

Sistemas de Comunicaciones basados en Radio Definida por Software (SDR)

Dr. Ing. Jorge Castiñeira Moreira

Dr. Ing. Alejandro José Uriz

Sistemas de Comunicaciones Digitales

Filtro adaptado. Interpretación.

El filtro adaptado genera la mejor relación señal ruido posible desde el punto de vista del receptor, para un dado pulso de entrada. La respuesta impulsiva de ese filtro se obtiene revirtiendo el eje del tiempo y desplazando segundos a la forma de onda del pulso entrante, cuando el ruido es del tipo blanco, aditivo y Gaussiano.

Si por ejemplo el pulso de entrada fuera de tipo triangular, tal como el que se ve en la figura:

Probabilidad de Error M-aria

La señalización binaria provee la mayor aislación contra el ruido debido a que todo el rango dinámico de tensiones es utilizado solo por dos niveles. El empleo de la señalización M-aria o multinivel, tiene por objeto aumentar la velocidad de señalización manteniendo el ancho de banda constante, pero dicho objetivo es logrado a expensas de la performance de error, o bien para conservar la misma probabilidad de error, a expensas de mayor potencia.

Se calculará la probabilidad de error en presencia de ruido blanco y Gaussiano, de valor medio cero y potencia de ruido σ^2 .

Se empleará señalización polar, para simplificar algunos cálculos:

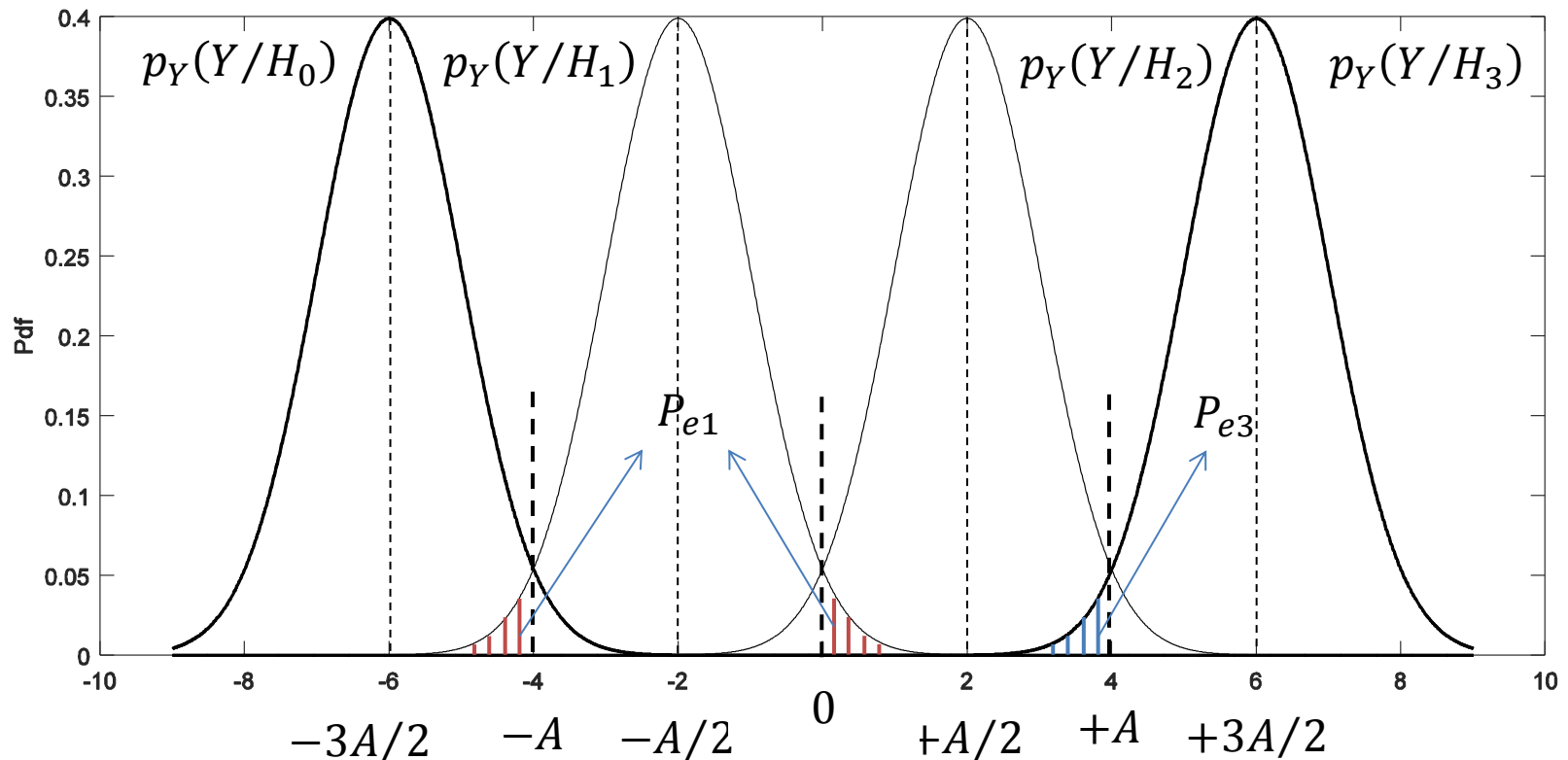
$$a_k = \pm A/2, \pm 3 A/2, \pm \dots \pm (M - 1)A/2$$

Probabilidad de Error M-aria

Si todos los símbolos del alfabeto de valores son equiprobables:

$$P_e = \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e1} + \cdots P_{eM-1})$$

El esquema de funciones densidad de probabilidad para una señal M-aria de por ejemplo 4 niveles se presenta en la figura



Probabilidad de Error M-aria

Los umbrales de decisión se determinan suponiendo que todos los valores son igualmente probables de forma que se encuentran ubicados en el punto medio de los valores medios de cada función densidad de probabilidad. Los umbrales se encuentran en $-A$, 0 y A .

Los símbolos no tienen la misma probabilidad de error. Para los símbolos de los extremos izquierdo y derecho:

$$P_{e0} = P_{e3} = Q(A/2\sigma)$$

Mientras que para los símbolos de la zona media:

$$P_{e1} = P_{e2} = 2Q(A/2\sigma)$$

Probabilidad de Error M-aria

$$P_e = \frac{1}{4} [2Q(A/2\sigma) + 2 \times 2Q(A/2\sigma)] = \frac{3}{2} Q(A/2\sigma)$$

Extendiendo este resultado a una señal de M valores posibles, siendo $M = 2^n$, con umbrales de decisión ubicados en $y = 0, \pm A, \pm 2A, \dots, \pm \left[\frac{M-2}{2} \right] A$:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{M} [2Q(A/2\sigma) + 2 \times (M-2)Q(A/2\sigma)] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q(A/2\sigma) \end{aligned}$$

La expresión coincide con la de la probabilidad binaria si $M = 2$.

Probabilidad de Error M-aria

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{6S_R \log_2(M)}{(M^2 - 1)\eta r_b} = \frac{6 \log_2(M)}{(M^2 - 1)} \frac{S_R}{\eta r_b} = \frac{6 \log_2(M)}{(M^2 - 1)} \gamma_b$$

La relación $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2$ queda así expresada en función de γ_b .
Obsérvese que la cantidad:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{6 \log_2(M)}{(M^2 - 1)} = 0$$

Es decir el cociente $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2$ se degrada fuertemente al crecer M .
Cuando se utiliza el filtro adaptado se obtiene el valor maximizado de $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2$.

Probabilidad de Error M-aria

Las expresiones derivadas para la probabilidad de error P_e de una señalización M-aria pueden ser relacionadas con la probabilidad de error binaria P_{be} correspondiente.

Este calculo de la probabilidad de error depende de la forma en que se establece la correspondencia entre los símbolos M-arios y la información binaria.

Parte 2

Interferencia Intersimbólica (ISI)

Como se ha dicho en el capítulo 1 el segundo problema a resolver en un sistema de transmisión en banda base es el efecto de la interferencia que un símbolo de la secuencia puede generar sobre el otro. Para una señal de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

Nuevamente haciendo uso del concepto de superposición, se analiza el efecto de la interferencia intersimbólica como si el ruido no existiera. Luego de haber considerado los efectos separados y superpuestos del ruido y la ISI, ambos se considerarán en forma conjunta.

