Ruido en Sistemas de Comunicación Analógicos

Fundamentos de Sistemas de Comunicación

Facultad de Ingeniería y Tecnología

30 de junio de 2022

Universidad Católica del Uruguay

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Contenido

Modelo base/ideal para sistemas de comunicación:
canal sin distorsión con AWGN.

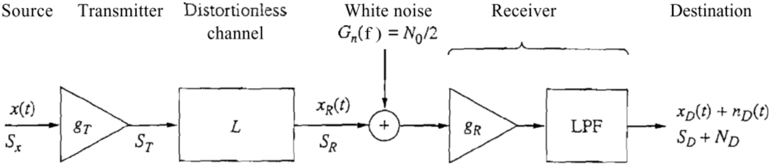


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

Ruido en banda base (1/2)

Modelo base/ideal para sistemas de comunicación:
canal sin distorsión con AWGN.

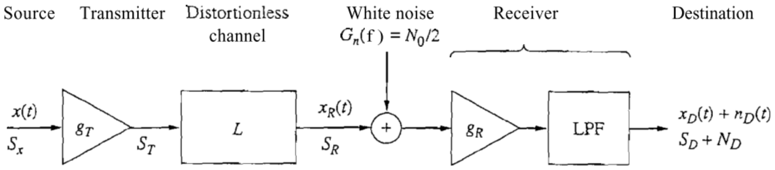


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

Comunicación banda base: no hay modulación.
Tanto el Tx como el Rx se reducen a amplificación y filtrado de la banda de interés.

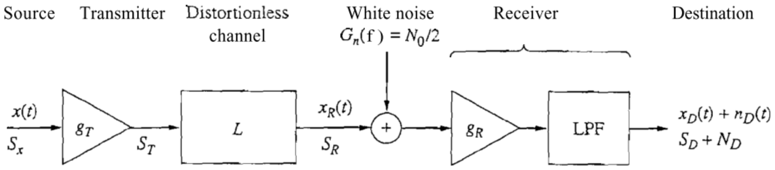


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

Asumimos que $x(t)$ tiene ancho de banda W y que $B_N > W$

Ruido en banda base (2/2)

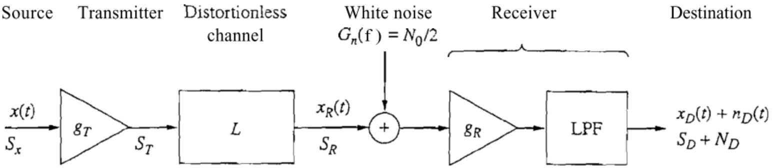


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

$$\mathrm{SNR}_R = \frac{S_T}{L N_0 B_N}$$

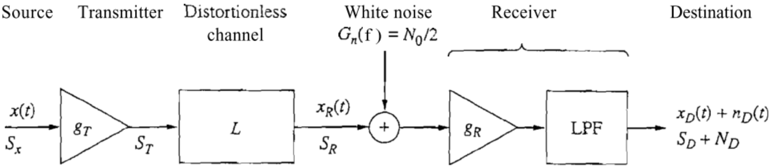


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

$$\mathrm{SNR}_R = \frac{S_T}{LN_0 B_N}, \quad \mathrm{SNR}_D = \frac{S_T}{LN_0 W}$$

Ruido en banda base (2/2)

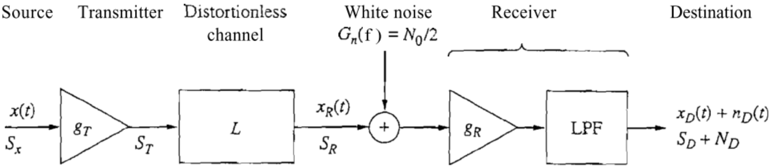


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

$$\mathrm{SNR}_R = \frac{S_T}{LN_0 B_N}, \quad \mathrm{SNR}_D = \frac{S_T}{LN_0 W} \triangleq \gamma$$

Ruido en banda base (2/2)

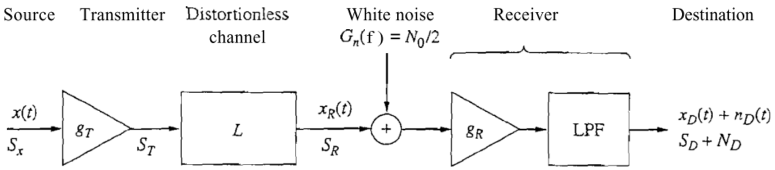
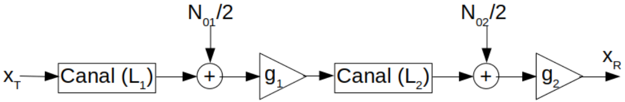


Figure 9.4–2 Analog baseband transmission system with noise.

Communication Systems, Carlson, Crilly, and Rutledge. 4th ed.

Esto es caso ideal, por lo que γ es cota superior de SNR en caso real.

Consideremos un canal de comunicación sin distorsión y con AWGN, pero dividido en dos tramos:



A la salida de cada tramo, se coloca un amplificador analógico.

¿Cómo cambia la SNR debido al amplificador?

Considerar el caso genérico y el caso especial con tramos y amplificadores idénticos $L_1 = L_2 = g_1 = G_2$ y $N_{01} = N_{02}$. Simplificar la expresión obtenida asumiendo atenuación considerable ($L_i >> 1$) en cada tramo.

