

Sistemas de Comunicaciones basados en Radio Definida por Software (SDR)

Dr. Ing. Jorge Castiñeira Moreira

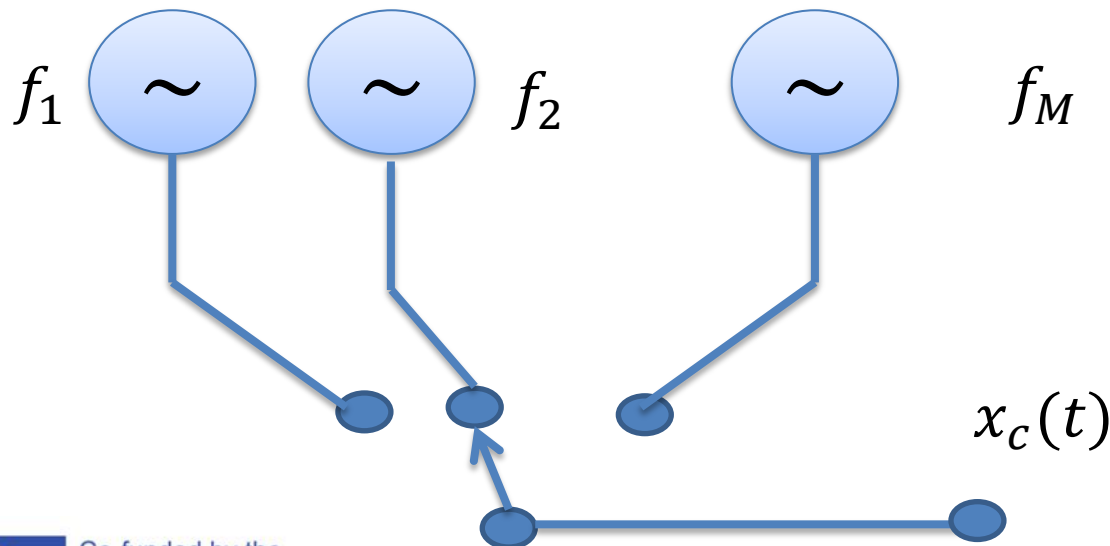
Dr. Ing. Alejandro José Uriz

Sistemas de Comunicaciones Digitales – 4

FSK. (Frequency Shift Keying)

La modulación de frecuencia se realiza básicamente de dos formas.

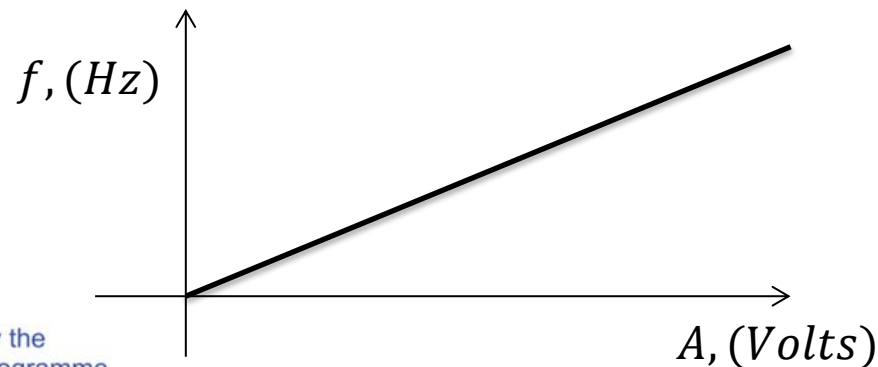
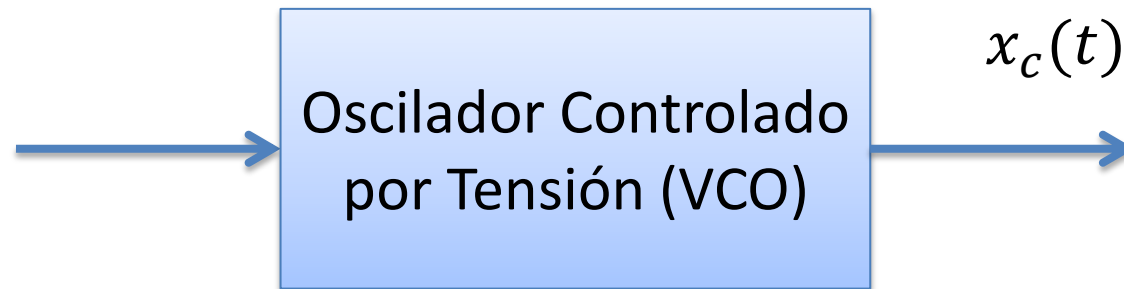
Esta modulación de tipo binario consiste en la transmisión de dos frecuencias distintas que se corresponden con cada uno de los bits a transmitir. Un primer procedimiento de generación de FSK es la selección de una determinada frecuencia de un conjunto de osciladores a través de una llave o switch.



CPFSK. (Continuous Phase Frequency Shift Keying)

El segundo procedimiento se basa en la aplicación de una señal de formato digital sobre un modulador de frecuencia, es decir, un oscilador controlado por tensión (VCO).

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$



FSK. (Frequency Shift Keying)

El primer esquema, referido simplemente como FSK, puede presentar discontinuidades de fase cuando se produce el cambio de un símbolo al otro, si el periodo de la señal modulante no es un numero entero de semi-ciclos de la portadora.

Si la señal modulante es una señal M-aria se generara una señal M-aria FSK. Se tiene un conjunto de osciladores de igual amplitud A_c y fase θ . Las frecuencias están relacionadas de la forma:

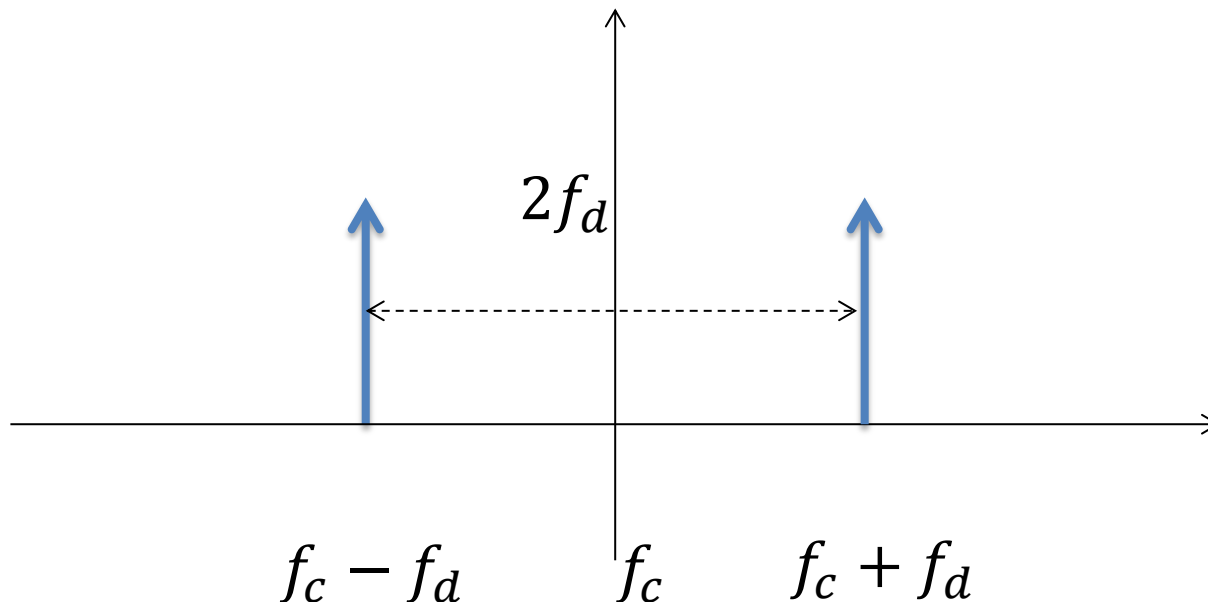
$$f_k = f_c \pm a_k f_d$$

$$a_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm M - 1$$

FSK. (Frequency Shift Keying)

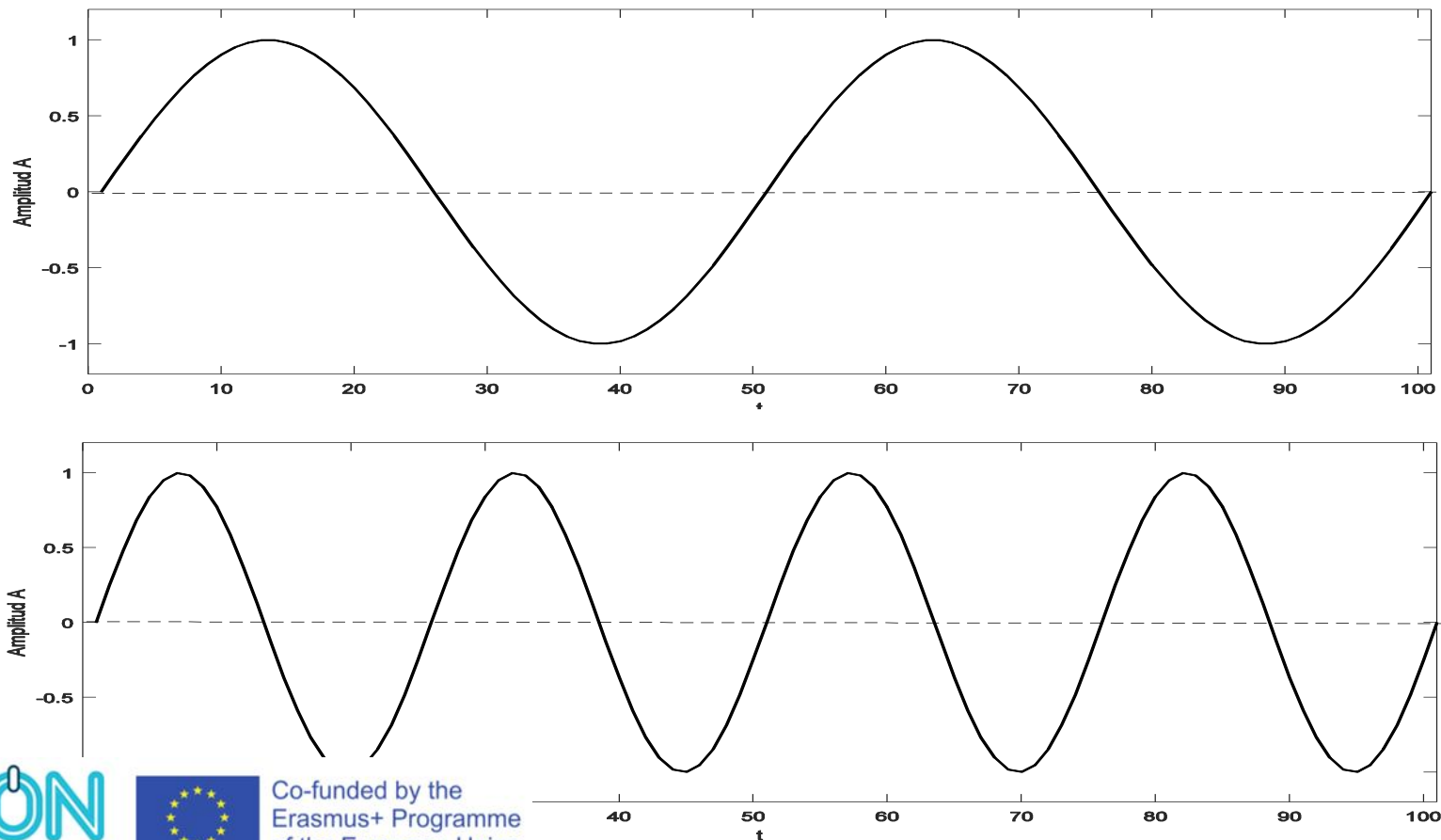
$$x_c(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + 2\pi f_d a_k t) p_D(t - kD)$$