De la contribución de los diferentes efectos sobre la señal transmitida después de muestrear la señal recibida:

Interferencia Intersimbólica (ISI)

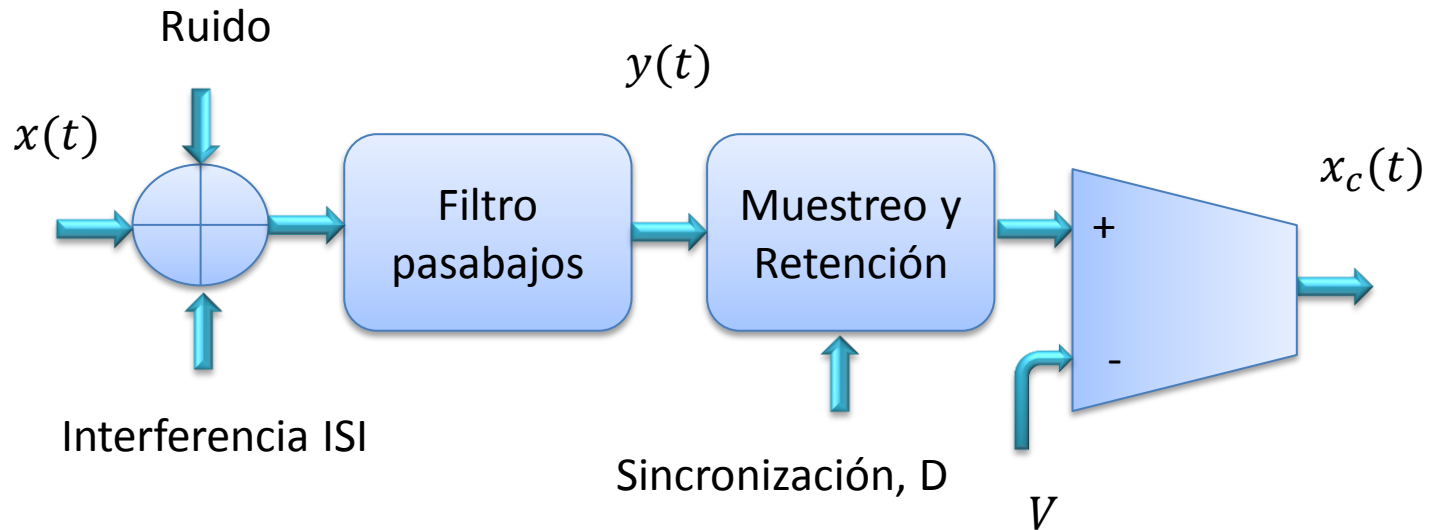
$$y(t_K) = a_K + \sum_{k \neq K} a_k \tilde{p}(t - t_d - kD) + n(t_K)$$

Tenemos en cuenta la ISI solamente:

$$y(t_K) = a_K + \sum_{k \neq K} a_k \tilde{p}(t - t_d - kD)$$

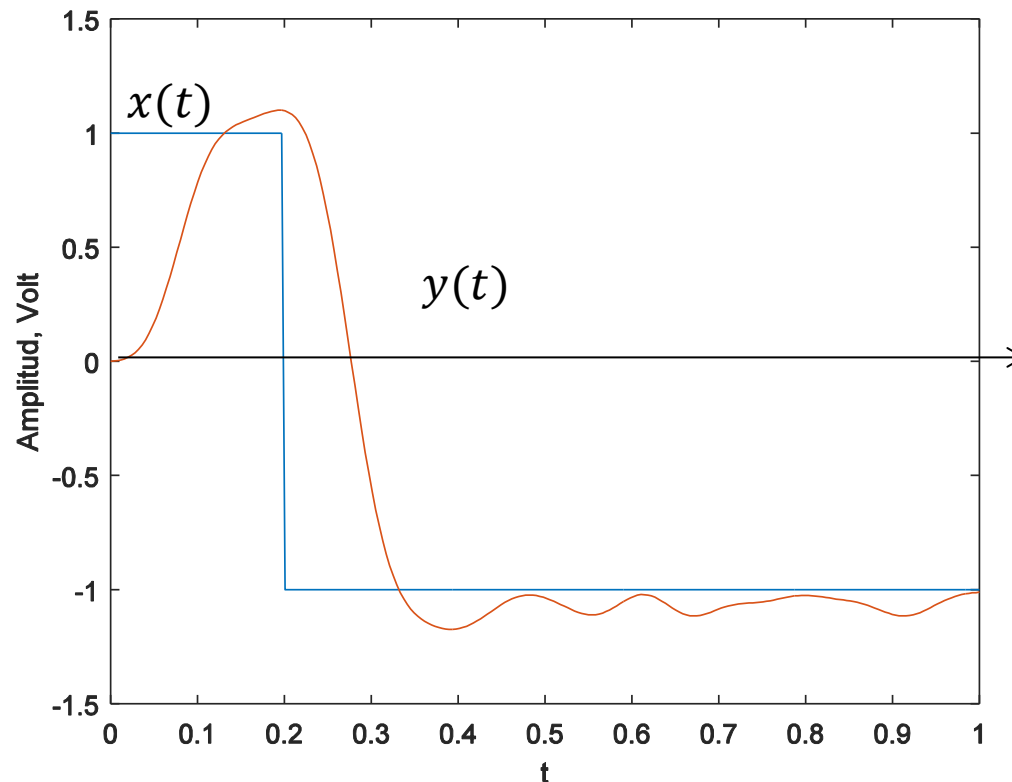
Interferencia Intersimbólica (ISI)

En el receptor se encuentra la suma de la señal de interés, el ruido y la posible interferencia ISI.



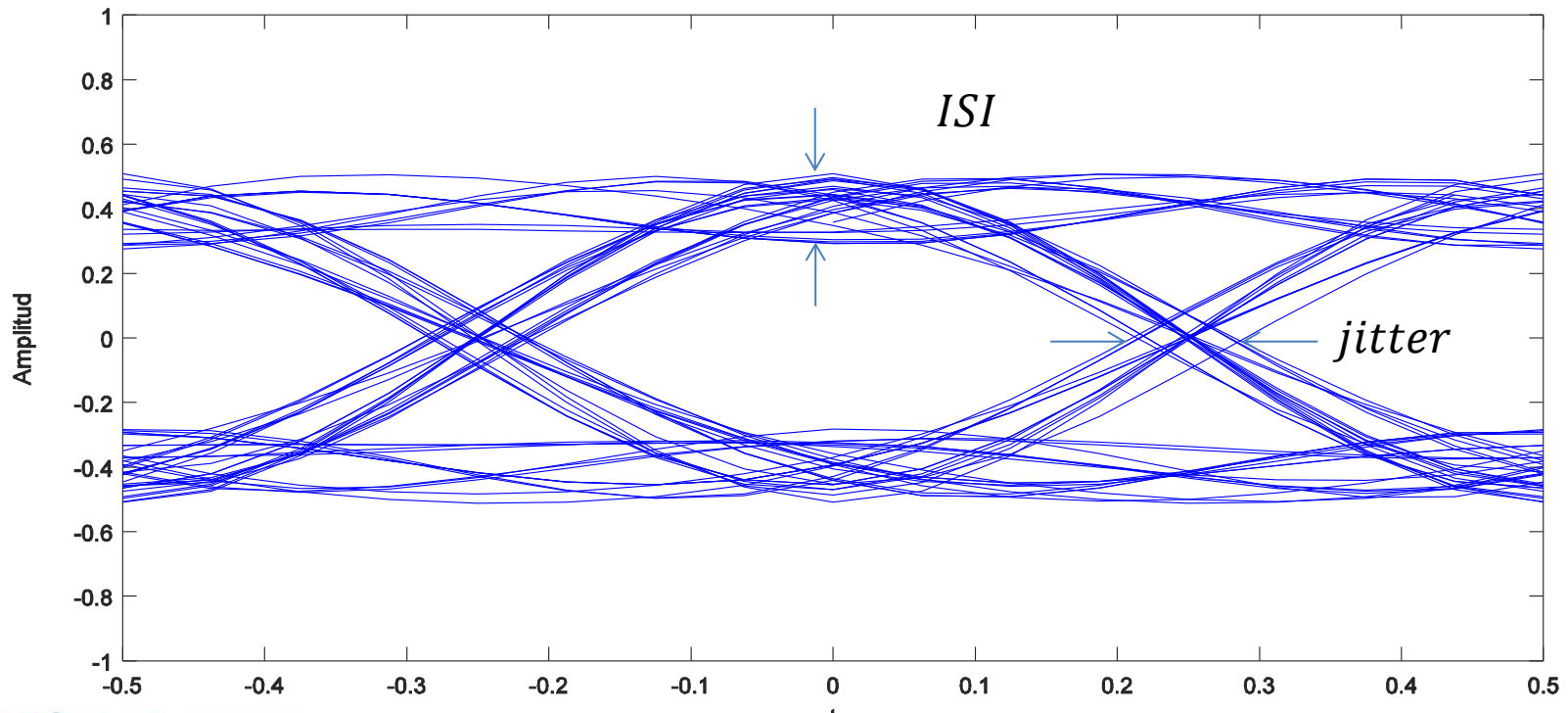
Interferencia Intersimbólica (ISI)

Si se transmitiera un pulso rectangular aislado que no está afectado por ruido, y pasa por un filtro pasabajos, luciría como en la figura:



ISI. Patrón de "Ojo"

El efecto de la interferencia puede ser analizado en un osciloscopio. Cuando se observa una secuencia de valores de información digital modulados en una señal PAM se produce lo que se denomina el patrón de ojo.