Repetidores analógicos (cuentas)

$$\mathrm{SNR}_R^{con} = \mathrm{SNR}_R^{sin} \frac{L_i + 1}{2} \approx \mathrm{SNR}_R^{sin} \frac{L_i^2}{2L_i} = \mathrm{SNR}_R^{sin} \frac{L}{2L_i}$$

Considere un canal de comunicación como el anterior, pero dividido en m tramos. El tramo i tiene atenuación L_i, un amplificador g_i, y una fuente de ruido con densidad espectral $\frac{N_{0i}}{2}$. Probar que si definimos $L = \prod_{i=1}^{m} L_i$ y $N_0 = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{m} N_{0i} \prod_{i=1}^{j} L_i$

$$\mathrm{SNR}_R^{sin} = \frac{S_T}{N_0 L B_N}$$

Si además asumimos tramos idénticos $L_i = g_i = L_1$, $N_{0i} = N_{01}$, $\forall i$, mostrar que:

$$\mathrm{SNR}_R^{con} = \frac{S_T}{B_N N_0 m L_i} \frac{1 - (\frac{1}{L_i})^{m+1}}{1 - \frac{1}{L_i}}$$

Si cada tramo atenúa la señal considerablemente, concluir que:

$$\mathrm{SNR}_R^{con} \approx \mathrm{SNR}_R^{sin} \frac{L}{m L_i}$$

Table 9.4–1 Typical transmission requirements for selected analog signals

Signal Type	Frequency Range	Signal-to-Noise Ratio, dB
Barely intelligible voice	500 Hz to 2 kHz	5–10
Telephone-quality voice	200 Hz to 3.2 KHz	25–35
AM broadcast quality audio	100 Hz to 5 kHz	40–50
High-fidelity audio	20 Hz to 20 kHz	55–65
Video	60 Hz to 4.2 MHz	45–55

Figura 1: SNR necesaria según aplicación. Figura 9.4-1, *Communication Systems*, 4th ed.

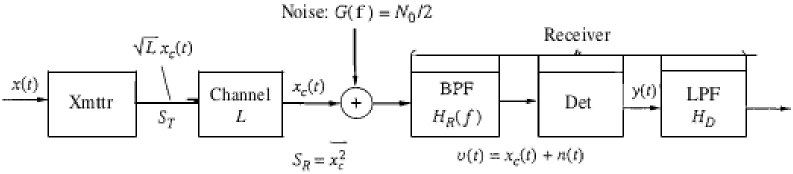


Figure 10.1–1 Model of a CW communication system with noise

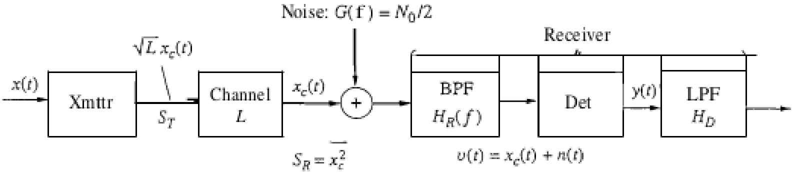


Figure 10.1–1 Model of a CW communication system with noise

- SNR_R: relación señal a ruido después del filtro BPF de Rx.
- SNR_D: relación señal a ruido después de todo procesamiento.

Sea $y(t)$ un p.e. en banda base con ancho de banda W. Sea $z = y.cos(wt + \phi)$. Entonces:

$$< z^2 >= \frac{< y^2 >}{2}$$

Esto vale para ϕ cualquiera mientras sea independiente de $y(t)$, pero requiere $w > W$.

Sea $y(t)$ un p.e. en banda base con ancho de banda W. Sea $z = y.cos(wt + \phi)$. Entonces:

$$< z^2 >= \frac{< y^2 >}{2}$$

Esto vale para ϕ cualquiera mientras sea independiente de $y(t)$, pero requiere $w > W$.

Ejercicio

Demostrar lo anterior.

Representación de ruido AWGN en fase y cuadratura

Consideremos ruido $\eta(t)$ pasabanda, en banda de ancho B_T.
Entonces tiene descomp. fase/cuadratura:

$$\eta(t) = \eta_i(t)cos(w_c t) - \eta_q(t)sin(w_c t)$$

Donde $\eta_i(t)$ y $\eta_q(t)$ son procesos **reales** en banda base.

Representación de ruido AWGN en fase y cuadratura

Consideremos ruido $\eta(t)$ pasabanda, en banda de ancho B_T.
Entonces tiene descomp. fase/cuadratura:

$$\eta(t) = \eta_i(t)cos(w_c t) - \eta_q(t)sin(w_c t)$$

Donde $\eta_i(t)$ y $\eta_q(t)$ son procesos **reales** en banda base.

¿Qué propiedades tienen $\eta_i(t)$ y $\eta_q(t)$? ¿Son blancos, gaussianos? ¿Cuál es su ancho de banda?

Representación de ruido AWGN en fase y cuadratura

Consideremos ruido $\eta(t)$ pasabanda, en banda de ancho B_T.
Entonces tiene descomp. fase/cuadratura:

$$\eta(t) = \eta_i(t) cos(w_c t) - \eta_q(t) sin(w_c t)$$

Donde $\eta_i(t)$ y $\eta_q(t)$ son procesos **reales** en banda base.

¿Qué propiedades tienen $\eta_i(t)$ y $\eta_q(t)$? ¿Son blancos, gaussianos? ¿Cuál es su ancho de banda?

