Modulación Lineal de Onda Continua

Fundamentos de Sistemas de Comunicación

Facultad de Ingeniería y Tecnología

14 de abril de 2021

Universidad Católica del Uruguay

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modular es modificar una señal a transmitir (*la portadora*) para incluir el mensaje que desea comunicarse (*la señal moduladora*).

¿Por qué no transmitir el mensaje directamente? ¿Para qué modular?

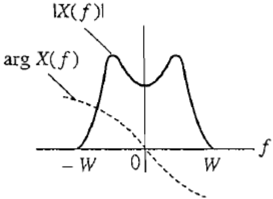
Modular es modificar una señal a transmitir (*la portadora*) para incluir el mensaje que desea comunicarse (*la señal moduladora*).

¿Por qué no transmitir el mensaje directamente? ¿Para qué modular?

- Utilizar distintas regiones del espectro: asignar frecuencias, compartir el espectro, reducir interferencia.
- Mejorar la eficiencia energética o espectral de la comunicación.
- Superar limitaciones de hardware/medio físico.

Convenciones que adoptaremos para las señales en el curso:

- $|x(t)| \leq 1$
- Ancho de banda bien definido
- Señal bandabase: espectro contenido en $[-W, W]$



Espectro de una señal bandabase genérica. Figura 4.1-1, *Communication Systems*, 4th ed.

Señal pasabanda:

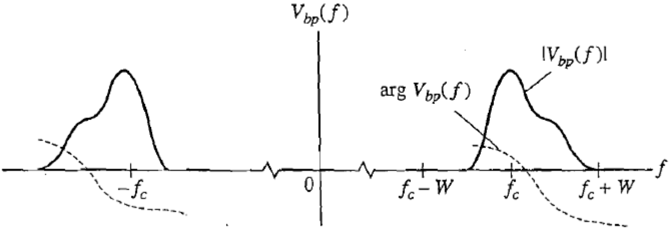


Figura 4.1-2, *Communication Systems*, 4th ed.

$$X_{bp}(f) = 0, \forall |f - f_c| > W$$

Representación fasorial y fase/cuadratura

Para cualquier señal pasabanda $x_{bp}(t)$ y valores f_c y W (que son arbitrarios) siempre es posible escribir la señal como:

Representación fase-cuadratura:

$$x_{bp}(t) = x_i(t)\cos(2\pi f_c t) - x_q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$x_i(t)$ se denomina componente en fase y $x_q(t)$ en cuadratura.

Representación fasorial:

$$x_{bp}(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

$A(t)$ es la amplitud, y $\phi(t)$ la fase de la señal.

Representación fasorial y fase/cuadratura

Para cualquier señal pasabanda $x_{bp}(t)$ y valores f_c y W (que son arbitrarios) siempre es posible escribir la señal como:

Representación fase-cuadratura:

$$x_{bp}(t) = x_i(t)\cos(2\pi f_c t) - x_q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$x_i(t)$ se denomina componente en fase y $x_q(t)$ en cuadratura.

Representación fasorial:

$$x_{bp}(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

$A(t)$ es la amplitud, y $\phi(t)$ la fase de la señal.

Ejercicio

Hallar la relación entre $x_i(t)$, $x_q(t)$ y $A(t)$, $\phi(t)$

Modulación de doble banda lateral (DSB)

Sea $x(t)$ una señal banda base de ancho de banda W, y una portadora sinusoidal de frecuencia f_c y amplitud A_c.

Se denomina modulacion DSB a:

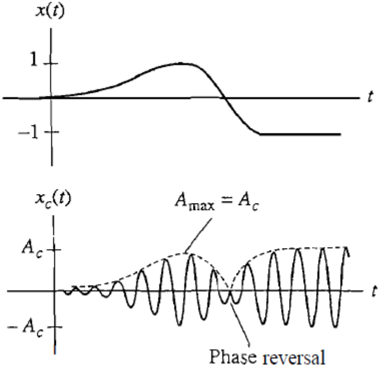
$$x_T(t) = x(t) A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Modulación de doble banda lateral (DSB)

Sea $x(t)$ una señal banda base de ancho de banda W, y una portadora sinusoidal de frecuencia f_c y amplitud A_c.

