Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Espectro PAM digital

Sea:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

Deseamos calcular:

$$G_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left(\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right|^2\right)$$

Asumimos que:

- a_k son WSS con autocorrelación $R_a[n]$
- $R_a[n]$ tiene DTFT $G_a(f) = \sum_n R_a[n]e^{-j2\pi nf}$, y esta es derivable.
- $p(t)$ tiene transformada de Fourier $P(f)$

Resultado

$$G_x(f) = r|P(f)|^2 G_a(f/r)$$

Demostración 1 (la del libro, pero más explícita)

- Se asume adicionalmente que $p(t) = 0, \forall t \notin [-D/2, D/2]$ (pulso de soporte dentro del tiempo de símbolo)
  Esto puede ser razonable en transmisión, pero para cualquier transmisión de ancho de banda acotado no puede ser estrictamente cierto.

Primero, definamos la notación auxiliar:
$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
$f(T) = \frac{1}{T}E\left(|X_T(f)|^2\right)$

Entonces si el límite que define $G_x(f)$ existe, este debe coincidir con el límite de una sucesión:

$$G_x(f) = \lim_{T\to\infty} f(T) = \lim_{M\to\infty} f(T_m)$$

Para cualquier sucesión $\{T_M\}$ que satisfaga $\lim_{M\to\infty} T_m = \infty$. En esta demostración consideraremos $T_M = (2M+1)D$

Dado el soporte acotado de $p(t)$, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t-kD)$ en el intervalo $t \in [-T_M/2, T_M/2]$ se reduce a $x(t) = \sum_{k=-M}^{M} a_k p(t-kD)$. Entonces:

$$X_{T_M}(f)=\int_{-T_M/2}^{T_M/2}\sum_{k=-M}^{M}a_k p(t-kD)e^{-j2\pi ft}dt=\sum_{k=-M}^{M}a_k\int_{-(2M+1)D)/2}^{(2M+1)D/2}p(t-kD)e^{-j2\pi ft}dt$$

Donde la integral y la sumatoria pueden permutarse pues estamos considerando una suma finita. Al tener pulsos con transformada de Fourier es cierto que:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-(2M+1)D/2}^{(2M+1)D/2}p(t-kD)e^{-j2\pi ft}dt=P(f)e^{-j2\pi fkD}$$

Por tanto, como el límite anterior es finito y distinto de cero:

$$\lim_{M\to\infty}f(T_m)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)D}E\left(X_{T_M}X_{T_m}^*\right)=E\left(\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)D}X_{T_M}X_{T_m}^*\right)$$

$$=|P(f)|^2E\left(\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)D}\sum_{k=-M}^{M}a_k e^{-j2\pi fkD}\sum_{l=-M}^{M}a_l^* e^{j2\pi flD}\right)$$

$$=|P(f)|^2\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)D}\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{M}E\left(a_k a_l^* e^{-j2\pi f(k-l)D}\right)$$

$$=|P(f)|^2\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)D}\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{M}R_a[k-l]e^{-j2\pi f(k-l)D}$$

$$=|P(f)|^2\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)D}\sum_{n=-2M}^{2M}(2M+1-n)R_a[n]e^{-j2\pi fnD}$$

Donde la antepenúltima igualdad surge de permutar nuevamente el valor esperado con el límite y las sumatorias. La última surge de desarrollar la doble sumatoria, y agrupar términos en función de la diferencia $n=k-l$. Finalmente:

$$\lim_{M\to\infty}f(T_m)=|P(f)|^2\lim_{M\to\infty}\frac{1}{D}\sum_{n=-2M}^{2M}\left(1-\frac{n}{2M+1}\right)R_a[n]e^{-j2\pi fnD}$$

$$=\frac{|P(f)|^2}{D}\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{n=-2M}^{2M}R_a[n]e^{-j2\pi fnD}-\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-2M}^{2M}nR_a[n]e^{-j2\pi fnD}\right)$$

$$=\frac{|P(f)|^2}{D}G_a(fD)+\lim_{M\to\infty}\frac{G_a'(f)}{j2\pi(2M+1)}$$

$$=r|P(f)|^2G_a(f/r)$$

Donde la última igualdad utiliza la definición $r = D^{-1}$, y la anterior usa una propiedad de la DTFT de $nx[n]$ en función de la derivada de la DTFT de $x[n]$.

Nota: La demostración anterior toma una definición restrictiva de los pulsos, que están acotados en su duración al intervalo de símbolo D. Esto puede generalizarse para pulsos acotados en su duración temporal pero que no necesariamente coincide con D. La hipótesis entonces es: $p(t) = 0, \, \forall t \notin [-\tau/2, \tau/2]$. Los pasos de la demostración en este caso son esencialmente los mismos, pero se requiere un poco de cuidado para determinar una sucesión T_M apropiada y realizar las cuentas, pues ya no hay una relación uno a uno entre la T_M y los pulsos que quedan comprendidos dentro del intervalo $[-T_M/2, T_M/2]$ (algunos pulsos quedarán parcialmente comprendidos en el intervalo).

