casos, la amplitud de la portadora permanece constante, por lo que:

$$S_R = \frac{A_c^2}{2} \quad \left(\frac{S}{N} \right)_R = \frac{A_c^2}{2\eta B_T} \quad (8.69)$$

La relación señal a ruido de predetección de la Ecuac. 8.69 se conoce comúnmente como *carrier to noise relation* (CNR) para los sistemas de modulación exponencial. Se asume que el filtro de predetección $H_R(f)$ es prácticamente ideal, tiene un ancho de banda B_T y está centrado en f_c .

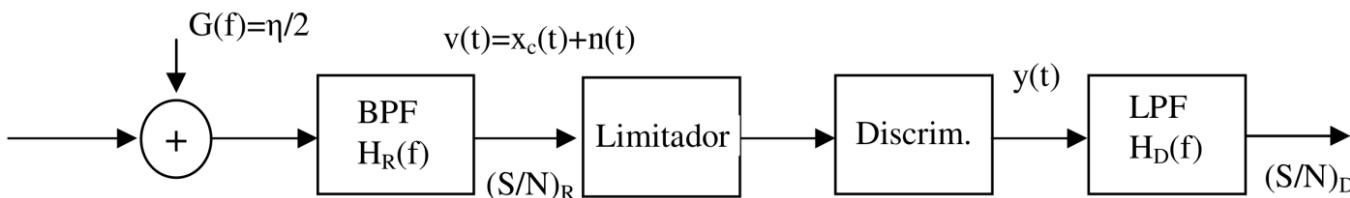


Fig. 8.9 Modelo de detección para modulación exponencial con ruido.

En la Fig. 8.9 se puede observar nuestro modelo de detección para modulación exponencial con ruido, destacando la presencia del bloque del limitador, que siempre precede a la detección en los receptores de modulación exponencial, y además, la denominación del detector se cambiado por la discriminador, como se lo conoce habitualmente. La tensión de entrada al discriminador es:

$$v(t) = x_c(t) + n(t) = A_v(t) \cos[\varpi_c t + \phi_v(t)] \quad (8.70)$$

El limitador suprime cualquier variación de amplitud en $A_v(t)$. Para encontrar la señal y el ruido contenido en $\Phi_v(t)$, expresaremos $n(t)$ en la forma de envuelta y fase, y escribiremos:

$$v(t) = A_c(t) \cos[\varpi_c t + \phi(t)] + A_n(t) \cos[\varpi_c t + \phi_n(t)] \quad (8.71)$$

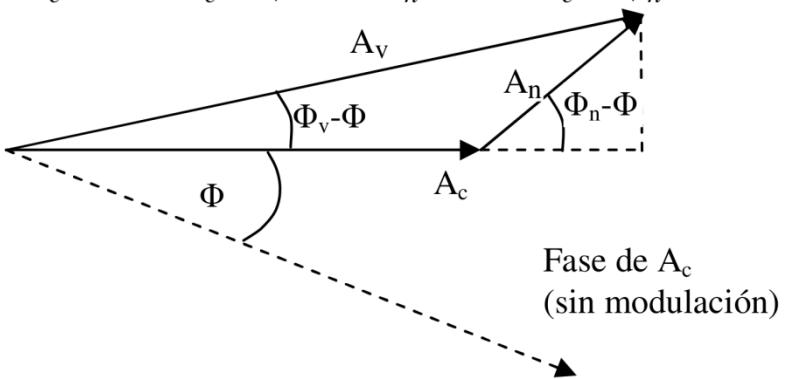


Fig. 8.10 Diagrama fasorial de modulación exponencial con ruido.

La construcción del fasor de la Fig. 8.10 nos muestra que:

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan \frac{A_n(t) \sin[\phi_n(t) - \phi(t)]}{A_c + A_n(t) \cos[\phi_n(t) - \phi(t)]} \quad (8.72)$$

El primer término de $\Phi_v(t)$ es la fase de la señal en sí misma, pero el segundo término involucra tanto a la señal como al ruido, y es el que contamina la fase total, pero no podremos avanzar sin hacer algunas simplificaciones al mismo.

Una simplificación lógica se basa en que $(S/N)_R \gg 1$, por lo que $A_c \gg A_n$ durante la mayor parte del tiempo. Podemos usar la aproximación del argumento pequeño para el arco tangente, por lo que reemplazaremos la función arco tangente por su argumento. Una simplificación menos obvia ignora $\Phi(t)$ en el segundo término de la Ecuac. 8.72, reemplazando $\Phi_n(t) - \Phi(t)$ por $\Phi_n(t)$. Justificaremos este paso para los efectos del análisis del ruido, recordando que $\Phi_n(t)$ tiene una distribución uniforme sobre 2π radianes. Por ello, el promedio en el ensamble $\Phi_n(t) - \Phi(t)$ difiere de $\Phi_n(t)$ sólo por un desplazamiento en el valor medio. Con esas simplificaciones, la Ecuac. 8.72 se transforma en:

$$\phi_v(t) \approx \phi(t) + \psi(t) \quad (8.73)$$

donde hemos descompuesto la fase en dos términos, uno que depende solamente de la señal, y otro que depende solamente del ruido. Podemos entonces decir, que en condiciones de gran señal, $A_c \gg A_n$, señal y ruido son *aditivos*. Definimos entonces la fase instantánea de ruido como:

$$\psi(t) \equiv \frac{A_n(t) \sin \phi_n(t)}{A_c} = \frac{1}{\sqrt{2S_R}} n_q(t) \quad (8.74)$$

$$\psi(t) \equiv \frac{An(t)\sin\phi n(t)}{A_c} = \frac{1}{\sqrt{2S_R}}n_q(t) \quad (8.74)$$

