

Sistemas de Comunicaciones basados en Radio Definida por Software (SDR)

Dr. Ing. Jorge Castiñeira Moreira

Dr. Ing. Alejandro José Uriz

Sistemas de Comunicaciones Digitales - 6

Comparación entre constelaciones IQ.

La descripción gráfica del plano IQ para una determinada modulación, permite analizar aproximadamente el comportamiento de esa modulación frente al ruido, y su probabilidad de error.

Uno de los parámetros mas importantes es la distancia mínima de la constelación, que consideraremos elevada al cuadrado d^2_{min} .

Otro parámetro de interés es la energía promedio por símbolo E .

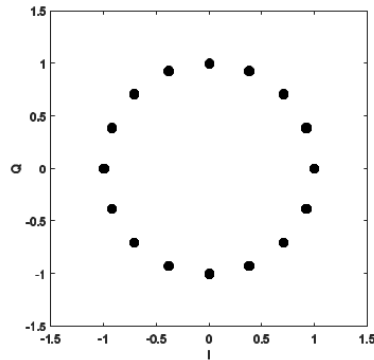
El parámetro combinado que caracteriza a una determinada constelación en una modulación es la distancia mínima cuadrado normalizada:

$$d^2_{N,min} = \frac{d^2_{min}}{E}$$

Constelaciones IQ. Energía por símbolo.

En el caso de la modulación MPSK la energía promedio por símbolo es:

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \frac{A_c^2}{2} D (\cos(\varphi_k)^2 + \sin(\varphi_k)^2) = \frac{A_c^2 D}{2}$$



La energía promedio por símbolo en MPSK, adoptando módulo unitario, estaría asociada a un factor geométrico $FGN = \frac{M(1)}{M} =$
1. Luego $E = FGN \frac{A_c^2 D}{2} = \frac{A_c^2 D}{2}$

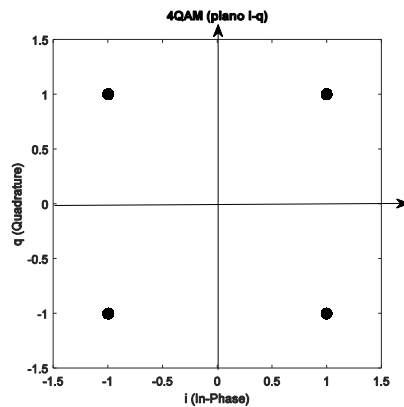
En el caso de la modulación QAM (4QAM) la energía promedio por símbolo es:

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \frac{A_c^2}{2} D (I_k^2 + Q_k^2) = A_c^2 D$$

Constelaciones IQ. Energía por símbolo.

En el caso de la modulación QAM la energía promedio por símbolo es:

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = 2 \frac{A_c^2 D}{2} = A_c^2 D$$



La energía promedio por símbolo en QAM, adoptando coordenadas IQ de la forma ± 1 , estaría asociada a un factor

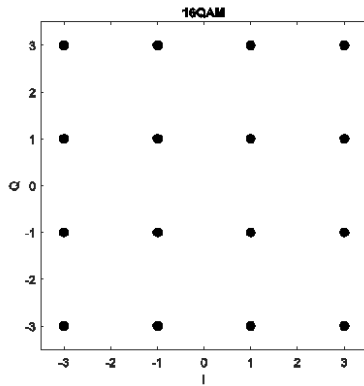
geométrico $FGN = \frac{4(1^2+1^2)}{4} = 2$.

Luego $E = FGN \frac{A_c^2 D}{2} = 2 \frac{A_c^2 D}{2} = A_c^2 D$

Constelaciones IQ. Energía por símbolo.

En el caso de la modulación MQAM la energía promedio por símbolo es:

$$E = \frac{1}{2} A_c^2 (I_k^2 + Q_k^2) D = \frac{\mu^2 - 1}{3} A_c^2 D$$

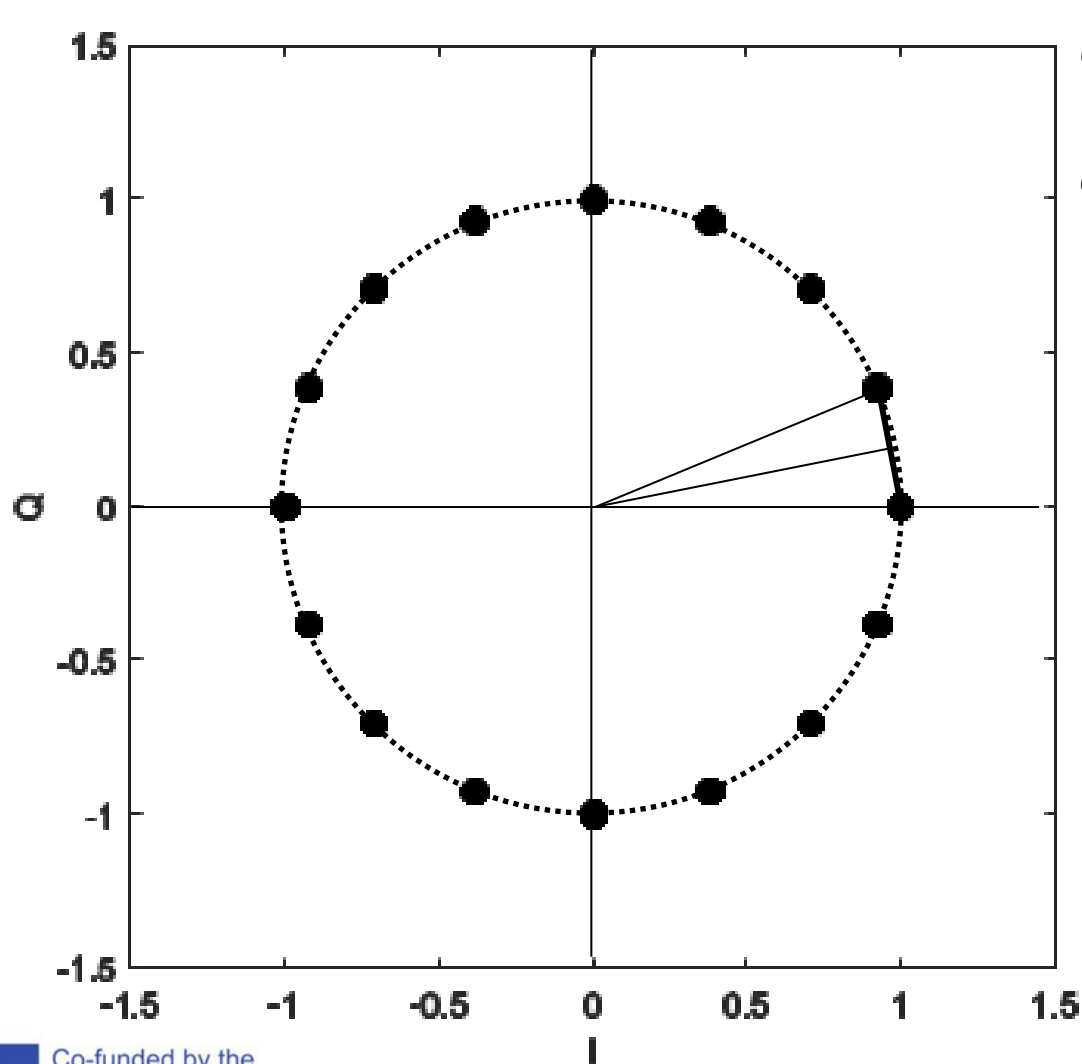


La energía promedio por símbolo en MQAM, adoptando coordenadas IQ de la forma $\pm 1, \pm 3$, estaría asociada a un factor geométrico $FGN = \frac{4(40)}{16} = 10$.

$$\text{Luego } E = FG \frac{A_c^2 D}{2} = 10 \frac{A_c^2 D}{2} = \frac{16-1}{3} A_c^2 D$$

$$FGN = \frac{4}{16} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = 10$$

Distancia mínima cuadrado normalizada. MPSK.



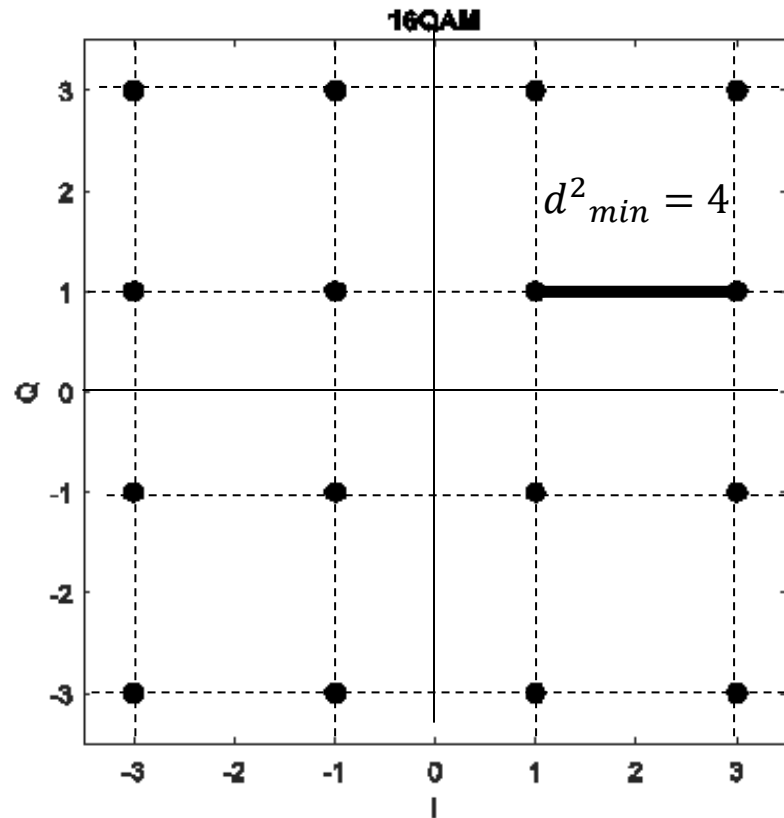
$$d_{min}^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

$$d_{min}^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{16} \right) = 0.1522$$

$$FGN = 16/16 = 1$$

$$d_{N,min}^2 = \frac{d_{min}^2}{E} = 0.1522$$

Distancia mínima cuadrado normalizada. MQAM.



$$d^2_{min} = 4$$

$$d^2_{N,min} = \frac{d^2_{min}}{E} = 0.4$$

$$FGN = \frac{1}{16} 4(1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = \frac{1}{16} \times 4 \times 40 = 10$$

Comparación entre constelaciones IQ.