Si $\eta(t)$ es AWGN:

- η_i y η_q son gaussianos
- η_i y η_q no necesariamente blancos
- $E(\eta_i^2) = E(\eta_q^2) = E(\eta^2) = N_R = N_0.B_T$

PSD de ruido AWGN pasabanda: separación de casos

La PSD de η_i, η_q depende de la elección ω_c en la banda.

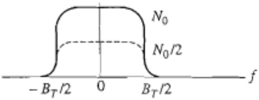
Casos especiales:

PSD de ruido AWGN pasabanda: separación de casos

La PSD de η_i, η_q depende de la elección ω_c en la banda.

Casos especiales:

1. w_c en centro de banda (ej. DSB): blancos, con $G_{\eta_i} = N_0$ y ancho $\frac{B_T}{2}$



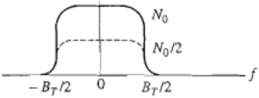
(b)

PSD de ruido AWGN pasabanda: separación de casos

La PSD de η_i, η_q depende de la elección ω_c en la banda.

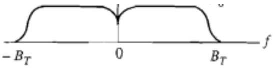
Casos especiales:

1. w_c en centro de banda (ej. DSB): blancos, con $G_{\eta_i} = N_0$ y ancho $\frac{B_T}{2}$



(b)

2. w_c en extremo de banda (ej. SSB): blancos, con $G_{\eta_i} = \frac{N_0}{2}$, ancho B_T



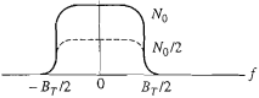
(c)

PSD de ruido AWGN pasabanda: separación de casos

La PSD de η_i, η_q depende de la elección ω_c en la banda.

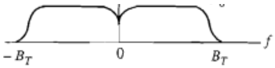
Casos especiales:

1. w_c en centro de banda (ej. DSB): blancos, con $G_{\eta_i} = N_0$ y ancho $\frac{B_T}{2}$



(b)

2. w_c en extremo de banda (ej. SSB): blancos, con $G_{\eta_i} = \frac{N_0}{2}$, ancho B_T



(c)

En ambos casos cada componente es blanca y la potencia de c/u es la mitad del total.

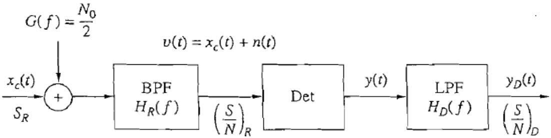


Figura 2: Figura 10.2-1, *Communication Systems*, 4th Ed.

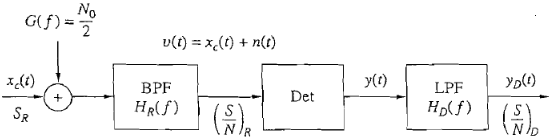


Figura 2: Figura 10.2-1, *Communication Systems*, 4th Ed.

$$N_R = 2N_0W$$
$$SNR_R = \frac{S_R}{2N_0W}$$

Ruido en sist. de modulación lineal: DSB

$$N_R = 2N_0 W$$
$$SNR_R = \frac{S_R}{2N_0 W}$$

$$v(t) = x_R(t) + \eta(t) = (A_c x(t) + \eta_i(t))cos(w_c t) - \eta_q(t)sin(w_c t)$$

Asumiendo un **detector** ideal (p. ej. sincrónico con sincronización perfecta):

$$y_D(t) = k(A_c x(t) + \eta_i(t))$$

$$N_R = 2N_0W$$
$$SNR_R = \frac{S_R}{2N_0W}$$

$$v(t) = x_R(t) + \eta(t) = (A_c x(t) + \eta_i(t))cos(w_c t) - \eta_q(t)sin(w_c t)$$

Asumiendo un **detector** ideal (p. ej. sincrónico con sincronización perfecta):

$$y_D(t) = k(A_c x(t) + \eta_i(t))$$

$$S_D = 2k^2 S_R$$
$$N_D = 2k^2 N_0 W$$
$$SNR_D = \frac{2k^2 S_R}{2k^2 N_0 W} = \frac{S_R}{N_0 W} = \gamma$$

DSB tiene performance equivalente a banda base.

Ejercicio

Calcule cuánto se degrada la SNR de un sistema de comunicación que utiliza DSB como técnica de modulación si se utiliza un detector producto en Rx, y el oscilador tiene un desfasaje ϕ_0 respecto de la portadora recibida.

Como DSB, pero **se 'desperdicia' potencia en la portadora:**

Como DSB, pero **se 'desperdicia' potencia en la portadora:**

$$v(t) = x_R(t) + \eta(t) = (A_c(1 + \mu x(t)) + \eta_i(t)) cos(w_c t) - \eta_q(t) sin(w_c t)$$

$$x_R(t) = A_c(1 + \mu x(t)) cos(w_c t)$$

$$y_D(t) = k(A_c \mu x(t) + \eta_i(t))$$

Como DSB, pero **se 'desperdicia' potencia en la portadora:**

$$v(t) = x_R(t) + \eta(t) = (A_c(1+\mu x(t)) + \eta_i(t))cos(w_c t) - \eta_q(t)sin(w_c t)$$

$$x_R(t) = A_c(1 + \mu x(t))cos(w_c t)$$

$$y_D(t) = k(A_c \mu x(t) + \eta_i(t))$$

$$S_D = 2k^2 S_R \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x}, \; N_D = N_0 W$$

