Sistemas de Comunicaciones basados en Radio Definida por Software (SDR)

Dr. Ing. Jorge Castiñeira Moreira

Dr. Ing. Alejandro José Uriz

Sistemas de Comunicaciones Digitales

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Probabilidad de error basada en la constelación IQ.

Se analizan sistemas de modulación M-arios que se reciben por detección en forma coherente o por comparación de fase.

Los sistemas de modulación M-aria QAM, PSK y los denominados APK (Amplitud Phase Keying) son los mas apropiados para la modulación sobre canales telefónicos, o en general de banda limitada, para expandir la velocidad de señalización.

También son utilizadas en sistemas de comunicaciones de señal por cable, debido a la incorporación de la transmisión de dattos por este medio para ofrecer servicio de Internet.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Relación entre la representación IQ y la probabilidad de error en sistemas de modulación digital.

Modulación binaria de fase 2PSK o PRK

La modulación binaria PRK puede representarse en el plano IQ y aparece como con dos señales que se diferencian en 180° de fase:

La señal correspondiente a la modulación PRK presenta dos símbolos, $s_0(t) = -s_1(t)$:

$$s_1(t) = A_c p_{T_b}(t) cos(\omega_c t + \theta)$$

$$s_0(t) = -A_c p_{T_b}(t) cos(\omega_c t + \theta)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

como se considera normalmente que $f_c = N r_b$ entonces:

$$s_1(t) = A_c \cos(\omega_c t) = -s_0(t)$$

Luego:

$$E_1 = \int_0^{T_b} [s_1(t)]^2\, dt = E_1 = \int_0^{T_b} [A_c \cos(\omega_c t)]^2\, dt = \frac{{A_c}^2 T_b}{2}$$

$$E_0 = \int_0^{T_b} [s_0(t)]^2\, dt = E_1 = \int_0^{T_b} [-A_c \cos(\omega_c t)]^2\, dt = \frac{{A_c}^2 T_b}{2}$$

$$E_b = \frac{E_1 + E_0}{2} = \frac{{A_c}^2 T_b}{2}$$

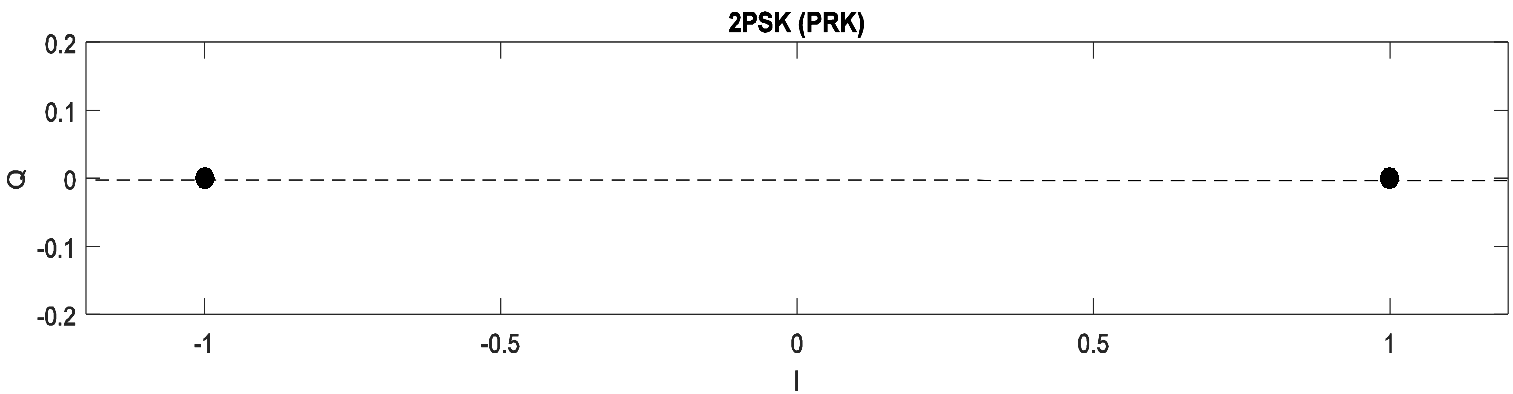
Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Vista como una constelación de modulación MPSK, con $M = 2$,

$$\varphi_k = \frac{2\pi a_k}{M} = \pi a_k$$
$$a_k = 0, 1$$



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK $(\mathbf{M} = \mathbf{4})$

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK $(\mathbf{M} = \mathbf{4})$

En el siguiente análisis se supone que la señal de portadora tiene sincronización con la modulación de forma que $f_c = Nr_b$. En un intervalo de señalización la forma de onda es igual a:

$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c cos(\varphi_k) p_D(t) cos(\omega_c t)$$

$$s_q(t - kD) = A_c sen(\varphi_k) p_D(t) sen(\omega_c t)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK $(\mathbf{M=4})$

Donde

$$\varphi_k = \frac{2\pi a_k}{4}$$

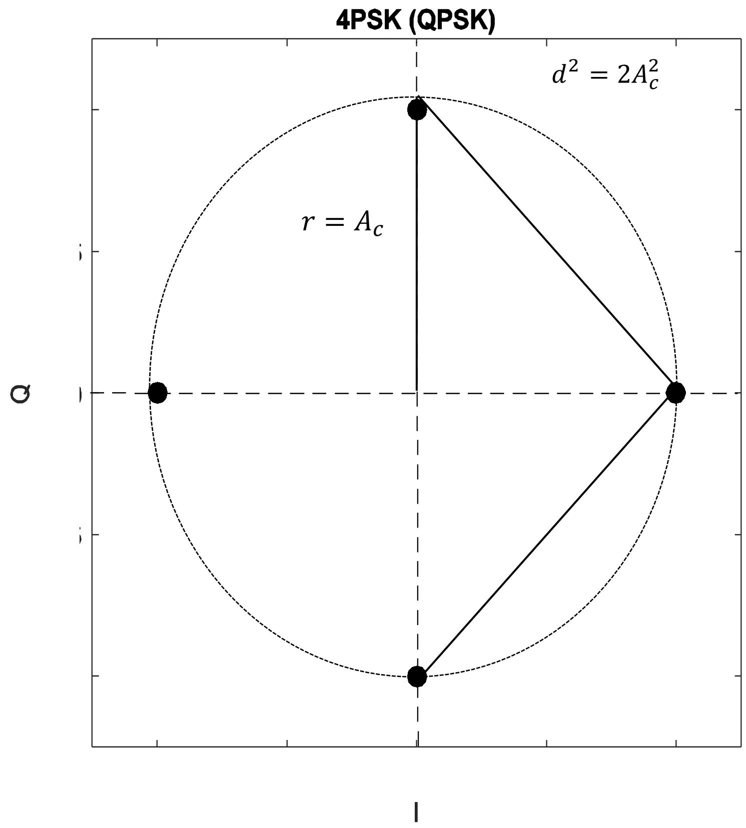
$$a_k = 0, 1, 2, 3$$

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} \left(s_q(t)\right)^2 dt) =$$
$$= \frac{{A_c}^2}{2} D\left(cos(\varphi_k)^2 + sen(\varphi_k)^2\right) = \frac{{A_c}^2 D}{2}$$

La constelación correspondiente a 4PSK se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado:

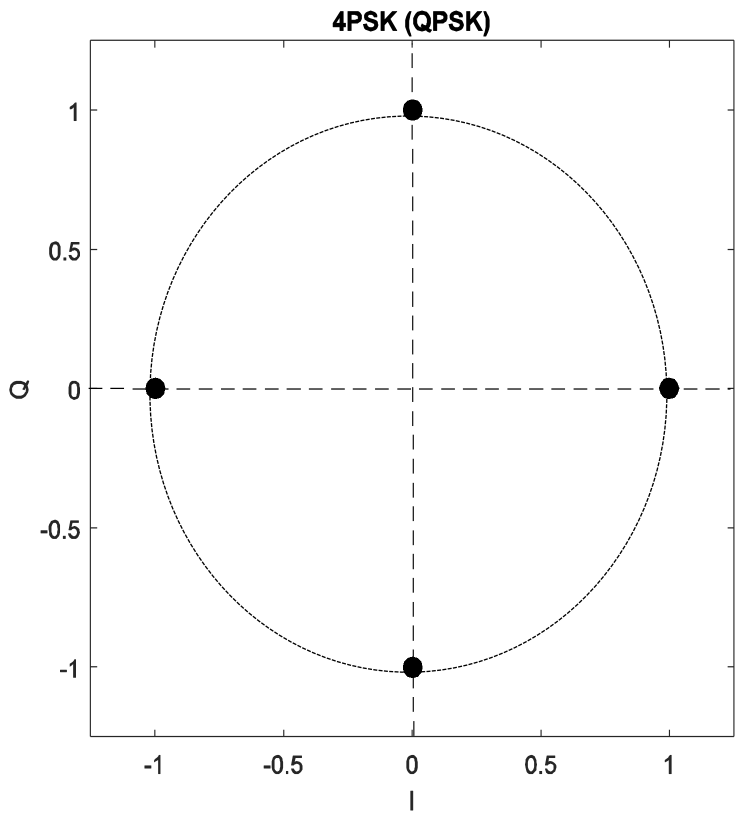
NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK $(\mathbf{M} = 4)$