El parámetro de distancia cuadrado normalizada nos permite hacer un análisis comparativo entre las modulaciones, pudiendo determinar la ganancia relativa de una respecto a la otra, realizando el cálculo de la cantidad:

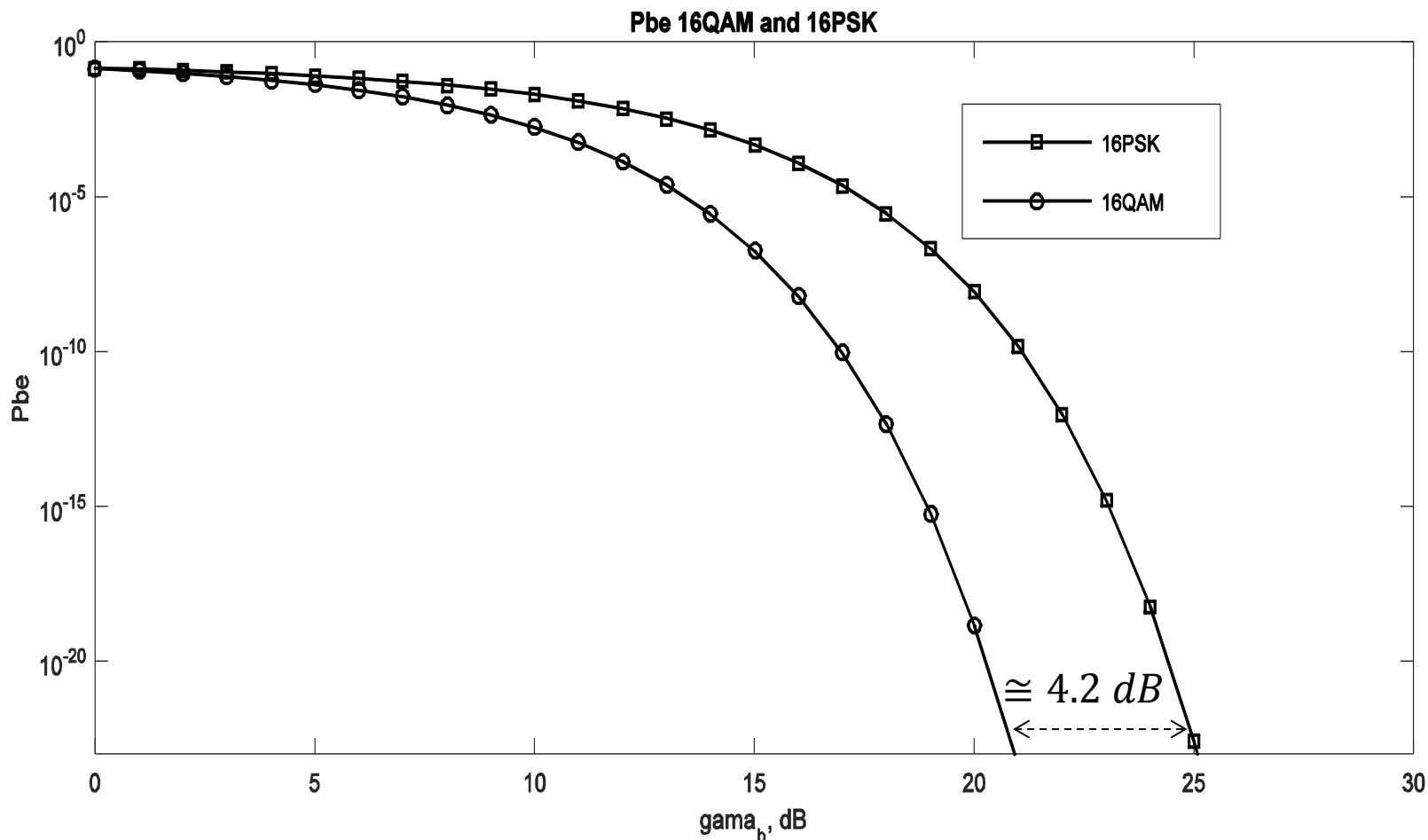
$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{d^2_{N,min 1}}{d^2_{N,min 2}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{d^2_{min 1}/E_1}{d^2_{min 2}/E_2} \right) = \\ 10 \log_{10} \left(\frac{d^2_{min 1}/FGN_1}{d^2_{min 2}/FGN_2} \right)$$

$$\text{Pues } E = FGN \frac{A_c^2}{2} D$$

Para el ejemplo analizado:

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{d^2_{N,min 1}}{d^2_{N,min 2}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{0.4}{0.1522} \right) = 4.2 \text{ dB}$$

Comparación entre constelaciones 16PSK-16QAM.



Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Probabilidad de error basada en la constelación IQ.

Se analizan sistemas de modulación M-arios que se reciben por detección en forma coherente o por comparación de fase.

Los sistemas de modulación M-aria QAM, PSK y los denominados APK (Amplitud Phase Keying) son los mas apropiados para la modulación sobre canales telefónicos, o en general de banda limitada, para expandir la velocidad de señalización.

También son utilizadas en sistemas de comunicaciones de señal por cable, debido a la incorporación de la transmisión de dattos por este medio para ofrecer servicio de Internet.

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Relación entre la representación IQ y la probabilidad de error en sistemas de modulación digital.

Modulación binaria de fase 2PSK o PRK

La modulación binaria PRK puede representarse en el plano IQ y aparece como con dos señales que se diferencian en 180° de fase:

La señal correspondiente a la modulación PRK presenta dos símbolos, $s_0(t) = -s_1(t)$:

$$s_1(t) = A_c p_{T_b}(t) \cos(\omega_c t + \theta)$$

$$s_0(t) = -A_c p_{T_b}(t) \cos(\omega_c t + \theta)$$

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

como se considera normalmente que $f_c = Nr_b$ entonces:

$$s_1(t) = A_c \cos(\omega_c t) = -s_0(t)$$

Luego:

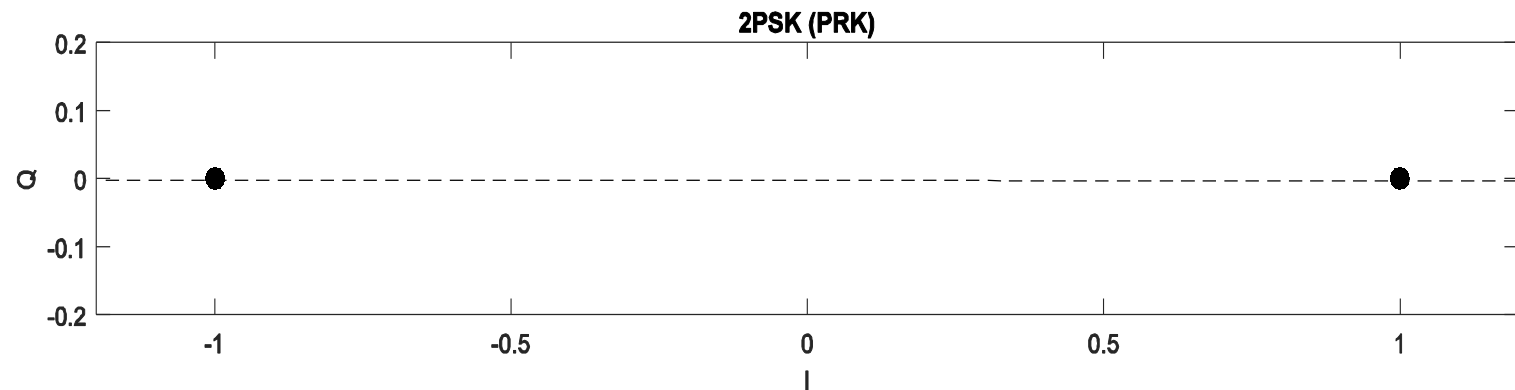
$$E_1 = \int_0^{T_b} [s_1(t)]^2 dt = E_1 = \int_0^{T_b} [A_c \cos(\omega_c t)]^2 dt = \frac{A_c^2 T_b}{2}$$
$$E_0 = \int_0^{T_b} [s_0(t)]^2 dt = E_1 = \int_0^{T_b} [-A_c \cos(\omega_c t)]^2 dt = \frac{A_c^2 T_b}{2}$$

$$E_b = \frac{E_1 + E_0}{2} = \frac{A_c^2 T_b}{2}$$

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Vista como una constelación de modulación MPSK, con $M = 2$,

$$\varphi_k = \frac{2\pi a_k}{M} = \pi a_k$$
$$a_k = 0, 1$$



Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK ($M = 4$)

