Modulación Exponencial de Onda Continua

Fundamentos de Sistemas de Comunicación

Facultad de Ingeniería y Tecnología

15 de abril de 2021

Universidad Católica del Uruguay

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Representación fasorial de señal pasabanda

$$x_{bp}(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

En modulación lineal, el mensaje se transmite en $A(t)$ (amplitud instantánea).

Representación fasorial de señal pasabanda

$$x_{bp}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

En modulación lineal, el mensaje se transmite en $A(t)$ (amplitud instantánea).

En modulación exponencial, el mensaje se transmite en $\phi(t)$ (fase instantánea).

Modulación lineal:

$$x_{bp}(t) = \mathcal{R}e\left(e^{j(2\pi f_c t + \phi)} A(t)\right)$$

Con:

- $A(t) = A_c x(t)$ (DSB)
- $A(t) = A_c(1 + \mu x(t))$ (AM)
- $A(t) = A_c(x(t) + j\hat{x}(t))$ (SSB)

Modulación exponencial:

$$x_{bp}(t) = A\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = \mathcal{R}e\left(Ae^{j2\pi f_c t} e^{j\phi(t)}\right)$$

El mensaje se incluye directamente en la fase de la señal:

$$\phi(t) = \phi_\Delta x(t) + \phi_0$$

ϕ_Δ se conoce como **el índice de modulación de fase** o **desviación de fase**. Es necesario

$$0 < \phi_\Delta \leq \pi$$

para evitar ambigüedades.

La señal transmitida es entonces:

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_\Delta x(t) + \phi_0)$$

Dada la señal de la forma:

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = A \cos(\theta(t))$$

Se define su frecuencia instantánea como:

$$f(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{2\pi} = f_c + \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi}$$

Frecuencia instantánea de una señal

Dada la señal de la forma:

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = A \cos(\theta(t))$$

Se define su frecuencia instantánea como:

$$f(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{2\pi} = f_c + \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi}$$

Frecuencia instantánea NO es...

...frecuencia en el sentido de Fourier/espectral.

Se puede pensar como un caso especial de PM, donde en lugar de modular el mensaje $x(t)$ se modula su integral:

$$\phi(t) = \phi_{\Delta} \int_0^t x(u) du + \phi_0$$

Donde definimos $\phi_{\Delta} = 2\pi f_{\Delta}$ y asumimos típicamente $\phi_0 = 0$. f_{Δ} se denomina **desviación en frecuencia**.

Modulación en frecuencia (FM)

Se puede pensar como un caso especial de PM, donde en lugar de modular el mensaje $x(t)$ se modula su integral:

$$\phi(t) = \phi_\Delta \int_0^t x(u)du + \phi_0$$

Donde definimos $\phi_\Delta = 2\pi f_\Delta$ y asumimos típicamente $\phi_0 = 0$. f_Δ se denomina **desviación en frecuencia**.

Notar que en FM...

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

El mensaje queda modulado en la frecuencia instantánea. Típicamente $f_c >> f_\Delta$.

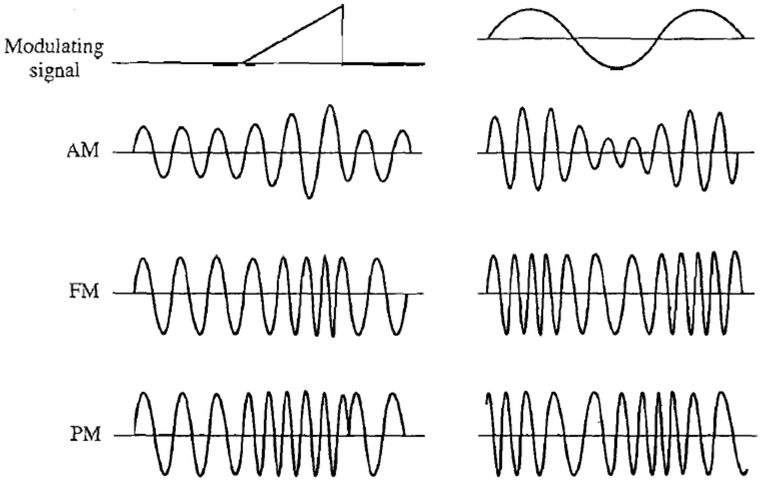


Figura 1: Forma de onda modulada para AM, PM, FM. Figura 5.1-2, Communication Systems, 4th ed.

