

Performance en comunicación digital

Fundamentos de Sistemas de Comunicación

Facultad de Ingeniería y Tecnología

28 de junio de 2022



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

1 Detección digital

Probabilidad de error en sistema binario

2 Comunicación digital M-aria

Detección pasabanda coherente

BER en detección coherente

Detección no-coherente

3 Resumen de performance digital

4 Repetidores digitales

En recepción llegan pulsos con 1 de M formas posibles: s_1, s_2, \dots, s_M .

El problema de la detección digital

En recepción llegan pulsos con 1 de M formas posibles: s_1, s_2, \dots, s_M .

El problema de la detección es identificar **cuál** llegó.

En recepción llegan pulsos con 1 de M formas posibles: s_1, s_2, \dots, s_M .

El problema de la detección es identificar **cuál** llegó.

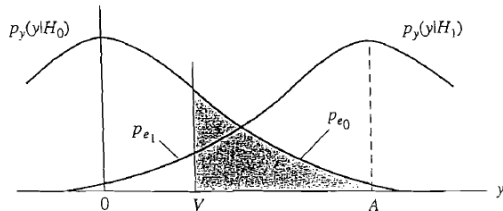
La sección 16.5 del libro ofrece una formulación general de este problema en términos de proyección de señales sobre la base de posibles vectores.

Distribución de muestras

Asumiendo recepción sin ISI y ruido AWGN, las muestras satisfacen:

$$p(\hat{a}_k|\text{bit } 0) = \mathcal{N}(A_0, \sigma_0^2) \quad p(\hat{a}_k|\text{bit } 1) = \mathcal{N}(A_1, \sigma_1^2)$$

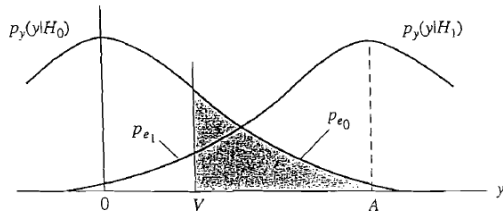
Donde σ_i es la desviación estándar de las muestras de ruido.



Asumiendo recepción sin ISI y ruido AWGN, las muestras satisfacen:

$$p(\hat{a}_k | \text{bit } 0) = \mathcal{N}(A_0, \sigma_0^2) \quad p(\hat{a}_k | \text{bit } 1) = \mathcal{N}(A_1, \sigma_1^2)$$

Donde σ_i es la desviación estándar de las muestras de ruido.



Resultado de clase anterior:

$$BER = p_0 Q \left(\sqrt{\frac{V - A_0}{\sigma_0^2}} \right) + p_1 Q \left(\sqrt{\frac{A_1 - V}{\sigma_1^2}} \right)$$

Para cada tiempo m hay que tomar una decisión sobre si la muestra correspondiente vino de un bit 0 o un bit 1.

Para cada tiempo m hay que tomar una decisión sobre si la muestra correspondiente vino de un bit 0 o un bit 1.

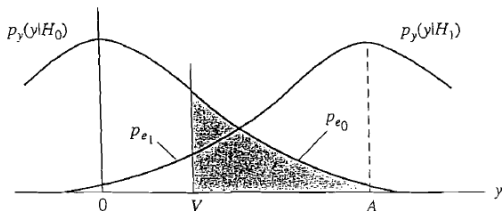
Regla de decisión binaria

Típicamente la regla de decisión toma la forma de umbralización:

$$\begin{aligned} b_m &= 1 && \text{si } \hat{a}_m > V \\ b_m &= 0 && \text{si } \hat{a}_m < V \end{aligned}$$

Distribución de muestras y BER

$$p(\hat{a}_k | \text{bit } 0) = \mathcal{N}(A_0, \sigma_0^2) \quad p(\hat{a}_k | \text{bit } 1) = \mathcal{N}(A_1, \sigma_1^2)$$



Resultado de clase anterior:

$$BER = p_0 Q\left(\frac{V - A_0}{\sigma_0}\right) + p_1 Q\left(\frac{A_1 - V}{\sigma_1}\right)$$

El umbral óptimo V_{opt} se puede obtener minimizando la expresión anterior como función de V .