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK ($M = 4$)

En el siguiente análisis se supone que la señal de portadora tiene sincronización con la modulación de forma que $f_c = Nr_b$. En un intervalo de señalización la forma de onda es igual a:

$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c \cos(\varphi_k) p_D(t) \cos(\omega_c t)$$

$$s_q(t - kD) = A_c \sin(\varphi_k) p_D(t) \sin(\omega_c t)$$

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK ($M = 4$)

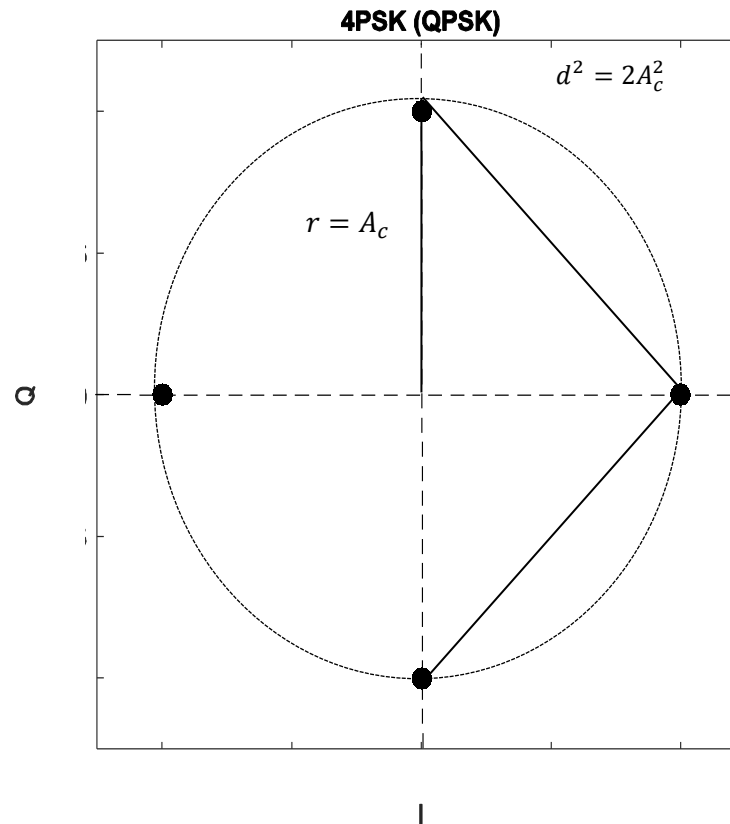
Donde

$$\varphi_k = \frac{2\pi a_k}{4}$$
$$a_k = 0, 1, 2, 3$$

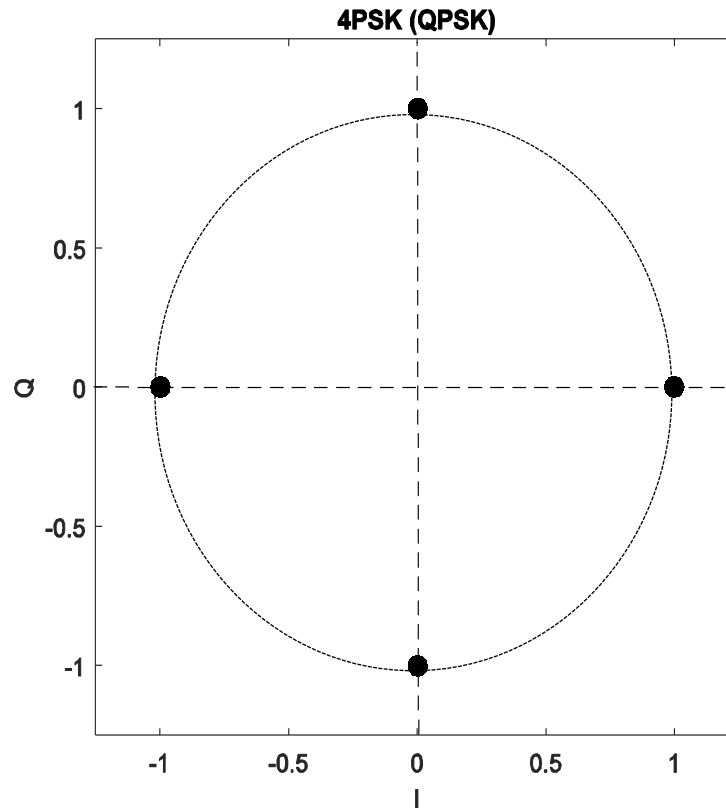
$$\begin{aligned} E &= \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} (s_q(t))^2 dt = \\ &= \frac{A_c^2}{2} D (\cos(\varphi_k)^2 + \sin(\varphi_k)^2) = \frac{A_c^2 D}{2} \end{aligned}$$

La constelación correspondiente a 4PSK se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado:

Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK ($M = 4$)



Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK ($M = 4$)



Modulación M-aria de fase 4PSK o QPSK ($M = 4$)

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{4} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$$

En este caso nuevamente:

$$E = FGN \frac{A_c^2 D}{2} = \frac{A_c^2 D}{2}$$

Luego:

$$A_c^2 = \frac{2E}{D} = 2Er$$

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

Ahora la distancia es $d = \sqrt{2}A_c$, luego $d^2 = 2A_c^2$

$$\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_c$$
$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{2\eta r}$$

Cada símbolo s_i se asocia a una probabilidad $P_{ei} = 2Q \left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}} \right)$, dado que cada símbolo puede confundirse con dos vecinos a los lados que se encuentran a una distancia:

$$d = \sqrt{2}A_c$$

Sistemas M-arios y con portadora en cuadratura.

$$P_e = \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e2} + P_{e2} + P_{e3}) =$$

$$\frac{1}{4} 4x2Q \left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{2Er}{2\eta r}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{E}{\eta}} \right) =$$

$$2Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} \right) = 2Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

$$E = 2E_b$$

Modulación M-aria 4QAM o QAM (M = 4)

Modulación M-aria 4QAM o QAM (M = 4)

La sincronización de portadora en cuadratura coherente requiere sincronización en la demodulación. En el k –ésimo intervalo $kD < t < (k + 1)D$:

$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c I_k p_D(t) \cos(\omega_c t) \quad I_k = \pm 1$$

$$s_q(t - kD) = A_c Q_k p_D(t) \sin(\omega_c t) \quad Q_k = \pm 1$$

Modulación M-aria 4QAM o QAM (M = 4)

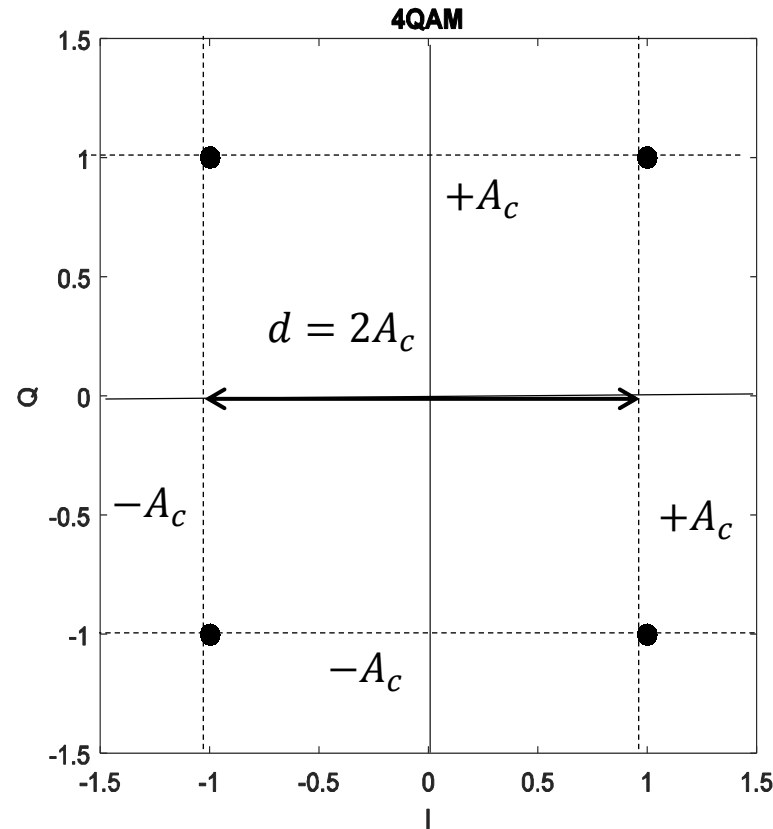
Si se considera que $f_c = Nr_b = 2Nr$

$$E = \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} (s_q(t))^2 dt = \frac{A_c^2}{2} D (I_k^2 + Q_k^2) = A_c^2 D$$

La energía por símbolo es el doble de la energía por bit $E = 2E_b$.