PM vs. FM

	Instantaneous phase $\phi(t)$	Instantaneous frequency $f(t)$
PM	$\phi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \dot{x}(t)$
FM	$2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda$	$f_c + f_\Delta x(t)$

Figura 2: Tabla 5.1-1, *Communication Systems*, 4th Ed.

$$S_T = ?$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{2}$$

¿Cómo es el espectro de una señal PM/FM?

¿Cómo es el espectro de una señal PM/FM?

$$X_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$
$$= A_c \cos(2\pi f_c t)\cos(\phi(t)) - A_c \sin(2\pi f_c t)\sin(\phi(t))$$

Aproximación de banda angosta (NBPM/NBFM): $|\phi(t)| << 1$:

Caso especial del espectro: banda angosta

$$X_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$
$$= A_c \cos(2\pi f_c t)\cos(\phi(t)) - A_c \sin(2\pi f_c t)\sin(\phi(t))$$

Aproximación de banda angosta (NBPM/NBFM): $|\phi(t)| << 1$:

$$x_T(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow B_T \approx 2W$$

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (1/4)

Sea

$$\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t)$$

Notar que esto corresponde tanto a PM como FM cuando

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \phi_0)$$

Con $\beta = \phi_\Delta A_m$ en el caso de PM ($\phi_0 = 0$)
y $\beta = A_m f_\Delta / f_m$ en el caso de FM ($\phi_0 = \pi/2$).

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (1/4)

Sea

$$\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t)$$

Notar que esto corresponde tanto a PM como FM cuando

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \phi_0)$$

Con $\beta = \phi_\Delta A_m$ en el caso de PM ($\phi_0 = 0$)
y $\beta = A_m f_\Delta / f_m$ en el caso de FM ($\phi_0 = \pi/2$).

Entonces:

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c + \beta \sin(2\pi f_m t))$$

El parámetro β cuantifica **la máxima desviación de fase** de la portadora.

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (2/4)

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$$

Se puede descomponer:

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$$

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (2/4)

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$$

Se puede descomponer:

$$x_T(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)\cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - A_c \sin(2\pi f_c t)\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$$

Calculemos la serie de Fourier de:

$$\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$$

$$\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$$

Funciones de Bessel (1/2)

Se definen las funciones de Bessel de primer tipo:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - x\sin(\tau))d\tau$$

Las funciones de Bessel aparecen en muchos contextos en física/ingeniería:

- Espectro FM/PM
- Ondas en medios con simetría de revolución: vibraciones en lonja de tambor, propagación de luz en fibra óptica.
- Difracción en aperturas circulares (ej. en calcular el límite de resolución para una cámara de fotos con apertura redonda)

Propiedad:

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$$

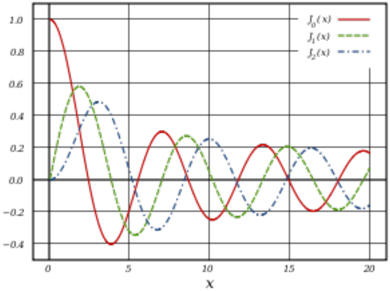


Figura 3: Gráfica de funciones de Bessel del primer tipo. Wikipedia, usuario Inductiveload.

