Comunicación digital

Fundamentos de Sistemas de Comunicación

Facultad de Ingeniería y Tecnología

17 de mayo de 2022

Universidad Católica del Uruguay

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Contenido

Comunicación digital: ¿qué es?

Mensaje digital

Mensajes que son señales discretas (x_k) que además toman valores discretos de un conjunto finito $(x_k \in \{0, ..M-1\})$.

Mensaje digital

Mensajes que son señales discretas (x_k) que además toman valores discretos de un conjunto finito ($x_k \in \{0, ..M - 1\}$).

Se denomina **símbolo** a cada elemento x_k, y **alfabeto** al conjunto de valores posibles.

Ejemplo: secuencia de bits *1011100101*.

Comunicación digital: ¿por qué?

- **Estabilidad:** fácil de almacenar de forma fiel, a pesar de cambios temporales del medio (ej. capacitor que se descarga lentamente).

Comunicación digital: ¿por qué?

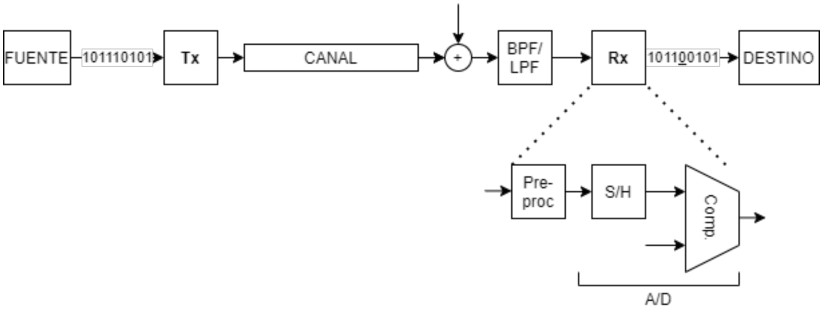
- **Estabilidad:** fácil de almacenar de forma fiel, a pesar de cambios temporales del medio (ej. capacitor que se descarga lentamente).
- **Flexibilidad:** procesamiento de señales via software, con hardware genérico.

Comunicación digital: ¿por qué?

- **Estabilidad:** fácil de almacenar de forma fiel, a pesar de cambios temporales del medio (ej. capacitor que se descarga lentamente).
- **Flexibilidad:** procesamiento de señales via software, con hardware genérico.
- **Reproducibilidad:** habilidad de comunicar mensajes limitando propagación de errores.

	señal	performance	tasa de comunicación
Analógico	$x(t) \in \mathcal{R}$	fidelidad (SNR)	tiempo real
Digital	$x_k \in \{0, ..M-1\}$	tasa de error	tasa de símbolos (r)

Cuadro 1: Comparación de principales diferencias entre comunicación analógica y digital.


FUENTE
101110101
Tx
CANAL
+
BPF/
LPF
Rx
101100101
DESTINO
Pre-
proc
S/H
Comp.
A/D

Mensaje digital ... capa física analógica

Los mensajes digitales deben comunicarse mediante medios (canales) físicos: se requiere una conversión **(modulación digital)**.

Los mensajes digitales deben comunicarse mediante medios (canales) físicos: se requiere una conversión **(modulación digital)**.

Típicamente: **modulación por pulsos**

$$\{x_k\} \to x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(t - kD)$$

Cada símbolo se convierte en un pulso a transmitir. D el tiempo entre pulsos sucesivos, y $r = D^{-1}$ la tasa de transmisión de símbolos.

PAM digital: caso especial de modulación digital por pulsos.

La información de los símbolos a transmitir (b_m) se codifican en un tren de pulsos idénticos, pero on distintas amplitudes:

$$x_T(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

Donde a_k son las amplitudes de los pulsos, y $p(t)$ es la forma de pulso (para todos los pulsos).

PAM digital: caso especial de modulación digital por pulsos.