La constelación correspondiente a 4QAM se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado:

Modulación M-aria 4QAM o QAM ($M = 4$)



Modulación M-aria 4QAM o QAM (M = 4)

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{4} \left((1^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2) \right) = 2$$

En este caso:

$$E = 2 \frac{A_c^2 D}{2} = A_c^2 D$$

Luego:

$$A_c^2 = \frac{E}{D} = Er$$

Modulación M-aria 4QAM o QAM (M = 4)

Ahora la distancia es $d = 2A_c$, luego $d^2 = 4A_c^2$ y $d/2 = A_c$

$$\frac{d}{2} = A_c$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta r}$$

Cada símbolo s_i se asocia a una probabilidad $P_{ei} = 2Q \left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}} \right)$, dado que cada símbolo puede confundirse con dos vecinos a los lados que se encuentran a una distancia: $d = 2A_c$

Modulación M-aria 4QAM o QAM (M = 4)

$$P_e = \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e2} + P_{e2} + P_{e3}) = \frac{1}{4} 4 \times 2 \times Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) =$$

$$2Q \left(\sqrt{\frac{E}{\eta}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} \right) = 2Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

$$E = 2E_b$$

La tasa de error es igual a 4PSK.

Modulación M-aria de fase MPSK

Modulación M-aria de fase MPSK

En el siguiente análisis se supone que la señal de portadora tiene sincronización con la modulación de forma que $f_c = Nr_b$. En un intervalo de señalización la forma de onda es igual a:

$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$\begin{aligned} s_i(t - kD) &= A_c \cos(\varphi_k) p_D(t) \cos(\omega_c t) \\ s_q(t - kD) &= A_c \sin(\varphi_k) p_D(t) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

Modulación M-aria de fase MPSK

Donde

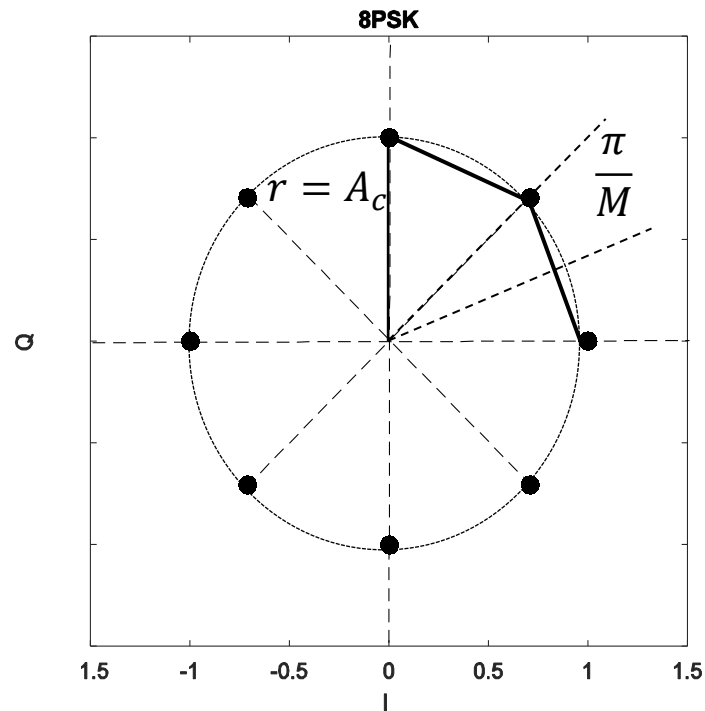
$$\varphi_k = \frac{2\pi a_k}{M}$$

$$a_k = 0, 1, 2, 3, \dots, M - 1$$

$$\begin{aligned} E &= \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} (s_q(t))^2 dt = \\ &= \frac{A_c^2}{2} D (\cos(\varphi_k)^2 + \sin(\varphi_k)^2) = \frac{A_c^2 D}{2} \end{aligned}$$

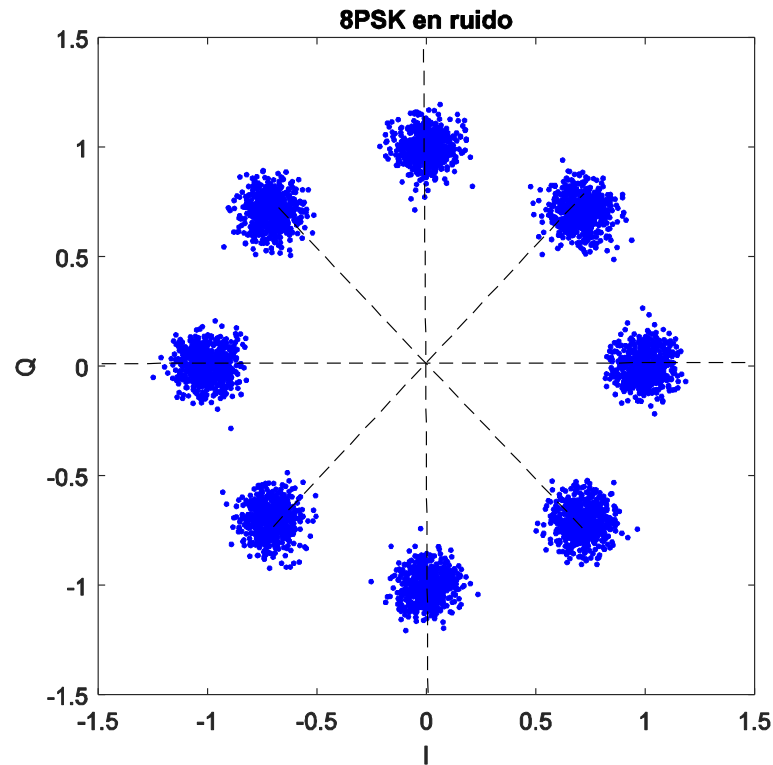
La constelación correspondiente a 8PSK se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado:

Modulación M-aria de fase MPSK

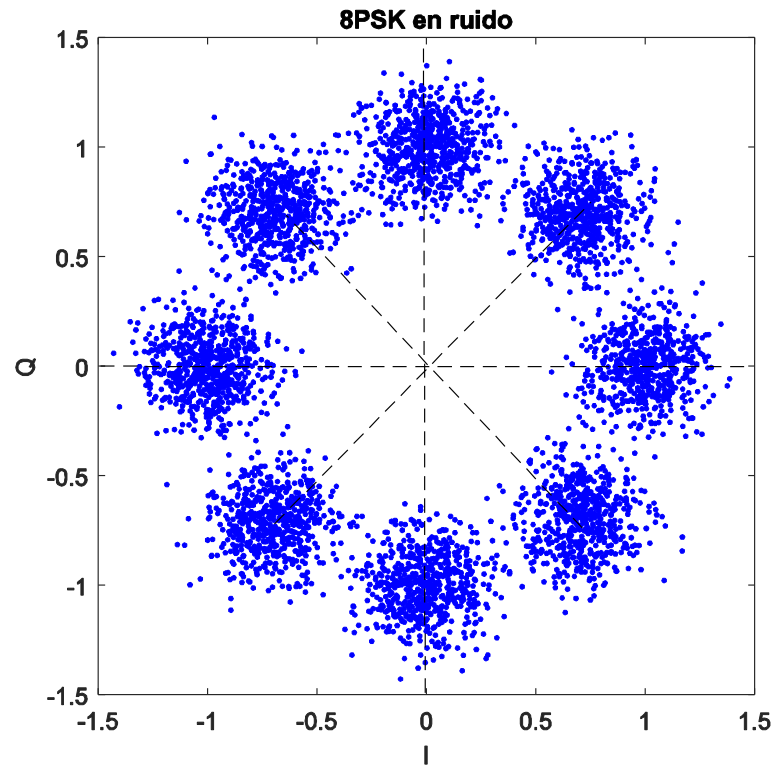


$$d = 2A_c \sin\left(\frac{\pi}{\overline{M}}\right)$$
$$= 2A_c \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

8PSK en ruido. Probabilidad de error.



8PSK en ruido. Probabilidad de error.



Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$FGN = \frac{1}{8} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$$



En este caso nuevamente:

$$E = FGN \frac{A_c^2 D}{2} = \frac{A_c^2 D}{2}$$

Luego:

$$A_c^2 = \frac{2E}{D} = 2Er$$

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

Ahora la distancia es $d = 2A_c \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$

luego $d^2 = \left(2A_c \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)^2 = 4A_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$

Y

$$\frac{d}{2} = A_c \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{\left(A_c \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\eta r}$$

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

Cada símbolo s_i se asocia a una probabilidad $P_{ei} = 2 Q \left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}} \right)$,
dado que cada símbolo puede confundirse con dos vecinos a los lados
que se encuentran a una distancia: $d = 2A_c \sin \left(\frac{\pi}{M} \right)$

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e2} + P_{e2} + P_{e3} + P_{e4} + P_{e6} + P_{e6} + P_{e7}) \\ &= \frac{1}{8} 8 \times 2Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}{\eta r}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{2Er \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}{\eta r}} \right) \\ &= 2Q \left(\sqrt{\frac{2E \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}{\eta}} \right) \end{aligned}$$