Pulso conformado de Nyquist.

En el caso 3, se presentan diferentes alternativas, y dado que se acepta una pérdida de la velocidad de señalización posible para darle forma a un pulso de cero ISI, pero realizable, el sacrificio de velocidad se describe como porcentaje de conformación o de “roll-off” que identificamos con la letra β , entonces el ancho de banda de transmisión disponible se reparte entre señalización y conformación:

$$B = \frac{r}{2} + \beta$$

Siendo por criterio de diseño:

$$0 \leq \beta \leq \frac{r}{2}$$

Esta configuración del espectro permite señalización a velocidades entre:

$$B \leq r \leq 2B$$

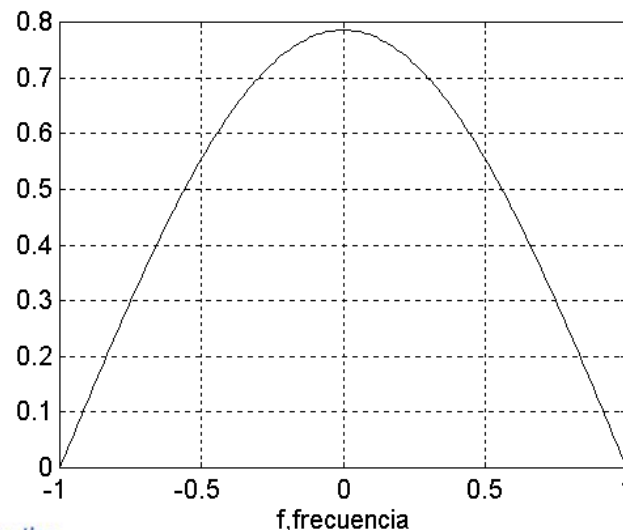
Pulso conformado de Nyquist.

Puede demostrarse que si la forma del pulso es:

$$p(t) = p_{\beta}(t) \operatorname{sinc}(rt)$$

siendo:

$$P_{\beta}(f) = 0 \text{ si } |f| > \beta$$



Pulso conformado de Nyquist.

El gráfico presenta el espectro $P_\beta(f)$ para $\beta = 1$. La forma de onda posee cruce por cero en los instantes de muestreo correspondientes a los otros valores de la secuencia de pulsos. Este tipo de pulso será de cero ISI.

Para el pulso conformado $p(t) = p_\beta(t)\text{sinc}(rt)$ estudiado en el dominio de la frecuencia:

$$P(f) = P_\beta(f) * \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

Y como resultado de la convolución entre espectros, el ancho de banda resultante será la suma de los anchos de banda correspondientes: $B = \frac{r}{2} + \beta$. Este tipo de pulso es llamado pulso conformado de Nyquist.

Pulso conformado de Nyquist.

Existen muchas funciones como la descripta que cumplen las condiciones establecidas. En general se adopta $p_\beta(t)$ como función par, de forma que $P_\beta(f)$ tiene simetría par, y $P(f)$ simetría vestigial alrededor de $\pm r/2$.

Debe tenerse en cuenta que las conclusiones obtenidas acerca del pulso conformado de Nyquist se aplican en realidad a la forma de onda resultante del filtrado producido por el filtro del sistema transmisor, mas el filtrado originado por el canal, en el caso que la respuesta del canal no fuera plana en el ancho de banda de interés, y el filtrado aplicado a la entrada del receptor. Cuando se considera que el filtro es plano, y que el transmisor y el receptor aplican un filtro rectangular de ancho de banda mayor o igual que el de la señal, entonces todas las propiedades corresponden al pulso transmitido.

Pulso conformado de Nyquist.

Debido a que el pulso $p(t)$ contiene a la función $\text{sinc}(rt)$, posee sus ceros en los instantes de muestreo $t_k = \pm D, \pm 2D, \pm 3D \dots$ y cumple con la condición de cero ISI.

Por otro lado es al mismo tiempo un pulso limitado en banda, como se planteó inicialmente.

Existen varias formas de onda que cumplen estas condiciones. Una forma de onda típica para $P_\beta(f)$ es el llamado coseno roll-off, cuya transformada de Fourier tiene la forma:

$$P_\beta(f) = \frac{\pi}{4\beta} \cos\left(\frac{\pi f}{2\beta}\right) \Pi\left(\frac{f}{2\beta}\right)$$

Pulso conformado de Nyquist.

Realizando la convolución en el dominio espectral

$$P(f) = P_{\beta}(f) * \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

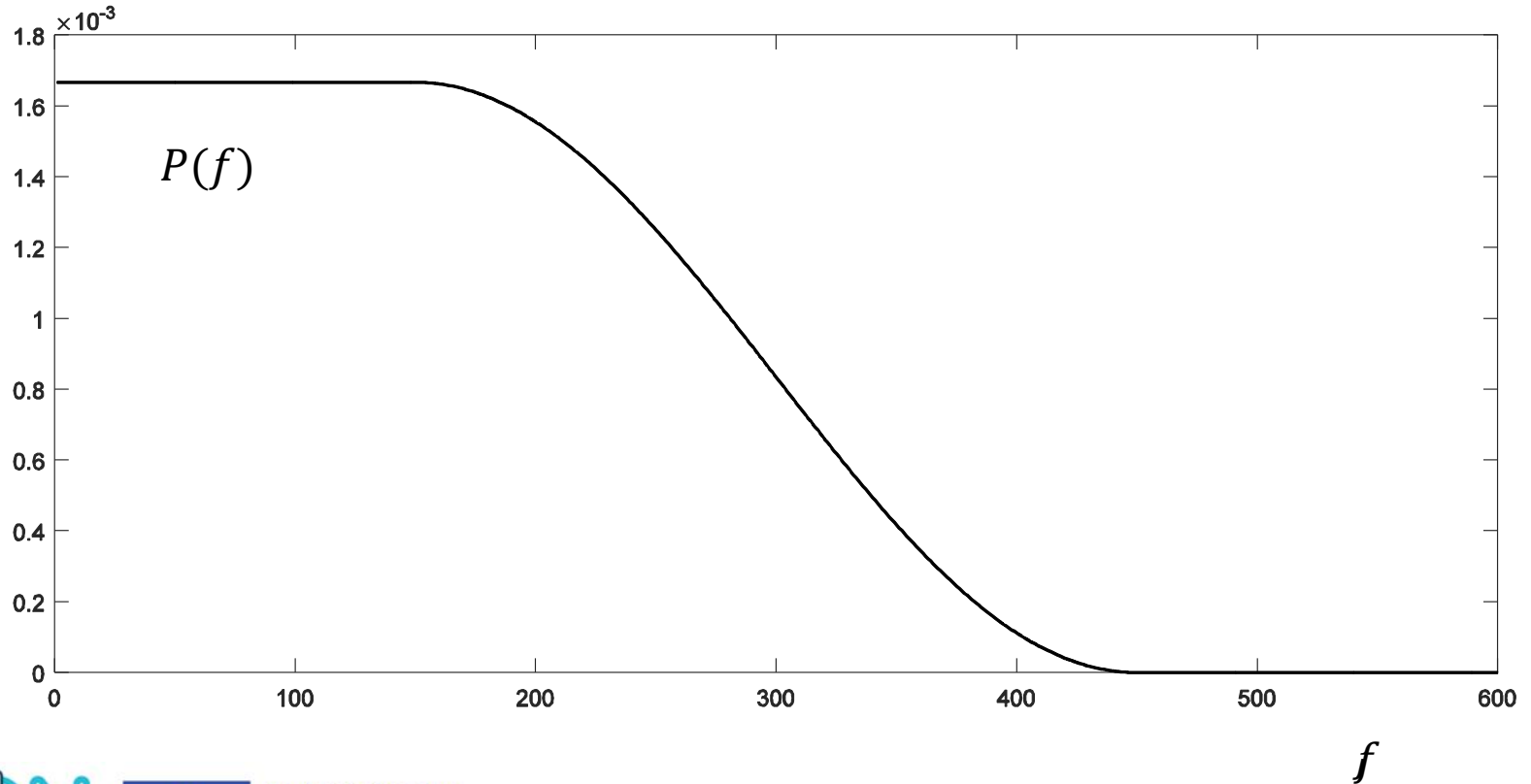
que tiene como forma de onda en el tiempo:

$$p(t) = \frac{\cos(2\pi\beta t)}{1 - (4\beta t)^2} \text{sinc}(rt)$$

Forma de onda que decae como $1/|t|^2$ cuando t es lo suficientemente grande. Esta reducción de amplitud de los lóbulos laterales de la sinc le da forma realizable al pulso.