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK $(\mathbf{M = 4})$



Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK $(\mathbf{M = 4})$

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{4}(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$$

En este caso nuevamente:

$$E = FGN\frac{{A_c}^2 D}{2} = \frac{{A_c}^2 D}{2}$$

Luego:

$${A_c}^2 = \frac{2E}{D} = 2Er$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Ahora la distancia es $d = \sqrt{2}A_c$, luego $d^2 = 2A_c^2$

$$\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_c$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{{A_c}^2}{2\eta r}$$

Cada símbolo s_i se asocia a un probabilidad $P_{ei} = 2Q\left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}}\right)$, dado que cada símbolo puede confundirse con dos vecinos a los lados que se encuentran a una distancia:

$$d = \sqrt{2}A_c$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

$$P_e = \frac{1}{M}(P_{e0} + P_{e2} + P_{e2} + P_{e3}) =$$

$$\frac{1}{4}4x2Q\left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2Er}{2\eta r}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}}\right) =$$

$$2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

$$E = 2E_b$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria 4QAM o QAM $(\mathbf{M}=4)$

Modulación M-aria 4QAM o QAM $(\mathbf{M}=4)$

La sincronización de portadora en cuadratura coherente requiere sincronización en la demodulación. En el $k-\acute{e}simo$ intervalo $kD < t < (k+1)D$:

$$x_c(t) = s_i(t-kD) - s_q(t-kD)$$

$$s_i(t-kD) = A_c I_k p_D(t) cos(\omega_c t) \quad I_k = \pm 1$$

$$s_q(t-kD) = A_c Q_k p_D(t) sen(\omega_c t) \quad Q_k = \pm 1$$

NEON Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria 4QAM o QAM $(\mathbf{M}=\mathbf{4})$

Si se considera que $f_c = Nr_b = 2Nr$

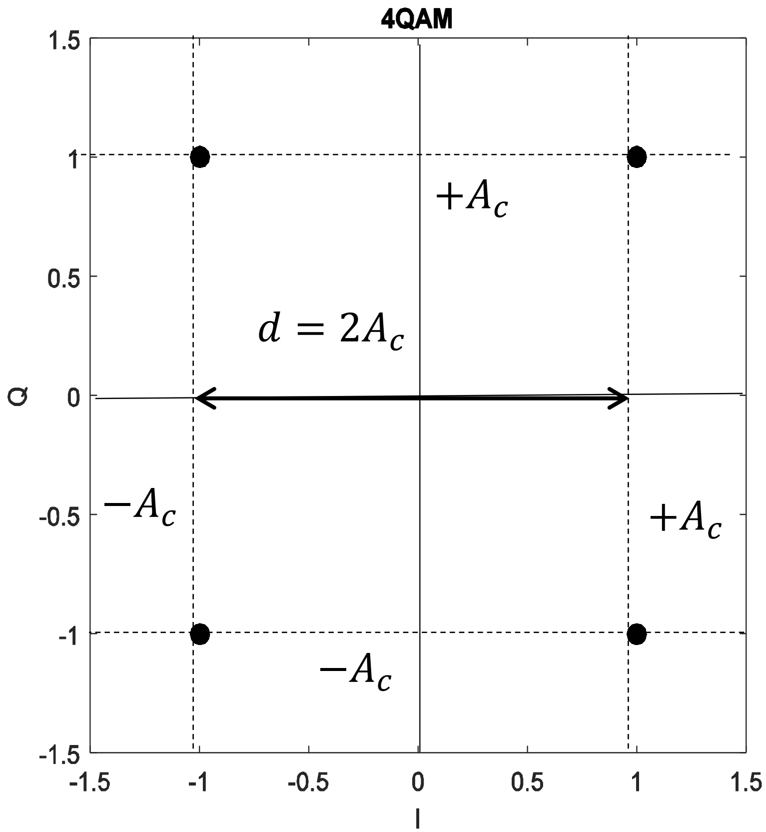
$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} \left(s_q(t)\right)^2 dt = \frac{{A_c}^2}{2} D\left({I_k}^2 + {Q_k}^2\right) = {A_c}^2 D$$

La energía por símbolo es el doble de la energía por bit $E = 2E_b$.

La constelación correspondiente a 4QAM se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado:

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria 4QAM o QAM $(\mathbf{M} = 4)$



NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria 4QAM o QAM ($\mathbf{M = 4}$)

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{4}\left((1^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2)\right) = 2$$

En este caso:

$$E = 2\frac{{A_c}^2 D}{2} = {A_c}^2 D$$

Luego:

$${A_c}^2 = \frac{E}{D} = Er$$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria 4QAM o QAM ($\mathbf{M = 4}$)

Ahora la distancia es $d = 2A_c$, luego $d^2 = 4A_c^2$ y $d/2 = A_c$

$$\frac{d}{2} = A_c$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{{A_c}^2}{\eta r}$$

Cada símbolo s_i se asocia a un probabilidad $P_{ei} = 2Q\left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}}\right)$, dado que cada símbolo puede confundirse con dos vecinos a los lados que se encuentran a una distancia: $d = 2A_c$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria 4QAM o QAM $(\mathbf{M} = \mathbf{4})$

$$P_e = \frac{1}{M}(P_{e0} + P_{e2} + P_{e2} + P_{e3}) = \frac{1}{4} 4x2xQ\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right) =$$

$$2Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

$$E = 2E_b$$

La tasa de error es igual a 4PSK.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase MPSK

Modulación M-aria de fase MPSK

En el siguiente análisis se supone que la señal de portadora tiene sincronización con la modulación de forma que $f_c = Nr_b$. En un intervalo de señalización la forma de onda es igual a:

$$x_c(t) = s_i(t-kD) - s_q(t-kD)$$

$$s_i(t-kD) = A_c cos(\varphi_k) p_D(t) cos(\omega_c t)$$
$$s_q(t-kD) = A_c sen(\varphi_k) p_D(t) sen(\omega_c t)$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase MPSK

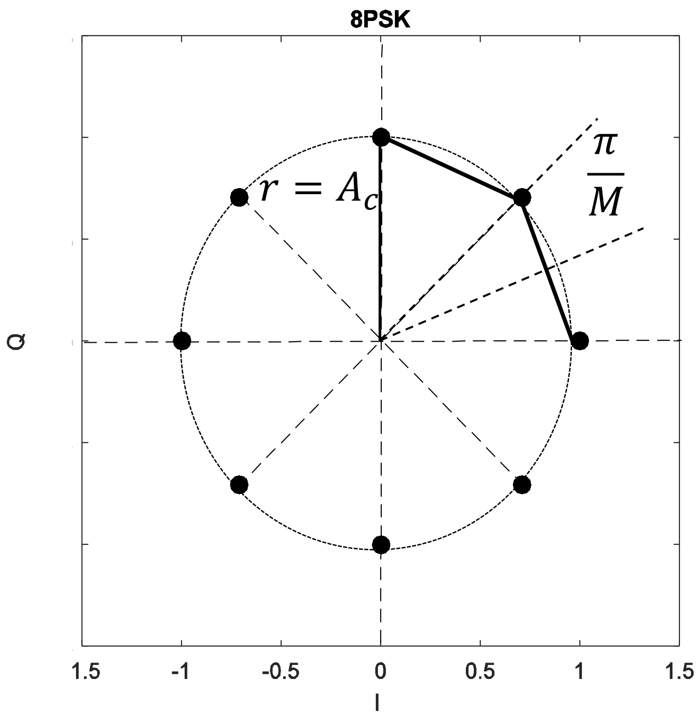
Donde $$\varphi_k = \frac{2\pi a_k}{M}$$

$$a_k = 0, 1, 2, 3, \dots, M-1$$

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} \left(s_q(t)\right)^2 dt) =$$
$$= \frac{{A_c}^2}{2} D\left(cos(\varphi_k)^2 + sen(\varphi_k)^2\right) = \frac{{A_c}^2 D}{2}$$

La constelación correspondiente a 8PSK se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado:

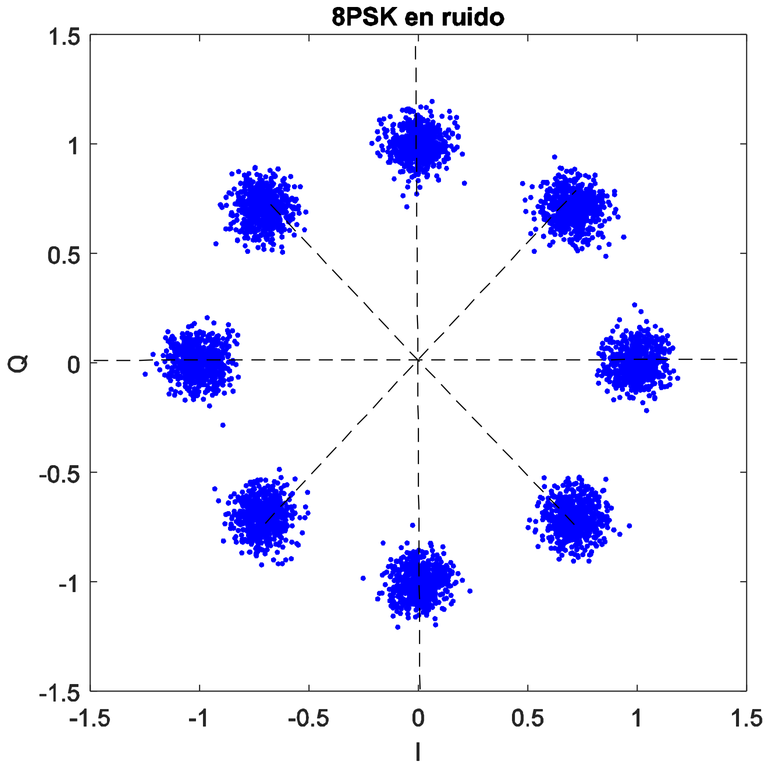
Modulación M-aria de fase MPSK



$$d = 2A_c sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$
$$= 2A_c sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