Con el reemplazo sugerido por la Ecuac. 8.69, podemos ver que la fase instantánea de ruido depende de la componente en cuadratura de ruido, y que disminuye cuando aumenta la señal recibida.

Usaremos estos resultados para obtener la potencia de ruido de postdetección en PM, para lo cual supondremos que la señal que ingresa no está modulada, de modo que la salida del detector es solamente ruido. Para ello, haremos $\Phi(t)=0$, y consideraremos el ruido resultante $\psi(t)$ a la salida de un discriminador de fase, que en PM, será $y(t)=\Phi_v(t)$. La potencia promedio resulta entonces:

$$\overline{\psi^2} = \frac{\overline{n_q^2}}{2S_R} \quad (8.75)$$

El espectro de potencia de ruido tiene la forma de $G_{nq}(f)$ de la Fig 8.3 (b), es decir corresponde al caso simétrico, pero como lo que tenemos en la Ecuac. 8.75 es la potencia de la componente en cuadratura de ruido, pero dividida por $2S_R$, el espectro de potencia de ruido deberemos también dividirlo por $2S_R$. Luego:

$$G_\psi(f) \approx \frac{\eta}{2S_R} \prod \left(\frac{f}{B_T} \right) \quad (8.76)$$

que es esencialmente plano sobre el intervalo de frecuencias $-B_T/2$ a $+B_T/2$, como se muestra en la Fig. 8.11.

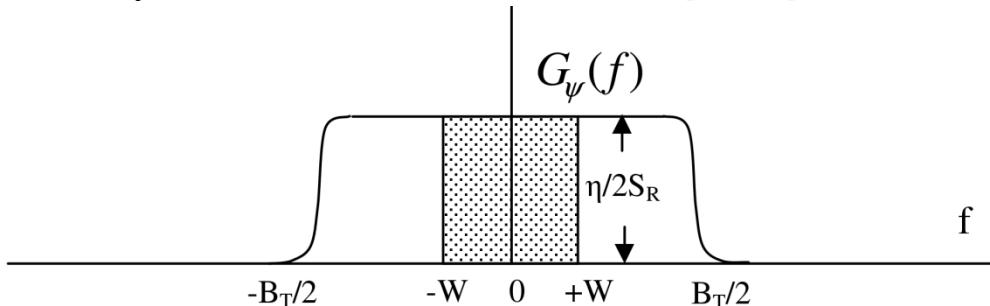


Fig. 8.11. Espectro de potencia de ruido de postdetección en PM

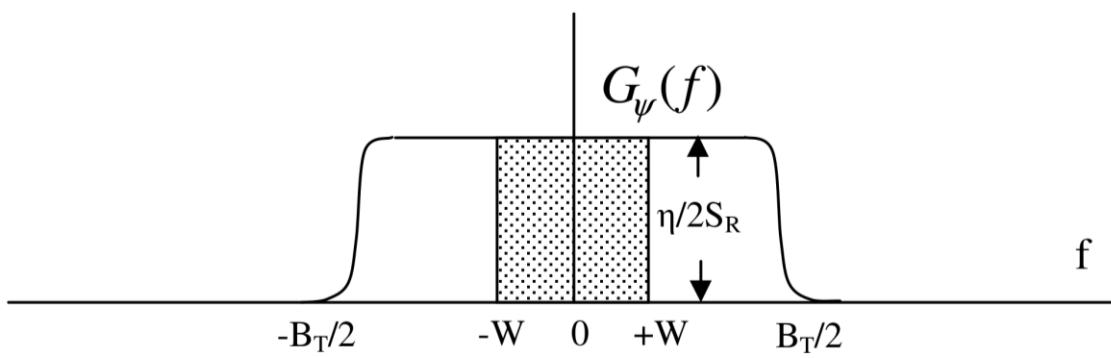


Fig. 8.11. Espectro de potencia de ruido de postdetección en PM

Como $B_T/2$ excede el ancho de banda del mensaje W , salvo para el caso especial de NBPM, el receptor debe incluir un *filtro de postdetección* $H_D(f)$ para eliminar la potencia de ruido que está fuera de banda, es decir por encima de W . Si $H_D(f)$ es un filtro pasabajos ideal, con ganancia unitaria y ancho W , la potencia de ruido en el destino será:

$$N_D = \int_{-W}^{+W} G_\psi(f) df = \frac{\eta W}{S_R} \quad (8.77)$$

La potencia de ruido de postdetección en PM crece con W y es inversamente proporcional a S_R . En la Fig. 8.11, el área sombreada es igual a N_D , el resto es la potencia de ruido en exceso, que crecerá en la medida que B_T sea mayor.