Para el caso de bits equiprobables ($p_0 = p_1 = 1/2$):

Resultado de clase anterior:

$$BER = p_0 Q \left(\frac{V - A_0}{\sigma_0} \right) + p_1 Q \left(\frac{A_1 - V}{\sigma_1} \right)$$

El umbral óptimo V_{opt} se puede obtener minimizando la expresión anterior como función de V .

Para el caso de bits equiprobables ($p_0 = p_1 = 1/2$):

$$V_{opt} = \frac{A_0 + A_1}{2}$$

$$BER_{opt} = Q \left(\frac{A_1 - A_0}{2\sigma_N} \right)$$

Resultado de clase anterior:

$$BER = p_0 Q \left(\frac{V - A_0}{\sigma_0} \right) + p_1 Q \left(\frac{A_1 - V}{\sigma_1} \right)$$

El umbral óptimo V_{opt} se puede obtener minimizando la expresión anterior como función de V .

Para el caso de bits equiprobables ($p_0 = p_1 = 1/2$):

$$V_{opt} = \frac{A_0 + A_1}{2}$$

$$BER_{opt} = Q \left(\frac{A_1 - A_0}{2\sigma_N} \right)$$

¿Cómo determinar A_i, σ_i ?

En el caso especial de PAM en recepción tenemos (canal sin distorsión no lineal):

$$x_R(t) = \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) + \eta(t)$$

En el caso especial de PAM en recepción tenemos (canal sin distorsión no lineal):

$$x_R(t) = \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) + \eta(t)$$

Estrategia de recuperación:

- Filtrado
- Muestreo
- Umbralización (comparación)

En el caso especial de PAM en recepción tenemos (canal sin distorsión no lineal):

$$x_R(t) = \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) + \eta(t)$$

Estrategia de recuperación:

- Filtrado
- Muestreo
- Umbralización (comparación)

¿Cómo elegir el filtro óptimo?

Detección óptima en PAM binario (2/4)

Aplicando un filtro arbitrario $s(t)$ (WLOG $\int s^2(t)dt = 1$):

$$y(t) = x_R(t) * s(t) = \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) * s(t) + \eta(t) * s(t)$$

$$y(t) = \sum_k a_k s_R(t - kD - t_d) + \hat{\eta}(t)$$

Detección óptima en PAM binario (2/4)

Aplicando un filtro arbitrario $s(t)$ (WLOG $\int s^2(t)dt = 1$):

$$y(t) = x_R(t) * s(t) = \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) * s(t) + \eta(t) * s(t)$$

$$y(t) = \sum_k a_k s_R(t - kD - t_d) + \hat{\eta}(t)$$

Muestreando (en $t = mD + t_d$):

$$y_m = a_m s_R(0) + \sum_{k \neq m} a_k s_R(mD - kD) + \hat{\eta}_m$$

Detección óptima en PAM binario (2/4)

Aplicando un filtro arbitrario $s(t)$ (WLOG $\int s^2(t)dt = 1$):

$$y(t) = x_R(t) * s(t) = \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) * s(t) + \eta(t) * s(t)$$

$$y(t) = \sum_k a_k s_R(t - kD - t_d) + \hat{\eta}(t)$$

Muestreando (en $t = mD + t_d$):

$$y_m = a_m s_R(0) + \sum_{k \neq m} a_k s_R(mD - kD) + \hat{\eta}_m$$

Condición de Nyquist: eliminar ISI requiere

$$\begin{cases} s_R(0) = g \neq 0 \\ s_R(nD) = 0 \end{cases} \quad \forall n \neq 0 \in \mathbb{Z}$$

(p. ej. $s_R(t) = \text{sinc}(t/D)$).

Asumiendo condición de Nyquist, las muestras resultan:

$$y_m = g a_m + \hat{\eta}_m$$

Notando que $g = s_R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)s(t)dt$ es una constante.