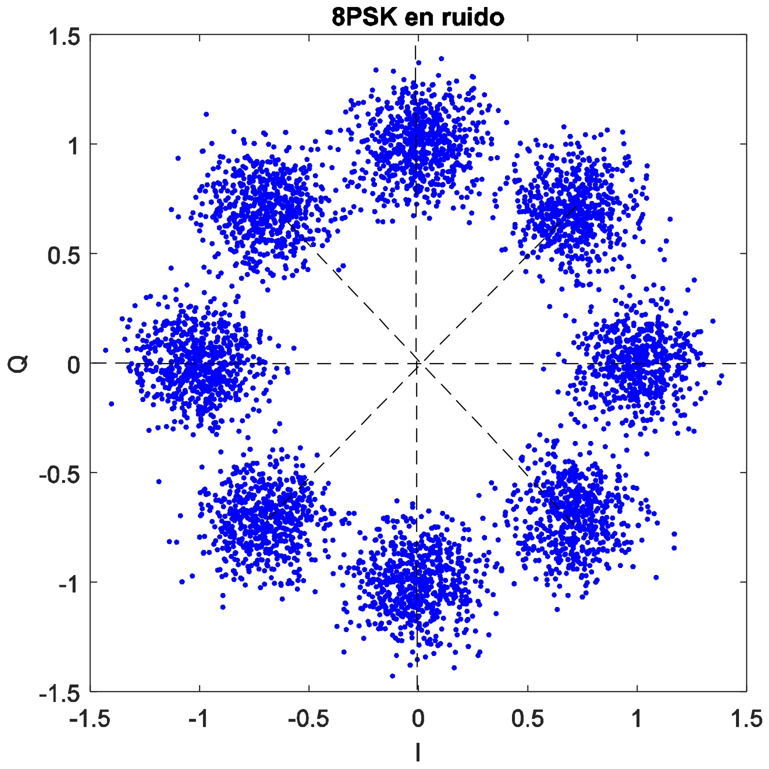
NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

8PSK en ruido. Probabilidad de error.



NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

8PSK en ruido. Probabilidad de error.



Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{8}(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$$

En este caso nuevamente:

$$E = FGN \frac{{A_c}^2 D}{2} = \frac{{A_c}^2 D}{2}$$

Luego:

$${A_c}^2 = \frac{2E}{D} = 2Er$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

Ahora la distancia es $d = 2A_c sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$

luego $d^2 = \left(2A_c sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)^2 = 4A_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$

Y

$$\frac{d}{2} = A_c sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{\left(A_c sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\eta r}$$

Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

Cada símbolo s_i se asocia a una probabilidad $P_{ei} = 2\,Q\left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}}\right)$, dado que cada símbolo puede confundirse con dos vecinos a los lados que se encuentran a una distancia: $d = 2A_c sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$

$$P_e = \frac{1}{M}(P_{e0} + P_{e2} + P_{e2} + P_{e3} + P_{e4} + P_{e6} + P_{e6} + P_{e7})$$

$$= \frac{1}{8} 8x2Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\eta r}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2Er \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\eta r}}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\eta}}\right)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\eta}}\right)$$

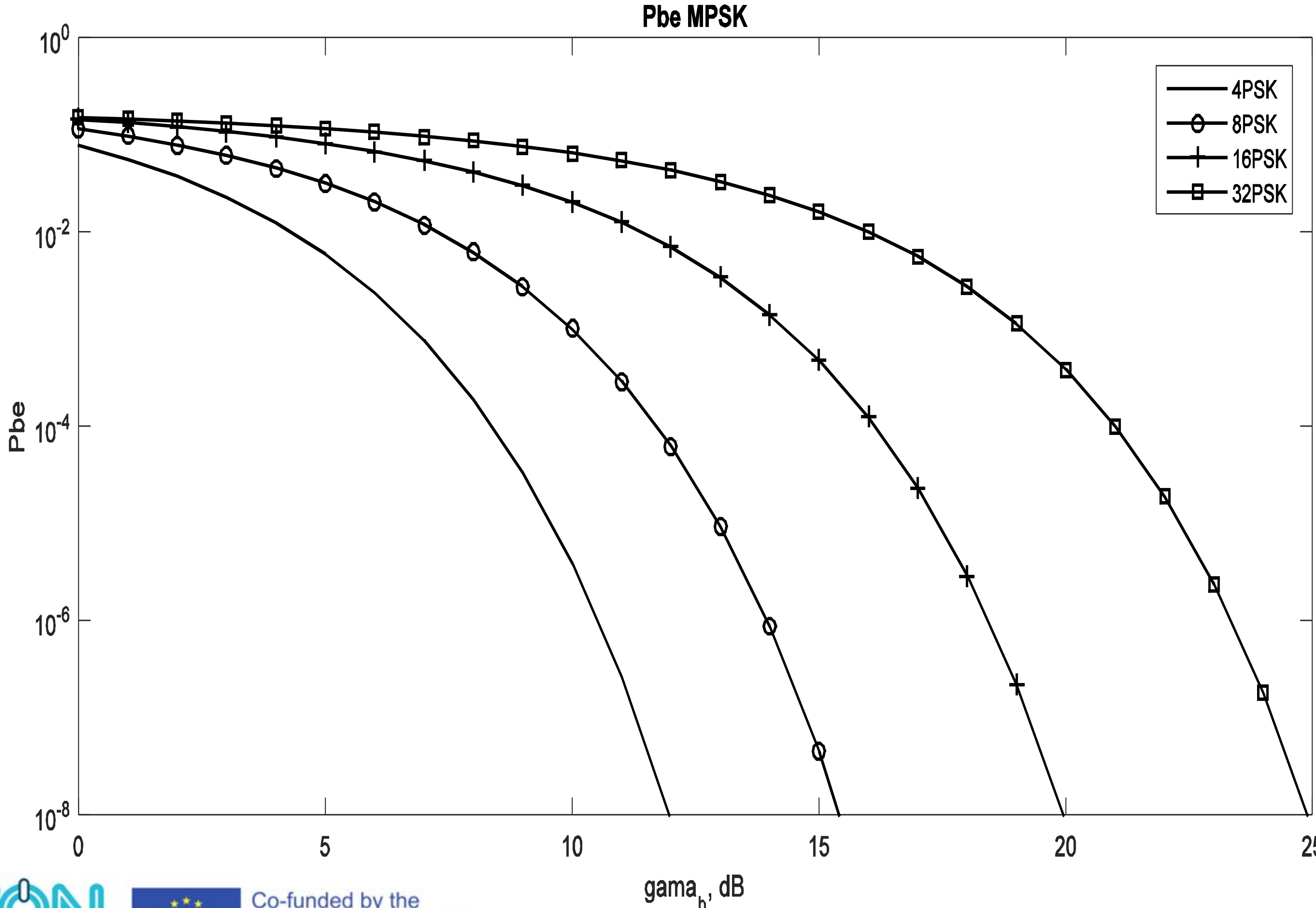
$$E = (\log_2 M)E_b = KE_b\,, \qquad K = \log_2 M$$

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2K\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)E_b}{\eta}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2K\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\gamma_b}\right)$$

$$P_{\mathrm{be}} = \frac{2}{K}Q\left(\sqrt{\frac{2K\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)E_b}{\eta}}\right) = \frac{2}{K}Q\left(\sqrt{2K\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\gamma_b}\right)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}



Modulación en Amplitud y Fase, APK o MQAM.

Modulación M−aria de amplitud y fase MQAM

En el siguiente análisis se supone que la señal de portadora tiene sincronización con la modulación de forma que $f_c = Nr_b$.