Para obtener la potencia de ruido de postdetección en FM, consideraremos ahora la salida de un discriminador de FM, cuya entrada es:

$$\phi_v(t) = \psi(t) \quad (8.78)$$

Es decir que seguimos considerando sólo el ruido, ya que suponemos que no hay modulación. El discriminador de FM entrega una tensión proporcional a la desviación de la frecuencia instantánea de la entrada, por lo que la salida será una *frecuencia instantánea de ruido*, que definiremos como:

$$\xi(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2S_R}} \dot{n}_q(t) \quad (8.79)$$

Para obtener el espectro de potencia de ruido en FM a la salida del discriminador, usaremos la propiedad que relaciona la derivada de una función con su espectro de potencia:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow G_y(f) = (2\pi f)^2 G_x(f) \quad (8.80)$$

Es el caso de una transferencia $H(f)=j2\pi f$ en el dominio de la frecuencia, que equivale a la derivación en el dominio del tiempo.

Utilizando esta propiedad en la Ecuac. 8.79, podemos obtener el espectro de potencia de ruido de postdetección en FM

$$G_\xi(f) = (2\pi f)^2 \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{2S_R}} \right)^2 G_{n_q}(f) = \frac{f^2}{2S_R} G_{n_q}(f) = \frac{\eta f^2}{2S_R} \prod \left(\frac{f}{B_T} \right) \quad (8.81)$$

Esta función parabólica se muestra en la Fig. 8.12, donde se observa que tiene componentes por encima de W como en PM, pero se incrementan con f^2 .

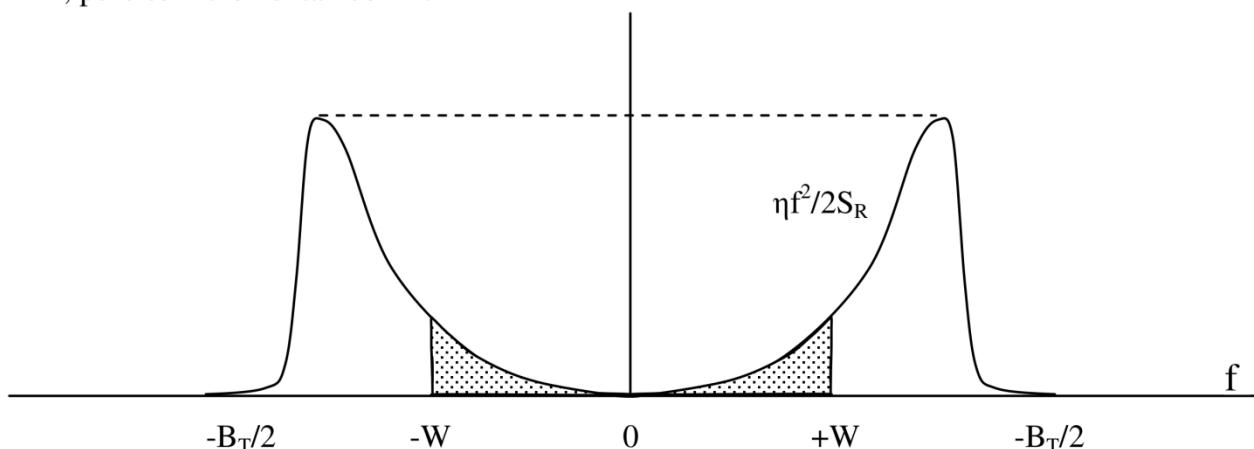


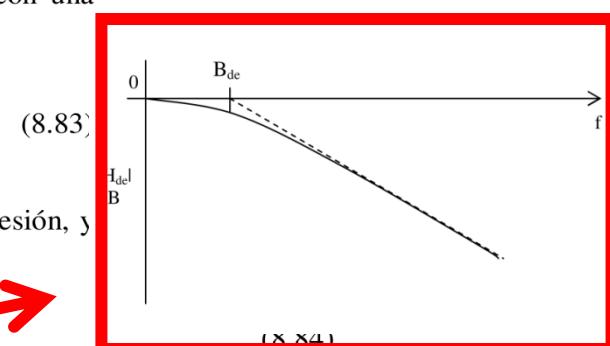
Fig. 8.12. Espectro de potencia ruido de postdetección en FM