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (3/4)

Utilizando la descomposición en serie de Fourier:

$$\cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) = J_0(\beta) + \sum_{n=par}^{\infty} 2J_n(\beta)\cos(2\pi n f_m t)$$

$$\sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) = \sum_{n=impar}^{\infty} 2J_n(\beta)\sin(2\pi n f_m t)$$

Agrupando términos obtenemos:

$$x_T(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(2\pi(fc + n.f_m)t)$$

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (4/4)

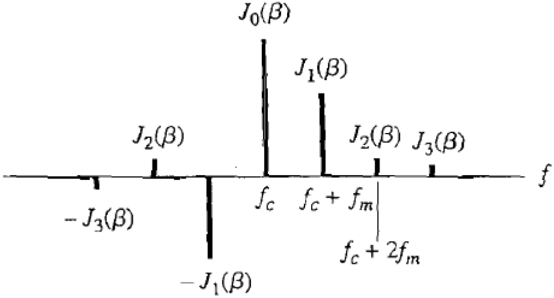


Figura 4: Espectro de tono FM/PM. Figura 5.1-5, *Communication Systems*, 4th ed.

Notar que en principio el ancho de banda es infinito!

Otro caso especial del espectro: modulación de tono (4/4)

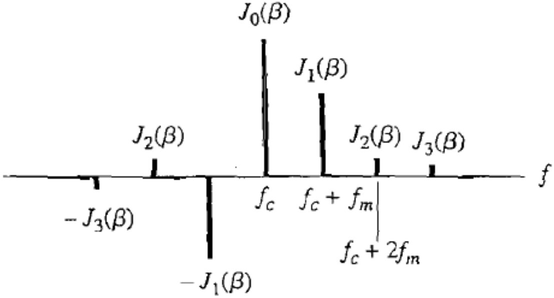


Figura 4: Espectro de tono FM/PM. Figura 5.1-5, *Communication Systems*, 4th ed.

Notar que en principio el ancho de banda es infinito!
En la práctica se desprecian los valores $|J_n(\beta)| < \epsilon$ para algún valor razonable de ϵ. Si m es el entero mayor tal que $|J_n(\beta)| \geq \epsilon$, entonces se considerarán los armónicos hasta m.

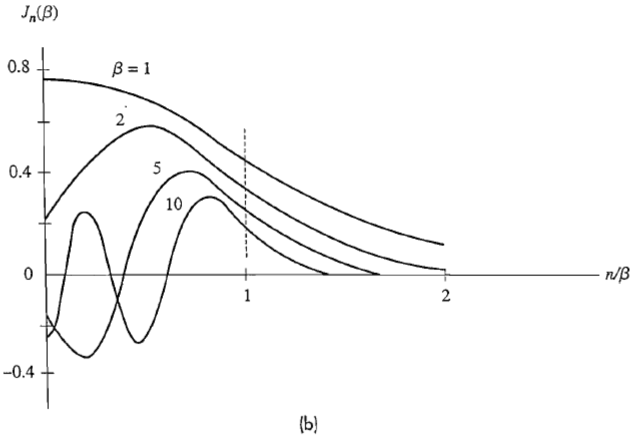


Figura 5: Figura 5.1-6, *Communication Systems*, 4th ed.

$J_n(\beta)$ cae monotónicamente con n/β para $n/\beta > 1$, por lo que en la práctica el espectro siempre se aproxima como finito.

Table 5.1–2 Selected values of $J_n(\beta)$

n	$J_n(0.1)$	$J_n(0.2)$	$J_n(0.5)$	$J_n(1.0)$	$J_n(2.0)$	$J_n(5.0)$	$J_n(10)$	n
0	1.00	0.99	0.94	0.77	0.22	−0.18	−0.25	0
1	0.05	0.10	0.24	0.44	0.58	−0.33	0.04	1
2			0.03	0.11	0.35	0.05	0.25	2
3				0.02	0.13	0.36	0.06	3
4					0.03	0.39	−0.22	4
5						0.26	−0.23	5
6						0.13	−0.01	6
7						0.05	0.22	7
8						0.02	0.32	8
9							0.29	9
10							0.21	10
11							0.12	11
12							0.06	12
13							0.03	13
14							0.01	14

Figura 6: Valores de $J_n(\beta)$ para distintos n y β. Tabla 5.1-2, *Communication Systems*, 4th ed.