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}

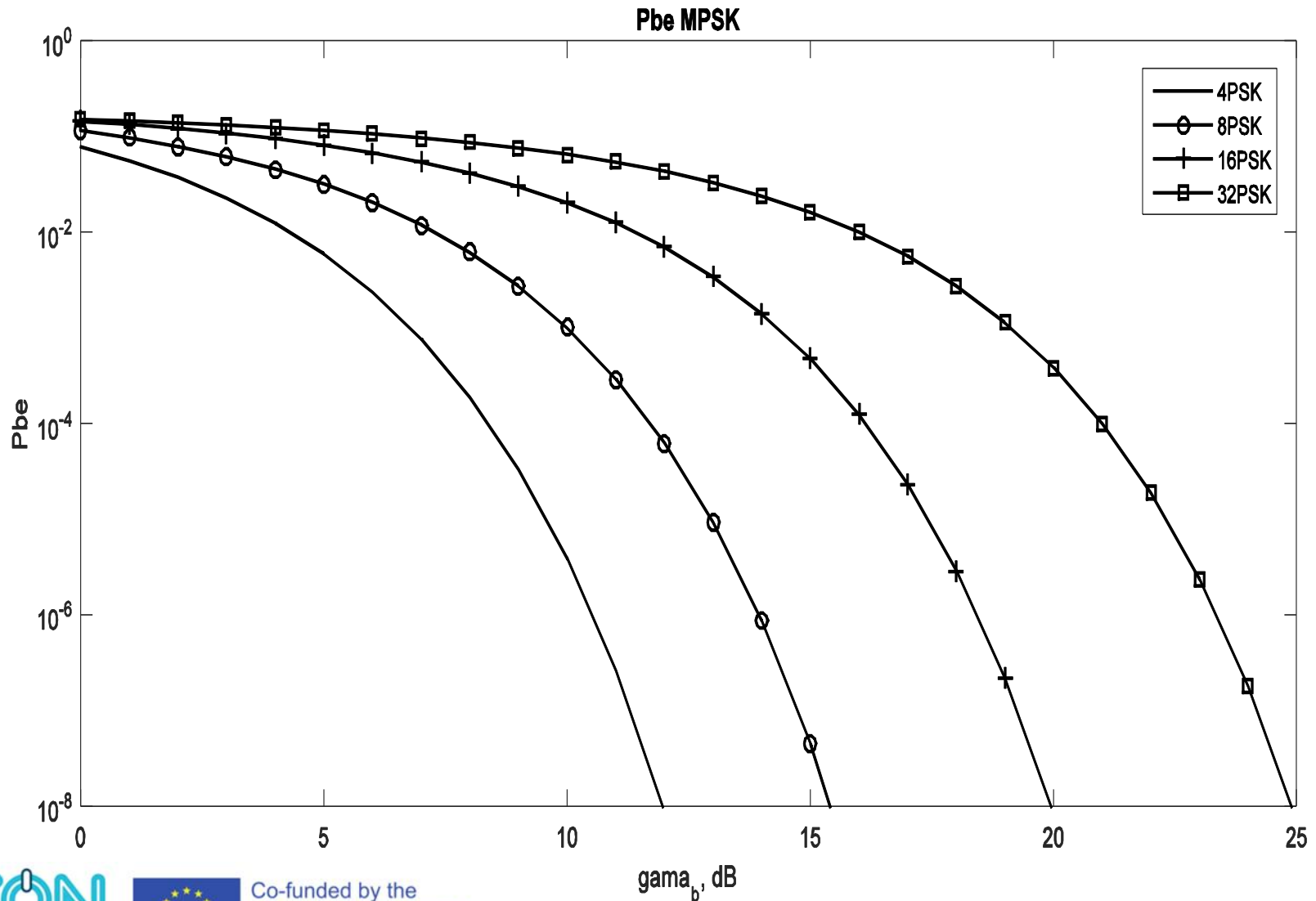
$$= 2Q \left(\sqrt{\frac{2E \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}{\eta}} \right)$$

$$E = (\log_2 M) E_b = K E_b , \quad K = \log_2 M$$

$$P_e = 2Q \left(\sqrt{\frac{2K \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) E_b}{\eta}} \right) = 2Q \left(\sqrt{2K \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \gamma_b} \right)$$

$$P_{be} = \frac{2}{K} Q \left(\sqrt{\frac{2K \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) E_b}{\eta}} \right) = \frac{2}{K} Q \left(\sqrt{2K \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \gamma_b} \right)$$

Modulación M-aria de fase MPSK. P_{be}



Modulación en Amplitud y Fase, APK o MQAM.

Modulación M-aria de amplitud y fase MQAM

En el siguiente análisis se supone que la señal de portadora tiene sincronización con la modulación de forma que $f_c = Nr_b$.

En el k - *ésimo* intervalo $kD < t < (k + 1)D$:

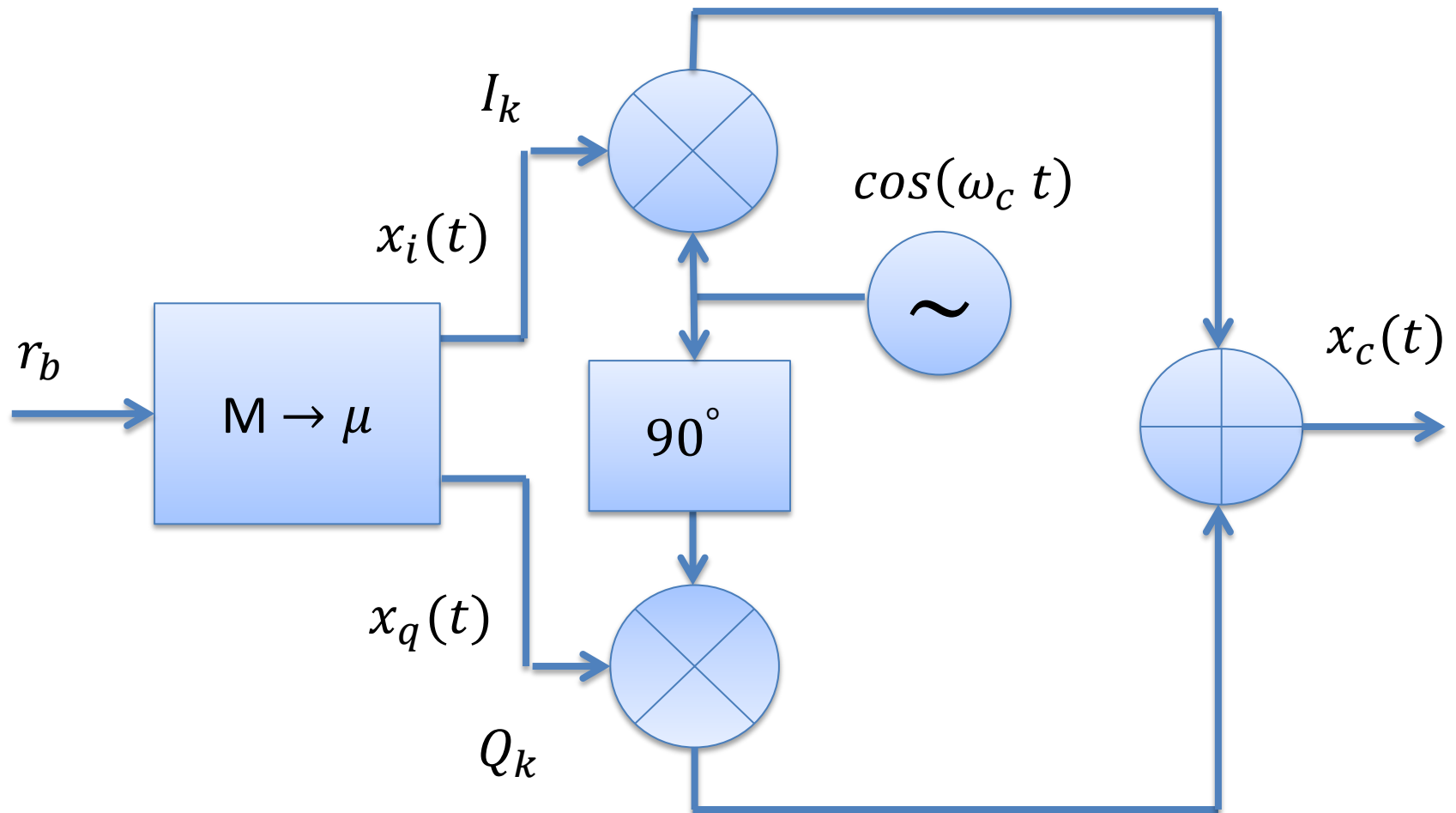
$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c I_k p_D(t) \cos(\omega_c t) I_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm \pm \mu - 1$$

$$s_q(t - kD) = A_c Q_k p_D(t) \sin(\omega_c t) Q_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm \pm \mu - 1$$

$$\mu = \sqrt{M}$$

Modulación MQAM. Diagrama en bloques.



Modulación en Amplitud y Fase, APK o MQAM.