Nos interesa dejar pasar sólo la parte sombreada de la Fig. 8.12, que es la zona donde está contenido el mensaje. Para ello, utilizamos un filtro pasabajos que suponemos ideal, es decir de transferencia unitaria en la banda de paso, y rectangular de ancho W. La potencia de ruido en el destino para FM será:

$$N_D = \int_{-W}^{+W} G_\xi(f) df = \frac{\eta W^3}{3S_R} \quad (8.82)$$

Sin embargo, habitualmente se utilizan redes de pre-énfasis y de de-énfasis en FM, ya que permiten mejorar el comportamiento del sistema frente a la interferencia y el ruido. En este caso, incorporamos un filtro con una transferencia tal que:

$$|H_D(f)| = |H_{de}(f)| \prod \left(\frac{f}{2W} \right)$$



La frecuencia de de-énfasis B_{de} es la que da la eficacia del filtrado, cuanto más baja, más eficiente la supresión, y la transferencia es:

$$|H_{de}(f)| = \left[1 + \left(\frac{f}{B_{de}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Aplicando esta transferencia para obtener la potencia de ruido de postdetección en FM con de-énfasis, se obtiene:

$$N_D = \int_{-W}^{+W} |H_{de}(f)|^2 G_\xi(f) df = 2 \int_0^{+W} \frac{f^2}{1 + \left(\frac{f}{B_{de}} \right)^2} \frac{\eta}{2S_R} df \quad (8.85)$$

$$N_D = \frac{\eta B_{de}^3}{S_R} \left[\left(\frac{W}{B_{de}} \right) - \arctan \left(\frac{W}{B_{de}} \right) \right] \quad (8.86)$$

En el caso usual que $\frac{W}{B_{de}} \gg 1$ se puede hacer una simplificación, ya que $\tan^{-1} \left(\frac{W}{B_{de}} \right) \approx \frac{\pi}{2} \ll \frac{W}{B_{de}}$ con lo que:

$$N_D \approx \frac{\eta B_{de}^2 W}{S_R} \quad (8.87)$$

Que es la potencia de ruido de postdetección en FM con de-énfasis, cuando $W \gg B_{de}$.



Resumiendo los resultados obtenidos hasta ahora, tenemos:

- 1) El ruido de postdetección en FM y en PM, tienen componentes fuera de la banda del mensaje, que hacen necesario el filtrado de postdetección. En modulación lineal, en cambio, el filtro $H_R(f)$ hacía innecesario un filtrado de postdetección.
- 2) El espectro de potencia de ruido de postdetección en FM tiene forma parabólica, mientras que el espectro de potencia de ruido de postdetección en PM es plano. Consecuentemente, las frecuencias más altas del mensaje sufren más contaminación en FM que las frecuencias más bajas. El filtrado de de-énfasis en FM, compensa este efecto, siempre que se haya usado filtrado de pre-énfasis previo al transmisor de FM.
- 3) La potencia promedio de ruido de postdetección N_D , tanto en PM como en FM, disminuye cuando S_R aumenta. Al aumentar S_R , se produce un *silenciamiento* del ruido detectado. Teóricamente, si S_R fuese cero, la potencia de ruido N_D según la Ecuac. 8.82 sería infinita, pero como hemos partido de la suposición de que $S_R \gg N_R$, estas expresiones no son válidas para el límite de este análisis.

De hecho, la salida del limitador fijará el nivel máximo de entrada al discriminador, y esta será la máxima potencia disponible de ruido detectado. Siendo este valor tan alto, se impone silenciar este ruido cuando no hay señal suficiente para ello. Se suele recurrir a un circuito, denominado *squelch*, que compara el nivel detectado de potencia de ruido por encima de W , con un valor ajustable de continua, y decide, según cual sea mayor, si debe cortarse la salida del detector.

Relación Señal a Ruido en el destino

Vamos a calcular la relación señal a ruido en el destino, para PM, FM, y FM con de-énfasis. Seguimos con la condición de que $S_R \gg N_R$, de modo que los resultados obtenidos anteriormente sigan siendo válidos. La presencia de una fase que corresponde a la señal $\Phi(t)$ a la entrada, no le quita validez, ya que si en vez de solamente $\Phi_n(t)$ hubiéramos considerado $\Phi_n(t) - \Phi(t)$ en la Ecuac. 8.72, un análisis mas complicado habría mostrado componentes adicionales en el espectro de potencia de ruido, que caen más allá de W, por lo que serán

$$y(t) = \phi_v(t) = \phi(t) + \psi(t) = \phi_\Delta x(t) + \psi(t) \quad (8.88)$$

El filtro de post-detección dejará pasar el término que corresponde a la señal en forma completa, por lo que el valor cuadrático medio del mismo nos dará S_D :

$$\overline{S_D} = \overline{\phi_\Delta^2 x^2(t)} = \phi_\Delta^2 S_x \quad (8.89)$$

Observar que a diferencia de la modulación lineal, el aumento de la potencia de señal transmitida S_T , no aumenta la salida del discriminador, sino que disminuye la potencia de ruido, y por este medio, mejora la relación señal a ruido en el destino.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{S_D}{\psi^2(t)} = \frac{\phi_\Delta^2 S_x}{\left(\frac{\eta W}{S_R}\right)} = \phi_\Delta^2 S_x \frac{S_R}{\eta W} = \phi_\Delta^2 S_x \gamma \quad (8.90)$$