En el $k - ésimo$ intervalo $kD < t < (k+1)D$:

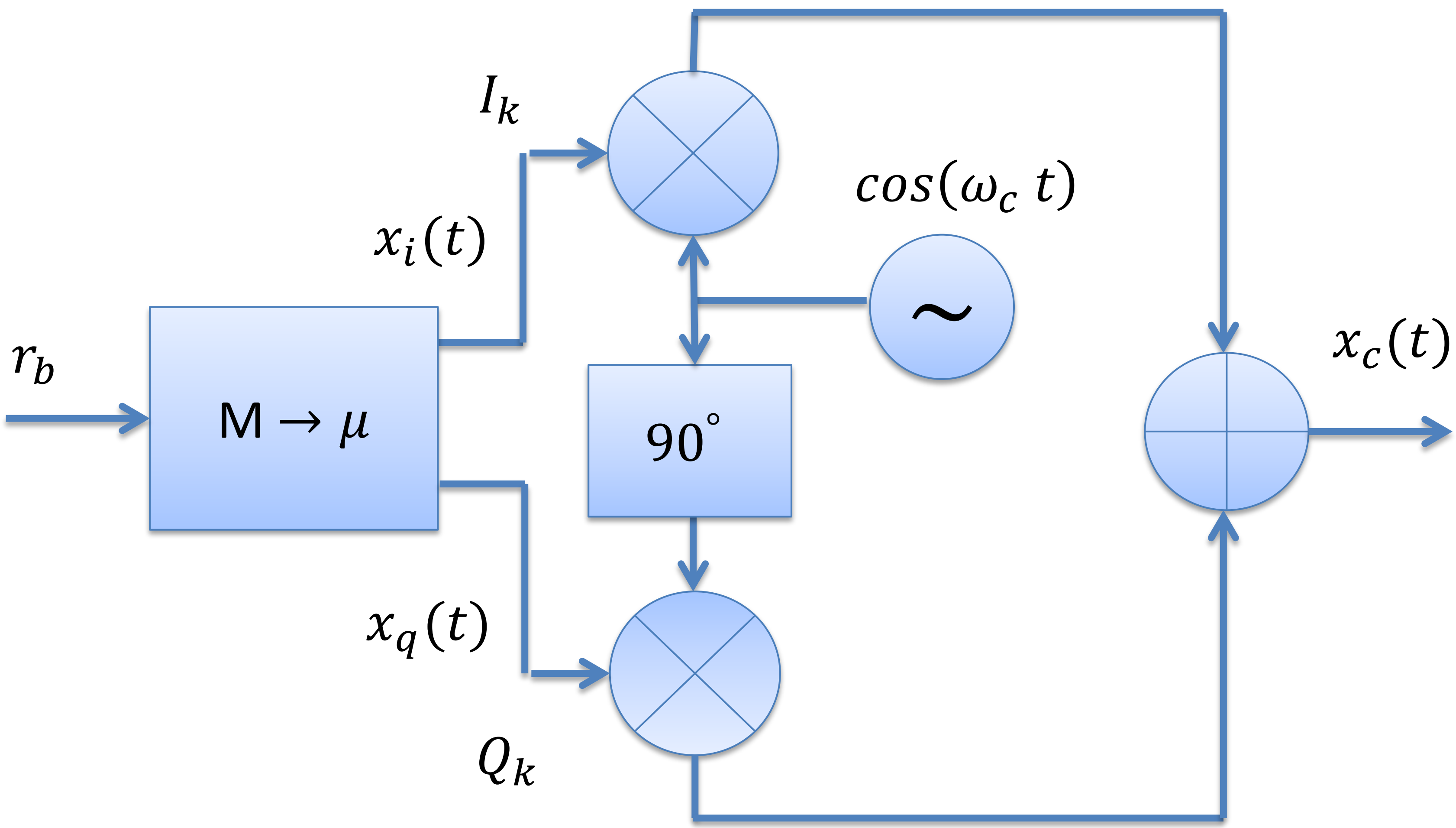
$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c I_k p_D(t) cos(\omega_c t) I_k = \pm 1, \pm 3, .., \pm \pm\mu - 1$$
$$s_q(t - kD) = A_c Q_k p_D(t) sen(\omega_c t) Q_k = \pm 1, \pm 3, .., \pm \pm\mu - 1$$

$$\mu = \sqrt{M}$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación MQAM. Diagrama en bloques.



Modulación en Amplitud y Fase, APK o MQAM.

Se pueden obtener los promedios estadísticos:

$$\overline{I_k} = \overline{Q_k} = 0$$
$$\overline{I_k^{\,2}} = \overline{Q_k^{\,2}} = \frac{\mu^2 - 1}{3}$$

Se muestra un ejemplo donde $M = 16, \mu = 4$:

$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c I_k p_D(t) cos(\omega_c t) \quad I_k = \pm 1, \pm 3$$
$$s_q(t - kD) = A_c Q_k p_D(t) sen(\omega_c t) \quad Q_k = \pm 1, \pm 3$$

Modulación en Amplitud y Fase, APK o MQAM.

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} \left(s_q(t)\right)^2 dt) =$$

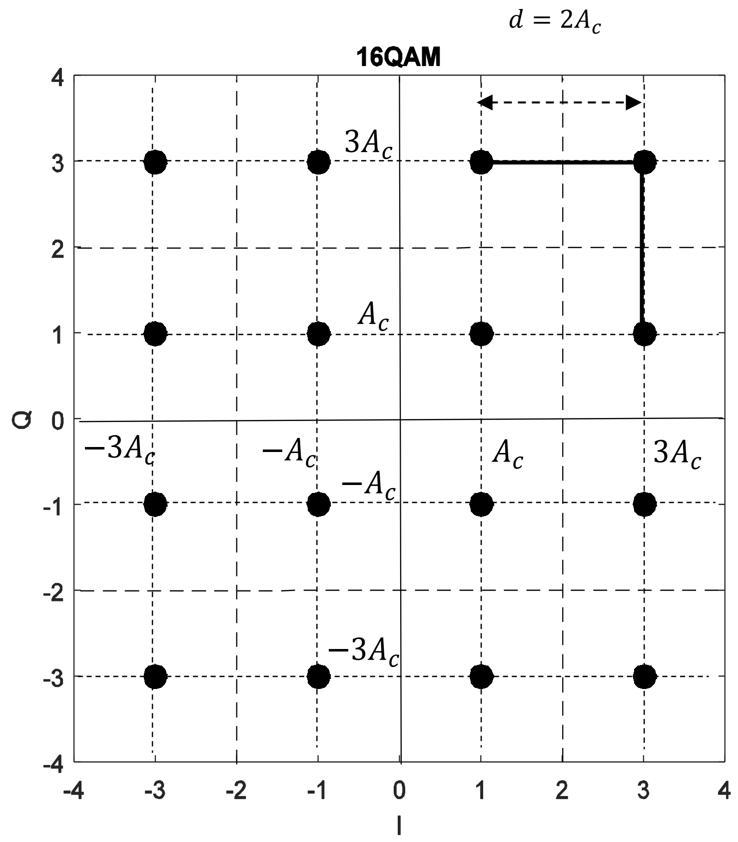
$$= \frac{{A_c}^2}{2} D\left(I_k^2 + Q_k^2\right) = \frac{\mu^2 - 1}{3} {A_c}^2 D$$

La constelación correspondiente a 16QAM se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado. Los valores sobre los ejes I y Q adoptan la forma M-aria polar:

$$a_k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots, \pm (M-1)$$

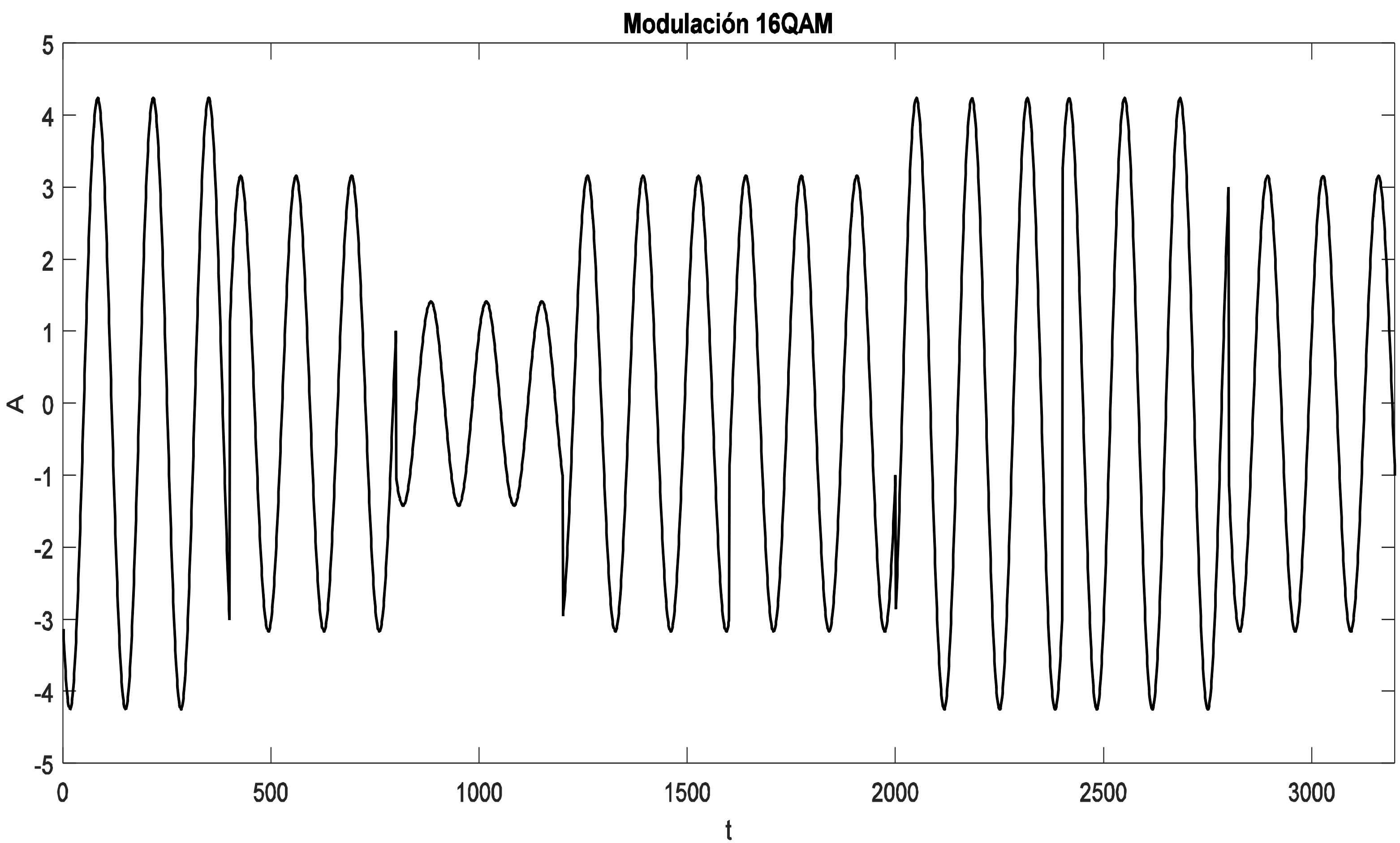
NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulación MQAM. 16QAM