Se pueden obtener los promedios estadísticos:

$$\begin{aligned}\bar{I}_k &= \bar{Q}_k = 0 \\ \overline{I_k^2} &= \overline{Q_k^2} = \frac{\mu^2 - 1}{3}\end{aligned}$$

Se muestra un ejemplo donde $M = 16, \mu = 4$:

$$x_c(t) = s_i(t - kD) - s_q(t - kD)$$

$$s_i(t - kD) = A_c I_k p_D(t) \cos(\omega_c t) \quad I_k = \pm 1, \pm 3$$

$$s_q(t - kD) = A_c Q_k p_D(t) \sin(\omega_c t) \quad Q_k = \pm 1, \pm 3$$

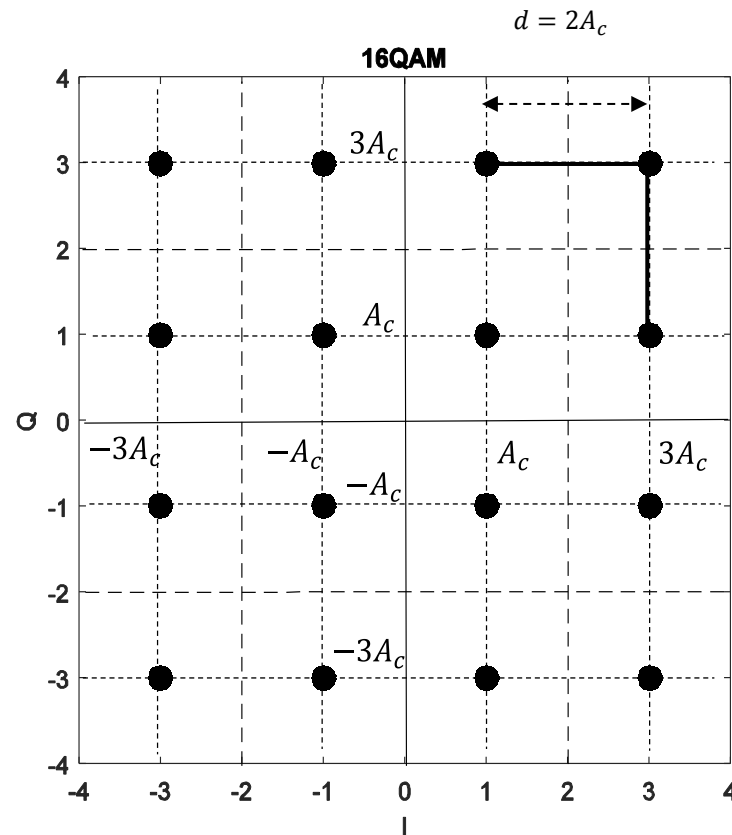
Modulación en Amplitud y Fase, APK o MQAM.

$$\begin{aligned} E &= \int_{kD}^{(k+1)D} (x_c(t))^2 dt = \int_{kD}^{(k+1)D} (s_i(t))^2 dt + \int_{kD}^{(k+1)D} (s_q(t))^2 dt = \\ &= \frac{A_c^2}{2} D (I_k^2 + Q_k^2) = \frac{\mu^2 - 1}{3} A_c^2 D \end{aligned}$$

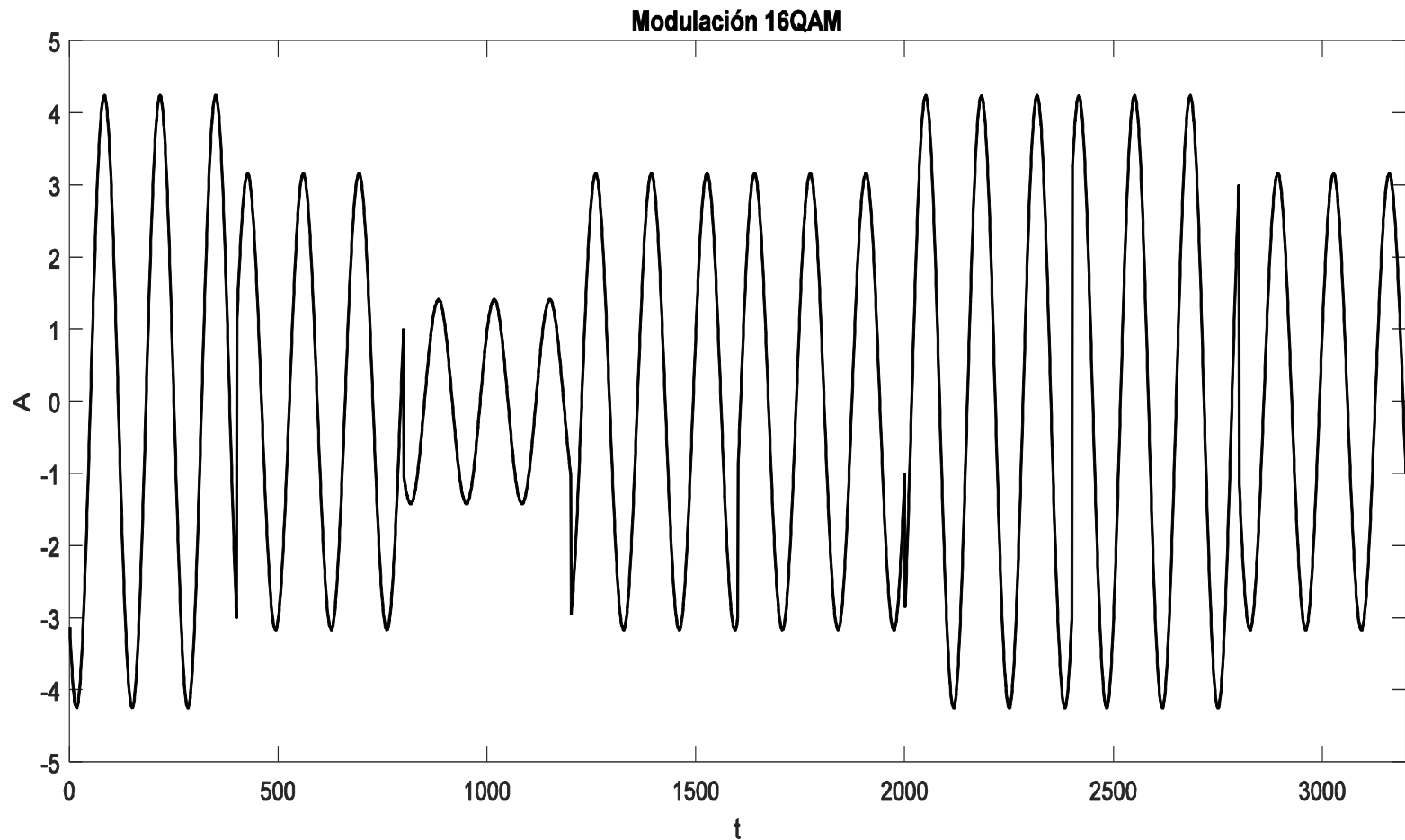
La constelación correspondiente a 16QAM se muestra en las siguientes figuras, en modo dimensional y normalizado. Los valores sobre los ejes I y Q adoptan la forma M-aria polar:

$$a_k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(M - 1)$$

Modulación MQAM. 16QAM

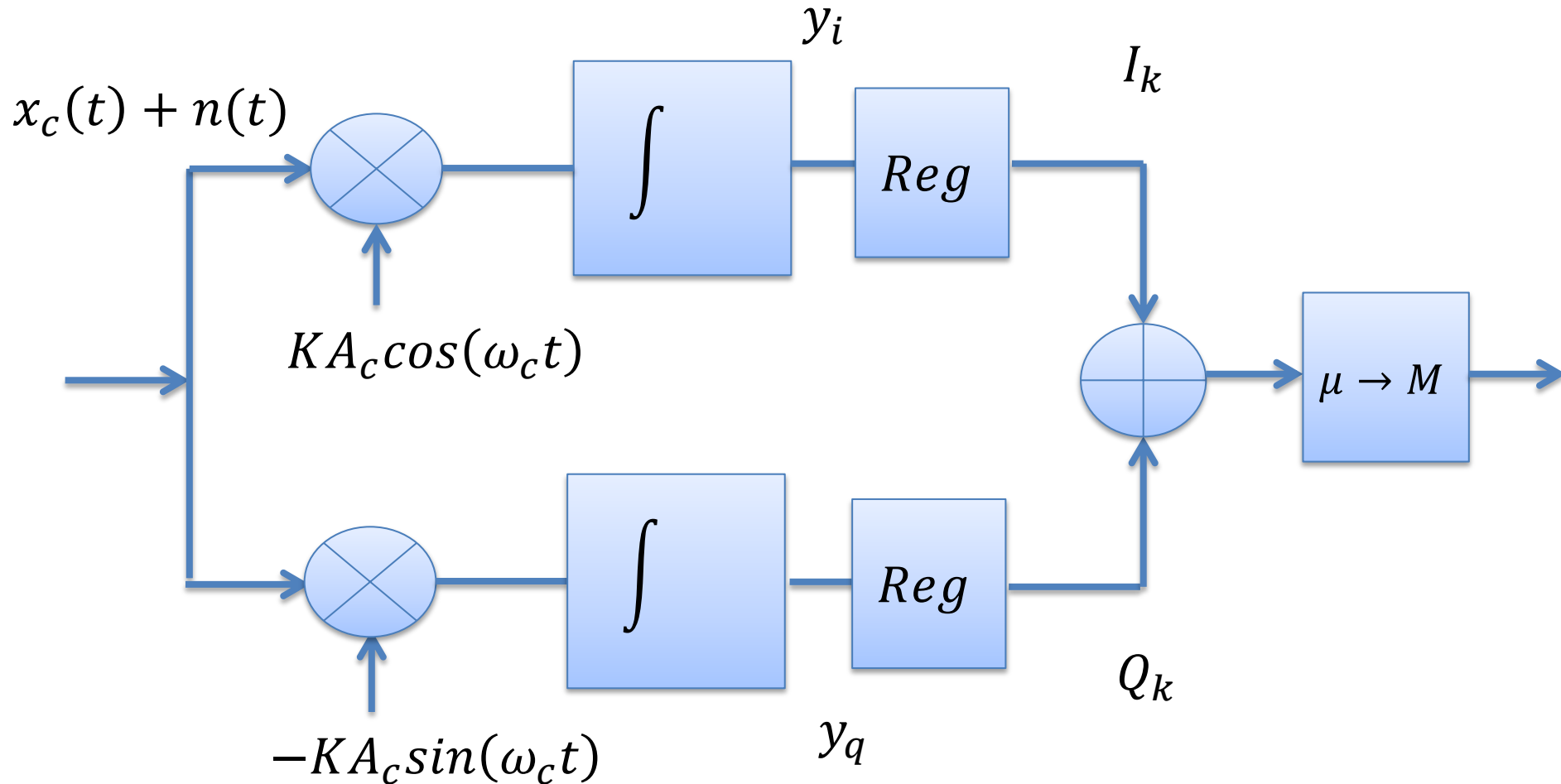


16QAM. Formas de onda en el tiempo.