La variable f_d es el desvío de frecuencia hacia cada lado respecto de la frecuencia central.



FSK. Continuidad de fase.

El caso de modulación FSK de tipo binario es el denominado FSK de Sunde. La continuidad de fase en un esquema FSK puede lograrse si, para dos señales de frecuencias f_1 y f_2 :



FSK. Continuidad de fase.

$$s_1(t) = \text{sen}(2\pi f_1 t)$$

$$s_2(t) = \text{sen}(2\pi f_2 t)$$

Se cumple que la resta de ambas pasa por cero en el instante de interrupción del dato:

$$s_1(t) - s_2(t) = \text{sen}(2\pi f_1 t) - \text{sen}(2\pi f_2 t)$$

Haciendo uso de $\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\begin{aligned} & \text{sen}(2\pi f_1 t) - \text{sen}(2\pi f_2 t) \\ &= 2\cos\left(\frac{2\pi(f_1 + f_2)t}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2)t}{2}\right) \end{aligned}$$

FSK. Continuidad de fase.

En el instante $t = T_b$

$$s_1(T_b) - s_2(T_b) = 2\cos\left(\frac{2\pi(f_1 + f_2)T_b}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2)T_b}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2\pi(f_1 - f_2)T_b}{2} = \frac{2\pi(2f_d)T_b}{2} = N\pi = \pi$$

$$f_d = \frac{1}{2T_b} = \frac{r_b}{2}$$

Es el mínimo desvío entre frecuencias que permite continuidad de fase.

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

Para obtener el espectro de esta señal será necesario conocer las formas de onda de las componentes $x_i(t)$ y $x_q(t)$. De la expresión de la señal modulada FSK:

$$x_c(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \omega_d a_k t + \theta) p_D(t - kD)$$
$$x_c(t) = A_c \left[\sum_k \cos(\omega_c t + \theta) \cos(\omega_d a_k t) p_D(t - kD) \right]$$
$$- A_c \left[\sum_k \sin(\omega_c t + \theta) \sin(\omega_d a_k t) p_D(t - kD) \right]$$

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

$$x_c(t) = A_c \left[\sum_k \cos(\omega_d a_k t) p_D(t - kD) \right] \cos(\omega_c t + \theta) \\ - A_c \left[\sum_k \sin(\omega_d a_k t) p_D(t - kD) \right] \sin(\omega_c t + \theta)$$

La forma de onda de modulación FSK esta entonces presentada como una forma de onda en sus componentes en fase y cuadratura.

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

$$x_i(t) = \sum_k \cos(\omega_d a_k t) p_D(t - kD)$$
$$x_q(t) = \sum_k \text{sen}(\omega_d a_k t) p_D(t - kD)$$

Los valores a_k son de forma binaria polar $a_k \pm 1$.

Pero:

$$\cos(\omega_d a_k t) = \cos(\omega_d t)$$
$$\text{sen}(\omega_d a_k t) = a_k \text{sen}(\omega_d t)$$

Entonces:

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

$$x_i(t) = \sum_k \cos(\omega_d a_k t) p_D(t - kD) = \sum_k \cos(\omega_d t) p_D(t - kD) = \cos(\pi r_b t)$$

$$x_q(t) = \sum_k a_k \sin(\pi r_b t) p_{T_b}(t - kT_b)$$

$$x_q(t) = \sum_k a_k \sin(\pi r_b t) [u(t - kT_b) - u(t - kT_b - T_b)]$$

$$x_q(t) = \sum_k a_k \sin(\pi r_b (t - kT_b) + k\pi) [u(t - kT_b) - u(t - kT_b - T_b)]$$

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

$$x_q(t) = \sum_k a_k \text{sen}(\pi r_b(t - kT_b) + k\pi) [u(t - kT_b) - u(t - kT_b - T_b)]$$

$$x_q(t) = \sum_k a_k (-1)^k \text{sen}(\pi r_b(t - kT_b)) [u(t - kT_b) - u(t - kT_b - T_b)]$$

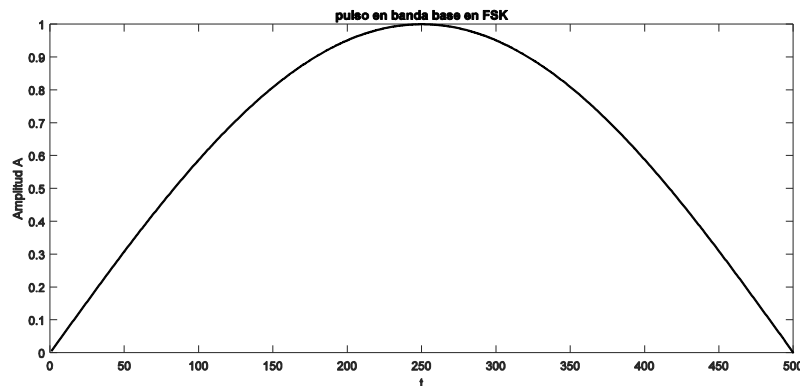
$$x_q(t) = \sum_k Q_k p(t - kT_b)$$
$$p(t) = \text{sen}(\pi r_b t) [u(t) - u(t - T_b)]$$

$$Q_k = a_k (-1)^k$$

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

La portadora en fase no contiene información. De hecho solo producirá dos $\delta(f \pm r_b/2)$ en el espectro final.

La componente en cuadratura se transforma en una señal PAM donde la forma del pulso $p(t)$ ya no es cuadrada.



$$p(t) = \text{sen}(\pi r_b t)[u(t) - u(t - T_b)]$$

Los promedios estadísticos en $x_q(t)$ son:

$$\overline{Q_k} = \overline{a_k}(-1)^k = 0; \quad \overline{Q_k^2} = \overline{a_k^2}(-1)^{2k} = 1$$

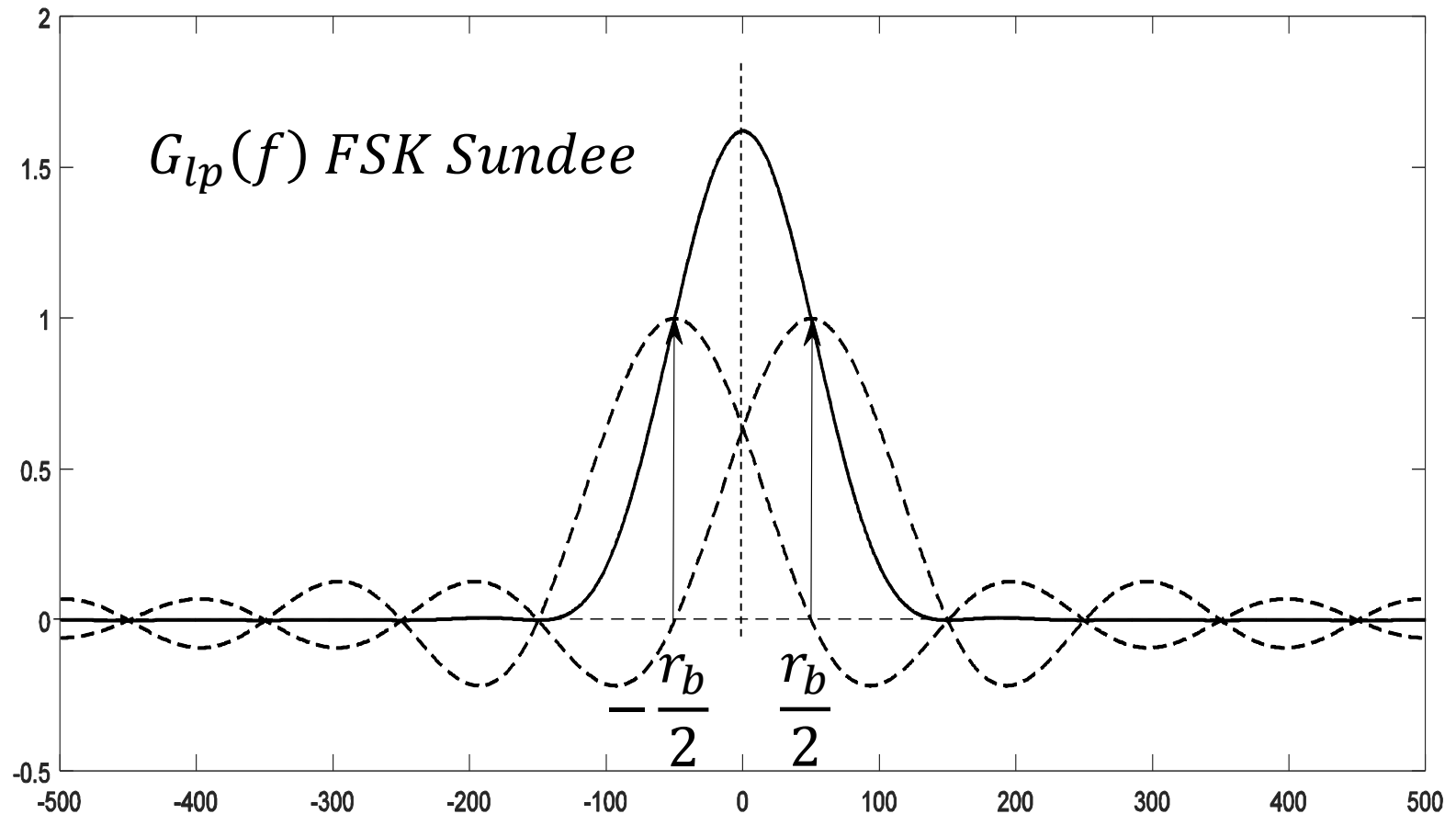
FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

La expresión de la densidad espectral de potencia es función de la estadística de la información y de la forma espectral de pulso, que ha dejado de ser un pulso cuadrado, para convertirse en un pulso que es un semiciclo de una senoide.