Para calcular las distribuciones $p(y_m|a_m)$ (necesarias para el cálculo de error) debemos determinar g y la distribución de $\hat{\eta}$

Notando que: η es AWGN estacionario con PSD $N_0/2$ y por tanto $\hat{\eta} = s(t) * \eta(t)$ es un p.e. gaussiano estacionario con PSD:

$$G_{\hat{\eta}} = \frac{N_0}{2} |S(f)|^2$$

De donde:

$$E(\hat{\eta}_m^2) = E(\hat{\eta}^2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{\eta}}(f) df = \frac{N_0}{2}$$

$$E(\hat{\eta}_m) = E(\hat{\eta}(t)) = \int_{0^-}^{0^+} G_{\hat{\eta}}(f) df = 0$$

Detección óptima en PAM binario (4/4)

Notando que: η es AWGN estacionario con PSD $N_0/2$ y por tanto $\hat{\eta} = s(t) * \eta(t)$ es un p.e. gaussiano estacionario con PSD:

$$G_{\hat{\eta}} = \frac{N_0}{2} |S(f)|^2$$

De donde:

$$E(\hat{\eta}_m^2) = E(\hat{\eta}^2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{\eta}}(f) df = \frac{N_0}{2}$$

$$E(\hat{\eta}_m) = E(\hat{\eta}(t)) = \int_{0^-}^{0^+} G_{\hat{\eta}}(f) df = 0$$

Por tanto:

$$p(y_m|a_m) = \mathcal{N}(ga_m, (N_0/2)^2)$$

Donde falta determinar

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)s(t)dt$$

Donde falta determinar

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)s(t)dt$$

Por Cauchy-Schwartz:

$$g \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t)dt} = E_p$$

g está acotada por la energía de cada pulso

Donde falta determinar

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)s(t)dt$$

Por Cauchy-Schwartz:

$$g \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t)dt} = E_p$$

g está acotada por la energía de cada pulso

En una señal PAM genérica de símbolos equiprobables:

$$E_b = \frac{S_R}{r} = \frac{\sum_i a_i^2 E_p^2}{M} = \frac{\sum_i (ga_m)^2}{M}$$

Donde E_b es la energía (media) por bit.

En el caso de un sistema con **pulsos rectangulares**:

$$\text{Polar: } A_0 = -A_1 = -A/\sqrt{L}, \Rightarrow S_T = A^2$$

$$\text{Unipolar: } A_0 = 0, A_1 = A/\sqrt{L} \Rightarrow S_T = A^2/2$$

En el caso de un sistema con **pulsos rectangulares**:

$$\text{Polar: } A_0 = -A_1 = -A/\sqrt{L}, \Rightarrow S_T = A^2$$

$$\text{Unipolar: } A_0 = 0, A_1 = A/\sqrt{L} \Rightarrow S_T = A^2/2$$

El caso de recepción óptima nos lleva a:

$$BER = \begin{cases} Q(\sqrt{\gamma_b}) & \text{unipolar} \\ Q(\sqrt{2\gamma_b}) & \text{polar} \end{cases}$$

Donde se define $\gamma_b \triangleq \frac{S_T}{LN_0r}$

Detección óptima: canal sin distorsión no-lineal con AWGN

Detección óptima: canal sin distorsión no-lineal con AWGN

Corolario: tasa de error mínima para pulsos de forma arbitraria

$$BER = \begin{cases} Q(\sqrt{\gamma_b}) & \text{unipolar} \\ Q(\sqrt{2\gamma_b}) & \text{polar} \end{cases}$$

Este resultado requiere filtros apareados, umbrales óptimos, y eliminación de ISI en recepción.

Señalización M-aria

Un sistema digital es M-ario si los símbolos (a_k) a comunicar surgen de un alfabeto de M elementos.

Señalización M-aria

Un sistema digital es M-ario si los símbolos (a_k) a comunicar surgen de un alfabeto de M elementos.

Notar que en comunicación M-aria con $M \neq 2$:

- La tasa de transmisión de símbolos (r) no coincide con la tasa de transmisión de bits (r_b).
- Existen tasas de error de símbolo (SER) y tasas de error de bits (BER) que no son iguales.

En un sistema M-ario es posible enviar $k = \log_2(M)$ bits de información por símbolo, por tanto:

$$r_b = r \log_2(M)$$

En un sistema M-ario es posible enviar $k = \log_2(M)$ bits de información por símbolo, por tanto:

$$r_b = r \log_2(M)$$

Ejemplo: en un sistema con $M = 8$ que tiene una tasa de símbolos $r = 100 \text{ simb/seg}$:

$$r_b = 3 \times 100 = 300 \text{ bps}$$

¿Qué pasa con las tasas de error?