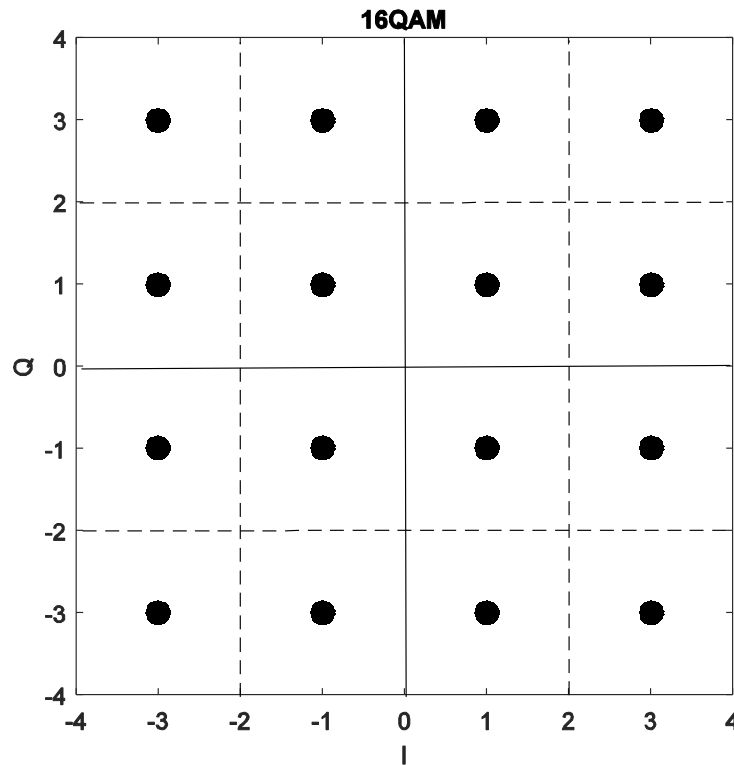


Receptor en fase y cuadratura. MQAM

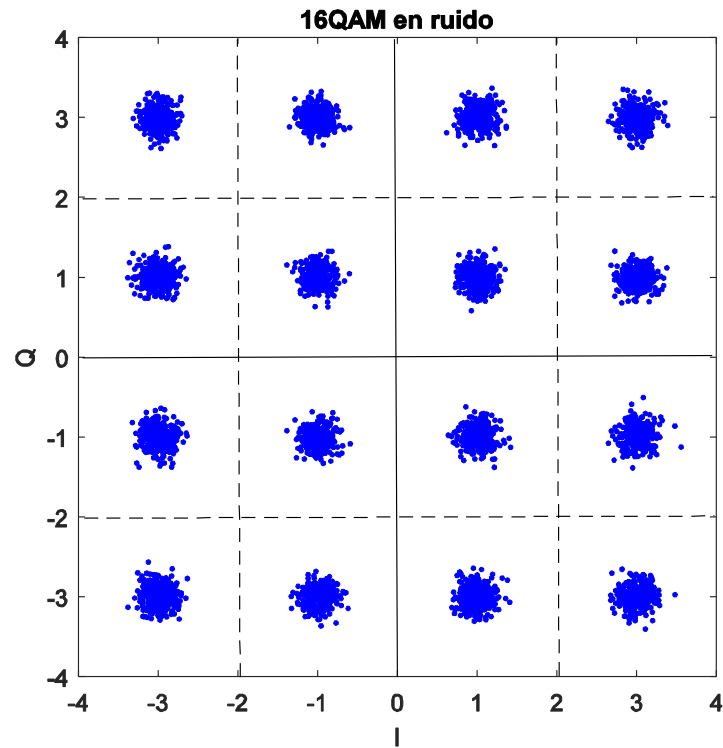
El diagrama en bloques del detector MQAM por correlación seria entonces:



MQAM. Probabilidad de error.



MQAM. Probabilidad de error.



Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Sobre la constelación normalizada se puede definir un factor geométrico normalizado:

$$\begin{aligned} FGN &= \frac{1}{16} 4((1^2 + 1^2) + (1^2 + 3^2) + (3^2 + 1^2) + (3^2 + 3^2)) \\ &= \frac{1}{16} 4 \times 40 = 10 \end{aligned}$$

En este caso:

$$E = FGN \frac{A_c^2 D}{2} = 10 \frac{A_c^2 D}{2}$$

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

$$A_c^2 = \frac{2E}{10D} = \frac{Er}{5}$$

Ahora la distancia es $d = 2A_c$, luego $d^2 = 4A_c^2$

Y

$$\frac{d}{2} = A_c$$

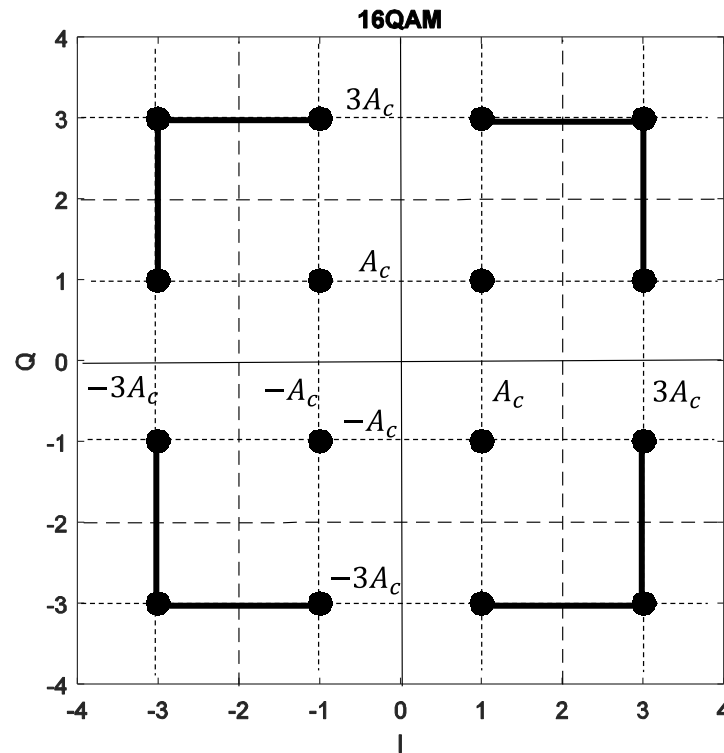
$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{(A_c)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta r}$$

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Cada símbolo s_i se asocia a un probabilidad $P_{ei} = Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}}\right)$, pero la vecindad no es simétrica, y algunos símbolos tienen probabilidades de error distintas en función de la cercanía de los símbolos vecinos, y de cuántos son esos símbolos vecinos.

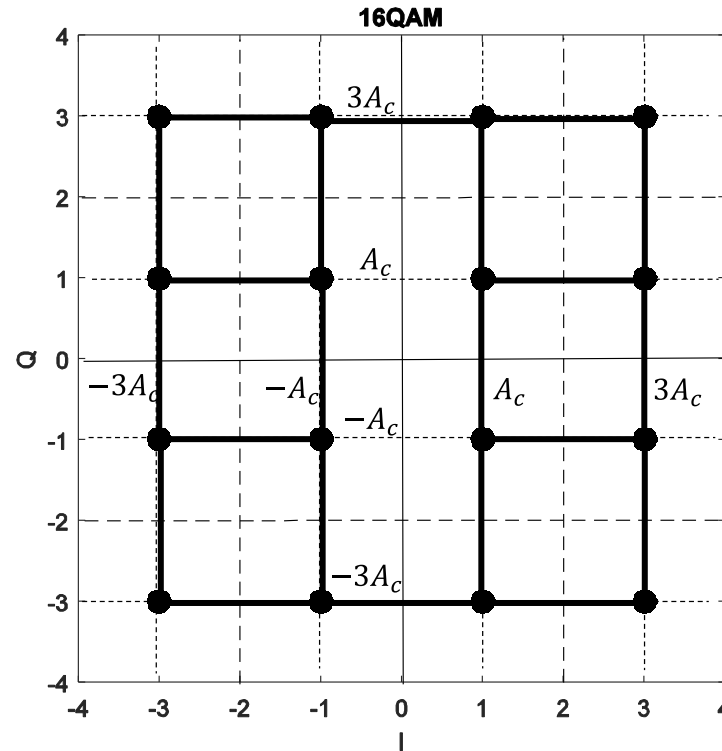
La distancia para definir la vecindad es siempre la misma, e igual a $d = 2A_c$.