El espectro asociado se calcula obteniendo la transformada de Fourier de la expresión de $p(t)$.

$$|P(f)|^2 = \frac{1}{4r_b^2} \left[\text{sinc} \left(\frac{f - r_b/2}{r_b} \right) + \text{sinc} \left(\frac{f + r_b/2}{r_b} \right) \right]^2$$

FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.



FSK. Densidad espectral de potencia $G_{lp}(f)$.

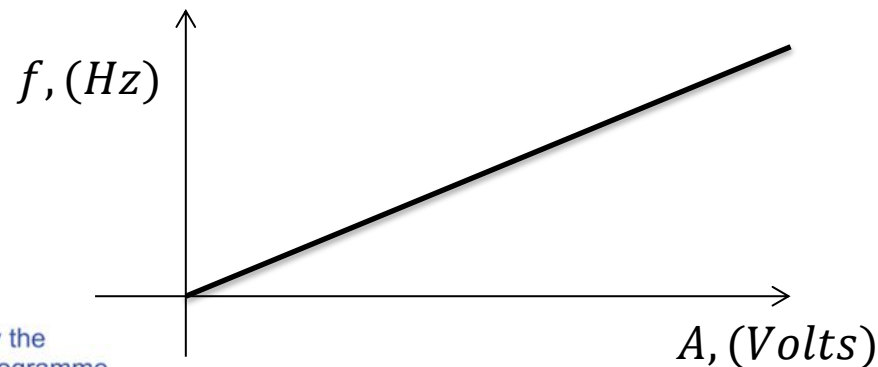
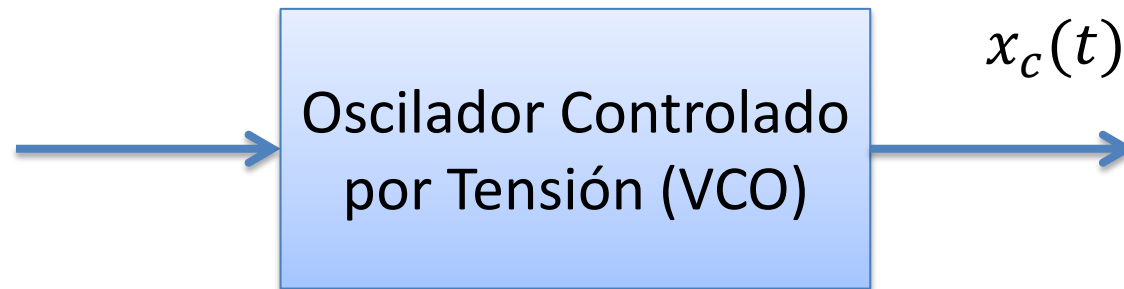
El espectro final esta constituido entonces por dos funciones $\delta(f \pm r_b/2)$ y el espectro calculado $|P(f)|^2$.

$$G_{lp}(f) = \frac{1}{4} \left[\delta \left(f - \frac{r_b}{2} \right) + \delta \left(f + \frac{r_b}{2} \right) \right] + r_b |P(f)|^2$$

CPFSK. (Continuous Phase Frequency Shift Keying)

El segundo procedimiento se basa en la aplicación de una señal de formato digital sobre un modulador de frecuencia, es decir, un oscilador controlado por tensión (VCO).

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$



CPFSK. (Continuous Phase Frequency Shift Keying)

La modulación digital de frecuencia puede también realizarse aplicando una forma de onda modulada digitalmente en amplitud (PAM) a un dispositivo cuya salida es una frecuencia que depende de la amplitud aplicada a la entrada, denominado oscilador controlado por tensión.

En este sentido el diagrama del sistema es idéntico a un modulador de FM típico de señal analógica.

La señal de entrada es:

$$x(t) = \sum_k a_k p_D(t - kD); \quad a_k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M - 1)$$

CPFSK. (Continuous Phase Frequency Shift Keying)

La señal modulada será entonces:

$$x_c(t) = A_c \sum_k \cos \left(\omega_c t + \theta + 2\pi f_d \int_0^t x(\lambda) d\lambda \right) p_D(t - kD)$$

$$\int_0^t x(\lambda) d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t a_k p_D(\lambda - kD) d\lambda$$

donde en el intervalo $kD < \lambda < (k+1)D$ se cumple que $p_D(\lambda - kD) = 1$.

CPFSK. (Continuous Phase Frequency Shift Keying)

Entonces:

$$\int_0^t x(\lambda) d\lambda = a_0 t \quad 0 < t < D$$
$$\int_0^t x(\lambda) d\lambda = a_0 D + a_1(t - D) \quad D < t < 2D$$
$$\vdots$$

$$\int_0^t x(\lambda) d\lambda = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j \right) D + a_k(t - kD) \quad kD < t < (k+1)D$$

CPFSK. (Continuous Phase Frequency Shift Keying)

$$x_c(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + \varphi_k + 2\pi f_d(t - kD))p_D(t - kD)$$

$$\varphi_k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j\right)D \quad \varphi_k = 0 \text{ para } k = 0$$

El caso de mayor uso en la práctica de la modulación CPFSK es la denominada MSK. (Minimum Shift Keying).

MSK. (Minimum Shift Keying)

MSK es el tipo de modulación digital de frecuencia que tiene el mínimo índice de modulación para modulación de símbolos ortogonales.

En este caso la desviación es la mitad de la aplicada en FSK de Sunde, de forma que:

$$f_d = \frac{r_b}{4}$$

En la expresión de la fase φ_k , y siendo $a_k = \pm 1$:

$$\varphi_k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j \right) \frac{\pi}{2}$$

MSK. (Minimum Shift Keying)

La fase es una secuencia continua de valores que alternan en $\pm \frac{\pi}{2}$.

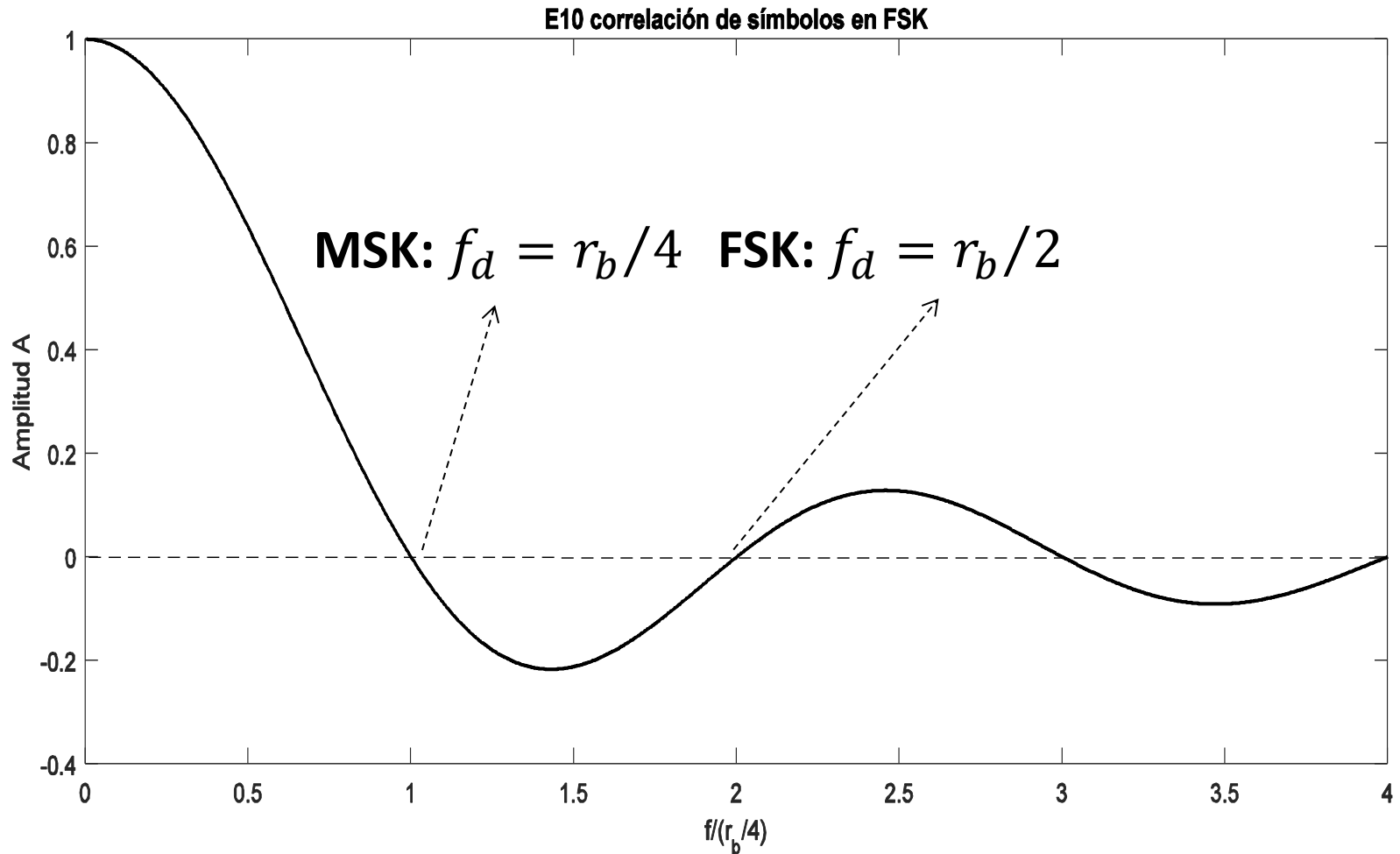
Los símbolos de la modulación son:

$$\begin{aligned}s_0(t) &= A_c p(t) \cos(2\pi(f_c - f_d)t) \\ s_1(t) &= A_c p(t) \cos(2\pi(f_c + f_d)t)\end{aligned}$$

La correlación entre los símbolos define lo que se denomina el coeficiente de ortogonalidad:

$$E_{10} = \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt = \frac{T_b A_c^2}{2} \text{sinc}[2(2f_d)T_b] = \frac{T_b A_c^2}{2} \text{sinc}\left(\frac{f_d}{(r_b/4)}\right)$$

MSK. Correlación E_{10} .