¿Qué pasa con las tasas de error?

$$\text{BER} \leq \text{SER}$$

¿Qué pasa con las tasas de error?

$$\text{BER} \leq \text{SER}$$

En el mejor caso:

$$\text{BER} = \frac{\text{SER}}{\log_2(M)}$$

Ejercicio

BER en comunicación M-aria

Definición

Se define eficiencia espectral como r_b/B_T , y se mide en bps/Hz

Para PAM bandabase:

$$r_b/B_T \approx 2\log_2(M)$$

Notar que siempre es cierto que:

$$r_b/B_T \leq 2\log_2(M)$$

En detección coherente **asumimos que el receptor está sincronizado (frecuencia y fase) con el transmisor.**

Señales pasabanda (igual que en analógico):

$$x_c(t) = A_c[x_i(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) - x_q(t)\sin(2\pi f_c t + \theta)]$$

En general:

$$x_i(t) = \sum_k I_k p_{ki}(t - kD), \quad x_q(t) = \sum_k Q_k p_{kq}(t - kD)$$

Se asume $f_c = nr$ ($r = D^{-1}$), con $n \in \mathcal{N}$. Entonces:

$$x_c(t) = A_c \sum_k s_k(t - kD)$$

Donde:

$$s_k(t) = A_c [I_k p_{ki}(t) \cos(2\pi f_c t) - Q_k p_{kq}(t) \sin(2\pi f_c t)]$$

Notar que cada s_k solo toma una de M formas posibles. El sistema de detección se reduce a identificar la forma 'correcta'.

Detección COHERENTE óptima: caso binario

$M = 2$: existen solo dos formas posibles de los pulsos en recepción s_0 y s_1 .

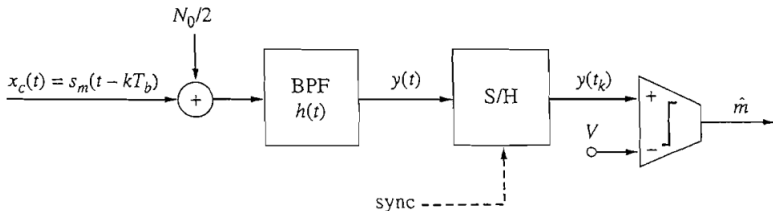


Figura 14.2-1. *Communication Systems*. Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

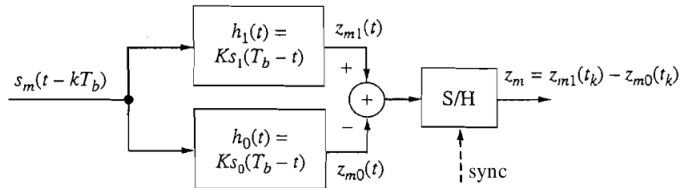
Filtro óptimo:

$$h_{OPT} = K[s_1(D - t) - s_0(D - t)]$$

Filtro apareado a la diferencia de las dos formas posibles

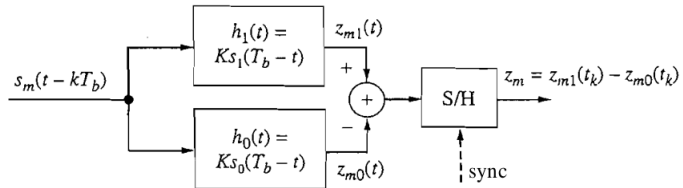
Arquitecturas de detectores coherentes binarios óptimos

Detector apareado:



Arquitecturas de detectores coherentes binarios óptimos

Detector apareado:



Detector de correlación (preferido, menos sensible a desfase):

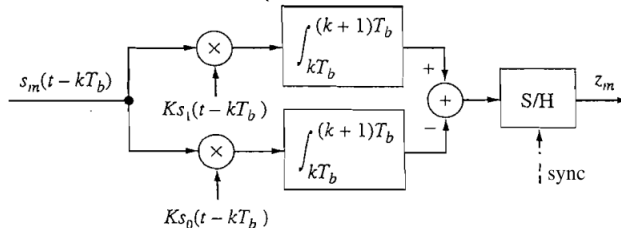


Figura 14.2-3. *Communication Systems*. Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

BER para detección coherente binaria en ASK,PSK,FSK

(2-)ASK unipolar/OOK:

$$BER = Q(\sqrt{\gamma_b})$$

equivalente a PAM unipolar bandabase!

