Sistemas de Comunicaciones basados en Radio Definida por Software (SDR)

Dr. Ing. Jorge Castiñeira Moreira

Dr. Ing. Alejandro José Uriz

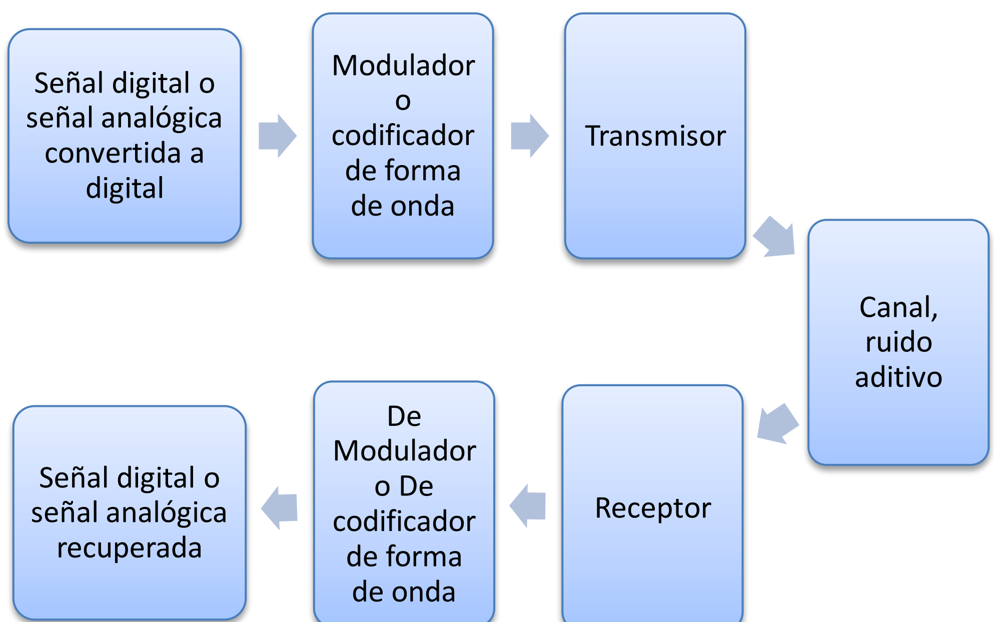
Sistemas de Comunicaciones Digitales - 1

Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Introducción. Transmisión digital banda base

Un sistema banda base se representa en el diagrama en bloques de la figura



NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Introducción

El objeto del presente capitulo es analizar diferentes problemas asociados con la transmisión en banda base, a saber:

El efecto del **ruido** en el canal, y la determinación de las propiedades del sistema en función del ruido, la energía y espectro de la señal.

El efecto del filtrado del canal en las características de la señal, el efecto de la **interferencia intersimbólica** y los métodos para evitarla.

La generación de señales en banda base de características digitales, provenientes de una fuente analógica. **Digitalización** de señales analógicas.

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Parámetros de la transmisión digital

Los parámetros de la transmisión digital están relacionados con los clásicos parámetros de la comunicación analógica:

El concepto de relación señal/ruido será reemplazado por la estimación de la **tasa de error**, es decir de la cantidad de errores producida en una transmisión de un número grande de datos

El ancho de banda será equivalente a la cantidad de datos transmitidos en un intervalo dado de tiempo, es decir la **velocidad de transmisión**. Cuantos mas datos se intente enviar, mas corta será la duración de cada dato, y mas grande el ancho de banda requerido para tal fin

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Señalización digital. Señales digitales PAM (Pulse Amplitud Modulation)

La señal de transmisión digital en banda base se modela como un tren de pulsos de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

Donde la modulación de amplitud esta representada por el coeficiente a_k que es el k-ésimo símbolo en la secuencia, de manera tal que los símbolos a_k corresponden a alguno de los M valores del alfabeto discreto de señales.

En la expresión anterior, el pulso básico que viaja en el canal y que representa la forma de onda de cada símbolo enviado es $p(t)$, que será considerado como un pulso tal que:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm D, \pm 2D, \pm 3D \ldots \end{cases}$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Señalización digital. Señales digitales PAM

El pulso tiene valor normalizado a 1 en el instante $t = 0$, y pasa por cero en los instantes de muestreo $t = \pm D, \pm 2D, \pm 3D \ldots.$, de los datos vecinos al analizado.

El muestreo de la señal se produce sincrónicamente en instantes kD, siendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$de forma tal que para un cierto valor de $k = K$:

$$x(KD) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_K p(KD - kD) = a_K$$

Dado que $(KD - kD)$ es cero, excepto para $k = K$, y $p(KD - KD) = p(0) = 1$.

La secuencia de la señal transmitida, un tren de pulsos, típicamente rectangulares, tiene una cadencia o velocidad de transmisión.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Señalización digital. Señales digitales PAM

El símbolo r se usará para representar el periodo de repetición entre pulsos. De esta manera la inversa será igual a la velocidad de señalización, r :

$$r = \frac{1}{D} \text{ (baud)}$$

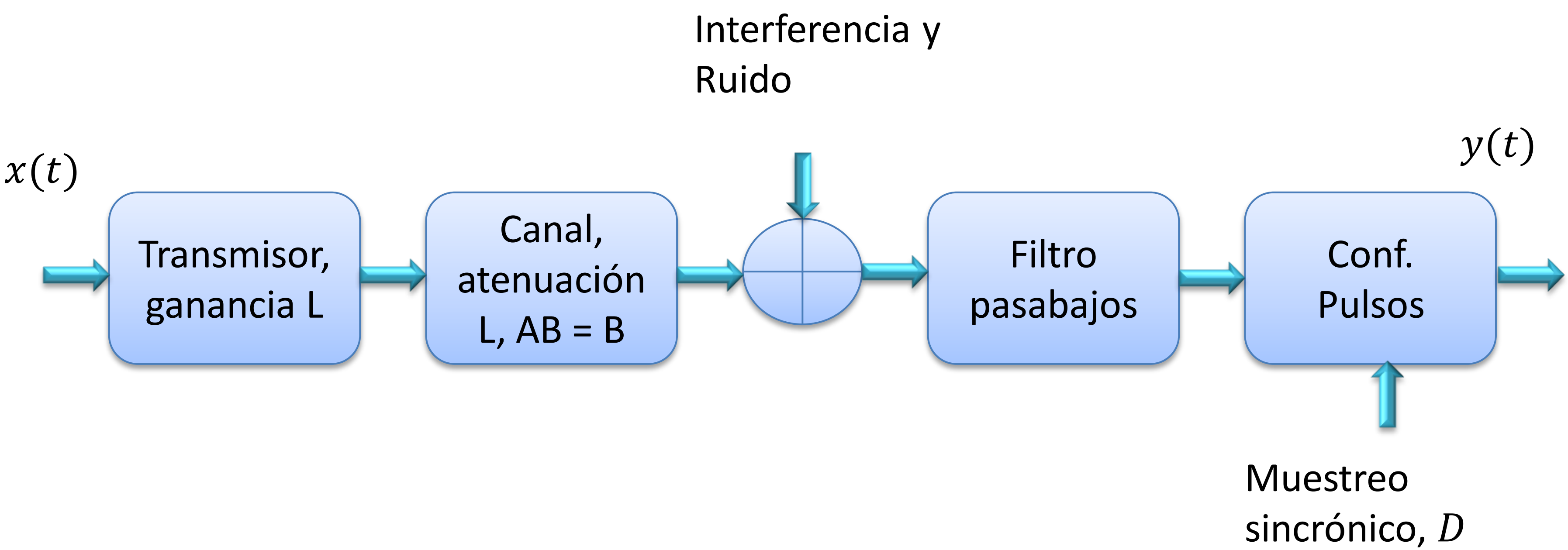
Como se mencionó en la introducción, la transmisión digital se basa en el envío de alguno de los M símbolos disponibles del alfabeto discreto. Cuando se está en el caso binario, $M = 2$, El símbolo r_b se usará para representar el periodo de repetición entre pulsos en el caso de transmisión binaria. De esta manera la inversa del intervalo de tiempo $D = T_b$ será igual a la velocidad de señalización, r_b:

$$r_b = \frac{1}{T_b} \text{ (bits/segundo, bps)}$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Limitaciones en la transmisión

Un sistema de transmisión en banda base obedece al diagrama en bloque que se ve en la figura:



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Limitaciones en la transmisión

$\boldsymbol{a_K}$ es el valor muestreado ideal, la amplitud que originalmente tenía el símbolo al transmitirlo desafectado del ruido y la interferencia

$\sum_{k \neq K} \boldsymbol{a_k \tilde{p}(t - t_d - kD)}$ es la contribución de todos los otros pulsos cuando por imperfecciones no tienen cruce por cero en los instantes de muestreo, $\pm D, \pm 2D, \pm 3D$ ..., es decir es el término de **ISI**

$\boldsymbol{n(t_K)}$ es el valor adicionado a la señal que proporciona el **ruido aditivo** presente en el canal

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Señalización Multinivel

Para incrementar la velocidad en bps, la información binaria puede ser agrupada en conjuntos de mas de un bit. El mensaje puede ser enviado como una secuencia de bits que representan alternativamente un uno o un cero. Sin embargo, el mismo mensaje podría ser enviado agrupando los bits de a dos, de forma tal que se usa un alfabeto de $M = 4$ símbolos por ejemplo. Si se asigna a cada elemento de los M del set, un número de acuerdo al código natural se obtiene lo siguiente:

grupo de bits	Ampl
1 1	3A/2
1 0	A/2
0 1	-A/2
0 0	-3A/2

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Formatos de señal en banda base

Las propiedades de cada formato pueden ser útiles en uno u otro caso, de acuerdo a las necesidades impuestas por el canal de transmisión.

Algunas características deseables de los formatos son las siguientes:

- *Capacidad de auto-sincronización.*
- *Espectro adaptable a las características del canal de transmisión.*
- *Ancho de banda de transmisión:* Deberá ser el menor posible.

Densidad Espectral de Potencia de una señal digital modulada en amplitud

Eficiencia espectral

La eficiencia espectral de un sistema es el numero de bits por segundo que se transmiten por cada Herz de ancho de banda;

$$\frac{r_b}{B_T} \quad bps/Hz$$

Cuando existen limitaciones de ancho de banda y se desea aumentar la velocidad de señalización binaria se recurre normalmente a la señalización M-aria. En este caso el resultado típico es que la eficiencia es igual a $\log_2 M$.

Para los formatos vistos:

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Densidad Espectral de Potencia de una señal digital modulada en amplitud

Código	ancho de banda para 1^{er} nulo	Eficiencia η_B
Unipolar NRZ	r_b	1
Polar RZ	$2r_b$	1/2
Unipolar RZ	$2r_b$	1/2
Polar NRZ	r_b	1
Manchester	$2r_b$	1/2
M-aria NRZ	r_b/n	n

Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Parte 2

Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Ruido y Errores

El **ruido** constituye uno de los principales problemas a resolver en el diseño de un sistema de comunicaciones. Se analizará el caso para señales binarias y M-arias.

Haciendo uso del concepto de superposición, se analiza el efecto del ruido como si la interferencia intersimbolica no existiera. Luego se considerará la ISI anulando el efecto del ruido. De la contribución de los diferentes efectos sobre la señal transmitida después de muestrear la señal recibida:

$$y(t_K) = a_K + \sum_{k \neq K} a_k \tilde{p}(t - t_d - kD) + n(t_K)$$

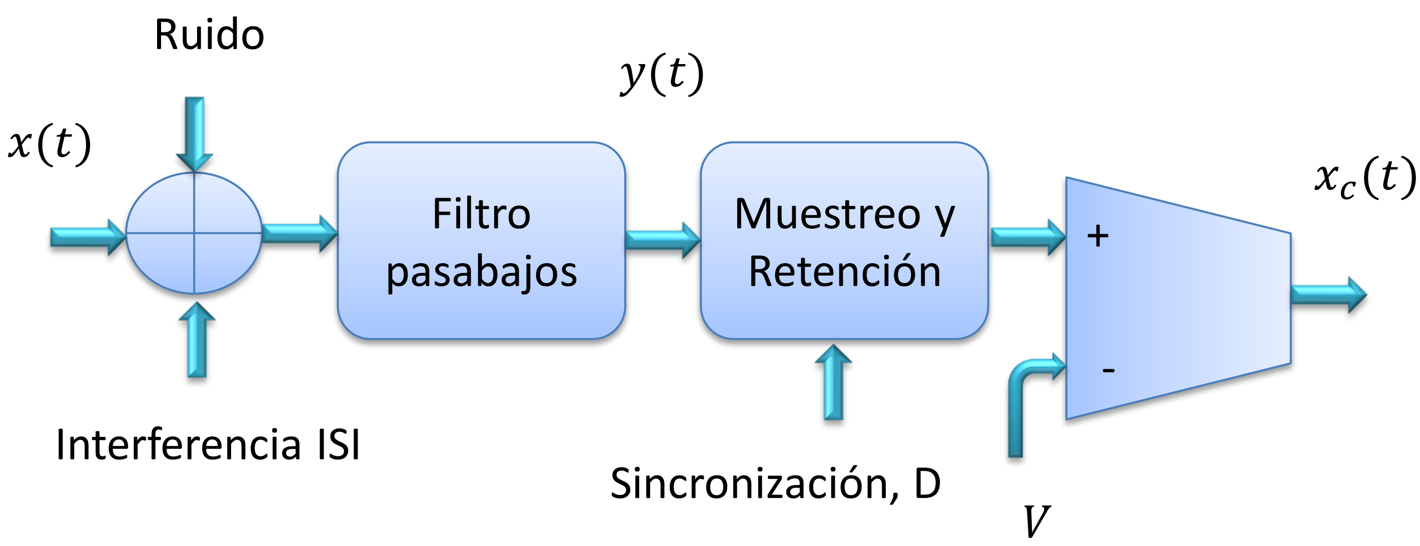
Tenemos en cuenta el ruido solamente:

$$y(t_K) = a_K + n(t_K)$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Ruido y Errores