MSK. (Minimum Shift Keying)

En la expresión de E_{10} aparece un segundo término no mostrado, que tiene que ver con la suma de las frecuencias, y que se considera igual a cero en función de dos posibilidades:

Si $f_c = Nr_b$ la expresión es exacta, dado que ese segundo termino se anula.

Si $f_c \gg r_b$ la expresión es aproximada, y se basa en el hecho que el valor del segundo termino se anula por ser un número obtenido en una función sinc con el argumento $\gg 1$).

La expresión de $x_c(t)$ puede descomponerse de la forma:

MSK. (Minimum Shift Keying)

$$x_c(t) = A_c \sum_k \cos(\omega_c t + \theta + \varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD)$$

$$x_c(t) = A_c \left[\sum_k \cos(\omega_c t + \theta) \cos(\varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD) \right] \\ - A_c \left[\sum_k \sin(\omega_c t + \theta) \sin(\varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD) \right]$$

$$x_c(t) = A_c \left[\sum_k \cos(\varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD) \right] \cos(\omega_c t + \theta) \\ - A_c \left[\sum_k \sin(\varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD) \right] \sin(\omega_c t + \theta)$$

MSK. (Minimum Shift Keying)

Las componentes en fase y cuadratura son entonces teniendo en cuenta que $D = T_b$:

$$x_i(t) = \sum_k \cos(\varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD)$$
$$x_q(t) = \sum_k \sin(\varphi_k + a_k \omega_d(t - kD)) p_D(t - kD)$$

Con un trabajo algebraico basado en trigonometría es posible llevar las expresiones anteriores a la forma:

MSK. (Minimum Shift Keying)

$$x_i(t) = \sum_{k \text{ par}} I_k p(t - kT_b)$$

$$x_q(t) = \sum_{k \text{ impar}} Q_k p(t - kT_b)$$

Donde:

$$I_k = \cos(\varphi_k)$$

$$Q_k = \sin(\varphi_k)$$

$$p(t) = \cos\left(\frac{\pi r_b t}{2}\right) [u(t + T_b) - u(t - T_b)]$$

MSK. (Minimum Shift Keying)

Si se asigna el valor de entrada de forma que:

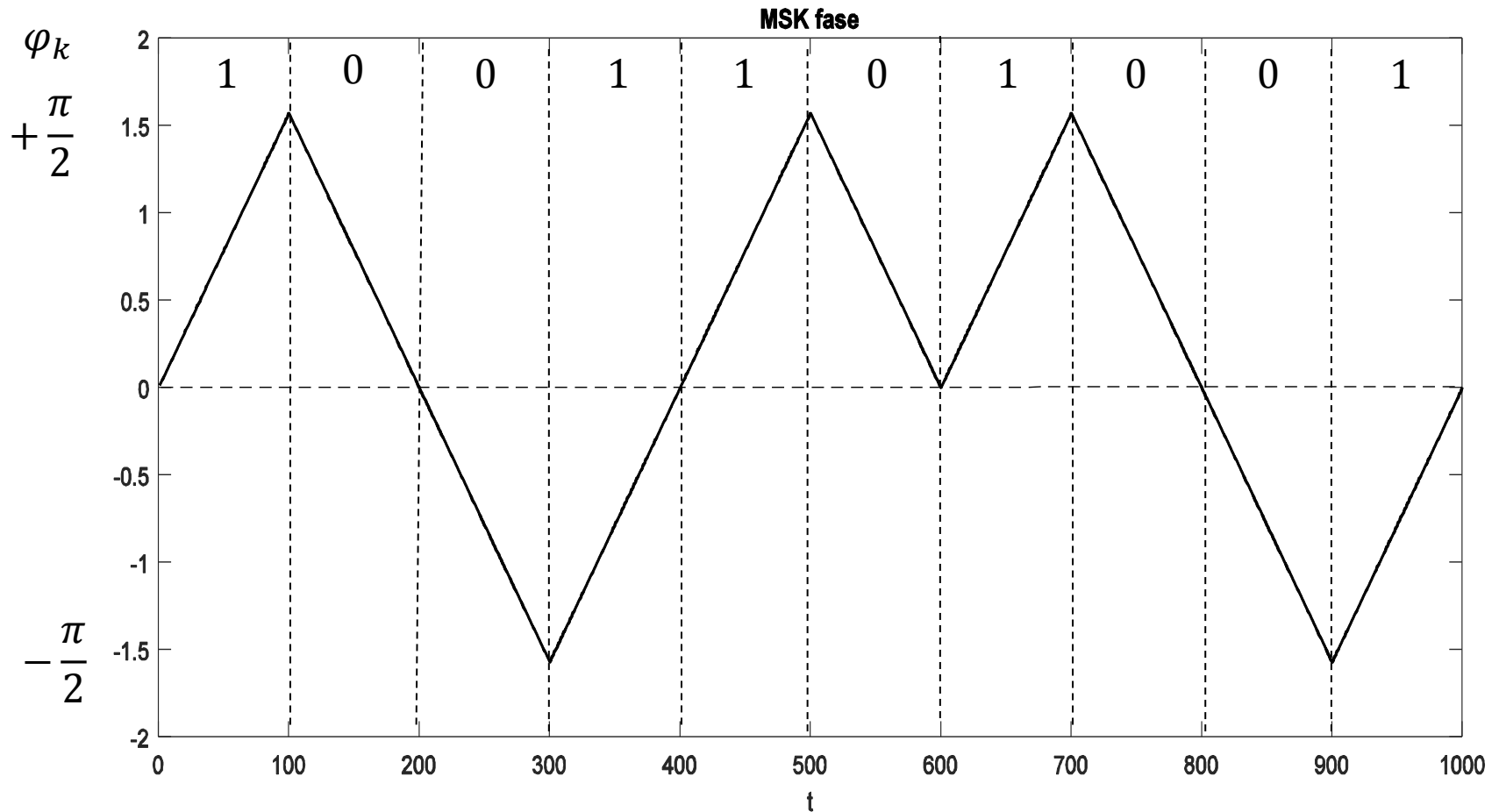
$a_k = +1$ el bit es un uno '1',

$a_k = -1$ el bit es un cero '0',

Para una secuencia determinada de entrada la salida puede verse como una secuencia de fases que cambian en $\pm \pi/2$.

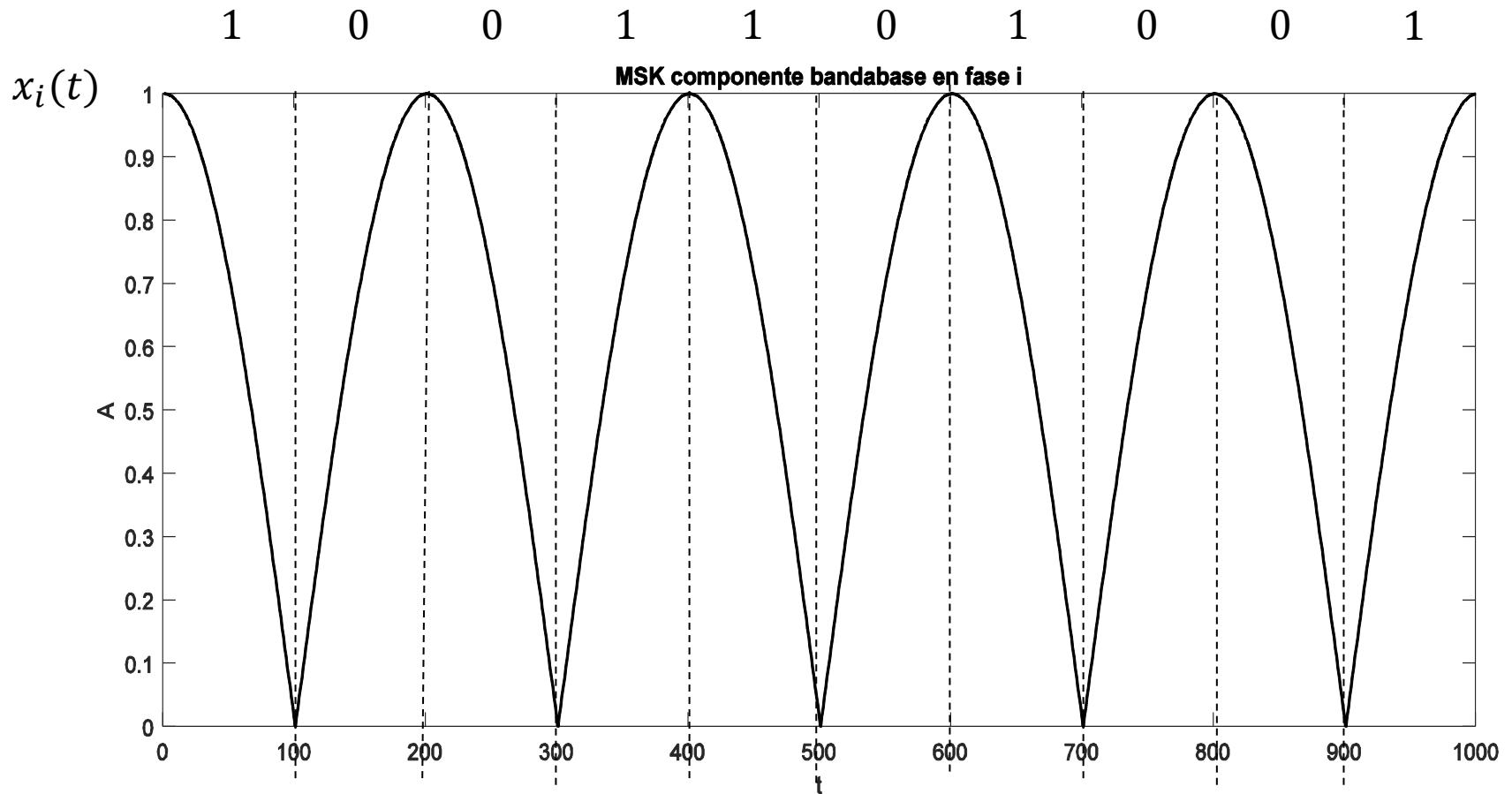
Por ejemplo si la secuencia de entrada fuera **1 0 0 1 1 0 1 0 1**, la salida seria una secuencia de fases como la que se ve en la figura:

MSK. Fase.

