Ruido en Sistemas de Comunicación

Fundamentos de Sistemas de Comunicación

Facultad de Ingeniería y Tecnología

23 de junio de 2022

Universidad Católica del Uruguay

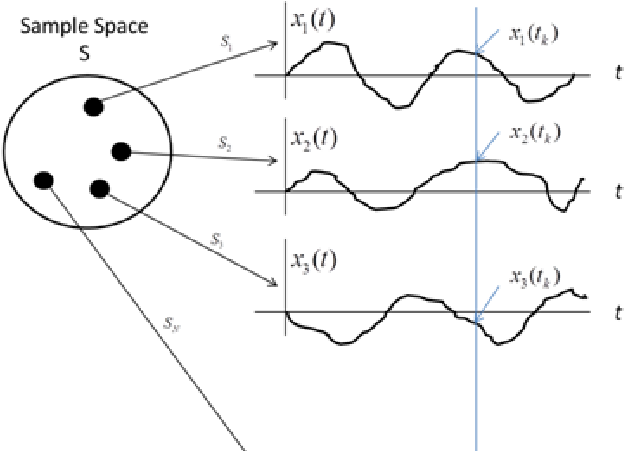
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Contenido

.

Definición de proceso estocástico (p.e.)

$v(t)$ es un p.e. si una es *señal* y en cada tiempo t su valor es una *variable aleatoria*.



Sean $v(t)$ un p.e. y g una función cualquiera, se definen:

Promedio temporal:

$$< g(v(t)) > \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(v(t))dt$$

Sean $v(t)$ un p.e. y g una función cualquiera, se definen:

Promedio temporal:

$$< g(v(t)) > \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(v(t)) dt$$

Valor esperado/promedio muestral:

$$E[g(v(t))] = \overline{g(v(t))} \triangleq \int_{\omega \in \Omega} g(v(t)) d\omega$$

Sean $v(t)$ un p.e. y g una función cualquiera, se definen:

Promedio temporal:

$$< g(v(t)) > \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(v(t)) dt$$

Valor esperado/promedio muestral:

$$E[g(v(t))] = \overline{g(v(t))} \triangleq \int_{\omega \in \Omega} g(v(t)) d\omega$$

Sea $v(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$ con $\phi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$

Calcular $E(v(t))$, $< v(t) >$, $E(v^2(t))$ y $< v^2(t) >$, $< E(v^2(t)) >$.

Sean $v(t)$ un p.e. y g una función cualquiera, se definen:

Promedio temporal:

$$< g(v(t)) > \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(v(t))dt$$

Valor esperado/promedio muestral:

$$E[g(v(t))] = \overline{g(v(t))} \triangleq \int_{\omega\in\Omega} g(v(t))d\omega$$

Sea $v(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$ con $\phi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$

Calcular $E(v(t))$, $< v(t) >$, $E(v^2(t))$ y $< v^2(t) >$, $< E(v^2(t)) >$.

A $\sigma_v^2 = E(v^2(t)) - [E(v(t))]^2$ se le denomina **varianza** del proceso.

- Si $E[.]$ y $< . >$ son intercambiables $\forall g$, se dice que v es **ergódico**.

- Si $E[.]$ y $< . >$ son intercambiables $\forall g$, se dice que v es **ergódico**.
- Si $E[g(v(t_1)] = E[g(v(t_2)]$, $\forall g$, t_1, t_2, se dice que v es **estrictamente estacionario**.

- Si $E[.]$ y $< . >$ son intercambiables $\forall g$, se dice que v es **ergódico**.
- Si $E[g(v(t_1)] = E[g(v(t_2)]$, $\forall g,\ t_1,\ t_2$, se dice que v es **estrictamente estacionario**.
- Si $E[v(t)] =$ constante y $E[v(t_1).v(t_2)] = R(t_2 - t_1)$, se dice que v es **estacionario en sentido amplio (WSS)**.