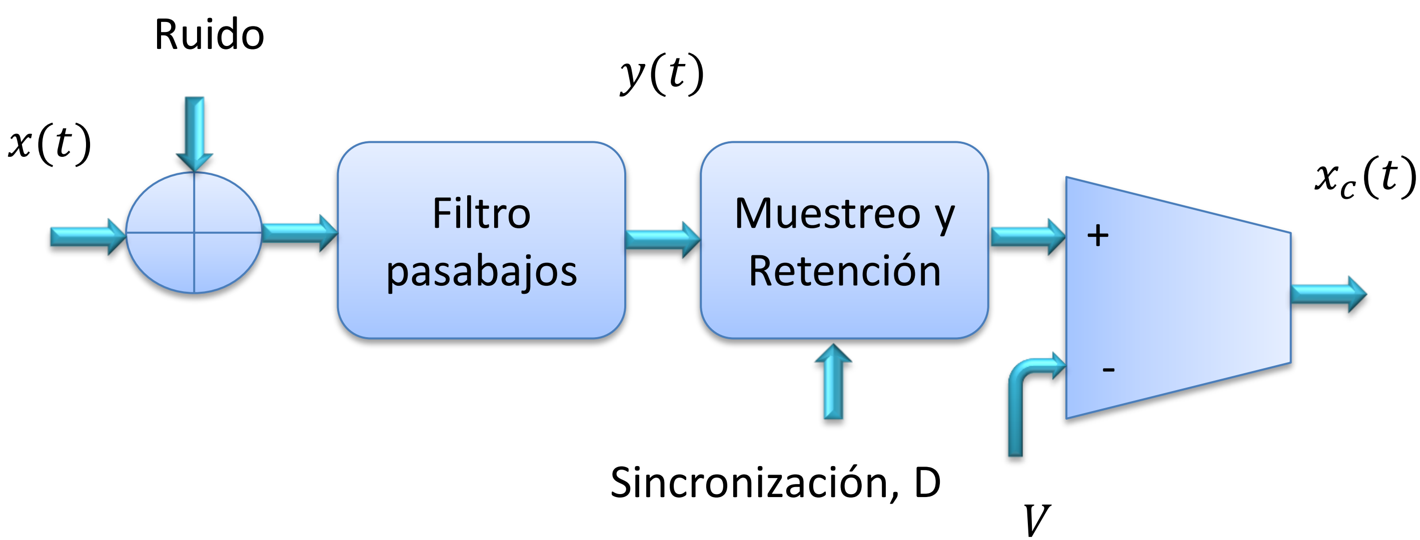
En el receptor se encuentra la suma de la señal de interés, el ruido y la posible interferencia ISI.



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

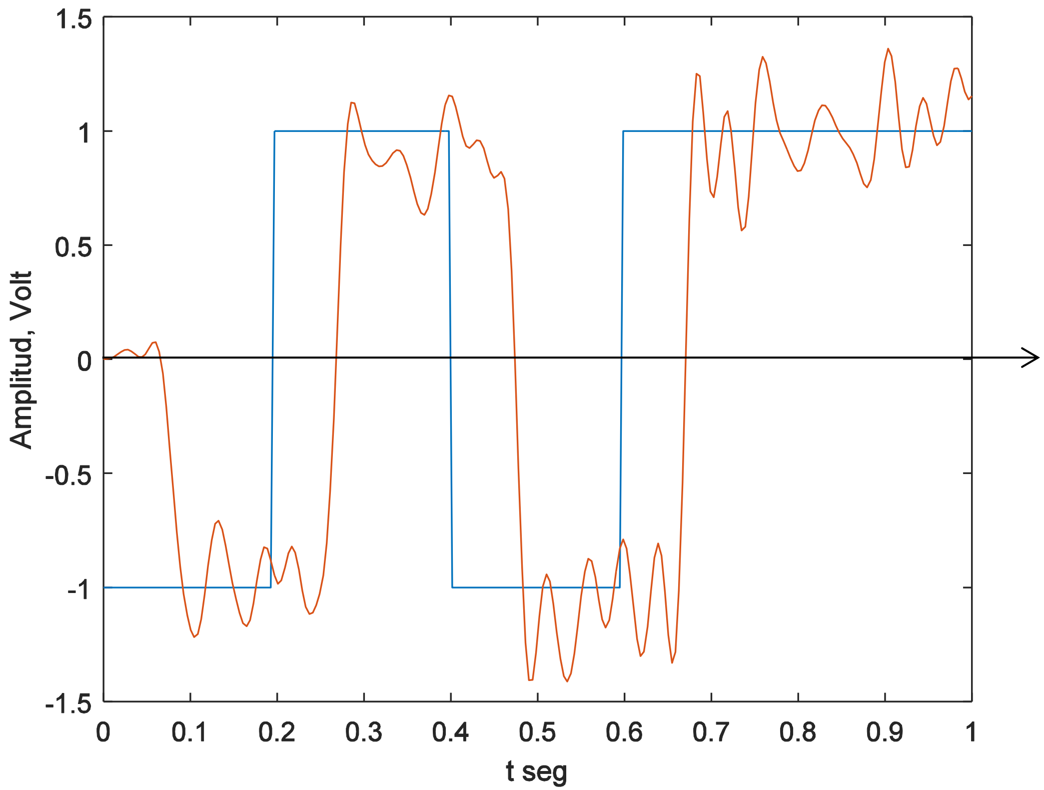
Ruido y Errores

Aplicando el teorema de la superposición analizamos sólo el efecto del ruido:



Ruido y Errores

La transmisión de una secuencia de datos afectada por ruido y filtrado se vería como en la figura:



NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

La señal mas el ruido ingresan al receptor. La primera etapa consta de un filtro pasabajos que elimina parte del ruido entrante sin producir interferencia intersimbólica. Estudiaremos el efecto del ruido suponiendo que la ISI provocada es nula. El valor detectado por el receptor luego de la operación de muestreo y retención es:

$$y(t_K) = a_K + n(t_K)$$

Se procede a calcular el valor recibido aplicando lo que se denomina "hard decision", es decir, se compara el valor recibido $y(t_K)$ con un cierto valor umbral V.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

Se adopta una regla de decisión de forma tal que:

$$\begin{cases} Si\ y(t_K) > V, entonces\ el\ dato\ es\ un\ '1' \\ Si\ y(t_K) < V, entonces\ el\ dato\ es\ un\ '0' \end{cases}$$

De esta manera el receptor convierte las muestras de la señal recibida $y(t_K)$, que corresponde a una señal ruidosa muestreada, en una señal $x_c(t)$, que es una señal similar a la transmitida $x(t)$, sin ruido, pero con eventuales errores.

Los valores muestreados $y(t_K)$ corresponden a una variable aleatoria continua Y, mientras que los valores n (t_K) pertenecen a las muestras de una variable aleatoria n .