Ancho de banda de modulación de tono PM/FM

De lo anterior tenemos: $B_T \approx 2M(\beta)f_m$ donde $M(\beta)$ es el mayor armónico que se considera no despreciable.

De lo anterior tenemos: $B_T \approx 2M(\beta)f_m$ donde $M(\beta)$ es el mayor armónico que se considera no despreciable.

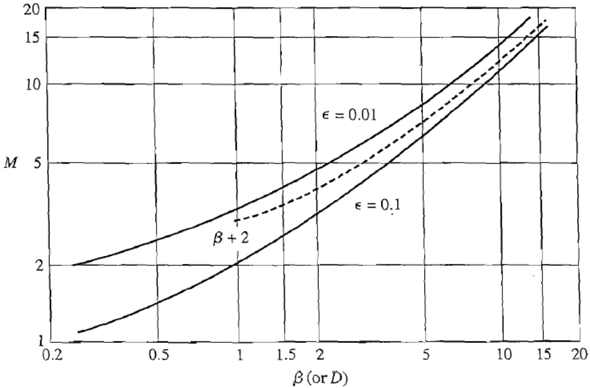


Figura 5.2-1, *Communication Systems*, 4th ed.

Notar que $M(\beta) \approx \beta + 2$ si $\beta > 2$, si $\beta > 2$

¿Cómo estimar el espectro de modulación exponencial en el caso general?

¿Cómo estimar el espectro de modulación exponencial en el caso general?

Aproximación: considerar las componentes espectrales independientemente y tomar el peor caso posible.

Del espectro de tono: $B_T \approx 2M(\beta)f_m$. Adicionalmente en FM:

$$B_T \approx 2M(\beta)f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m)$$

Peor caso: $f_m = W$, $A_m = |x(t)| = 1$. Entonces:

$$B_T \approx 2M(D)W$$

Donde $D \triangleq \frac{f_\Delta}{W}$

Estimación general de B_T para FM: aproximaciones

Si $D >> 1$ (gran ancho de banda) o $D << 1$ (banda angosta), la expresión anterior se puede aproximar como (regla de Carson):

$$B_T \approx 2(D + 1)W$$

Los sistemas comerciales tienen $2 < D < 10$, por lo que una mejor aproximación (aunque más conservadora) es:

$$B_T \approx 2(D + 2)W$$

Estimación general de B_T para FM: aproximaciones

Si $D >> 1$ (gran ancho de banda) o $D << 1$ (banda angosta), la expresión anterior se puede aproximar como (regla de Carson):

$$B_T \approx 2(D+1)W$$

Los sistemas comerciales tienen $2 < D < 10$, por lo que una mejor aproximación (aunque más conservadora) es:

$$B_T \approx 2(D+2)W$$

No lo vamos a dar en el curso, pero se puede estimar el ancho de banda de PM de la misma manera (aunque se obtienen distintas expresiones).

Se logra mediante el uso de *voltage-controlled oscillators* (VCOs):

- Dispositivo electrónico cuya salida es una onda senoidal con frecuencia de oscilación proporcional a la señal de entrada más un offset (free-running frequency).