BER para detección coherente binaria en ASK,PSK,FSK

(2-)ASK unipolar/OOK:

$$BER = Q(\sqrt{\gamma_b})$$

equivalente a PAM unipolar bandabase!

(2-)PSK/(2-)ASK polar:

$$BER = Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

equivalente a PAM polar bandabase!

BER para detección coherente binaria en ASK,PSK,FSK

(2-)ASK unipolar/OOK:

$$BER = Q(\sqrt{\gamma_b})$$

equivalente a PAM unipolar bandabase!

(2-)PSK/(2-)ASK polar:

$$BER = Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

equivalente a PAM polar bandabase!

(2-)FSK:

$$BER \geq Q(\sqrt{1,22\gamma_b})$$

FSK mejor caso no es mucho mejor que ASK/unipolar bandabase.

Intuición: la única diferencia entre PAM bandabase M-aria y M-ASK (pasabanda) es la forma de los pulsos utilizados.

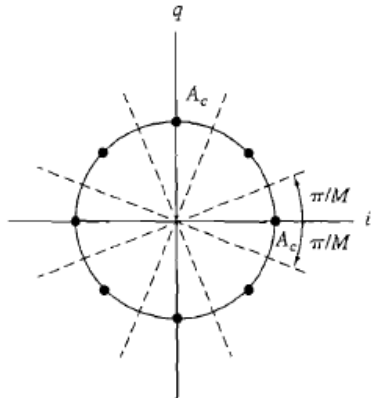
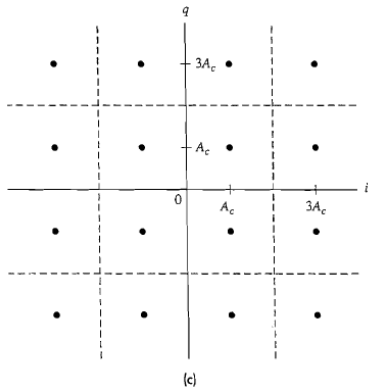
Intuición: la única diferencia entre PAM bandabase M-aria y M-ASK (pasabanda) es la forma de los pulsos utilizados.

Asumiendo señalización polar:
(ver ejercicio de BER M-aria bandabase realizado en clase)

$$\text{BER} = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}} \gamma_b \right)$$

SER/BER en sistemas con cuadratura

Para sistemas con cuadratura con forma de pulso fija (PSK, QAM, pero no FSK), el análisis de errores se puede hacer desde el diagrama de constelación:



BER en sistemas con cuadratura: (4-)QAM/QPSK

(4-)QAM y QPSK (4-PSK) pueden pensarse como dos flujos de datos independientes en paralelo usando (2-)PSK o ASK polar.

BER en sistemas con cuadratura: (4-)QAM/QPSK

(4-)QAM y QPSK (4-PSK) pueden pensarse como dos flujos de datos independientes en paralelo usando (2-)PSK o ASK polar.

Sean BER' , γ'_b los parámetros de c/flujo (los asumimos iguales). Sabemos que:

$$BER' = Q(\sqrt{2\gamma'_b})$$

Sean BER , γ_b los parámetros del sistema total.

BER en sistemas con cuadratura: (4-)QAM/QPSK

(4-)QAM y QPSK (4-PSK) pueden pensarse como dos flujos de datos independientes en paralelo usando (2-)PSK o ASK polar.