Se denomina modulacion DSB a:

$$x_T(t) = x(t)A_c\cos(2\pi f_c t)$$



La potencia transmitida en este caso es:

$$S_T =< x_T(t)^2 >= \lim_{T\to 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_T(t)^2 dt$$

La potencia transmitida en este caso es:

$$S_T =< x_T(t)^2 >= \lim_{T\to 0}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(t)^2 dt$$

$$S_T = A_c^2\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)dt$$

La potencia transmitida en este caso es:

$$S_T =< x_T(t)^2 >= \lim_{T\to 0}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(t)^2 dt$$

$$S_T = A_c^2 \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)dt$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{4T}\int_{-T}^{T} x^2(t) - \frac{A_c^2}{4T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\cos(4\pi f_c t)dt$$

La potencia transmitida en este caso es:

$$S_T = < x_T(t)^2 > = \lim_{T \to 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_T(t)^2 dt$$

$$S_T = A_c^2 \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{4T} \int_{-T}^{T} x^2(t) - \frac{A_c^2}{4T} \int_{-T}^{T} x^2(t) \cos(4\pi f_c t) dt$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x$$

Espectro DSB

Espectro DSB

$$B_T = 2W$$

Demodulador producto:

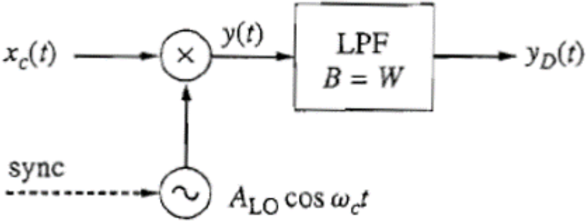


Figura 1: Demodulador producto. *Communication Systems*, 4ta ed. fig. 4.5-3

El demodulador producto requiere conocimiento exacto de la portadora para su uso en el oscilador: **frecuencia y fase**.

¿Qué pasa si hay un error de fase?

¿Qué pasa si hay un error de frecuencia?

Amplitud modulada (AM) (a.k.a. DSB+C)

Solución al problema de sincronismo: ¡enviar la portadora!

$$x_T(t) = A_c \mu x(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c x(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$= A_c(1 + \mu x(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

μ es un parámetro del sistema, y en general se restringe a $\mu \leq 1$ (ya veremos por qué).

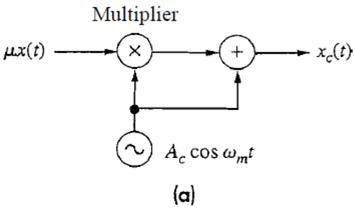


Fig. 4.3-1, *Communication Systems*, 4ta ed.

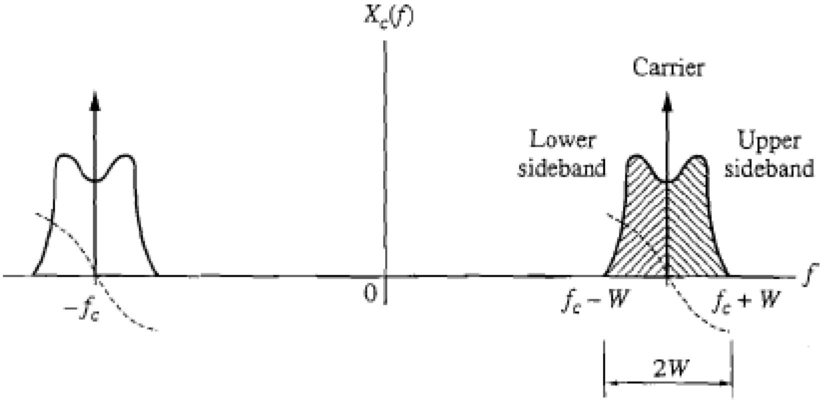


Figura 2: Espectro AM. Fig 4.2-2, *Communication Systems*, 4ta ed.