Como el parámetro γ es igual a la S/N de salida de un sistema en banda base que tenga igual ancho de banda W, igual potencia de señal S_R , e igual densidad espectral de ruido η , vemos que un sistema de PM provee una mejora de $\phi_\Delta^2 S_x$ respecto a banda base. Pero como ϕ_Δ debe ser menor que π , para evitar ambigüedades, el valor máximo de $\phi_\Delta^2 S_x$ será π^2 , lo que representa unos 10 dB aprox. como máximo. Este es un límite extremo, habitualmente, $\phi_\Delta^2 S_x < 1$, con lo que la performance es inferior a banda base, mientras el ancho de banda $B_T \geq 2W$.

Pasando a un sistema de FM, la señal más el ruido demodulado serán proporcionales a la frecuencia instantánea:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}_v(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t) + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t) = f_\Delta x(t) + \xi(t) \quad (8.91)$$

Obtenemos la potencia promedio de la salida, teniendo en cuenta que el filtro de postdetección será de ancho W:

$$\overline{y^2(t)} = \overline{[f_\Delta x(t)]^2} + \overline{\xi^2(t)} = S_D + N_D = f_\Delta^2 S_x + N_D \quad (8.92)$$

Reemplazando N_D por la Ecuac. 8.82, obtenemos finalmente la relación señal a ruido en FM:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_D = \frac{f_\Delta^2 S_x}{\left(\frac{\eta W^3}{3S_R} \right)} = 3 \left(\frac{f_\Delta}{W} \right) S_x \frac{S_R}{\eta W} = 3D^2 S_x \gamma \quad (8.93)$$

Hemos usado la relación de desviación, $D=f_\Delta/W$, cuyo valor hace aumentar la S/N al cuadrado, sin necesidad de aumentar S_T . Según esto, podríamos hacer la S/N tan grande como quisiéramos, sin aumentar S_T , con solo aumentar D. Veremos después que esto no es exacto.

Mientras tanto, recordemos que el ancho de banda de transmisión requerido B_T aumenta con la desviación D. Por lo tanto, la Ecuac. 8.93 representa la *reducción de ruido de banda ancha*, o dicho de otro modo, la posibilidad de intercambiar aumento de ancho de banda por reducción de potencia transmitida, mientras se mantiene constante la relación S/N. Para remarcar esta propiedad, tomemos el caso de FM de banda ancha, con $D \gg 1$ y $B_T=2f_\Delta \gg W$. Con estos valores, la Ecuac. 8.93 resulta:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_D = \frac{3}{4} \left(\frac{B_T}{W} \right)^2 S_x \gamma \quad (8.94)$$

Con lo que obtenemos la relación señal a ruido en WBFM, que muestra que la S/N se incrementa con el cuadrado de la relación B_T/W .



Con pequeñas relaciones de desviación, el punto de ruptura comparado con banda base, ocurre cuando en la Ecuac. 8.93 el factor $3D^2S_x$ es igual a uno, lo que implica $D \approx 0.577$ con $S_x=1$. Por esta razón, se suele designar este valor como el límite entre NBFM y WBFM.

Si ahora se incluye el filtrado de de-énfasis, podemos obtener la relación señal a ruido de *FM con de-énfasis*, que puede simplificarse en su deducción, si adoptamos el caso en que $B_{de} \ll W$, con lo que la salida de ruido se reduce según la Ecuac. 8.78. Reemplazando, se obtiene:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\frac{f_\Delta^2 S_x}{\eta B_{de}^2 W}}{S_R} = \frac{f_\Delta^2}{B_{de}^2} S_x \gamma \quad (8.95)$$

Que nos dice que relación señal a ruido con de-énfasis brinda un factor de mejora respecto a FM sin de-énfasis, de aprox. $1/3(W/B_{de})^2$ como puede comprobarse:

$$\frac{\left|\frac{S}{N}\right|_{FM \text{ con de-énfasis}}}{\left|\frac{S}{N}\right|_{FM \text{ sin de-énfasis}}} = \frac{\frac{f_\Delta^2}{B_{de}^2} S_x \gamma}{\frac{3D^2 S_x \gamma}{3B_{de}^2}} = \frac{W^2}{3B_{de}^2} \quad (8.96)$$

Esta mejora con de-énfasis, se puede obtener con un filtrado previo a la transmisión (pre-énfasis) y otro en la detección, (de-énfasis) pero puede traer una penalidad oculta. Si las amplitudes del espectro del mensaje no tienen una caída de por lo menos $1/f$ a partir de B_{de} , el pre-énfasis aumentará la relación de desviación y con ello, el ancho de banda de transmisión.