$x(t)$

$$x_c(t) = A_c \cos\theta(t)$$

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

MICROWAVE BROADBAND VOLTAGE CONTROLLED OSCILLATOR (12-18 GHZ)

Generación directa de FM

Se logra mediante el uso de *voltage-controlled oscillators* (VCOs):

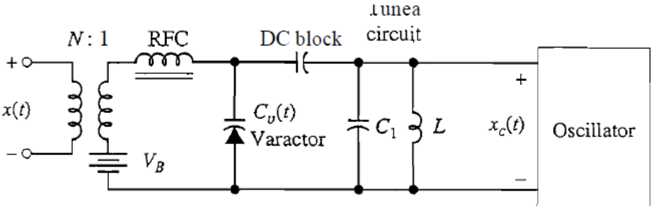
- Dispositivo electrónico cuya salida es una onda senoidal con frecuencia de oscilación proporcional a la señal de entrada más un offset (free-running frequency).

$x(t)$

$x_c(t) = A_c \cos\theta(t)$

$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

MICROWAVE BROADBAND VOLTAGE CONTROLLED OSCILLATOR (12-18 GHz)



FM indirecta: Generar FM utilizando moduladores PM

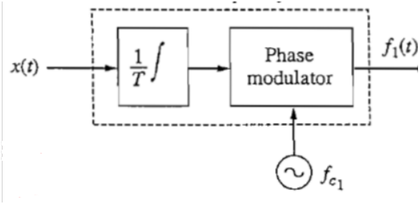


Figura 5.3-5, *Communication Systems*, 4th ed.

FM indirecta: Generar FM utilizando moduladores PM

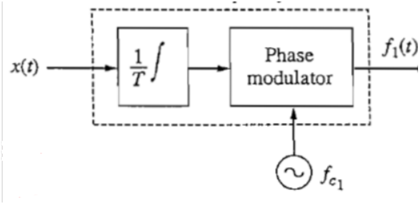


Figura 5.3-5, *Communication Systems*, 4th ed.

$$f_1(t) = f_c + \frac{\Phi_\Delta}{2\pi T} x(t)$$

FM indirecta: Generar FM utilizando moduladores PM

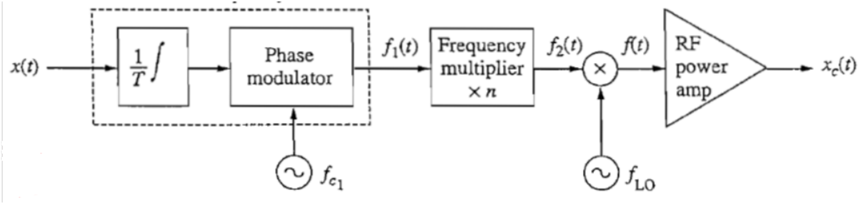


Figura 5.3-5, *Communication Systems*, 4th ed.

$$f_1(t) = f_c + \frac{\Phi_\Delta}{2\pi T} x(t)$$

Ejercicio:

Bosquejar espectros de las señales intermedias utilizando valores del ejemplo 5.3-1, y asumiendo $x(t)$ tono puro de $15kHz$ y $A = 1$.

Muy simple:

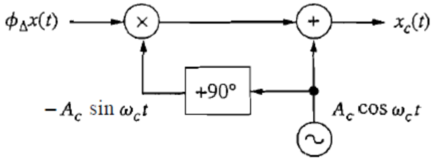


Figura 5.3-3, *Communication Systems*, 4th ed.