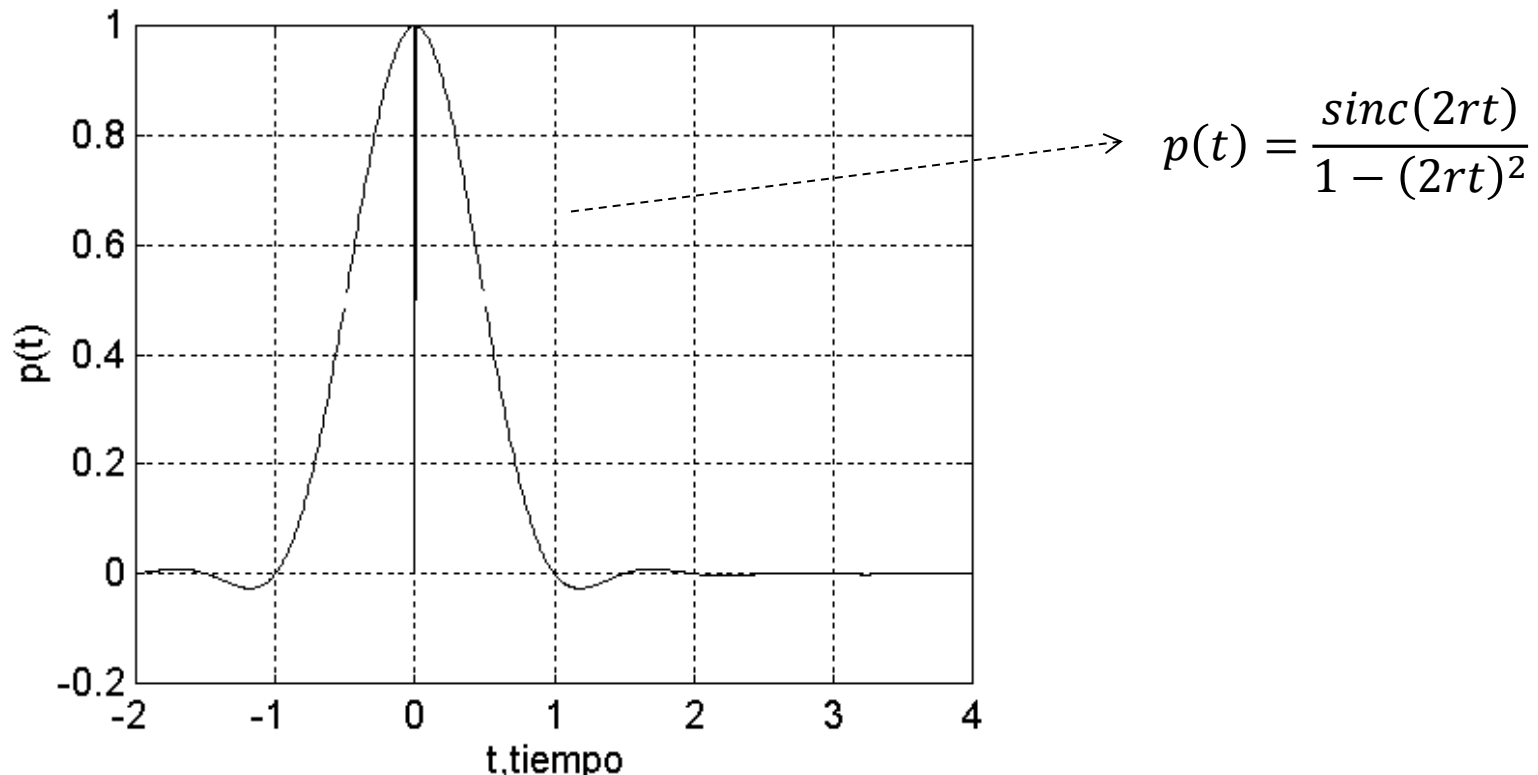
Pulso conformado de Nyquist.

El espectro del pulso de Nyquist con un porcentaje de roll-off de 50 % se observa en la figura:



Pulso conformado de Nyquist.

La expresión y forma del pulso $p(t)$ de Nyquist con un porcentaje de roll-off de 100 % se observa en la figura:



Pulso conformado de Nyquist.

Una señal polar que emplee este tipo de pulsos presentar cruces por cero en los puntos medios de los intervalos. Este pulso provee una señal de sincronismo pero lo hace a expensas de la reducción de la velocidad de señalización a $r = B$.

El pulso conformado de Nyquist cumple con la condición de cero ISI y es un tipo de pulso que puede implementarse en la práctica. Cuando se emplean dispositivos programados digitalmente, como los DSP (Digital Signal Processors) la forma de onda se almacena en valores muestreados para luego ser generados a la salida por conversión digital-analógica. En este caso los valores a almacenar incluyen las colas del pulso, que se anulan rápidamente, haciendo que el archivo correspondiente de muestras sea bastante limitado. De acuerdo a valor adoptado de roll-off, la velocidad de señalización podrá ser entre B y $2B$.

Parte 3

Modulación por pulsos codificados. PCM (Pulse-Coded Modulation).

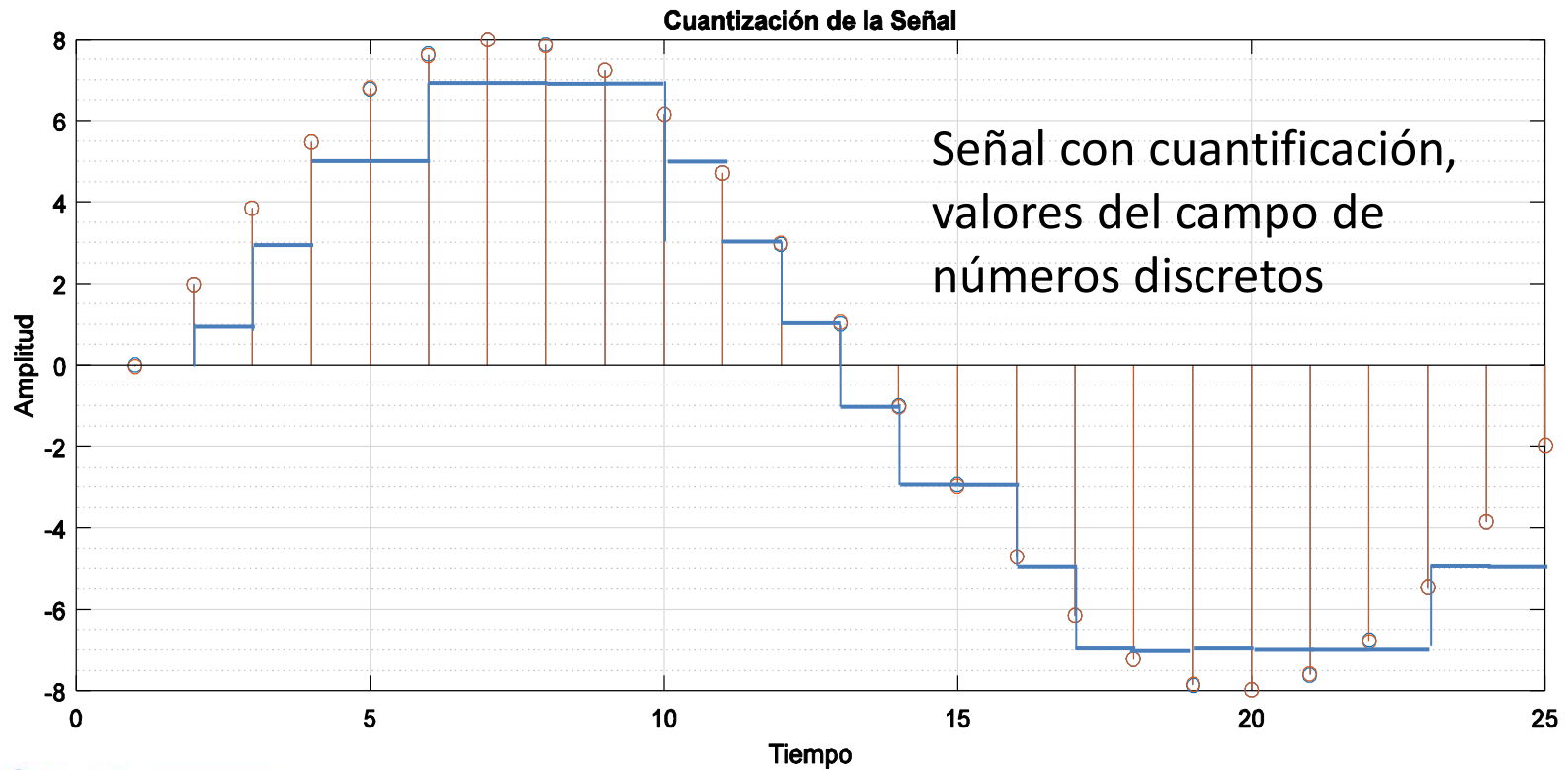
Para transmitir la señal en modo digital, en la forma de un tren de pulsos rectangulares por ejemplo, es necesario en el caso de señales analógicas realizar primero la conversión de la forma analógica a la digital.