Efecto umbral

La condición de pequeña señal $(S/N)_R \ll 1$ puede ser representada por un diagrama como el de la Fig. 8.10, donde se han invertido los fasores de señal y de ruido. En estas condiciones, como $A_n(t) \gg A_c$ durante la mayor parte del tiempo, la fase de la resultante a la entrada del detector será:

$$\phi_v(t) \approx \phi_n(t) + \frac{A_c}{A_n(t)} \operatorname{sen}[\phi(t) - \phi_n(t)] \quad (8.97)$$

El dominante ahora es el ruido, y el mensaje, contenido en $\Phi(t)$, ha sido *mutilado*, no pudiendo recuperarse el mensaje. En realidad, una mutilación importante comienza cuando $(S/N)_R \approx 1$ es decir $A_n \approx A_c$ en módulo. Con fasores de longitud prácticamente iguales, tenemos una situación similar a la de interferencia cocanal, cuando $\rho = A_i/A_c \approx 1$. Pequeñas variaciones de ruido pueden producir *picos* en la salida del discriminador de FM. El diagrama fasorial de la Fig. 8.13 (a) ilustra este punto, tomando $\Phi(t)=0$ y $\Phi_n(t) \approx -\pi$, de modo que $\Phi_v(t) \approx -\pi$. Si las variaciones de $A_n(t)$ y $\Phi_n(t)$ siguiesen la línea de trazos entre t_1 y t_2 , entonces $\Phi_v(t_2) \approx +\pi$. Correspondientemente, la forma de onda de la fase, de la Fig. 8.13 (b), tiene un escalón de altura 2π y la salida del discriminador (que corresponde a la derivada del escalón), tiene un pico en el intervalo t_1-t_2 , durante la transición de la fase desde $-\pi$ hasta $+\pi$. El área bajo la curva del pico, tiene valor uno, por lo que si el intervalo t_1-t_2 es pequeño, la amplitud del pico será muy alta Dado que la tensión de ruido es aleatoria, los picos tendrán duración y amplitudes aleatorias, y cuando $A_n(t) \approx A_c$, se escucharán como crujidos que enmascarán el mensaje.