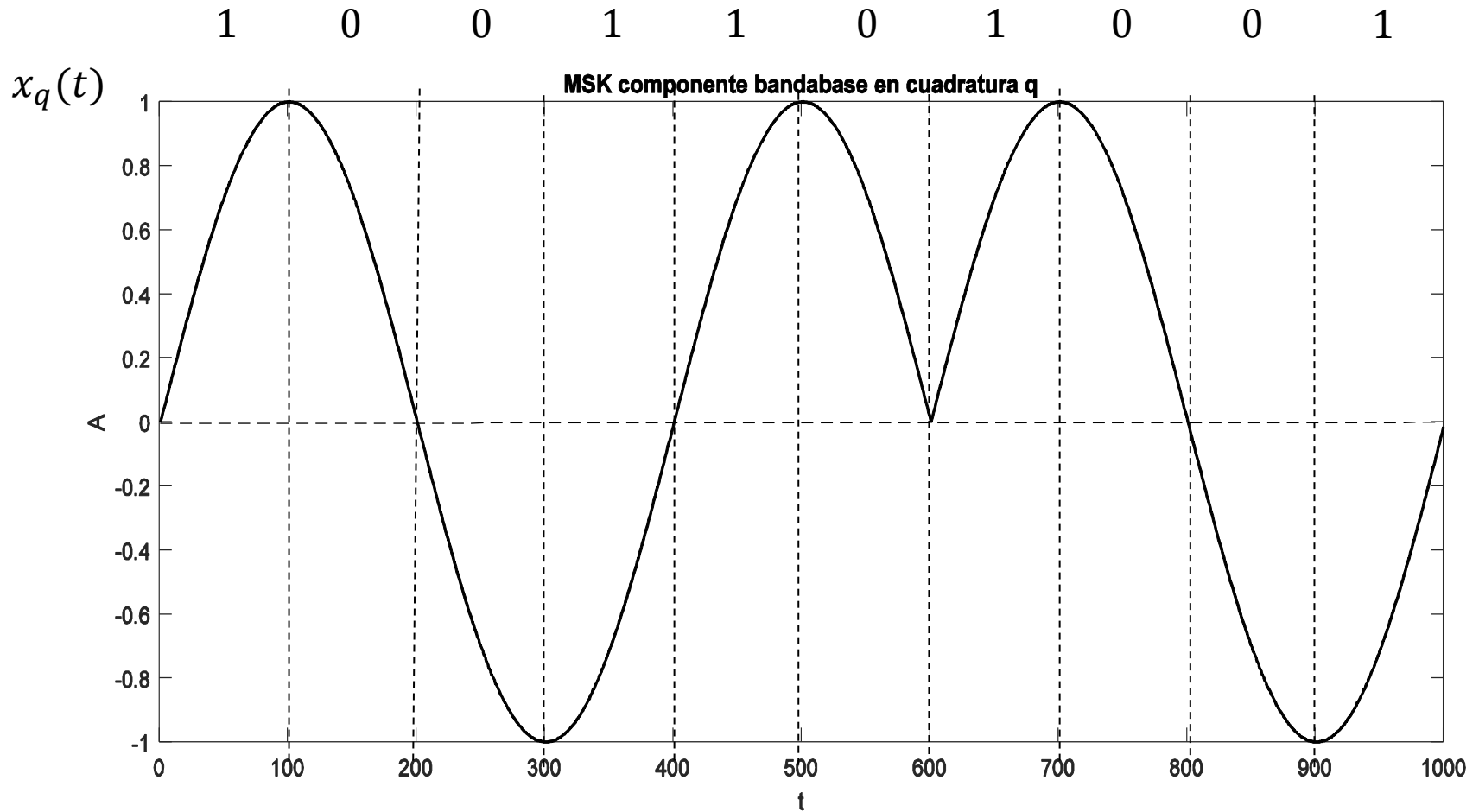


Las componentes en fase y cuadratura también representan la información de fase.

MSK. Componente I.

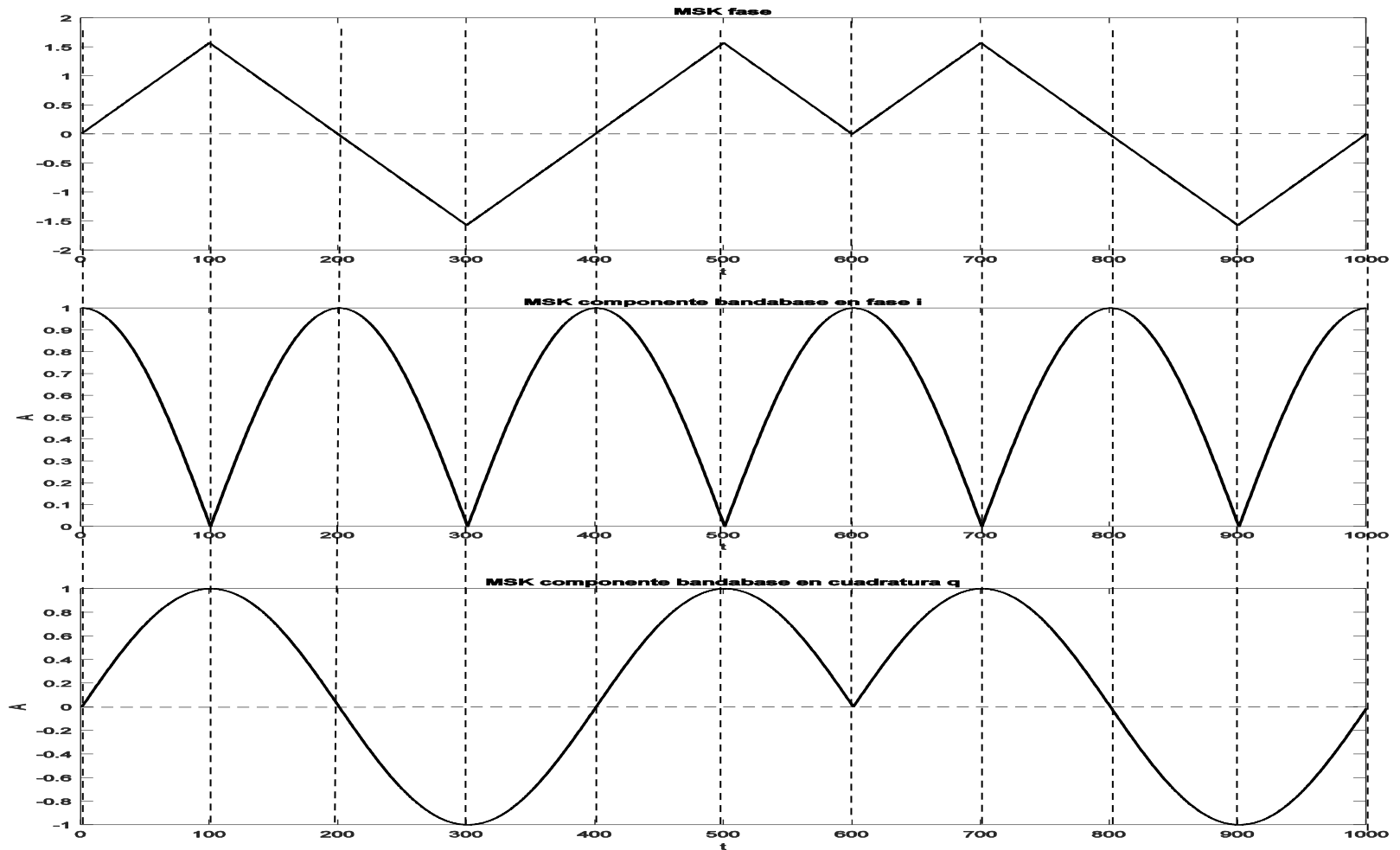


MSK. Componente Q.



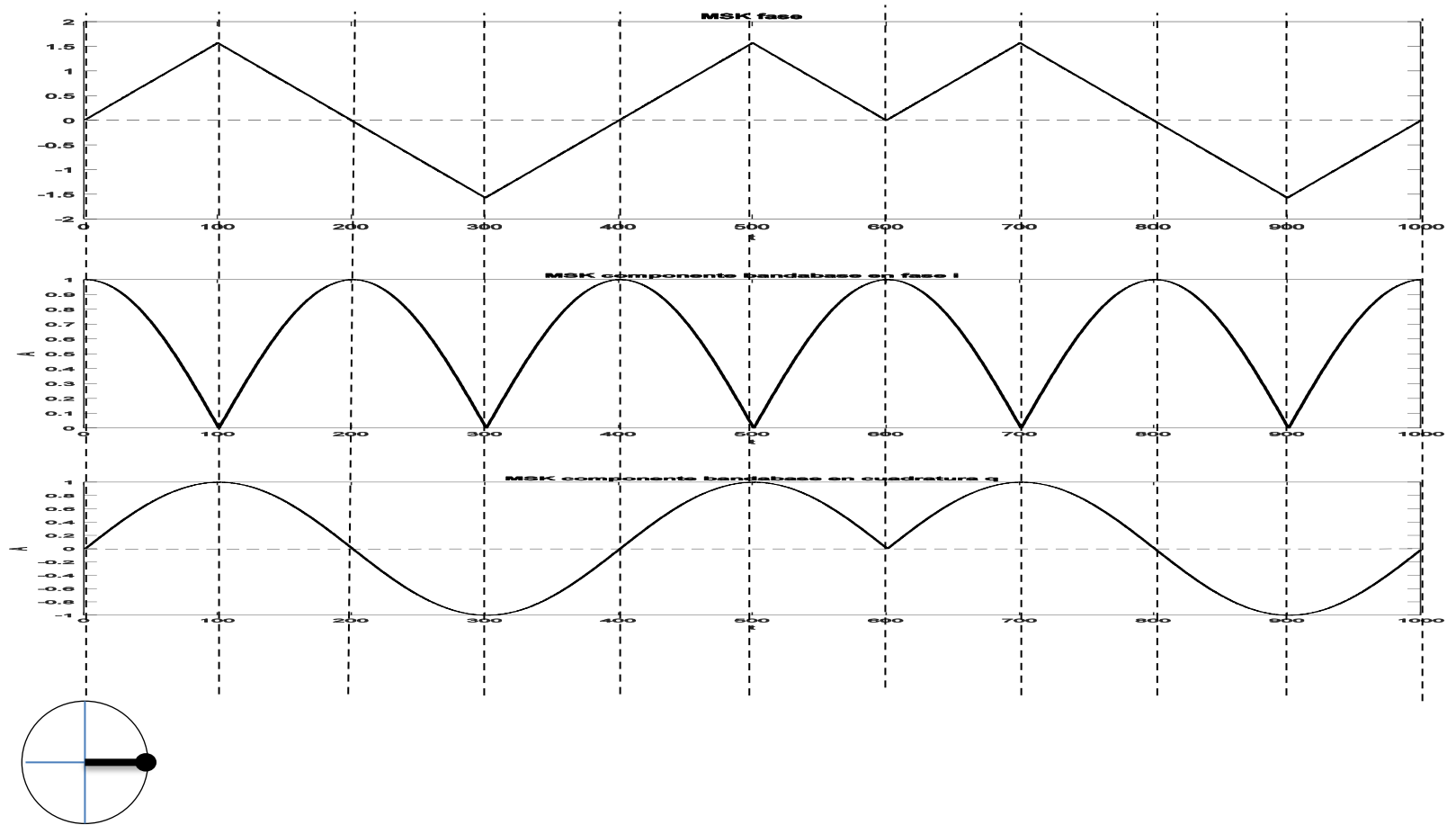
MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