Las señales analógicas mas comunes son el audio (de un ancho de banda de aproximadamente 4 KHz), sonido y música (de un ancho de banda de aproximadamente 20 KHz) y el video de televisión (de un ancho de banda de aproximadamente 6 Mhz).

En general las señales usan un transductor para llegar a tener una versión o réplica eléctrica, una señal medible en volts, que puede ser digitalizada por medios electrónicos.

PCM (Pulse-Coded Modulation)

Las muestras resultan en valores que serían números reales, pero para enviar en forma digitalizada la señal hay que adoptar un alfabeto discreto de amplitudes, que fuerzan al proceso que llamaremos cuantificación.



PCM. Características

Ventajas originadas por la transmisión digital de señales:

- Puede ser codificada y comprimida, con lo cual se permite entonces la corrección de errores y la reducción de ancho de banda respectivamente.
- Se implementa mas fácilmente técnicas para proporcionar a una señal transmisión con privacidad.
- El uso de repetidores regenerativos permite la transmisión en largas distancias.
- Algunas limitaciones de este proceso de digitalización son la expansión del ancho de banda y el ruido de cuantificación propio del sistema.

PCM (Pulse-Coded Modulation)

La señal de entrada es filtrada para poder ser muestreada a una velocidad $f_s \geq 2W$ sin provocar aliasing.

La salida del bloque de muestra y retención es una forma de onda en escalera con valores $x(kT_s)$.

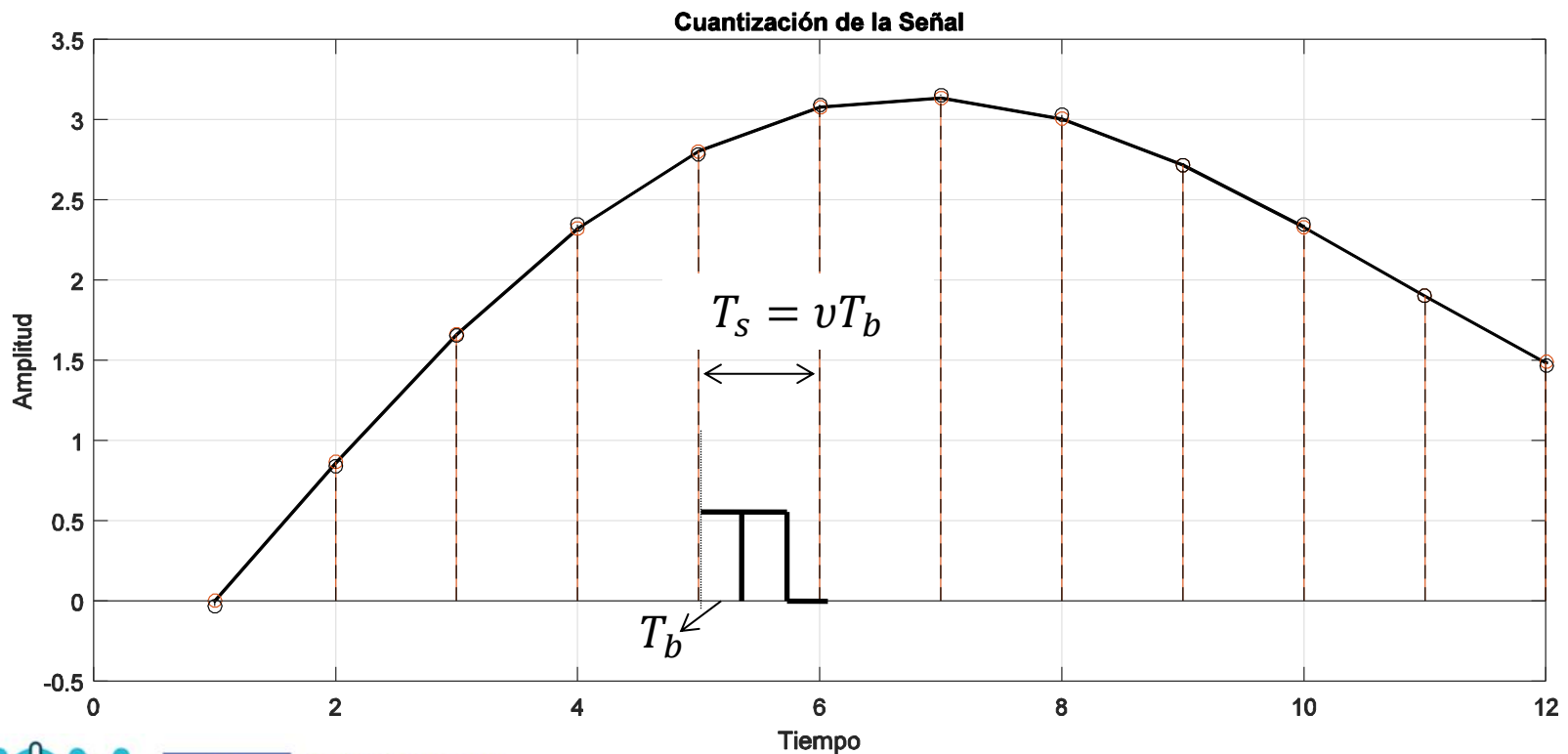
Un cuantificador adopta el valor mas próximo dentro de un juego de q niveles, adoptando dar forma a un nivel discretizado $x_q(kT_s)$.

En este proceso de cuantificación se produce una distorsión de la señal que se caracteriza por el así llamado ruido de cuantificación. El codificador M-ario toma la señal descripta y la convierte en una palabra digital de $\log_2 q$ dígitos que se conforma en salida serie para ser finalmente transmitida por el canal.

Se considera que la señal $x(t)$ que ingresa al sistema esta normalizada de forma que $|x(t)| \leq 1 \text{ Volt}$.