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

Diremos entonces que:

H_0 : Es la hipótesis de que ha sido enviado un cero '0':

$$a_k = 0; \quad Y = n$$

H_1 : Es la hipótesis de que ha sido enviado un uno '1':

$$a_k = A; \quad Y = A + n.$$

.

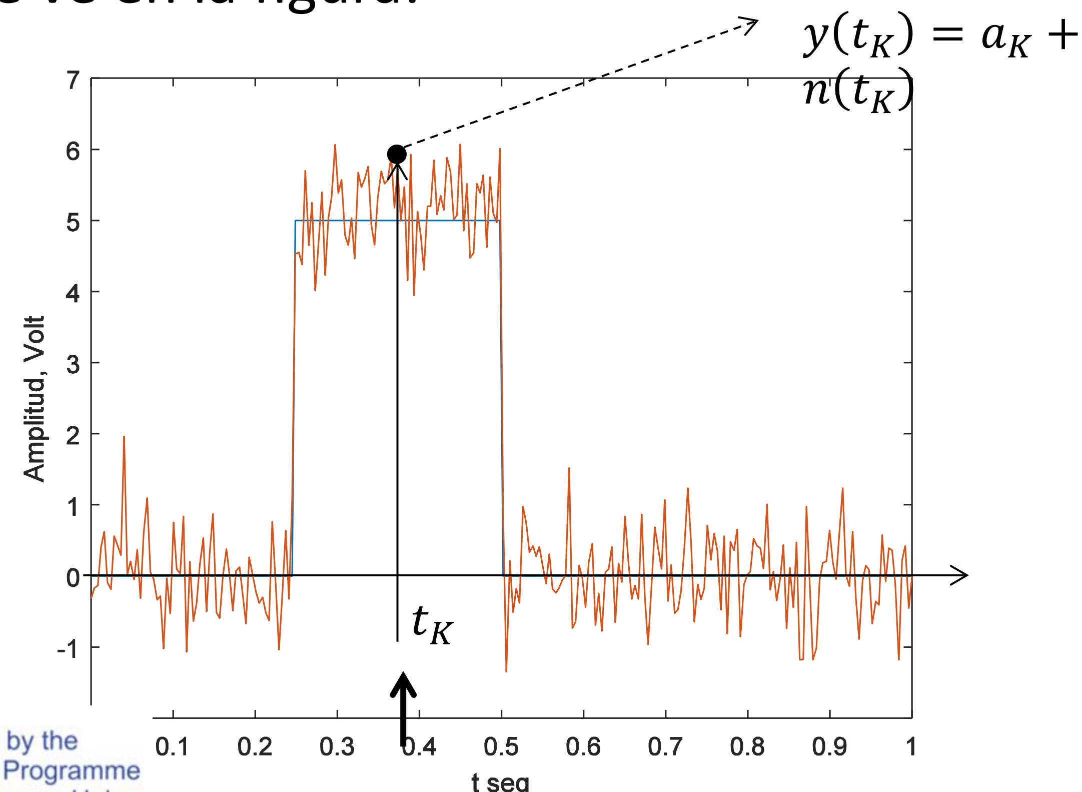
Las funciones densidad de probabilidad condicional para la variable aleatoria Y , para los eventos H_0 y H_1 están dadas por:

$$p_Y(y/H_0) = p_n(y) \qquad\qquad p_Y(y/H_1) = p_n(y - A)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

Donde $p_n(y)$ es la pdf del ruido en el canal estudiado, en nuestro caso el canal Gaussiano. Esta es la función pdf del ruido agregado a la señal, caracterizada por ser una función pdf de Gauss. Cuando en un formato Unipolar se transmite la señal en presencia de este ruido, se observaría, en ausencia de filtrado algo como lo que se ve en la figura:



NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

P_0 y P_1 son las probabilidades de ocurrencia de ceros y unos respectivamente.

Si los datos de fuente son equiprobables:

$$P_e = (P_{e0}+P_{e1})/2$$

La ubicación del umbral de decisión es ciertamente importante. Un valor de muy cercano a '0' reduce el error para el valor '1', pero lo aumenta fuertemente para el valor '0', y viceversa.

Para calcular la posición óptima del valor del umbral V, se debe derivar la expresión de la probabilidad de error respecto del umbral, e igualar a cero:

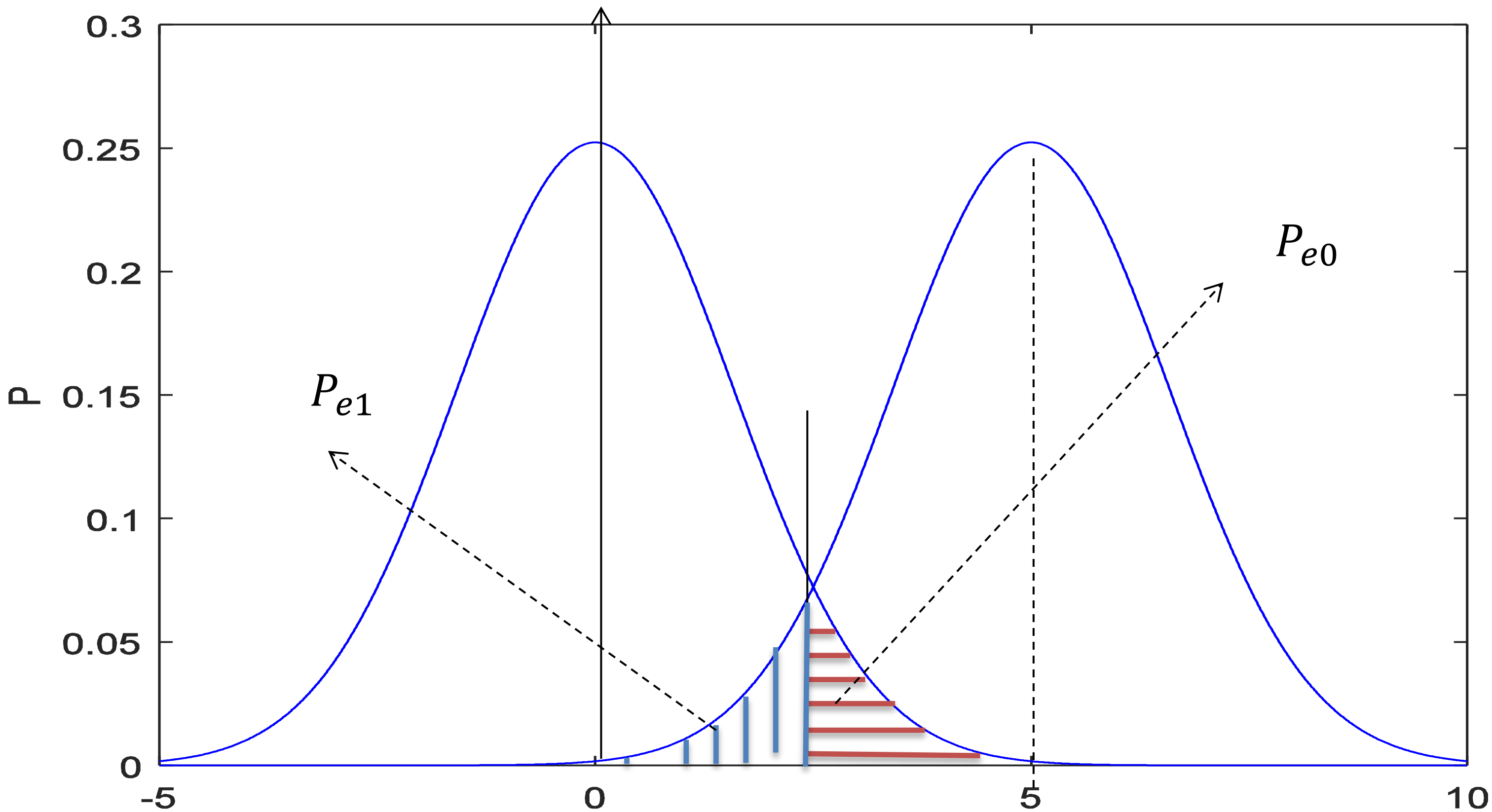
$$\frac{dP_e}{dV} = 0$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