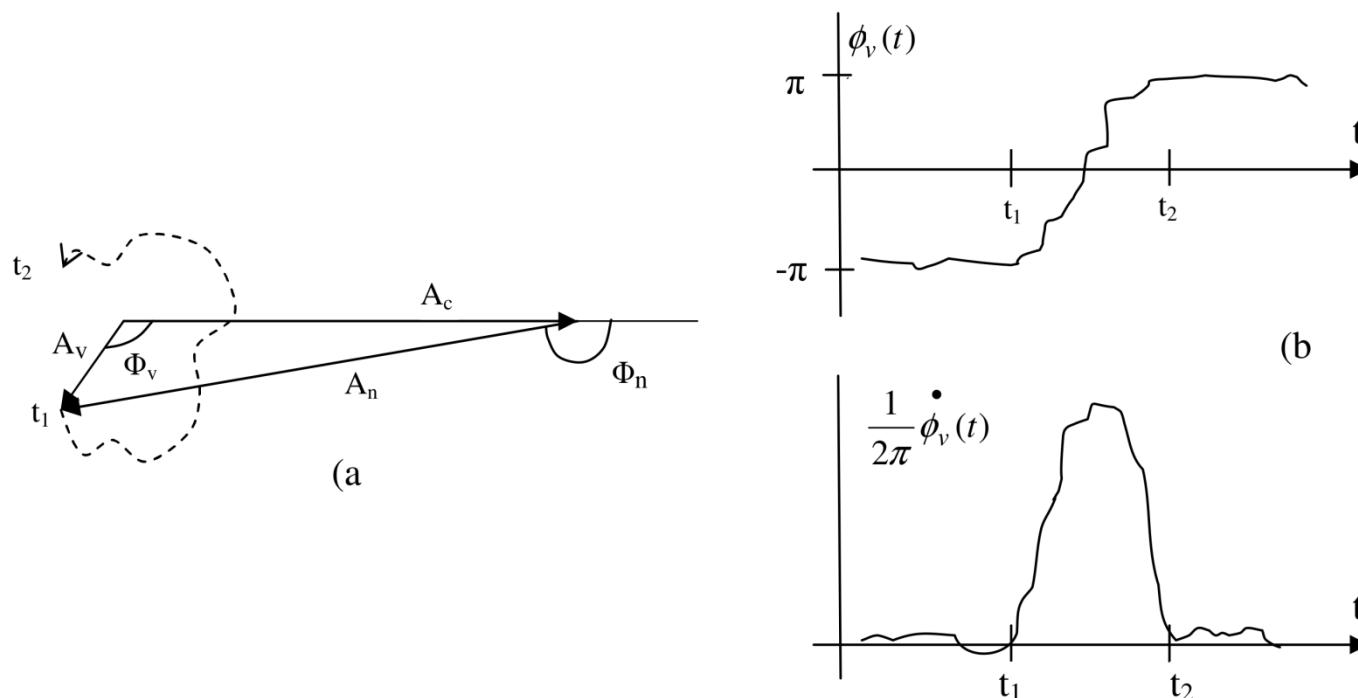


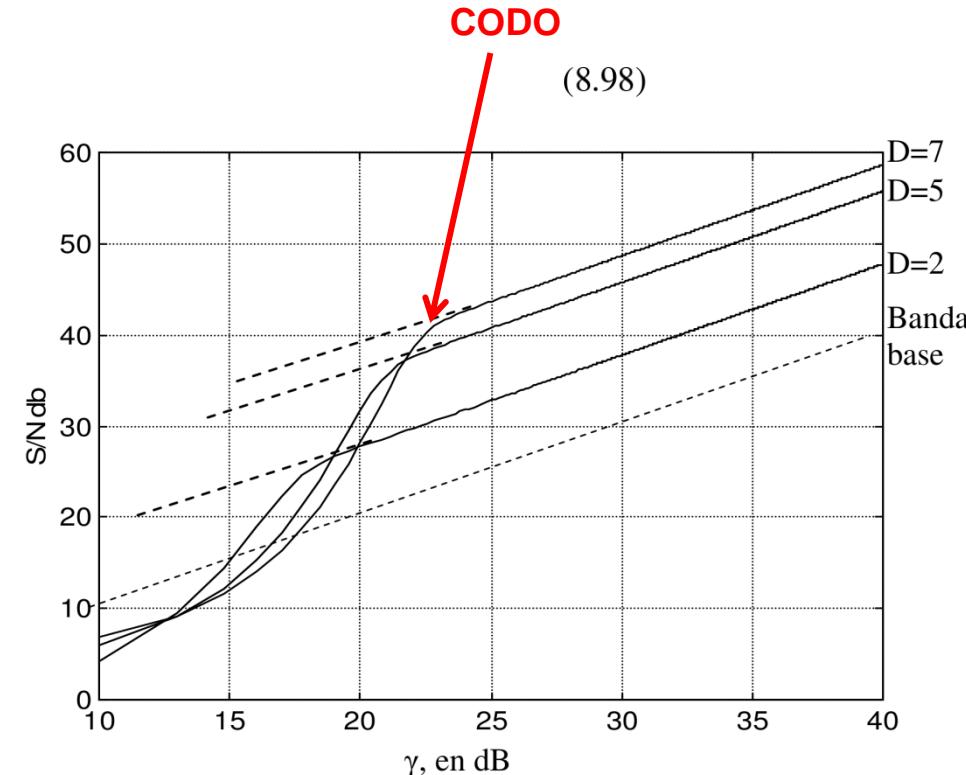
Fig. 8.13. FM próximo al umbral. (a) Diagrama fasorial (b) Fase y frecuencia instantánea.

Podemos inferir con el análisis cualitativo anterior, que la distribución espectral de ruido ya no es parabólica, sino que tiende a llenar las frecuencias más bajas. Sin efectuar su deducción, diremos que si tenemos en cuenta el efecto de los picos, para una modulación con tono, la potencia total de ruido es:

$$N_D = \frac{\eta W^3}{3S_R} \left[1 + \frac{12D}{\pi} e^{-(W/B_T)\gamma} \right] \quad (8.97)$$

Donde el segundo término es la contribución de los picos. La Fig. 8.14 muestra la relación S/N en destino, para FM sin pre-énfasis, versus γ , ambos en decibeles. Se muestran tres valores de desviación $D=2,5$ y 7 , y se ubica la curva de banda base como referencia. Las tres curvas de S/N se trazaron usando la expresión de potencia de ruido dada por la Ecuac. 8.97. Se puede observar que cada una de ellas presenta dos zonas bien diferenciadas: una zona lineal, en la que el aumento de γ (es decir de S_R) se corresponde con un aumento de la misma magnitud en la S/N; y otra zona donde la S/N crece rápidamente con γ , con una pendiente más abrupta. Cada zona corresponde a los dos términos de los corchetes de la Ecuac. 8.97; el unitario, es la zona lineal, donde este es el de mayor peso, para valores de γ hace que la exponencial sea mucho menor que uno. Para valores de γ más bajos, el término de la exponencial es el de más peso, y la variación es de tipo exponencial. Entre ambas zonas existe un “codo” o transición, en el que pequeños cambios de la amplitud de la señal recibida provocan grandes cambios en la S/N y por ende, en la salida de señal. Por encima de este codo, la señal domina la detección, por debajo, el ruido *captura* la salida, como en el caso de una interferencia cocanal intensa. Denominaremos *umbral* al valor que ubica al sistema por encima del codo, de modo que las expresiones deducidas bajo la condición $S_R \gg N_R$ sean válidas. Estudios experimentales mostraron que, para los casos de interés, si $S_R / N_R > 10$, no se produce mutilación del mensaje por el ruido. De acuerdo a ello, definiremos el punto umbral como:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{R_{UMB}} = 10$$