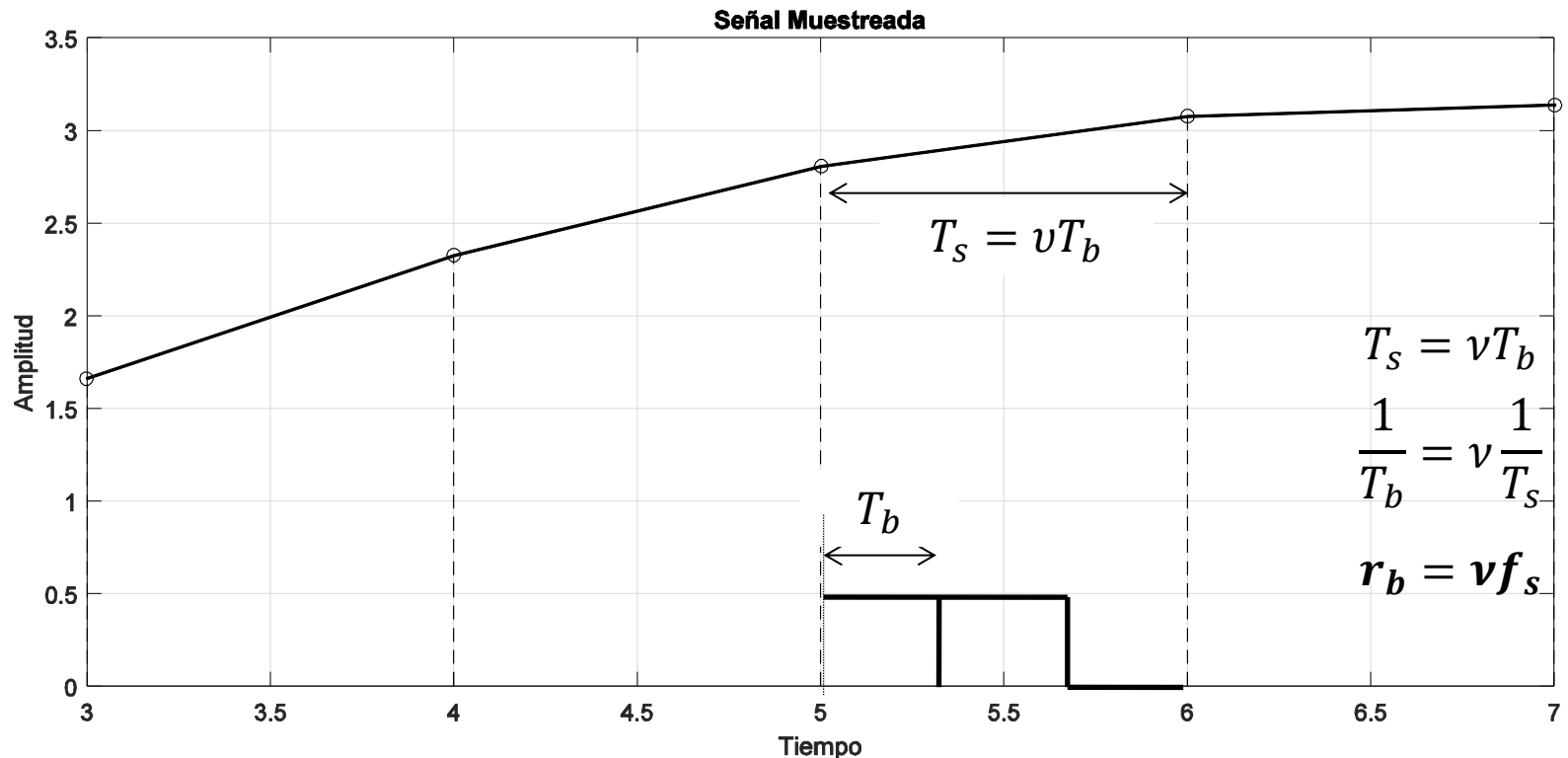
PCM. Velocidad de señalización.

El codificador convierte cada muestra cuantificada en una palabra digital. La conversión debe hacerse antes de la próxima muestra.



PCM. Velocidad de señalización.

El codificador convierte cada muestra cuantificada en una palabra digital. La conversión debe hacerse antes de la próxima muestra.



PCM. Velocidad de señalización.

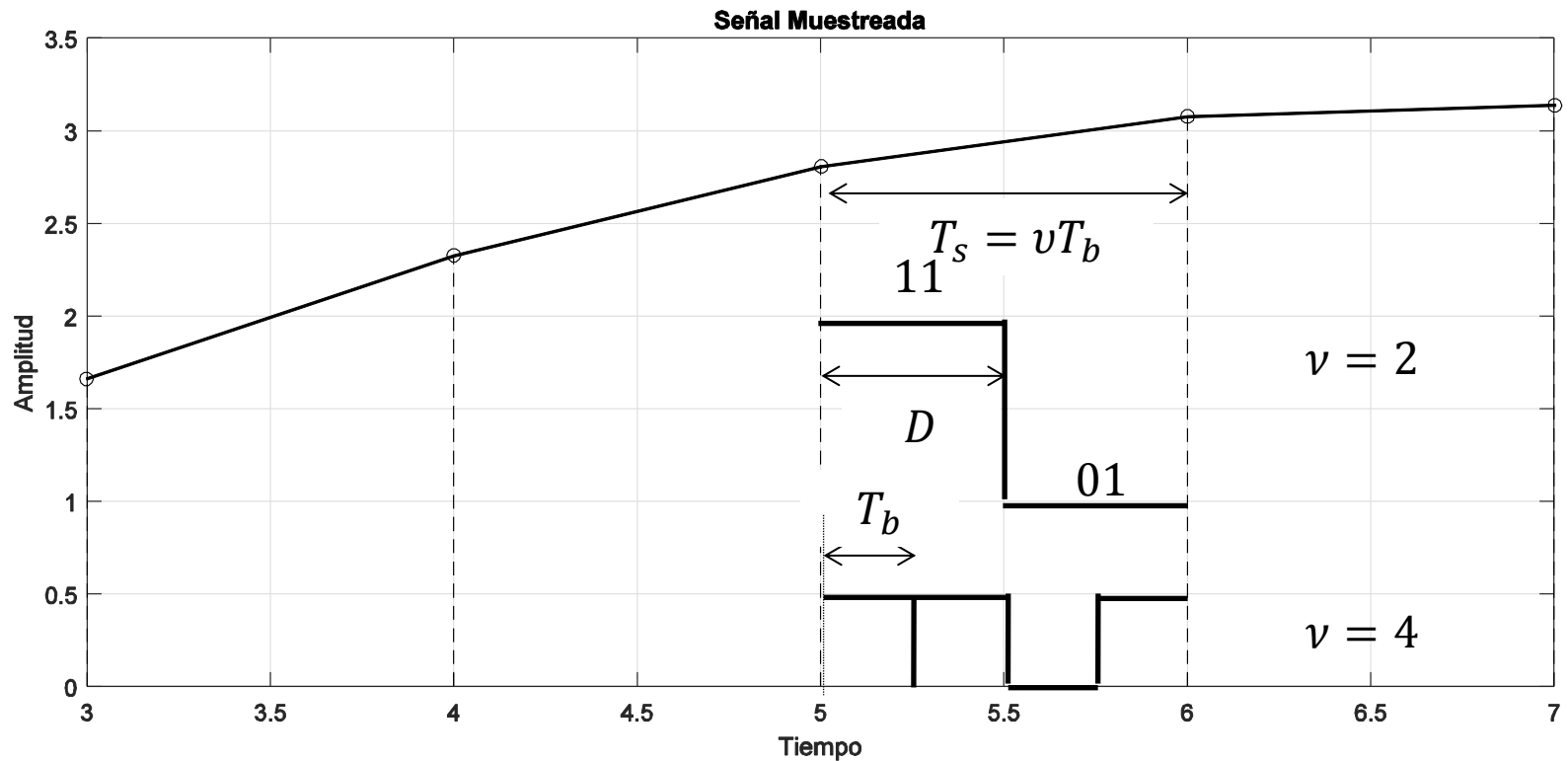
En la figura previa se muestra el caso en que una muestra de la señal cuantificada $x_q(kT_s)$ se convierte en una palabra digital serie de tres bits, con lo que se deduce que habría 8 distintos niveles que corresponderían a este conjunto de palabras digitales. Se requiere en general que para la transmisión de ν dígitos existan al menos:

$$2^\nu = q, \quad \nu = \log_2 q, \quad (2^\nu \geq q)$$

Si la transmisión de los datos digitalizados y típicamente interpretados como una secuencia de '1's y '0's se efectúa como una señalización M-aria, entonces:

PCM. Velocidad de señalización.

$$M^v = q, \quad v = \log_M q, \quad (M^v \geq q)$$



PCM. Ancho de banda de transmisión.

Cada muestra es una palabra de ν dígitos. Estos dígitos deben ser transmitidos en serie a una velocidad $r_b = \nu f_s$ siendo $f_s \geq 2W$. El ancho de banda necesario para transmitir una señal PCM se convierte entonces en:

$$B_T \geq \frac{r_b}{2} = \frac{1}{2} \nu f_s \geq \nu W$$

El valor mínimo del ancho de banda de transmisión es igual a $B_T = \nu W$ y esta situación se produce si:

- La frecuencia de muestreo se elige en su valor mínimo posible $f_s = 2W$
- La transmisión se realiza utilizando un puso ideal de Nyquist $p(t) = \text{sinc}(rt)$

Ruido de Cuantificación.

La señal original $x(t)$ queda afectada por el ruido de cuantificación, representada por el efecto de los valores de ese ruido que atraviesan un filtro pasabajos ideal.

El ruido de cuantificación ϵ_k es en realidad, una variable aleatoria que, de acuerdo a la expresión anterior, depende de $x(t)$.