$$SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \gamma$$

Ruido en sist. de modulación lineal: AM

Como DSB, pero **se 'desperdicia' potencia en la portadora:**

$$v(t) = x_R(t)+\eta(t) = (A_c(1+\mu x(t))+\eta_i(t))cos(w_c t)-\eta_q(t)sin(w_c t)$$

$$x_R(t) = A_c(1+\mu x(t))cos(w_c t)$$

$$y_D(t) = k(A_c \mu x(t) + \eta_i(t))$$

$$S_D = 2k^2 S_R \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x},\ N_D = N_0 W$$

$$SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\gamma$$

Siempre ocurre que $S_x \leq 1$ y si utilizamos modulación que funcione con detector de envolventes $\mu \leq 1$. Entonces:

$$SNR_D \leq \frac{\gamma}{2}$$

Como DSB, pero **se 'desperdicia' potencia en la portadora:**

$$v(t) = x_R(t)+\eta(t) = (A_c(1+\mu x(t))+\eta_i(t))cos(w_c t)-\eta_q(t)sin(w_c t)$$

$$x_R(t) = A_c(1+\mu x(t))cos(w_c t)$$

$$y_D(t) = k(A_c \mu x(t) + \eta_i(t))$$

$$S_D = 2k^2 S_R \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}, \; N_D = N_0 W$$

$$SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\gamma$$

Siempre ocurre que $S_x \leq 1$ y si utilizamos modulación que funcione con detector de envolventes $\mu \leq 1$. Entonces:

$$SNR_D \leq \frac{\gamma}{2}$$

Más generalmente $S_x \approx 1/2$:

$$SNR_D \leq \frac{\gamma}{3}$$

SSB:

SSB:

- $SNR_R = \frac{S_R}{N_0 W}$
- $\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D$

SSB:

- $SNR_R = \frac{S_R}{N_0 W}$
- $\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D$

$$\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D = \gamma$$

SSB obtiene la misma SNR que DSB!

SSB:

- $SNR_R = \frac{S_R}{N_0 W}$
- $\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D$

$$\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D = \gamma$$

SSB obtiene la misma SNR que DSB!

$$\mathrm{SNR}_D^{VSB} \approx \mathrm{SNR}_D^{SSB}$$

Ruido en sist. de modulación lineal: SSB y VSB

SSB:

- $SNR_R = \frac{S_R}{N_0 W}$
- $\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D$

$$\mathrm{SNR}_R = \mathrm{SNR}_D = \gamma$$

SSB obtiene la misma SNR que DSB!

$$\mathrm{SNR}_D^{VSB} \approx \mathrm{SNR}_D^{SSB}$$

Conclusión: Todos los sistemas de modulación lineal tienen performance equivalente, a menos de la potencia utilizada para la portadora (p. ej. AM y VSB+C).

Representación fasorial del ruido

$$\eta(t) = A_\eta(t) cos(w_c t + \phi(t))$$

Donde $A(t) = \sqrt{\eta_i^2 + \eta_q^2}$ y $\phi = atan\left(\frac{\eta_q}{\eta_i}\right)$.

$$\eta(t) = A_\eta(t)cos(w_c t + \phi(t))$$

Donde $A(t) = \sqrt{\eta_i^2 + \eta_q^2}$ y $\phi = atan\left(\frac{\eta_q}{\eta_i}\right)$.

¿Qué propiedades tienen $A(t)$ y $\phi(t)$? ¿Son blancos, gaussianos? ¿Cuál es su ancho de banda?

$$\eta(t) = A_\eta(t) cos(w_c t + \phi(t))$$

Donde $A(t) = \sqrt{\eta_i^2 + \eta_q^2}$ y $\phi = atan\left(\frac{\eta_q}{\eta_i}\right)$.

¿Qué propiedades tienen $A(t)$ y $\phi(t)$? ¿Son blancos, gaussianos? ¿Cuál es su ancho de banda?

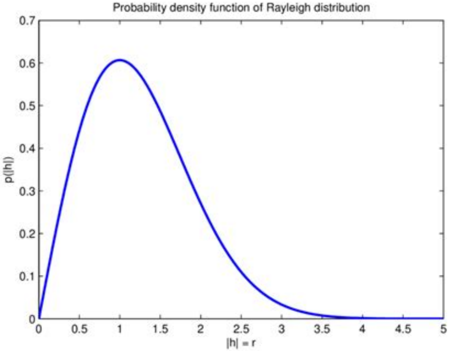
Si η AWGN:

- A es un proceso con distribución de Rayleigh con potencia $2N_R$ y no es blanco
- ϕ tiene distribución uniforme en $[0, 2\pi]$ y tampoco es necesariamente blanco

Surge naturalmente cuando se define una variable aleatoria:

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Con x_1 y x_2 gaussianas de igual varianza y media 0.



¿Qué pasa si utilizamos un detector de envolvente para AM?

¿Qué pasa si utilizamos un detector de envolvente para AM?

Detectamos amplitud:

$$A(t) = \sqrt{[x_D + \eta_i]^2 + \eta_q^2}$$

Ruido en AM con det. de envolvente

¿Qué pasa si utilizamos un detector de envolvente para AM?