- Si $E[.]$ y $< . >$ son intercambiables $\forall g$, se dice que v es **ergódico**.
- Si $E[g(v(t_1)] = E[g(v(t_2)], \forall g,\ t_1,\ t_2$, se dice que v es **estrictamente estacionario**.
- Si $E[v(t)] =$ constante y $E[v(t_1).v(t_2)] = R(t_2 - t_1)$, se dice que v es **estacionario en sentido amplio (WSS)**.

Notar que...

ergódico $\subset$ estacionario $\subset$ WSS

En WSS las correlaciones entre dos puntos del proceso dependen solo de la distancia temporal.

- Si $E[.]$ y $< . >$ son intercambiables $\forall g$, se dice que v es **ergódico**.

- Si $E[g(v(t_1)] = E[g(v(t_2)], \forall g,\ t_1,\ t_2$, se dice que v es **estrictamente estacionario**.

- Si $E[v(t)] =$ constante y $E[v(t_1).v(t_2)] = R(t_2 - t_1)$, se dice que v es **estacionario en sentido amplio (WSS)**.

Notar que...

ergódico $\subset$ estacionario $\subset$ WSS

En WSS las correlaciones entre dos puntos del proceso dependen solo de la distancia temporal.

- Si $E[.]$ y $< . >$ son intercambiables $\forall g$, se dice que v es **ergódico**.
- Si $E[g(v(t_1)] = E[g(v(t_2)]$, $\forall g,\ t_1,\ t_2$, se dice que v es **estrictamente estacionario**.
- Si $E[v(t)] =$ constante y $E[v(t_1).v(t_2)] = R(t_2 - t_1)$, se dice que v es **estacionario en sentido amplio (WSS)**.

Para el proceso anterior, determinar:

¿es WSS? ¿es estrictamente estacionario? ¿es ergódico? ¿Qué pasa si $\phi \sim U[0, 2\pi]$?

Definición:

$$P_v \triangleq < E[v^2(t)] >$$

Definición:

$$P_v \triangleq < E[v^2(t)] >$$

Si v es estacionario, $P_v = E[v^2(t)]$ (no depende del tiempo) y si además es ergódico:

$$P_v = < v^2 >$$

Definición:

$$P_v \triangleq < E[v^2(t)] >$$

Si v es estacionario, $P_v = E[v^2(t)]$ (no depende del tiempo) y si además es ergódico:

$$P_v = < v^2 >$$

Nomenclatura

P es para potencia en general, S será la potencia cuando refiere a señales de interés y N la potencia cuando refiere a ruido.

Función de autocorrelación:

$$R_v(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1).v(t_2)]$$

Función de correlación cruzada:

$$R_{vw}(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1).w(t_2)]$$

Función de autocorrelación:

$$R_v(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1).v(t_2)]$$

Función de correlación cruzada:

$$R_{vw}(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1).w(t_2)]$$

Caso WSS:

$$R_v(t_1, t_2) = R_v(t_2 - t_1) = R_v(\tau)$$

$$R_{vw}(t_1, t_2) = R_{vw}(t_2 - t_1) = R_{vw}(\tau)$$

Función de autocorrelación:

$$R_v(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1).v(t_2)]$$

Función de correlación cruzada:

$$R_{vw}(t_1, t_2) \triangleq E[v(t_1).w(t_2)]$$

Caso WSS:

$$R_v(t_1, t_2) = R_v(t_2 - t_1) = R_v(\tau)$$

$$R_{vw}(t_1, t_2) = R_{vw}(t_2 - t_1) = R_{vw}(\tau)$$

Sea $v(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$ con $\phi \sim U[0, 2\pi]$

Calcular $R_v(\tau)$. ¿Qué representa $R_v(0)$?

densidad espectral de potencia (PSD) (1/4)

Utilizando el teorema de Parseval, para una señal determinística tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[v(t)]|^2 df$$

Por lo que $H_v(f) = |\mathcal{F}[v(t)]|^2$ puede considerarse una **densidad espectral de energia** E_v (es decir, energía por unidad de frecuencia: J/Hz).

¿Qué pasa cuando la señal es de P finita (E infinita)?