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.



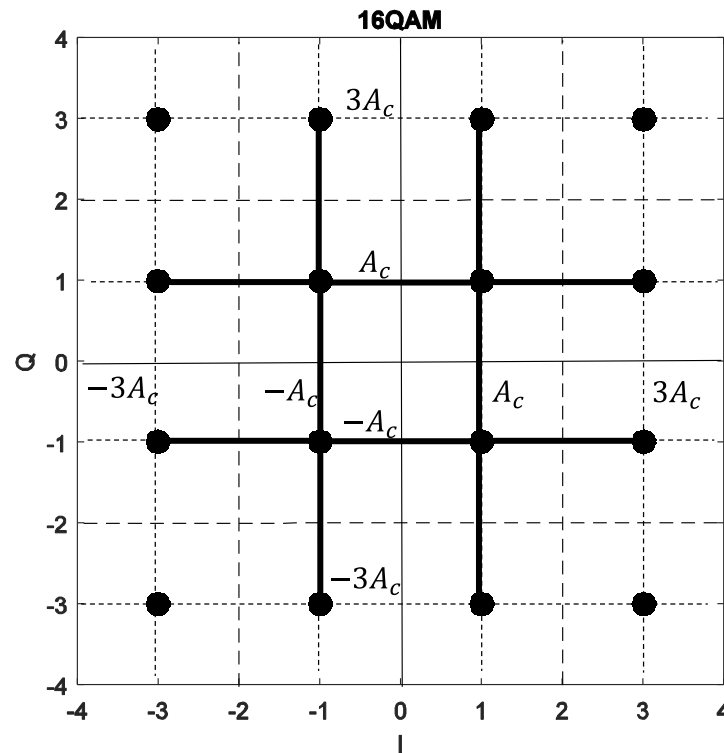
Los 4 símbolos que se encuentran en los extremos diagonales están asociados a la probabilidad de tener 2 vecinos a distancia d .

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.



Los 8 símbolos en los extremos laterales excluidos los de los extremos diagonales están en un evento de error con otros 3 vecinos en cada caso


Sistemas M-arios. Probabilidad de error.



Los 4 símbolos interiores están en un evento de error con otros 4 vecinos en cada caso

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

La probabilidad de error por símbolo P_e del sistema es entonces:

$$P_e = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei} \right)$$


$$= \frac{1}{16} \left[4 \left(2Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) + 8 \left(3Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) + 4 \left(4Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) \right]$$

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

La probabilidad de error por símbolo P_e del sistema es entonces:

$$P_e = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei} \right)$$

$$= \frac{1}{M} \left[\frac{M}{4} \left(2Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) + \frac{M}{2} \left(3Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) + \frac{M}{4} \left(4Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) \right]$$

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

$$P_e = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei} \right)$$

$$= \frac{1}{M} \left[\frac{M}{2} \left(Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) + \frac{3M}{2} \left(Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) + M \left(Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right) \right]$$

$$P_e = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=0}^{M-1} P_{ei} \right) = \frac{1}{M} \left(\frac{M}{2} + \frac{3M}{2} + M \right) \left[Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right) \right] = 3Q \left(\sqrt{\frac{A_c^2}{\eta r}} \right)$$

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Como

$$A_c^2 = \frac{Er}{5} \quad \gamma \quad \frac{d}{2} = A_c:$$

$$\frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta r} = \frac{Er}{5\eta r} = \frac{E}{5\eta}$$

$$P_e = 3Q\left(\sqrt{\frac{E}{5\eta}}\right)$$

Para 16QAM cuadrado.

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Expresión que coincide con la siguiente si $M = 16$:

$$P_e = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3E}{(M-1)\eta}} \right) = 4 \left(1 - \frac{1}{4}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3E}{(15)\eta}} \right) = 3Q \left(\sqrt{\frac{E}{5\eta}} \right)$$

Si:

$$E = (\log_2 M)E_b = KE_b, \quad K = \log_2 M$$

$$P_e = 3Q \left(\sqrt{\frac{KE_b}{5\eta}} \right) = 3Q \left(\sqrt{\frac{K}{5} \gamma_b} \right) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3K}{(M-1)} \gamma_b} \right)$$

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

Calculo sobre la constelación

Partiendo de la expresión:

$$E = FGN \frac{A_c^2 D}{2}$$

$$r = \frac{1}{D} = \frac{FGN A_c^2}{2E}$$

La potencia de ruido es:

$$\sigma^2 = \eta r = \eta \frac{FGN A_c^2}{2E}$$

Luego por ejemplo:

Para constelaciones MQAM la distancia es $d = 2A_c$,

Sistemas M-arios. Probabilidad de error.

$$\frac{d}{2} = A_c,$$

$$P_e = Q\left(\frac{A_c}{\sigma}\right)$$

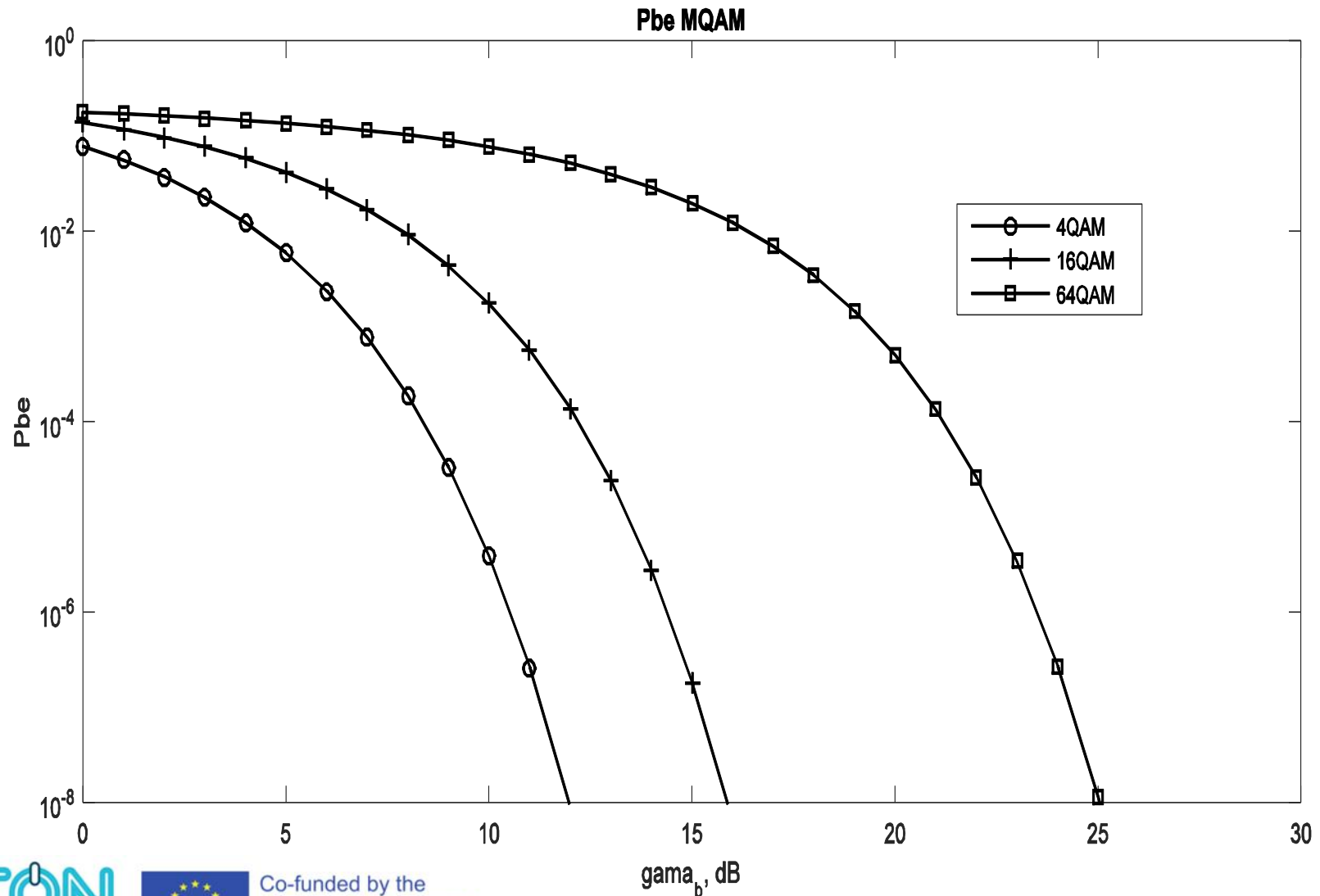
$$\left(\frac{A_c}{\sigma}\right)^2 = \frac{(d/2)^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta r} = \frac{A_c^2}{\eta \frac{FGN A_c^2}{2E}} = \frac{2}{FGN} \frac{E}{\eta}$$

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(d/2)^2}{\eta r}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{FGN} \frac{E}{\eta}}\right)$$

la probabilidad binaria de error es:

$$P_{be} = \frac{4}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3K}{(M-1)}} \gamma_b\right)$$

MQAM. Probabilidad binaria de error.



MQAM-MPSK. Probabilidad binaria de error.