En el caso de datos equiprobables, el valor óptimo del umbral es:

$$V_{opt} = A/2$$



$A = 0\ V$ $V_{opt} = A/2$ $A = 5\ V$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

$$P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V/\sigma}^{\infty} e^{-\frac{(\lambda)^2}{2}} d\lambda = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^{V} p_Y(y/H_1) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{V} e^{-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}} dy$$

Con $\lambda = (y - A)/\sigma$, el límite superior es $(V - A)/\sigma$

$$P_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(V-A)/\sigma} e^{-\frac{(\lambda)^2}{2}} d\lambda = Q\left(\frac{V - A}{\sigma}\right)$$

Si se utiliza el umbral óptimo en el caso equiprobable, entonces $V = A/2$,

$$P_e = P_{e0} = P_{e1} = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

Esta es la mínima probabilidad de error binaria en presencia de ruido blanco Gaussiano cuando los dígitos son igualmente probables.

Como puede verse, el término $A/(2\sigma)$ o su correspondiente valor elevado al cuadrado $A^2/(4\sigma^2)$, define la magnitud de los errores en el sistema, o sea la probabilidad de error para un receptor dado. Esta cantidad es una relación **señal a ruido** expresada en amplitud o potencia.

Este resultado es el mismo para la señalización polar cuando la distancia entre los símbolos permanece constante e igual a A,

($a_k = \pm A/2$).

NEON Network of Competence on Internet of Things

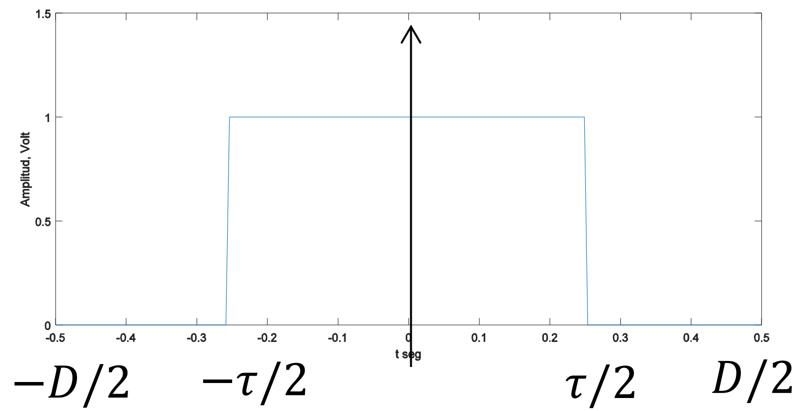
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Expresión de la potencia recibida

Para vincular la probabilidad de error y la relación señal ruido, se plantea primeramente el calculo de la potencia asociada a la secuencia transmitida.

Suponiendo que $T = ND$ es un periodo lo suficientemente grande para una secuencia de valores transmitida en espacios de tiempo D, tal que $N \gg 1$, y que se transmiten pulsos rectangulares de la forma:

$$p(t) = \begin{cases} 1 \ \ si \ |t| < \tau/2 \\ 0 \ si|t| > \tau/2 \end{cases}$$



$$\tau \leq D$$

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Expresión de la potencia recibida

Si se hace uso del formato NRZ, $\tau = T_b = D$

$$S_R = P_0(a_0)^2 \frac{1}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} p^2(t)dt + P_1(a_1)^2 \frac{1}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} p^2(t)dt$$

$$S_R = P_0(a_0)^2 + P_1(a_1)^2$$

$$S_R = \frac{1}{2}(A)^2 + \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{A^2}{2}, \text{ Unipolar NRZ}$$

$$S_R = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}, \text{ Polar NRZ}$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Relación señal ruido

Entonces

$$A = \sqrt{2S_R}\,, \quad \text{Unipolar NRZ}$$

$$A = \sqrt{4S_R}\,, \text{Polar NRZ}$$

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_R} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{S}{N}\right)_R & \text{Unipolar NRZ} \\ \left(\frac{S}{N}\right)_R & \text{Polar NRZ} \end{cases}$$

$$N_R = \eta B \geq \frac{1}{2}\eta r_b$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Filtro adaptado

El filtro pasabajos que se encuentra a la entrada del receptor tiene por objeto limitar el ruido entrante al sistema. Como se ha explicado, el filtrado excesivo podría provocar ISI, por lo que existirá un compromiso entre el filtrado de ruido y la interferencia que este provoca.

Si los pulsos son limitados en el tiempo, y el ruido presente es blanco y Gaussiano, el filtro de características optimas en términos de ruido e ISI es el filtro adaptado.

El filtro adaptado maximiza la relación señal-ruido, siendo esta en realidad, la relación que existe entre el valor muestreado en el instante óptimo y la potencia de ruido que ingresa a través del filtro.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Filtro Adaptado a la detección de pulsos

En el caso analizado, el pulso entrante tiene forma conocida $p(t)$:

$$x_R(t) = A_R\, p(t - t_0)$$

Con una cierta demora o desfasaje temporal t_0.