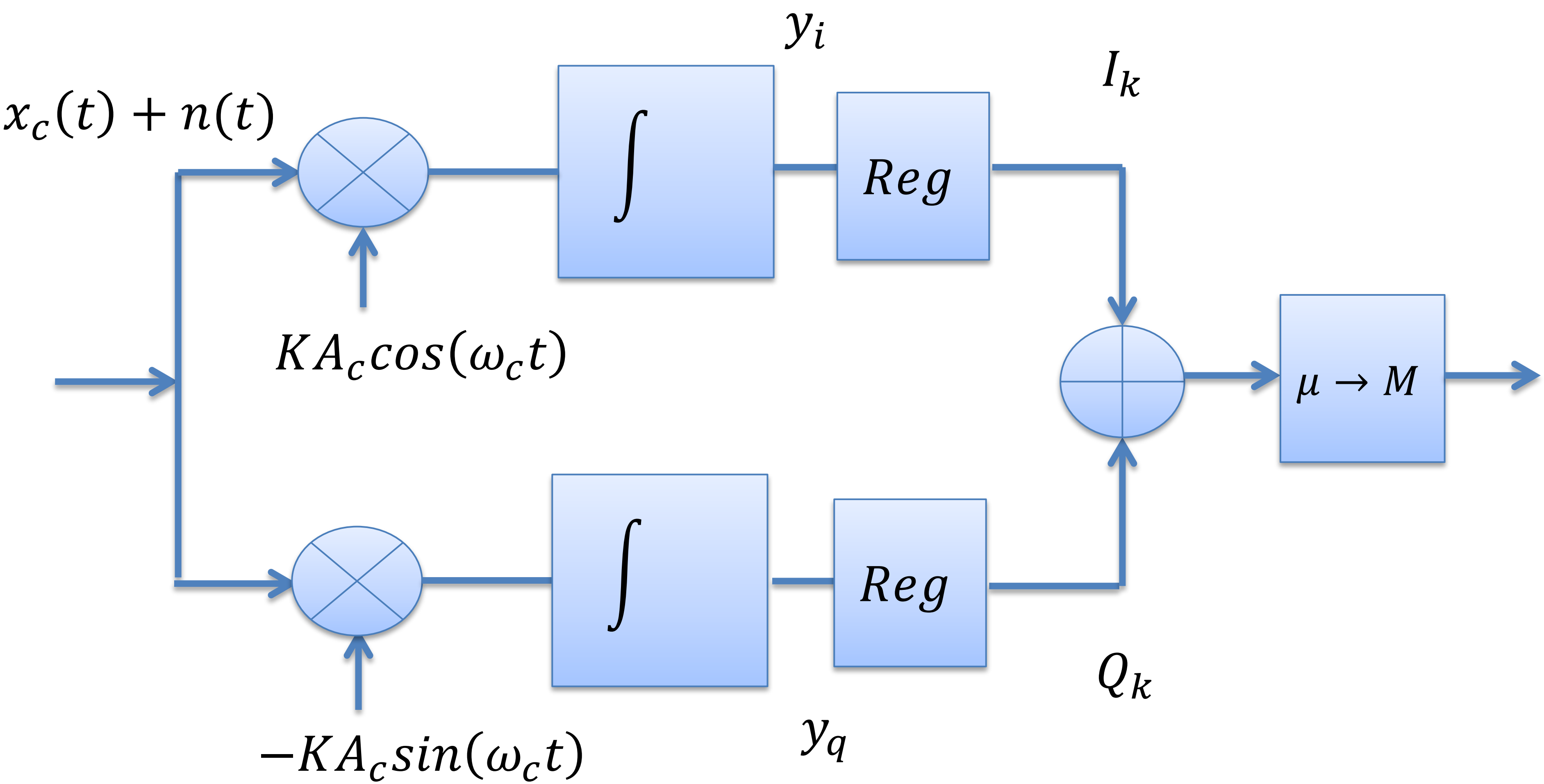
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

16QAM. Formas de onda en el tiempo.



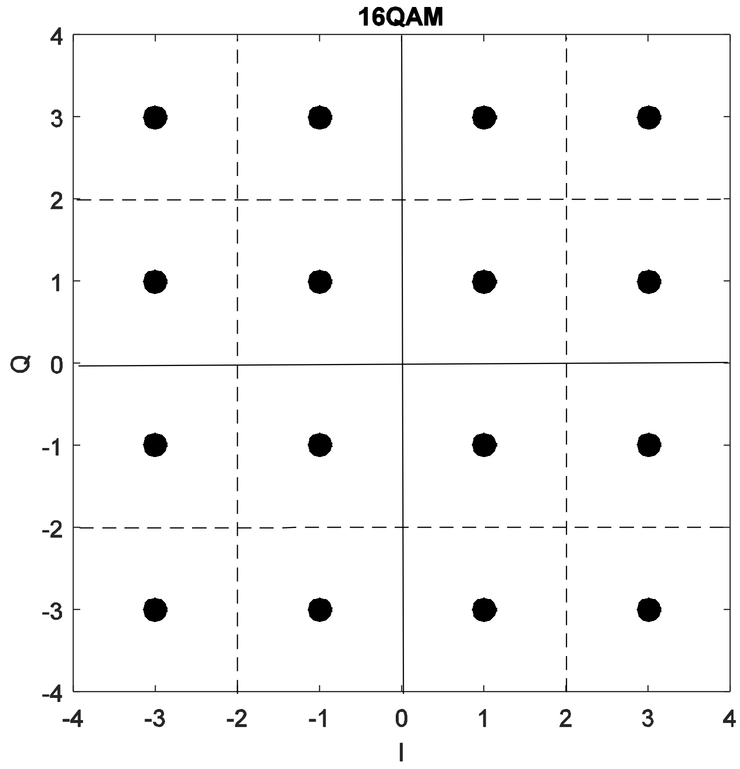
Receptor en fase y cuadratura. MQAM

El diagrama en bloques del detector MQAM por correlación seria entonces:

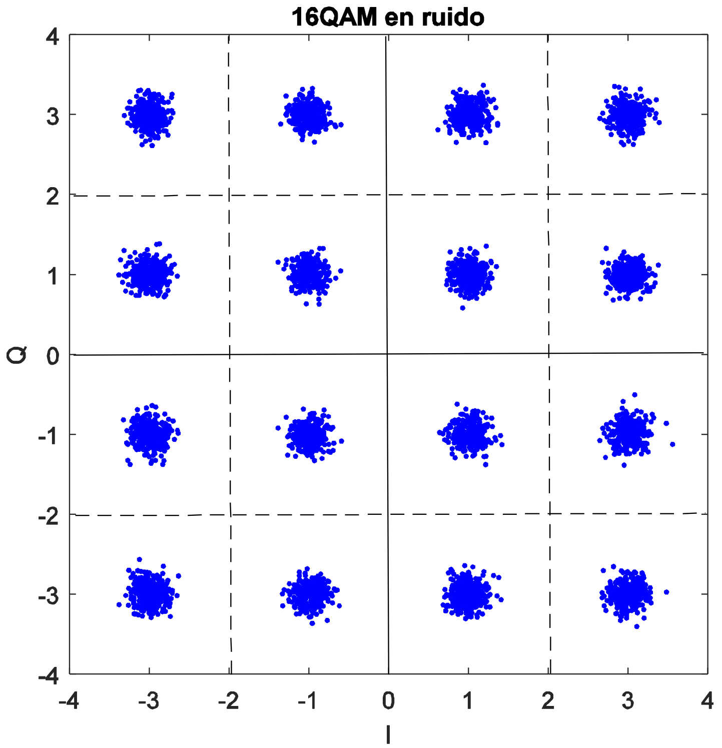


NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

MQAM. Probabilidad de error.