La información de los símbolos a transmitir (b_m) se codifican en un tren de pulsos idénticos, pero on distintas amplitudes:

$$x_T(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

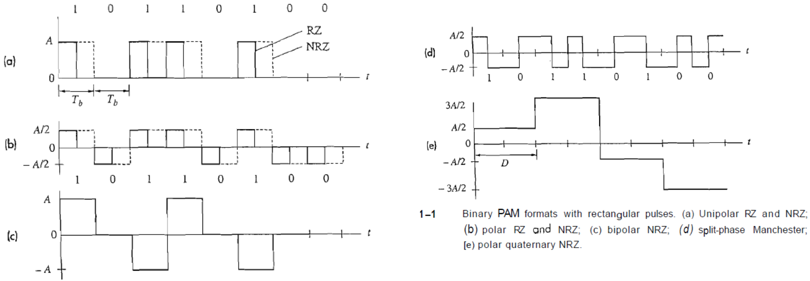
Donde a_k son las amplitudes de los pulsos, y $p(t)$ es la forma de pulso (para todos los pulsos).

$p(t)$ arbitrarios, pero en general se impone:

$$\left[\begin{array}{l} p(0) = 1 \\ p(kD) = 0 \quad \forall k \neq 0 \in \mathcal{Z} \end{array} \right.$$

El término **señalización** refiere a la regla de conversión entre los símbolos que se desean transmitir (b_m) y las amplitudes que se eligen de los pulsos (a_k):

El término **señalización** refiere a la regla de conversión entre los símbolos que se desean transmitir (b_m) y las amplitudes que se eligen de los pulsos (a_k):



1–1 Binary PAM formats with rectangular pulses. (a) Unipolar RZ and NRZ; (b) polar RZ and NRZ; (c) bipolar NRZ; (d) split-phase Manchester; (e) polar quaternary NRZ.

Figura 11.1-1, *Communication Systems*, 4th ed.

Nos centraremos en polar, unipolar, bipolar/AMI, con y sin retorno a cero (RZ/NRZ)

Sea:

$$x_T(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

Espectro de una señal PAM digital

Sea:

$$x_T(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

Asumimos que:

- $p(t)$ tiene transformada de Fourier (típicamente pulsos finitos en t)
- La secuencia a_k es estacionaria, con autocorrelación $R_a[n] = E(a_k.a_{k+n})$
- La secuencia $n.R_a[n]$ tiene transformada de Fourier (DTFT)

Espectro de una señal PAM digital

Sea:

$$x_T(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

Asumimos que:

- $p(t)$ tiene transformada de Fourier (típicamente pulsos finitos en t)
- La secuencia a_k es estacionaria, con autocorrelación $R_a[n] = E(a_k.a_{k+n})$
- La secuencia $n.R_a[n]$ tiene transformada de Fourier (DTFT)

Entonces:

$$G_{x_T}(f) = r|P(f)|^2 G_a(f)$$

Donde se define:

$$G_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a[n] e^{-j2\pi nfD}$$

Caso particular: amplitudes independientes

En el caso de que los a_k además sean independientes:

$$R_a[n] = E(a_k a_{k+n}) = \begin{cases} E(a_k)E(a_{k+n}) & = m_a^2 \quad , n \neq 0 \\ E(a_k^2) & = \sigma_a^2 + m_a^2 \quad , n = 0 \end{cases}$$

Donde se define:

$$m_a \triangleq E(a_k)$$
$$\sigma_a^2 \triangleq E(a_k^2) - m_a^2$$

Tomando su DTFT y sustituyendo:

$$\boxed{G_{x_T}(f) = r|P(f)|^2 \left(\sigma_a^2 + r.m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kr) \right)}$$

Pulso rectangular de duración D, señalización polar binaria ($\pm A$), símbolos (bits) equiprobables:

$$G_x(f) =$$

Pulso rectangular de duración D, señalización polar binaria ($\pm A$), símbolos (bits) equiprobables:

$$G_x(f) = rA^2|P(f)|^2 = \frac{A^2}{r_b}\text{sinc}^2(Df)$$

Ancho de banda:

Pulso rectangular de duración D, señalización polar binaria ($\pm A$), símbolos (bits) equiprobables:

$$G_x(f) = rA^2|P(f)|^2 = \frac{A^2}{r_b}\text{sinc}^2(Df)$$

Ancho de banda:
Se define como el ancho de caída $3dB$. En este caso:

$$B_T \approx \frac{r}{2}$$

Ejercicios

- $p(t) = \Pi(t/D)$, señ. unipolar binaria $(0,\ A)$, $p_0 = p_1 = 1/2$
- $p(t) = \Pi(2t/D)$, señ. unipolar binaria $(0,\ A)$, $p_0 = p_1 = 1/2$.
- $p(t) = \Pi(t/D)$, señ. polar binaria $(\pm A)$, $p_0 = 0{,}75$, $p_1 = 0{,}25$.
- $p(t) = sinc(t/D)$, señ. polar binaria $(\pm A)$, $p_0 = p_1 = 1/2$.
- $p(t) = \Pi(t/D)$, señ. polar M-aria $(M = 8)$
  $(\pm A, \pm 3A, \pm 5A, \pm 7A)$, $p_0 = p_1 = 1/2$:

Se define la eficiencia espectral de un sistema de comunicación digital como:

$$\frac{r_b}{B_T} = \frac{\text{tasa de bits}}{\text{ancho de banda}}$$

Se define la eficiencia espectral de un sistema de comunicación digital como:

$$\frac{r_b}{B_T} = \frac{\text{tasa de bits}}{\text{ancho de banda}}$$

Para un sistema de comunicación binario (usando solo dos símbolos), la eficiencia espectral siempre es menor a 2 ($r_b \leq 2B_T$).

Señal en recepción (caso bandabase)

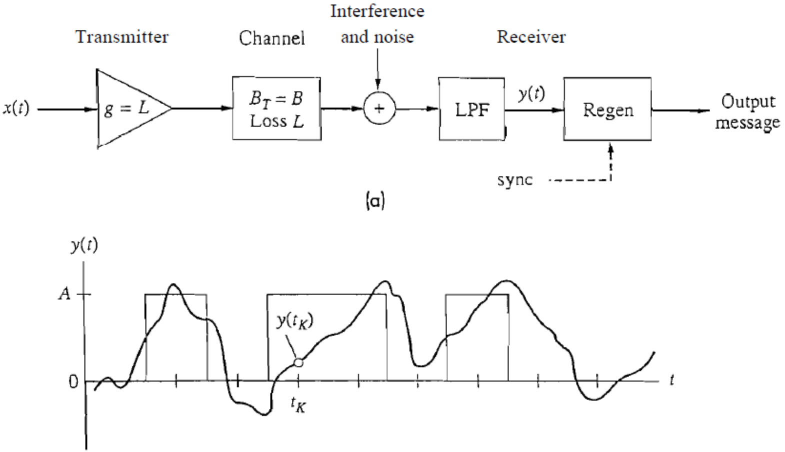


Figura 11.1-2, *Communication Systems*, 4th ed.

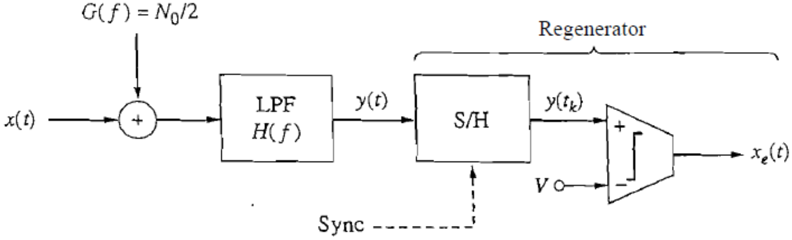


Figura 11.2-1, *Communication Systems*, 4th ed.

Limitaciones a la recuperación

La recuperación efectiva de los símbolos requiere reconocer qué símbolo/pulso fue enviado. Pero...

La recuperación efectiva de los símbolos requiere reconocer qué símbolo/pulso fue enviado. Pero...

- **Ruido: la señal se ve afectada por otras fuentes/ruido**

Limitaciones a la recuperación

La recuperación efectiva de los símbolos requiere reconocer qué símbolo/pulso fue enviado. Pero...

- **Ruido: la señal se ve afectada por otras fuentes/ruido**
- **Distorsión: la forma de la señal puede ser modificada por el canal**

Limitaciones a la recuperación

La recuperación efectiva de los símbolos requiere reconocer qué símbolo/pulso fue enviado. Pero...