Detectamos amplitud:

$$A(t) = \sqrt{[x_D + \eta_i]^2 + \eta_q^2}$$

Con ruido en cuadratura pequeño: (Taylor primer orden)

$$y_D(t) = A(t) \approx |x_D(t) + \eta_i(t)| + |\eta_q| \frac{|\eta_q|}{|x_D(t) + \eta_i(t)|}$$

Si $\eta_q^2 << x_D^2$ (implica $N_R << S_R$):

$$A(t) \approx x_D(t) + \eta_i(t)$$

$$SND_D \approx \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \gamma$$

¿Qué pasa si utilizamos un detector de envolvente para AM?

Detectamos amplitud:

$$A(t) = \sqrt{[x_D + \eta_i]^2 + \eta_q^2}$$

Con ruido en cuadratura pequeño: (Taylor primer orden)

$$y_D(t) = A(t) \approx |x_D(t) + \eta_i(t)| + |\eta_q| \frac{|\eta_q|}{|x_D(t) + \eta_i(t)|}$$

Si $\eta_q^2 << x_D^2$ (implica $N_R << S_R$):

$$A(t) \approx x_D(t) + \eta_i(t)$$

$$SND_D \approx \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \gamma$$

¡Misma performance que detector sincrónico!

¿Qué pasa si utilizamos un detector de envolvente para AM?

Detectamos amplitud:

$$A(t) = \sqrt{[x_D + \eta_i]^2 + \eta_q^2}$$

Con ruido en cuadratura pequeño: (Taylor primer orden)

$$y_D(t) = A(t) \approx |x_D(t) + \eta_i(t)| + |\eta_q| \frac{|\eta_q|}{|x_D(t) + \eta_i(t)|}$$

Si $\eta_q^2 << x_D^2$ (implica $N_R << S_R$):

$$A(t) \approx x_D(t) + \eta_i(t)$$

$$SND_D \approx \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \gamma$$

¡Misma performance que detector sincrónico!

...pero degrada cuadráticamente con η_q

¿Qué pasa si no podemos despreciar η_q^2?

Usando $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{1+x}$, $\forall x$

(no requiere x pequeño, a diferencia de Taylor):

$$A(t) = \sqrt{[x_D + \eta_i]^2 + \eta_q^2} \approx |x_D + \eta_i| + |\eta_q| \frac{\frac{|\eta_q|}{|x_D+\eta_i|}}{1 + \frac{|\eta_q|}{|x_D+\eta_i|}}$$

Que muestra que la señal degrada supra-linealmente hasta que $|\eta_q| >> |x_D + \eta_i|$ (**mutilación** de la señal).

Efecto umbral

Valor **límite** de la SNR_R, por debajo del cual la SNR_D se degrada mucho más que SNR_R en recepción.

Convención: umbral AM: $SNR_R^{umbral} = 10$

Demodulación AM mediante detección de envolvente: resumen

- Si $\mathrm{SNR}_R > 10$ (por encima de umbral):
  la detección de envolvente funciona de forma equivalente a un detector sincrónico.

- Si $\mathrm{SNR}_R < 10$ (por debajo de umbral):
  la señal recuperada se degrada supra-linealmente.

  Por ejemplo, una pérdida de $5dB$ en SNR_R causa una pérdida significativamente mayor a $5dB$ en SNR_D.

Demodulación AM mediante detección de envolvente: resumen

- Si $\mathrm{SNR}_R > 10$ (por encima de umbral):
  la detección de envolvente funciona de forma equivalente a un detector sincrónico.

- Si $\mathrm{SNR}_R < 10$ (por debajo de umbral):
  la señal recuperada se degrada supra-linealmente.

  Por ejemplo, una pérdida de $5dB$ en SNR_R causa una pérdida significativamente mayor a $5dB$ en SNR_D.

Los detectores de envolvente solo deben utilizarse por encima del umbral

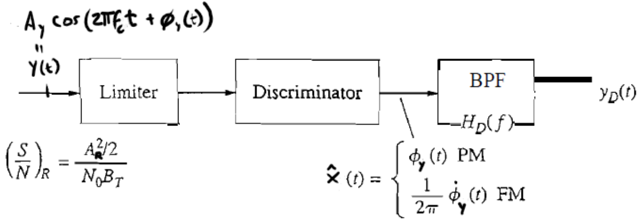
Ejercicio (no entregable)

En GNU Radio, implementen un modulador AM y demodulador de envolvente (usando bloques disponibles). Estudiar cómo se degrada la relación señal a ruido con un detector de envolvente. Graficar SNR_D vs. SNR_R.

Sugerencia: estimar la SNR mediante el cociente entre el máximo de la correlación cruzada del mensaje original y el mensaje decodificado, sobre la potencia de la señal decodificada:

$$\mathrm{SNR} \approx \frac{R_{\hat{y}}(0) R_x(0)}{(\max[R_{x.\hat{y}}(\tau)])^2} - 1$$

Representación fasorial señal + ruido



Definimos:

$$y(t) = x_R(t) + \eta(t) = A_y(t)cos(w_c t + \phi_y(t)) \;\; (\text{SNR}_R = \frac{S_T}{LN_0 B_T} = \gamma \frac{W}{B_T})$$

Tanto en PM como en FM, la señal está contenida en la fase. Un detector ideal extrae ϕ_y, donde (expresión exacta):

$$\phi_y(t) = \phi(t) + \text{atan}\left(\frac{A_n(t)\sin(\psi(t))}{A_R + A_n(t)\cos(\psi(t))}\right)$$

Donde $\psi(t) = \phi(t) - \phi_n(t)$

De lo anterior:

$$\phi_y(t) = \phi(t) + \text{atan}\left(\frac{A_n(t)\sin(\psi(t))}{A_R + A_n(t)\cos(\psi(t))}\right)$$

Buscamos expresar ϕ_y como señal + ruido.