MQAM. Probabilidad de error.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

NEON
Network of Competence on Internet of Things

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{16}4\left((1^2+1^2)+(1^2+3^2)+(3^2+1^2)+(3^2+3^2)\right)$$
$$= \frac{1}{16}4x40 = 10$$

En este caso:

$$E = FGN\frac{{A_c}^2 D}{2} = 10\frac{{A_c}^2 D}{2}$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

$$A_c{}^2 = \frac{2E}{10D} = \frac{Er}{5}$$

Ahora la distancia es $d = 2A_c$, luego $d^2 = 4A_c^2$

Y

$$\frac{d}{2} = A_c$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{(A_c)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta r}$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

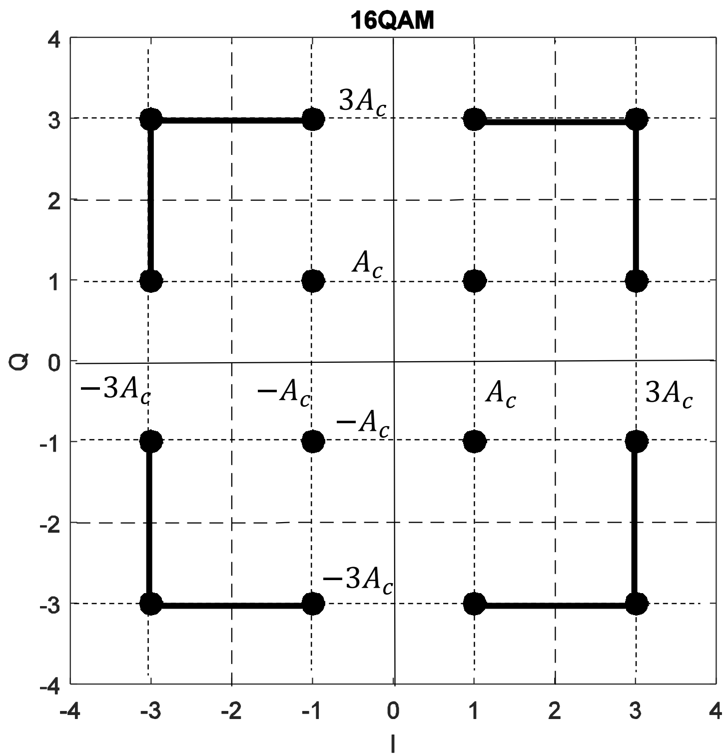
Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Cada símbolo s_i se asocia a un probabilidad $P_{ei} = Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)$, pero la vecindad no es simétrica, y algunos símbolos tienen probabilidades de error distintas en función de la cercanía de los símbolos vecinos, y de cuántos son esos símbolos vecinos.

La distancia para definir la vecindad es siempre la misma, e igual a $d = 2A_c$.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

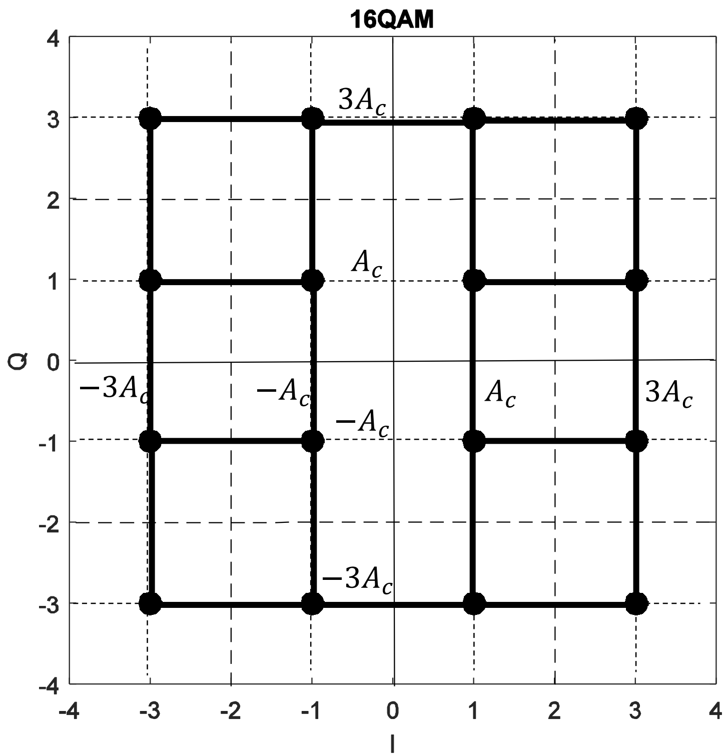
Sistemas M-arios. Probabilidad de error.



Los 4 símbolos que se encuentran en los extremos diagonales están asociados a la probabilidad de tener 2 vecinos a distancia d.

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

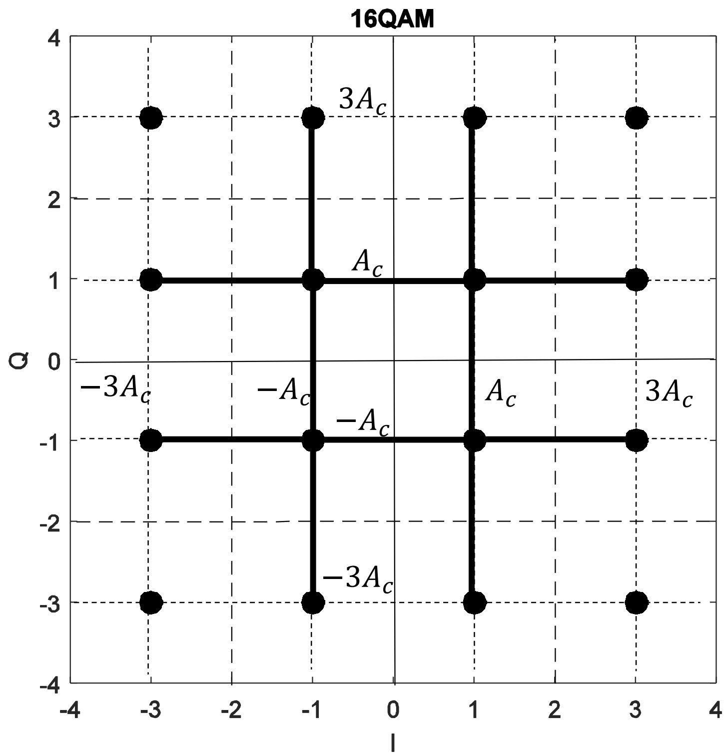
Sistemas M-arios. Probabilidad de error.



Los 8 símbolos en los extremos laterales excluidos los de los extremos diagonales están en un evento de error con otros 3 vecinos en cada caso

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.



Los 4 símbolos interiores están en un evento de error con otros 4 vecinos en cada caso

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

La probabilidad de error por símbolo P_e del sistema es entones:

$$P_e = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[4\left(2Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right) + 8\left(3Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right) + 4\left(4Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right)\right]$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

La probabilidad de error por símbolo P_e del sistema es entones:

$$P_e = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{M}{4}\left(2Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right) + \frac{M}{2}\left(3Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right) + \frac{M}{4}\left(4Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right)\right]$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

$$P_e = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{M}{2}\left(Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right) + \frac{3M}{2}\left(Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right) + M\left(Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right)\right]$$

$$P_e = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{M}{2} + \frac{3M}{2} + M\right)\left[Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)\right] = 3Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Como

$$A_c^2 = \frac{Er}{5} \quad \text{y} \quad \frac{d}{2} = A_c:$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta r} = \frac{Er}{5\eta r} = \frac{E}{5\eta}$$

$$P_e = 3Q\left(\sqrt{\frac{E}{5\eta}}\right)$$

Para 16QAM cuadrado.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Expresión que coincide con la siguiente si $M = 16$:

$$P_e = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3E}{(M-1)\eta}}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3E}{(15)\eta}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{E}{5\eta}}\right)$$

Si:

$$E = (\log_2 M)E_b = KE_b, \qquad K = \log_2 M$$

$$P_e = 3Q\left(\sqrt{\frac{KE_b}{5\eta}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{K}{5}\gamma_b}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3K}{(M-1)}\gamma_b}\right)$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Calculo sobre la constelación

Partiendo de la expresión:

$$E = FGN\frac{{A_c}^2 D}{2}$$

$$r = \frac{1}{D} = \frac{FGN\,{A_c}^2}{2E}$$

La potencia de ruido es:

$$\sigma^2 = \eta r = \eta\frac{FGN\,{A_c}^2}{2E}$$

Luego por ejemplo:

Para constelaciones MQAM la distancia es $d = 2A_c$,

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

$$\frac{d}{2} = A_c, \qquad P_e = Q\left(\frac{A_c}{\sigma}\right)$$

$$\left(\frac{A_c}{\sigma}\right)^2 = \frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{{A_c}^2}{\eta r} = \frac{{A_c}^2}{\eta \frac{FGN\,{A_c}^2}{2E}} = \frac{2}{FGN}\frac{E}{\eta}$$