Sean BER' , γ'_b los parámetros de c/flujo (los asumimos iguales). Sabemos que:

$$BER' = Q(\sqrt{2\gamma'_b})$$

Sean BER , γ_b los parámetros del sistema total. Ver que:

$$BER = BER'$$

$$\gamma_b = \gamma'_b$$

Por lo tanto, también en el sistema total:

$$BER = Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

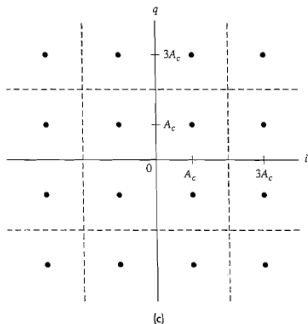


Figura 14.4-8c. *Communication Systems*.
Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

Utilizando los mismos argumentos, M-QAM son dos flujos independientes M-arios. Pero $M' \approx \sqrt{M}$ Para cada flujo tenemos:

$$\text{BER}' = \frac{2(M' - 1)}{M' \log_2 M'} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M'}{M'^2 - 1}} \gamma'_b \right)$$

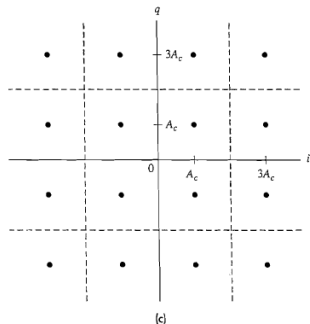


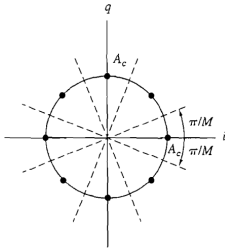
Figura 14.4-8c. *Communication Systems*.
Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

Utilizando los mismos argumentos, M-QAM son dos flujos independientes M-arios. Pero $M' \approx \sqrt{M}$ Para cada flujo tenemos:

$$\text{BER}' = \frac{2(M' - 1)}{M' \log_2 M'} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M'}{M'^2 - 1}} \gamma'_b \right)$$

Por lo tanto para el sistema total:

$$\text{BER} = \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M - 1}} \gamma_b \right)$$



Decision thresholds for M-ary PSK.

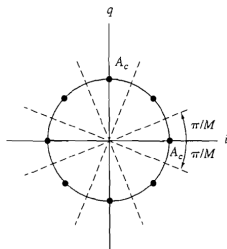
Figura 14.4-4. *Communication Systems*.
Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

Señal muestreada (AWGN pasabanda en representación fase-cuadratura):

$$y_k = (\cos(\Phi_k) + \eta_i)\cos(w_c t)$$

$$-(\sin(\Phi_k) + \eta_q).\sin(w_c t)$$

$$\text{Con } \sigma_{\eta_i}^2 = \sigma_{\eta_q}^2 = N_0.B_T \approx N_0 r$$



Decision thresholds for M-ary PSK.

Figura 14.4-4. *Communication Systems*.
Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

Señal muestreada (AWGN pasabanda en representación fase-cuadratura):

$$y_k = (\cos(\Phi_k) + \eta_i)\cos(w_c t)$$

$$-(\sin(\Phi_k) + \eta_q).\sin(w_c t)$$

$$\text{Con } \sigma_{\eta_i}^2 = \sigma_{\eta_q}^2 = N_0.B_T \approx N_0 r$$

Asumiendo $A_c \gg \sigma$ ($\text{SNR}_R \gg 1$):

$$\text{SER} \approx 2Q\left(\frac{\Delta}{2\sigma}\right), \text{ con } \frac{\Delta}{2} = \text{distancia símbolo-umbral mínima}$$

Usando $\Delta = 2A_c \sin(\pi/M)$ y $E = A_c^2 D/2$:

$$\boxed{\text{SER} \approx 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b \sin^2(\pi/M) \log_2 M}\right), \text{ BER} = \frac{\text{SER}}{\log_2 M}}$$

Errores en comunicación digital pasabanda vs. bandabase

La comunicación digital pasabanda tiene tasas de error equivalentes a bandabase si es implementada en forma óptima.

Pero: **detección óptima requiere sincronismo.**

Errores en comunicación digital pasabanda vs. bandabase

La comunicación digital pasabanda tiene tasas de error equivalentes a bandabase si es implementada en forma óptima.

Pero: **detección óptima requiere sincronismo.**

Al igual que en el caso analógico, la potencia de la señal en Rx cae como $\approx \cos^2 \phi$ donde ϕ es el desfase respecto del muestreo óptimo (en radianes).

También es posible realizar detección no-coherente ("no sincrónica") de los datos:

- ASK/OOK: detección de envolvente.
- FSK: detección de envolvente (!!!).
- PSK: detección de variaciones de fase en lugar de la fase en sentido absoluto (llamado DPSK).