Potencia AM

Potencia AM

$$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 s_x)$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 s_x)$$

...pero solo una porción de la energía transmitida contiene la información del mensaje!

Utilizando que $|x(t)| \leq 1 \Rightarrow S_x \leq 1$ (y típicamente $S_x < 1/2$), unido con $\mu \leq 1$, tenemos que al menos 50 % de la energía es "desperdiciada" en resolver el sincronismo (y típicamente 66 %).

Se podría utilizar un demodulador producto, como en DSB, junto con un bloqueador DC… ¡pero AM se utiliza precisamente para evitar esto!

Se podría utilizar un demodulador producto, como en DSB, junto con un bloqueador DC... ¡pero AM se utiliza precisamente para evitar esto!

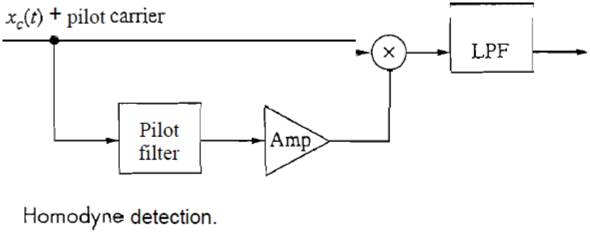
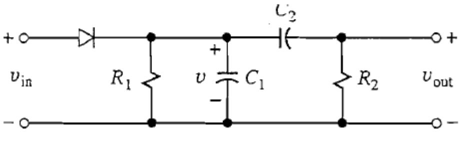


Figura 3: Detector homodino. Fig 4.5-5, *Communication Systems*, 4ta ed.

El detector homodino “aisla” la portadora para utilizarla en un demodulador producto.

Detector de envolvente

Otra solución al problema, más sencilla:

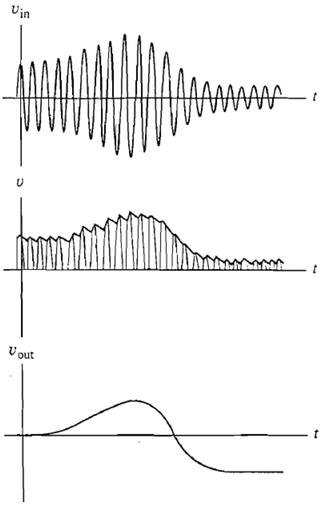


(a)

Requiere $\mu \leq 1$ y $f_c >> \frac{1}{R_1 C_1} >> W$

Ejercicio

Mostrar que el circuito recupera la envolvente de una señal AM. Hallar condiciones para los parámetros del mismo.



(b)

Fig 4.5-6, *Communication Systems*, 4ta ed.

Modulación AM y DSB en la práctica (1/2)

Ambos dependen de modulación por producto de señales que son prácticos para bajas potencias y bajas frecuencias.
Una alternativa para AM, moduladores no lineales/cuadráticos:

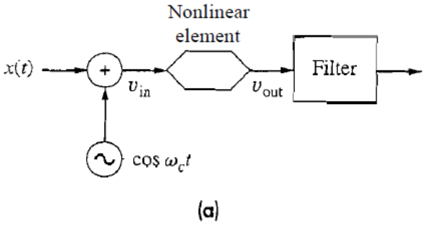


Figura 4: Mod. cuadrático. Fig 4.3-3, *Communication Systems*, 4ta ed.

Ejercicio

Asumiendo $V_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2$, determinar el filtro necesario para obtener modulación AM. Determinar μ y A_c en función de a_1 y a_2.