De lo anterior:

$$\phi_y(t) = \phi(t) + \text{atan}\left(\frac{A_n(t)\sin(\psi(t))}{A_R + A_n(t)\cos(\psi(t))}\right)$$

Buscamos expresar ϕ_y como señal + ruido.

En el caso $A_R >> A_n, \forall t$ (que implica $S_R >> N_R$), el segundo término se simplifica y tenemos:

$$\phi_y(t) = \phi(t) + \frac{A_n}{A_R} sin(\phi(t) - \phi_n(t)) = \phi(t) + \frac{\eta_q}{A_R}$$

Recordar que η_q es WGN con $G_\eta(f) = N_0$ y $B_N = W/2$, y consecuentemente $N_{\eta_q} = N_0 W$.

Esto implica para PM:

$$S_D = \phi_\Delta^2 S_x$$

$$N_D = \frac{N_0 W}{S_R}$$

$$\mathrm{SNR}_D^{PM} = \frac{\phi_\Delta^2 S_x S_R}{N_0 W} = \phi_\Delta^2 S_x \gamma$$

Para FM todavía tenemos que tomar la derivada de la fase:

$$\dot{\phi}_v \approx \dot{\phi} + \frac{\dot{\eta}_D}{A_c}$$

Pero si η_D tiene $G_{\eta_D}(f) = N_0$, su derivada tiene:

$$G_{\dot{\eta}_D}(f) = N_0(2\pi)^2 f^2$$

Para FM todavía tenemos que tomar la derivada de la fase:

$$\dot{\phi}_v \approx \dot{\phi} + \frac{\dot{\eta}_D}{A_c}$$

Pero si η_D tiene $G_{\eta_D}(f) = N_0$, su derivada tiene:

$$G_{\dot{\eta}_D}(f) = N_0(2\pi)^2 f^2$$

Y por lo tanto su potencia post-LPF es:

$$N_D = \frac{E(\dot{\eta}^2)}{(2\pi)^2} = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W} f^2 df = \frac{2N_0W^3}{3A_c^2} = \frac{N_0W}{S_R}\frac{W^2}{3}$$

Para FM todavía tenemos que tomar la derivada de la fase:

$$\dot{\phi}_v \approx \dot{\phi} + \frac{\dot{\eta}_D}{A_c}$$

Pero si η_D tiene $G_{\eta_D}(f) = N_0$, su derivada tiene:

$$G_{\dot{\eta}_D}(f) = N_0(2\pi)^2 f^2$$

Y por lo tanto su potencia post-LPF es:

$$N_D = \frac{E(\dot{\eta}^2)}{(2\pi)^2} = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W} f^2 df = \frac{2N_0 W^3}{3A_c^2} = \frac{N_0 W}{S_R}\frac{W^2}{3}$$

De donde:

$$\mathrm{SNR}_D^{FM} = \frac{3f_\Delta^2 S_x}{W^2}\gamma = 3D^2 S_x \gamma$$

Usando $B_T \approx 2(D+2)W$

$$\mathrm{SNR}_R^{FM} = \frac{S_T}{LN_0 B_T} = 2\gamma(D+2)$$

De lo anterior:

$$\mathrm{SNR}_D^{FM} = \frac{3f_\Delta^2 S_x}{W^2}\gamma = 3D^2 S_x \gamma$$

Esto implica que **SNR_D crece con D, pero B_T también crece con D.**

De lo anterior:

$$\text{SNR}_D^{FM} = \frac{3f_\Delta^2 S_x}{W^2}\gamma = 3D^2 S_x \gamma$$

Esto implica que **SNR_D crece con D, pero B_T también crece con D.**

Este es un ejemplo de un principio general en sistemas de comunicación:

trade-off entre ancho de banda de transmisión y SNR

A mayor ancho de banda utilizado, mayor es la SNR que podemos lograr en detección sobre el mismo canal con AWGN.

Esto requiere modular de forma inteligente.

La relación entre D, B_T y SNR_D puede verse claramente en el caso $D >> 1$ (wideband FM):

Ejemplo: cuantificación del trade-off en WBFM

La relación entre D, B_T y SNR_D puede verse claramente en el caso $D >> 1$ (wideband FM):

$$B_T \approx 2(D+1)W \approx 2DW$$

Ejemplo: cuantificación del trade-off en WBFM

La relación entre D, B_T y SNR_D puede verse claramente en el caso $D >> 1$ (wideband FM):

$$B_T \approx 2(D+1)W \approx 2DW$$

Por lo tanto:

$$\text{SNR}_D^{WBFM} = \frac{3B_T^2}{4W^2} S_x \gamma$$

Esto deja explícito el trade-off mencionado anteriormente.

En lo anterior vimos que:

$$\dot{\phi}_v \approx \dot{\phi} + \frac{\dot{\eta}_D}{A_c}$$

$$G_{\dot{\eta}_D}(f) = N_0(2\pi)^2 f^2$$

Esto es, el ruido en detección de FM se concentra en altas frecuencias en lugar de dividirse uniformemente en el espectro.

¿Podemos utilizar este conocimiento para mejorar la performance del sistema?