Igual que en el caso analógico, la detección no coherente empeora la calidad de la señal (mayor BER).

Resumen: comparación de sistemas digitales

Table 14.4-1 Summary of binary modulation systems

Modulation	Detection	r_b/B_T	P_{be}
OOK or FSK ($f_d = r_b/2$)	Envelope	1	$\frac{1}{2}e^{-\gamma_b/2}$
DPSK	Phase-comparison	1	$\frac{1}{2}e^{-\gamma_b}$
BPSK	Coherent	1	$Q(\sqrt{2\gamma_b})$
MSK, QAM, or QPSK	Coherent quadrature	2	$Q(\sqrt{2\gamma_b})$

Table 14.4-2 Summary of M-ary modulation systems with $r_b/B_T = K = \log_2 M$

Modulation	Detection	P_{be}
PSK ($M \geq 8$)	Coherent quadrature	$\frac{2}{K} Q\left(\sqrt{2K\gamma_b \sin^2 \frac{\pi}{M}}\right)$
QAM (K even)	Coherent quadrature	$\frac{4}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3K}{M-1} \gamma_b}\right)$

Resumen: comparación de sistemas digitales

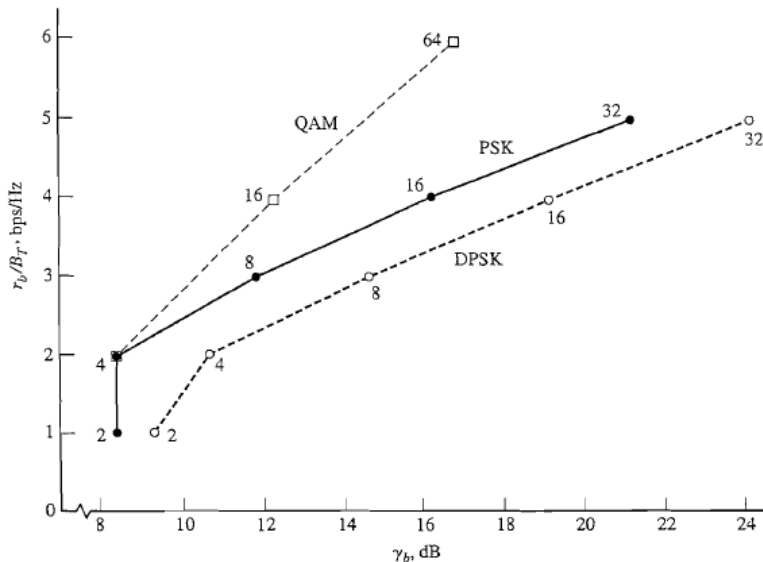


Figure 14.4-9 Performance comparison of M-ary modulation systems with $P_{be} = 10^{-4}$.

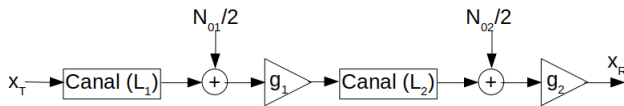
Resumen: comparación de sistemas digitales

Table 14.4-3 Comparison of digital modulation systems with $P_{be} = 10^{-4}$

Modulation	Detection	r_b/B_T	γ_b , dB
OOK or FSK ($f_d = r_b/2$)	Envelope	1	12.3
DPSK ($M = 2$)	Phase-comparison	1	9.3
DQPSK	Phase-comparison quadrature	2	10.7
BPSK	Coherent	1	5.4
MSK, QAM, or QPSK	Coherent quadrature	2	5.4
DPSK ($M = 8$)	Phase-comparison quadrature	3	14.6
PSK ($M = 8$)	Coherent quadrature	3	11.8
PSK ($M = 16$)	Coherent quadrature	4	16.2
QAM ($M = 16$)	Coherent quadrature	4	12.2

Communication Systems. Carlson, Crilly, and Rutledge. 4ta Ed.

Consideremos un canal de comunicación sin distorsión y con AWGN, pero dividido en dos tramos:



A la salida de cada tramo, se coloca un repetidor regenerativo. Esto es, se demodula el mensaje digital, para luego volver a transmitirlo con el mismo sistema e igual potencia.

¿Cómo cambia la BER debido al repetidor?