Modulación AM y DSB en la práctica (2/2)

Para DSB se pueden utilizar moduladores AM como el anterior en lo que se denomina un modulador balanceado:

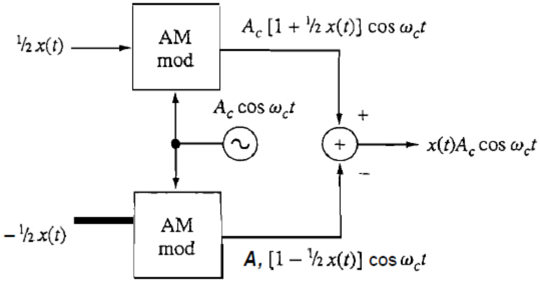


Figura 5: Mod. balanceado. Fig 4.3-5, *Communication Systems*, 4ta ed.

DSB:

- Modulación sencilla
- Ancho de banda $B_T = 2W$
- Potencia transmitida $S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x$
- **...pero demodulacion requiere sincronización Tx-Rx!**

Resumen DSB vs. AM

DSB:

- Modulación sencilla
- Ancho de banda $B_T = 2W$
- Potencia transmitida $S_T = \frac{A_C^2}{2} S_x$
- **...pero demodulacion requiere sincronización Tx-Rx!**

AM (DSB+C):

- Se envía la portadora además de la señal DSB.
- El ancho de banda se mantiente $B_T = 2W$.
- La portadora permite facilitar la demodulación: mediante envolvente ($\mu \leq 1$) o detector homodino.
- **... pero a igual potencia transmitida hay menos potencia de señal que contiene el mensaje.**

¿Podemos trasmitir un mensaje de ancho de banda W sin usar $2W$ de espectro?

¿Podemos trasmitir un mensaje de ancho de banda W sin usar $2W$ de espectro?

Sí.

En un mensaje DSB ambas bandas laterales (superior e inferior) **¡contienen la misma información!**. Alcanza con enviar solo una de dichas bandas

SSB: modulación de banda lateral suprimida/single-side band

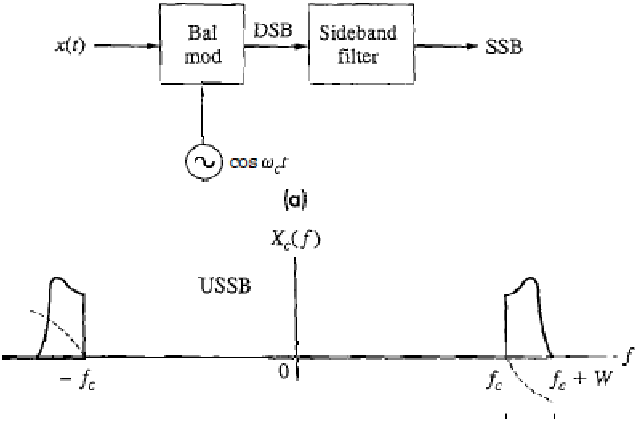


Figura 4.4-1, *Communication Systems*, 4ta Ed., Carlson, Crilly, Rutledge.

$B_T = W$ y $S_T = \frac{A_c^2}{4} S_x$

En la práctica no siempre es sencillo diseñar los filtros pasabanda necesarios. Una alternativa para la modulación:

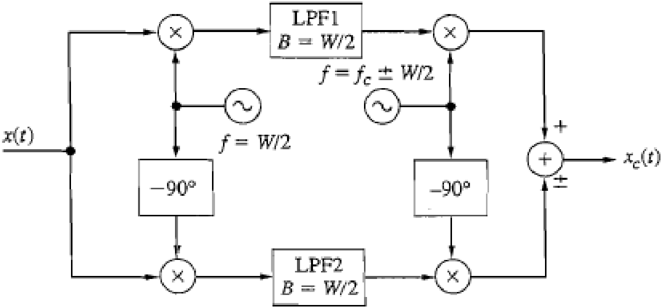


Figura 4.4-7, *Communication Systems*, 4ta Ed., Carlson, Crilly, Rutledge.

Queda de ejercicio mostrar que este modulador produce la señal deseada!