- **Ruido: la señal se ve afectada por otras fuentes/ruido**
- **Distorsión: la forma de la señal puede ser modificada por el canal**
- **ISI: el pulso recibido en tiempo k se ve afectado por los pulsos enviados en tiempos distintos a k**

En detección tenemos:

$$y(t) = g \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) + \hat{\eta}(t)$$

Muestreando (en $t = mD + t_d$):

$$y_m = g a_m + \sum_{k \neq m} a_k p_R(mD - kD) + \hat{\eta}_m$$

En detección tenemos:

$$y(t) = g \sum_k a_k p_R(t - kD - t_d) + \hat{\eta}(t)$$

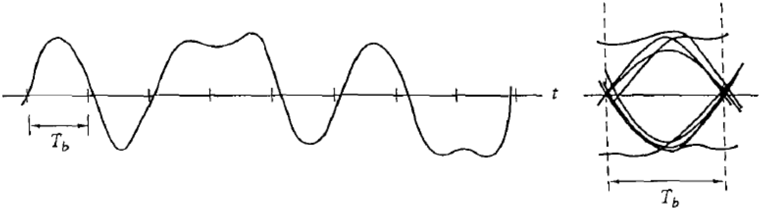
Muestreando (en $t = mD + t_d$):

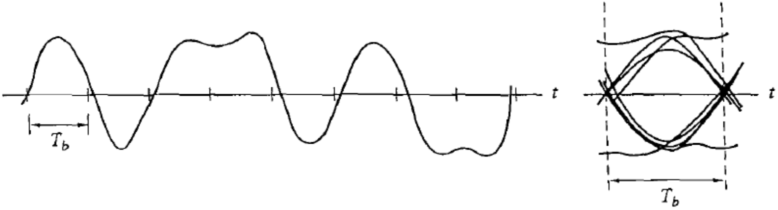
$$y_m = g a_m + \sum_{k \neq m} a_k p_R(mD - kD) + \hat{\eta}_m$$

Condición de Nyquist: eliminar ISI requiere:

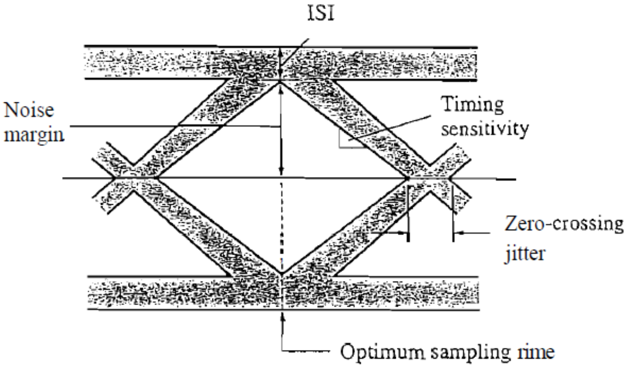
$$\left[\begin{array}{l} p_R(0) = 1 \\ p_R(nD) = 0 \quad \forall n \neq 0 \in \mathcal{Z} \end{array} \right.$$

(p. ej. $p_R(t) = \mathrm{sinc}(t/D)$).


t
T_b
t
T_b



t
T_b
t
T_b



ISI
Noise margin
Timing sensitivity
Zero-crossing jitter
Optimum sampling rime

Clasificación de muestras: ¿0 o 1?

Bajo las condiciones anteriores, el detector recupera muestras

$$y_m = g.a_m + \hat{n}_m$$

Para cada tiempo m hay que tomar una decisión sobre si la muestra correspondiente vino de un bit 0 o un bit 1.

Clasificación de muestras: ¿0 o 1?

Bajo las condiciones anteriores, el detector recupera muestras

$$y_m = g.a_m + \hat{n}_m$$

Para cada tiempo m hay que tomar una decisión sobre si la muestra correspondiente vino de un bit 0 o un bit 1.

Regla de decisión binaria

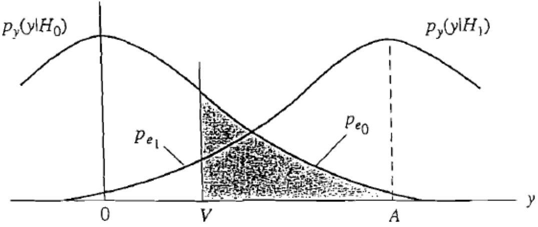
Típicamente la regla de decisión toma la forma de umbralización:

$$\begin{aligned} b_m = 1 & \quad \text{si } \hat{a}_m > V \\ b_m = 0 & \quad \text{si } \hat{a}_m < V \end{aligned}$$

Asumiendo recepción sin ISI y distribución gausiana del ruido, las muestras satisfacen:

$$p(\hat{a}_k|\text{bit } 0) = \mathcal{N}(A_0, \sigma_N^2)$$
$$p(\hat{a}_k|\text{bit } 1) = \mathcal{N}(A_1, \sigma_N^2)$$

Donde σ_N es la desviación estándar de las muestras de ruido.