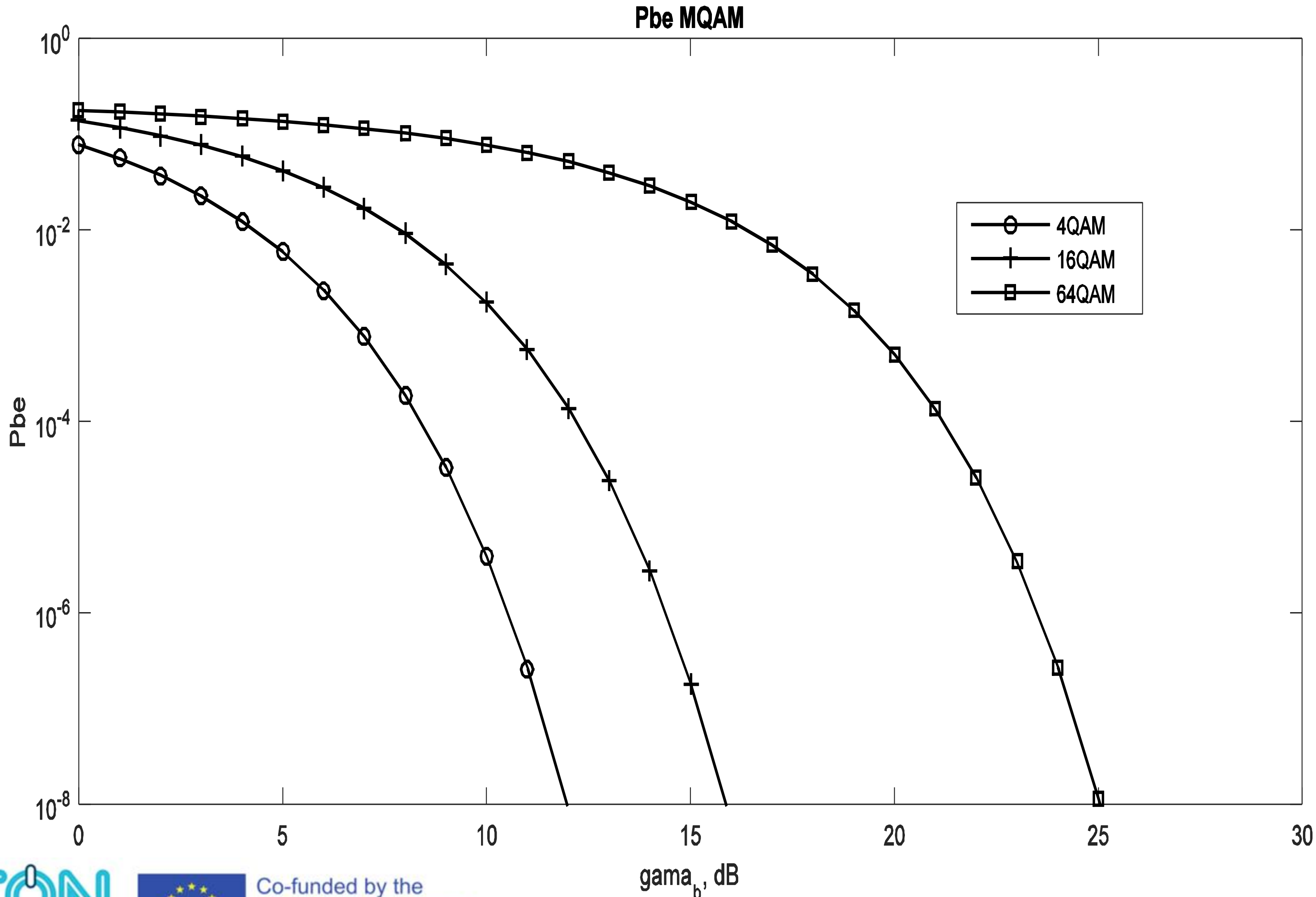
$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2}{FGN}\frac{E}{\eta}}\right)$$

la probabilidad binaria de error es:

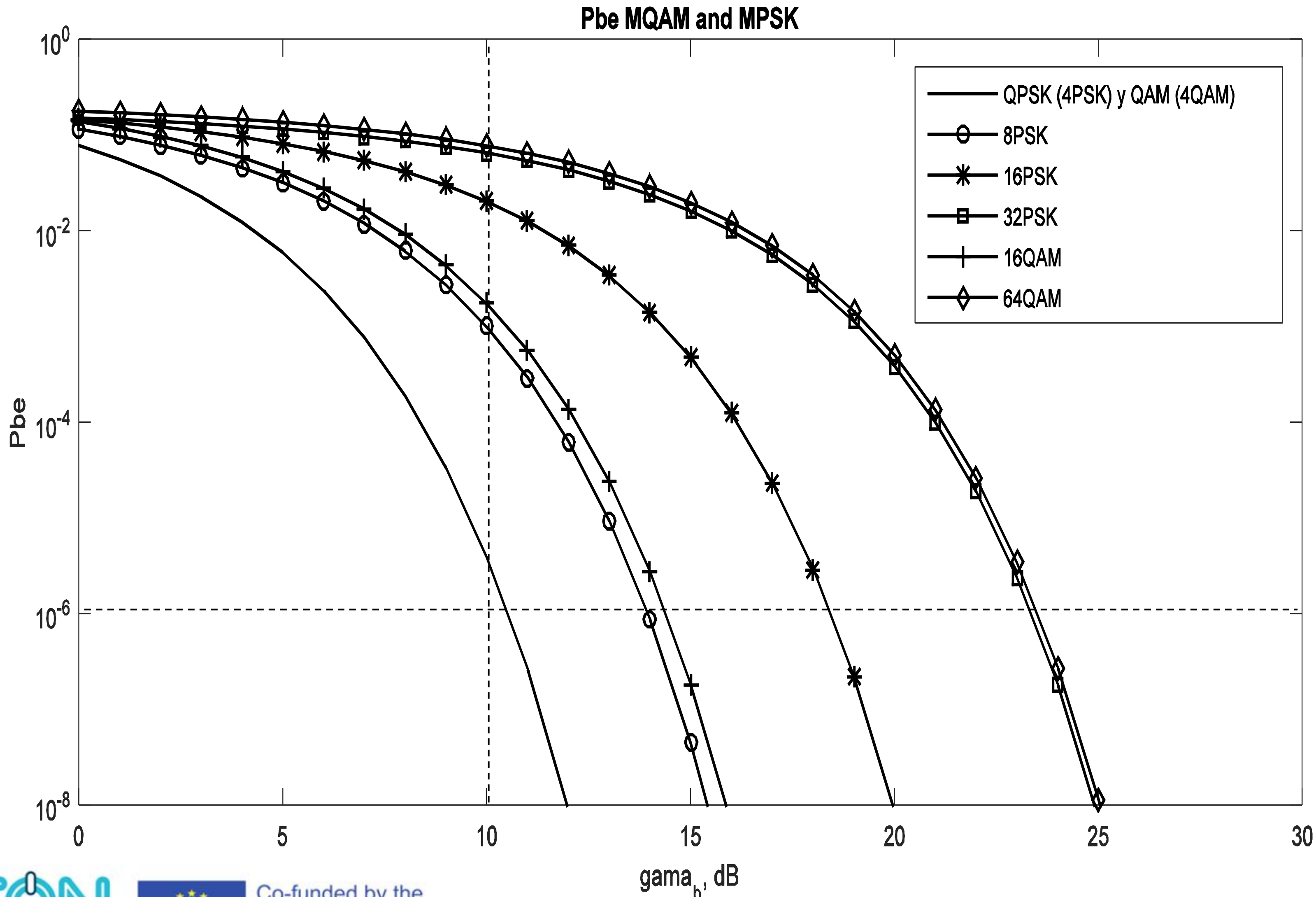
$$P_{\mathrm{be}} = \frac{4}{K}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3K}{(M-1)}\gamma_b}\right)$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

MQAM. Probabilidad binaria de error.



MQAM-MPSK. Probabilidad binaria de error.



NEON Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Comparación entre constelaciones IQ.

La descripción gráfica del plano IQ para una determinada modulación, permite analizar aproximadamente el comportamiento de esa modulación frente al ruido, y su probabilidad de error.

Uno de los parámetros mas importantes es la distancia mínima de la constelación, que consideraremos elevada al cuadrado ${d^2}_{min}$.

Otro parámetro de interés es la energía promedio por símbolo E.

El parámetro combinado que caracteriza a una determinada constelación en una modulación es la distancia mínima cuadrado normalizada:

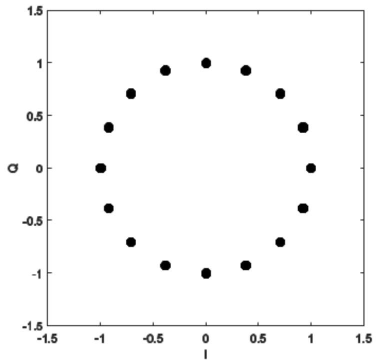
$${d^2}_{N,min} = \frac{{d^2}_{min}}{E}$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Constelaciones IQ. Energía por símbolo.

En el caso de la modulación MPSK la energía promedio por símbolo es:

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \frac{{A_c}^2}{2} D\left(cos(\varphi_k)^2 + sen(\varphi_k)^2\right) = \frac{{A_c}^2 D}{2}$$



La energía promedio por símbolo en MPSK, adoptando módulo unitario, estaría asociada a un factor geométrico $FGN = \frac{M(1)}{M} = 1$. Luego $E = FGN \frac{{A_c}^2 D}{2} = \frac{{A_c}^2 D}{2}$

En el caso de la modulación QAM (4QAM) la energía promedio por símbolo es:

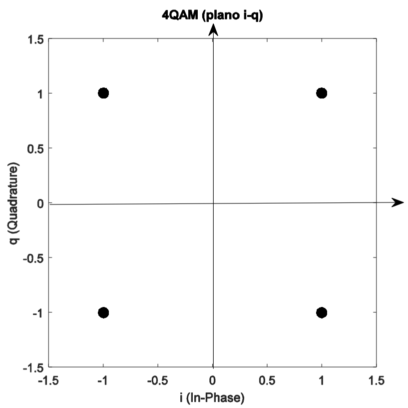
$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \frac{{A_c}^2}{2} D\left({I_k}^2 + {Q_k}^2\right) = {A_c}^2 D$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Constelaciones IQ. Energía por símbolo.