En lo anterior vimos que:

$$\dot{\phi}_v \approx \dot{\phi} + \frac{\dot{\eta}_D}{A_c}$$

$$G_{\dot{\eta}_D}(f) = N_0(2\pi)^2 f^2$$

Esto es, el ruido en detección de FM se concentra en altas frecuencias en lugar de dividirse uniformemente en el espectro.

¿Podemos utilizar este conocimiento para mejorar la performance del sistema?

Idea: Utilizar un LPF ($H(f)$) para atenuar las porciones del espectro con peor SNR (de-énfasis de altas frecuencias).

Énfasis y de-énfasis: motivación

En lo anterior vimos que:

$$\dot{\phi}_v \approx \dot{\phi} + \frac{\dot{\eta}_D}{A_c}$$

$$G_{\dot{\eta}_D}(f) = N_0(2\pi)^2 f^2$$

Esto es, el ruido en detección de FM se concentra en altas frecuencias en lugar de dividirse uniformemente en el espectro.

¿Podemos utilizar este conocimiento para mejorar la performance del sistema?

Idea: Utilizar un LPF ($H(f)$) para atenuar las porciones del espectro con peor SNR (de-énfasis de altas frecuencias).

Esto también atenúa porciones de la señal (distorsión) lineal: se compensa con un pre-énfasis (amplificación) de las mismas componentes en transmisión ($H^{-1}(f)$).

En detección usamos un LPF de primer orden luego de la detección de fase:

$$H_{de}(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B_{de}}}$$

La PSD del ruido queda entonces:

$$G_{\dot{\eta}_{de}}(f) = N_0(2\pi)^2 \frac{f^2}{1 + \frac{f^2}{B_{de}^2}}$$

PSD de ruido con de-énfasis:

En detección usamos un LPF de primer orden luego de la detección de fase:

$$H_{de}(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B_{de}}}$$

La PSD del ruido queda entonces:

$$G_{\dot{\eta}_{de}}(f) = N_0(2\pi)^2 \frac{f^2}{1 + \frac{f^2}{B_{de}^2}}$$

Si elegimos $B_{de} << W$, en las frecuencias relevantes:

$$G_{\dot{\eta}_{de}}(f) \approx N_0(2\pi)^2 B_{de}^2$$

¡Aproximadamente ruido blanco!

SNR de sistema FM con pre- y de-énfasis

En un sistema con pre- y de-énfasis, la señal detectada es la misma que en el caso sin ambos:

$$S_D = f_\Delta^2 S_x$$

Por lo anterior:

$$N_{de} = \frac{N_0 B_{de}^2 W}{S_R}$$

De donde:

$$\mathrm{SNR}_D^{\text{FM con de}} = \frac{W^2}{B_{de}^2} D^2 S_x \gamma$$

SNR de sistema FM con pre- y de-énfasis

En un sistema con pre- y de-énfasis, la señal detectada es la misma que en el caso sin ambos:

$$S_D = f_\Delta^2 S_x$$

Por lo anterior:

$$N_{de} = \frac{N_0 B_{de}^2 W}{S_R}$$

De donde:

$$\mathrm{SNR}_D^{\text{FM con de}} = \frac{W^2}{B_{de}^2} D^2 S_x \gamma$$

Comparar con resultado previo:

$$\mathrm{SNR}_D^{\text{FM sin de}} = 3 D^2 S_x \gamma$$

SNR de sistema FM con pre- y de-énfasis

En un sistema con pre- y de-énfasis, la señal detectada es la misma que en el caso sin ambos:

$$S_D = f_\Delta^2 S_x$$

Por lo anterior:

$$N_{de} = \frac{N_0 B_{de}^2 W}{S_R}$$

De donde:

$$\mathrm{SNR}_D^{\mathrm{FM\ con\ de}} = \frac{W^2}{B_{de}^2} D^2 S_x \gamma$$

Comparar con resultado previo:

$$\mathrm{SNR}_D^{\mathrm{FM\ sin\ de}} = 3 D^2 S_x \gamma$$

Limitación práctica: el pre-énfasis puede llegar a aumentar el ancho de banda de la señal transmitida.

Ejercicio: cálculo de SNR en FM

Análisis con parámetros de FM comerciales:

$$f_\Delta = 75kHz$$

$$W = 15kHz$$

$$S_x = 1/2$$

$$B_{de} = 2{,}1kHz$$

Calcular SNR_D^{FM} con y sin de-énfasis. Comparar con transmisión bandabase y con AM asumiendo potencia transmitida fija.

¿Qué pasa cuando no se cumple $A_c >> A_\eta$?

¿Qué pasa cuando no se cumple $A_c >> A_\eta$? **El sistema se vuelve sensible a la fase del ruido:** performance se degrada rápidamente si $\text{SNR}_R < 10$ (umbral).