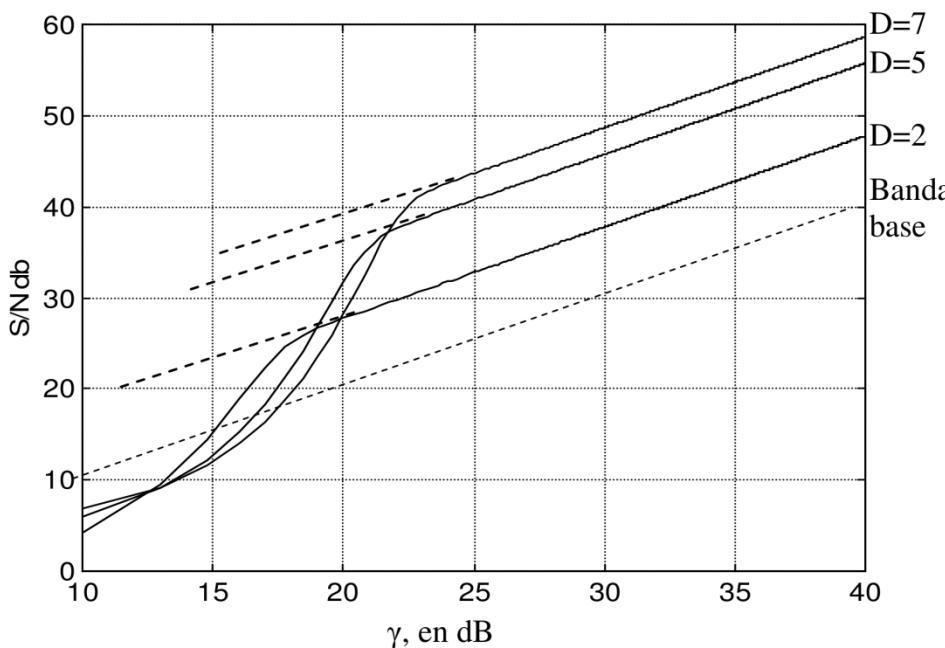


Fig. 8.14 Performance de FM con ruido (sin pre-énfasis)

Como ejemplo, veamos para el caso de las broadcasting comerciales de FM que valor tiene γ en el umbral. Como vimos, el ancho de banda de transmisión es 14 veces mayor de el ancho de banda de audio ($B_T=14W$), por lo que la potencia de ruido de predetección N_R será 14 veces más grande que la de banda base, para la misma densidad espectral de ruido. Como definimos que $S_R=10N_R$ en el límite será $\gamma_{UMB}=140$, o en dB $\gamma_{UMB}=21.4\text{dB}$. Este punto define en la Fig. 8.14 el límite de validez de la expresión de S/N de la Ecuac. 8.93 en FM. Para valores de γ mayores, la Ecuac. 8.93 dará un resultado válido, mientras que para valores menores (que corresponden a la línea de trazos de las curvas de la Fig. 8.14), no tendrán validez. Más aún, por efecto de la mutilación del mensaje, no tiene sentido hablar ya de relación S/N, ya que no puede recuperarse el mensaje.

Vemos que el intercambio de ancho de banda por potencia de transmisión tiene una condición, y que no puede aumentarse irrestrictamente la S/N aumentando la desviación D. Si por ejemplo, nos ubicamos en el valor de γ de 21,4dB dado anteriormente, y pretendemos aumentar S/N como lo predice la Ecuac. 8.93 aumentando D, por ejemplo de 5 a 7, manteniendo γ constante, nos ubica en la zona de la línea de trazos de la curva de D=7. Por lo tanto, no puede en este caso aumentar S/N sin aumentar γ , es decir la potencia recibida S_R .

A partir de la definición de la Ecuac. 8.98, podemos efectuar los siguientes reemplazos:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{S_R}{\eta B_T} \frac{W}{W} = \left(\frac{W}{B_T}\right) \gamma \quad (8.99)$$

Cuando $(S/N)_R=10$, γ corresponderá al umbral:

$$\gamma_{UMB} = 10 \frac{B_T}{W} \approx 20(D + 2) \quad D > 2 \quad (8.100)$$

En la que hemos usado la expresión del ancho de banda de FM para un tono, cuando $D > 2$. Si se reemplaza D por Φ_Δ , las Ecuac. 8.99 y 8.100 serán válidas para PM.

En vista de las consideraciones hechas sobre el punto del umbral, resulta útil calcular la $(S/N)_D$ en ese punto.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D_{UMB}} = 3D^2 S_x \gamma_{UMB} \approx 60D^2 (D + 2) S_x. \quad D > 2 \quad (8.101)$$

Que es igual al mínimo valor de $(S/N)_D$ como una función de D . Dado un valor de $(S/N)_D$, si no hay limitaciones de ancho de banda, se puede resolver la Ecuac. 8.101 para encontrar el valor de la desviación D que permite obtener la más *eficiente performance* en términos de potencia de señal, para un sistema de FM sin pre-énfasis. Nos permite ubicarnos en el umbral, y por lo tanto, utilizar la *mínima* potencia de señal para obtener una $(S/N)_D$ dada. Por supuesto que para una operación confiable del sistema, debe permitirse un cierto margen por posibles desvanecimientos de la señal.