Existe una igualdad equivalente a Parseval.

Sea la transf. de Fourier enventanada:

$$V_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$< |v(t)|^2 >= P_v = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |V_T(f)|^2 df$$

Por lo que $G_v(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |V_T(f)|^2$ puede considerarse una densidad espectral de potencia (es decir, potencia por unidad de frecuencia: W/Hz).

En analogía, se puede definir para un p.e.:

$$G_v(f) \triangleq lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[|V_T(f)|^2]$$

Que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)df = P_v$ cuando $G_v(f)$ está bien definida.

Notar que la diferencia con el caso determinístico está en que $V_T(f)$ no es una señal, si no un p.e., y por tanto debe tomarse su valor esperado.

En analogía, se puede definir para un p.e.:

$$G_v(f) \triangleq lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[|V_T(f)|^2]$$

Que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)df = P_v$ cuando $G_v(f)$ está bien definida.

Notar que la diferencia con el caso determinístico está en que $V_T(f)$ no es una señal, si no un p.e., y por tanto debe tomarse su valor esperado.

Sea $v(t) = A\cos(2\pi f_c t + \phi)$ con $\phi \sim U[0, 2\pi]$

Calcular $G_v(f)$ sin hacer cuentas.

En analogía, se puede definir para un p.e.:

$$G_v(f) \triangleq lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[|V_T(f)|^2]$$

Que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)df = P_v$ cuando $G_v(f)$ está bien definida.

Notar que la diferencia con el caso determinístico está en que $V_T(f)$ no es una señal, si no un p.e., y por tanto debe tomarse su valor esperado.

Sea $v(t) = A\cos(2\pi f_c t + \phi)$ con $\phi \sim U[0, 2\pi]$

Calcular $G_v(f)$ sin hacer cuentas. ¿Qué pasa si A es una v.a. en lugar de ϕ? ¿Qué pasa si f_C es v.a.? ¿Qué pasa si intentan hacer las cuentas?

Para procesos WSS:

$$G_v(f) = \mathcal{F}[R_v(\tau)]$$

Teorema de Wiener-Kinchine

Sea $v(t) = A\cos(2\pi f_c t + \phi)$ con $\phi \sim U[0, 2\pi]$

Calcular $G_v(f)$ a partir de $R_v(\tau)$

Para procesos WSS:

$$G_v(f) = \mathcal{F}[R_v(\tau)]$$

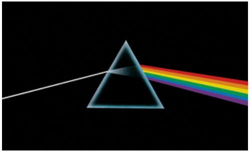
Teorema de Wiener-Kinchine

Sea $v(t) = A\cos(2\pi f_c t + \phi)$ con $\phi \sim U[0, 2\pi]$

Calcular $G_v(f)$ a partir de $R_v(\tau)$

Corolario:
Sea un p.e. WSS $\eta(t)$ filtrado mediante un sistema LTI de transferencia $H(f)$ y la salida es un p.e. $\varepsilon(t)$. Entonces:

$$G_\varepsilon(f) = |H(f)|^2 G_\eta(f)$$

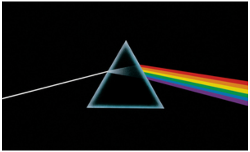


Ruido blanco: definición

Decimos que un p.e. $\eta(t)$ es blanco si:

$$G_\eta(f) \triangleq \frac{N_0}{2}, \forall f$$

Es decir, todas las frecuencias contribuyen igualmente a la potencia del proceso.



Corolario: (por Wiener-Kinchine)

$$R_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

El proceso en dos tiempos distintos es independiente.

De la definición anterior:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty$$

¿Cómo es posible?

De la definición anterior:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty$$

¿Cómo es posible?

En la práctica los procesos blancos van a estar limitados a ancho de banda finitos B_N, de manera que la potencia del proceso es finita

$$N = N_0 B_N$$

De la definición anterior:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty$$

¿Cómo es posible?