En el caso de la modulación QAM la energía promedio por símbolo es:

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = 2\frac{{A_c}^2 D}{2} = {A_c}^2 D$$



La energía promedio por símbolo en QAM, adoptando coordenadas IQ de la forma ± 1, estaría asociada a un factor geométrico $FGN = \frac{4(1^2+1^2)}{4} = 2.$

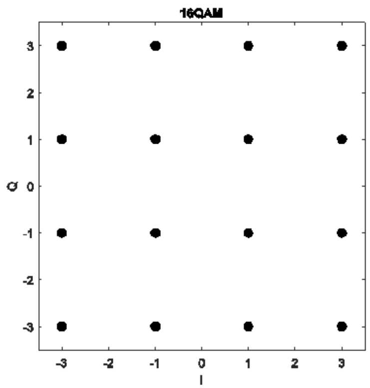
Luego $E = FGN\frac{{A_c}^2 D}{2}$=2$\frac{{A_c}^2 D}{2} = {A_c}^2 D$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Constelaciones IQ. Energía por símbolo.

En el caso de la modulación MQAM la energía promedio por símbolo es:

$$E = \frac{1}{2} {A_c}^2 \left({I_k}^2 + {Q_k}^2\right) D = \frac{\mu^2 - 1}{3} {A_c}^2 D$$



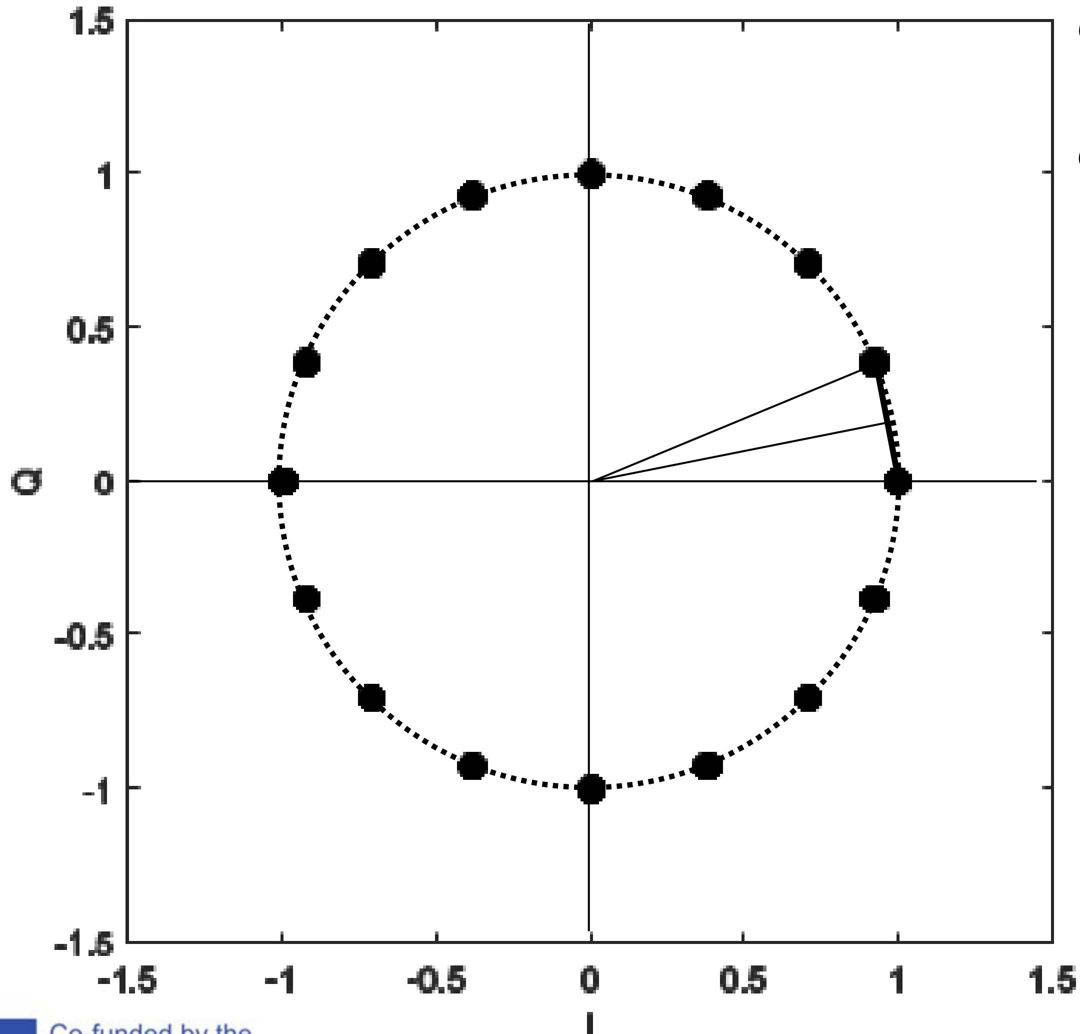
La energía promedio por símbolo en MQAM, adoptando coordenadas IQ de la forma $\pm 1, \pm 3$, estaría asociada a un factor geométrico $FGN = \frac{4(40)}{16}$ =10.

Luego $E = FG \frac{{A_c}^2 D}{2}$=10$\frac{{A_c}^2 D}{2} = \frac{16-1}{3} {A_c}^2 D$

$$FGN = \frac{4}{16}\left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2\right) = 10$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Distancia mínima cuadrado normalizada. MPSK.



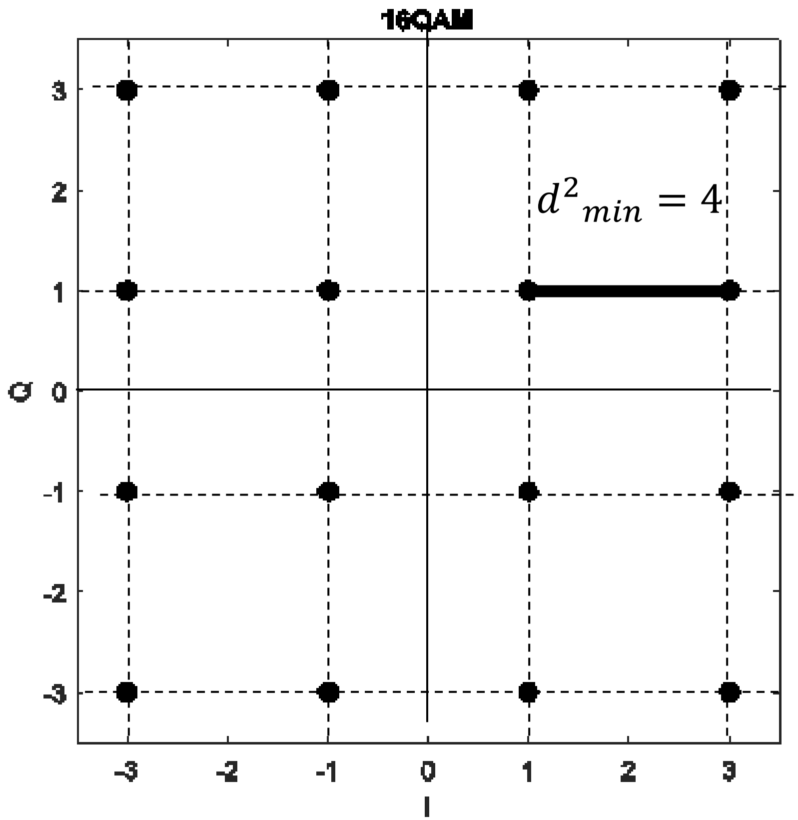
$$d^2{}_{min} = 4sen^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

$$d^2{}_{min} = 4sen^2\left(\frac{\pi}{16}\right) = 0.1522$$

$$FGN = 16/16 = 1$$

$$d^2{}_{N,min} = \frac{d^2{}_{min}}{E} = 0.1522$$

Distancia mínima cuadrado normalizada. MQAM.



$$d^2{}_{min} = 4$$

$$d^2{}_{N,min} = \frac{d^2{}_{min}}{E} = 0.4$$

$$FGN = \frac{1}{16} 4(1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = \frac{1}{16} x4x40 = 10$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Comparación entre constelaciones IQ.

El parámetro de distancia cuadrado normalizada nos permite hacer un análisis comparativo entre las modulaciones, pudiendo determinar la ganancia relativa de una respecto a la otra, realizando el cálculo de la cantidad:

$$G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{d^2{}_{N,min\,1}}{d^2{}_{N,min\,2}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{d^2{}_{min\,1}/E_1}{d^2{}_{min\,2}/E_2}\right) =$$

$$10\log_{10}\left(\frac{d^2{}_{min\,1}/FGN_1}{d^2{}_{min\,2}/FGN_2}\right)$$

Pues $E = FGN\,\frac{{A_c}^2}{2}D$

Para el ejemplo analizado:

$$G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{d^2{}_{N,min\,1}}{d^2{}_{N,min\,2}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{0.4}{0.1522}\right) = 4.2\;dB$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Comparación entre constelaciones 16PSK-16QAM.