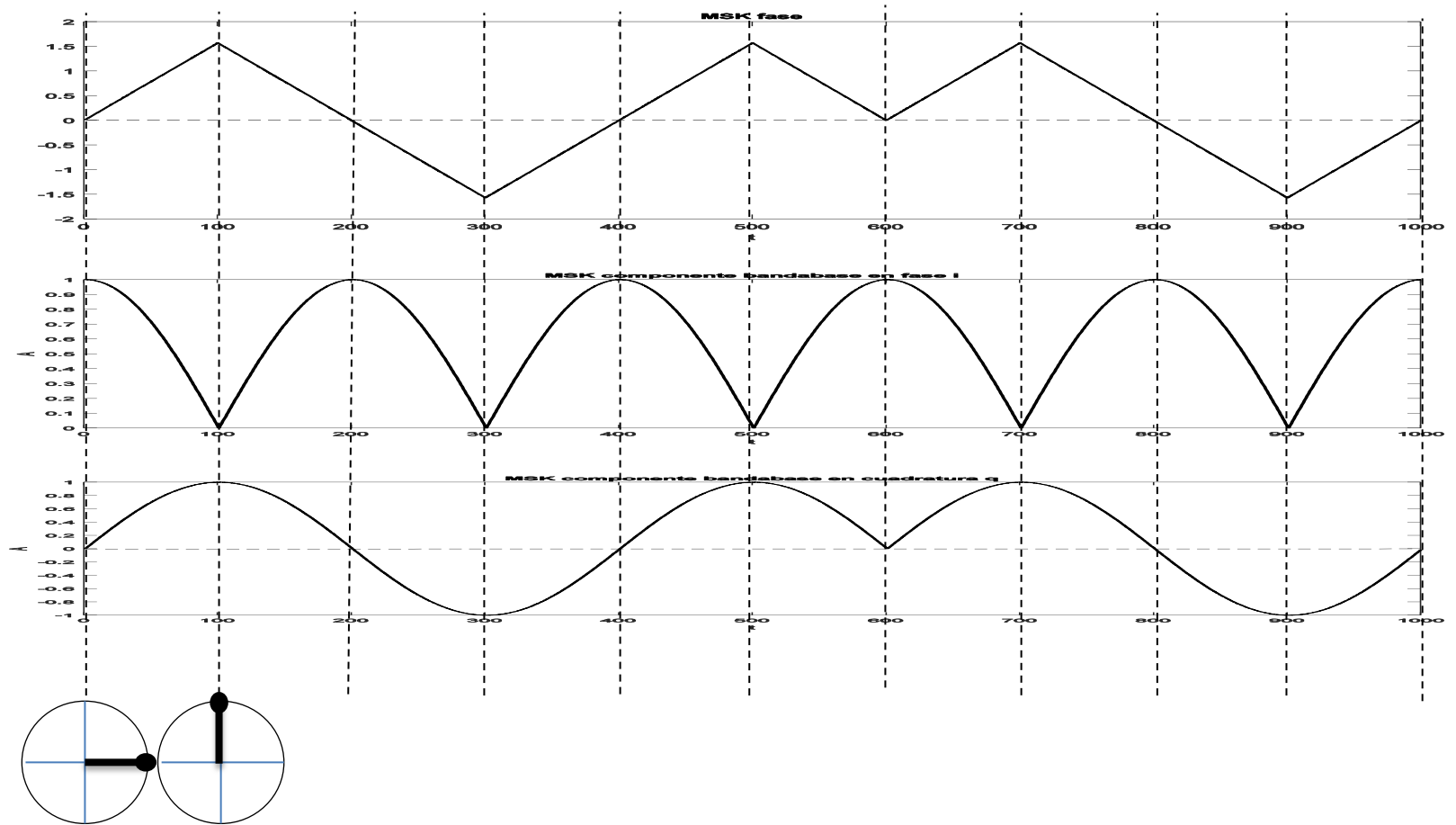
MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



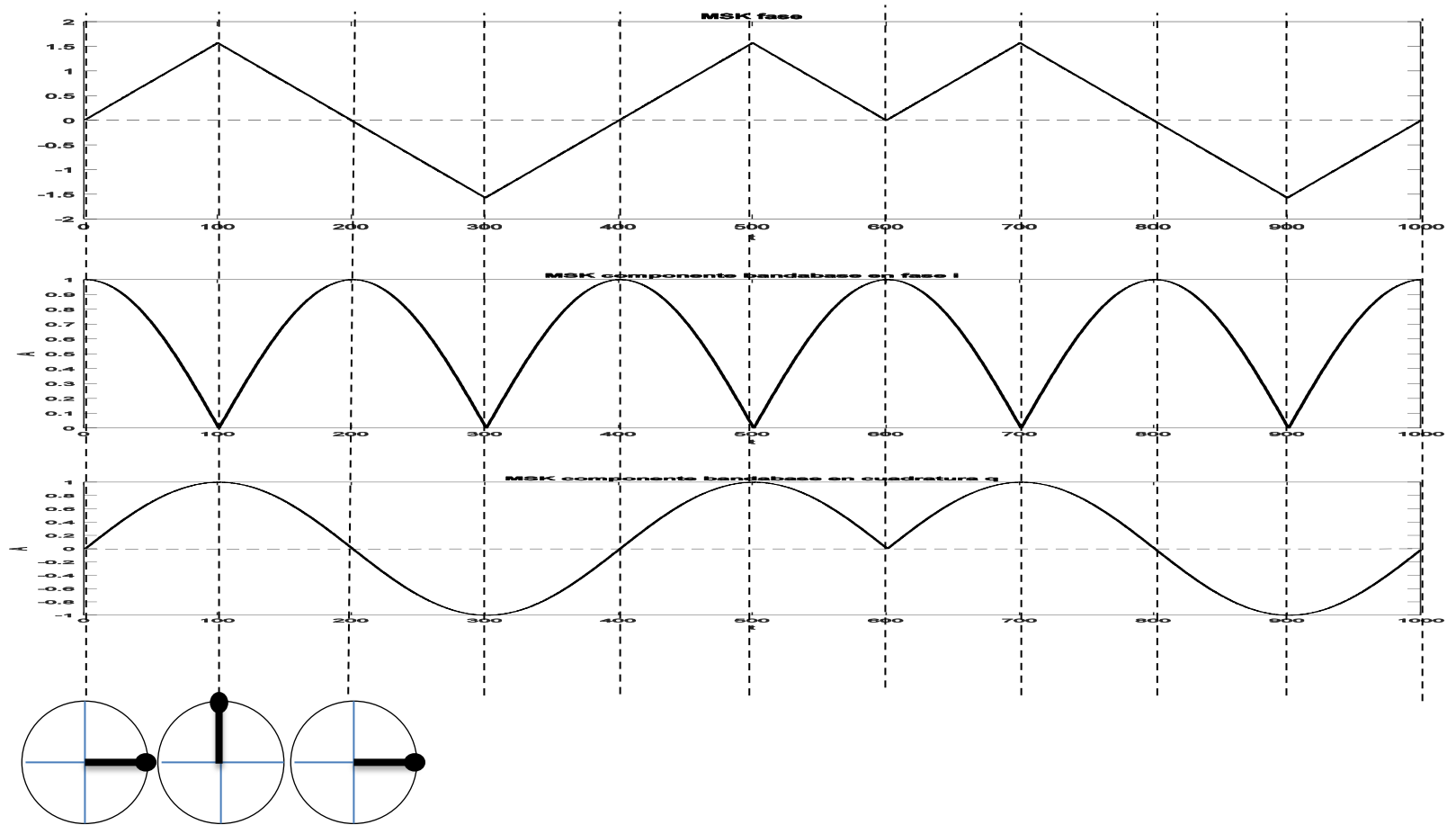
MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