En la práctica los procesos blancos van a estar limitados a ancho de banda finitos B_N, de manera que la potencia del proceso es finita

$$N = N_0 B_N$$

Temperatura de ruido: otra forma de expresar potencia

Se define como la temperatura de un conductor que tendría el mismo nivel de ruido térmico:

$$T \triangleq \frac{N}{2B_N k_B}$$

con $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$.

Ruido coloreado: definición

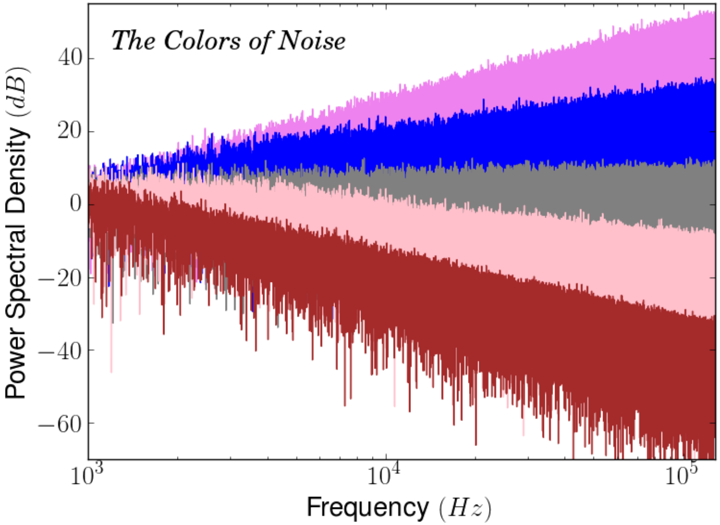
Decimos que un p.e. $\varepsilon(t)$ es coloreado si corresponde al filtrado mediante filtro LTI $H(f)$ de un p.e. $\eta(t)$ blanco:

$$G_\varepsilon(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

Ejemplos:

- Ruido rosado: $G_\varepsilon(f) \sim \frac{1}{f}$
- Ruido marrón/rojo: $G_\varepsilon(f) \sim \frac{1}{f^2}$

Ruido coloreado



Fuente: Wikipedia, usuario Mwchalmers.

Sea $v(t)$ un p.e., decimos que es un **proceso gaussiano** si:

$$(v(t_i), v(t_j)) \sim \mathcal{N}_2(\mu_{ij}, \Sigma_{ij}), \; \forall t_i, \; t_j$$

Esto implica:

$$v(t_i) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i), \; \forall t_i$$

Con $\mathcal{N}(m, s)$ la distribución normal (gaussiana) con media m y desviación estándar s:

$$\mathcal{N}(m, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

Sea $v(t)$ un p.e., decimos que es un **proceso gaussiano** si:

$$(v(t_i), v(t_j)) \sim \mathcal{N}_2(\mu_{ij}, \Sigma_{ij}), \; \forall t_i, \; t_j$$

Esto implica:

$$v(t_i) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i), \; \forall t_i$$

Con $\mathcal{N}(m, s)$ la distribución normal (gaussiana) con media m y desviación estándar s:

$$\mathcal{N}(m, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

Propiedades:

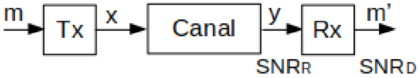
- p.e. gaussiano: WSS $\Leftrightarrow$ ergódico
- dos p.e. gaussianos: no correlacionados $\Leftrightarrow$ independientes
- p.e. gaussiano filtrado LTI = otro p.e. gaussiano
- combinación lineal de p.e. gaussianos = p.e. gaussiano

1. Procesos estocásticos
   - Modelos de ruido

2. Modelado de canales de comunicación
   - Modelos de canal

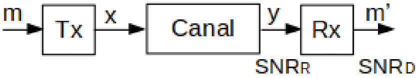
Los canales afectan las señales transmitidas, de manera que la señal en Rx es distinta de la señal en Tx:

- Atenuación (ganancia)
- Distorsión lineal: $H(f)$
- Distorsión no lineal
- Adición de ruido



Los canales afectan las señales transmitidas, de manera que la señal en Rx es distinta de la señal en Tx:

- Atenuación (ganancia)
- Distorsión lineal: $H(f)$
- Distorsión no lineal
- Adición de ruido



Relación señal a ruido (SNR):

$$\text{SNR} \triangleq \frac{\text{potencia de la señal}}{\text{potencia del ruido}} = \frac{S}{N}$$

Debemos distinguir entre SNR en recepción (SNR_R), es decir a la salida del canal (entrada al receptor), y en detección (SNR_D), es decir luego de realizada la detección/demodulación.