¿Podemos obtener una expresión analítica para la señal $x_c(t)$ modulada en SSB?

¿Podemos obtener una expresión analítica para la señal $x_c(t)$ modulada en SSB?

Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert de una señal $x(t)$ es otra señal $\hat{x}(t)$ tal que $\hat{X}(f) = -j \cdot \mathrm{sg}(f) X(f)$.

Propiedades de la transformada de Hilbert

- Si $x(t)$ es real, $\hat{x}(t)$ es real

Propiedades de la transformada de Hilbert

- Si $x(t)$ es real, $\hat{x}(t)$ es real
- La transformada de Hilbert es una operación lineal
  $(\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t})$

- Si $x(t)$ es real, $\hat{x}(t)$ es real
- La transformada de Hilbert es una operación lineal ($\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$)
- La señal $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + j\hat{x}(t))$ satisface que:

$$\bar{X}(f) = 0,\ \forall f < 0$$

$$\bar{X}(f) = X(f),\ \forall f > 0$$

$$\bar{X}(0) = \frac{1}{2}X(0)$$

Propiedades de la transformada de Hilbert

- Si $x(t)$ es real, $\hat{x}(t)$ es real
- La transformada de Hilbert es una operación lineal ($\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$)
- La señal $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + j\hat{x}(t))$ satisface que:

$$\bar{X}(f) = 0, \forall f < 0$$

$$\bar{X}(f) = X(f), \forall f > 0$$

$$\bar{X}(0) = \frac{1}{2}X(0)$$

- $-x(t)$ es la transformada de Hilbert de $\hat{x}(t)$

Propiedades de la transformada de Hilbert

- Si $x(t)$ es real, $\hat{x}(t)$ es real
- La transformada de Hilbert es una operación lineal ($\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$)
- La señal $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + j\hat{x}(t))$ satisface que:

$$\bar{X}(f) = 0, \, \forall f < 0$$

$$\bar{X}(f) = X(f), \, \forall f > 0$$

$$\bar{X}(0) = \frac{1}{2}X(0)$$

- $-x(t)$ es la transformada de Hilbert de $\hat{x}(t)$

Ejercicios

Demostrar que:

- La transformada de Hilbert de una constante es 0.
- $\sin(wt)$ es la transformada de Hilbert de $\cos(wt)$
- $x(t) sin(w_c t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t) cos(w_c t)$ si $W < w_c$
- **(opcional) Teorema de Bedrosian:** $x(t)\hat{y}(t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t)y(t)$ si $x(t)$ es una señal banda base e $y(t)$ es una señal pasabanda.

Asumir $x(t)$, $y(t)$ reales.

Transformada de Hilbert para detección de envolvente

Sea $x_T(t) = A_c y(t) cos(w_c t + \phi)$.

Ejercicio: recuperación de envolvente mediante Hilbert

Mostrar que:

$$|x_T(t) + j\hat{x_T}(t)| = A_c|y(t)|$$

Realice un diagrama de bloques para realizar demodulación AM mediante la transformada de Hilbert sin utilizar filtros ni osciladores.

Representación analítica de una señal SSB

$$x_c(t) = \frac{A_c}{2} x(t) cos(w_c t) \pm \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) sin(w_c t)$$

Donde el signo del medio depende de si se trata de USSB o LSSB.

Ejercicio

Demostrar

Demodulación SSB

Demodulador producto, igual que en DSB

Limitaciones de SSB

Algunos problemas prácticos:

- La señal SSB tiene picos de amplitud si $x(t)$ tiene componentes de muy alta frecuencia (ver, por ejemplo, la transformada de Hilbert de un pulso rectangular).

- Adicionalmente, es difícil diseñar filtros prácticos que tengan transiciones abruptas en frecuencia. Esto genera distorsiones en bajas frecuencias. SSB funciona bien si la señal original no tiene componentes DC o de baja frecuencia.