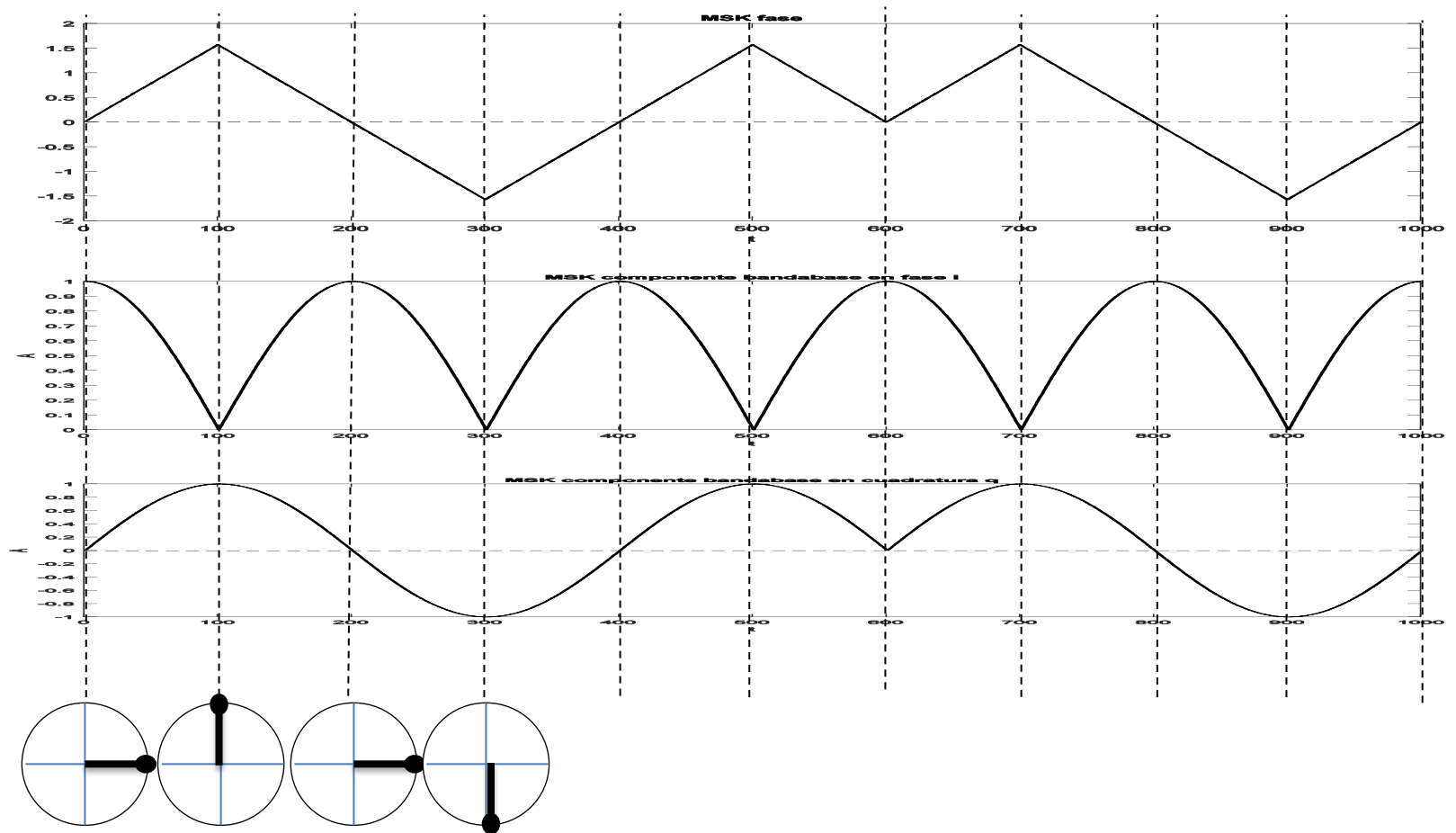
MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



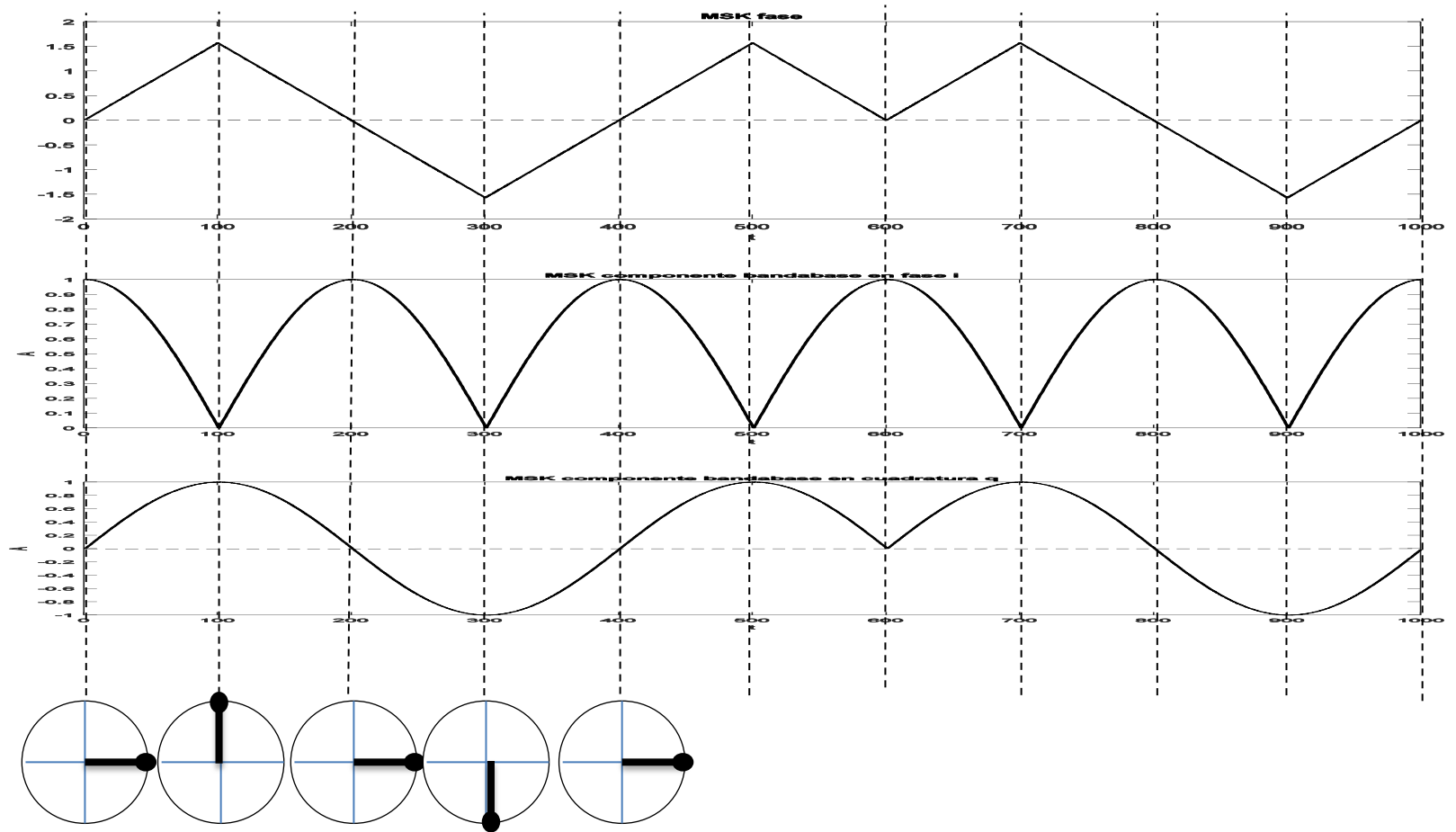
MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



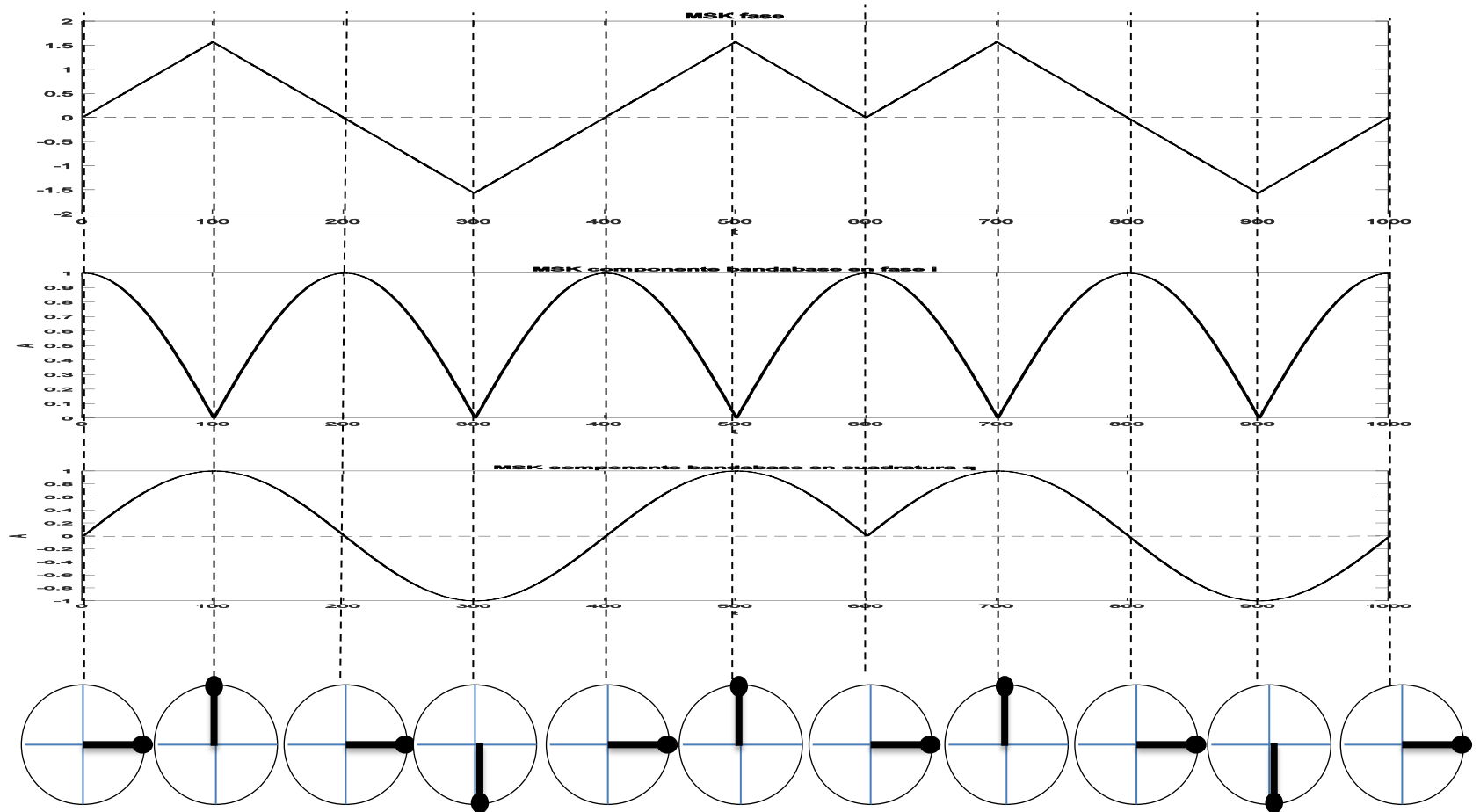
MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



MSK. Componentes I y Q.