Potencia (relativa) en dB

$$[P]_{dB} \triangleq 10 log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right), \;\; P_0 = \text{ potencia de referencia arbitraria}$$

$$[P]_{dB} \triangleq 10log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right), \;\; P_0 = \text{ potencia de referencia arbitraria}$$

Una referencia comúnmente usada es $P_0 = 1mW$. Entonces:

$$[1mW]_{dBm} = 0dBm$$

$$[2mW]_{dBm} = 3dBm$$

$$[0{,}5mW]_{dBm} = -3dBm$$

SNR:

$$\mathrm{SNR}_{dB} = S_{dB} - N_{dB}$$

SNR:

$$\mathrm{SNR}_{dB} = S_{dB} - N_{dB}$$

Atenuación en un canal sin distorsión:

$$[P_y]_{dB} = [P_x]_{dB} - L_{dB}$$

SNR:

$$\mathrm{SNR}_{dB} = S_{dB} - N_{dB}$$

Atenuación en un canal sin distorsión:

$$[P_y]_{dB} = [P_x]_{dB} - L_{dB}$$

Amplificación con ganancia 2 (en potencia):

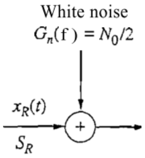
$$(2S)_{dB} = S_{dB} + 10log(2) = S_{db} + 3dB$$

Ganancias, atenuaciones, y potencias relativas se relacionan aditivamente, para cualquier P_0.

Ejercicio:

Sea un canal de comunicación con $30dB$ de pérdidas. Por el mismo se transmite una señal de potencia $S_T = 1W$. ¿Cuál es la potencia de la señal en recepción?

AWGN: **A**dditive **W**hite **G**aussian **N**oise.



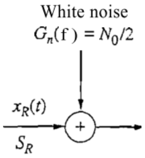
Se asume también ruido independiente de la señal.

¿Cómo se relaciona la potencia de la señal observada con la potencia del ruido?

Modelo de ruido: AWGN

AWGN: Additive **W**hite **G**aussian **N**oise.

Se asume también ruido independiente de la señal.



¿Cómo se relaciona la potencia de la señal observada con la potencia del ruido?

$$P_y =< E[y^2] >=< E[(x_R + \eta)^2] >=< E[x_R^2] + 2E[x_R.\eta] + E[\eta^2] >$$

$$=< E[x_R^2] > +2 < E[x_R]E[\eta] > + < E[\eta^2] >= S_R + 0 + N = S_R + N_R$$

Nota 1: $E(\eta) = 0$, ¿por qué?
Nota 2: S no es observable, pero bajo aditividad N y P_y sí lo son, y se cumple:
$\frac{P_y}{N} = SNR + 1$
Nota 3: ninguna de las relaciones derivadas aquí requiere gaussianidad.

Ejercicio

Sea un canal de comunicación con $30dB$ de pérdidas. Por el mismo se transmite una señal de potencia $S_T = 1W$. Si el sistema se encuentra afectado por ruido blanco con $N_0 = 6 \times 10^{-8} W/Hz$ y ancho de banda $1MHz$, ¿cuál es la potencia de la señal observada en recepción? ¿cuál sera la SNR de la señal en recepción?

Se considera ahora utilizar un amplificador en recepción para mejorar la señal. Si el amplificador tiene una ganancia de $10dB$, ¿cuál es la nueva potencia de la señal total observada? ¿cuál es la nueva SDR?