¿Cómo lidiar con este problema?

Limitaciones de SSB

Algunos problemas prácticos:

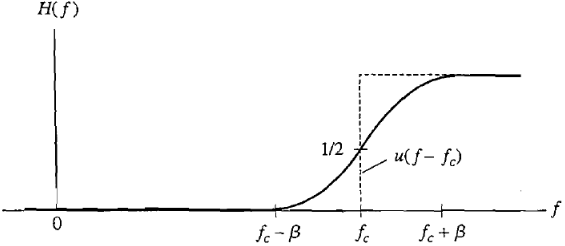
- La señal SSB tiene picos de amplitud si $x(t)$ tiene componentes de muy alta frecuencia (ver, por ejemplo, la transformada de Hilbert de un pulso rectangular).

- Adicionalmente, es difícil diseñar filtros prácticos que tengan transiciones abruptas en frecuencia. Esto genera distorsiones en bajas frecuencias. SSB funciona bien si la señal original no tiene componentes DC o de baja frecuencia.

¿Cómo lidiar con este problema? **VSB**

Es un compromiso entre DSB y SSB. **La idea es no utilizar un filtro con transición abrupta**, si no uno con una transición suave pero simétrica en la frecuencia de corte:

Es un compromiso entre DSB y SSB. **La idea es no utilizar un filtro con transición abrupta**, si no uno con una transición suave pero simétrica en la frecuencia de corte:



Donde β es un parámetro de diseño. Notar que si $\beta = 0$ tenemos SSB.

Figura 4.4-8, *Communication Systems*, 4ta Ed., Carlson, Crilly, Rutledge.

Igual que DSB, SSB: demodulador producto.

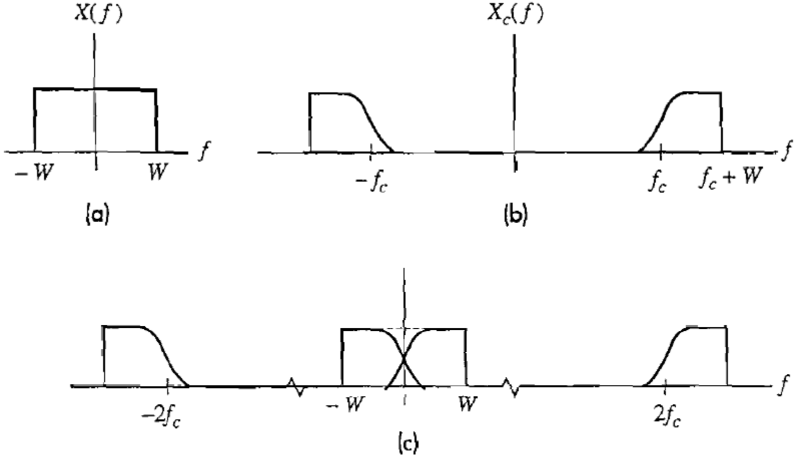


Figura 4.5-4, *Communication Systems*, 4ta Ed., Carlson, Crilly, Rutledge.

Modulación	B_T	**moduladores**	**demoduladores**
DSB	$2W$	producto, balanceado	producto
AM (DSB+C)	$2W$	producto, cuadrático	homodino, envolvente, producto
SSB	W	DSB+BPF ideal, Weaver	producto
VSB	$W+\beta$	DSB+BPF real	producto

Cuadro 1: Comparación de diferentes técnicas de modulación lineal.

Nota: tanto SSB como VSB pueden explotar el mismo truco de AM de agregar la portadora, convirtiéndose así en SSB+C o VSB+C, lo que permite utilizar un detector homodino para solucionar el problema de sincronismo.

Semana que viene

Modulación exponencial: PM y FM.

Leer capítulo 5.

Secciones 5.1 (excepto modulación multitono), 5.2 (solo estimación de ancho de banda) y 5.3 (excepto FM de onda triangular) para el martes.
Sección 5.4 para el jueves.