Su transformada de Fourier es:

$$X_R(f) = A_R P(f) e^{-j\omega t_0}$$

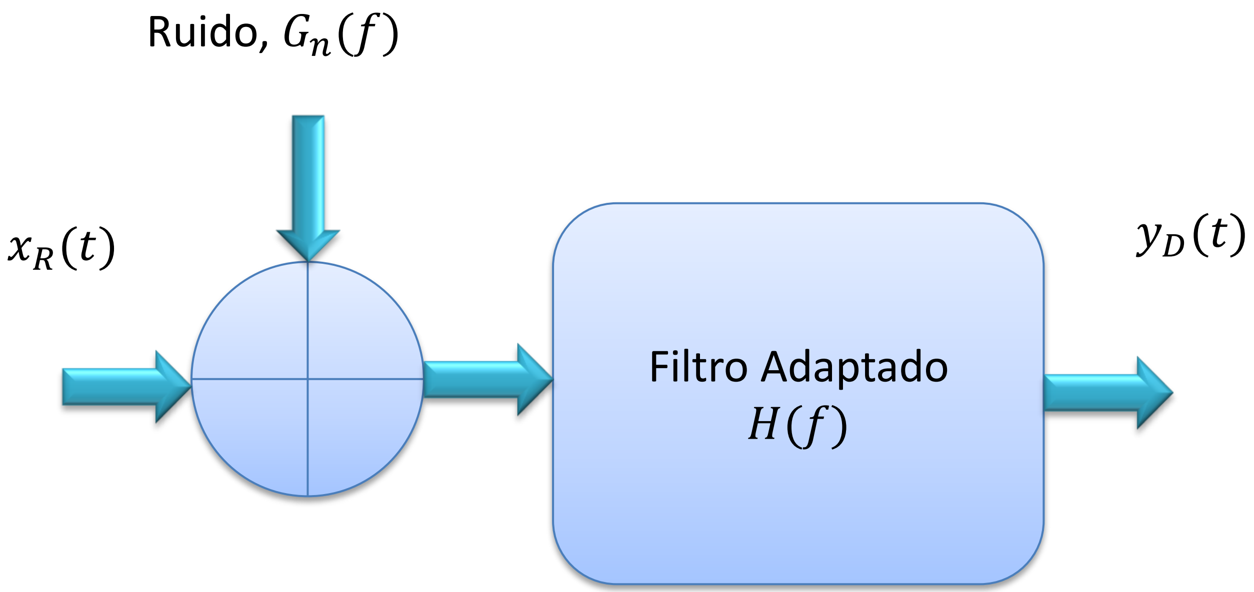
Señal cuya energía es:

$$E_R = {A_R}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Filtro Adaptado a la detección de pulsos

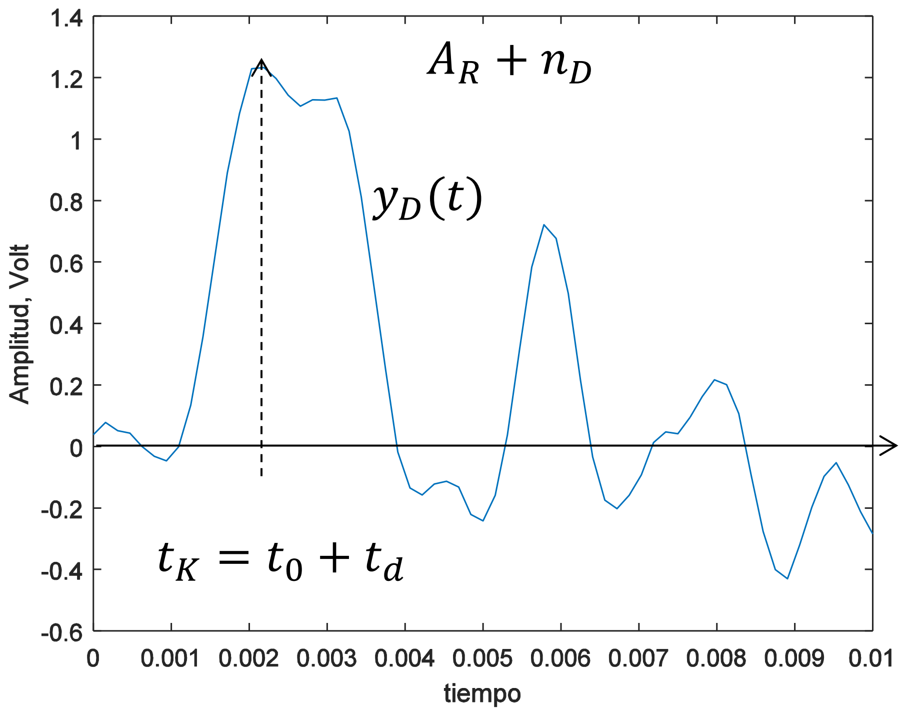
El pulso recibido, que es deforma arbitraria, ingresa al receptor, donde se encuentra el filtro adaptado, en presencia de ruido de densidad espectral $G_n(f)$:



NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Filtro Adaptado a la detección de pulsos

El pulso recibido va a ser muestreado en un instante de tiempo óptimo para maximizar la amplitud recibida en comparación con la amplitud de ruido que ingresa al receptor. Ese es el objetivo del filtro adaptado, maximizar A respecto al ruido entrante.



NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Filtro Adaptado a la detección de pulsos

Si se aplica el filtro adaptado, la relación señal-ruido adopta su valor máximo de la forma:

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2_{max} = {A_R}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{G_n(f)} df$$

Si el ruido es blanco, la distribución de componentes espectrales es plana:

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2_{max} = \frac{2{A_R}^2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_R}{\eta}$$

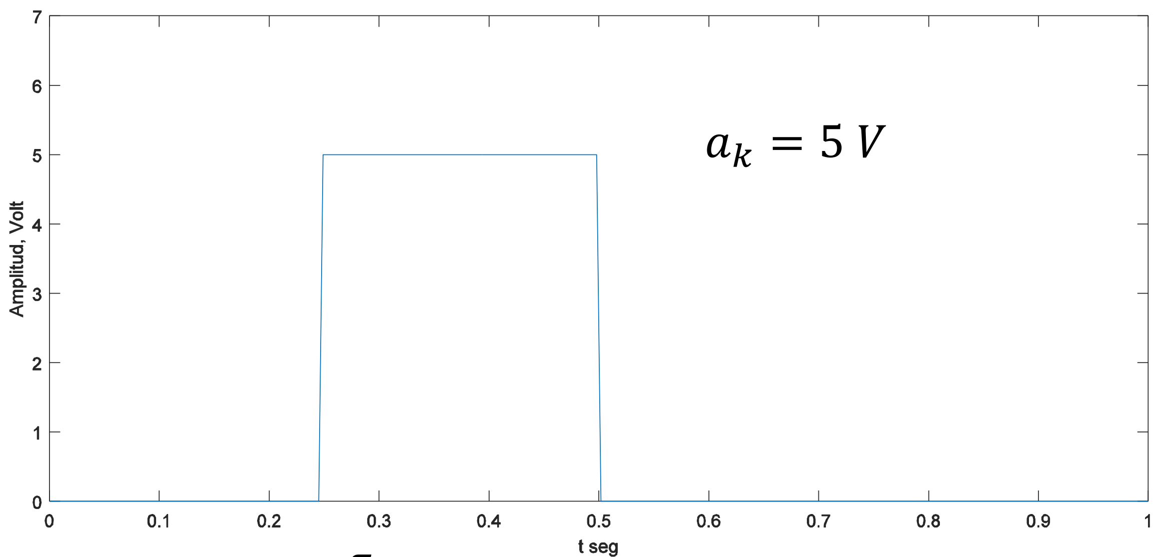
La relación señal-ruido $A/(2\sigma)$, argumento de la función $Q(k)$ que determina la tasa de error, depende de la energía del pulso con respecto la densidad espectral de potencia del ruido.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Filtro Adaptado a pulso de forma rectangular