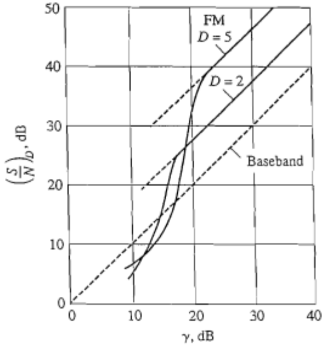


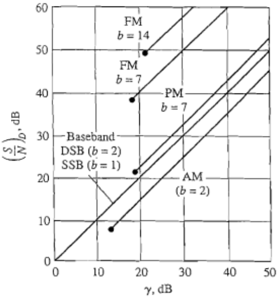
Figure 10.3-6 FM noise performance (without deemphasis)

Resumen: ruido en modulación analógica de onda continua

Table 10.4-1 Comparison of CW modulation systems

Type	$b = B_T/W$	$(S/N)_D \div \gamma$	γ_{th}	DC	Complexity	Comments
Baseband	1	1	...	No[1]	Minor	No modulation
AM	2	$\frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}$	20	No	Minor	Envelope detection $\mu \leq 1$
DSB	2	1	...	Yes	Major	Synchronous detection
SSB	1	1	...	No	Moderate	Synchronous detection
VSB	1+	1	...	Yes	Major	Synchronous detection
VSB + C	1+	$\frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}$	20	Yes[2]	Moderate	Envelope detection $\mu < 1$
PM[3]	$2M(\phi_\Delta)$	$\phi_\Delta^2 S_x$	$10b$	Yes	Moderate	Phase detection, constant amplitude $\phi_\Delta \leq \pi$
FM[3,4]	$2M(D)$	$3D^2 S_x$	$10b$	Yes	Moderate	Frequency detection, constant amplitude

[1]Unless direct coupled.
[2]With electronic dc restorotion.
[3]b ≥ 2.
[4]Deemphasis not included.



Limitación al trade-off B_T vs. SNR

¿Podemos incrementar D arbitrariamente para mejorar SNR_D con S_T constante a cambio de mayor B_T?

Limitación al trade-off B_T vs. SNR

¿Podemos incrementar D arbitrariamente para mejorar SNR$_D$ con S_T constante a cambio de mayor B_T?
No.

A medida que aumento D (y B_T), se reduce mi SNR_R y puedo caer por debajo del umbral!

Límites fundamentales en sist. de comunicación analógicos

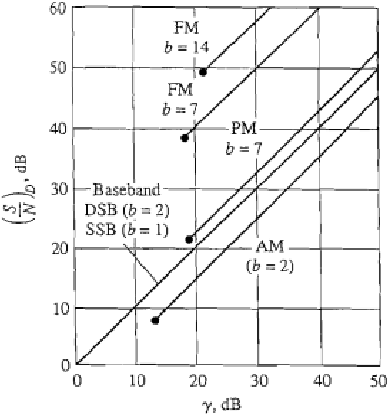


Figura 10.4-1. *Communication Systems.* 4ta ed.

Límites fundamentales en sist. de comunicación analógicos

$$\mathsf{SNR}_D \leq \left(1 + \frac{\gamma}{b}\right)^b - 1$$

Límites fundamentales en sist. de comunicación analógicos

$$\mathsf{SNR}_D \leq \left(1 + \frac{\gamma}{b}\right)^b - 1$$

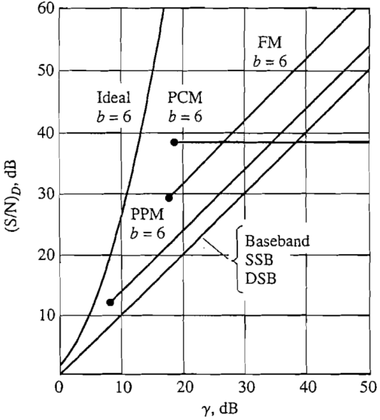


Figura 16.3-6. *Communication Systems*. 4ta ed.

Límites fundamentales en sist. de comunicación analógicos

$$\mathrm{SNR}_D \leq \left(1 + \frac{\gamma}{b}\right)^b - 1$$

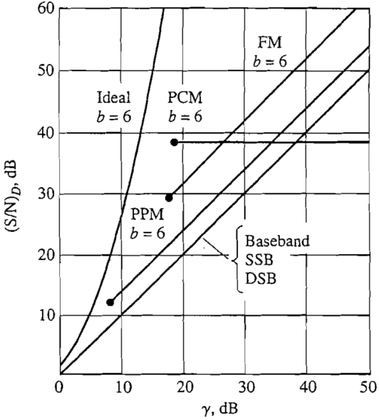


Figura 16.3-6. *Communication Systems*. 4ta ed.

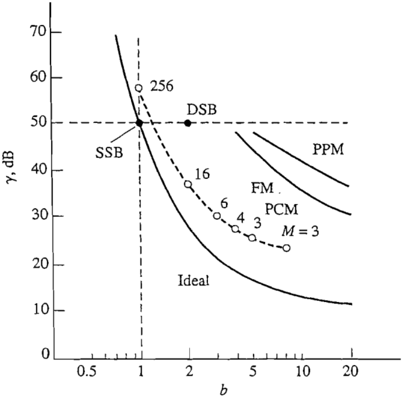


Figura 16.3-7. Trade-off B_T vs. γ para obtener $\mathrm{SNR}_D = 50dB$. *Communication Systems*. 4ta ed.

La propagación de ondas electromagnéticas en el vacío (sin absorción!) está caracterizada por:

$$L_{dB} = 92{,}4 + 20log(f_c) + 20log(d)$$

Con f_c en GHz, y d en km. Asumiendo $S_T = 50kW$, $N_0 \approx 10^{-14} W/Hz$ (indep. de la distancia) y $f_c = 100MHz$ (y todos los parámetros del ejercicio anterior), calcular:

- Distancia máxima a la que se puede hacer detección de FM.
- Distancia máxima a la que se puede hacer detección de AM mediante envolvente.