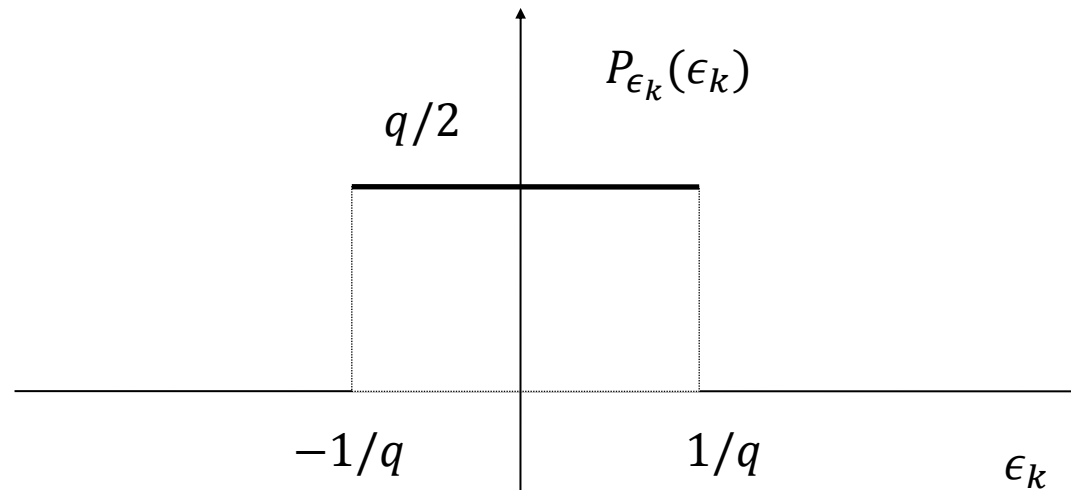
Si el numero de niveles de cuantificación es alto, entonces el error de cuantificación se independiza de la señal. Se supondrá entonces que el error de cuantificación ϵ_k es independiente de la señal desde el punto de vista estadístico.

El ruido de cuantificación ϵ_k es una variable aleatoria que se asume de función densidad de probabilidad uniforme y valor cuadrático medio ϵ_k^2 que tiene un rango de variación:

$$-1/q \leq \epsilon_k \leq 1/q$$

Ruido de Cuantificación. Función pdf.

La suposición de la distribución de ruido de cuantificación es exacta cuando la señal tiene distribución uniforme, ya que el ruido de cuantificación es función lineal de la misma.



Ruido de Cuantificación. Potencia de ruido.

Asumiendo una pdf uniforme para el ruido de cuantificación, puede determinarse la potencia de ruido de esta cantidad:

$$\overline{\sigma_q^2} = \overline{\epsilon_k^2} = \frac{q}{2} \int_{-1/q}^{1/q} \epsilon_k^2 d\epsilon_k = \frac{q}{2} \frac{2x(1/q)^3}{3} = \frac{1}{3q^2}$$

La potencia de ruido de cuantificación decrece cuando el numero de niveles q aumenta.

Relación señal-ruido de Cuantificación.

La potencia de recepción en destino viene dada por:

$$S_D = \overline{x^2} = S_x \leq 1$$

Asumiendo una señal normalizada tal que: $|x(t)| \leq 1$.

Luego la relación señal ruido en destino puede expresarse como:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{\sigma_q^2} = 3q^2 S_x$$

Si el numero de niveles se expresa como una potencia de 2, $q = 2^\nu$, y aplicando logaritmos para usar decibeleles:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,dB} = 10 \log_{10}(3x2^{2\nu} S_x) \leq 4.8 + 6\nu [dB], (S_x \leq 1)$$

Donde el " = " se cumple para $S_x = 1$.

Cuantificación no uniforme y Compansión

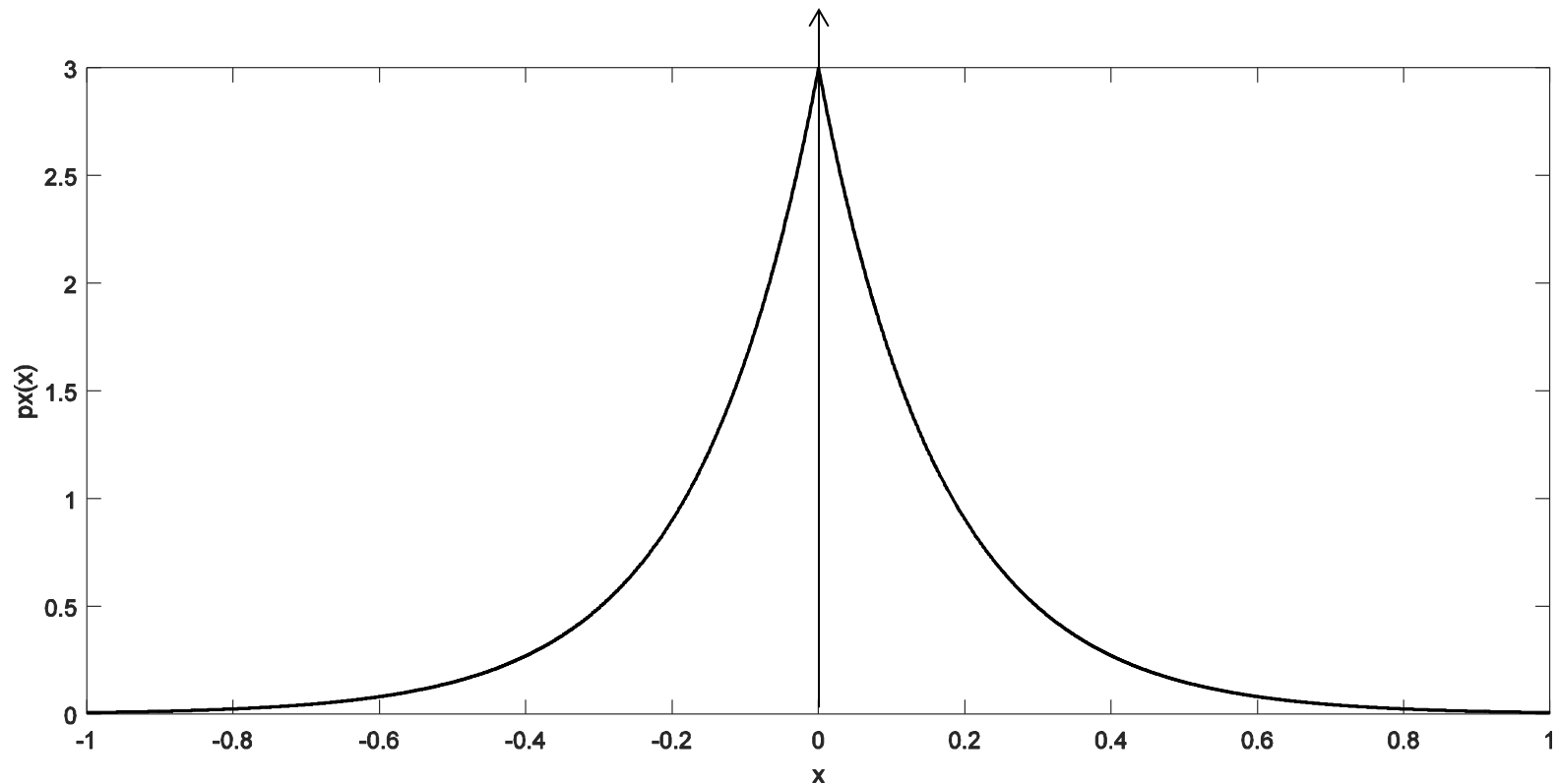
Si $S_x = 1$, por ejemplo para una señal PCM de $\nu = 8$ dígitos, la relación señal ruido teórica sería de 52.8 dB.

Sin embargo las señales reales, particularmente las de audio (Ver figura), tienen un factor de cresta bastante alto. Esto significa que la señal está durante la mayor parte del tiempo en valores bajos de tensión, y alcanza el pico máximo solo pocas veces. Como consecuencia $S_x \ll 1$, lo cual produce en la relación señal ruido una reducción importante. Así por ejemplo, y si se desea tener una relación señal ruido de 60 dB como se había calculado para 8 dígitos, se necesitarían en realidad 14 dígitos en un caso práctico.



Cuantificación no uniforme y Compansión.

Una señal de voz tiene una función densidad de probabilidad típica como la que se ve en la figura, cuya potencia normalizada asociada $S_x \ll 1$:



Cuantificación no uniforme y Compansión.

La cuantificación uniforme produce un empeoramiento de la relación señal ruido porque los valores bajos de tensión tienen mas probabilidad de ocurrencia que los altos.