Si la señal de entrada es un pulso rectangular de duración τ, limitada en el tiempo, y centrado en $(t - kD)$:

$$x(t) = a_k p(t - kD)$$



$$kD - \frac{\tau}{2} \qquad kD \qquad kD + \frac{\tau}{2}$$

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Parámetros de la transmisión digital binaria

En general la potencia de ruido entrante tiene su mínimo si se usa el filtro adaptado, y es mayor a esa cantidad en el caso de cualquier otro filtro:

$$N_R \geq \frac{\eta}{2\tau_{eq}}$$

Recordando la expresión para S_R,haciendo $D = T_b$:

$$S_R = P_0 \frac{1}{T_b} \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_0)^2 p^2(t) dt + P_1 \frac{1}{T_b} \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_1)^2 p^2(t) dt$$

$$S_R = \frac{1}{T_b} \left[P_0 \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_0)^2 p^2(t) dt + P_1 \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_1)^2 p^2(t) dt \right]$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Parámetros de la transmisión digital binaria

$$S_R = \frac{1}{T_b}\left[P_0 \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_0)^2 p^2(t)dt + P_1 \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_1)^2 p^2(t)dt \right]$$

$$S_R = \frac{1}{T_b}\left[\, P_0 E_0 + P_1 E_1\right] = r_b E_b$$

Con $E_b = P_0\, E_0 + P_1 E_1$

$$E_0 = \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_0)^2 p^2(t)dt; \qquad E_1 = \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} (a_1)^2 p^2(t)dt$$

La energía promedio por bit E_b es un promedio estadístico delas energías de las señales correspondientes a los datos ‘0’ y ‘1’.

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Parámetros de la transmisión digital binaria

$$S_R = r_b E_b$$

$$E_b = \frac{S_R}{r_b}$$

Definimos la relación:

$$\gamma_b = \frac{E_b}{\eta} = \frac{S_R}{\eta r_b}$$

Que denominamos la relación de la energía por bit a la densidad espectral de potencia de ruido. Como E_b es energía medida en $Joules$, y η es una densidad espectral de potencia medida en $\frac{Watts}{Hz} = \frac{Joules}{seg} seg$, entonces γ_b es una cantidad adimensional, un número que conceptualmente equivale a relación señal-ruido.

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Parámetros de la transmisión digital binaria

$$E_b = P_0 E_0 + P_1 E_1 = E\left[{a_k}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t - kD)dt\right]$$

$$E_b = E\left[{a_k}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t)dt\right] = \overline{{a_k}^2}\tau_{eq}$$

$$\overline{{a_k}^2} = \begin{cases} E[{a_k}^2] = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}0^2 = \frac{A^2}{2} \quad U \\ E[{a_k}^2] = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} \quad P \end{cases}$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Parámetros de la transmisión digital binaria

Si se considera aplicado en el receptor un filtro adaptado, la potencia de ruido es $N_R = \frac{\eta}{2\tau_{eq}}$, entonces:

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \begin{cases} \frac{2\overline{a_k{}^2}}{4\sigma^2} = \frac{2E_b 2\tau_{eq}}{4\tau_{eq}\eta} = \frac{E_b}{\eta} = \gamma_b \quad U \\ \frac{4\overline{a_k{}^2}}{4\sigma^2} = \frac{4E_b 2\tau_{eq}}{4\tau_{eq}\eta} = \frac{2E_b}{\eta} = 2\gamma_b \quad P \end{cases}$$

La probabilidad binaria de error para cada formato es función de el factor $A/(2\sigma)$,para cada formato entonces:

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\gamma_b}\right) \quad U \\ Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right) \quad P \end{cases}$$

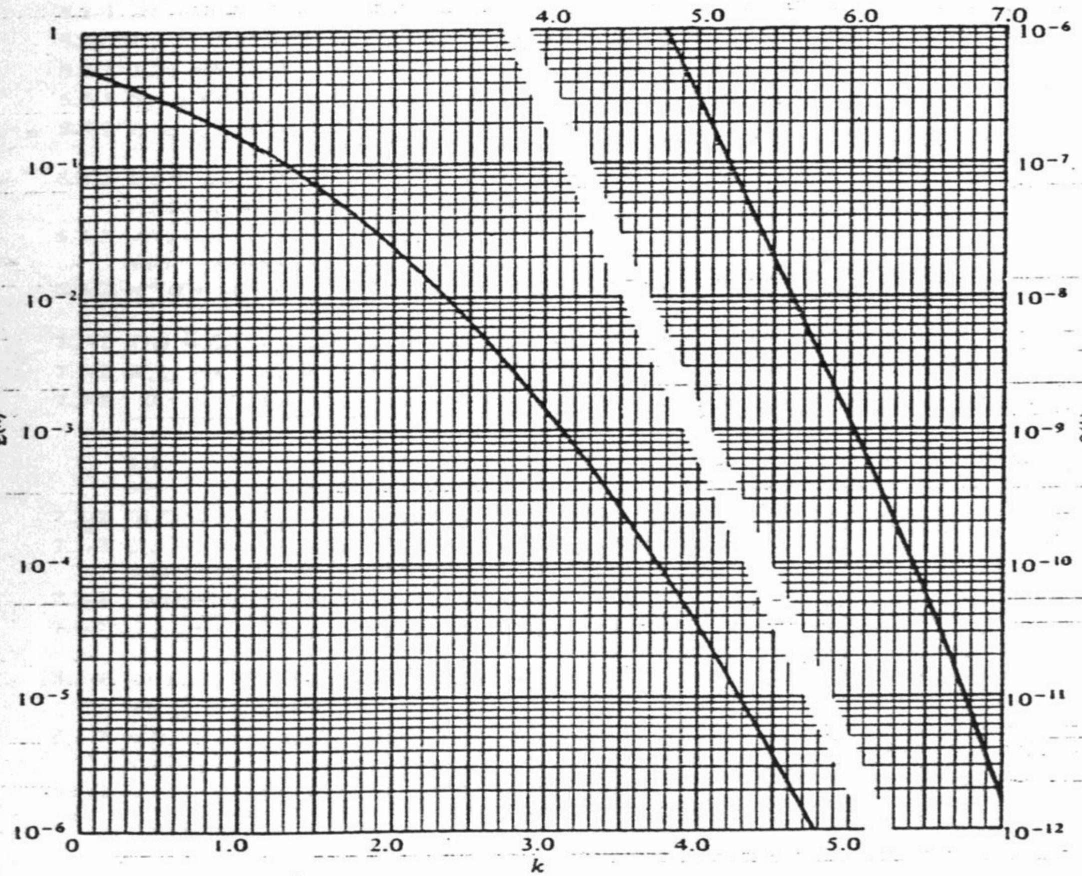
NEON Network of Competence on Internet of Things

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad binaria de error

$$Q(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,k} e^{-k^2/2}$$

which is quite accurate for $k > 3$.



NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad de Error M-aria

La señalización binaria provee la mayor aislación contra el ruido debido a que todo el rango dinámico de tensiones es utilizado solo por dos niveles. El empleo de la señalización M-aria o multinivel, tiene por objeto aumentar la velocidad de señalización manteniendo el ancho de banda constante, pero dicho objetivo es logrado a expensas de la performance de error, o bien para conservar la misma probabilidad de error, a expensas de mayor potencia.

Se calculará la probabilidad de error en presencia de ruido blanco y Gaussiano, de valor medio cero y potencia de ruido σ^2.

Se empleará señalización polar, para simplificar algunos cálculos:

$$a_k = \pm A/2, \pm 3\,A/2, \pm \cdots \pm (M-1)A/2$$

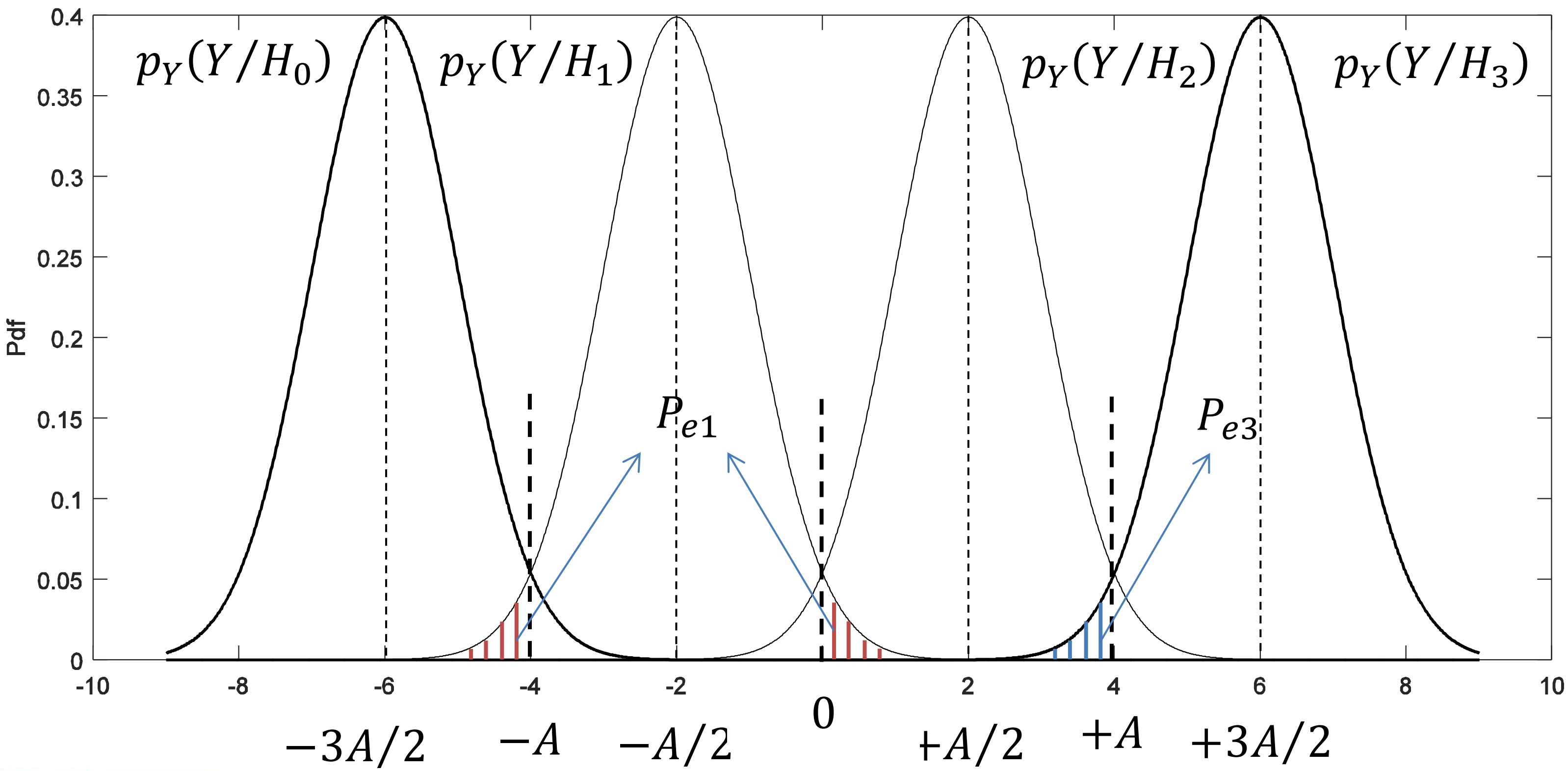
NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad de Error M-aria

Si todos los símbolos del alfabeto de valores son equiprobables:

$$P_e = \frac{1}{M}(P_{e0} + P_{e1} + \cdots P_{eM-1})$$

El esquema de funciones densidad de probabilidad para una señal M-aria de por ejemplo 4 niveles se presenta en la figura



NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad de Error M-aria

Los umbrales de decisión se determinan suponiendo que todos los valores son igualmente probables de forma que se encuentran ubicados en el punto medio de los valores medios de cada función densidad de probabilidad. Los umbrales se encuentran en $-A$, 0 y A .

Los símbolos no tienen la misma probabilidad de error. Para los símbolos de los extremos izquierdo y derecho:

$$P_{e0} = P_{e3} = Q(A/2\sigma)$$

Mientras que para los símbolos de la zona media:

$$P_{e1} = P_{e2} = 2Q(A/2\sigma)$$

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad de Error M-aria

$$P_e = \frac{1}{4}[2Q(A/2\sigma) + 2x2Q(A/2\sigma)] = \frac{3}{2}Q(A/2\sigma)$$

Extendiendo este resultado a una señal de M valores posibles, siendo $M = 2^n$, con umbrales de decisión ubicados en $y = 0, \pm A, \pm 2A, \dots, \pm\left[\frac{M-2}{2}\right]A$:

$$P_e = \frac{1}{M}[2Q(A/2\sigma) + 2x(M-2)Q(A/2\sigma)]$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q(A/2\sigma)$$

La expresión coincide con la de la probabilidad binaria si $M = 2$.

NEON Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad de Error M-aria

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \leq \frac{6S_R\, log_2(M)}{(M^2-1)\eta r_b} = \frac{6\, log_2(M)}{(M^2-1)}\frac{S_R}{\eta r_b} = \frac{6\, log_2(M)}{(M^2-1)}\gamma_b$$

La relación $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2$ queda así expresada en función de γ_b. Obsérvese que la cantidad:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{6\, log_2(M)}{(M^2-1)} = 0$$

Es decir el cociente $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2$ se degrada fuertemente al crecer M.

Cuando se utiliza el filtro adaptado se obtiene el valor maximizado de $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2$.

NEON
Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Probabilidad de Error M-aria

Las expresiones derivadas para la probabilidad de error P_e de una señalización M-aria pueden ser relacionadas con la probabilidad de error binaria P_{be} correspondiente.

Este calculo de la probabilidad de error depende de la forma en que se establece la correspondencia entre los símbolos M-arios y la información binaria.

Network of Competence on Internet of Things
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union