Generación PM por conmutación

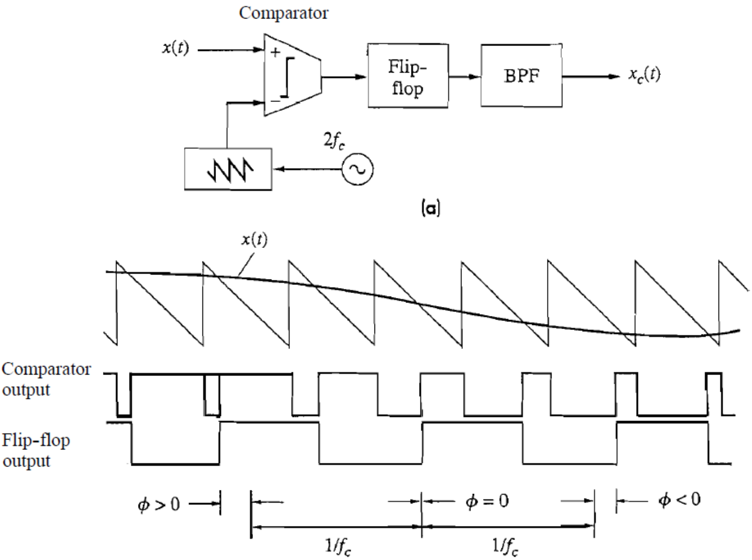


Figura 5.3-4, *Communication Systems*, 4th ed.

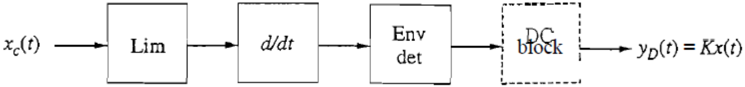


Figura 5.3-7, *Communication Systems*, 4th ed.

¿Cómo funciona?

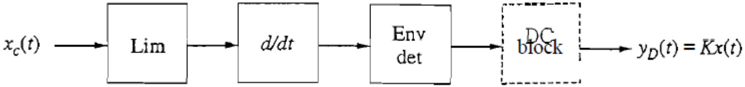


Figura 5.3-7, *Communication Systems*, 4th ed.

¿Cómo funciona?

Verficar que:

el derivador puede sustituirse por cualquier sistema lineal que no tenga una respuesta plana alrededor de f_c. Aproximar su respuesta como:

$$|H(f)| \approx |H(f_c)| + (f - f_c)\frac{d|H|}{df}$$

$$\arg(H(f)) \approx -2\pi t_0 + -2\pi t_1(f - f_c) \text{ para } f > 0$$

Detector por diferencia de fases

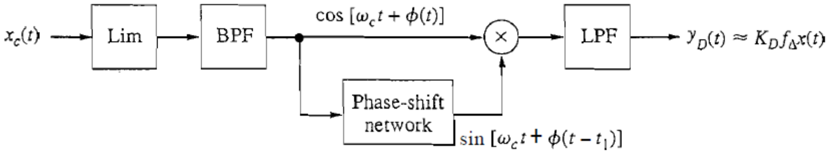


Figura 5.3-9, *Communication Systems*, 4th ed.

Detector de cruces por 0

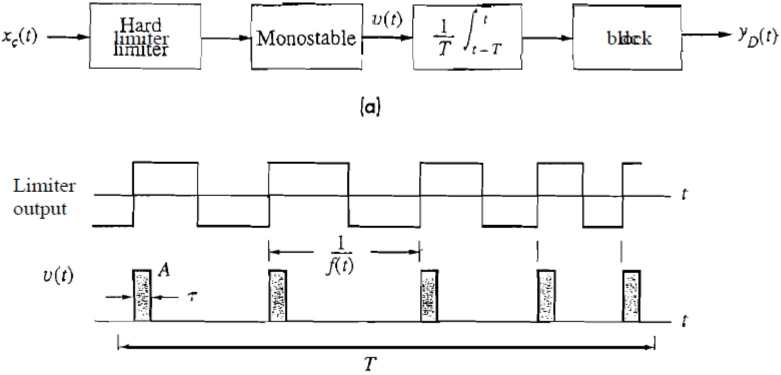


Figura 5.3-10, *Communication Systems*, 4th ed.

Requiere $W << T^{-1} << f_c$

Lo vamos a ver más adelante.

Regulación FM URSEC

URSEC = Unidad Reguladora de Servicios de Comunicaciones

Acceder a:
https://bit.ly/3tmooyt

Determinar:

- W
- f_Δ
- B_T previsto

Verificar a partir de W y $_\Delta$ que el ancho de banda previsto corresponde con la estimación hecha en clase.