Distribución de muestras para señalización unipolar.

Probabilidad de error en PAM digital (1/2)

bit error rate (BER)

Definimos como BER a la probabilidad de cometer de detección en cada bit transmitido.

Probabilidad de error en PAM digital (1/2)

bit error rate (BER)

Definimos como BER a la probabilidad de cometer de detección en cada bit transmitido.

Utilizando resultados anteriores:

$$BER = p(\hat{a}_k > V| \text{ bit } 0)p(\text{bit } 0) + p(\hat{a}_k < V| \text{ bit } 1)p(\text{bit } 1)$$

Probabilidad de error en PAM digital (1/2)

bit error rate (BER)

Definimos como BER a la probabilidad de cometer de detección en cada bit transmitido.

Utilizando resultados anteriores:

$$BER = p(\hat{a}_k > V|\text{ bit } 0)p(\text{bit } 0) + p(\hat{a}_k < V|\text{ bit } 1)p(\text{bit } 1)$$

Definiendo $p(\text{bit } 0) = p_0$:

$$BER = p_0 Q\left(\frac{V - A_0}{\sigma_N}\right) + p_1 Q\left(\frac{A_1 - V}{\sigma_N}\right)$$

Donde se usó la definición de la función de cola gaussiana:

$$Q(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

De lo anterior tenemos para un sistema con AWGN:

$$BER = p_0 Q\left(\frac{V - A_0}{\sigma_N}\right) + p_1 Q\left(\frac{A_1 - V}{\sigma_N}\right)$$

El umbral óptimo V_{opt} se puede obtener minimizando la expresión anterior como función de V.

Para el caso de bits equiprobables ($p_0 = p_1 = 1/2$):

Probabilidad de error en PAM digital (2/2)

De lo anterior tenemos para un sistema con AWGN:

$$BER = p_0 Q\left(\frac{V - A_0}{\sigma_N}\right) + p_1 Q\left(\frac{A_1 - V}{\sigma_N}\right)$$

El umbral óptimo V_{opt} se puede obtener minimizando la expresión anterior como función de V.

Para el caso de bits equiprobables ($p_0 = p_1 = 1/2$):

$$V_{opt} = \frac{A_0 + A_1}{2}$$

$$BER_{opt} = Q\left(\frac{A_1 - A_0}{2\sigma_N}\right)$$

Ejercicio

¡Verificar!

Señalización M-aria

Un sistema digital es M-ario si los símbolos (a_k) a comunicar surgen de un alfabeto de M elementos.

Señalización M-aria

Un sistema digital es M-ario si los símbolos (a_k) a comunicar surgen de un alfabeto de M elementos.

Notar que en comunicación M-aria con $M \neq 2$:

- La tasa de transmisión de símbolos (r) no coincide con la tasa de transmisión de bits (r_b).
- Existen tasas de error de símbolo (SER) y tasas de error de bits (BER) que no son iguales.

En un sistema M-ario es posible enviar $k = \log_2(M)$ bits de información por símbolo, por tanto:

$$r_b = r\log_2(M)$$

En un sistema M-ario es posible enviar $k = \log_2(M)$ bits de información por símbolo, por tanto:

$$r_b = r\log_2(M)$$

Ejemplo: en un sistema con $M = 8$ que tiene una tasa de símbolos $r = 100 simb/seg$:

$$r_b = 3 \times 100 = 300 bps$$

¿Qué pasa con las tasas de error?

¿Qué pasa con las tasas de error?

$$\text{BER} \leq \text{SER}$$

¿Qué pasa con las tasas de error?

$$\text{BER} \leq \text{SER}$$

En el mejor caso:

$$\text{BER} = \frac{\text{SER}}{\log_2(M)}$$

Ejercicio

BER en comunicación M-aria

Definición

Se define eficiencia espectral como r_b/B_T, y se mide en bps/Hz

Para PAM bandabase:

$$r_b/B_T \approx 2\log_2(M)$$

Notar que siempre es cierto que:

$$r_b/B_T \leq 2\log_2(M)$$