Se puede realizar una uniformización de la probabilidad de estos niveles si por ejemplo se cuantifica con un mayor numero de estos sobre el eje x de la figura de forma que puedan agruparse los valores de tensión haciendo que aquellos que son bajos correspondan a mas palabras digitales, que se discriminan finalmente para pequeños intervalos de x , mientras que los valores altos de tensión se agrupan utilizando menos palabras digitales para intervalos mas anchos del eje x . A esto se lo denomina cuantificación no uniforme.

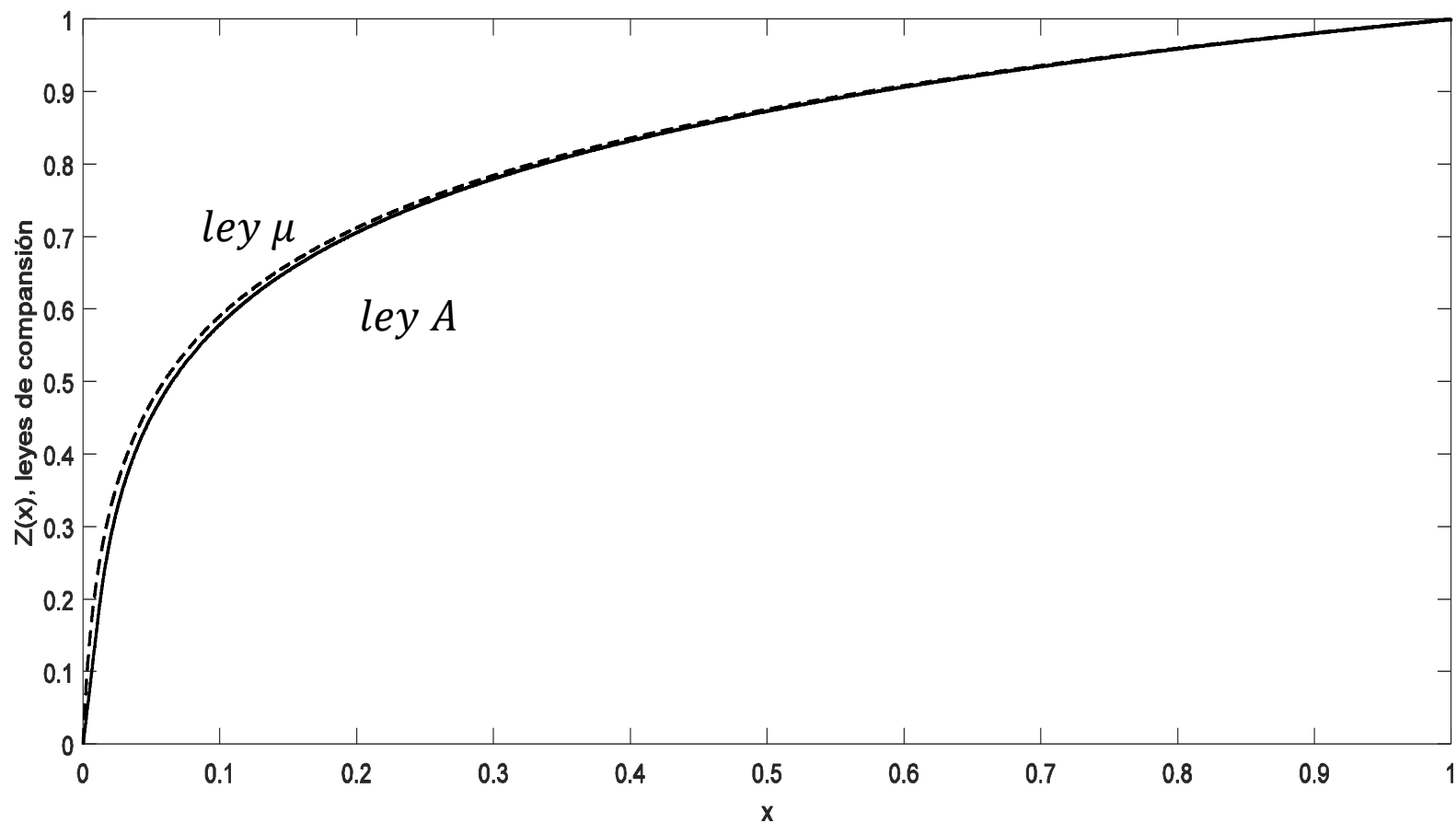
Cuantificación no uniforme y Compansión.

La cuantificación no uniforme puede realizarse como se describió anteriormente de forma digital, es decir cuantificando con mayor cantidad de niveles, y agrupando por programa dichos niveles de forma que los valores bajos de tensión se dividen en pequeños intervalos del eje, y los mas altos con incrementos de mas anchos. Así la probabilidad de las palabras digitales a transmitir tiende a uniformarse.

Otra forma que ha tenido amplio uso es el proceso de la compresión y expansión analógica de una señal, proceso que abreviadamente se denomina compansión.

Se supone que la señal a transmitir tiene una función densidad de probabilidad como la anteriormente mostrada, con valor medio cero $\bar{x} = 0$, y dispersión σ^2 .

Leyes de Compansión. Leyes μ y A .



Parte 4

PCM con ruido. Ruido de decodificación.

Hasta el momento solo se consideró el ruido llamado de cuantificación, en realidad, una distorsión que le agregamos al sistema si la digitalización no se implementa de manera adecuada.

Pero una vez que la señal es digitalizada, y que se decide transmitirla a través de un canal, aparece el ruido de la transmisión, que puede alterar los valores digitales que luego, en la conversión digital a analógica, pueden resultar en un ruido magnificado por el proceso.

La señal generada por un transmisor de PCM es ingresada al canal, donde el ruido puede afectar los valores de la secuencia, y producir errores. Se analiza entonces el efecto del ruido sobre la señal transmitida, ruido que se conoce como de decodificación.

Ruido de decodificación.

La señal transmitida estará entonces afectada por el efecto de la cuantificación y por el ruido del canal. Se considera el caso de una señal PCM modulada en forma binaria con cuantificación uniforme y probabilidad de error binaria pequeña. La palabra de código esta constituida por v dígitos y el numero de bits erróneos en ella es una función binomial:

$$\begin{aligned} P_{ew} &= P_{1 \text{ dig}} + P_{2 \text{ dig}} + \dots + P_{v \text{ dig}} = \\ &= \binom{v}{1} P_e (1 - P_e)^{v-1} + \binom{v}{2} P_e^2 (1 - P_e)^{v-2} + \dots \cong v P_e \end{aligned}$$

Se considera que la probabilidad de error es aproximada a la que se tiene cuando hay un solo error en la palabra, dado que la probabilidad de dos o mas errores es pequeña. El efecto del error tiene mayor o menor influencia dependiendo del lugar donde se produce el mismo.

Ruido de decodificación.

Si se considera el uso de código natural y siendo la palabra binaria:

$$b_{v-1} \quad b_{v-2} \quad \cdots \quad b_1 \quad b_0$$

Al estar organizados en un código natural, el m – *esimo* bit representa una amplitud de la señal digitalizada de valor $2^m(2/q)$ Volts. De acuerdo a esto se dice que un error en el m – *esimo* bit provoca un error en la forma de onda de amplitud:

$$e_m = \pm 2^m(2/q) V$$

Para promediar el efecto del error en las diferentes posiciones de los bits calculamos:

$$\overline{e_m^2} = \frac{1}{v} \sum_{m=1}^{v-1} (2^m(2/q))^2 = \frac{4}{vq^2} \sum_{m=1}^{v-1} 4^m = \frac{4}{vq^2} \frac{4^v - 1}{3} \cong \frac{4}{3v}$$

Ruido de decodificación.

La potencia de ruido de decodificación esta dada por el producto entre el numero de bits errados y este promedio de potencia por bit:

$$\sigma_d^2 = (\nu P_e) \overline{e_m^2} = \frac{4}{3} P_e$$

La potencia total de ruido será la suma de la potencia de ruido de decodificación mas la de cuantificación:

$$N_D = \sigma_q^2 + \sigma_d^2 = \frac{1 + 4q^2 P_e}{3q^2}$$

Las potencias de ruido se suman por provenir de fuentes des-correlacionadas.

Efecto Umbral.

Cuando el ruido de decodificación es muy alto la relación señal ruido se deteriora fuertemente, creando el efecto de umbral.

El efecto de umbral en PCM se define como el punto en el que la relación señal ruido en destino se reduce en 1 dB.

La zona de umbral no aceptable es la gobernada por el ruido de decodificación. En la zona aceptable rige el ruido de cuantificación solamente.

Para que eso suceda, $P_e \ll \frac{1}{q^2}$. Asumiendo un valor clásico de cantidad de niveles $q = 2^8 = 256$, entonces $P_e \leq 10^{-5}$.