1 0 0 1 1 0 1 0 0 1



MSK. Densidad Espectral $G_{lp}(f)$.

Siendo

$$I_k = \cos(\varphi_k)$$
$$Q_k = \sin(\varphi_k)$$

Los valores estadísticos promedio son:

$$\overline{I_k} = \overline{Q_k} = 0$$
$$\overline{I_k^2} = \overline{Q_k^2} = 1$$

Y siendo la forma del pulso modificado:

$$p(t) = \cos\left(\frac{\pi r_b t}{2}\right) [u(t + T_b) - u(t - T_b)]$$

MSK. Densidad Espectral $G_{lp}(f)$.

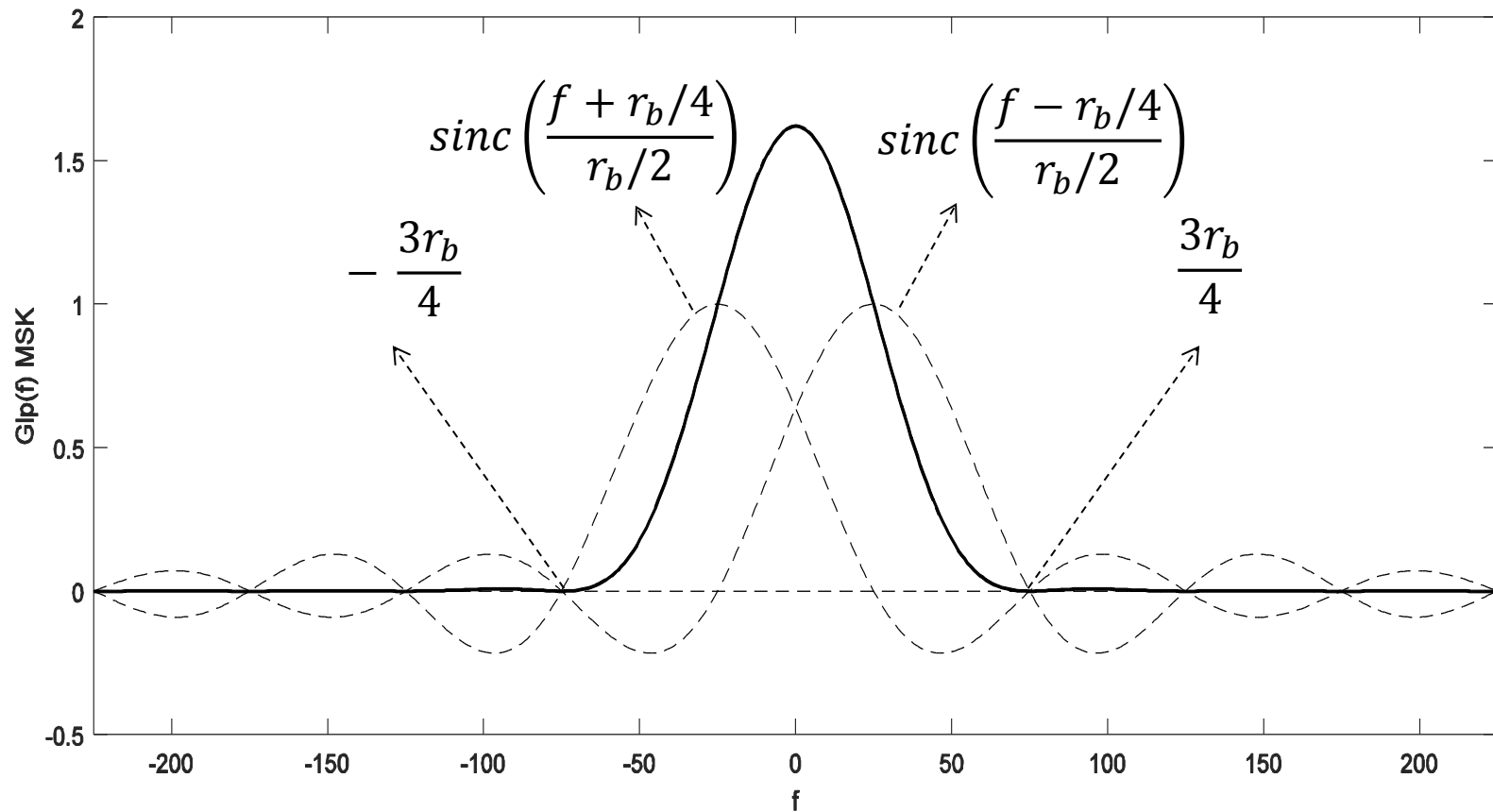
$$|P(f)|^2 = \frac{1}{r_b^2} \left[\text{sinc} \left(\frac{f - r_b/4}{r_b/2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{f + r_b/4}{r_b/2} \right) \right]^2$$

Luego:

$$G_{lp}(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 = \frac{1}{\pi^2 r_b} \left[\frac{\cos(2\pi f / r_b)}{\left(\frac{4f}{r_b} \right)^2 - 1} \right]$$

El espectro de la modulación MSK es muy eficiente debido a dos factores, uno de ellos es que utiliza eficientemente las dos componentes en fase y cuadratura para naturalmente distribuir y multiplexar la información, duplicando la duración en tiempo de las formas de onda banda base, la otra es la conformación del pulso a otro mas suave que el rectangular, en la forma de un semi-ciclo de coseno.

MSK. Densidad Espectral $G_{lp}(f)$.



Modulaciones binarias. Densidad Espectral $G_{lp}(f)$.

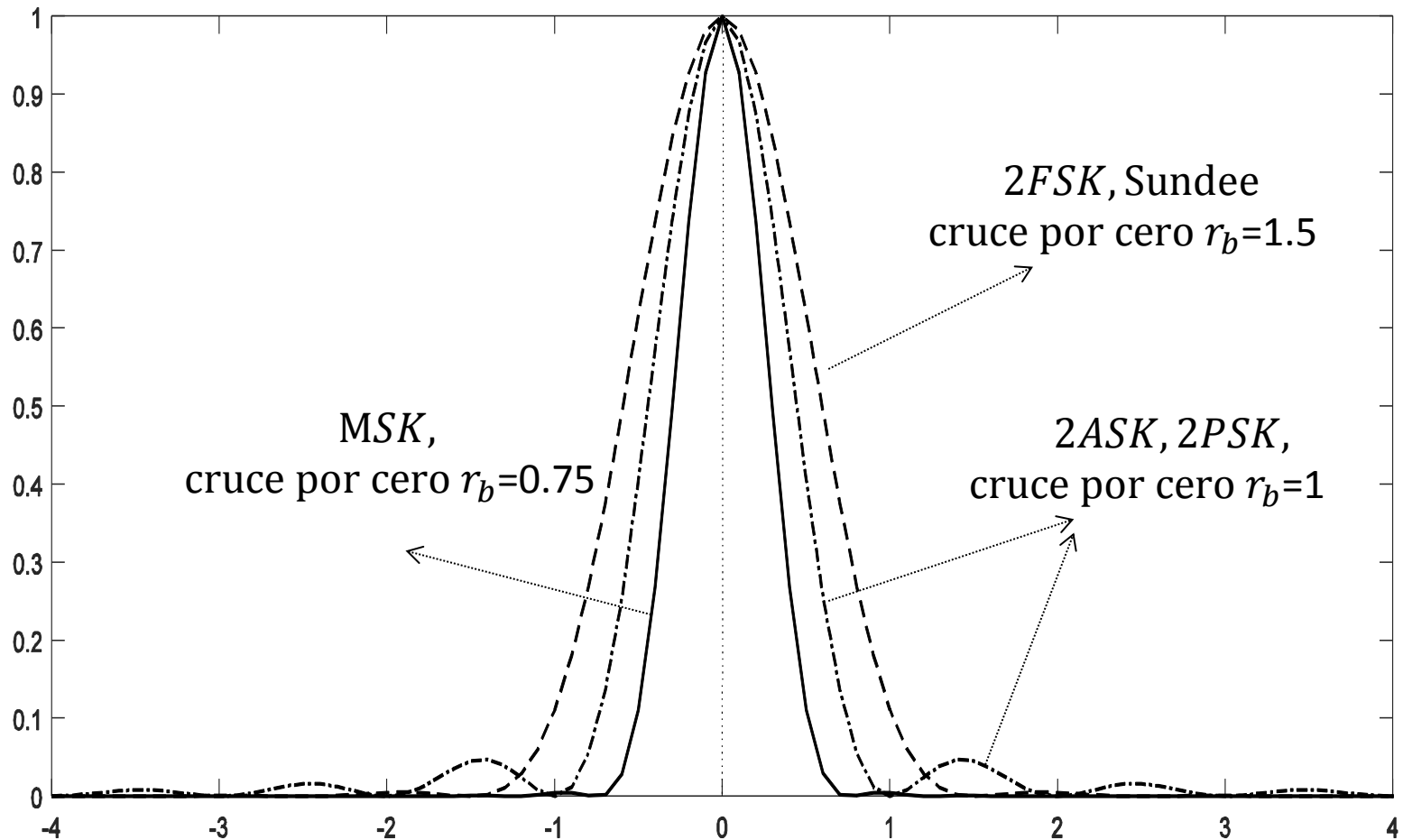
Resumiendo, los espectros $G_{lp}(f)$ para las modulaciones digitales 2ASK (OOK), 2PSK (PRK) 2FSK (FSK de Sunde) y MSK se representan en la siguiente figura.

Los espectros están normalizados en amplitud y frecuencia, en este último caso como factores de la velocidad binaria r_b .

Los espectros de las modulaciones 2ASK y 2PSK se muestran en un único gráfico, recordando que en el caso de 2ASK debe considerarse la existencia de una delta en el origen de frecuencia, no representado en la comparación.

El espectro de FSK tiene una caída más pronunciada en los laterales, y menos lóbulos a ambos lados del centro del espectro. MSK muestra el mismo efecto y menor ancho de banda para el mismo caso, teniendo una eficiencia espectral igual a $r_b/B_T = 2$.

Modulaciones binarias. Densidad Espectral $G_{lp}(f)$.



Modulaciones binarias. Densidad Espectral $G_{lp}(f)$.