Demostración 2 (sin asumir pulsos acotados)

$$G_x(f) = \lim_{T \to \infty} f(T)$$

Donde:

$$f(T) = \frac{1}{T} E\left(|X_T(f)|^2\right)$$

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$|X_T(f)|^2 = X_T(f) X_T^*(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j2\pi ft} dt$$

$$= \sum_k \sum_l a_k a_l \int_{-T/2}^{T/2} p(t - kD) e^{-j2\pi ft} dt \int_{-T/2}^{T/2} p(t - lD) e^{j2\pi ft} dt$$

Definamos $P_T^k(f) = \int_{-T/2}^{T/2} p(t - kD) e^{-j2\pi ft} dt$ y $\bar{P}_T^k$ para su conjugada. Entonces:

$$\Rightarrow E(|X_T(f)|^2) = \sum_k \sum_l E(a_k a_l) P_T^k(f) \bar{P}^l_T(f)$$

$$= \sum_k \sum_l R_a[k-l] P_T^k(f) \bar{P}^l_T(f)$$

$$= \sum_k \sum_n R_a[n] P_T^k(f) \bar{P}_T^{k+n}(f)$$

Donde la última igualdad sale de definir $n = k - l$, y cambiar el índice de sumación de la sumatoria interna para agrupar sobre n en lugar de l.

$$= \sum_n R_a[n] \sum_k P_T^k(f) \bar{P}_T^{k+n}(f)$$

Por tanto:

$$G_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left(|X_T(f)|^2\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_n R_a[n] \sum_k P_T^k(f) \bar{P}_T^{k+n}(f)$$

$$= \sum_n R_a[n].\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k P_T^k(f) \bar{P}_T^{k+n}(f) \qquad \text{[Ec. 1]}$$

Donde el límite puede permutarse con la sumatoria exterior pues solo la sumatoria interior contiene una dependencia en T. La dificultad en evaluar la expresión anterior radica en que tenemos una sumatoria infinita de términos cuyos límites son, en principio, finitos por lo que el límite total $S_T^k(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k P_T^k(f) \bar{P}_T^{k+n}(f)$ queda indeterminado (infinito sobre infinito). Para poder evaluar $S_T^k(f)$, primero calculamos:

$$P^l(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \bar{P}_T^l(f) = \bar{P}(f) e^{j2\pi f l D}$$

Donde $P(f)$ es la transformada de Fourier de $p(t)$. Al ser este resultado finito, el límite anterior puede escribirse como:

$$S_T^k(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k P_T^k(f).\bar{P}^{k-n}(f)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k P_T^k(f).\bar{P}(f) e^{j2\pi f(k-n)D}$$

$$= \bar{P}(f) e^{-j2\pi f n D} \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k P_T^k(f) e^{j2\pi f k D}$$

Sustituyendo la definición de $P_T^k(f)$ y manipulando las expresiones:

$$= \bar{P}(f) e^{-j2\pi f n D} \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k e^{j2\pi f k D} \int_{-T/2}^{T/2} p(t-kD) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \bar{P}(f) e^{-j2\pi f n D} \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k e^{j2\pi f k D} \int_{-\infty}^{\infty} p(t-kD) \Pi(t/T) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \bar{P}(f) e^{-j2\pi f n D} \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k e^{j2\pi f k D} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \Pi\left(\frac{u+kD}{T}\right) e^{-j2\pi f(u+kD)} du$$

$$= \bar{P}(f) e^{-j2\pi f n D} \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \Pi\left(\frac{u+kD}{T}\right) e^{-j2\pi f u} du$$

$$= \bar{P}(f)e^{-j2\pi fnD}\ \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \left[\frac{1}{T}\sum_k \Pi\left(\frac{u+kD}{T}\right)\right] e^{-j2\pi fu}du$$

Donde la permutación del orden de la integral y la sumatoria es posible pues la integral, a pesar de ser impropia por sus límites, en realidad está acotada a un intervalo de largo T para cualquier k. Resta entonces evaluar el término entre paréntesis rectos:

$$h_T(u) = \left[\frac{1}{T}\sum_k \Pi\left(\frac{u+kD}{T}\right)\right]$$

Notar que este término es una suma infinita de pulsos rectangulares finitos. Para cualquier valor de u, los únicos pulsos que contribuyen a $h_T(u)$ son aquellos que corresponden a valores de $k \in \mathcal{Z}$ tales que $|u+kD| < T/2 \Rightarrow kD \in [u - T/2, u + T/2] \Rightarrow k \in [\frac{u-T/2}{D}, \frac{u+T/2}{D}]$. Al ser un intervalo real de largo T/D, la cantidad de valores de k relevantes son $\lfloor T/D \rfloor$. Por tanto, para cualquier valor de u, hay exactamente $\lfloor T/D \rfloor$ pulsos que contribuyen a $h_T(u)$ y por tanto:

$$h_T(u) = \lfloor T/D \rfloor / T$$

Es fácil ver entonces que:

$$S_T^k(f) = \bar{P}(f)e^{-j2\pi fnD}\ \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \left[\frac{1}{T}\sum_k \Pi\left(\frac{u+kD}{T}\right)\right] e^{-j2\pi fu}du$$

$$= \bar{P}(f)e^{-j2\pi fnD}\ \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \frac{\lfloor T/D \rfloor}{T} e^{-j2\pi fu}du$$

Donde la dependencia en T sale para afuera de la integral y obtenemos:

$$= \bar{P}(f)e^{-j2\pi fnD}\ \lim_{T\to\infty} \frac{\lfloor T/D \rfloor}{T} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) e^{-j2\pi fu}du$$

Evaluando el límite y tomando $P(f)$ la transformada de Fourier de $p(u)$ obtenemos el resultado parcial:

$$S_T^k(f) = \bar{P}(f)e^{-j2\pi fnD}P(f) = D^{-1}|P(f)|^2 e^{-j2\pi fnD}$$

Y sustituyendo en la ecuación 1:

$$G_x(f) = D^{-1}|P(f)|^2 \sum_n R_a[n] e^{-j2\pi fnD}$$

$$G_x(f) = D^{-1}|P(f)|^2 G_a(n)$$